MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION

INSTITUTO NACIONAL PARA EL MEJORAMIENTO
DE LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
(I. N. E. C.)

OLIMPIADA MATEMATICA ARGENTINA

BOLETIN Nº. 7 Y 8

I. N. E. C.

Director
PROF. ANGEL HERNAIZ

Secretario Técnico
ING. FRANCISCO VAL

OLIMPIADA MATEMATICA ARGENTINA
O. M. A.

CONSEJO SUPERIOR

DR. MANUEL BALANZAT
DR. ALBERTO GONZALEZ DOMÍNGUEZ
DR. LUIS SANTALÓ
PROF. RENATO VÖLKER

Director
PROF. JUAN CARLOS DALMASSO

JURADO NACIONAL

Presidente
DR. ANTONIO DIEGO

Vocales: LICENC. RAÚL CHIAPPA - LICENC. LUIZ MONTEIRO

COMISION ORGANIZADORA

Administración Nacional de Enseñanza Media y Superior
Inspectora: PROF. CRISTINA V. DE BANFI

Comisión Nacional para la EnseEanza de la Matemática
Inspector: PROF. ATILIO PIANA

Consejo Nacional de Educación Técnica
Inspector: DR. ENRIQUE IMÉRITO

Instituto de Matemática, Física y Astronomía (U. N. C.)
PROF. CLARA TOLOSA DE BARRERA

Instituto Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias
PROF. BEATRIZ S. DE PALAU - PROF. LIDIA M. DE CASTRILLO

Ministerio de la Provincia de Buenos Aires
Inspector: PROF. ALDO GUGLIELMI

Superintendencia Nacional de Enseñanza Privada
Supervisora: PROF. LILIA CAVANNE

Universidad Nacional de Buenos Aires
DR. CÉSAR TREJO

SECRETARIA DE COORDINACION
PROF. CARMEN E. DE GÓMEZ

SECRETARIA DE DOCUMENTACION
PROF. MARGARITA ORÍA DE CHOUHY AGUIRRE

SECRETARIA DE APOYO
Inspector: PROF. JOSÉ EMILIO ENCINAS

Coordinación Administrativa con INEC
SRTA. LIDIA SAMOS

TEORIA MATEMATICA DE LA ESTRATEGIA

Por Dr. **ALBERTO GONZALEZ DOMINGUEZ**
Del Consejo Superior de O. M A.

1. INTRODUCCION

1.1. — ¿Recuerda el lector al colegial amigo de Augusto C. Dupin, imbatible en el juego de pares o nones? He aquí como el famoso detective relataba el caso a su amigo Edgard Allan Poe ("La carta robada", Aguilar, Madrid, 1931, pág. 486):

"El juego, que es sencillo, se juega con bolitas. Uno de los jugadores tiene en la mano cerrada un cierto número de bolitas, y pregunta al otro si ese número es par o impar. Si acierta, gana una bolita; si se equivoca, pierde una. El muchacho a quien me refiero se quedaba con todas las bolitas del colegio. Tenía un sistema de adivinación que consistía en la simple observación de la inteligencia de sus adversarios. Supongamos, por ejemplo, que es un tonto el que, mostrando la mano cerrada, pregunta: "¿Par o impar?" Nuestro colegial responderá "impar", y pierde. Pero gana en la segunda vuelta, porque se dice: "Este tonto ha puesto pares la primera vez, y su astucia no alcanza a otra cosa que a poner nones la segunda. Diré, pues, "impar". Dice "impar", y gana. En cambio, jugando contra un adversario un poco menos simple, razona así: "Ese muchacho ha observado que la primera vez he elegido impar, y su primer impulso será, en la segunda vuelta, adoptar una simple variación de par a impar, como hizo el tonto; pero una segunda reflexión le sugerirá que es ésta una variación demasiado sencilla, y finalmente se decidirá por "par", como la primera vez. Dirá "par", por tanto. Dice "par", y gana."

Este chico había fabricado para su uso particular una teoría perfecta del juego de pares o nones. Pero es claro que toda teoría es posible —y toda teoría sobra— si se postula en su utilizador la inteligencia suprema del chico de Poe.

Cabe, pues, preguntarse si ese postulado es realmente esencial; esto es, si tiene sentido imaginarse una teoría del juego accesible a toda persona **normal** que esté dispuesta a hacer el esfuerzo de aprenderla. En términos más precisos: ¿Puede existir una teoría matemática de los juegos que prescriba reglas para jugar de la mejor manera, cualquiera sea el juego que se practique y cualquiera sea el adversario?

NO, contestará la mayoría de los lectores, arguyendo que la infinita complejidad de la pugna de espíritus que late en una partida de poker jamás podría reducirse al basto esquema de un conjunto de fórmulas.

Apresurémonos a recalcar que nos referimos exclusivamente a aquellos juegos en que interviene de manera esencial, además del azar, la habilidad de los jugadores; como el bridge, el tresillo, el truco (y la mayoría de los juegos de cartas), el ajedrez, las damas, el chaquete, etc., etc., quedando excluídos los juegos puramente de azar (ruleta, baccarat, 30 y 40, etc.), acerca de los cuales nuestra pregunta admite respuesta trivialmente negativa: no puede existir una teoría de tales juegos, y no existen, por consiguiente, métodos o sistemas para ganar (o para no perder) cuando se los practica.

1.2. — Este argumento, que se ha esgrimido bajo distintas formas para negarle a la matemática beligerancia en el campo de los fenómenos psicológicos (el espíritu es cualidad pura y la matemática triunfa sólo de la cantidad, etc., etc.), no es probatorio, aunque no es fácil —y quizás no tenga sentido— rebatirlo con otro argumento de análoga indole verbal.

Es posible, en cambio, aunque mucho más largo, demostrar su esencial falsedad exhibiendo una teoría que llena los requerimientos antes apuntados, creada por el gran matemático J. von Neumann.

Sólo un reducido número de especialistas se interesó en la memoria en que el genial húngaro dio a conocer su teoría de los juegos (Mathematische Annalen, vol. 100, 1928); tuvo, en cambio, inmediata resonancia el libro que él mismo escribió, en colaboración con Otto Morgenstern, dieciséis años más tarde (Theory of games and economic behavior; Princeton, 1944), que contiene, además, aplicaciones de importancia capital a la fundamentación matemática de la economía política. En este libro nos hemos inspirado para la redacción del presente artículo, donde intentamos dar a conocer, con un mínimo de recursos matemáticos, la idea esencial de la original creación de von Neumann.

2. DEFINICIONES Y TERMINOS TECNICOS

2.1. — Comencemos con algunas necesarias definiciones. Distinguimos entre "juego", que es el conjunto de reglas que lo definen, y "partida", que es la realización particular de un juego. Un juego consta de "movimientos"; una partida se compone de "jugadas".

Limitaremos nuestras consideraciones a aquellos juegos en que intervienen sólo dos bandos o "teams", como el truco, el ajedrez y el bridge. Supondremos, además, que todos esos juegos se juegan por dinero, y que la suma perdida por uno de los bandos es ganada por el otro (o viceversa). Admitiremos, finalmente, que el juego consta de un número finito de movimientos.

Para estos juegos "finitos, de dos personas, de suma cero", es válido el famoso teorema de von Neumann (el "minimax"), que afirma la existencia de una manera óptima de jugar, y que esta manera óptima es calculable con precisión absoluta por medio de la matemática.

La demostración del "minimax" —esencia de toda la teoría— es facilitada de manera decisiva por un ingenioso artificio, la "normalización", en virtud del cual la infinita variedad de juegos queda reducida a **uno solo**, de naturaleza extremadamente simple. La normalización se logra a su vez mediante la introducción del concepto de **estrategia**, que es básico, por consiguiente, para toda la teoría. Tenemos, pues, el esquema:

estrategia ⟶ normalización ⟶ minimax

que será el hilo de nuestra exposición.

2.2. — Imaginemos a dos peregrinos jugadores que en vez de practicar el juego de la manera usual, discurriendo su jugada en función de la jugada anterior del adversario, inician la partida provistos de antemano de un plan de acción completo que les prescriba la respuesta a toda posible jugada del rival en toda situación imaginable; es decir (usando el término ya clásico introducido por von Neumann), provistos de una **estrategia** pura. Muy poco tiempo durará en tal caso la partida. Bastará, en efecto, con que cada uno se decida por **una** estrategia (en ignorancia completa de la elección del contrario) e informe de su elección a un árbitro (no menos peregrino que los jugadores, ciertamente), pues éste, con una simple consulta a sus registros (recordemos que el número de estrategias, y el de partidas, que puede ser enorme, **es finito**), decidirá cuál ha sido el resultado de la brevísima partida. En esta extrema simplificación consiste lo que von Neumann llama **normalización** del juego.

Todo juego (finito, de dos personas, de suma cero) puede, pues, mediante la normalización, reducirse a un equivalente **juego rectangular**, cuya definición general es la siguiente:

El jugador J_1 elige un número **i** del conjunto 1, 2, 3,. . ., m; el jugador J_2, ignorante de la elección de J_1, elige un número **k** del conjunto 1, 2, 3,. . ., n; el árbitro, enterado de ambas elecciones, dispone que J_2 le pague a J_1 la cantidad (positiva, nula o negativa) a_{ik}. El conjunto de números a_{ik} ($i = 1, 2,\ldots, m$; $k = 1, 2,\ldots, n$), que forma parte naturalmente de la definición del juego, se llama **tabla de pagos.** Consignamos para ilustración y futura referencia las tablas de pagos de algunos juegos particulares.

		ESTRATEGIAS DE J_2					
	J_2 / J_1	1	2		γ		n
ESTRATEGIAS DE J_1	1	a_{11}	a_{12}		$a_{1\gamma}$		a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}		$a_{2\gamma}$		a_{2n}
	i	a_{i1}	a_{i2}		$a_{i\gamma}$		a_{in}
	m	a_{m1}			$a_{m\gamma}$		a_{mn}

Figura 1. — *Forma general de la tabla de pagos de un juego rectangular.*

En el juego cuya tabla de pagos está reproducida en la figura 2, el primer jugador (J_1) puede elegir entre las estrategias de número de orden 1, 2, 3; y el segundo (J_2), entre las estrategias de números de orden 1, 2, 3, 4. Supongamos que los contrarios deciden jugar una partida. Las acciones se desarrollarán de la siguiente manera:

	J_1 \ J_2	ESTRATEGIAS DE J_2 1	2	3	4	Mínimos de fila
Estrategias de J_1	1	$a_{11} = 2$	$a_{12} = 1$	$a_{13} = 3$	$a_{14} = 1$	1
	2	$a_{21} = 0$	$a_{22} = 1000$	$a_{23} = 1000$	$a_{24} = 1$	— 1000
	3	$a_{31} = 3$	$a_{32} = 1$	$a_{33} = 1$	$a_{34} = 1$	— 1
	MAXIMA DE COLUMNA	3	1	1000	1	

Figura 2. — *Tabla de pagos de un juego rectangular determinado.*

J_1 opta por la estrategia pura N.° 3 y J_2 por la estrategia pura N.° 4 (ignorando cada uno la elección del otro), e informan al árbitro de estas elecciones. Este dispone entonces, de acuerdo con la tabla de pagos (a_{34} = — 1), que J_1 le pague a J_2 una (1) unidad.

3. JUEGOS RECTANGULARES

3.1. — Concentremos nuestra atención exclusivamente sobre los juegos rectangulares (esto es lícito, repitámoslo, en virtud de la normalización), y para fijar ideas consideremos aquél cuya tabla de pagos está representada en la figura 2, formulándonos la pregunta esencial: ¿Cuáles son las jugadas óptimas para nuestros dos rivales? (Ya sabemos que cada uno de ellos puede hacer una sola jugada.)

Comencemos por J_1. Si éste (que controla las **filas**) se decide por la primera, ganará cuando menos una unidad; si opta por la segunda, lo peor que puede sucederle es perder 1.000; y si su elección recae sobre la tercera, perderá cuando más una unidad. Puede, pues, optar entre tres mínimos: 1, — 1.000, — 1, y como aspira a hacer máxima su ganancia (y postulamos que es persona normal), su elección recaerá en definitiva sobre la fila a la que corresponde **el máximo de estos mínimos,** que es 1, es decir, sobre la primera. Obrando así se asegura, cualquiera que sea la columna que elija J_2, una ganancia mínima de una unidad.

El razonamiento de J_2, que controla **las columnas**, es completamente análogo. Los máximos de columna son 3, 1, 1.000, 1; **el mínimo de estos máximos** de columna, o sea 1 (que es también, según acabamos de ver, el máximo de los mínimos de fila), corresponde a las columnas 2ª y 4ª. Sobre una de estas dos deberá recaer la elección de J_2 si es que quiere pagarle a J_1 la suma mínima (que es una unidad), o sea si desea reducir al mínimo (una unidad) la ganancia máxima de su adversario.

Podemos, pues, decir que el **valor** del juego (para J_1) es una unidad (= máximo de los mínimos de fila = mínimo de los máximos de columna), puesto que J_1 puede, jugando bien (eligiendo la primera fila), ganar **cuando menos** una unidad; y al mismo tiempo J_2 puede, jugando bien (eligiendo la 2ª o la 4ª columna), lograr que J_1 gane **cuando más** una unidad (de aquí en adelante nuestra unidad de pagos será el **peso**).

Dicho de otra manera: haría pésimo negocio quien, encandilado por la teóricamente posible, ganancia de 1.000 pesos (eventual coincidencia de J_1 y J_2 en la casilla (2, 3), le comprara a J_1, por la módica suma de dos pesos, su derecho a jugar con J_2, pues éste puede, como hemos visto, reducir a un peso la ganancia máxima de J_1. Por análoga razón merecería J_1 ser calificado de ignorante timorato si, espantado ante la posible pérdida de 1.000 pesos (eventual coincidencia de J_1 y J_2 en la casilla (2, 2) se apresurara a malbaratar por 90 centavos su derecho a jugar con J_2.

3.2. — Las consideraciones del parágrafo anterior siguen valiendo —**mutatis mutandis**— en el caso de un juego rectangular cualquiera. He aquí el resultado a que se llega.

Admitamos que la tabla de la figura 1 contiene un cierto número de elementos:

$$a_{i_0 j_0},\ a_{i_1 j_1}, \ldots,\ a_{i_k j_k}$$

(donde $i_0, i_1, \ldots, i_k$ no son todos necesariamente distintos, y lo mismo se diga de $j_0, j_1, j_2, \ldots, j_k$), tales que cada uno de ellos es al mismo tiempo el mínimo de su fila y el máximo de su columna (por ejemplo, a_{12} y a_{14} en el caso de la tabla de la figura 2). En tal caso, el juego cuya norma es la tabla de pagos de la figura 1 se llama "estrictamente determinado", y son válidas las tres proposiciones a continuación consignadas.

a) El conjunto de estrategias "optimales" (es decir, de jugadas óptimas) para J_1 está constituído por (la elección de las filas de número de orden) $i_0, i_1, \ldots, i_k$;

b) el conjunto de estrategias optimales para J_2 está constituído por (la elección de las columnas de número de orden) $j_0, j_1, \ldots, j_k$;

c) el número

$v = a_{i_0 j_0} = a_{i_1 j_1} =$ máximo de los mínimos de fila = mínimo de los máximos de columna,

es el valor del juego (para J_1).

Es interesante observar que tanto J_1 como J_2 pueden "cantar" su jugada sin peligro alguno, pues tal información de nada sirve al adversario.

4. JUEGOS DE INFORMACION PERFECTA

4.1. — El interés de estos resultados es acrecentado por un profundo teorema de von Neumann, según el cual son estrictamente determinados todos los juegos "de información perfecta". Así se llaman aquéllos en que ambos adversarios están informados, cada vez que les toca el turno de jugar, de todas las jugadas que se han hecho hasta ese momento en el curso de la partida.

Son juegos de información perfecta, por ejemplo, el ta-te-ti, el ajedrez, las damas, el chaquete y el juego de "nim". El truco, en cambio (y la mayoría de los juegos de cartas), no es juego de información perfecta, pues J_1 no conoce las cartas que J_2 tiene en la mano, y viceversa (observemos que el "dar" las cartas es también una jugada).

4.2. — Son ilustrativas las consecuencias que se derivan del teorema de von Neumann aplicándolo a un juego complicado de información perfecta, como el ajedrez, por ejemplo. Siendo éste un juego de información perfecta, por lo tanto estrictamente determinado, las proposiciones del parágrafo 3.2. garantizan para él la existencia de un valor y de estrategias optimales. Pero nos veríamos en grave aprieto si algún lector curioso nos preguntara **cuál** es ese valor y **cuáles** esas estrategias. Para responder a tales preguntas habría, en efecto, que "rectangulizar" (o normalizar) el ajedrez. Pero tal **desideratum**, que es teóricamente alcanzable, prácticamente no lo es, a causa de la cantidad fabulosa de filas y columnas de tal tabla de pagos, que son números **de más de 50 cifras**. Sabemos (en virtud del teorema de von Neumann) que en esta tabla **hay** (por lo menos) una casilla en cuyo interior está inscripto el valor del juego. Pero ¿quién es capaz de encontrarlas? Aun disponiendo de las más rápidas máquinas electrónicas de cálculo, su individualización demandaría una cantidad enorme de miles de billones de años.

Agreguemos que el "valor" del ajedrez puede ser sólo 1, — 1, ó 0, ya que todo número de la tabla coincide con uno de esos tres (J_1 gana o pierde un peso, según gane o pierda la partida, y no gana ni pierde si la partida es tablas).

Ello significa que si conociéramos de manera perfecta la teoría del ajedrez, el primer jugador sabría de antemano si tiene la partida ganada ($v = 1$), o perdida ($v = -1$), o si será tablas ($v = 0$). Cuando tal cosa suceda (acabamos de ver que todo temor al respecto es prematuro) el ajedrez dejará se der juego interesante. Es precisamente lo que ya ha acontecido con juegos (de información perfecta) más simples, como el ta-te-ti.

4.3. — Mencionemos finalmente que pueden construirse máquinas que jueguen de acuerdo con la teoría. Tal posibilidad es puramente teórica para juegos tan complicados como el ajedrez (por las razones hace un momento apuntadas). En cambio, hay aparatos que juegan (de manera perfecta) al ta-te-ti y al juego de "nim". Este antiquísimo juego chino se juega como sigue:

Hay fósforos (o porotos u otras unidades cualesquiera) dispuestos en varios montones. Los rivales van retirando alternativamente cantidades arbitrarias de alguno de los montones (incluso un montón entero), pero tocando cada vez un solo montón. Gana el jugador que retira el último fósforo.

La teoría de este juego se conoce de manera perfecta, y se realiza en él, por lo tanto, la posibilidad a que nos referimos hace un momento con respecto al ajedrez: el ganador se conoce antes de comenzar la partida. Enunciemos la regla, sin demostrarla.

Supongamos, por vía de ejemplo, que los montones son cuatro. Escribamos **en el sistema binario** el número de fósforos de cada montón, disponiéndolos uno debajo del otro, como si fuéramos a sumarlos:

10010	(números	de	fósforos	del	montón	1º)	
1011	(	»	»	»	»	»	2º)
11111	(	»	»	»	»	»	3º)
11	(	»	»	»	»	»	4º)

Si en cada columna hay un número par de **unos**, el primer jugador está perdido. Si tal cosa no sucede, tiene la partida ganada.

Le bastará para lograrlo con retirar un número de fósforos tal que su adversario, termine por encontrarse ante la situación recién descripta, lo cual siempre puede hacerse. El "nimatrón", cuyo funcionamiento se basa en la regla que acabamo de consignar, se exhibió en la Feria Mundial realizada en Nueva York en 1938.

5. JUEGOS NO ESTRICTAMENTE DETERMINADOS

5.1. — Si todos los juegos fueran estrictamente determinados dispondríamos, en las proposiciones del parágrafo 3.2., de una teoría completa de los juegos. Pero ello no sucede, pues la mayoría de los juegos **no** son estrictamente determinados. Consignemos algunos ejemplos que nos serán útiles dentro de muy poco.

El más simple de los juegos no estrictamente determinados es el de cara o cruz, o su equivalente el de "pares o nones".

Si J_1 acierta, gana un peso; si se equivoca, pierde un peso. Su tabla de pagos es la que puede verse en la figura 3.

		ESTRATEGIAS DE J_2		
	J_2 / J_1	1ª (cara)	2ª (cruz)	Mínimos de fila
ESTRATEGIAS DE J_1	1ª (cara)	$a_{11} = 1$	$a_{12} = 1$	-1
	2ª (cara)	$a_{21} = 1$	$a_{22} = 1$	-1
	Máximas de columna	1	1	

Figura 3. — *Tabla de pagos del juego de cara o cruz.*

Se advierte que no hay ningún número de la tabla que sea a la vez el mínimo de su fila y el máximo de su columna, no cumpliéndose, por consiguiente, la condición característica de los juegos estrictamente determinados, que es, como sabemos:

$$\text{máximo de los mínimos de fila} = \text{mínimo de los máximos de columna.} \quad (1)$$

Otro juego no estrictamente determinado es el **yan-ken-pon**, practicado en el Japón desde tiempo inmemorial. La tabla de pagos es la figura 4.

		JUGADAS DE J_2			
		1ª (yan)	2ª (ken)	3ª (pon)	Mínimos de fila
JUGADAS DE J_1	1º (yan)	$a_{11} = 0$	$a_{12} = 1$	$a_{13} - 1$	-1
	2ª (ken)	$a_{21} - 1$	$a_{22} = 0$	$a_{23} = 1$	-1
	3ª (pon)	$a_{31} = 1$	$a_{12} = -1$	$a_{33} = 0$	-1
	Máximas de columna	1	1	1	

Figura 4. — *Tabla de pagos del yan-ken-pon.*

Se advierte que cada jugador tiene tres jugadas entre que elegir: **yan** (o sea **papel**), que en la práctica del juego se da a conocer mostrando la mano abierta; **ken** (es decir, **piedra**), que se denota enseñando el puño; y **pon** (que es la traducción japonesa de **tijeras**), que se significa extendiendo los dedos índice y mayor. La regla de pagos es que **yan** vence a **ken**, **ken** vence a **pon** y **pon** vence a **yan**, y el vencido debe pagarle un peso al vencedor. Si ambos muestran **yan, ken** o **pon,** hay empate.

Es fácil recordar esta tabla de pagos por medio del esquema señalado como figura 5, donde las flechas significan "vence a".

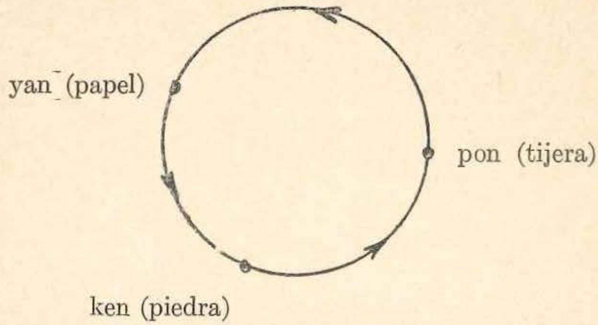

Figura 5. — *Esquema de la tabla de pagos del yan-ken-pon.*

5.2. — Propongámonos aislar la peculiar dificultad de los juegos no determinados, eligiendo como **corpus vile** el más sencillo de todos ellos, que es el de cara o cruz.

¿Hay una fila que sea "óptima" para J_1? Es fácil convencerse de que **no**. En efecto, si J_1 opta por la primera (segunda) fila, ganará o perderá (perderá o ganará) un peso, según que J_2 elija la primera o la segunda columna. La conclusión a que llegamos es que ahora lo que importa es enterarse de la jugada del rival, lo cual carece de interés en los juegos determinados. (Cfr. la observación consignada al final del parágrafo 3.2.) Para estos juegos en que la psicología de los rivales es lo realmente primordial, no parece posible formular reglas intrínsecas, análogas a las a), b), c) del parágrafo 3.2., que sean función **exclusivamente del juego** y no de los jugadores.

5.3. — No desmayemos, sin embargo, en nuestro intento de salvar la casi perfecta teoría a cuya exposición hemos dedicado las páginas que preceden, y recurramos para ello a la experiencia.

¿Cómo procedería el lector si tuviera que vérselas con un adversario de la talla del chico de Poe? Es claro que renunciaría de entrada a adivinar la elección de su adversario, concentrando modestamente sus esfuerzos en impedir que **su** propia elección fuera descubierta. Pero ¿cómo lograr tal **desideratum** frente a rival de tan fenomenales dotes de psicólogo? Después de mucho pensarlo, quizás el miedo le aconseje renunciar a ser **él mismo** quien elija, delegando la peligrosa misión en el azar, representando, por ejemplo, en un dado, algunas de cuyas caras corresponden a "cara", y las restantes a "cruz".

5.4. — Sigamos adelante con la idea, admitiendo por simetría que también el adversario decide regir sus decisiones por un dado. Ambos rivales, impulsados por recíproco miedo, tratan ahora de escudarse tras el azar, eligiendo no filas o columnas, sino **probabilidades.**

Supongamos, para concretar, que J_1 desea elegir la primera o segunda fila con probabilidades respectivas x_1, x_2; y que y_1, y_2 desempeñan análogo papel con respecto a las columnas (para J_2). Estos números, como son probabilidades, deben satisfacer a las siguientes evidentes relaciones.

$$\begin{array}{ll} y_1 = y > 0 & , \quad x_1 = x > 0, \\ y_2 = 1 - y > 0 & , \quad x_2 = 1 - x > 0, \\ y_1 + y_2 = 1 & , \quad x_1 + x_2 = 1 \end{array} \tag{2}$$

Otra manera de describir el nuevo procedimiento consiste en decir que J_1 elige no **una** de las filas, sino **las dos** filas a la vez, con probabilidades x_1, x_2; y que análoga política adopta J_2 con respecto a las columnas.

Las estrategias puras han cedido su lugar a estrategias estadísticas o aleatorias; von Neumann las ha bautizado (con todo derecho, pues es el padre) con el nombre de **estrategias mixtas.**

J_1 tiene a su disposición dos estrategias puras (tantas como filas); puede elegir, en cambio, entre infinitas estrategias mixtas (todo par de números reales x_1, x_2) que cumpla las condiciones (2), es una estrategia mixta de J_1 (claro que en este caso especial basta con elegir **un solo** número x_1, pues el otro está determinado por la relación $x_2 = 1 - x_1$). Consideraciones completamente análogas pueden hacerse con respecto a J_2.

5.5. — Para completar la formulación estadística del juego sólo nos falta hacernos claridad sobre la adecuada definición de la tabla de pagos de este juego estadístico. Ello no ofrece dificultad una vez que se ha captado la idea fundamental de von Neumann, o sea la aleatorización. Ahora lo natural es hablar no de ganancia a secas, sino de ganancia **estadistica** o ganancia media.

Sea una magnitud variable (una variable aleatoria) z que puede tomar l valores $v_1, v_2, \ldots v_l$ con las respectivas probabilidades $p_1, p_2 \ldots p_l$, (verificándose por supuesto la igualdad $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l = 1$).

Supongamos que hemos sometido z a n pruebas (independientes), y que los valores obtenidos sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$; la expresión:

$$v_n = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}$$

es un valor medio de la magnitud z en esas n pruebas; si el segundo miembro de esta igualdad tiende a un límite v cuando el número n de pruebas se hace indefinidamente grande, es natural llamar **valor medio** de z a este número v. La determinación efectiva de este límite v (en caso de que exista) exige infinitas pruebas, y por tanto, tiempo infinito. Afortunadamente, la llamada **"ley fuerte de los grandes números"** nos proporciona un medio simplicisimo de calcular v. Afirma este fundamental teorema del cálculo de probabilidades que hay la certeza práctica (es decir, probabilidad 1) de que el límite v exista; y que su valor coincide con la llamada **esperanza matemática** de la variable aleatoria z, que es por definición la suma de los l valores posibles de la variable z multiplicadas por sus respectivas probabilidades:

$$\lim_{n \to \infty} v_n = \lim_{n \to \infty} \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} = v = p_1 v_1 + p_2 v_2 + \ldots + p_n l \tag{3}$$

En el juego de cara o cruz "estadístico", la ganancia es una variable aleatoria de dos valores:

$$v_1 = 1 \tag{4}$$

$$v_2 = -1 \tag{5}$$

y las probabilidades respectivas de estos valores son:

$$p_1 = xy + (1 - x).\ (1 - y) = 1 - (x + y - 2\,xy), \tag{6}$$

$$p_2 = y\ (1 - x) + (1 - y).\ x = x + y - 2\,xy. \tag{7}$$

Reemplazando en (3) obtenemos, pues, para la ganancia estadística de J_1, la expresión:

$$\begin{aligned} E\ (x,\ y) &= 1\ .\ p_1 + (-1)\ .\ p_2 = \\ &= 1\ .\ [1 - (x + y - 2\,xy)] + (-1)\ .\ (x + y - 2\,xy) = \\ &= 4.\left(x - \frac{1}{2}\right).\left(y - \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

5.6. — Ahora está definitivamente claro cuál es el correcto planteo "aleatorio" de nuestro problema: J_1 aspira a elegir, si ello es posible, una "estrategia mixta optimal"; esto es, un par de números no negativos, $x_1 = x$, $x_2 = 1 - x$, que hagan máxima su ganancia estadística $E\ (x,\ y)$; y análogo propósito persigue J_2 con la elección de su estrategia mixta optimal $y_1 = y$; $y_2 = 1 - y$.

La "aleatorización" del juego de cara o cruz por parte de ambos adversarios los ha llevado, en definitiva, a practicar el juego en la siguiente forma:

J_1 elige un número x $(0 \leqq x \leqq 1)$ y J_2 un número y $(0 \leqq y \leqq 1)$, ignorantes cada uno de la elección del otro; el árbitro, en conocimiento de ambas elecciones, dispone que J_2 le pague a J_1 la suma

$$E\ (x,\ y) = 4.\left(x - \frac{1}{2}\right).\left(y - \frac{1}{2}\right).$$

La novedad consiste en que tanto J_1 como J_2 pueden optar entre **infinitas** estrategias. Aparte de esto, su estructura es completamente análoga a la de los hasta ahora considerados, y todos los razonamientos que nos condujeron a la determinación de las filas y columnas óptimas se aplican sin cambio a este juego de infinitas estrategias posibles. Si existe, por lo tanto, un punto de números x_0, y_0 $(0 \leq x_0 \leq 1;$ $0 \leq y_0 \leq 1)$ sea simultáneamente el máximo de los mínimos y el mínimo de los máximos, el número $E\ (x_0,\ y_0)$ será el valor del juego, y los números x_0, y_0 serán las estrategias optimales para J_1 y para J_2, respectivamente.

		ESTRATEGIAS DE J_2	
		1	2
ESTRATEGIAS DE J_1	1	a_{11}	a_{12}
	2	a_{21}	a_{22}

Figura 6. — *Tabla de pagos de dos filas y dos columnas, de un juego determinado.*

		ESTRATEGIAS DE J_2	
		J_1 = cara	J_2 = cruz
ESTRATEGIAS DE J_1	J_1 = cara	10	—1
	J_2 = cruz	— 1	1

Figura 7. — *Tabla de pagos del juego de cara o cruz con ventaja.*

5.7. — Es fácil comprobar que nuestro juego infinito es estrictamente determinado. Comencemos, para verificarlo, por determinar los mínimos de "fila". Para cada **x** fijo, el mínimo de la función de E (x, y) el variar **y** entre 0 y 1, tiene, según se comprueba sin dificultad, el siguiente valor:

$$\underset{0 \leq y \leq 1}{\text{mínimo}}\ E\ (x,\ y) = -2 \left| x - \frac{1}{2} \right|; \tag{9}$$

pero el segundo miembro es nulo para $x = x_0 = \frac{1}{2}$, y es negativo para los demás valores de **x**; luego el **máximo de los mínimos** es **0**, y corresponde al número

$$x = \frac{1}{2}.$$

Idéntico razonamiento nos permite concluir que el mínimo de los máximos es también **cero**, y corresponde al número

$$y = y_0 = \frac{1}{2}.$$

Llegamos, pues, a la conclusión de que el valor del juego es:

$$v = \underset{0 \leq x \leq 1}{\text{máx.}}\ \underset{0 \leq y \leq 1}{\text{mín.}}\ E\ (x,\ y) = E\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = 0, \tag{10}$$

y de que las estrategias optimales para J_1, J_2 son, respectivamente:

$$x_1 = x_2 = x = \frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$y_1 = y_2 = y = \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Las fórmulas (10), (11) y (12) son decisivas, pues, en virtud de la equivalencia del juego infinito con el juego de cara o cruz en su versión aleatoria, también dan ellas solución completa a los problemas que este último plantea. Llegamos así, si recordamos las definiciones y notaciones introducidas en el parágrafo 5.4 (especialmente las fórmulas (2)), a las siguientes conclusiones:

a_1) La estrategia mixta optimal para J_1 es el par

$$x_1 = x = \frac{1}{2}; \quad x_2 = 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \tag{11'}$$

b_1) La estrategia mixta optimal para J_2 es el par

$$y_1 = y = \frac{1}{2}; \quad y_2 = 1 - y_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \tag{12'}$$

c_1) El valor del juego es

$$v = E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{13}$$

5.8. — Recapitulemos. Hemos logrado, merced a la adecuada idealización de fenómenos de una cierta categoría (que tienen que ver con la práctica de juego de cara o cruz), asignar un valor y determinar estrategias optimales para un juego no estrictamente determinado; cosa que parecería imposible a la luz de las consideraciones del parágrafo 5.2. Pero no nos apresuremos a cantar victoria. No basta con que nuestras definiciones y teoremas estén exentos de contradicción: es menester comprobar que ellos "sirven". Una teoría que conduce a predicciones o resultados en desacuerdo con los hechos debe modificarse o desecharse.

Afortunadamente, en nuestro caso la teoría sale bien librada de esta crucial experiencia. Recuerde el lector el objetivo que él mismo se propuso con la adopción de las estrategias mixtas (2º párrafo del parágrafo 5.3.): impedir que su propio plan fuera descubierto por el inteligentísimo adversario. ¿Qué aconseja la teoría para lograr tal propósito? La estrategia mixta

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2};$$

o sea **carencia de plan.**

Debe convenirse en que es éste el único plan absolutamente seguro frente a un adversario que con certeza va a descubrirlo.

6. EL TEORAMA FUNDAMENTAL O MINIMAX

6.1. — Muy poco trabajo va a costarnos extender al caso general las definiciones y razonamientos que tanto éxito han tenido en el caso simplicisimo del juego de cara o cruz.

Sea, pues, un juego no estrictamente determinado, cuya tabla de pagos representamos en la figura 1.

Llamaremos estrategia mixta de J_1 y designaremos por la letra $\mathbf{x}$ a todo conjunto de $\mathbf{m}$ números $x_1, x_2, \ldots, x_m$ que cumplan las condiciones

$$x_1 \leq 0, \; x_2 \leq 0, \ldots, \; x_m \leq 0, \tag{14}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1. \tag{15}$$

Análogamente, llamaremos estrategia mixta de J_2, y la designaremos con la letra **y** a todo conjunto de **n** números $y_1, y_2, \ldots, y_n$, que cumplen las condiciones

$$y_1 \leq 0,\ y_2 \leq 0, \ldots, y_n \leq 0, \tag{16}$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1. \tag{17}$$

Diremos que el número

$$E(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j \tag{18}$$

es la ganancia media de J_1.

Estas definiciones son extensión inmediata y trivial de las que formulamos en el parágrafo 5.4.

El llamar ganancia media al número definido por el segundo miembro de (18) se justifica por las consideraciones siguientes:

Supongamos que J_1 decide elegir las filas con probabilidades $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (o sea adopta la estrategia mixta **x**), y J_2 decide elegir las columnas con probabilidades $y_1, y_2, \ldots, y_p$) adopta la estrategia mixta **y**). La ganancia (de J_1) se transforma así en una variable aleatoria que puede tomar los mn valores a_{ij} con las respectivas probabilidades $x_i y_j$. La ganancia media de J_1 tendrá, de acuerdo con la fórmula (3), el valor:

$$E(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j.$$

6.2. — Definiremos ahora un juego infinito, que llamaremos I, perfectamente análogo al descripto en el parágrafo 5.6. J_1 elige una **x** (o sea, un conjunto cualquiera de **m** números que cumplen las condiciones (14), (15); J_2, ignorante de la elección de J_1, elige un **y** (o sea un conjunto cualquiera de **n** números que cumplan las condiciones (16), (17); el árbitro, enterado de ambas elecciones, dispone que J_2 le pague a J_1 la suma $E(x, y)$ (definida por la fórmula 18).

En el caso particular de la tabla de pagos de la figura (3) hemos logrado demostrar directamente, en el parágrafo (5.6.), que el juego I tiene soluciones (es decir, que existen estrategias puras optimales), y éste ha sido el hecho decisivo que nos permitió definir un valor, y estrategias mixtas optimales para el juego de cara o cruz. En el caso general nada sabemos. Si el juego I tuviera siempre soluciones, podríamos definir, exactamente como lo hicimos para el juego de cara o cruz, un valor y (por lo menos un par) de estrategias mixtas optimales (una para cada jugador) para **todo** juego no estrictamente determinado. En cambio, si llegara a probarse que I no es estrictamente determinado, y carece, por lo tanto, de estrategias puras optimales, todas nuestras esperanzas habrán sido en vano y será menester admitir que eran falaces nuestras esperanzas y casual nuestro éxito en el caso del juego de cara o cruz.

Claro que el lector ya se imagina cuál va a ser el desenlace. El juego I es estrictamente determinado.

Este es el contenido esencial del célebre teorema de von Neumann, que asegura la existencia de estrategias mixtas optimales, haciendo así posible una teoría general delos juegos.

6.3. — He aquí el enunciado completo del gran teorema de von Neumann:

Sea K un juego cualquiera no determinado, y admitamos que su tabla de pagos es la representada en la figura (1). Existe entonces por lo menos una estrategia mixta optimal y_0 (para J_1) y una estrategia mixta optimal x_0 (para J_2), para las cuales se verifica la relación:

$$E\ (x,\ y_0) \leq E\ (x_0,\ y_0) \leq E\ (x_0,\ y). \tag{19}$$

El número

$$v = E\ (x_0,\ y_0)$$

es el valor de K (para J_1).

No estará de más insistir sobre el significado de estas proposiciones, dada su importancia capital para toda la teoría.

Por medio de la elección de x_0 (recordemos que x_0 simboliza un conjunto de **m** números que satisfacen a las relaciones (14) y (15), J_1 se asegura (en virtud de la validez de la segunda desigualdad (19), una ganancia estadística **cuando menos** igual v, cualquiera que sea la estrategia **y** que elija J_2; por su parte, J_2, por medio de la elección de y_0, logra (en virtud de la validez de la primera desigualdad (19), que la ganancia estadística de J_1 **sea cuando más** igual a v, cualquiera que sea la estrategia x que éste elija. Está, pues, justificado el llamar **valor** de K al número $E\ (x_0,\ y_0)$.

Observe el lector la sorprendente semejanza de estas consideraciones con las que hicimos en la parte final del parágrafo 3.1. La introducción del concepto de estrategia mixta nos ha permitido, a través del gran teorema de von Neumann, salvar la entera teoría de los juegos estrictamente determinados, haciéndola aplicable a los juegos no determinados.

La índole de este artículo nos veda detenernos en la demostración y aun en la idea de la demostración de este profundo teorema. Demostrado por primera vez por von Neumann en 1928 (en la memoria citada en la Introducción), apelando a difíciles teoremas de Topología; en 1938 por J. Ville, que estableció su conexión con la teoría de los conjuntos convexos; y luego por el mismo von Neumann, por Kakutani, por Hermann Weyl y por varios otros matemáticos, el teorema, aun en sus versiones más "elementales", sigue siendo un hueso duro de roer, y no es por cierto nada evidente.

6.4. — Asegurada por el teorema fundamental de von Neumann la existencia de (por lo menos) un par de estrategias mixtas optimales, se plantea el problema de la **determinación efectiva** de esas estrategias. Para juegos cuyas tablas de pago contienen un número grande de filas y columnas ello requiere cálculos extremadamente laboriosos.

Para el caso máximamente simple de juegos cuyas tablas de pagos tengan dos filas y dos columnas, el problema no ofrece dificultad.

Las fórmulas siguientes (cuya demostración encontrará el lector en la página 172 de la obra de von Neumann-Morgenstern, segunda edición), permiten en todos los casos determinar las estrategias (mixtas) optimales $(x_1,\ x_2)$ (para J_1), y $(y_1,\ y_2)$ para J_2), y también el valor v del juego.

		ESTRATEGIAS DE J_2 (Holmes)	
		C(anterbury)	D(over)
ESTRATEGIAS DE J_1	C(anterbury)	$a_{11} = 100$	$a_{12} = -50$
	D(over)	$a_{21} = 0$	$a_{22} = 100$

Figura 8. — *Tabla de pagos del duelo Sherlock Holmes-Moriarty*

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \tag{21}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \tag{22}$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \tag{23}$$

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \tag{24}$$

El valor del juego es:

$$v = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{25}$$

6.5. — Apliquemos, por vía de ejemplo, las fórmulas que preceden a algunos juegos particulares. Consideremos en primer lugar, el juego de cara o cruz, cuyas estrategias optimales y cuyo valor ya hemos determinado directamente en el parágrafo (5.6.). Teniendo en cuenta los valores de a_{ij} en el presente caso (cfr. fig. 3,) obtenemos de las fórmulas anteriores:

$$x_1 = \frac{1 - (-1)}{1 + - (-1) - (-1)} = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{1 - (-1)}{1 + 1 - (-1) - (-1)} = \frac{1}{2},$$

$$y_1 = \frac{1 - (-1)}{1 + 1 - (-1) - (-1)} = \frac{1}{2},$$

$$y_2 = \frac{1 - (-1)}{1 + 1 - (-1) - (-1)} = \frac{1}{2},$$

$$v = \frac{1 \,.\, 1 - (-1) \,.\, (-1)}{1 + 1 - (-1) - (-1)} = 0.$$

Consideremos en segundo lugar el juego cuya tabla de pagos es la siguiente:
Es ésta la tabla del juego de cara o cruz **con ventaja**. Cuando J_1 y J_2 optan ambos por cara ,J_2 le paga a J_1 **no** 1 peso, sino 10. Los demás números de la tabla permanecen inalterados. Las fórmulas 21-25 conducen a los siguientes resultados:

$$x_1 = \frac{1-(-1)}{10+1-(-1)-(-1)} = \frac{2}{13},$$

$$x_2 = 1 - \frac{2}{13} = \frac{11}{13},$$

$$y_1 = \frac{10-(-1)}{10+1-(-1)-(-1)} = \frac{11}{13},$$

$$y_2 = 1 - \frac{11}{13} = \frac{2}{13},$$

$$v = \frac{(10)\,.\,(1)-(-1).(-1)}{10+1-(-1)-(-1)} = \frac{9}{13}.$$

Estos interesantes resultados merecen comentario. Es evidente que en este juego tiene ventaja el primer jugador. Pero ¿cuánta es la ventaja y cómo jugar para sacar de ella el máximo provecho?. A la primera pregunta responde la teoría informando del **valor** del juego. En un período largo, la ganancia media de J_1 es exactamente 9/13. Mucho más interesante es la respuesta a la segunda cuestión. Un jugador inexperto (en el puesto de J_1) estaría tentado de elegir "cara" muy a menudo, ya que en el caso de acertar recibirá de J_2 la desproporcionada suma de 10 pesos (los demás valores de la tabla son los mismos que en el juego usual de cara o cruz). Sin embargo, la teoría aconseja (y el consejo es sano) hacer exactamente lo contrario. De cada 13 veces, sólo 2 debe elegir cara J_1. Dejamos al lector el problema de justificar la interesante respuesta.

Observemos, finalmente, que J_1 puede ser substituído cómodamente por una máquina; a la larga, J_2 saldrá infaliblemente desplumado. Tal cosa sucede, evidentemente, en todo juego de **valor positivo** para el primer jugador.

7. EL DUELOS HERLOCK HOLMES-MORIARTY

7.1. — Muchas situaciones de la vida real, con su característica pugna de intereses, pueden, a pesar de la tremenda seriedad de alguna de ellas, asimilarse a un juego de dos personas, quedando así a tiro de la teoría de von Neumann. Es instructivo comparar los resultados a que se llega en algún caso típico, siguiendo por una parte las prescripciones de esta "teoría matemática de la conducta" y acudiendo por otra a la tradicional receta de "ponerse en el lugar del contrario" y pensar **una vez más** de lo que éste haría (no otro era el infalible método del chico de Poe para quedarse con todas las bolitas).

Elegiremos para ello un episodio del famoso duelo de Sherlock Holmes con el capitán Moriarty, gran matemático y criminal inteligentísimo, que culminó con la muerte de ambos rivales en las cataratas de Reichenbach. (A. Conan Doyle, Memorias de Sherlock Holmes. **El problema final.**)

Sherlock Holmes, asustado por primera vez en su vida ante la científica persecución del matemático, opta por desaparecer de Londres y pasarse una temporada en el "continente"; y desde el tren que camino a Dover se aleja de Victoria Station, divisa aliviado a Moriarty tratando furiosamente de abrirse paso en el andén. Por esta vez se ha salvado; pero sabe que Moriarty procederá en tal circunstancia como el mismo procedería: contratando un tren expreso que lo ponga en Dover antes de su partida para el continente.

Y ahora, el problema. Holmes tiene dos alternativas: descender en Canterbury —única estación intermedia— o seguir hasta Dover; e idéntico problema se plantea a su perseguidor. Si los rivales coinciden en una misma plataforma (Dover o Canterbury), el detective es hombre muerto; si éste logra llegar a Dover, eludiendo a Moriarty, puede darse provisionalmente por salvado.

La solución de Conan Doyle es conocida. "Usted ve, Watson, que la inteligencia de nuestro amigo tiene límites. Hubiera sido un **coup-de-maitre** de su parte el que hubiera deducido lo que yo deduciría, y hubiera obrado en consecuencia", le dice triunfalmente Holmes a su amigo mientras contempla, escondido en una pila de baúles, el expreso que se aleja raudo de la plataforma de Canterbury. Sherlock Holmes ha triunfado.

Es, según se ve, la misma solución de Poe. Solución de artista, a base del comodín de la inteligencia ilimitada.

7.2. — Pasemos a la solución de von Neumann, anteponiendo las necesarias convenciones.

El primer jugador (J_1) será Moriarty, ya que es él el que quiere "acertar" en esta peculiar partida de cara o cruz (acertando, es decir, coincidiendo con Holmes en una de las plaformas. lo liquida). Cada rival puede optar entre dos estrategias puras:

C. . . . . bajar en Canterbury,

D. . . . . seguir hasta Dover.

Nos falta lo esencial: **la tabla de pagos**. Tratemos, pues, de evaluar, reduciéndolos a números, los deseos y los temores de los rivales. La coincidencia de ambos en la elección es fatal para Holmes, y constituye por consiguiente el ideal de Moriarty. Inscribimos, pues, en las respectivas casillas (1, 1) y (2, 2) un número elevado, por ejemplo, 100. La casilla (1,2) es la más desgraciada para Moriarty, pues Holmes logrará salvarse en el Continente. Inscribamos en ella un número negativo, grande en valor absoluto, aunque menor que el fatídico 100; por ejemplo, $a_{12} = -50$. La casilla (2,1) corresponde una especie de empate (ninguno de los rivales logra completamente su propósito); pongamos en consecuencia $a_{21} = 0$, y nuestra tabla está completa.

La solución del problema es ahora inmediata: basta con reemplazar valores en las fórmulas 21-25. Llegamos así a los siguientes resultados:

$$x_1 = \frac{100 - 0}{100 + 100 - 0 - (-50)} = \frac{2}{5} = \text{probabilidad de bajar en Canterbury;}$$

$$x_2 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = \text{probabilidad de seguir a Dover;}$$

$$y_1 = \frac{100 - (-50)}{100 + 100 - 0 - (-50)} = \frac{3}{5} = \text{probabilidad de bajar en Canterbury;}$$

$$y_2 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = \text{probabilidad de seguir a Dober;}$$

$$v = \frac{100 \cdot 100 - 0}{100 + 100 - 0 - (-50)} = \frac{10000}{250} = 40.$$

He aquí, pues, el consejo de von Neumann a los duelistas:

$$\text{para Moriarty} \begin{cases} \text{bajar en Canterbury con probabilidad } \dfrac{2}{5} \\ \text{seguir a Dover con probabilidad } \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{para Holmes} \begin{cases} \text{bajar en Canterbury con probabilidad } \dfrac{3}{5} \\ \text{seguir a Dover con probabilidad } \dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Se comprueba que las decisiones que efectivamente adoptaron Holmes y Moriarty (es decir, Conan Doyle) son las decisiones **más probables** de acuerdo con von Neumann

$$\left(x_2 = y_1 = \frac{3}{5}\right).$$

Una última observación: nótese el alto valor del juego para Moriarty ($v = 40$): en esta memorable ocasión el gran detective salvó el pellejo por milagro.

8. ALGUNOS JUEGOS MAS COMPLICADOS

8.1. — Dejemos el campo de los simplicísimos —y por eso mismo interesantes desde el punto de vista didáctico— juegos de tabla de pagos de dos filas y dos columnas, para pasar revista a algunos juegos más complicados. Ya conocemos uno de 3 filas y 3 columnas: el **yan-ken-pon** (cfr. fig. 4 y 5). Se comprende, por razones de simetría, que las únicas estrategias optimales (para J_1 y para J_2) sean en este caso $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$, $y_1 = y_2 = y_3 = 1/3$, y que el valor del juego sea $v = 0$. Es decir, que la única manera (para ambos jugadores) de que su ganancia media no sea 0 (o sea, de no perder sistemáticamente), es optar por **yan, ken** o **pon** con probabilidad 1/3 (recurriendo, por ejemlo, a un dado en dos de cuyas caras figure inscripto **yan,** en dos **ken** y en dos **pon**).

8.2. — Otro juego no determinado, practicado desde hace siglos en la Italia del sur (y también, desde no tan remotos tiempos, en nuestros "boliches" de extramuros) es la **morra** (de tres dedos). Cada uno de los contrarios "canta" uno de los números 1, 2, 3 y simultáneamente muestra uno, dos o tres dedos. Si el número de dedos mostrados por uno de los rivales coincide con el número "cantado" por el otro, el primero le paga al segundo tantas unidades como suman los dedos mostrados por los dos. Si ambos "cantan" el número de dedos mostrado por el otro, hay empate.

He aquí la tabla de pagos de la morra (de tres dedos), donde con el símbolo (a, b) denotamos la estrategia pura consistente en mostrar **a** dedos y "cantar" **b**.

Un par de estrategias optimales (para ambos jugadores) es:

$$x_3 = \frac{5}{2},\ x_5 = \frac{4}{12},\ x_7 = \frac{3}{12},$$

$$x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = x_9 = 0;$$

$$y_3 = \frac{5}{2},\ y_5 = \frac{4}{12},\ y_7 = \frac{3}{12},$$

$$y_1 = y_2 = y_4 = y_6 = y_8 = y_9 = 0$$

			ESTRATEGIAS PURAS DE J_1								
			1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
			11	12	13	21	22	23	31	32	33
ESTRATEGIAS PURAS DE J_2	1º	(11)	0	2	2	—3	0	0	—4	0	0
	2º	(12)	—2	0	0	0	3	3	—4	0	0
	3º	(13)	—2	0	0	—3	0	0	0	4	4
	4º	(21)	3	0	3	—4	—4	0	0	—5	0
	5º	(22)	0	—3	0	4	0	4	0	—5	0
	6º	(23)	0	—4	0	0	—4	0	5	0	5
	7º	(31)	4	4	0	0	0	—6	0	0	—6
	8º	(32)	0	0	—6	4	4	0	0	6	—6
	9º	(33)	0	0	—6	6	0	—6	6	6	0

Figura 9. — *Tabla de pagos de la morra de tres dedos.*

En definitiva: J_1 puede asegurarse de que su ganancia media no será negativa,

mostrando un dedo y cantando 3 con probabilidad $\frac{5}{12}$,

mostrando dos dedos y cantando 2 con probabilidad $\frac{4}{12}$,

mostrando tres dedos y cantando 1 con probabilidad $\frac{3}{12}$.

Análoga regla vale para J_2.

9. EL PROBLEMA DEL CORONEL BLOTTO

9.1. — No estará de más consignar por lo menos un ejemplo de determinación efectiva de las estrategias mixtas optimales en un juego cuya tabla consta de más de cuatro elementos. Elegiremos para ello el problema del coronel Blotto, en una de sus versiones. El coronel Blotto debe trazar, por encargo de su general, un plan estratégico para defender tres pasos de montaña, contando para ello con tres unidades. El enemigo dispone sólo de dos. El coronel gana un punto por cada paso de que se apodera (se admite que se adueña del paso el bando que ha apostado en él más unidades) y por cada unidad enemiga que aniquila (admitiéndose que la lucha es a muerte y que el contrincante menos numeroso es el vencido); y pierde un punto en cada uno de los casos inversos.

He aquí la tabla de pagos del juego de Blotto, en la cual con el símbolo (a, b, c) designamos la estrategia pura (de Blotto), consistente en asignar **a** unidades al primer paso ,**b** al segundo y **c** al tercero (a + b + c = 3). Símbolos análogos utilizamos para designar las estrategias puras del enemigo (en este caso deberá ser naturalmente (a + b + c = 2).

Estrategias Puras de Blotto	ESTRATEGIAS PURAS DEL ENEMIGO					
	200	020	002	110	101	011
300	3	0	0	1	1	−1
030	0	3	0	1	−1	1
003	0	0	3	−1	1	1
210	1	−1	1	2	2	0
201	1	1	−1	2	2	0
120	−1	1	1	2	0	2
021	1	1	−1	2	0	2
102	−1	1	1	0	2	2
012	1	1	1	0	2	2
111	0	0	0	1	1	1

Figura 10. — *Tabla de pagos del juego del coronel Blotto.*

9.2. — No nos descorazonemos ante esta formidable tabla de pagos, que no lo es tanto como parece. Se comprueba, en efecto, que se descompone en seis tablas parciales (que se han indicado en la figura); y si se suman los elementos de las filas o de las columnas de cada una de éstas, se obtendrá un mismo número (distinto en general para cada una de las seis). Por ejemplo, las filas y columnas de la primera tabla parcial (superior de la izquierda) suman 3, las de la segunda (superior de la derecha) suman 1, etc. Ello puede expresarse diciendo que cuando Blotto asigna sus tres unidades a un solo paso y el enemigo las dos suyas también a uno solo (1º tabla parcial), la ganancia **promedio** del coronel es 1:

$$\frac{3+0+0}{3} = \frac{0+3+0}{3} = \frac{0+0+3}{3} = 1;$$

e interpretación análoga tienen las cinco tablas restantes. En virtud de ello, podemos limitarnos a considerar la tabla reducida de pagos medios de la fig. 11.

		ESTRATEGIAS PURAS DEL ENEMIGO	
		1ª : 20	2ª : 11
ESTRATEGIAS PURAS DE BLOTTO	1ª : 30	1	$\frac{1}{3}$
	2ª : 21	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
	3ª : 111	0	1

Figura 11. — *Tabla reducida de pagos medios del problema de Blotto*

Esta tabla es mucho más manejable que la anterior. Tiene, en efecto, sólo dos columnas; y en los juegos cuya tabla consta de dos filas o dos columnas, la determinación de las estrategias optimales no ofrece dificultad, y se puede incluso efectuar gráficamente.

Se obtienen así (el lector interesado encontrará una exposición detallada del método en el excelente libro de J. C. C. Mc Kinsey, "Introduction to the theory of games", New York, Mc Graw-Hill, 1952, pág. 52) las siguientes estrategias optimales para el juego, cuya tabla es la de la figura 12.

Estrategia mixta optimal para Blotto:

$$y_1 = \frac{3}{5};\ y_2 = \frac{2}{5};\ y_3 = 0.$$

Estrategia mixta optimal para el enemigo:

$$x_1 = \frac{3}{5},\ x_2 = \frac{2}{5}.$$

Valor del juego (para Blotto)

$$v = \frac{11}{15}$$

Con estos resultados nuestro problema está esencialmente resuelto. Recordemos, en efecto, que la primera estrategia (para Blotto) de la tabla 11, o sea (30), corresponde a las *tres* estrategias (300), (030), (003) de la tabla 10; de modo que la probabilidad $y_1 = {}^3/_5$ con que Blotto debe elegir la estrategia (30) asigna la probalidad ${}^1/_5$ a cada una de las estrategias (300),030), (003); y observación análoga vale para las restantes tablas parciales. Se llega así, en definitiva, a la siguiente solución completa del problema del coronel Blotto.

Estrategia mixta optimal para Blotto:

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right); \left(\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, 0\right);$$

Estrategia mixta optimal para el enemigo:

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}; \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}\right).$$

Valor del juego (para Blotto):

$$v = \frac{11}{15}$$

Medite el lector sobre las sugestivas implicaciones militares del resultado obtenido.

10. — EL POKER Y EL TRUCO

10.1. — Quizá eche el lector de menos entre nuestros ejemplos su juego favorito y se pregunte si el poker, el bridge, el truco o el tute habanero caen dentro de la trampa de von Neumann. Así es, en efecto: pues ya sabemos que el "minimax" asegura para todos los juegos de dos personas, de suma cero, la existencia de un valor y de maneras óptimas de practicarlos.

Claro que estamos seguros de que esta afirmación nuestra no dará pábulo en el honesto lector al deseo inconfesable de encontrar, en las páginas que siguen, lo lista completa de las estrategias optimales del juego del poker; aunque de todos modos tal deseo quedaría insatisfecho. Esa lista **puede** calcularse; pero a su cómputo efectivo se oponen dificultades por ahora infranqueables provocadas por el número colosal de estrategias puras, o sea, de filas y columnas de la tabla de pago del poker "rectangularizado" (cfr. cuanto dijimos en el parágrafo 4.1. a propósito del ajedrez).

Debe, no obstante, insistirse en las que las dificultades son **de índole práctica;** y para que hasta el lector más incrédulo se rinda ante la evidencia, vamos a describir un poker simplificado (inventado por el matemático H. W. Kuhn, de Princeton), para el cual tales dificultades no existen, lográndose el desiderátum determinar el valor del juego y todas las estrategias optimales.

10.2. — Se juega el poker simplificado entre dos jugadores, que continuaremos llamando J_1 y J_2. Cada uno de ellos recibe una carta, que llamaremos 1, 2, 3, de un mazo de tres; la carta 3 vale más que la 2, y ésta más que la 1. Al iniciarse la partida, ambos jugadores deben poner sobre la mesa una "luz" de una unidad. El juego tiene dos lances: "paso" y "juego"; y el anuncio "juego" debe ir acompañado por la postura de una unidad. Con dos "juego" o dos "paso" dicho sucesivamente por los rivales, termina la partida, ganando el jugador que tiene carta más alta, la cantidad puesta sobre la mesa por el contrario.

También termina la partida con un "paso" dicho a continuación de un "juego" por el otro, perdiendo el que pasa la "luz" que ha puesto. He aquí el esquema del juego y los pagos correspondientes a las distintas posibilidades.

Se comprueba que J_1 tiene 27 estrategias puras, y J_2, 64. El valor del juego (para J_1) es $v = -1/18$. Esto significa, en virtud del signo negativo, que el juego es **desfavorable** para J_1; lo que debe atribuirse a que el ser "mano" es en este caso desventajoso (la obligación de tomar la iniciativa lleva aparejado el descubrir, en cierta medida, el juego que se tiene).

PRIMERA VUELTA		SEGUNDA VUELTA	PAGO
J_1	J_2	J	
Paso	paso	....	1 el que tenga carta más alta
	quiero	Paso	1 a J_2
		quiero	2 el que tenga carta más alta
quiero	paso	....	1 a J_1
	quiero	....	2 el que tenga carta más alta

FigEra 12. — *Esquema del póker simplificado de W. Kuhn.*

El lector interesado podrá encontrar en el artículo de Kuhn ("Contributions to the theory of games", pág. 97; Princeton, 1950) la tabla de pagos del poker simplificado y la lista **completa** de las estrategias optimales. Para nuestro objeto bastará consignar la lista de estrategias de J_1, y para ello llamaremos e_1, e_2, e_3, e_4 las cuatro siguientes estrategias puras (de J_2).

e_1: Jugar con 3, y pasar en los demás casos.

e_2: Jugar con 3, y pasar con 1; jugar o pasar con 2, según que J_1 haya dicho "paso" o "juego".

e_3: Jugar con 3 y pasar con 2; jugar o pasar con 2, según que J_1 haya dicho "paso" o "juego".

e_4: Jugar con 3; jugar o pasar con 2, según que J_1 haya dicho "juego" o "paso"; jugar o pasar con 1, según que J_1 haya dicho "paso" o "juego".

He aquí las estrategias mixtas ganadoras de J_2, que son dos (cfr. las notaciones introducidas en el parágrafo 6.1., fórmulas 16 y 17).

$$E_1\colon x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{1}{3},\ x_4 = 0,$$

$$E_2\colon x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = 0, x_3 = 0,\ x_4 = \frac{1}{3}.$$

Adoptando cualquiera de estas dos estrategias, J_2 se asegura una ganancia media de 1/18, **cualquiera sea la manera como juegue** J_1. Observamos que sería fácil construir una máquina que pusiera en práctica las estrategias ganadoras E_1, E_2. Tal máquina **practicará el bluff** (pues en E_1 figura la estrategia pura e_3, y en E_2 figura la e_4: ambas prescriben decir "juego" con 1; es decir, prescriben el bluff"); y contra este "bluff" deshumanizado nada podrá la habilidad del más ducho de los jugadores de carne y hueso.

11. JUEGOS INFINITOS

11.1. — Terminaremos con una rápida mención de los juegos infinitos, así llamados porque cada jugador tiene a su disposición **infinitas** estrategias puras. Ya hemos tropezado con uno de ellos en el parágrafo 6.1. Basta substituir la particular función de pagos E (x, y) que allí figura (fórmula 18) por una función general de dos variables K (x, y), $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ para llegar a la definición general de los llamados **juegos continuos sobre el cuadrado.**

Se prefija una "función de pagos" K (x, y); J_1 y J_2 eligen, ignorando cada uno la elección del otro, sendos números del intervalo (0, 1). El árbitro, enterado de estas decisiones, dispone que J_2 le pague K (x, y) unidades a J_1.

Estos juegos pueden, naturalmente, ser o no estrictamente determinados (el juego I lo es, según sabemos,y éste es el contenido esencial del "minimax"); y así como los juegos finitos no determinados nos condujeron por aleatorización a un juego más general, los juegos infinitos no determinados llevan naturalmente a considerar un tipo más general todavía que describimos a continuación.

Se prefijan dos conjuntos (o "espacios") de funciones: el conjunto X (espacio de las estrategias de J_1) y el conjunto Y (espacio de las estrategias de J_2). Se prefija además una "funcional" de pagos K (φ, ψ), (o sea una correspondencia que a cada par de funciones φ, ψ, pertenecientes a los espacios X, Y, respectivamente, asigna un número real).

J_1 y J_2 eligen sendas funciones φ, ψ y el árbitro, a raíz de estas elecciones, dispone que J_2 pague a J_1 K $(\varphi\ \psi)$ unidades.

Obsérvese que la estructura de nuestro juego (de dos personas, de suma cero), no ha cambiado a lo largo de todo este artículo. Lo que sí ha cambiado, experimentando sucesivas ampliaciones, es la **definición** de estrategia. Comenzó siendo un número **entero**: luego fue un **número real**; finalmente ha llegado a ser una **función.**

El que una estrategia se haya convertido en una función, lleva aparejado que disponemo ahora de infinitos parámetros libres en cada elección lo cual va a permitirnos someter al esquema de! "minimax" complejísimas situaciones reales, rebeldes en apariencia a todo intento de matematización.

11.2. — El ejemplo que consignamos para terminar es un esquemático **duelo** (que muy bien podría ser entre aviones) transmutado en juego funcional. J_1 y J_2 son ahora abstractos duelistas; J_1, el atacante, se propone destruir a su contrario; J_2, el atacado, trata de sobrevivir. Los rivales, que disponen cada uno de una ametralladora y de un cierto número de balas (no necesariamente el mismo), acortan distancias a medida que el juego se desarrolla. Los duelistas conocen las probabilidades, $P_1(d)$, $P_2(d)$, de que un disparo efectuado desde la distancia **d** sea fatal para el adversario; y el problema que se les plantea es determinar la mejor manera de administrar su respectiva provisión de balas; o sea, en términos precisos, las respectivas **densidades de fuego** φ (d), ψ (d) (número de tiros por unidad de longitud). Admitiremos que para medir la distancia variable que separa a los adversarios se ha adoptado una unidad tal que la densidad máxima de fuego (de cada uno de los asversarios) resulte igual a la unidad (1 tiro por unidad de longitud). Nuestras estrategias son, pues, **funciones** φ (d); ψ (d) de la distancia. Sólo nos falta, para completar la traducción de nuestro duelo en juego neumanniano, definir la funcional de pagos. Como tal elegiremos la **probabilidad K** (φ, ψ) **de que J_2 sea destruído por J_1 en el curso del duelo.**

Esta probabilidad K puede efectivamente calcularse, y el lector interesado encontrará en la memoria original de Dans*k*in y Gillman (Revista di Matematica della Universitá di Parma, 4 (1950), pág. 84), la expresión explicita de K.

El juego neumanniano está ahora completo. J_1 trata de hacer máxima la probabilidad **K** disparando con una densidad de fuego (estrategia) óptima φ_0; y J_2 trata de hacerla mínima utilizando su provisión de balas de acuerdo con la estrategia ψ_0 Demuestran Danskin y Gillman que el juego es estrictamente determinado; esto es, que existen (y además son únicas) dos estrategias optimales puras φ_0, ψ_0. Logran, además, utilizando elevadas recursos de la más moderna matemática, determinar efectivamente estas estrategias optimales. La solución que así obtienen tiene la interpretación siguiente:

Mientras la distancia que separa a los rivales, se mantiene por encima de una cierta $\mathbf{d}_0$, ninguno de los dos debe disparar un solo tiro (lo cual se explica, pues el hacerlo equivaldría :malgastarlos). Cuando la distancia es exactamente $\mathbf{d}_0$ deben apretar el gatillo por primera vez, disparando con densidad de fuego D_i (distintas para cada uno y variables de punto a punto) perfectamente determinadas (y consignadas en el artículo citado; pág. 93, fórmula 2), hasta llegar el momento en que la distancia, que disminuye gradualmente, llega a hacerse igual a una cierta $\mathbf{d}_1$. En este momento llega el duelo a su punto culminante. J_2, que justamente en ese punto debe disparar su último tiro, se llama a silencio.

El atacante, en cambio, debe intentar entonces el esfuerzo supremo, disparando continuamente con su máxima densidad de fuego hasta el instante del encuentro. Observe el lector que la estrategia de J_2 puede resumirse en tres palabras: **pegar desde lejos**. Es la clásica estrategia del **más débil**, que ostenta ahora el aval matemático de von Neumann. Obsérvese también la extraordinaria similitud de la estrategia del atacante con la del baturro del cuento ("Pescaré pocos; ¡pero al que pesque!"), que había dejado de lado el anzuelo y pescaba con garrote.

EL INSPECTOR DE VIALIDAD Y EL VIAJANTE*

SHERMAN K. STEIN

Si fijamos la vista durante un rato suficientemente largo en el diagrama de una red eléctrica, podría, por ilusión óptica, parecer un mapa de carreteras y ciudades. Este diagrama, por ejemplo, formado por diez líneas y seis vértices, donde están soldados los cables,

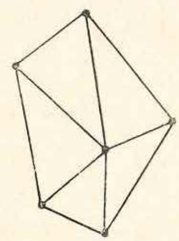

Fig. 1

podría convertirse en un mapa de diez secciones de carreteras uniendo seis poblaciones. Aunque no tuvieramos los datos del circuito eléctrico como voltaje, intensidad de corriente y resistencia, este diagrama sigue presentando problemas interesantes, no concernientes a electrones, sino a un inspector de carreteras y a un viajante de comercio.

Un inspector de vialidad económico tiene este problema. Querría encontrar una ruta que le permitiera pasar por cada sección de camino exactamente una sola vez. Después de todo, él no desea gastar el dinero de los contribuyentes en inspecciones innecesarias.

Un viajante tiene otro problema. Querría una ruta que le permitiera ir a cada ciudad una vez sola. El no tiene interés en recorrer cada sección de carretera.

Procuremos hallar para el inspector y el viajante las rutas anheladas en este sencillo sistema de seis ciudades y nueve secciones de carretera:

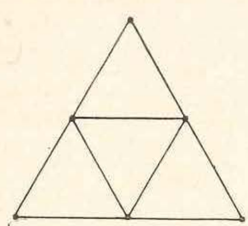

Fig. 2

* Mathematics - The Man Made Universe. Ed. W. H. Freedman and Company. San Francisco.

Después de unos cuantos ensayos el lector podría llegar a la siguiente ruta para el inspector:

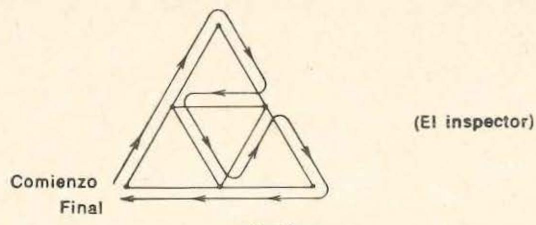

Fig. 3

y a ésta para el viajante:

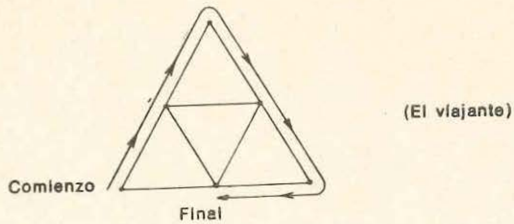

Fig. 4

Observe que el inspector tiene además la ventaja de terminar la inspección en la ciudad de donde salió; no necesitará dos cabeceras. El viajante pudo terminar su recorrido en una población adyacente a la de partida.

Ensayemos otro sistema de carreteras; por ejemplo el siguiente, con cinco ciudades y cinco secciones de camino.

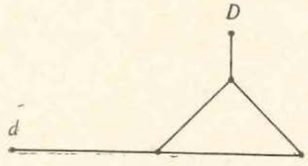

Fig. 5

Dedicándonos primero al problema del inspector, observamos que los puntos terminales de su ruta tienen que ser las ciudades d y D. Como pue de verificar fácilmente el lector, ninguna de las dos rutas de D a d cubre todas las secciones de carretera. Tendremos que informar al inspector que para este recorrido no hay ruta que le permita pasar una sola vez por cada sección.

Pasando al problema del viajante para el mismo sistema de carreteras, vemos que su viaje tiene que tener también sus puntos terminales en d y D. De las dos rutas de d a D, una, afortunadamente, lo lleva a través de cada pueblo.

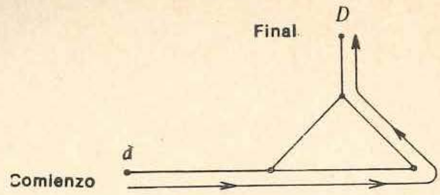

Fig. 6

He aquí un sistema de carreteras con cuatro ciudades y tres secciones, el cual, como el lector puede comprobar, contraría tanto al inspector como al viajante, pues para ninguno existe la ruta que desea.

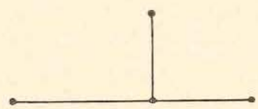

Fig. 7

Para terminar he aquí un sistema de cinco ciudades y cinco secciones, que satisface al inspector pero no al viajante, como puede comprobar el lector:

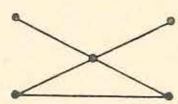

Fig. 8

Pero la mera acumulación de ejemplos no es Matemática, así como un diccionario no es una novela. Lo que queremos es un conocimiento de los sistemas de carreteras que nos capacite para determinar qué sistemas tienen una ruta para el inspector o para el viajante y cuáles no la tienen. ¿Hay algún procedimiento para averiguar si pueden encontrarse tales rutas en un sistema de carreteras específico sin realizar quizá mil ensayos? Consideraremos primero el problema del inspector.

Indaguemos más profundamente el problema del inspector examinando atentamente el sistema que sigue:

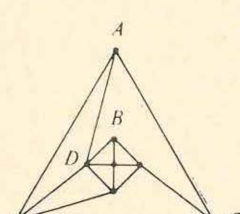

Fig. 9

Concentremos nuestra atención sobre la ciudad A. Supongamos, por el momento, que el inspector no inicia su recorrido en la ciudad A. Cuando pasa por A inspecciona dos de las secciones que llevan a A; una cuando se acerca a A y otra cuando deja A. Esto lo deja con una de las secciones que llevan a A aún por inspeccionar. Cuando haga la inspección se encontrará en A sin salida. Si va a recorrer cada sección una sola vez tiene que hacerlo antes de quedar encerrado en A — es decir que su recorrido tiene que terminar en A. Recordemos que para llegar a esta conclusión supusimos que no salía de A. Vemos, pues, que de disponer el inspector de una ruta, ésta tiene que comenzar o terminar en A.

Con análogos razonamientos (concentrando su atención en una ciudad por vez) puede el lector mostrar que la ruta del inspector tiene también que comenzar o terminar en B; que tiene que comenzar o terminar en C y que tiene que comenzar o terminar en D. Por lo tanto, si el inspector de vialidad tiene una ruta, ésta debe tener cuatro puntos terminales. Pero, como todos sabemos, un camino no puede tener más que dos puntos extremos. Con este análisis nos enteramos de que el inspector de vialidad no puede encontrar ruta para este sistema. Nuestra investigación nos sugiere que el número de secciones que unen una población con otras es muy importante al estudiar el problema del inspector.

Vamos a llamar GRADO de una ciudad al número de secciones que tienen un extremo en esa ciudad. Por ejemplo, una ciudad con una sola vía de entrada tiene grado 1. Toda ciudad con una sola vía de entrada la llamamos **ciudad terminal.** Con el mismo razonamiento que aplicamos a la ciudad A en el sistema considerado; se prueba el

Teorema 1. **Si una ciudad es de grado impar, el inspector tiene que o iniciar o terminar su viaje de inspección en esa ciudad.**

Y, así como señalamos que el sistema citado no tiene ruta para el inspector, podemos demostrar:

Teorema 2. **Si hay más de dos ciudades de grado impar en un sistema, entonces el inspector no dispone de ruta (que le permita recorrer cada sección una sola vez).**

El teorema 2 no es de los que agradan al inspector. Puede, con todo, haber una posibilidad de complacerlo si consideramos los sistemas que contienen **no más de dos** ciudades de grado impar. Pueden considerarse tres casos: sistemas que no contengan ciudad de grado impar; sistemas que contengan una ciudad de grado impar; y sistemas que contenga dos ciudades de grado impar. (El lector puede ensayar algunos ejemplos por su cuenta y adivinar lo que descubriremos para el inspector).

Demostraremos ante todo que el segundo de los tres casos no puede ocurrir.

Teorema 3. **No existe un sistema de carreteras con exactamente una ciudad de grado impar.**

Demostración. Probaremos que un sistema que contiene una ciudad de grado impar debe contener por lo menos otra ciudad de grado impar. En efecto, sea T una ciudad de grado impar e imaginemos que salimos de T en viaje de vacaciones. Viajaremos sin itinerario fijo, **excepto comprometernos a no usar nunca dos veces la misma sección de carretera.**

Cada vez que pasemos por una ciudad tendremos derecho a elegir como salida cualquier sección por la cual no hayamos viajado.

Hagamos el viaje, empezando en T. Si no tenemos suerte, el viaje puede resultar bien corto. Con suerte, podremos hacer un viaje largo. Pero puesto que el número de secciones tiene un límite, nuestras vacaciones deberán terminar en alguna ciudad que denominaremos E. (End).

¿Podría E ser simplemente T? Observe que, ya que salimos de T, había sin utilizar un número par de secciones desde T; de allí que cada vez que volvíamos a T quedaba una ruta de escape. Luego E no es T.

Si E fuera de grado par, cada vez que entrábamos podríamos haber encontrado una salida. Pero ya que en E terminaba nuestro viaje el grado de E tiene que ser impar. Lo prueba el teorema.

Nos quedan sólo dos casos preliminares a la solución completa del problema del inspector: sistemas que carezcan de ciudad de grado impar y sistemas con dos ciudades de grado impar. Considerando primero el de ninguna ciudad de grado impar, demostraremos

Teorema 4. **Si un sistema de carreteras no contiene ciudad de grado impar, el inspector podrá encontrar una ruta que le permitirá recorrer cada sección una sola vez.** (Más aún, podrá iniciar su inspección en cualquier ciudad; su ronda termina donde empezó.

Antes de empezar la demostración debería el lector dibujar un sistema con ninguna ciudad de grado impar y comprobar que tiene una ruta para el inspector y que termina en la ciudad donde comenzó.

Mencionaremos algo que hasta ahora hemos aceptado tácitamente en todos nuestros sistemas; hemos supuesto que están conectados. **Un sistema es CONECTADO si es posible viajar por sus carreteras de cualquier ciudad a cualquier otra.** Por ejemplo, dentro de lo probable, el sistema de carreteras de los Estados Unidos es conectado.

Ahora estamos preparados para la

Demostración del Teorema 4. No solamente demostraremos que el inspector puede hallar una ruta a través de cualquier sistema (conectado) sin ciudades de grado impar, sino que le enseñaremos cómo encontrarla.

Elija cualquier ciudad T dentro del sistema. Probaremos que el inspector tiene una ruta que comienza en T y cubre todas las secciones (es obvio que esta ruta tiene que terminar en T).

Aquí va la receta para descubrir tal ruta. Tome un coche en T, y viaje a la ventura como en la demostración del Teorema 3. Eso equivale a no recorrer ninguna sección dos veces, y terminar su ronda en una ciudad de la que no puede salir.

Como el sistema de carreteras tiene un número limitado de secciones, este viaje sin itinerario fijo, debe tener un final. ¿Dónde terminará? Ya que todas las ciudades son de grado par, debe terminar en T. Este itinerario elegido al azar, probablemente no cubre todas las secciones. Si no lo hace, alargaremos el viaje, en una excursión de la siguiente manera.

Si el viaje no pasó por todas las secciones, debe haber en el recorrido una ciudad que es el final de una de las secciones no recorridas (ya que el sistema es conectado). Llame a esta ciudad U. Salga al tuntún en viaje subsidiario desde U, siempre sin recorrer una sección ya cumplida y, por añadidura sin recorrer dos veces una misma sección. Tal viaje complementario tiene que terminar en U. Podemos combinar la primera vuelta con la subsidiaria formando un solo viaje saliendo de T, siguiendo el primer recorrido hasta llegar a U, desviando por el segundo circuito de U a U, y continuando nuestro primer paseo volviendo a T. Podemos continuar añadiendo más viajes laterales, formando con ellos rutas más y más extensas, hasta obtener finalmente una ruta que utilice todas las secciones. Una ruta como esa comienza en T, lleva al inspector una vez por cada sección y lo deposita en T. El inspector tiene una ruta en cualquier sistema de carreteras sin ciudad de grado impar y sabe cómo encontrarla añadiendo recorridos laterales.

Queda demostrado el Teorema 4.

El método proporcionado en la demostración del Teorema 4 es muy fácil de aplicar. Observemos al inspector descubriendo la ruta a través del siguiente sistema que no tiene ciudades de grado impar.

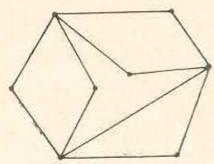

Fig. 10

Empieza por elegir una ciudad como cuartel general y sale a dar una vuelta hasta que queda bloqueado. Quizá sea éste su viaje:

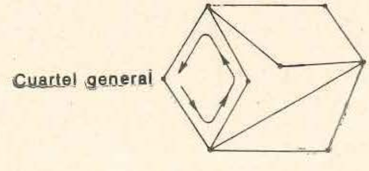

Fig. 11

Luego incluye una excursión desde una de las ciudades por las que pasó la primera vez:

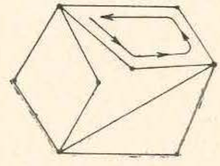

Fig. 12

Estos dos recorridos los puede reunir en uno solo:

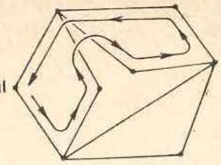

Fig. 13

Como todavía no ha cubierto todas las secciones, agrega otra excursión por secciones no inspeccionadas todavía:

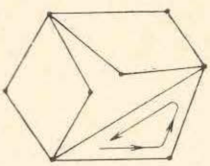

Fig. 14

Ahora ha cubierto todas las secciones y puede combinar su primer vuelta con las dos laterales formando una ruta que lo hace pasar una vez por cada sección.

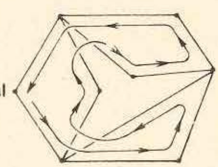

Fig. 15

Se comprende que con un sistema más complicado el inspector tendría que utilizar más recorridos laterales para arribar a una ruta que cubra todo el sistema. El único caso que nos queda está cubierto por el

Teorema 5. Si un sistema de carreteras contiene dos ciudades de grado impar el inspector puede hallar una ruta que lo lleva a recorrer cada sección exactamente una vez. (Por otra parte, tiene que iniciar su inspección en una de las dos ciudades de grado impar y terminarla en la otra).

Dejamos al lector la demostración de este teorema, similar a la del Teorema 4. Hemos resuelto por completo el problema del inspector. Con un rápido recuento de las ciudades de grado impar podemos informar si hay ruta; si hay, tenemos un método para encontrarla. Pero con todo el inspector no está contento.

"En estos caminos estrechos puedo inspeccionar ambas manos al mismo tiempo. Pero dentro de poco seré ascendido y tendré que inspeccionar autopistas, donde a veces las dos manos están muy separadas. ¿Cómo podré saber entonces si puedo encontrar una ruta?"

El inspector ha propuesto un nuevo problema. Después de todo, hasta ahora no nos ha preocupado la dirección que elegía al viajar para cubrir una sección. Hemos podido considerar una sección como una línea y no como una flecha de un solo sentido. Tendremos que reemplazar ahora cada sección por dos secciones, cada una provista de una flecha indicando el sentido permitido para recorrerla. Por ejemplo, en lugar de un sistema de carreteras como éste

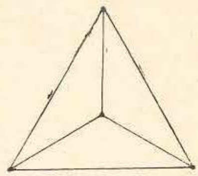

Fig. 16

tenemos éste, consistente en pistas de una sola mano:

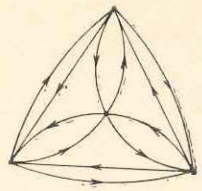

Fig. 17

Aunque podríamos suponer el nuevo problema más difícil que el ya resuelto, no es así, pues resulta bien sencillo. Observe que el número de pistas de una sola mano que entran en cierta ciudad es igual al número de pistas de una mano que salen de esa ciudad. No solamente cada ciudad es de grado par, sino que cada vez que el inspector entra en una ciudad (que no sea el cuartel general) la puede abandonar (legalmente). El lector puede utilizar el mismo tipo de razonamiento con que se demostró el Teorema 4 para demostrar el

Teorema 6. **Si para cada ciudad en un sistema de ciudades y carreteras de una sola mano hay tantas carreteras que entran como las que salen, tendrá el inspector una ruta que le permite inspeccionar cada carretera de una mano exactamente una vez. (Por añadidura, puede elegir como su cuartel general cualquier ciudad. Su ronda termina donde empezó).**

La demostración de esto es casi idéntica a la prueba del Teorema 4, y se le deja al lector. En realidad el Teorema 6 significa más de lo que requiere el inspector. Incluye un sistema como éste

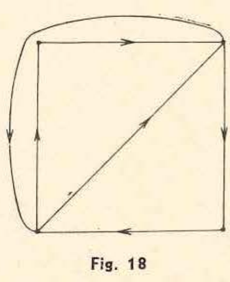

Fig. 18

(Observe, por ejemplo, que las ciudades denominadas A y B están unidas por una sola carretera de una mano).

El Teorema 6 se puede también aplicar a sistemas con lazos, tales como

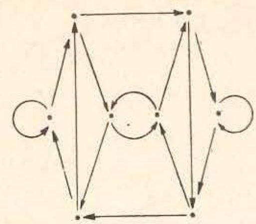

Fig. 19

Obsérvese que tantas rutas de una mano entran en una ciudad como las que salen.

En el capítulo siguiente emplearemos el Teorema 6. Utilizaremos, en especial sistemas con lazos, tales como el del dibujo anterior, con el fin de analizar una antigua palabra empleada en la India como auxiliar para memorizar ciertos modelos rítmicos.

Aunque hemos complacido al inspector no hemos hecho nada por el viajante de comercio que quiere saber cuando podrá encontrar una ruta que lo haga pasar por cada ciudad exactamente una vez. Este problema, propuesto por W. R. Hamilton en 1859, no está resuelto aún. Quizá no haya un método general para decidir si un sistema de carreteras tiene ruta para un viajante, excepto probar de encontrar una. El inspector tendrá que contar las ciudades de grado impar. Si no hay ciudad de ese tipo, o si hay dos, sabrá que dispone de una ruta; en todos los demás casos sabrá que no tiene ruta. Si el problema del viajante de comercio tiene solución, probablemente será mucho más complicada.

Hay pares de problemas que se asemejan en la formulación, pero que presentan dificultades diferentes. Es fácil probar que existe un solo número primo que tiene una unidad menos que un cuadrado, pero nadie sabe cuántos números primos son iguales a un cuadrado más uno. Es fácil también probar que el conjunto de números primos es infinito, pero no se sabe si lo es el conjunto de primos gemelos. (El autor llama primos gemelos a los que difieren en 2 unidades, por ejemplo 11 y 13).

PROBLEMAS

- 1. ¿Tiene el viajante de comercio un camino en este sistema?

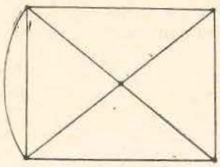

Fig. 20

- 2. ¿Tiene el viajante de comercio un camino en este sistema? ¿Lo tiene el inspector?

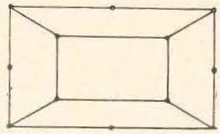

Fig. 21

- 3. a) Cuente las ciudades de grado impar en varias redes camineras.
  b) Cuente las ciudades de grado par en varias redes camineras.
  c) Plantee una conjetura probable.
- 4. Aplicando el método que usamos para probar que no puede haber una sola ciudad de grado impar, pruebe que en una red caminera común (con un número finito de secciones) el número de ciudades de grado impar es par.
- 5. Pruebe el teorema N.° 5. Pruebe el teorema N.° 6.
- 6. El problema del inspector fue resuelto en 1735 por Euler, quien escribió: "En la ciudad de Konigsberg hay una isla llamada Kneiphof, alrededor de la cual fluyen dos ramales del río Pregel. Hay 7 puentes que cruzan esos dos ramales. La cuestión es saber si una persona puede programar un paseo con un recorrido que lo haga cruzar uno de esos puentes una vez, pero no más de una vez. . . .Sobre la base de esta situación he formulado para mí mismo, este problema muy general: Dada una configuración de un río y sus ramales, como también un número cualquiera de puentes, determinar si es o no posible cruzar uno una vez y solamente una.
  Este es el diagram de los siete puentes de Konigsberg:

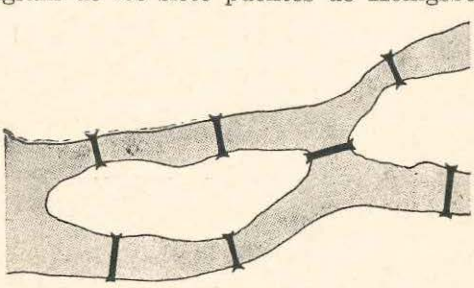

Fig. 22

¿Se puede encontrar un recorrido que cruce todos los puentes una vez y solamente una vez?

- 7. ¿Puede encontrarse un recorrido que pase por cada puerta de esta casa una única vez?

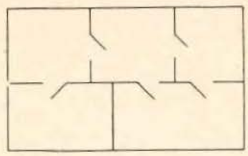

Fig. 23

- 8. Idem.

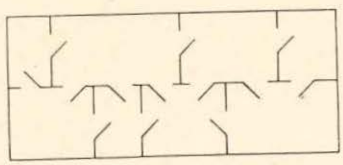

Fig. 24

- 9. ¿Podría el viajante visitar las ciudades de este sistema una única vez?

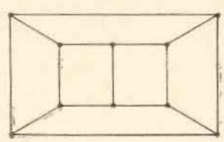

Fig. 25

- 10. Pruebe que el viajante puede recorrer este sistema, visitando cada ciudad una sola vez y volver al punto de partida.

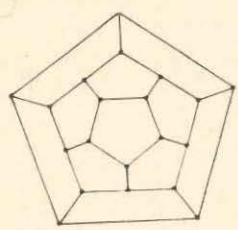

Fig. 26

● 11. Usando la técnica empleada para probar el teorema N.° 4, encuentre un recorrido para el inspector de vialidad, en esta red de carreteras.

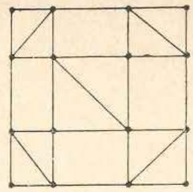

Fig. 27

● 12. Aplicando la misma técnica anterior, encuentre un recorrido para el inspector en este sistema:

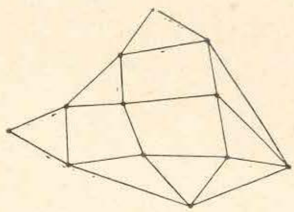

Fig. 29

● 13. Aplicando el proc?dimiento que usamos para probar que no puede haber una única ciudad de grado impar, pruebe que en una red de carreteras (con un número finito de secciones) el número de ciudades de grado impar, es par.

● 14. Diseñe un sistema de carreteras con una única ciudad de grado impar (pero con un número ilimitado de secciones y ciudades de grado par).

● 15. a) Pruebe que si se suprime una sección del sistema de carreteras, la variación del número de ciudades de grado impar, es par.

b) Aplicando a) pruebe que el número de ciudades de grado impar es par.

● 16. En una red de carreteras dada, sea $T(d)$ el número de ciudades de grado d. $T(1)$, por ejemplo, es el número de ciudades terminales.

a) Registrando el número de secciones que proporciona cada ciudad, pruebe que:

$$1\ T(1) + 2\ T(2) + 3\ T(3) + 4\ T(4) + \dots\dots$$

es igual al doble del número de secciones.

b) Aplicando a) pruebe que el número de ciudades de grado impar es par.

● 17. ¿Cuántos inspectores se necesitan para una red de carreteras con cuatro ciudades de grado impar si ninguno de ellos debe recorrer una sección más de una vez? No hay restricción para el número de ciudades de grado par.

a) Realice tres pruebas;

b) Haga una conjetura;

c) Demuestre su conjetura.

• 18. Una red de carreteras está formada por tres ciudades, cada dos de las cuales se comunican por un solo camino de una sola mano.

a) Existen en esencia dos sistemas. Dibújelos.

b) Compruebe que en ambas el viajante dispone de una ruta.

• 19. Aplicando E 18, pruebe que en cualquier sistema de cuatro ciudades, comunicadas cada dos, por un camino de una sola mano, existe una ruta para el viajante.

• 20. a) Aplicando E 19, pruebe que cualquier sistema de cinco ciudades comunicadas cada dos por un camino de una sola mano, tiene una ruta para el viajante.

b) Haga extensivo el resultado a cualquier número de ciudades.

• 21. En un torneo de volleyball, en que todos deben jugar contra todos, cada uno de los 673 equipos jugó una sola vez contra cada uno de los demás. No hubo empates. Pruebe que es posible designar los equipos T_1, T_2, T_3, ..., T_{672}, T_{673} de modo que T_1 derrotará a T_2, T_2 derrotará a T_3, T_3 a T_4, y así sucesivamente.

Sugestión: Tome en cuenta 20(b).

• 22. Se llama "circuito" en una red de carreteras a una ruta que empieza en alguna ciudad y, sin pasar dos veces por sección alguna, vuelve a esa ciudad. Llamamos "árbol" a una red de carreteras sin circuitos. (No es preciso que el sistema sea conectado).

a) Haga el diseño de un "árbol";

b) Suprima un camino que una dos ciudades "terminales";

c) Del árbol que queda, suprima un camino que una dos de sus ciudades "terminales";

d) Continúe hasta haber suprimido todas las secciones;

e) Cuente el número de caminos suprimidos;

f) Repita el procedimiento en el mismo "árbol" (si es posible usando caminos diferentes) y cuente el número de caminos removidos;

g) Cuente el número de ciudades impares en su "árbol";

h) Haga una conjetura;

i) Pruebe su conjetura.

• 23. En E 22 se definió un árbol. Sea t el número de ciudades y s el número de secciones en un árbol conectado.

a) Halla s y t para tres árboles conectados;

b) Conjeture una relación entre s y t para cualquier árbol conectado.

• 24. Pruebe su conjetura de E 23.

•

• 25. Dibuje una red de carreteras conectada que no es un árbol (o sea que tenga circuitos). La policía quiere instalar vallas en el medio de algunas secciones de tal modo que en ningún circuito se podrán correr carreras pero será siempre posible viajar de una ciudad cualquiera a cualquier otra, sin encontrarse con una valla. En resumen, la policía lo que quiere es hacer cortes en el sistema a fin de convertirlo en un árbol conectado.

a) Señale (en la red de carreteras que dibujó) algunas de las diversas maneras en que la policía puede ubicar las vallas;

b) Cuente el número de vallas en cada caso;

c) Plantee una conjetura probable;

d) Ensaye su conjetura en otra red de carreteras.

• 26. a) En una red de carreteras coloque vallas como en E 25. Cuente t, el número de ciudades; cuente s, el número de secciones, y b, el número de vallas;

b) Repita esto en otras tres redes de carreteras;

c) Proponga una manera de conectar s, t y b.

• 27. Demuestre la conjetura E 26 (c). (Aplique E 23 y E 24).

• 28. El gerente de un sistema de trasporte metropolitano quiere que sus ómnibus cubran cierto recorrido por las calles de una ciudad de modo que (1) cada ruta describa un lazo o sea que termine donde empiece y pase a lo sumo una vez por cada intersección, y (2) que cada sección de calle pertenezca a una sola ruta.

a) Diagrame un conjunto de calles sin callejones sin salida para el cual no sea posible encontrar rutas como las indicadas;

b) ¿Para qué conjunto de calles podrán hallarse tales rutas?

• •

• 29. Un juego de dominó común está formado por 28 piezas; del doble cero al doble seis.

a) ¿Es posible ordenar todas estas piezas en línea recta de modo que cada par de mitades adyacentes tenga el mismo número de puntos?

b) ¿Es posible ordenarlos en forma que describan una línea cerrada, siempre cumpliendo con la condición (a)?

• 30. Llamemos juego de doble-seis al juego común que llega hasta el doble seis. Generalizando, un juego doble-n está formado por todas las fichas desde el doble cero al doble n. Por ejemplo un juego doble-cuatro tiene 15 piezas (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4).

a) Como E 29 (a), (b), pero para un juego de doble-cuatro.

b) Como E 29 (a), (b), pero para un juego de doble-tres.

c) Como E 29 (a), (b), pero para un juego de doble-n.

• 31. Si un químico mirara nuestros planos podría interpretar que las ciudades eran átomos, las secciones uniones entre los átomos y toda la red de carreteras una molécula. Lo que nosotros llamamos "grado de una ciudad" el lo llamaría "la valencia de un átomo". La valencia del hidrógeno es 1; la valencia del oxígeno es 2. Así la molécula de agua H_2O corresponde, en nuestro lenguaje, al árbol H-O-H.

La valencia del átomo de carbono es 4. Que una molécula tenga c átomos de carbono, h átomos de hidrógeno, a átomos de oxígeno, y h uniones.

a) Pruebe que $4c + 2a + h = b$

b) Si la molécula es un árbol, pruebe, aplicando E 23 que

$$c + a + h - 1 = b$$

("Arbol" fue definido en E 22.)

c) Combinando (a) y (b), pruebe que en un árbol de átomos de carbono, hidrógeno y oxígeno

$$h = 2c + 2$$

La fórmula química de la glucosa es $C_6H_{12}O_6$. ¿Puede la fórmula de la glucosa ser un árbol?

Haga un diseño de la posible disposición de los átomos.

• 32. Pruebe que, en cualquier sistema conectado en que todas las ciudades son de grado 2, tanto el inspector como el viajante de comercio tienen una ruta.

• 33. Aplicando E 22, pruebe que un "árbol" con s secciones y t ciudades de grado par tiene que tener un camino con por lo menos $2s_7t$ secciones. (Por supuesto que el número de secciones es siempre un número natural. Quizás sería mejor decir: "Existe un camino en que el número de secciones es por lo menos $2s_7t$.")

Referencias:

1. J. R. Newman, *The World of Mathematics*, vol. 1 Simon and Schuster, New York. 1956. (Euler's solution of the inspector problem in pp. 573-580.)

2. O. Ore, *Graphs and Their Uses*, Random House, New York, 1963. ("Linear graph" is the technical term for "highway system".)

3. B. A. Trakhtenbrot, *Algorithms and Automatic Computing Machines, Heath.* Boston, 1963. (Highway systems applied to game theory on pp. 8-24).

PROBLEMAS PARA ENTRENAMIENTOS

Problema N.° 75

1. W. L. Piensa un número cualquiera. Súmale 11. Multiplica el resultado por 2. Réstale 20 (veinte). Multiplica el resto por 5 y al resultado réstale el producto del número que pensaste por 10. Obtendrás como resultado 10. ¿Por qué? Justifica.

Problema N.° 76

1 H. G. Elisa, Helena y María discuten sobre sus respectivas edades y durante la discusión afirman lo siguiente:

Elisa: Tengo 22 años.

Tengo dos años menos que Helena.

Tengo un año más que María.

Helena: No soy la más joven.

La diferencia entre mi edad y la de María es de 3 años.

María tiene 25 años.

María: Soy más joven que Elisa.

Elisa tiene 23 años.

Helena tiene 3 años más que Elisa.

Sería mucho pedir que tres mujeres que hablan de sus edades no mintieran un poco. Cada una de ellas ha mentido una sola vez. ¿Puedes deducir ahora sus edades?

Respuesta: Helena 25 años. Elisa 23 años. María 22 años.

Problema N.° 77

2. O. P. Prueba que la suma de 2 números naturales consecutivos y la suma de sus cuadrados son primos entre sí.

S: Sea **s** la suma de los números naturales y **t** la suma de sus cuadrados

$$s = n + (n + 1) = 2n + 1 \qquad t = n^2 + (n + 1)^2 = 2n^2 + 2n + 1$$

$$s^2 = 4n^2 + 4n + 1; \; 2t - s^2 = 1$$

vemos que todo divisor común de **s** y **t** es un divisor de la unidad, en consecuencia **s** y **t** no tienen divisores comunes mayores que 1 ⇒ que son primos entre sí.

Problema N.° 78

2. O. P. Prueba que las alturas de un triángulo no rectángulo son las bisectrices de los ángulos de un triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas dadas.

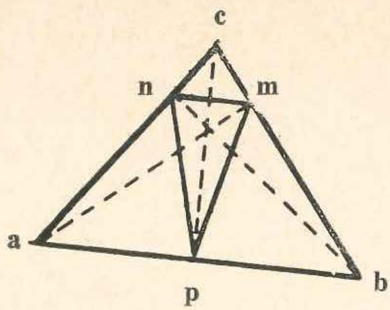

Fig. 1

S: Sea

s es el punto de intercección a las alturas de abc

$\square smcn$ tiene $\hat{m} = \hat{n} = 1\,R \Rightarrow \hat{c} + \hat{s} = 2\,R \Rightarrow$

$\Rightarrow \square smcn$ está inscripto en una Cf. de diámetro sc.

$\Rightarrow \widehat{cmn} = \widehat{scn}$ (ángulos inscriptos en arcos iguales)

De la misma manera $\square smbp$ inscripto en una Cf.:

y

$$\widehat{smp} = \widehat{sbp}$$

pero

$$\widehat{scn} = \widehat{sbp} = 90° - \widehat{bac}$$

$$\Rightarrow \widehat{smn} = \widehat{smp}$$

$\Rightarrow$ la altura am es bisectriz del ángulo nmp.

Problema N.° 79

2. 0. M. Calcula sin aplicar trigonometría el perímetro y la superficie de un triángulo rectángulo en que los ángulos agudos son de 60° y 30° respectivamente y en que la altura correspondiente a la hipotenusa es de 5 cm.

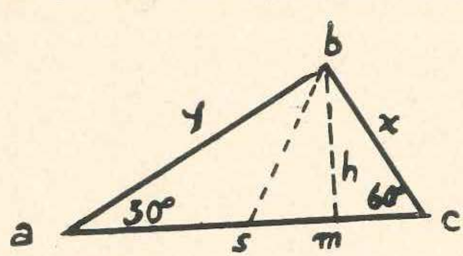

Fig. 2

S: $\hat{c} = 60° \Rightarrow \overset{\triangle}{bmc}$ es la mitad de un triángulo equilátero. Trazando las bisectriz de $\overset{\wedge}{abm}$ corta a am en s.

$$abm = 60° \text{ porque amb rectángulo}$$

$$\Rightarrow sbm = 30° \quad bs = x \text{ porque } \overset{\triangle}{sbc} \text{ es equilátero.}$$

$$sba = 30° \Rightarrow asb \text{ es isósceles} \Rightarrow as = sb \Rightarrow as = x$$

$\Rightarrow ac = 2x$

En bmc $\quad h^2 = x^2 + \dfrac{x^2}{4}$

$$25 = \frac{4x^2 + x^2}{4}$$

$$100 = 5x^2$$
$$x^2 = 20$$
$$ac = 2x$$
$$y^2 = (2x)^2 + x^2$$
$$y^2 = 4x^2 + x^2$$
$$y^2 = 4 \cdot 20 + 20$$
$$y^2 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{100} = 10$$

Perímetro de abc $= 10 + \sqrt{20} + 2\sqrt{20} = 10 + 3\sqrt{20} = 10 + 6\sqrt{5}$

Superficie de abc $= 10 \cdot \sqrt{20} = 10 \cdot 2\sqrt{5} = 20\sqrt{5}$

Problema N.° 80

3.K.G. Un recipiente lleno de líquido tiene dos grifos. Si se abren ambos grifos durante **a** h, y luego se cierra el segundo, el líquido restante se escurrirá por el primero en un plazo de **b** h; pero si al cabo de **a** h se cierra el primero en lugar del segundo, el líquido se escurrirá por el segundo en **c** horas.

¿Cuánto tiempo tardaría todo el líquido en escurrirse independientemente por cada grifo?

S:

Supongamos que el agua se escurre por el primer grifo en **x** h, y por el segundo, en **y** h. Entonces $\dfrac{1}{x}$ es el caudal horario del primer grifo y $\dfrac{1}{y}$, el del segundo grifo. De acuerdo con las condiciones del problema, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) a + \frac{1}{x} b = 1;$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) a + \frac{1}{y} c = 1,$$

de donde resulta que

$$x = \frac{ab + ac + bc}{c} \quad ; \quad y = \frac{ab + ac + bc}{b}.$$

Respuesta:

$$x = \frac{ab + ac + bc}{c} h \; ; \quad y = \frac{ab + ac + bc}{b} h.$$

Artes Gráficas Negri
Chacabuco 1038
Capital
Impresión

Gamma - Monotipía
Chacabuco 1020
Capital
Composición monotipo
armado tipográfico

Agosto 1971

I. N. E. C.

NOMINA DE PUBLICACIONES

0.1	Folleto explicativo de Ferias y Clubes de Ciencias (IMAF)	$	3,00
0.2	Normas para Bibliotecas Escolares (O.E.A.)	»	2,80
0.3	Manual de la UNESCO para la enseñanza de las ciencias (Ed. Sudamericana)	»	9,30
	BIOLOGIA		
1.1	Monografías Científicas (O.E.A.) cada una	»	2,00 3,00
1.2	Biología Tomo I y II (B S.C S.) Versión Verde	»	38,25
2. —	**FISICA**		
2.1	Introducción a las Ciencias Físicas (IPS). Texto en castellano. (Ed. Reverté)	»	8,00
2.2	Introducción a las Ciencias Físicas. Guía del Profesor...	»	17,00
2.3	Experiencias de Física (INEC)	»	2,00
2.4	Baterías de test (INEC)	»	1,50
2.5	Introducción a la Física Moderna (INEC)	»	3,00
2.6	Monografías Científicas (O.E.A.) cada una	»	2,00 3,00
3. —	**MATEMATICA**		
3.1	Conjuntos, de Nelly V. de Tapia y Elsa de Martino	»	2,70
3.2	Relaciones, de Nelly V. de Tapia y Elsa de Martino	»	2,70
3.3	Números Reales, de Nelly V. de Tapia y Elsa de Martino.	»	2,70
3.4	Números Complejos, de Nelly V. de Tapia	»	2,70
3.5	Geometría del Espacio, Tapia-De Martino	»	2,70
3.6	Geometría Intuitiva, Tapia-De Martino	»	13,50
3.7	Estadística y Probabilidades para Educadores, de Marta M. de Mastrogiovanni. (Ed. Estrada)	»	7,55
3.8	Curso Introductorio de Evaluación Pedagógica (INEC)..	»	1,50
3.9	Distribución Normal de Probabilidad (INEC)	»	1,50
3.10	Matemática Moderna, Matemática Viva, de André Revuz	»	2,50
3.11	Matemática Moderna, Gabba-Dalmasso..............	»	12,00
3.12	Algebra vol. I - Mascó, Cataneo, Hinrichsen	»	10,50
3.13	Algebra vol. II - Mascó, Cataneo, Hinrichsen	»	9,65
4. —	**QUIMICA**		
4.1	Suscripción a la Revista Iberoamericana de Educación Química (4 ejemplares anuales)	»	10,00

Podrán adquirirse en INEC, *o remitiendo un giro postal por el valor total de las publicaciones que seleccione, a nombre del Profesor Angel Hernaiz* – **INEC. - Av. Madero 235 - 7° piso - Buenos Aires.**

Agosto de 1971

MONOGRAFIAS CIENTIFICAS DE MATEMATICA
O. E. A.

(Temas fundamentales para la actualización del profesor de enseñanza secundaria.)

ESPACIOS VECTORIALES Y GEOMETRÍA ANALÍTICA .... $ 2.00
por *Luis A. Santaló.*
Tratamiento intuitivo de los vectores. Espacios vectoriales de dimensión dos. El plano euclideano. Ejemplos y aplicaciones. Geometría analítica del espacio. El producto vectorial y aplicaciones.

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS .... » 2.00
por *Enzo Gentile.*
Conjuntos. Operaciones, teoremas, aplicaciones. Estructura y tipos de anillos. Extensiones algebraicas. Teoría de Galois.

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA .... » 3.00
por *José S. Nieto.*
Definición y propiedades de números complejos. Funciones de variable compleja. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Teorema de Laurent. Teorema de Rouché.

ALGEBRA LINEAL.................................... » 2.00
por *Orlando E. Villamayor.*
Introducción con ejemplos de aplicación a la geometría, álgebra y física. Espacios vectoriales. Bases. Transformaciones lineales y geométricas.

HISTORIA DE LAS IDEAS MODERNAS EN MATEMATICA ...... » 2.00
por *José Babini.*
Las geometrías no euclideanas. La teoría de grupos. Las nuevas álgebras. La lógica matemática. Teoría de conjuntos.

EL CONCEPTO DE NÚMERO............................. » 2.00
por *César A. Trejo.*
El número entero y racional. El número natural. El número real. El número complejo.

INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA GENERAL .... » 3.00
por *Juan Horváth.*
El Cuerpo de los Números Reales. La Topología del Espacio Euclideano. Espacios Métricos. Espacios Topológicos.

PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA .... » 3.00
por *Luis A. Santaló.* (De reciente aparición)
La definición clásica de probabilidad y primeros ejemplos. Definición axiomática de probabilidad y primeras consecuencias. Variables Aleatorias. Funciones de probabilidad. Distribución binomial. Ley de los grandes números, etc. Fórmulas. Tablas.

Podrán adquirirse en el INEC, *o remitiendo un giro postal por el valor total de las publicaciones que seleccione, a nombre del Profesor Angel Hernaiz* – **INEC. - Av. Madero 235 - 7° piso - Buenos Aires.**

AGOSTO de 1971