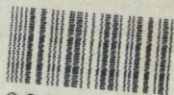


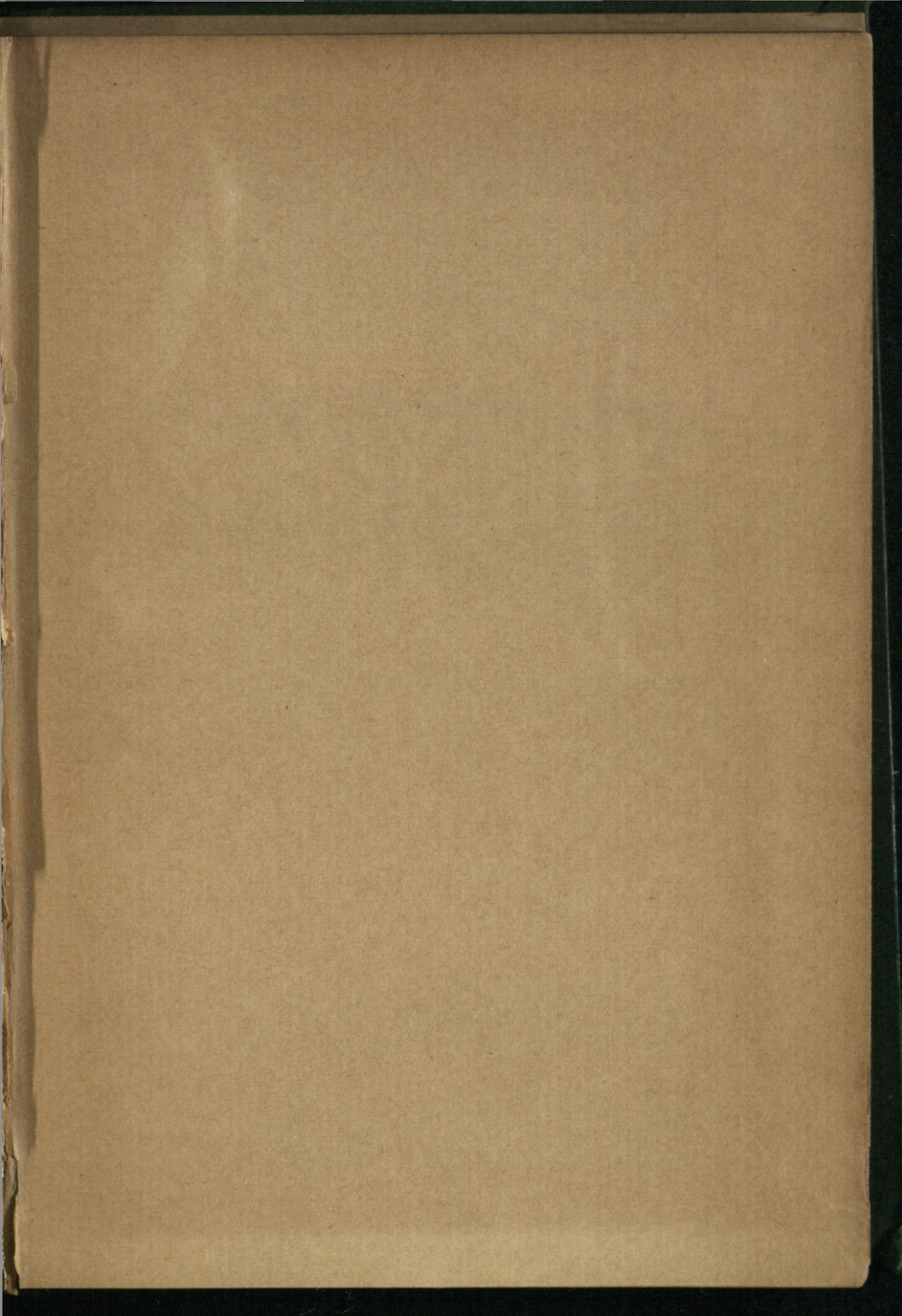
ENRIQUE SYAMALDI-JAIME

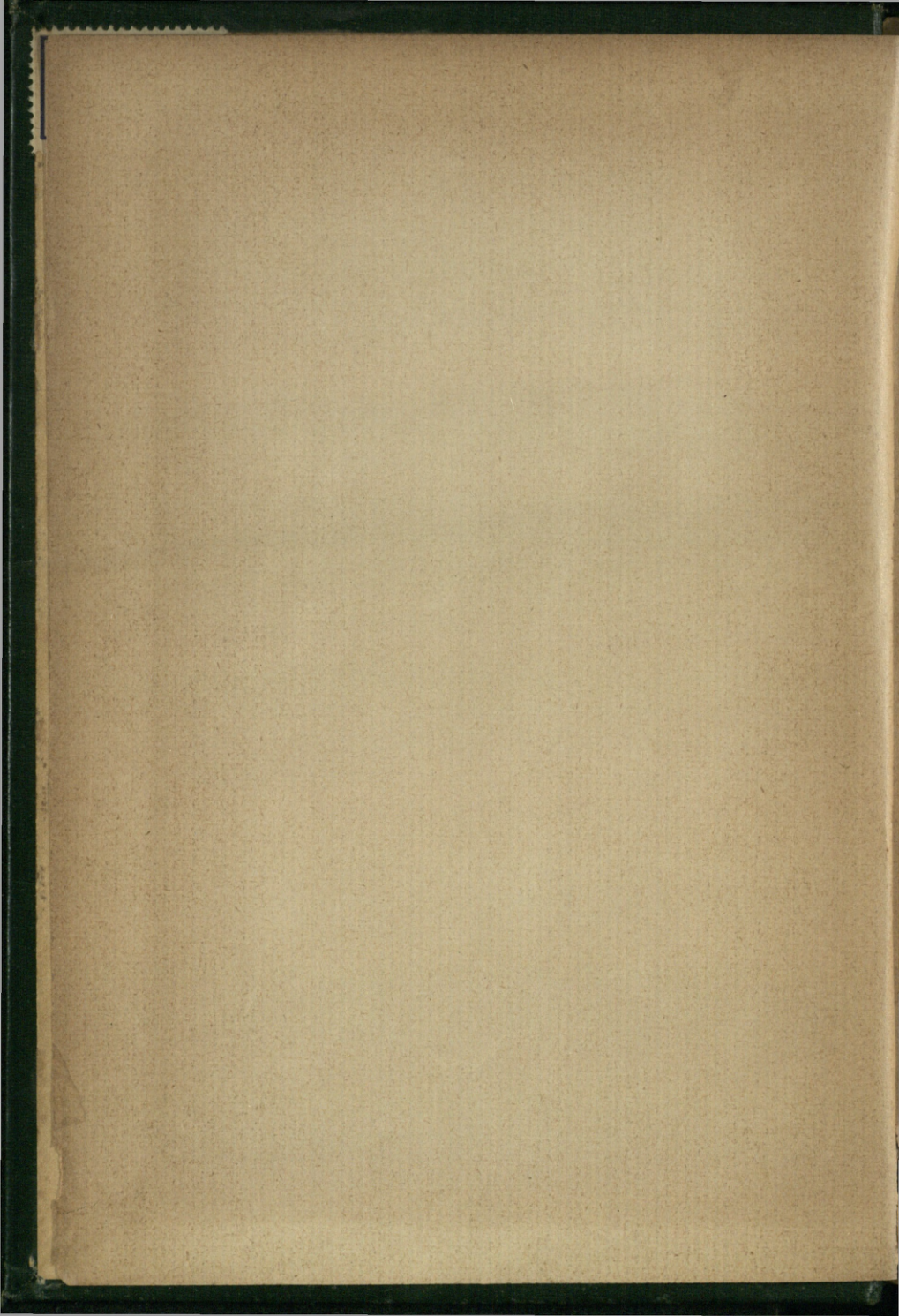
GEOMETRÍA INTUITIVA

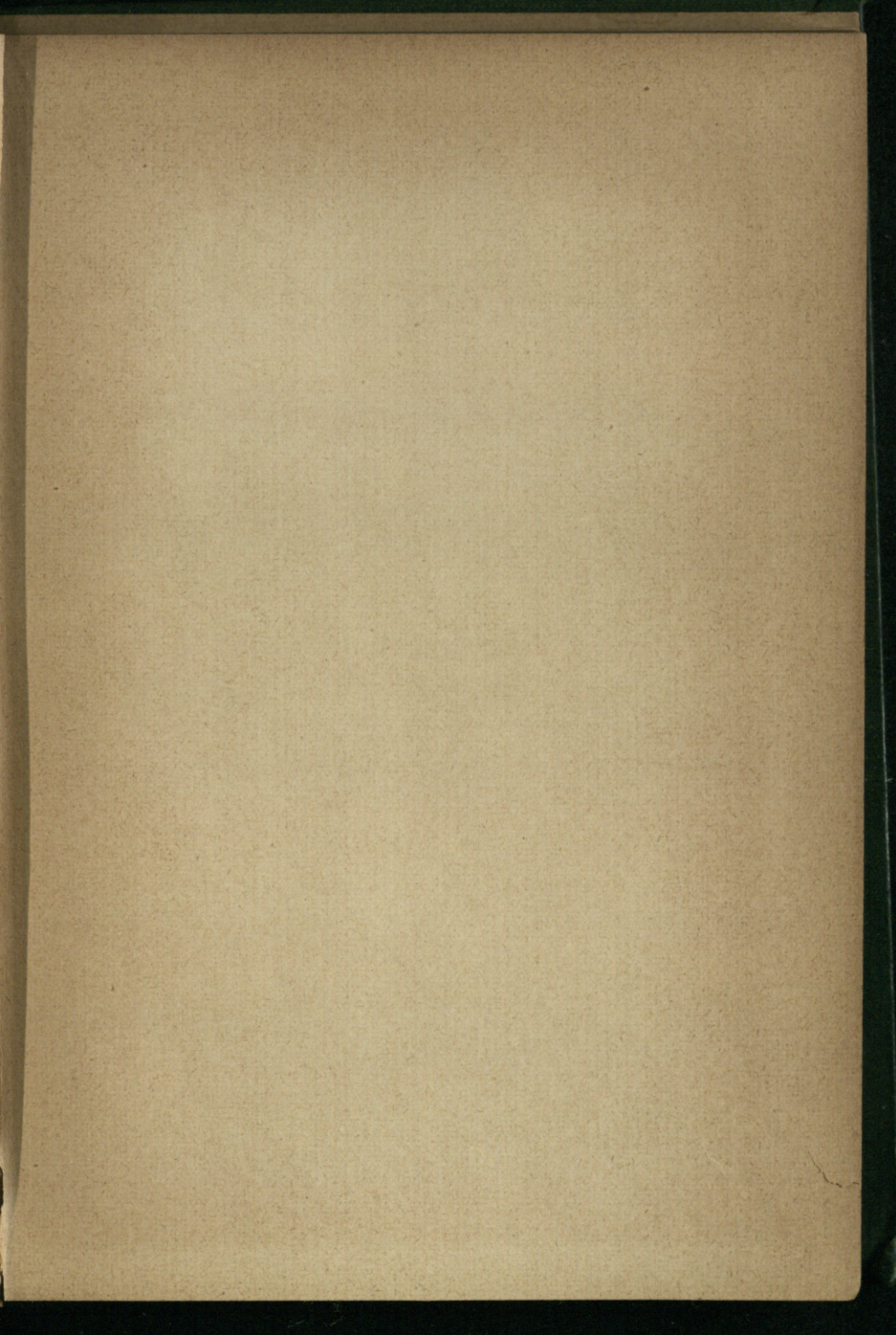
N^A 4
9

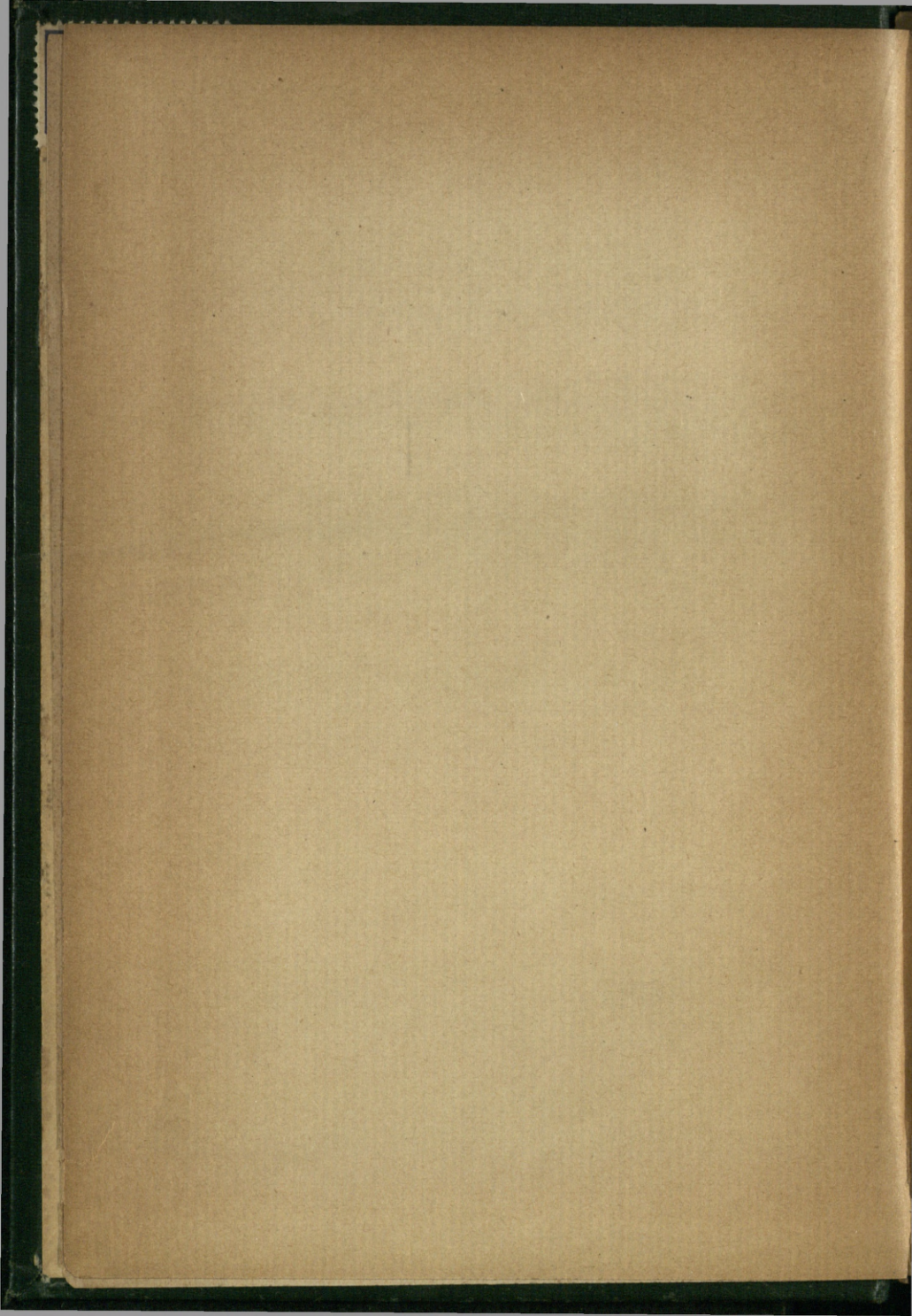


00020100









NOCIONES INTUITIVAS DE GEOMETRÍA

ES PROPIEDAD

Queda hecho el depósito de
acuerdo con la ley N.º 9510

FEDERICO ENRIQUES Y HUGO AMALDI

29.388

DONACION
DE

1^{ra} Exposición
N. de libros
para niños

Nociones intuitivas ★ de Geometría ★

OBRA ADAPTADA A LOS PROGRAMAS DE ENSEÑANZA PRIMARIA
Y PREPARATORIA DE LA TÉCNICO-PROFESIONAL

por el profesor

FLORENCIO D. JAIME

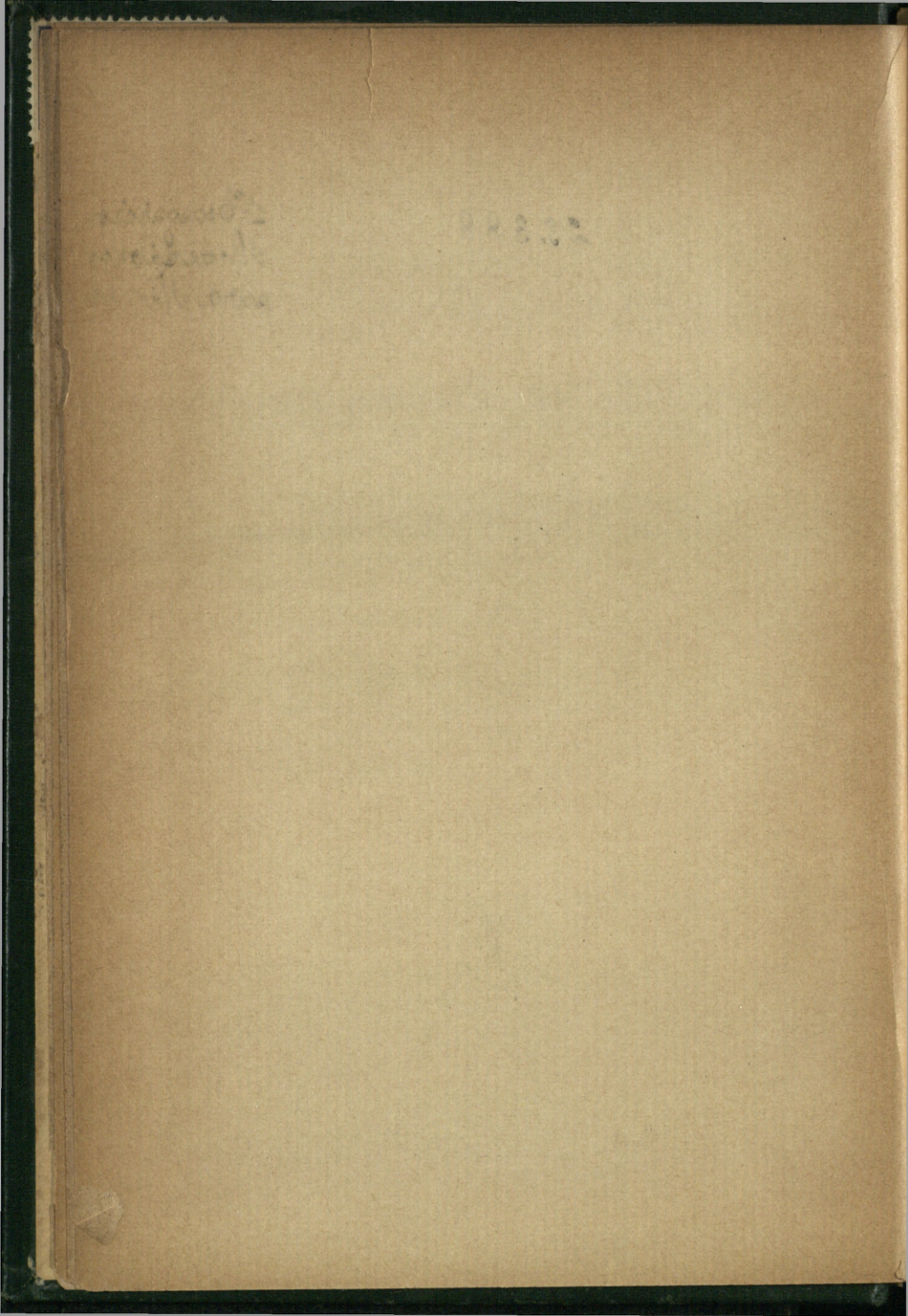


BUENOS AIRES

ANGEL ESTRADA Y CIA. - EDITORES
466 - CALLE BOLÍVAR - 466

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

1357191



DEL TRADUCTOR

He aquí un libro elemental escrito por un geómetra eminente con la colaboración de otro matemático destacado.

Esa sola circunstancia basta, por cierto, para garantizar el valor científico de la obra y, en cuanto al pedagógico, también puede descontarse de antemano, dada la autoridad didáctica que universalmente se le reconoce al profesor ENRIQUES. Ello no obstante, consideramos oportuno señalar algunas de sus características.

Las definiciones clásicas generalmente incomprendidas, unas veces por ilógicas y otras porque su imposición dogmática las presenta al alumno como simples frases desprovistas de significado, han sido reemplazadas por explicaciones tendientes a la formación del concepto intuitivo de los entes geométricos; y sólo después de esa preparación previa se concreta la idea y se expresa, si ello es posible y necesario, en forma de correcta definición.

Cada asunto se desarrolla dentro de límites prudentes, establecidos con criterio pedagógico y práctico, dando así la medida de lo exigible a los alumnos de los cursos superiores de la enseñanza primaria y de los preparatorios de la secundaria y de la técnico-profesional.

Y, puesto que el aprendizaje de la demostración de las propiedades geométricas importa menos, en ese ciclo, que el conocimiento de dichas propiedades en forma que permita el saber aplicarlas en la resolución de numerosos y variados ejercicios y problemas, los razonamientos lógicos

difíciles han sido sustituidos por justificaciones experimentales e intuitivas sencillas e inmediatas.

En resumen: conceptos claros, espíritu moderno, lenguaje matemático preciso, recursos intuitivos para explicar las propiedades más difíciles y series graduadas de ejercicios y problemas; todo eso encontrará el lector en esta obra.

Creemos, pues, que la divulgación de las NOCIONES INTUITIVAS DE GEOMETRÍA — cuya traducción y adaptación hemos hecho por honroso encargo del profesor ENRIQUES — ha de contribuir a un mejoramiento de la enseñanza de la materia.

ÍNDICE

I. — Segmentos y ángulos. Regla, regla graduada y transportador

	Página
Plano, punto y recta.....	1
Semirrectas y segmentos.....	3
Comparación de segmentos.....	4
Suma y diferencia de segmentos. Múltiplos y submúltiplos.....	6
Medición de segmentos. Regla graduada.....	9
Porciones de plano. Ángulos.....	12
Ángulos cóncavos y llanos.....	14
Comparación de ángulos.....	15
Suma y diferencia de ángulos. Múltiplos y submúltiplos de un ángulo.....	17
Ángulos rectos, agudos y obtusos.....	21
Medición de los ángulos. Transportador.....	22
Ejercicios sobre el capítulo I.....	24

II — Posiciones notables de dos rectas. La escuadra

Rectas perpendiculares.....	26
Rectas paralelas.....	28
Ejercicios sobre el capítulo II.....	33

III. — Circunferencia y círculo. El compás

Definiciones.....	34
Diámetros y cuerdas. Arcos y sectores.....	35
Posiciones relativas de una recta y una circunferencia.....	38
Posiciones relativas de dos circunferencias o de dos círculos.....	39

IV. — Triángulos y polígonos

	Página
Triángulos.....	42
Relaciones entre los lados de un triángulo	43
Suma de los ángulos de un triángulo.....	44
Triángulos particulares y aplicaciones:	
a) Triángulos isósceles.....	46
b) Ángulos en el círculo.....	49
c) Triángulos rectángulos.....	51
Polígonos	52
Relaciones entre los lados de un polígono. Suma de los ángulos de un polígono	54
Ejercicios sobre el capítulo IV	57

V. — Igualdad de triángulos y de polígonos

Triángulos iguales.....	61
Polígonos iguales.....	66
Construcciones con regla y compás	66
Ejercicios sobre el capítulo V.....	73

VI. — Paralelogramos

Trapezio. Paralelogramo.....	74
Rombo, rectángulo y cuadrado	77
Distancia entre dos paralelas	79
Ejercicios sobre el capítulo VI.....	80

VII. — Polígonos regulares

Polígonos regulares. Inscripción de polígonos regulares.....	82
Ejercicios sobre el capítulo VII	88

VIII. — Medición de polígonos

	Página
Polígonos equivalentes	89
Medición de un polígono	90
Área del rectángulo y del cuadrado	92
Área del paralelogramo	95
Área del triángulo	96
Área de un polígono regular	98
Área del trapecio	99
Área de un polígono cualquiera	101
Ejercicios sobre el capítulo VIII	101
Tabla de las apotemas y de las superficies de algunos polígonos regulares de un metro de lado	105

IX. — Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones

Teorema de Pitágoras	107
Aplicaciones del Teorema de Pitágoras	110
Ejercicios sobre el capítulo IX	114

X—Longitud de la circunferencia y área del círculo

Longitud de la circunferencia	117
Área del círculo	121
Ejercicios sobre el capítulo X	125

XI. — Rectas y planos en el espacio

Rectas y planos en el espacio	130
Posiciones relativas de dos rectas en el espacio	132
Posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio	133
Recta y plano perpendiculares	135
Posiciones relativas de dos planos en el espacio. Planos paralelos	136
Diedros y secciones de diedros	137
Planos perpendiculares	139

XII — Ángulos poliedros y cuerpos poliedros

	Página
Ángulos triedros y poliedros.....	142
Prismas	145
Paralelepípedos.....	147
Desarrollo de la superficie del prisma.....	150
Pirámide	152
Desarrollo de la superficie de la pirámide.....	155
Cuerpos poliedros.....	158
Poliedros regulares	158
Ejercicios sobre el capítulo XII	161
Tabla de la superficie de los poliedros regulares de arista igual a un metro.....	162

XIII. — Medición de poliedros

Unidad de medida y volumen de los poliedros.....	163
Volumen del prisma.....	165
Volumen de la pirámide	171
Ejercicios sobre el capítulo XIII.....	174
Tabla de los volúmenes de los poliedros regulares de un metro de arista	177
Medida del volumen de los montones de pedregullo.....	178

XIV. — Cilíndro, cono y esfera

Cilindro. Generación, desarrollo, área y volumen	179
Cono. Idem.....	183
Esfera. Generación, área y volumen.....	188
Ejercicios sobre el capítulo XIV.....	197
Medida de la capacidad de los barriles.....	209

CAPÍTULO I

SEGMENTOS Y ANGULOS

REGLA, REGLA GRADUADA Y TRANSPORTADOR

Plano, punto y recta

1. Extendamos una hoja de papel de dibujo sobre un tablero bien liso. Ese papel será el **plano** sobre el cual dibujaremos.

A nuestro alrededor tenemos otros *planos*: el pizarrón, sobre el cual escribimos con tiza; el piso de la escuela, las paredes. También la superficie de un espejo, la superficie de un lago, etc., sirven para hacernos comprender lo que es un *plano*.

2. Con un lápiz, bien puntiagudo, se pueden marcar sobre la hoja del dibujo tantos **puntos** como se quiera. Para distinguir uno de otro escribiremos junto a cada uno de ellos una letra mayúscula de imprenta y los llamaremos: "punto A", "punto B", etc.

.B

.A

.C

.D

3. Si doblamos sobre sí misma nuestra hoja de papel y luego la extendemos nuevamente sobre el tablero, la señal del doblez nos dará la imagen de una **línea recta** o, como diremos en adelante por razones de simplicidad, de una **recta**.

Continuamente vemos en torno nuestro otras imágenes de rectas; tales son, por ejemplo, una arista del

tablero, un hilo delgado bien tirante, un rayo de luz que penetra en una pieza oscura por un pequeño agujero, etc.

Los decoradores de habitaciones, para trazar una recta sobre una pared, tienden junto a ésta una piola tiznada con negro de humo y, después de alejar su parte media de la pared, la sueltan bruscamente, de modo que pegue contra ella y deje su traza.

También los jardineros, para delinear el borde de un sendero *rectilíneo*, tienden una piola entre dos estacas clavadas en el terreno.

4. Para *dibujar una recta* sobre el papel se hace uso de una REGLA.

Apoyada la regla sobre la hoja, se hace deslizar a lo largo de uno de sus cantos la punta del lápiz, o de la pluma, o

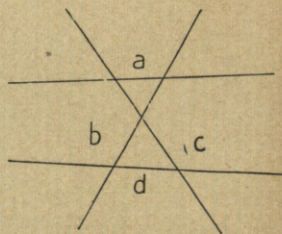


del tiralíneas. El trazo que así se obtiene sobre la hoja es más o menos largo según sea la longitud de la regla y el tamaño del papel. Pero nosotros pensaremos la recta como **ilimitada en sus dos sentidos**, es decir, como indefinidamente prolongada hacia uno y otro lado.

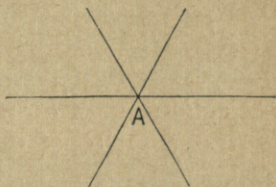
Para poder prolongar la recta tanto como se quiera, imaginaremos el plano como **ilimitado**.

Y por eso, si nuestro papel es demasiado pequeño para contener la prolongación del dibujo, le pegaremos otro al lado, en la parte que sea necesario.

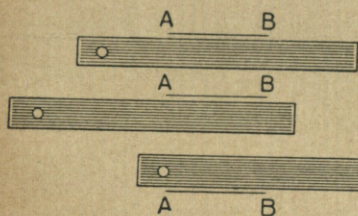
5. Sobre nuestro plano, podemos dibujar usando la regla, tantas rectas como lo deseemos. Para distinguirlas, escribiremos junto a cada una de ellas una letra minúscula y las llamaremos: “recta a”, “recta b”, “recta c”...



6. En el plano, por un punto A , podemos trazar, valiéndonos de la regla, tantas rectas como queramos. Pero tomado otro punto B , no podemos trazar más que una sola recta que pase por A y B ; es decir: dos puntos determinan una recta.



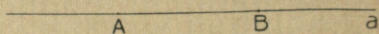
Esto se puede verificar observando que si entre los mismos dos puntos A y B tendemos sobre la hoja dos hilos — clavando por ejemplo un



alfiler en A y otro en B —, los dos hilos se tocan el uno con el otro.

La recta que pasa por dos puntos A y B se designa con el nombre de “recta AB ”.

NOTA. — Para trazar la recta AB se puede colocar la regla sobre el papel de varios modos, como puede verse en la figura. Pero si la regla es exacta se debe obtener siempre la misma recta.

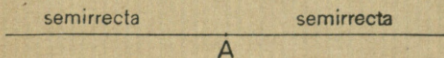


Se tiene así un modo de verificar la regla.

Semirrectas y segmentos

7. Sobre una recta podemos marcar cuantos puntos queramos.

La figura adjunta muestra que *todo punto A de una*



recta la divide en dos partes, cada una de las cuales es ilimitada en un solo sentido.

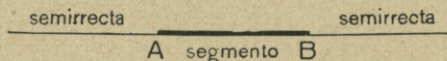
Cada una de las dos partes en que una recta queda dividida por uno de sus puntos A , se llama **semirrecta** o **rayo** de *origen* A .

Cada una de las dos semirrectas en que una recta queda dividida por uno de sus puntos se llama *prolongación* de la otra.

La semirrecta que tiene por origen el punto A y $\overbrace{\text{semirrecta } AB}^{\text{pasa por el punto } B}$, se llama "semirrecta AB ".

8. Se ve análogamente, en la figura que sigue, que una recta queda dividida por dos de sus puntos A y B en tres partes.

De las tres partes en que una recta queda dividida por dos de sus puntos A y B , la parte intermedia se

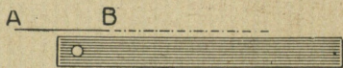


llama "segmento AB "; las otras dos partes son dos semirrectas llamadas *prolongaciones del segmento* AB .

El segmento AB se llama también *distancia* entre los dos puntos A y B .

Los puntos A y B se llaman *extremos* del segmento y los puntos de la recta AB comprendidos entre A y B se denominan *internos* o *interiores* al segmento.

Dado sobre el papel un segmento AB , si se lo quiere *prolongar*, del lado de B por ejemplo, se coloca la regla sobre la hoja, de modo que uno de sus cantos coincida con una parte de AB .

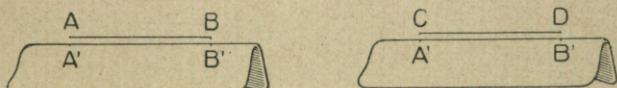


Comparación de segmentos

9. Comparando dos segmentos se reconoce si son **iguales** o si uno de ellos es **mayor** o **menor** que el otro.

Dados dos segmentos AB y CD , para verificar si ellos son iguales o no, se dobla sobre sí misma una tira de papel, y una vez colocado el borde rectilíneo del doblez sobre el segmento AB , se señalan sobre él los dos puntos A' y B' que coinciden con A y B respectivamente.

Después de esto se transporta la tira de papel de modo que el punto A' vaya a coincidir con el C y que el borde $A'B'$ del doblez caiga sobre la semirrecta CD . Si entonces el punto B' coincide con el D , llegamos a



la conclusión de que los segmentos AB y CD son iguales, y lo expresamos escribiendo:

$$AB = CD \text{ o } CD = AB.$$

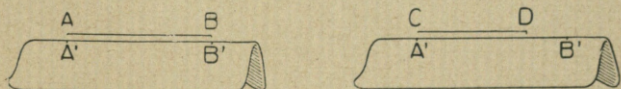
En caso contrario los dos segmentos son *desiguales*; y, precisamente, si B' va a caer entre C y D diremos



que AB es *menor* que CD o que CD es *mayor* que AB , y escribiremos:

$$AB < CD \text{ o } CD > AB.$$

Si en cambio B' va a caer sobre la prolongación

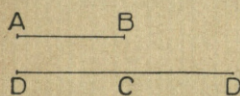


de CD (o sea en un punto *externo* a CD) diremos que

AB es mayor que CD , o que CD es menor que AB , y escribiremos:

$$AB > CD \text{ o } CD < AB.$$

10. Dada una recta y un punto C de ella, se pueden determinar sobre la recta dos segmentos que tengan un extremo en C y sean iguales a un segmento dado, AB .



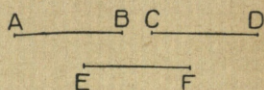
Basta transportar, como antes, el segmento AB sobre la recta, a partir de C , hacia uno y otro lado de este punto.

11. Se verifica fácilmente que:

Segmentos iguales a un mismo segmento son iguales entre sí.

Así, si $AB = CD$ y $EF = CD$ se tiene que

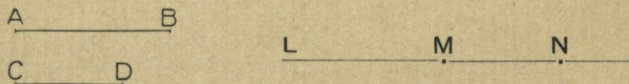
$$AB = EF.$$



Suma y diferencia de segmentos

Múltiplos y submúltiplos

12. SUMA DE DOS O MÁS SEGMENTOS. — Para sumar dos segmentos AB y CD , se llevan sobre una recta,



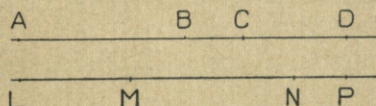
valiéndose (como en el n. 9) de una tira de papel, dos segmentos consecutivos LM y MN respectivamente iguales a AB y CD . El segmento LN se llama *suma*

del AB y del CD , y a estos últimos se les da el nombre de *sumandos*, escribiéndose:

$$AB + CD = LN.$$

Análogamente se encuentra la *suma de tres o más segmentos*.

13. En cada caso, *aunque se cambie el orden de los segmentos sumandos, no altera la suma*.



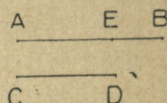
Se ve, por ejemplo, en la figura, que siendo

$$LM = CD, MN = AB, NP = BC$$

resulta

$$LP = AD.$$

14. DIFERENCIA DE DOS SEGMENTOS. — Para *restar* de un segmento AB otro segmento menor CD , se toma sobre AB , a partir de A , el segmento AE , igual a CD . El segmento EB se llama *diferencia* entre AB y CD , y se escribe



$$EB = AB - CD.$$

Análogamente AE se llamará *diferencia* entre AB y EB , y se escribirá

$$AE = AB - EB.$$

15. Se verifica fácilmente que: *Sumando a segmentos iguales, segmentos iguales, se obtienen segmentos iguales*.

Restando de segmentos iguales, segmentos iguales, se obtienen segmentos iguales.

16. MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DE UN SEGMENTO.—
 Dado un segmento AB , la suma de dos segmentos iguales a AB se llama *segmento doble* de AB , o *múltiplo* de AB según 2. Del mismo modo, la suma de tres, cuatro, cinco, ... segmentos iguales a AB se llama *múltiplo* de AB según 3, 4, 5, ... respectivamente.

Los múltiplos de AB se indican con $2AB$, $3AB$, $4AB$, $5AB$, ...

17. Señalemos un segmento AB sobre el borde rectilíneo de una tira de papel doblado y repleguemos ésta sobre si misma de modo que B vaya a coincidir con A . Habremos dividido así el segmento AB en dos *partes* iguales, cada una de las cuales recibe el nombre de *mitad* de AB o, también, de *submúltiplo* o *parte alicuota* de AB según 2.

Replegando otra vez la tira de papel, podemos dividir, el segmento AB en 4 partes iguales, luego en 8, y así sucesivamente.

Replegando la tira de papel convenientemente podemos dividir, también, el segmento AB en 3 partes iguales, etc.

En cada caso, cuando AB se ha dividido en un cierto número de partes iguales, cada una de ellas se llama *parte alicuota* o *submúltiplo* de AB .

Estos diversos submúltiplos se indican así:

$$\frac{AB}{2}, \frac{AB}{3}, \frac{AB}{4}, \dots$$

y se leen "una mitad de AB " (o un medio de AB), "un tercio de AB ", "un cuarto de AB ", etc.

18. Si dos segmentos son iguales, lo son también sus múltiplos según 2, 3, 4, ... respectivamente, lo mismo que sus mitades, sus tercios, sus cuartos, etc.

Medición de segmentos. Regla graduada

19. En el dibujo, para comparar segmentos (n. 9), transportarlos (n. 10), sumarlos (n. 12), etc., se emplea generalmente una REGLA GRADUADA, en lugar de la tira de papel doblado de que nos hemos servido hasta ahora.

Hay reglas graduadas de diferentes longitudes, pero la más usada en el dibujo es el *doble-decímetro*.

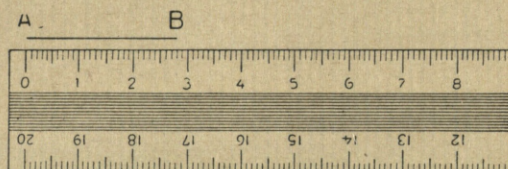
El doble-decímetro es una pequeña regla cuyos cantos están biselados y divididos en veinte espacios iguales entre sí, numerados de 0 a 20, cada uno de los cuales es un *centímetro*, o sea la centésima parte alícuota del *metro*. El metro es, como sabemos desde los primeros grados, la *unidad fundamental de medida para las longitudes*.

Cada uno de estos 20 centímetros está dividido, a su vez, en diez partes iguales o *milímetros*, y algunas veces cada milímetro está subdividido por mitades.

Esas divisiones con la numeración correspondiente constituyen la graduación de la regla.

20. Para medir un segmento AB , se apoya el doble-decímetro sobre el papel, de modo que uno de los cantos graduados coincida con la recta AB y el extre-

mo *A* coincida con el 0 de la graduación. Si el otro extremo *B* coincide con una de las divisiones de la graduación, por ejemplo con la 28ª (excluida la del 0),

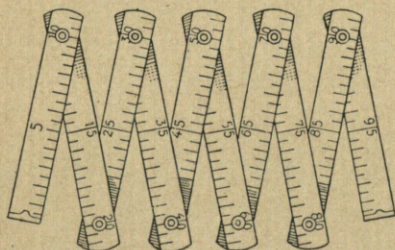


se dice que la *longitud* del segmento *AB* es de 28 mm. o que su *medida* en mm. es 28.

Finalmente, si *B* no coincide con ninguna división, quedará comprendido entre dos divisiones consecutivas, por ej. entre la 28.ª y la 29.ª. Entonces se dirá que la *longitud* de *AB aproximada* por defecto (en menos de 1 mm.) es de 28 mm, y que 29 mm. es la longitud del mismo segmento *aproximada* por exceso.

Si en este segundo caso se quisiera conocer en modo más preciso la longitud del segmento *AB*, sería necesario disponer de una regla graduada, con graduaciones más pequeñas; pero, como ya lo hemos dicho, las reglas graduadas que se usan en el dibujo están subdivididas, a lo sumo, en medios milímetros.

21. En la práctica, para medir longitudes, se usan otros instrumentos distintos de las reglas graduadas del dibujo.

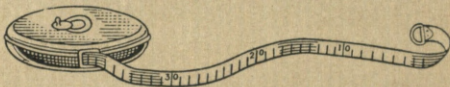


El tendero utiliza una regla de madera de un metro de largo, subdividido por medio de hendiduras en decímetros y centímetros.

El carpintero, para medir la longitud de una mesa, por ej., emplea un metro plegable, constituido por diez reglitas de madera unidas unas con otras por medio de pernos, siendo la distancia entre los dos pernos de cada reglita igual a 1 dm.

El sastre se sirve de una cinta de un metro y medio de largo, o sea de 15 dm. ó 150 cm.

Y para medir la longitud de un camino, de un muro, de una verja, etc., se usa un *decámetro* de cinta, o sea una cinta de 10 m. de largo que se guarda en un estuche de cuero, arrollada en torno de un perno giratorio por medio de una pequeña manivela.



En cada caso los metros usados en la práctica son iguales al *metro-patrón*, el cual está señalado sobre el canto de una regla de platino que se conserva desde 1799 en los Archivos de Francia, en París, y que es la cuarenta millonésima parte del meridiano terrestre, según la determinación de la Comisión geodésica francesa nombrada por la Asamblea Nacional en 1790.

22. Para medir las grandes longitudes que se presentan en la práctica (por ej. la longitud de un camino), se consideran otras unidades auxiliares: el *decámetro* (dam.), que es igual a 10 m.; el *hectómetro* (hm.), que es igual a 100 m., y el *kilómetro* (km.), que es igual a 1.000 m.

23. MEDICIÓN DE SEGMENTOS CON UNA UNIDAD CUALQUIERA. — Hemos visto cómo se mide un segmento en metros, decímetros, centímetros...

De un modo más general se puede medir un segmento por medio de otro cualquiera tomado como unidad.

Medir un segmento a por medio de un segmento b significa encontrar un submúltiplo de b que sea también un submúltiplo de a , o, como se dice comúnmente, que esté contenido en a un número exacto de veces.

Si se encuentra, por ej., que el tercer submúltiplo de b está contenido exactamente 5 veces en a , se tiene que

$$a = 5 \cdot \frac{b}{3}$$

o, como se suele escribir,

$$a = \frac{5}{3} b$$

que se lee « a es igual a 5 tercios de b ».

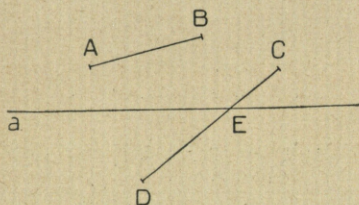
En tal caso se dice que $\frac{5}{3}$ es la «*medida* de a respecto de la unidad de medida b ».

Porciones de plano. Angulos

24. Si trazamos una recta sobre una hoja de papel y luego cortamos ésta a lo largo de la recta, la hoja queda dividida en dos partes.

Del mismo modo *el plano*, pensado como superficie ilimitada, queda **dividido por una recta**, trazada en él, en **dos partes**. Cada una de estas dos partes se llama **semiplano**.

25. Si después de haber dividido el plano en dos semiplanos con una recta a , se toman dos puntos A y B



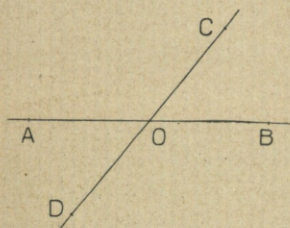
en un mismo semiplano y se unen por un segmento AB , dicho segmento AB queda totalmente en ese semiplano. Si en cambio se toma un punto C en un semiplano y un pun-

to D en el otro, el segmento CD atraviesa, o mejor dicho, corta a la recta a en un punto E .

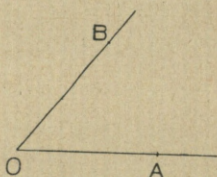
La parte CE de CD queda en un semiplano, y la parte ED en el otro.

26. Si por un punto O del plano trazamos dos rectas AB y CD , vemos que el plano queda **dividido en cuatro partes**.

Cada una de las cuatro partes en que el plano queda dividido por dos rectas que pasan por uno de sus puntos O , se llama **región angular**, o simplemente **ángulo**.

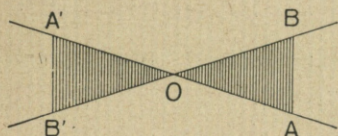


Un *ángulo* está limitado por dos semirrectas OA y OB , que tienen el mismo origen O . El ángulo se designa por



$\hat{AOB}$, el punto O se llama *vértice* y las semirrectas OA y OB *lados* del ángulo.

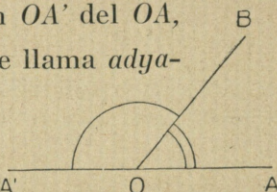
27. Dado un ángulo $\hat{AOB}$, si se trazan las prolongaciones OA' y OB' de sus lados, se forma el ángulo



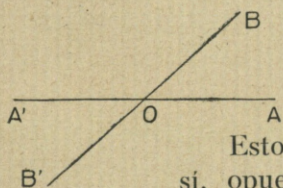
lo $\hat{A'OB'}$, que recibe el nombre de *opuesto por el vértice* al ángulo dado $\hat{AOB}$.

28. Si en cambio, dado un ángulo $\hat{AOB}$, se traza la prolongación de un solo lado, por ejemplo la prolongación OA' del OA , se obtiene un ángulo $\hat{BOA'}$, que se llama *adyacente* del $\hat{AOB}$.

29. Observando la figura vemos que un ángulo cualquiera



$\hat{AOB}$ tiene sólo un ángulo opuesto por el vértice y dos ángulos adyacentes: el $\hat{BOA'}$ y el $\hat{B'OA}$.



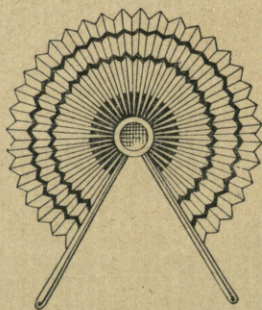
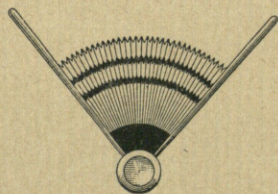
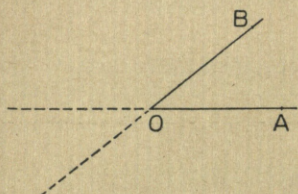
Estos dos últimos ángulos son, entre sí, opuestos por el vértice.

Ángulos cóncavos y llanos

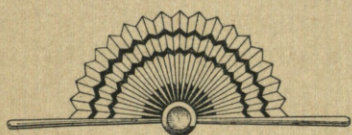
30. Dado un ángulo $\hat{A\hat{O}B}$, las dos semirrectas OA y OB dividen al plano en dos partes, de las cuales una es el mismo ángulo $\hat{A\hat{O}B}$ y la otra es el conjunto de sus dos ángulos adyacentes y su opuesto por el vértice. También a esta segunda parte se la llama más brevemente *ángulo*. Pero para distinguirla de la primera se dice *ángulo cóncavo* $\hat{A\hat{O}B}$, mientras que a la primera parte se le da el nombre de *ángulo convexo* $\hat{A\hat{O}B}$.

Se ve en la figura que si se considera el ángulo convexo $\hat{A\hat{O}B}$, las prolongaciones de sus lados quedan fuera del ángulo convexo $\hat{A\hat{O}B}$ (son *externas*); por el contrario, considerando el ángulo cóncavo $\hat{A\hat{O}B}$, las prolongaciones de los lados quedan dentro del ángulo cóncavo $\hat{A\hat{O}B}$ (son *internas*).

31. Una pantalla japonesa, cuando está poco abierta, nos da la idea de ángulo convexo, y cuando está casi del todo abierta nos da la de ángulo cóncavo.



Si sólo la abrimos hasta la mitad, de modo que las dos varillas se dispongan en línea recta, obtenemos la imagen de un ángulo cuyos dos lados son el uno



prolongación del otro, por lo que no se puede considerar como convexo ni como cóncavo.

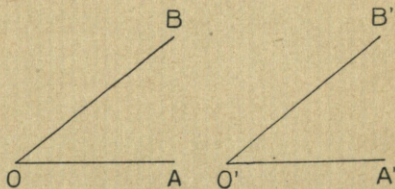
Un ángulo cuyos dos lados son el uno prolongación del otro se llama *ángulo llano*.

32. ADVERTENCIA. — Desde ahora en adelante, cuando nombremos un “ángulo $\hat{A\hat{O}B}$ ” sin decir nada más, entenderemos hablar del ángulo $\hat{A\hat{O}B}$ convexo.

Comparación de ángulos

33. Comparando dos ángulos se reconoce si son iguales o si uno de ellos es **mayor** o **menor** que el otro.

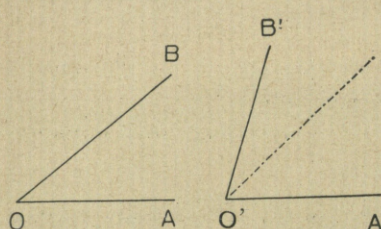
Dados dos ángulos $\hat{A\hat{O}B}$ y $\hat{A'\hat{O}'B'}$, para verificar si ellos son iguales o no, se transporta el ángulo $\hat{A\hat{O}B}$, recortando el papel o calcándolo sobre papel transparente, sobre el otro ángulo $\hat{A'\hat{O}'B'}$, haciendo coincidir el vértice O con el O' y el lado OA con el $O'A'$. Si el lado OB cae precisamente



sobre el $O'B'$, llegamos a la conclusión de que los dos ángulos son *iguales* y la expresamos escribiendo:

$$\hat{A}OB = \hat{A'O'B'} \text{ o } \hat{A'O'B'} = \hat{A}OB$$

En caso contrario los dos ángulos son *desiguales*; y, precisamente, si el lado OB va a caer en el inte-

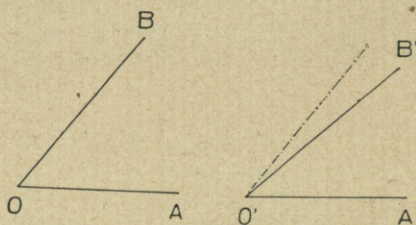


rior del ángulo $\hat{A'O'B'}$, el ángulo $\hat{A}OB$ es *menor* que el $\hat{A'O'B'}$, y este ángulo $\hat{A'O'B'}$, a su vez, es *mayor* que el $\hat{A}OB$,

lo que se indica del siguiente modo:

$$\hat{A}OB < \hat{A'O'B'} \text{ o } \hat{A'O'B'} > \hat{A}OB$$

En fin, si el lado OB cae en el exterior del ángulo $\hat{A'O'B'}$, se dice que el ángulo $\hat{A}OB$ es *mayor* que el $\hat{A'O'B'}$ o que el $\hat{A'O'B'}$ es *menor* que el $\hat{A}OB$, y se indica así:

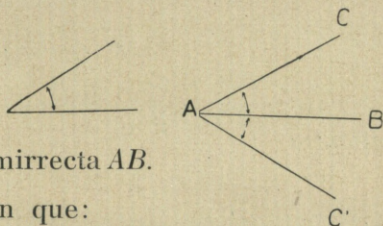


$$\hat{A}OB > \hat{A'O'B'} \text{ o } \hat{A'O'B'} < \hat{A}OB.$$

34. Recortando un ángulo, o calcándolo sobre papel transparente, se verifica que:

Dada sobre un plano una semirrecta AB , se pueden trazar por A dos semirrectas AC y AC' , que formen con la AB dos ángulos

$\widehat{BAC}$ y $\widehat{BAC'}$ iguales a uno dado.



Estos dos ángulos quedan a distinto lado de la semirrecta AB .

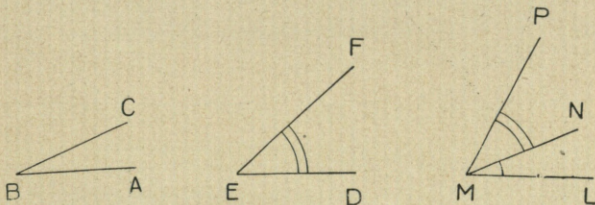
35. Se verifica también que:

a) *Ángulos iguales a un mismo ángulo son iguales entre sí.*

b) *Todos los ángulos llanos son iguales entre sí.*

Suma y diferencia de ángulos Múltiplos y submúltiplos de un ángulo

36. SUMA DE DOS O MÁS ÁNGULOS. Para sumar dos ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DEF}$, se construyen, a partir de una semirrecta ML y de un mismo lado de ella, dos ángulos



consecutivos $\widehat{LMN}$ y $\widehat{NMP}$, respectivamente iguales a los dados. (Esto se puede hacer recortando los ángulos dados o bien transportándolos calcados sobre papel transparente).

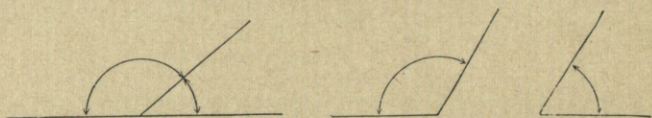
El ángulo $\widehat{LMP}$ así obtenido se llama *suma* del $\widehat{ABC}$

y del $\hat{D\hat{E}F}$, y a estos últimos se les da el nombre de *sumandos*, escribiéndose:

$$\hat{A\hat{B}C} + \hat{D\hat{E}F} = \hat{L\hat{M}P}.$$

Análogamente se encuentra la *suma de tres o más ángulos*.

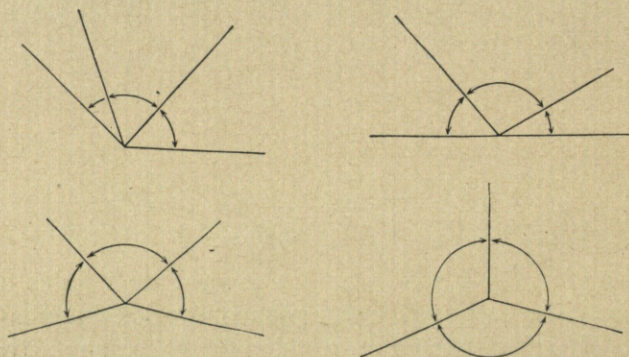
37. La suma de dos ángulos adyacentes (n. 28) es un ángulo llano.



38. Dos ángulos se llaman *suplementarios* cuando su suma es un ángulo llano.

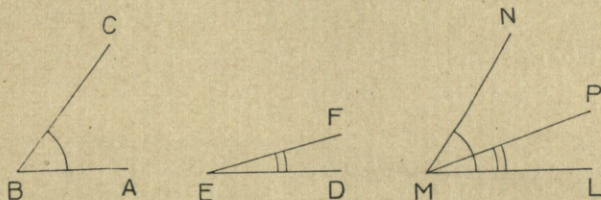
Un ángulo y su adyacente son suplementarios.

39. La suma de varios ángulos convexos (n. 30) puede ser igual a un ángulo convexo, o a uno llano, o



a un ángulo cóncavo y también a dos ángulos llanos (*ángulo de una vuelta*).

40. DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS. — Para encontrar la *diferencia* de dos ángulos desiguales $\hat{ABC}$ y $\hat{DEF}$, o — como se suele decir — para *restar* del ángulo mayor $\hat{ABC}$ el menor $\hat{DEF}$, se construye un ángulo LMN , igual



al mayor, esto es, al $\hat{ABC}$, y sobre él y a partir del lado ML se construye otro, $\hat{LMP}$, igual al menor $\hat{DEF}$.

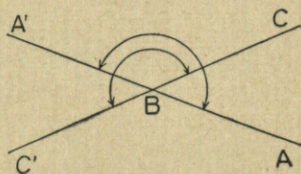
El ángulo $\hat{PMN}$, que queda formado, se llama *diferencia* entre el $\hat{ABC}$ y el $\hat{DEF}$, y se escribe :

$$\hat{ABC} - \hat{DEF} = \hat{PMN}.$$

41. Recortando ángulos de papel se verifica que : *Si a ángulos iguales se les suma o se les resta ángulos iguales, se obtienen ángulos iguales.*

42. Construido sobre la hoja del dibujo un ángulo $\hat{ABC}$, dibújese el opuesto por el vértice $\hat{A'BC'}$.

Si se recorta luego el ángulo $\hat{A'BC'}$ se verifica que se puede superponer exactamente sobre el $\hat{ABC}$, es decir, los dos ángulos son iguales.



Esto mismo se puede ver también de otro modo : Como todos los ángulos llanos son iguales (n. 35),

tendremos que el ángulo llano $\widehat{ABA'}$ que contiene a C , es igual al ángulo llano $\widehat{CBC'}$, que contiene a A' . (En la figura precedente estos dos ángulos se han señalado con flechas). Si ahora restamos de cada uno de ellos el mismo ángulo $\widehat{CBA'}$ obtendremos diferencias iguales (n. prec.); esto es, son iguales los dos ángulos opuestos por el vértice $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'BC'}$.

Hemos visto, pues, que:

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

43. MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DE UN ÁNGULO.—Dado un ángulo $\widehat{AOB}$, la suma de dos ángulos iguales a él se llama *ángulo doble* del $\widehat{AOB}$ (o *múltiplo* del $\widehat{AOB}$ según el número 2).

Del mismo modo, la suma de tres, cuatro, cinco, ... ángulos iguales al $\widehat{AOB}$ se llama *múltiplo* del ángulo $\widehat{AOB}$ según 2, 3, 4, ... respectivamente.

Los múltiplos del $\widehat{AOB}$ se indican con $2 \widehat{AOB}$, $3 \widehat{AOB}$, $4 \widehat{AOB}$, $5 \widehat{AOB}$, ...

44. Dado un ángulo $\widehat{AOB}$, recortándolo, o bien calcándolo sobre papel transparente, y doblándolo luego sobre sí mismo de modo que los lados se superpongan, quedará dividido en dos partes iguales por la semirrecta que determina el doblez. Esta semirrecta se llama *bisectriz* del ángulo, y cada una de las dos partes se denomina *mitad* del $\widehat{AOB}$.

En cada caso, cuando un ángulo $\widehat{AOB}$ está dividido en un cierto número de partes iguales, cada una

de éstas recibe el nombre de *parte alicuota* o *submúltiplo* del ángulo dado.

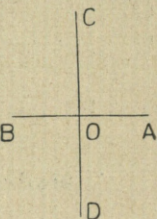
Estas diversas partes alicuotas se representan con

$$\frac{\hat{A\hat{O}B}}{2}, \frac{\hat{A\hat{O}B}}{3}, \frac{\hat{A\hat{O}B}}{4}, \dots$$

45. Si dos ángulos son iguales, son también iguales sus respectivos duplos, triplos, cuádruplos, etc., lo mismo que sus respectivos medios, tercios, cuartos, etc.

Ángulos rectos, agudos y obtusos

46. Dibujemos sobre el papel una recta AB y señalemos sobre ella un punto O . Doblándolo ahora de modo que coincidan las semirrectas OA y OB , y desdoblándolo luego, el doblez dejará la señal de una recta CD , que divide por mitades a cada uno de los ángulos llanos $\hat{A\hat{O}B}$.



Tendremos, por lo tanto, que:

$$\hat{A\hat{O}C} = \hat{C\hat{O}B} \text{ y } \hat{B\hat{O}D} = \hat{D\hat{O}A}$$

Pero como $\hat{A\hat{O}C}$ y $\hat{B\hat{O}D}$ son opuestos por el vértice, también ellos son iguales (n. 42); de modo que los cuatro ángulos

$$\hat{A\hat{O}C}, \hat{C\hat{O}B}, \hat{B\hat{O}D} \text{ y } \hat{D\hat{O}A}$$

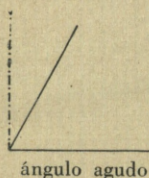
en que el plano queda dividido por las rectas AB y CD son todos iguales.

Cada uno de estos cuatro ángulos se llama *recto*. Se dice, pues, que un ángulo es *recto* cuando es la mitad de un ángulo llano.

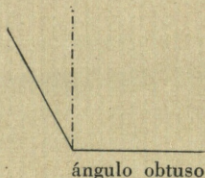
47. Cada ángulo recto es igual a su suplementario; o sea, el suplementario de un ángulo recto es también un ángulo recto.

48. Como todos los ángulos llanos son iguales (n. 35) y cada ángulo recto es mitad de un ángulo llano, todos los ángulos rectos son iguales (n. 45).

49. Todo ángulo menor que un recto se llama *agudo*, y todo ángulo mayor que un recto se llama *obtuso*.



ángulo agudo



ángulo obtuso

Si dos ángulos suplementarios son desiguales (no rectos), uno

de ellos es agudo y el otro obtuso.

Medición de los ángulos. Transportador

50. Para medir los ángulos se adopta como unidad fundamental la 90-ava parte del ángulo recto, la cual se llama *grado*, y se indica así: 1° .

Si un ángulo es múltiplo de un grado según un cierto número, por ej. según el número 27, se dice que la *amplitud* del ángulo dado es de 27 grados, o que su medida en grados es 27, y se escribe « 27° ».

Se dirá, por lo tanto, que la amplitud de un ángulo recto es de 90° y la de un ángulo llano de 180° .

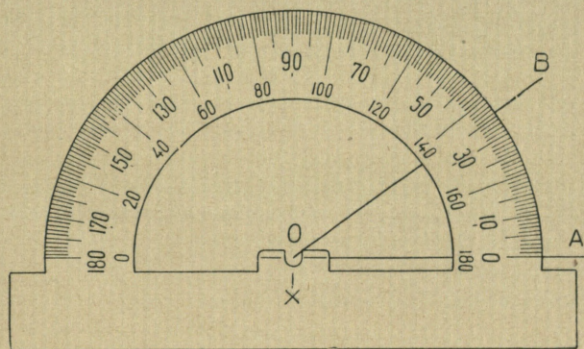
51. Para medir un ángulo que no sea múltiplo exacto de un grado, se toma como unidad auxiliar el

minuto, que es la 60-ava parte de 1° , y el *segundo*, que es la 60-ava parte del minuto, o sea la 3600-ava parte de 1° .

Un minuto se escribe $1'$, y un segundo $1''$.

Así se dirá, por ej., que la amplitud de un ángulo es $35^\circ 26' 13''$, esto es, 35 grados 26 minutos y 13 segundos, si el ángulo es igual a la suma de 35 ángulos iguales a un grado, más 26 ángulos iguales a un minuto, más 13 ángulos iguales a un segundo.

52. En el dibujo, para medir los ángulos, lo mismo que para compararlos (n. 33), sumarlos (n. 36), etc., se usa el SEMICÍRCULO GRADUADO O TRANSPORTADOR, que es el instrumento representado en la figura siguiente.



El borde curvo externo del transportador está subdividido en 180 intervalos por medio de marcas rectilíneas, las cuales, prolongadas, pasan todas por el punto medio O del borde rectilíneo interno, y corresponden a la división del ángulo llano que tiene su vértice en O y los lados sobre el borde rectilíneo, en 180 grados. Algunos transportadores tienen el punto O y los lados del ángulo llano sobre el borde rectilíneo exterior, lo

que se reconoce mirando la línea recta que va de 0 a 180.

Las divisiones del transportador están numeradas de 10 en 10, tanto en un sentido como en el otro, a fin de que se puedan medir los ángulos en ambos sentidos.

Para medir un ángulo $\hat{AOB}$ con el transportador, se coloca éste sobre el ángulo, como está indicado en la figura anterior, y la graduación numerada permite asignar fácilmente la amplitud en grados del $\hat{AOB}$.

Por ej., en el caso de la figura, la amplitud del $\hat{AOB}$ es de 36° .

EJERCICIOS SOBRE EL CAPÍTULO I

Advertencia. — Los ejercicios se suceden por grupos en el mismo orden de la materia desarrollada en el texto, y en cada grupo están dispuestos por orden de dificultad creciente.

Al principio de cada grupo de ejercicios se ha indicado, en el margen, el último número del texto cuyo conocimiento es necesario para la resolución de aquéllos.

- [8] 1. Dados sobre el papel varios puntos A, B, C, D , dibújese, utilizando la regla: la recta AB , la semirrecta AC , el segmento CD ,...
- [20] 2. Dibújese un segmento de 2 cm. de largo, otro de 3,5 cm. y la suma de ellos.
3. Dibújese un segmento de 7,3 cm. de largo, otro de 3,9 cm. y la diferencia de ellos.
4. Dibújese un segmento de 2,3 cm. de largo y su quintuplo.
5. Dibújese un segmento de 13,5 cm. de largo y su tercio.
- [52] 6. ¿Cuál es la amplitud de $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}$ de ángulo recto?
7. ¿Cuántos grados gira un soldado al hacer «flanco derecho» o «flanco izquierdo» o «media vuelta»?

8. ¿Cuál es la amplitud del ángulo que con la dirección del Norte forma una veleta giratoria alrededor de un perno vertical, cuando el viento sopla del Este, o del Sud-Oeste, o del Norte, o del Norte-Nordeste? (Valerse de un pequeño croquis).

9. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a la 1h, a las 3h, a las 4h, a las 6h, a las 12h, a las 3h 30mn, a las 5h 10mn?

10. Dibújese con el transportador un ángulo de 19° , otro de 27° y la suma de ellos.

11. Dibújense con el transportador tres ángulos de 39° , 43° y 83° , y la suma de ellos.

12. Dibújense con el transportador dos ángulos de 73° y 39° y la diferencia de ellos.

13. Dibújese con el transportador un ángulo de 21° y su triplo.

14. Dibújese un ángulo de 72° y su tercio.

15. Un ángulo es la quinta parte de su adyacente. ¿Cuál es su amplitud?

16. ¿Cuál es la amplitud de dos ángulos adyacentes de los cuales uno es múltiplo según 5 del submúltiplo según 4 del otro?

17. Un ángulo supera en $35^\circ 48'$ a su adyacente. ¿Cuál es la amplitud del ángulo considerado?

18. ¿Cuál es la amplitud del suplemento de un ángulo de 57° ?

19. ¿Cuál es la amplitud del suplemento de un ángulo de $120^\circ 46'$?

20. ¿Cuál es la amplitud del suplemento de la suma de dos ángulos de 37° y 45° ?

21. ¿Cuál es la amplitud del suplemento de la suma de dos ángulos de $37^\circ 51'$ y $42^\circ 38'$?

22. Llamando *complementarios* a dos ángulos cuya suma sea igual a un ángulo recto, hállese la amplitud del complemento de 50° , 30° , 70° , 25° , 13° , 89° , $7\frac{1}{2}^\circ$, 45° , $36\frac{1}{4}^\circ$, $30\frac{1}{4}^\circ$.

23. ¿Cuál es la amplitud de un ángulo que es doble de su complemento?

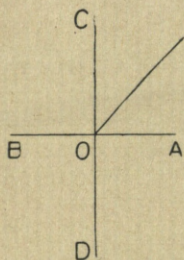
24. Un ángulo es igual a $\frac{2}{5}$ de su complemento. ¿Cuál es la amplitud del ángulo y la de su complemento?

II

POSICIONES NOTABLES DE DOS RECTAS. LA ESCUADRA

Rectas perpendiculares

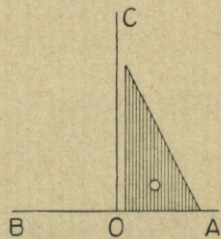
53. Se dice que dos rectas AB y CD son *perpendiculares* entre sí cuando se cortan en un punto O y dividen al plano en cuatro ángulos rectos.



Cada recta que pasa por O y es distinta de la CD forma con la AB ángulos adyacentes desiguales, y no es, por lo tanto, perpendicular a la AB . En tal caso se dice, en cambio, que es oblicua.

Vemos así que: *Por un punto O de una recta AB pasa una sola perpendicular a dicha recta AB .*

54. Dada una recta AB y un punto de ella O , para trazar por dicho punto la perpendicular a la recta AB basta (como lo vimos en el número 46) doblar el papel de modo que coincidan las dos semirrectas en que queda dividida la recta AB por el punto O .

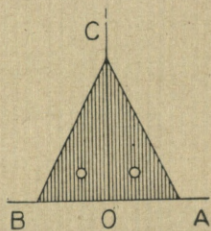


Sin embargo, en el dibujo se adopta habitualmente la ESCUADRA, como lo indica la figura adjunta.

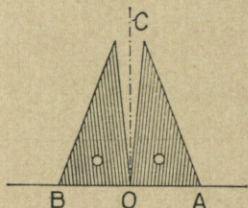
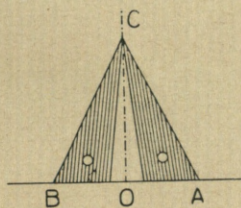
Los ángulos $\hat{AOC}$ y $\hat{BOC}$, ambos rectos, son iguales; por eso si damos vuelta la escuadra hasta que caiga del otro lado de OC , ella deberá superponerse exactamente sobre el ángulo $\hat{BOC}$.

Tenemos así un modo para *verificar* si la escuadra es exacta.

Cuando se ha verificado *una vez* la escuadra se puede estar seguro de que todas las construcciones que se ejecuten con ella resultarán exactas.



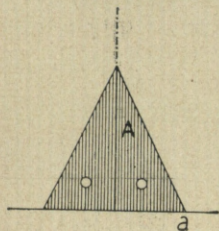
55. En las figuras siguientes tenemos ejemplos de escuadras *inexactas* o, como también se dice, de escuadras *falsas*.



56. La escuadra se puede usar también para trazar la perpendicular a una recta a por un punto dado A fuera de ella.

Basta para esto hacer deslizar la escuadra sobre el plano, de modo que uno de los lados del ángulo recto se apoye sobre la recta a , hasta que el otro lado pase por el punto A . Trazando la recta que contiene a este último lado se obtiene la perpendicular buscada.

El segmento de perpendicular comprendido entre A y su encuentro con la recta a (pie de la perpendicular) se llama *distancia* del punto A a la recta a .



57. Dada una recta a , por un punto A , fuera de ella, pasa una sola perpendicular a dicha recta a .

Esto se verifica con una escuadra exacta.

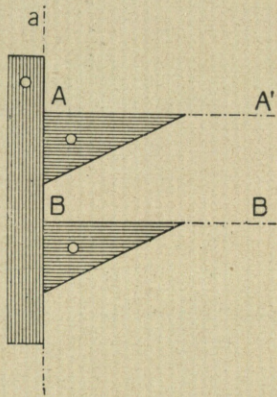
Rectas paralelas

58. Valiéndonos de una regla tracemos una recta a y, dejando fija la regla a lo largo de a , coloquemos la escuadra sobre el plano, con el vértice del ángulo recto en un punto A de a y una arista apoyada sobre la regla, de modo que se pueda trazar por A la perpendicular AA' a la recta a (n. 54).

Si, teniendo siempre fija la regla, hacemos deslizar la escuadra a lo largo de aquélla, vemos que todos los puntos de la arista que antes coincidía con AA' , ahora se alejan igualmente de AA' ; y lo mismo sucede manifiestamente con cada punto de las prolongaciones de esta arista.

Luego la perpendicular BB' a la a en un punto B distinto del A , queda toda del mismo lado de la recta AA' y, por lo tanto, no la puede encontrar.

Las rectas AA' y BB' se llaman *paralelas*.

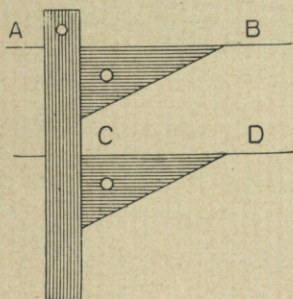


En general, dos rectas se llaman *paralelas* cuando están en un mismo plano y no tienen ningún punto común.

59. De lo que acabamos de ver resulta también que:
Todas las perpendiculares a una misma recta son paralelas entre sí.

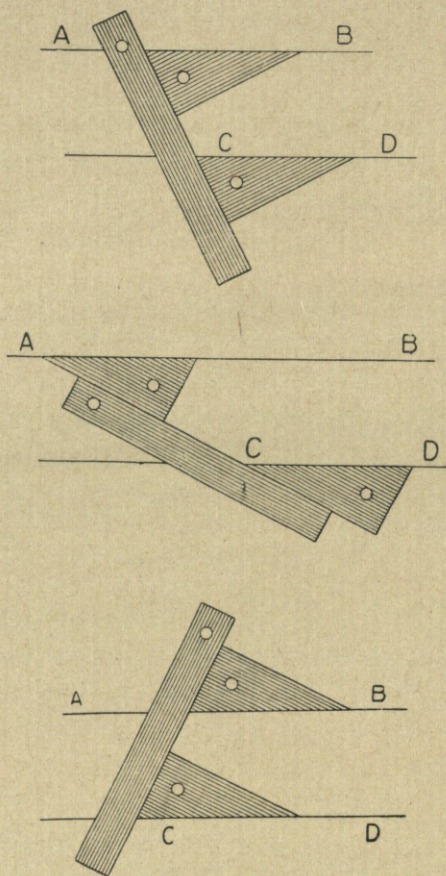
60. En segundo lugar el n. 58 nos enseña cómo, con la regla y la escuadra, se puede *conducir por un punto C dado fuera de una recta AB, una paralela a dicha recta.*

Para ello se coloca la escuadra sobre el plano con un lado del ángulo recto a lo largo de la recta *AB* y,



haciendo coincidir la regla con el lado de la escuadra que queda perpendicular a *AB*, se hace correr la escuadra manteniendo su contacto con la regla, hasta que el lado que antes estaba sobre *AB* pase por *C*. Se traza entonces la recta *CD*, que será la paralela a la *AB* que se buscaba.

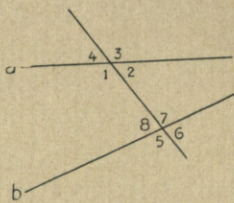
61. Es importante observar que la misma construcción se puede efectuar también apoyando sobre la recta *AB* el lado de la escuadra opuesto al ángulo recto (véase la figura siguiente), obteniéndose por *C* una recta paralela a la *AB*, *cualquiera que sea la amplitud del ángulo de la escuadra que se hace correr a lo largo de la regla.*



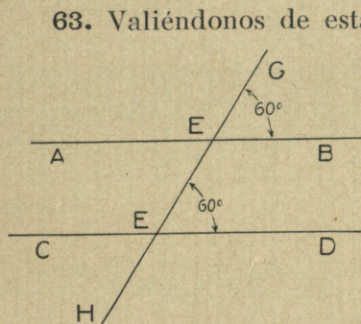
62. Ahora será conveniente dar nombres a los ocho ángulos que dos rectas a y b del plano forman con una tercera recta c , que las corte, llamada *transversal*.

Designaremos por números los ángulos así formados en la figura.

Los ángulos, tales como el $\hat{2}$ y $\hat{6}$, se llaman *correspondientes*; así, son también *correspondientes* los ángulos $\hat{3}$ y $\hat{7}$, o bien los ángulos $\hat{4}$ y $\hat{8}$, o por último, los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{5}$.

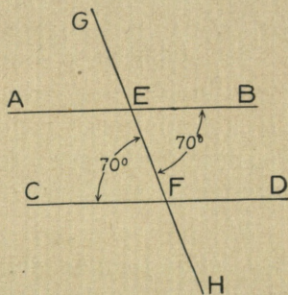


En cambio, los ángulos $\hat{2}$ y $\hat{8}$, o bien $\hat{1}$ y $\hat{7}$, se llaman *alternos internos*, y los ángulos $\hat{3}$ y $\hat{5}$ ó $\hat{4}$ y $\hat{6}$ *alternos externos*.



63. Valiéndonos de estas denominaciones, y recordando lo observado anteriormente (n. 61), podemos enunciar la siguiente regla para verificar si dos rectas son paralelas: *Dos rectas que forman con una transversal dos ángulos correspondientes iguales son paralelas.*

64. En lugar de la regla precedente podemos servirnos también de esta otra: *Dos rectas que forman con una transversal dos ángulos alternos internos, o alternos externos, iguales, son paralelas.*



Por ej., dadas las rectas AB y CD, y la transversal GH,

tales que los ángulos alternos internos $\hat{FEB}$ y $\hat{EFC}$ sean ambos iguales a 70° , resultará que el opuesto por el vértice al ángulo $\hat{EFC}$, o sea el $\hat{HFD}$, será también

de 70° (n. 42). Luego tendremos que son iguales los ángulos correspondientes $\hat{FEB}$ y $\hat{HFD}$ y, por lo tanto, que las rectas AB y CD son paralelas (n. 63).

65. Por un punto C , dado fuera de una recta AB , sabemos trazar, con la regla y la escuadra, una paralela a dicha recta AB , pudiendo hacer esta construcción de varios modos (n. 60 y 61). Pero basta observar la figura para ver que se debe obtener siempre la misma paralela.

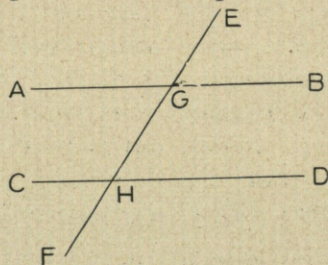
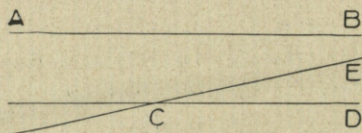
En verdad, si CD es la paralela a la recta AB que hemos obtenido empleando la regla y la escuadra de un cierto modo (por ej. el explicado en el n. 60), vemos que cualquiera otra recta que pase por C y sea distinta de la CD , prolongada suficientemente, termina por pasar al otro lado de AB y, por lo tanto, la corta en un punto; es decir, no es paralela.

Se tiene, pues, que:

Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a dicha recta.

66. Dibujadas sobre el papel dos rectas paralelas, y conducida una transversal cualquiera, se verifican, recortando el papel, las siguientes propiedades:

Si dos rectas son paralelas, ellas forman con una transversal cualquiera: 1) ángulos correspondientes iguales; 2) ángulos alternos internos iguales; 3) ángulos alternos externos iguales.



67. Resulta de esto que:

Si dos rectas son paralelas, toda perpendicular a una de ellas es perpendicular a la otra.

EJERCICIOS SOBRE EL CAPÍTULO II

25. Dibújese un ángulo $\hat{ABC}$ de 42° y su adyacente, y determínese la amplitud del ángulo de las bisectrices (*) de los dos ángulos considerados. [53]

26. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes cualesquiera son perpendiculares.

27. Dibújense dos rectas paralelas (con regla y escuadra) y por medio del transportador trácese una transversal que forme con una de las paralelas un ángulo de 35° . Escribase sobre cada uno de los otros siete ángulos su correspondiente amplitud, sin medirla. [67]

28. Uno de los ángulos internos determinados por dos rectas paralelas con una transversal es de $68^\circ 43' 25''$. Calcúlense los demás ángulos.

29. Dos rectas paralelas están cortadas por una tercera recta de modo que cada una de aquellas forma con la transversal dos ángulos adyacentes, tales que uno de ellos es $\frac{4}{5}$ del otro. ¿Qué parte de recto es cada uno de los ángulos que forma la transversal con las paralelas?

(*) Utilícese el transportador para el trazado de las bisectrices.

III

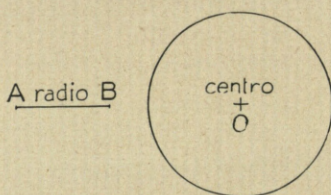
CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO. EL COMPÁS

Definiciones

68. Fijemos un pincho sobre un punto O del plano y atémosle el extremo de un hilo. A una cierta distancia del punto O atemos al hilo un lápiz (o una tiza) y hagámoslo girar en torno de O , manteniendo tirante el hilo, hasta que vuelva a la posición de partida.

Obtendremos así, sobre el plano, una **línea cerrada** cuyos puntos estarán todos a la misma distancia de O . Esta línea es una *circunferencia*.

De modo que: Dado un punto O y un segmento AB , se llama *circunferencia* de centro O y radio AB ,



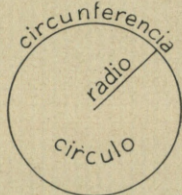
la *línea* formada por los puntos del plano que se encuentran a una distancia de O igual al segmento AB .

En el dibujo, para describir una circunferencia, se hace uso de un compás, del cual una punta contiene una mina o bien un tiralíneas.

69. Como puede verse en la figura, la circunferencia divide al plano en dos partes:

1.º El *circulo* o región plana de los puntos, llamados *internos*, cuya distancia a O es menor que el radio.

2.º La región plana de los puntos, llamados *externos*, cuya distancia a O es mayor que el radio.



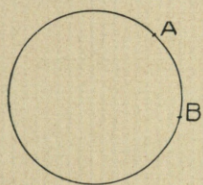
La circunferencia y el círculo se designan indicando su centro y el radio, y, cuando no haya posibilidad de equivoco, indicando sólo el centro.

70. Dos *circunferencias* o dos *circulos* de igual radio son iguales.

Esto se verifica por superposición.

Diámetros y cuerdas. Arcos y sectores

71. Marcado un punto A sobre una circunferencia, ésta — al revés de lo que ocurre con la recta — no queda dividida en dos partes, debido a que la circunferencia es una **línea cerrada**.



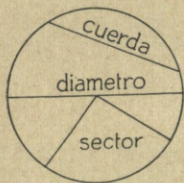
Pero si en cambio marcamos dos puntos A y B sobre la circunferencia, ella queda dividida en dos partes que se llaman *arcos* (de circunferencia).

72. Todo segmento que tiene sus extremos sobre la circunferencia se llama *cuerda*.

A cada arco AB de la circunferencia le corresponde una cuerda que se dice *subtendida* por el arco.

Las cuerdas que pasan por el centro se llaman *diámetros*.

73. Los *diámetros* de una *circunferencia* son todos iguales, por ser duplos del radio (n. 18).



74. Trazando una cuerda en un círculo, y examinando la figura, se ve que los puntos de una cuerda, *excluidos los extremos*, son *internos al círculo*.

75. Dos radios OA y OB de un círculo, lo dividen en dos partes que reciben el nombre de *sectores circulares*.

Los dos ángulos $\widehat{AOB}$, tanto el convexo como el cóncavo, se llaman *ángulos al centro* o *ángulos centrales*.

A cada arco AB y a cada sector AOB le corresponde un determinado ángulo al centro.

76. De un modo semejante al seguido con los segmentos (n. 9) y con los ángulos (n. 33), se pueden comparar dos arcos (o dos sectores) de una misma circunferencia (o círculo) o de circunferencias (o círculos) iguales; y se puede verificar si ellos son **iguales** o, en caso contrario, cuál es el **mayor** y cuál el **menor**.

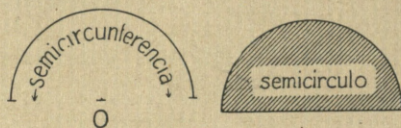
También se verifica que:

En una misma circunferencia o círculo y en circunferencias o círculos iguales, a arcos o sectores iguales corresponden ángulos centrales iguales; y a arcos o sectores desiguales corresponden ángulos centrales desiguales en el mismo sentido, y viceversa.

Por eso, para construir el transportador, basta dividir en 180 arcos iguales al arco externo.

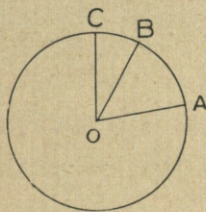
77. En particular son iguales los dos arcos en que queda dividida una circunferencia por uno de sus diámetros, porque corresponden a ángulos centrales iguales por ser llanos.

A estos dos arcos determinados por un diámetro se les da, por eso, el nombre de *semicircunferencias*.



También son iguales los dos sectores en que queda dividido un círculo por uno de sus diámetros; y por esa razón se los llama *semicírculos*.

78. Es fácil imaginarse el modo de *sumar* dos o más arcos o sectores (de una misma circunferencia o círculo, o de circunferencias o círculos iguales), y cómo se *resta* de un arco o sector otro arco o sector (de la misma circunferencia o círculo, o de circunferencias o círculos iguales).



Así, $\text{arco } AB + \text{arco } BC = \text{arco } AC$,

y $\text{sector } AOB + \text{sector } BOC = \text{sector } AOC$.

$\text{Arco } AC - \text{arco } BC = \text{arco } AB$.

$\text{Sector } AOC - \text{sector } BOC = \text{sector } AOB$.

79. Resulta directamente de la figura que: *Al arco o sector suma de dos o más arcos o sectores, le corresponde un ángulo al centro, que es suma de los ángulos centrales correspondientes a los respectivos sumandos.*

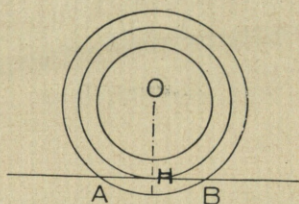
Análogamente para la diferencia.

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

80. Para las construcciones con compás es importante examinar aquí las posiciones relativas de una recta y una circunferencia o de dos circunferencias entre sí.

Comencemos por considerar una recta y una circunferencia.

Dada una recta y tomado un punto O fuera de ella, bajemos desde él la perpendicular OH a la recta.



Si con centro en O describimos una circunferencia de radio menor que la distancia OH de O a la recta, vemos que la circunferencia y la recta no tienen ningún punto común, o, como se suele decir, que la

recta es externa a la circunferencia.

Si en cambio, manteniendo el centro en O , tomamos un radio mayor que OH , vemos que la circunferencia *atraviesa* dos veces la recta, o sea, *la circunferencia y la recta se cortan en dos puntos.*

Si, por último, trazamos la circunferencia de centro O y radio OH (distancia de O a la recta) vemos que la circunferencia y la recta sólo tienen un punto común, que es el H , es decir, son *tangentes* en H .

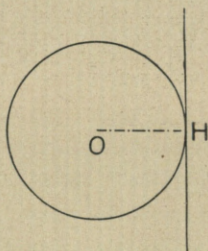
En resumen:

Una circunferencia y una recta no tienen puntos comunes si la recta está a una distancia del centro mayor que el radio; son tangentes si la distancia del

centro a la recta es igual al radio; se cortan en dos puntos si la distancia del centro a la recta es menor que el radio.

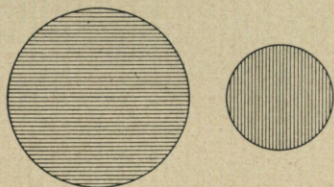
81. Si por el extremo H de un radio de una circunferencia O , trazamos la perpendicular a OH , esta perpendicular estará a una distancia de O igual al radio OH , y por lo tanto será tangente a la circunferencia.

Tenemos, pues, que: *La perpendicular a un radio de una circunferencia, en su extremo, es tangente a la circunferencia.*



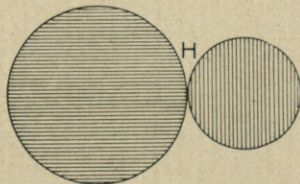
Posiciones relativas de dos circunferencias o de dos círculos

82. Para ver las diferentes posiciones relativas en que pueden encontrarse, en el plano, dos círculos, recortemos dos círculos de papel y coloquémolos sobre el plano.

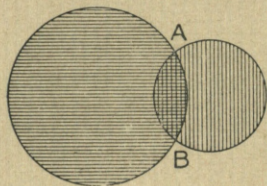


Ellos pueden *no tener ningún punto común* o, como se suele decir, *ser externo el uno al otro.*

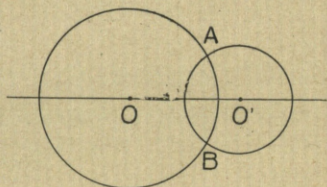
Aproximando los dos círculos, pueden ser colocados de tal manera que tengan un solo punto común H , del contorno, y ningún otro fuera de él. Entonces los dos círculos o las dos circunferencias se dirán *tangentes exteriormente* en el punto H (punto de contacto).



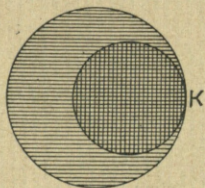
83. Acercando más el centro de uno de los círculos al del otro, tendremos primeramente que ellos se recubren en parte, y entonces es evidente que los dos contornos, es decir, sus respectivas circunferencias, se atraviesan o, como suele decirse, *se cortan mutuamente* en dos puntos *A* y *B*.



Estos dos puntos *A* y *B* quedan en semiplanos opuestos respecto de la recta *OO'* que une los dos centros. En efecto, si se dobla la hoja a lo largo de la recta *OO'* hasta hacer coincidir los dos semiplanos, las dos semicircunferencias de uno de éstos se superponen exactamente sobre las del otro y, por lo tanto, los dos puntos *A* y *B* van a coincidir.



84. Tomando nuevamente los dos círculos, podemos poner uno sobre el otro, de modo que el menor resulte totalmente interno al mayor y que las circunferencias de ambos tengan un sólo punto común (punto de contacto).

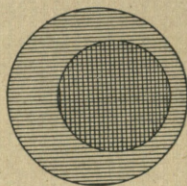


En tal caso se dice que *el círculo (o la circunferencia) menor es tangente interiormente al círculo (o a la circunferencia) mayor* (°).

Por último, moviendo un poco más el círculo menor, podemos conseguir que él quede en el interior

(°) Es claro que si los dos círculos son iguales y se procura que se toquen internamente, se superponen exactamente.

del otro sin que las circunferencias respectivas tengan ningún punto común. En tal caso se dice, sencillamente, que el círculo menor es *interno* al mayor.



85. Las observaciones precedentes nos permiten concluir que:

Dos circunferencias de un plano: o no tienen ningún punto común (y son la una externa a la otra o sino la menor interna a la mayor); o son tangentes en un punto (exterior o interiormente); o se cortan en dos puntos situados en semiplanos opuestos respecto de la recta de los centros.

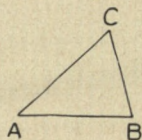
IV

TRIÁNGULOS Y POLÍGONOS

Triángulos

86. Tomemos en el plano tres puntos A , B y C , no pertenecientes a una misma recta.

Los tres ángulos $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ y $\widehat{BAC}$ son tales que cada punto común a dos de ellos es, también, interno al tercero.

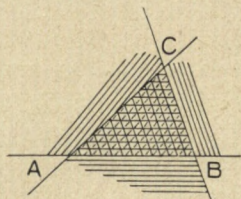


Puede verse esto en la segunda de las figuras adjuntas, en la que cada uno de los tres ángulos está rayado de distinto modo. La región de los puntos comunes a los tres ángulos resulta cubierta por un triple rayado.

87. Dados tres puntos A , B y C , no pertenecientes a una misma recta, se llama *triángulo* ABC a la figura constituida por los puntos comunes a los tres ángulos (convexos)

$\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ y $\widehat{BAC}$.

El triángulo ABC resulta ser, pues, la parte del plano limitada por el conjunto de los tres segmentos AB , BC y CA .



Los tres ángulos $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ y $\widehat{BAC}$ se llaman *ángulos del triángulo*, y sus vértices, *vértices del triángulo*.

Los tres segmentos AB , BC y CA se llaman *lados* del triángulo; el conjunto de los lados recibe el nombre de *contorno*, y la suma de ellos el de *perímetro*.

88. A veces, cuando no hay peligro de confusión, al *contorno del triángulo* se le suele llamar simplemente *triángulo*.

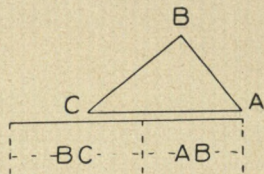
89. Dado un triángulo ABC , es frecuente llamar *base* a uno cualquiera de sus lados, como si se pensara que el triángulo estuviera apoyado sobre ese lado.

Tomando, por ej., el lado AB como base, se llama *altura* correspondiente a ese lado a la distancia (n. 56) del vértice *opuesto* C a la recta AB . Conviene notar que el pie de esta altura (o sea el punto de encuentro de la perpendicular a AB , trazada por C , con la recta AB) puede muy bien caer en una de las prolongaciones del lado AB .

Cada uno de los tres lados del triángulo se puede tomar como base, y como a cada base le corresponde una altura, el triángulo tendrá tres alturas (por lo general desiguales).

Relaciones entre los lados de un triángulo

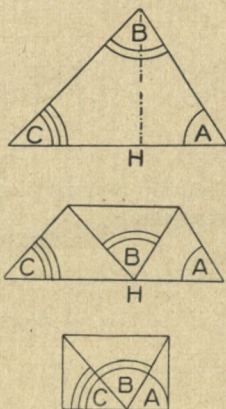
90. Dibujemos un triángulo ABC y extendamos un hilo de A a C pasando por B , o sea sobre los lados AB y BC . Si la misma porción de hilo se estira sobre la semirrecta AC a partir de A , ella recubre el lado AC y lo sobrepasa algo más.



Lo mismo se puede verificar para el lado AB y para el lado BC , de modo que: *En todo triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos.*

Suma de los ángulos de un triángulo

91. Recortemos en el papel un triángulo ABC . Consideremos el lado mayor ^(o), que en nuestra figura es el AC , o cualquiera de los tres si fueran iguales, y tracémosle la altura correspondiente BH valiéndonos de la escuadra (n. 56) o bien doblando el papel de modo que el doblez pase por B y el lado AC se repliegue sobre sí mismo (n. 46).



Si ahora doblamos las tres puntas del triángulo de modo que los tres vértices queden reunidos en H , veremos que la suma de los tres ángulos del triángulo da un ángulo llano, o sea 180° .

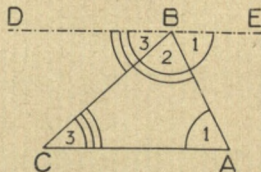
Puesto que la misma verificación se puede repetir con cualquier otro triángulo, tenemos que:

En todo triángulo, la suma de sus tres ángulos es igual a dos rectos, o sea a 180° .

Esto mismo se puede probar (*demonstrar*) sin recurrir a la verificación anterior.

Dado un triángulo ABC , se conduce por uno de los vértices, el B por ej., la paralela DE al lado opuesto AC .

Resulta entonces que los ángulos BCA y DBC son iguales por alternos internos entre las paralelas DE y CA cortadas por la transversal BC (n. 66); y lo mismo que los ángulos BAC y ABE



^(o) Lo mismo puede hacerse esta verificación aunque el lado elegido no sea el mayor con tal de que no sea adyacente a un ángulo recto u obtuso.

son iguales por alternos internos entre las paralelas DE y CA cortadas por la transversal AB .

Por lo tanto la suma de los tres ángulos del triángulo será igual a la de

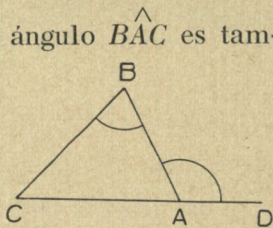
$$\hat{DBC} + \hat{CBA} + \hat{ABE}$$

que vale, precisamente, 180° .

92. La propiedad anterior se puede enunciar también diciendo que:

En todo triángulo, cada ángulo es suplementario de la suma de los otros dos.

Pero en un triángulo ABC , un ángulo $\hat{BAC}$ es también suplementario de cada uno de sus adyacentes, por ej. del $\hat{DAB}$. Estos ángulos adyacentes a los de un triángulo se llaman *exteriores*.



Valiéndonos de esta definición podemos expresar la observación anterior así:

En todo triángulo, cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores que no son adyacentes a él.

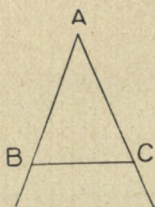
93. Puesto que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180° , tendremos que:

a) Si en un triángulo un ángulo es recto, los otros dos juntos suman 90° o, como suele decirse, son *complementarios*.

b) Si en un triángulo un ángulo es obtuso, los otros dos son *agudos*.

Triángulos particulares y aplicaciones

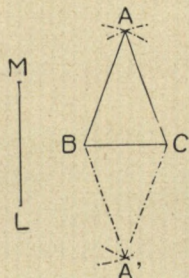
94. Si sobre los lados de un ángulo de vértice A se toman dos segmentos iguales AB y AC y se une B con C , se obtiene un triángulo ABC con dos de sus lados iguales: $AB = AC$. Los triángulos que reúnen esta condición se llaman *isósceles*, y el tercer lado BC recibe el nombre de *base del triángulo isósceles*.



El ángulo $\hat{BAC}$, opuesto a la base, se llama *ángulo en el vértice*, y los otros dos, *ángulos de la base*.

95. Puesto que en todo triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercero, también en el triángulo isósceles la suma de los dos lados iguales será mayor que la base; y, por consiguiente, *en todo triángulo isósceles cada uno de los lados iguales será mayor que la mitad de la base*.

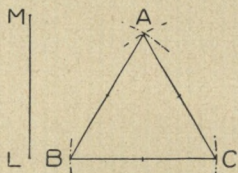
96. Para dibujar sobre una base dada BC , un triángulo isósceles que tenga los otros dos lados iguales a un segmento, también dado, LM (mayor que la mitad de BC), se describen con el compás las circunferencias de centros B y C y de radio igual a LM . Estas dos circunferencias se cortan en dos puntos A y A' situados en semiplanos opuestos respecto de la recta BC (n. 83). Uniendo A y A' con B y con C obtendremos dos triángulos isósceles de base BC y teniendo los otros dos lados iguales al segmento LM .



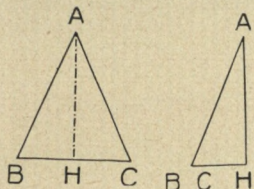
97. Si en la construcción anterior tomamos $LM = BC$, obtendremos a ambos lados de BC un triángulo con sus tres lados iguales.

A los triángulos que tienen sus tres lados iguales se les llama *equiláteros*.

En cambio, a los triángulos que no son ni equiláteros ni isósceles, es decir, a los que tienen sus tres lados desiguales, se les llama *escalenos*.



98. Recortemos en papel un triángulo ABC que sea isósceles con base BC , es decir, tal que sea



$$AB = AC.$$

Doblándolo sobre sí mismo, de modo que los lados iguales coincidan, tendremos que los dos ángulos de la base se superpondrán exactamente. Se verifica así que:

En todo triángulo isósceles, los ángulos de la base son iguales.

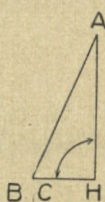
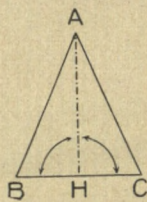
99. Como un triángulo equilátero es isósceles respecto de cualquiera de sus lados tomado como base, resulta que los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales entre sí. Y, puesto que su suma es igual a 180° (n. 91), cada uno de ellos será la tercera parte de 180° .

Luego: *Cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero es igual a 60° .*

100. Construyendo un triángulo con dos ángulos $\hat{A}BC$ y $\hat{A}CB$ iguales, recortándolo y doblándolo como

se hizo anteriormente (n. 98), se comprueba que los lados AC y AB , opuestos a los ángulos iguales, son iguales; o sea que: *Un triángulo que tiene dos ángulos iguales es isósceles.*

101. Cuando (como en el n. 98) se dobla sobre sí mismo un triángulo isósceles ABC , de base BC , haciendo coincidir los dos lados iguales AB



y AC , se ve que el doblez AH divide en dos mitades la base BC y el ángulo en el vértice; por lo que se acostumbra a decir que es *mediana* y *bisectriz* del ángulo en el vértice. Por otra parte,

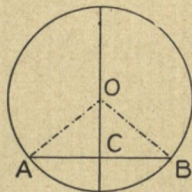
como los dos ángulos $\widehat{AHC}$ y $\widehat{AHB}$, que son adyacentes, se superponen, son iguales, y por lo tanto rectos (n. 46). Luego AH es perpendicular a la base BC , o sea la altura correspondiente al vértice.

Tenemos, pues, que:

En todo triángulo isósceles la bisectriz del ángulo en el vértice es también mediana y altura.

102. Podemos aplicar esta propiedad a las cuerdas de un círculo.

Si AB es una cuerda de un círculo O , uniendo A y B con O se obtiene un triángulo AOB isósceles, de base AB . Aplicándole a él la propiedad anterior tenemos que:



a) *Todo diámetro de un círculo que divide a una cuerda en partes iguales es perpendicular a ella.*

b) *Todo diámetro perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.*

c) En todo círculo, la perpendicular trazada a una cuerda por el punto medio de ella, pasa por el centro.

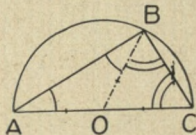
b) Ángulos en el círculo

103. Dada una semicircunferencia, cada ángulo que tenga su vértice sobre ella y cuyos lados pasen por los extremos de la misma se llama *inscripto en la semicircunferencia*.

104. Todos los ángulos inscriptos en una semicircunferencia son rectos.

Sea ABC un ángulo inscripto en una semicircunferencia de centro O . Para demostrar que él es recto, unamos O con B y consideremos los dos triángulos AOB y BOC .

Estos triángulos son ambos isósceles porque los radios OA , OB y OC son todos iguales; de modo que (n. 98):



$$\hat{ABO} = \hat{OAB}, \hat{OBC} = \hat{BCO}$$

y sumando los ángulos $\hat{ABO}$ y $\hat{OBC}$ tendremos:

$$\hat{ABC} = \hat{OAB} + \hat{BCO}$$

Pero los tres ángulos $\hat{ABC}$, $\hat{OAB}$ y $\hat{BCO}$, tomados conjuntamente, suman 180° (n. 91); de modo que el ángulo $\hat{ABC}$, que es una de las dos partes iguales de que se compone esa suma, será igual a la mitad de 180° , o sea 90° .

105. Dado un arco de circunferencia, cada ángulo que tenga su vértice en él y cuyos lados pasen por los extremos del arco, se llama *ángulo inscripto* en dicho arco.

Todo ángulo inscripto en un arco de circunferencia comprende entre sus lados al otro arco de la circunferencia que tiene los

mismos extremos. Este segundo arco se llama *comprendido entre los lados del ángulo*.

106. *Todo ángulo inscripto en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que comprende el mismo arco entre sus lados.*

Examinemos los distintos casos posibles:

1.° Dado el ángulo $\widehat{AVB}$ inscripto en la circunferencia de centro O y tal que el lado AV pase por el centro, consideremos el ángulo central correspondiente $\widehat{AOB}$.

Siendo este último ángulo exterior respecto del triángulo OVB , tendremos (n. 92):

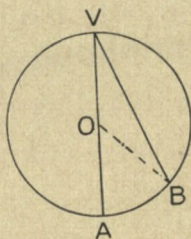
$$\widehat{AOB} = \widehat{AVB} + \widehat{VBO}$$

Pero en el triángulo OVB , isósceles de base VB , es

$$\widehat{AVB} = \widehat{VBO}$$

de donde resulta que

$$\widehat{AOB} = 2 \widehat{AVB}$$

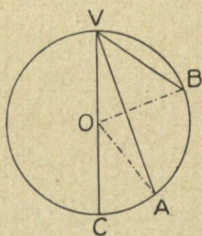
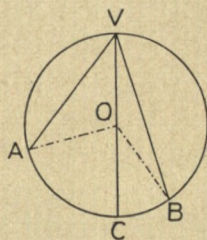


2.° Si el ángulo $\widehat{AVB}$ tiene sus lados en distintos semiplanos respecto del diámetro VC , se tendrá, uniendo A y B con O :

$$\widehat{AOC} = 2 \widehat{AVC} \text{ y } \widehat{COB} = 2 \widehat{CVB}$$

y sumando miembro a miembro,

$$\widehat{AOB} = 2 \widehat{AVB}.$$



3.° Análogamente, si los dos lados caen en el mismo semiplano respecto del diámetro VC que pasa por el vértice, tendremos:

$$\widehat{COB} = 2 \widehat{CVB}, \widehat{COA} = 2 \widehat{CVA}$$

y restando miembro a miembro:

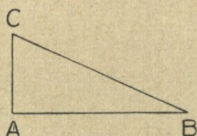
$$\widehat{AOB} = 2 \widehat{AVB}.$$

c) Triángulos rectángulos

107. Si, dibujado un ángulo recto de vértice A , unimos un punto B de uno de sus lados con un punto C del otro, obtenemos un triángulo con el ángulo en A de 90° .

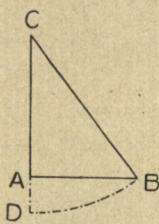
Todo triángulo que tenga un ángulo recto se llama *rectángulo*.

Los dos lados AB y AC que comprenden al ángulo recto se llaman *catetos*, y el tercer lado, opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa*.



108. Como ya lo hemos notado (n. 93), los dos ángulos en B y C , adyacentes a la hipotenusa, son agudos y complementarios, es decir, suman 90° .

109. Dado un triángulo ABC , rectángulo en A , si con un compás hacemos centro en C y con radio igual a la hipotenusa CB describimos un arco BD , resulta que el punto D cae en la prolongación de CA ; lo que nos muestra que la hipotenusa es mayor que el cateto CA . Análogamente se verifica que también el cateto BA es menor que la hipotenusa.

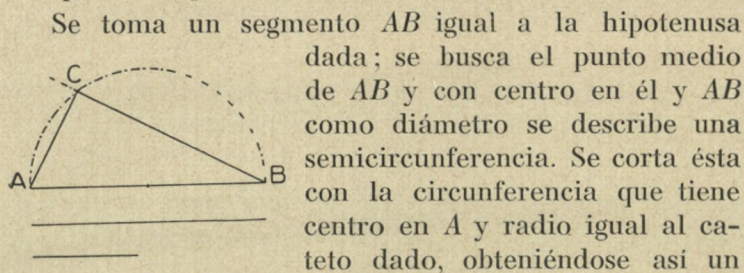


Y, puesto que la misma verificación puede hacerse para cualquier otro triángulo rectángulo, podremos decir que:

En todo triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cada uno de los catetos.

110. Recordando una propiedad anterior (n. 104) podremos resolver el siguiente problema:

PROBLEMA: Construir un triángulo rectángulo dados la hipotenusa y un cateto.



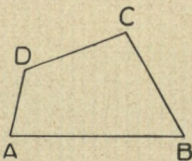
punto C .

Uniendo C con B se obtiene el triángulo ABC que satisface las condiciones del problema.

Polígonos

III. El triángulo no es más que la primera y más simple de una serie de figuras que se llaman *polígonos*.

Así, dados en el plano cuatro puntos A , B , C y D , de los cuales no queden nunca tres en línea recta, y tales que si trazáramos las rectas AB , BC , CD y DA dejaran los otros dos puntos del mismo lado, la figura constituida por los puntos comunes a los ángulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDA}$ y $\widehat{DAB}$ se llama polígono de cuatro lados o, más comúnmente, *cuadrilátero*.



El cuadrilátero $ABCD$ resulta ser, pues, la parte del plano limitada por el conjunto de los cuatro segmentos AB , BC , CD y DA .

Los puntos A , B , C y D se llaman *vértices*, y los segmentos AB , BC , CD y DA *lados* del cuadrilátero.

Los ocho ángulos dos a dos adyacentes a los *cuatro* ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$ del cuadrilátero, se llaman *ángulos exteriores*.

El conjunto de los lados se llama *contorno*, y todo segmento igual a la suma de los lados se llama *perímetro*.

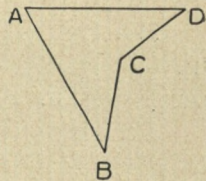
Los segmentos que unen dos vértices *opuestos*, es decir, no consecutivos, tales como A y C o B y D , se llaman *diagonales*.

112. Análogamente se definen:

el polígono de	5	lados o	<i>pentágono</i> ,
"	"	"	6 " " <i>exágono</i> ,
"	"	"	7 " " <i>eptágono</i> ,
"	"	"	8 " " <i>octógono</i> ,
"	"	"	9 " " <i>eneágono</i> ,
"	"	"	10 " " <i>decágono</i> , etc.

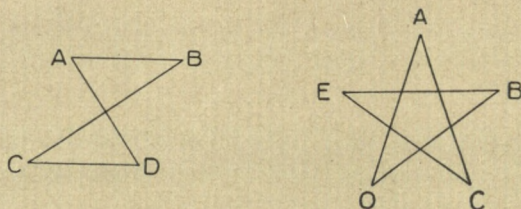
113. Se puede extender el concepto de polígono que tenemos hasta ahora, considerando polígonos *cóncavos*, es decir, tales que la recta de alguno de sus lados no deje los restantes vértices en un mismo semiplano respecto de ella, siempre que no ocurra que dos lados no consecutivos se corten mutuamente.

Por ej., el cuadrilátero $ABCD$ es cóncavo porque la recta CD deja en semiplanos opuestos los vértices A y B .

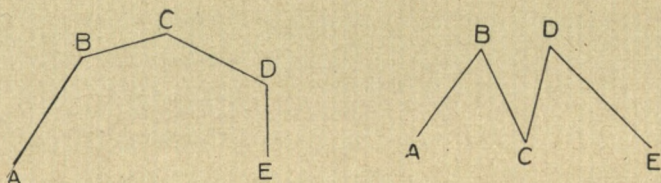


Los polígonos que satisfacen las condiciones de la primera definición se llaman *convexos*. Nosotros, en lo que sigue, cuando hablemos de polígonos sin otra indicación, entenderemos hablar de polígonos convexos.

114. Se pueden considerar además contornos *poligonales entrecruzados*, vale decir, tales que dos lados no consecutivos se corten, como los representados en la figura.



115. En fin, se consideran también las *líneas quebradas* o *poligonales*, de las cuales sirven de ejemplos las de la figura.



Relaciones entre los lados de un polígono Suma de los ángulos de un polígono

116. Del mismo modo que se ha verificado que en un triángulo cada lado es menor que la suma de los otros dos (n. 90), se verifica también que:

En un polígono cualquiera cada lado es menor que la suma de los restantes.

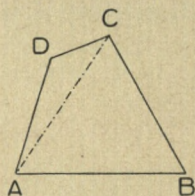
117. Hemos visto que en todo triángulo la suma de los tres ángulos es igual a 180° (n. 91).

Ahora veremos que en un cuadrilátero, la suma de sus ángulos, si bien ya no es igual a 180° , es sin embargo siempre la misma, cualquiera que sea el quadri-

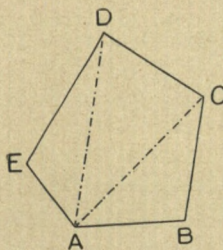
látero que se considere; pero que la suma de los ángulos cambia de un cuadrilátero a un pentágono, de un pentágono a un exágono, etc., siendo la misma para todos los pentágonos, y también para todos los exágonos, etc.

Tomemos ante todo un cuadrilátero $ABCD$.

Trazada una de sus diagonales, por ej. la AC , el cuadrilátero queda dividido en dos triángulos ABC y ACD , siendo la suma de los ángulos del cuadrilátero igual a la suma de los ángulos de estos dos triángulos. Puesto que en cada uno de estos triángulos la suma de sus ángulos es igual a 180° (n. 91), deducimos que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual a $180^\circ \times 2$, o sea a 360° .



Si en lugar de un cuadrilátero consideramos un pentágono $ABCDE$, y trazamos en él los segmentos que unen un vértice A con los vértices no consecutivos C , D y E (*diagonales*), el pentágono quedará dividido en tres triángulos; y puesto que la suma de los ángulos del pentágono es igual a la suma de los ángulos de los tres triángulos, deducimos que ella es igual a $180^\circ \times 3$, o sea a 540° .



Análogamente se encuentra que:

La suma de los ángulos de un exágono es igual a $180^\circ \times 4$,

" " " " " " " eptágono " " " $180^\circ \times 5$,

" " " " " " " octógono " " " $180^\circ \times 6$

y así sucesivamente.

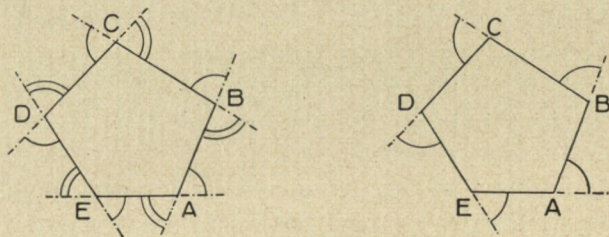
Tenemos de ese modo que:

La suma de los ángulos de un polígono cualquiera es igual a tantas veces 180° como lados tiene menos dos.

118. En un polígono, los ángulos adyacentes a los ángulos internos se llaman *exteriores*. Por eso a cada ángulo interno le corresponden dos exteriores, entre sí opuestos por el vértice (n. 29) y, por lo tanto, iguales (n. 42).

Para determinar un ángulo exterior basta prolongar uno de los lados del polígono.

En un polígono, por ej., en un pentágono $ABCDE$, prolongando sus lados en un mismo sentido, como lo indica la figura de la



derecha, obtenemos cinco ángulos exteriores que sumados a los internos nos dan cinco ángulos llanos, o sea $180^\circ \times 5$.

Pero los ángulos internos sumados dan $180^\circ \times 3$; luego resulta que los ángulos exteriores solamente, dan, sumados, $180^\circ \times 2$, o sea 360° .

Al mismo resultado se llega para un cuadrilátero, para un exágono, para un eptágono, etc., de modo que:

En todo polígono, la suma de los ángulos exteriores que se obtienen prolongando los lados en un mismo sentido, es igual a 360° .

EJERCICIOS SOBRE EL CAPÍTULO IV

30. Dibújese con el doble-decímetro y el transportador un triángulo ABC en el que sea: [89]

$$AB = 50 \text{ mm.}, AC = 40 \text{ mm. y } \hat{BAC} = 55^\circ,$$

y mídense la longitud de BC y la amplitud de $\hat{ACB}$ y $\hat{CBA}$.

31. Dibújese con el doble-decímetro y el transportador un triángulo ABC en el que sea:

$$AB = 45 \text{ mm.}, \hat{CBA} = 75^\circ \text{ y } \hat{BAC} = 55^\circ,$$

y mídense BC y CA .

32. Dibújese con el doble-decímetro y el compás un triángulo ABC en el que sea:

$$AB = 60 \text{ mm.}, BC = 55 \text{ mm. y } CA = 43 \text{ mm.},$$

y mídase con el transportador la amplitud de los tres ángulos.

33. En un triángulo, dos ángulos son de 37° y 45° . ¿Cuál es la amplitud del tercer ángulo? [91]

34. En un triángulo, dos ángulos son respectivamente iguales a $47^\circ 25' 16''$ y $84^\circ 13' 28''$. Determinése el tercer ángulo.

35. Calcular la amplitud de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de un triángulo sabiendo que $\hat{A}$ es el triplo de $\hat{B}$, y $\hat{B}$ es el cuádruplo de $\hat{C}$.

36. Calcular la amplitud de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de un triángulo sabiendo que $\hat{A}$ es el triplo de $\hat{C}$, y $\hat{B}$ es igual a la sexta parte de $\hat{C}$.

37. Calcular la amplitud de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de un triángulo sabiendo que $\hat{A}$ es quintuplo de $\hat{B}$, y $\hat{B}$ cuádruplo de $\hat{C}$.

38. Calcular la amplitud de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de un triángulo sabiendo que $\hat{C} - \hat{A} = 44^\circ$, y $\hat{C} - \hat{B} = 25^\circ$.

39. Calcular la amplitud de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de un triángulo sabiendo que $\hat{A}$ supera a B en 69° , y $\hat{B}$ supera a $\hat{C}$ en 51° .

40. En un triángulo, un ángulo interno es de 72° , y un ángulo exterior no adyacente a él es de 118° . Determinése la amplitud de los otros dos ángulos internos. [92]

41. En un triángulo, un ángulo interno es de $71^{\circ} 29' 4''$, y un ángulo exterior no adyacente a él es de $118^{\circ} 04' 2''$. Determinése la amplitud de los otros dos ángulos internos.

[101] 42. Con el doble-decímetro y el transportador dibújese un triángulo isósceles de 37 mm. de base y con los ángulos de la base iguales a 32° .

43. Con el doble-decímetro y el transportador dibújese un triángulo isósceles teniendo la base de 2,8 cm. y el ángulo en el vértice de 26° .

44. Con el doble-decímetro y el transportador dibújese un triángulo isósceles teniendo la altura correspondiente a la base igual a 4,3 cm. y el ángulo en el vértice de 62° .

45. Con el doble-decímetro y el transportador dibújese un triángulo isósceles teniendo la altura correspondiente a la base de 6,2 cm. y cada uno de los ángulos de la base de 35° .

46. Dibújese sobre una base de 12 mm. un triángulo isósceles de 10 mm. de lado y médase la altura correspondiente a la base.

47. ¿Cuánto vale el ángulo en el vértice de un triángulo isósceles en el cual los ángulos de la base son de 72° ?

48. En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son de $53^{\circ} 21' 33''$. Determinése el ángulo en el vértice.

49. En un triángulo isósceles, el ángulo en el vértice es de 42° . ¿Cuál es la amplitud de los ángulos de la base?

50. En un triángulo isósceles, el ángulo en el vértice es de $38^{\circ} 24' 18''$. Calcular los ángulos de la base.

51. Un triángulo isósceles tiene el ángulo en el vértice de $36^{\circ} 28'$. ¿Cuál es la amplitud del ángulo exterior formado por uno de los lados iguales con la prolongación de la base?

[106] 52. ¿Cuál es la amplitud de un ángulo inscrito en un arco de $\frac{3}{4}$ de circunferencia?

53. ¿Cuál es la amplitud de un ángulo inscrito cuyos lados comprenden un arco de $\frac{2}{9}$ de circunferencia?

54. ¿Cuál es la amplitud de un ángulo inscrito en un arco de $\frac{11}{12}$ de circunferencia?

55. Dibújese un triángulo rectángulo cuyos catetos sean de 5 cm. y 12 cm., y otro cuyos catetos sean de 8 cm. y 15 cm., y mídase con el doble-decímeter las respectivas hipotenusas. [110]

56. Dibújese un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa sea de 3,7 cm. y un cateto de 3,5 cm., y mídase con el doble-decímeter el otro cateto.

57. Dibújese un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa sea de 2,5 cm. y un cateto de 0,7 cm., y mídase con el doble-decímeter el otro cateto.

58. Sobre un segmento de 3,2 cm. tomado como hipotenusa constrúyase un triángulo rectángulo isósceles. (Puede aplicarse lo explicado en los Nos. 101 y 104; o bien se puede notar que la amplitud de los ángulos de la base es de 45°).

59. En un triángulo rectángulo la amplitud de un ángulo agudo es de 39° . ¿Cuál es la amplitud del otro ángulo agudo?

60. En un triángulo rectángulo un ángulo agudo es de $65^\circ 43'$. ¿Cuál es la amplitud del otro ángulo agudo?

61. Determinése la amplitud de los ángulos de la base de un triángulo rectángulo isósceles.

62. En un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos es doble del otro. ¿Cuál es la amplitud de cada uno de ellos?

63. Dibújense un pentágono, un exágono y un decágono; trázese todas las diagonales posibles (segmentos que unen dos vértices no consecutivos) y cuénteselas en cada caso. [117]

64. Calcular la amplitud de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$ de un cuadrilátero sabiendo que $\hat{B}$ es doble, $\hat{C}$ triplo y $\hat{D}$ cuádruplo de $\hat{A}$.

65. Calcular la amplitud de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$ de un cuadrilátero sabiendo que $\hat{B}$ es doble de $\hat{A}$, $\hat{C}$ doble de $\hat{B}$, y $\hat{D}$ doble de $\hat{C}$.

66. Calcular la amplitud de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$ de un cuadrilátero sabiendo que $\hat{A}$ es doble de $\hat{B}$, $\hat{B}$ es la tercera parte de $\hat{C}$, y $\hat{D}$ es la cuarta parte de la suma de $\hat{A}$ y $\hat{B}$.

67. Calcular la amplitud de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$ de un cuadrilátero sabiendo que $\hat{A}$ supera a $\hat{B}$ en 3° , $\hat{B}$ supera a $\hat{C}$ en 6° , y $\hat{C}$ supera a $\hat{D}$ en 9° .

68. La suma de tres de los ángulos de un pentágono es igual a $427^\circ 49'15''$; de los otros dos, uno es doble del otro. ¿Cuánto vale cada uno de estos dos ángulos?

69. Calcular la suma de los ángulos de un polígono de 12 lados, o de 30 lados, o de 52 lados.

70. ¿En cuál polígono la suma de los ángulos es igual a 2340° , o a 3240° , o a 4320° ?

[118] 71. Un polígono equiángulo tiene 36 lados. ¿Cuál es la amplitud de cada uno de los ángulos exteriores?

72. El ángulo exterior de un polígono equiángulo es de 12° , ¿Cuántos lados tiene el polígono?

73. En un polígono equiángulo cada ángulo interno vale 174° , (ó $157,5^\circ$, ó 175° , ó $175,5^\circ$). ¿Cuántos lados tiene el polígono?

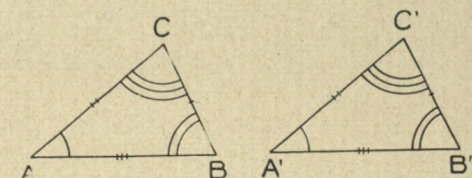
IGUALDAD DE TRIANGULOS Y DE POLÍGONOS

Triángulos iguales

119. Comparando dos triángulos se reconoce si son iguales o no.

Para verificar si dos triángulos dados, ABC y $A'B'C'$, son iguales, se recortan en papel, se colocan el uno sobre el otro y se ve si se superponen exactamente.

Si ocurre que $A'B'C'$ se puede colocar sobre ABC , de modo que los tres vértices A' , B' y C' caigan sobre los vértices A , B y C , respectivamente, diremos que los dos triángulos son iguales, y escribiremos



$$ABC = A'B'C'.$$

En tal caso los lados $A'B'$, $B'C'$ y $C'A'$ del triángulo $A'B'C'$ se superpondrán exactamente sobre los lados AB , BC y CA del triángulo ABC ; luego entre los lados y los ángulos (*elementos*) de los dos triángulos se tendrán las seis igualdades siguientes:

$$AB = A'B', BC = B'C' \text{ y } CA = C'A';$$

$$\hat{ACB} = \hat{A'C'B'}, \hat{BAC} = \hat{B'A'C'} \text{ y } \hat{CBA} = \hat{C'B'A'}.$$

120. Inversamente, para poder afirmar que dos triángulos son iguales no es indispensable verificar todas estas seis igualdades entre sus elementos, sino que basta verificar algunas de ellas.

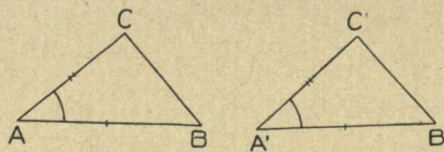
Existen, en realidad, ciertos *criterios de igualdad de triángulos* y, entre ellos, los siguientes:

121. PRIMER CRITERIO DE IGUALDAD DE TRIÁNGULOS. — *Se puede afirmar que dos triángulos son iguales si se verifica que tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido.*

Sean los triángulos ABC y $A'B'C'$, tales que sea:

$$AB = A'B', AC = A'C' \text{ y } \hat{BAC} = \hat{B'A'C'}.$$

Para verificar si los dos triángulos son iguales, recortemos el $A'B'C'$ y llevémoslo sobre el ABC , superponiendo el ángulo $\hat{A}'$ sobre su igual



el ángulo $\hat{A}$, de modo que la semirrecta $A'B'$ coincida con la semirrecta AB . Puesto que, por hipótesis, los segmentos AB y AC son respectivamente iguales a $A'B'$ y $A'C'$, los puntos B' y C' coincidirán con B y C respectivamente y, por lo tanto, los dos triángulos se cubrirán exactamente. Luego tendremos que también será:

$$BC = B'C', \hat{CBA} = \hat{C'B'A'} \text{ y } \hat{ACB} = \hat{A'C'B'}.$$

122. Resulta del criterio anterior que:

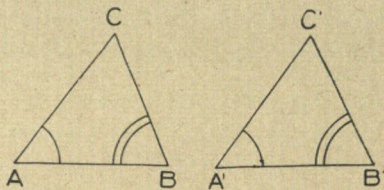
a) *Se puede afirmar que dos triángulos isósceles (n. 94) son iguales cuando se ha verificado que tie-*

nen respectivamente iguales el ángulo en el vértice y el lado.

b) Se puede afirmar que dos triángulos rectángulos son iguales cuando se ha verificado que tienen respectivamente iguales los catetos (n. 48).

123. SEGUNDO CRITERIO DE IGUALDAD DE TRIÁNGULOS. — Se puede afirmar que dos triángulos son iguales cuando se ha verificado que tienen respectivamente iguales dos ángulos y un lado, igualmente dispuesto.

1.º Examinemos primeramente el caso en que se sabe que tienen iguales dos ángulos y el lado común.



Sean, pues, dos triángulos ABC y $A'B'C'$, tales que :

$$AB = A'B', \hat{CAB} = \hat{C'A'B'} \text{ y } \hat{ABC} = \hat{A'B'C'}.$$

Para verificar que los dos triángulos son iguales, recortemos el triángulo $A'B'C'$ y transportémoslo sobre el ABC , de modo que el lado $A'B'$ se superponga sobre el lado igual AB y que el vértice C' caiga del mismo lado de AB en que cae C .

En tal caso, como los ángulos $\hat{C'A'B'}$ y $\hat{A'B'C'}$ son respectivamente iguales a los ángulos $\hat{CAB}$ y $\hat{ABC}$, la semirrecta $A'C'$ coincidirá con la AC , y la semirrecta $B'C'$ con la BC , de modo que el punto C' caerá precisamente sobre el C .

Queda así verificado que los dos triángulos $A'B'C'$ y ABC son superponibles exactamente y, por lo tanto, iguales.

2.º Supongamos en segundo lugar que sean respectivamente iguales dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos; por ej., en los dos triángulos ABC y $A'B'C'$:

$$\hat{CAB} = \hat{C'A'B'}, \hat{ABC} = \hat{A'B'C'} \text{ y } AC = A'C'.$$

Puesto que en todo triángulo la suma de sus tres ángulos es igual a 180° (n. 91), y sabemos ya que nuestros dos triángulos tienen dos ángulos iguales, podemos deducir inmediatamente que tendrán que ser también iguales los terceros ángulos $\hat{ACB}$ y $\hat{A'C'B'}$. Y teniendo los dos triángulos los lados AC y $A'C'$ y los ángulos adyacentes a ellos respectivamente iguales, serán iguales en virtud del primer caso.

124. Se deduce de este segundo criterio que:

a) *Se puede afirmar que dos triángulos rectángulos son iguales cuando se ha verificado que tienen iguales la hipotenusa y un ángulo agudo, respectivamente.*

b) *Se puede afirmar que dos triángulos rectángulos son iguales cuando se ha verificado que tienen iguales un cateto y un ángulo agudo, respectivamente.*

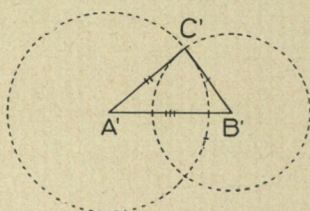
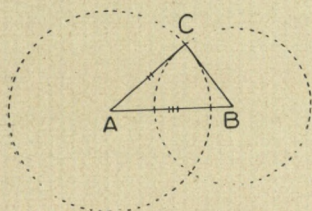
125. TERCER CRITERIO DE IGUALDAD DE TRIÁNGULOS. — *Se puede afirmar que dos triángulos son iguales cuando se ha verificado que tienen respectivamente iguales los tres lados.*

Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$ en los cuales se ha verificado que es:

$$AB = A'B', BC = B'C' \text{ y } CA = C'A',$$

decimos que los dos triángulos son iguales.

Describamos, con el compás, las dos circunferencias que tienen por centros a A y B y que pasan por C , y análogamente las dos circunferencias de centros A' y B' y que pasan por C' . Las dos primeras circunferencias se cortan en C y en otro punto situado en la parte opuesta respecto de la recta AB (n. 83), lo mismo que las otras dos circunferencias, las que, además de cortarse en C' , se cortan también en otro punto situado en la parte opuesta respecto de la recta $A'B'$.



Ahora bien, siendo $A'C' = AC$ y $B'C' = BC$, las dos circunferencias de centros A' y B' son respectivamente iguales a las circunferencias de centros A y B (n. 70).

Recortando, pues, la figura constituida por el triángulo $A'B'C'$ y las dos circunferencias A' y B' , y transportándola sobre la figura análoga de modo que el segmento $A'B'$ coincida con el AB y el triángulo $A'B'C'$ caiga del mismo lado que el ABC respecto de la recta AB , resultará que las dos circunferencias A' y B' coincidirán respectivamente con sus iguales A y B .

Luego el punto C' , que es intersección de las circunferencias A' y B' , caerá necesariamente sobre el punto C que es el común a las circunferencias A y B y que queda, con el C' , del mismo lado de AB .

Se verifica de este modo que los dos triángulos son superponibles y, por lo tanto, iguales.

Polígonos iguales

126. Lo que hemos dicho para los triángulos (en el n. 119) se puede repetir para los polígonos de más de tres lados.

Comparando dos polígonos de igual número de lados se verifica si son *iguales* o no.

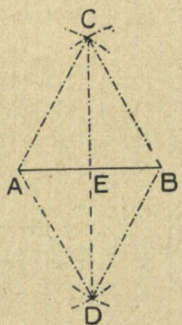
Se verifica que son iguales probando que se pueden superponer exactamente.

Dos polígonos iguales tienen ordenadamente iguales los lados y los ángulos comprendidos entre lados iguales.

Construcciones con regla y compás

Como aplicaciones de los criterios de igualdad de triángulos (N^{os}. 121 a 125) veremos de qué modo se pueden ejecutar las construcciones fundamentales del dibujo *usando sólo la regla y el compás* y, por consiguiente, sin valerse de la regla graduada, ni de la escuadra, ni del transportador.

127. PROBLEMA: *Determinar el punto medio de un segmento dado.*



Dado un segmento AB , se describen las dos circunferencias iguales de centros A y B y de radios iguales al segmento AB . Estas dos circunferencias se cortan en dos puntos C y D situados en semiplanos opuestos respecto de la recta AB (n. 83). Decimos que el punto E en que la recta CD corta al segmento AB es el punto medio de dicho segmento AB .

En efecto, notemos ante todo que los triángulos ACD y BCD son iguales (n. 125) puesto que tienen común el lado CD e iguales los lados AC y BC , AD y BD .

Son, por lo tanto, iguales, los ángulos $\widehat{ACE}$ y $\widehat{BCE}$ y, en consecuencia, los triángulos AEC y BEC , desde que tienen el lado EC común e iguales los lados AC y BC y los ángulos comprendidos $\widehat{ACE}$ y $\widehat{BCE}$ (n. 121).

Se deduce de esto que, efectivamente, es $AE = EB$.

128. NOTA: La construcción anterior puede hacerse también tomando el radio de las dos circunferencias iguales de centros A y B , igual a un segmento cualquiera mayor que la mitad de AB .

Notamos además que de la igualdad de los triángulos AEC y BEC resulta que los ángulos adyacentes AEC y BEC son iguales, o sea que la recta CD es perpendicular a la AB (n. 53).

Esta recta CD , perpendicular al segmento AB en su punto medio se llama *eje* o *mediatriz* del segmento.

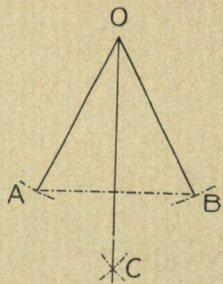
129. PROBLEMA: *Dividir un ángulo en dos iguales.*

Dado el ángulo $\widehat{O}$, se describe, con centro en O , una circunferencia de radio arbitrario, la que cortará a los dos lados del ángulo $\widehat{O}$ en dos puntos A y B .

Haciendo centro en A y en B , con radio mayor que la mitad de AB , se describen dos arcos de circunferencia de modo que se corten en un punto C .

La semirrecta OC dividirá el ángulo $\widehat{O}$ en otros dos iguales.

En efecto, los dos triángulos AOC y BOC son, por construcción, iguales, pues tienen los tres lados ordenadamente iguales (n. 125), de donde resulta que OC es la bisectriz del ángulo $\widehat{AOB}$.

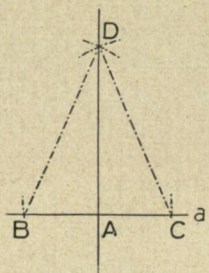


130. NOTA: La construcción anterior permite, también, dividir un arco en dos iguales, puesto que basta para ello dividir en dos ángulos iguales al ángulo central correspondiente (n. 76).

131. PROBLEMA: *Trazar por un punto dado la perpendicular a una recta dada.*

Es necesario distinguir dos casos, según que el punto dado pertenezca o no a la recta dada.

1.º) Sea la recta a y el punto de ella A . Con centro en A y radio arbitrario describamos una circunferencia;



ella cortará a la recta a en dos puntos, B y C , tales que el A será el punto medio del segmento BC . Ahora, con centro en B y en C se describen dos circunferencias de radio igual a un segmento mayor que la mitad de BC , o sea mayor que BA .

Estas dos circunferencias se cortan en dos puntos (n. 83) equidistantes de B y de C , porque los radios de las dos circunferencias son iguales.

Si D es uno de estos dos puntos, decimos que AD es la perpendicular a a .

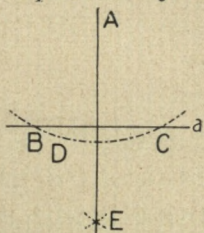
En efecto, los dos triángulos ABD y ACD , que tienen el lado común AD y los otros dos lados respectivamente iguales, son iguales (n. 125); de donde resulta que los dos ángulos adyacentes $\widehat{BAD}$ y $\widehat{CAD}$ son iguales y, por lo tanto, rectos (n. 46).

2.º) Sea una recta a y un punto A fuera de ella.

Tomemos un punto D en el semiplano opuesto al que contiene al A respecto de la recta a , y con centro

en A describamos la circunferencia de radio AD . Esta circunferencia cortará a la recta a en dos puntos B y C .

Describamos también las dos circunferencias de centros B y C y de radio $BA = CA$, las que se cortarán en A y además en un segundo punto E situado en el semiplano opuesto al que contiene a A respecto de la recta BC .

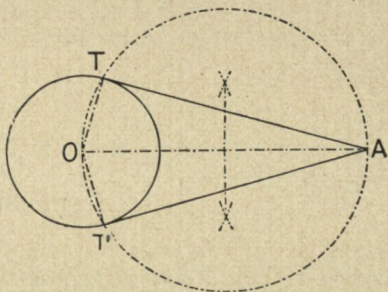
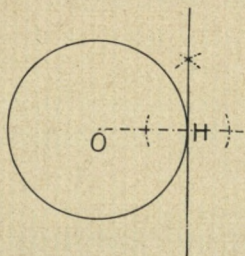


Uniendo A con E se obtiene la perpendicular buscada.

Esto se explica observando que AE viene a ser, por construcción, la mediatriz del segmento BC , según se ha visto anteriormente (n. 128).

132. PROBLEMA: *Dada una circunferencia, trazarle la tangente en uno de sus puntos.*

Basta trazar por el punto dado H la perpendicular al radio OH (n. 81).



133. PROBLEMA: *Por un punto exterior a una circunferencia trazar a ésta las tangentes.*

Sea O la circunferencia dada y A el punto exterior.

Se describe la circunferencia que tiene por diámetro a OA y se determinan los puntos T y T' de intersección de dicha circunferencia con la dada. Las rectas AT y AT' son las tangentes buscadas porque cada uno

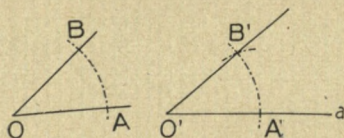
de los ángulos $\widehat{ATO}$ y $\widehat{AT'O}$ son rectos por estar inscritos en una semicircunferencia (n. 104), y sabemos que la perpendicular a un radio en su extremo es tangente a la circunferencia (n. 81).

134. En la figura anterior, los triángulos OTA y $OT'A$ son iguales porque si doblamos el papel a lo largo de la recta OA , los puntos T y T' coinciden (n. 83) y los dos triángulos se superponen exactamente. Por lo tanto son iguales los segmentos AT y AT' , es decir:

Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan las tangentes a ésta, los segmentos de las mismas, comprendidos entre el punto dado y los de contacto, son iguales.

135. PROBLEMA: Construir sobre una semirrecta dada y a un determinado lado, respecto de ella, un ángulo igual a otro dado.

Dada la semirrecta a de origen O' y un ángulo de vértice O , con centro en O , y radio arbitrario, se describe un arco que corte a los lados del ángulo dado en dos puntos que llamaremos A y B .



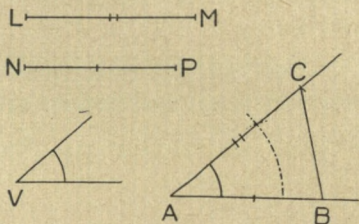
Después, con centro en O' y radio igual a OA se describe una circunferencia, la que cortará a la semirrecta a en un punto A' , y con centro en A' y radio igual a AB se corta la circunferencia de centro O' del lado que se haya fijado de antemano, con lo que se obtiene un punto B' .

Trazando la semirrecta $O'B'$ quedará formado el ángulo $\widehat{A'O'B'}$, el que decimos que es igual al ángulo dado $\widehat{AOB}$.

En efecto, los dos triángulos isósceles AOB y $A'O'B'$ tienen iguales, por construcción, las bases AB y $A'B'$ y los lados OA y $O'A'$ (así como OB y $O'B'$), y por consiguiente son iguales (n. 125), de donde resulta que son iguales los ángulos en el vértice.

136. PROBLEMA: Construir un triángulo que tenga dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales a dos segmentos y a un ángulo dados o, como suele decirse, construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.

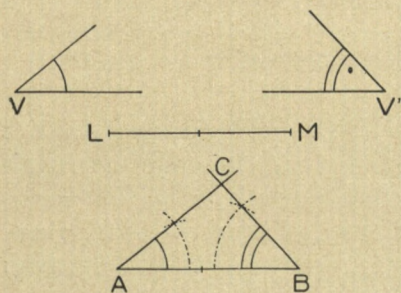
Sean LM y NP los lados y $\hat{V}$ el ángulo.



Construido un ángulo $\hat{A}$ igual al $\hat{V}$, sobre los lados de aquél se toman los segmentos AB y AC , iguales a NP y LM respectivamente.

El triángulo ABC satisface las condiciones del problema.

137. PROBLEMA: Construir un triángulo que tenga dos ángulos y el lado común a ellos respectivamente iguales a dos ángulos y a un segmento dados o, como suele decirse, construir un triángulo dado un lado y los ángulos adyacentes a ese lado.



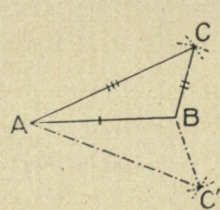
Dados el segmento LM y los ángulos $\hat{V}$ y $\hat{V}'$, para construir un triángulo teniendo un lado igual a LM y los dos ángulos adyacentes a ese lado respectivamente

iguales a $\hat{V}$ y $\hat{V}'$, se toma un segmento AB igual al LM , y por A y B se trazan, de un mismo lado respecto de la recta AB , dos semirrectas que formen con las AB y BA dos ángulos respectivamente iguales a $\hat{V}$ y $\hat{V}'$ (n. 135). Si las semirrectas trazadas se cortan en un punto C , el triángulo ABC satisface las condiciones del problema.

NOTA: Para que estas semirrectas se encuentren es necesario y suficiente que la suma de los ángulos $\hat{V}$ y $\hat{V}'$ sea menor que 180° . (Recuérdese lo dicho en el n. 91).

138. Construir un triángulo que tenga sus tres lados respectivamente iguales a tres segmentos dados o, como se suele decir, construir un triángulo dados los tres lados.

Sean LM , NP y QR los tres segmentos dados.



Tomemos como base del triángulo un segmento $AB = LM$ y tracemos la circunferencia de centro A y radio igual a QR y la circunferencia de centro B y radio igual a NP . Si las circunferencias trazadas se

cortan en dos puntos: el C y el C' , uniendo uno cualquiera de ellos con A y con B se obtendrá un triángulo ABC o ABC' que reunirá las condiciones pedidas, puesto que:

$$AB = LM, BC = NP \text{ y } CA = QR$$

o bien

$$AB = LM, BC' = NP \text{ y } C'A = QR.$$

NOTA: Para que las dos circunferencias trazadas se corten es necesario y suficiente que *cada uno de los tres segmentos dados sea menor que la suma de los otros dos*. (Recuérdese lo dicho en el n. 90).

139. Dado un triángulo dibujado, podremos *copiarlo* valiéndonos de una cualquiera de las tres construcciones anteriores (números 136, 137 y 138).

Si también queremos *copiar* un polígono cualquiera, primero lo *descompondremos* en triángulos trazando para ello, por un vértice, todas las diagonales posibles, y después copiaremos los triángulos así obtenidos, uno a continuación del otro, como se encuentran en el polígono.

EJERCICIOS SOBRE EL CAPÍTULO V

74. Dibujar un triángulo cuyos lados sean de 13 mm., 17 mm. [139] y 23 mm.

75. Copiar la figura del n. 119 del texto.

76. Se tiene una circunferencia de 20 mm. de radio. Tómese un punto que diste 34 mm. del centro y trácense por él las tangentes.

77. Copiar la figura del n. 125 del texto.

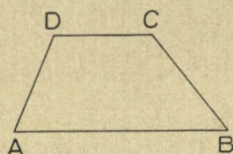
78. Dibujar un cuadrilátero cuyos lados sean de 30 mm., 25 mm., 40 mm., y 30 mm., siendo además la diagonal relativa a los dos primeros lados de 35 mm.

PARALELOGRAMOS

Trapezio. Paralelogramo

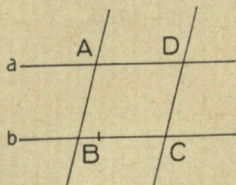
Como aplicación de los criterios de igualdad de triángulos (números 121 a 125) estudiaremos también una clase especial de cuadriláteros que, entre los polígonos, tienen particular importancia.

140. En un cuadrilátero se designan con el nombre de *lados opuestos*, los lados que no tienen vértices comunes.



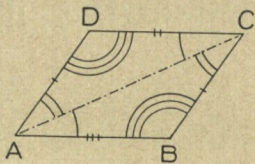
Un cuadrilátero en el cual dos lados opuestos son paralelos se llama *trapezio*.

141. Dadas dos rectas paralelas a y b , cortadas por una transversal en los puntos A y B , si por un punto D , de a , pero distinto del A , se traza la paralela a la AB , esta paralela encuentra a la recta b en un punto C y se obtiene un cuadrilátero $ABCD$ en el cual cada lado es paralelo a su opuesto. Este cuadrilátero puede considerarse de dos modos como trapezio, según se tomen como bases dos lados opuestos o bien los otros dos.



Todo cuadrilátero en el cual los lados opuestos son paralelos se llama *paralelogramo*.

142. Recortemos del papel un paralelogramo $ABCD$ y cortémoslo a lo largo de la diagonal AC . Quedará así dividido en dos triángulos ABC y CDA que se pueden superponer exactamente.



Se verifica de ese modo que el lado AB es igual al DC y que el lado BC es igual al AD y el ángulo $\hat{CBA}$ es igual al $\hat{ADC}$. Además los ángulos $\hat{BAD}$ y $\hat{DCB}$ resultan iguales por ser sumas de ángulos iguales (n. 41).

Tenemos, pues, que:

En todo paralelogramo:

- 1) los lados opuestos son iguales;
- 2) los ángulos opuestos son iguales;
- 3) cada una de las diagonales divide al paralelogramo en dos triángulos iguales.

Esto se puede demostrar también, sin recortar el papel, recordando las propiedades de las paralelas y los criterios de igualdad de triángulos.

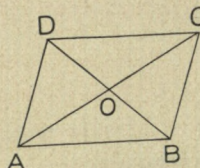
Trazada, en efecto, la diagonal AC en el paralelogramo $ABCD$, se observa que los ángulos $\hat{BAC}$ y $\hat{DCA}$ son iguales por ser alternos internos formados por la transversal AC con las dos paralelas AB y DC (n. 66); y también son iguales los ángulos $\hat{ACB}$ y $\hat{CAD}$ por alternos internos formados por la transversal AC con las paralelas DA y CB . Luego los triángulos ABC y CDA tienen el lado AC común y los ángulos adyacentes ordenadamente iguales; por lo tanto son iguales (n. 123), de lo que se deduce que:

$$AB = DC, \quad AD = BC, \quad \hat{CBA} = \hat{ADC} \quad \text{y} \quad \hat{BAD} = \hat{DCB}.$$

143. Observemos ahora que:

En todo paralelogramo las diagonales se cortan mutuamente en partes iguales.

Si O es el punto en que se encuentran las dos diagonales AC y BD , los dos triángulos ABO y CDO son iguales (n. 123), puesto que, por lo visto hasta ahora, es



$$AB = CD$$

y además es (n. 66)

$$\hat{O}BA = \hat{O}DC \text{ y } \hat{B}AO = \hat{D}CO.$$

Resulta de ello que

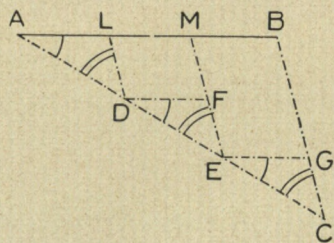
$$AO = CO \text{ y } BO = DO.$$

144. Las propiedades de los paralelogramos permiten resolver el problema siguiente:

PROBLEMA: *Dado un segmento, dividirlo en un número dado cualquiera de partes iguales.*

Para fijar las ideas nos proponemos dividir el segmento dado AB en tres partes iguales.

Sobre una semirrecta que parta de uno de los extremos, el A por ej., y que sea distinta de la AB , se llevan consecutivamente tres segmentos AD , DE y EC , iguales a un segmento arbitrario. Se une C con B y se trazan las paralelas a la recta BC por los puntos D y E , hasta encontrar a AB en los puntos L y M .



Los tres segmentos AL , LM y MB , en que queda dividido el segmento AB , son iguales.

Para demostrarlo se trazan por D y E las paralelas a AB hasta encontrar en F y G a las ME y BC , y se comparan los triángulos ADL , DEF y ECG .

Dichos triángulos son iguales (n. 123) por tener iguales los lados AD , DE y EC , por construcción, y los ángulos $\hat{DAL}$, $\hat{EDF}$ y $\hat{CEG}$, por correspondientes entre las paralelas AL , DF y EG cortadas por la transversal AC , así como también los ángulos $\hat{ADL}$, $\hat{DEF}$ y $\hat{ECG}$, por correspondientes entre las paralelas LD , ME y BC cortadas por la transversal AC (n. 66).

Tendremos, por consiguiente, que

$$AL = DF = EG.$$

Pero en los paralelogramos $DFML$ y $EGBM$, los lados opuestos son iguales, de modo que

$$DF = LM \text{ y } EG = MB$$

de donde se concluye que

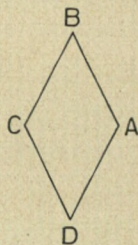
$$AL = LM = MB.$$

Rombo, rectángulo y cuadrado

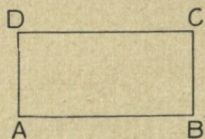
145. Si un paralelogramo $ABCD$ tiene dos lados consecutivos iguales AB y AC , tiene iguales los cuatro lados porque los lados opuestos son siempre iguales (n. 142).

Todo paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales se llama *rombo*.

146. Si en un paralelogramo $ABCD$ uno de sus ángulos, por ej. el $\hat{A}$, es recto, también lo será el opuesto por ser igual a aquél (n. 142); luego el ángulo $\hat{C}$ es recto.



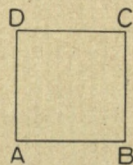
Ahora bien, en todo cuadrilátero la suma de los cuatro ángulos es igual a 360° ; de modo que en nuestro paralelogramo los otros dos ángulos $\hat{B}$ y $\hat{D}$ sumados darán 180° y, puesto que son iguales (n. 142), cada uno de ellos será recto. Luego el paralelogramo $ABCD$ tiene todos sus ángulos rectos.



Un paralelogramo que tiene todos sus ángulos rectos se llama *rectángulo*.

Se puede construir un rectángulo dados dos de sus lados consecutivos, tomando dos segmentos iguales a aquéllos sobre los lados de un ángulo recto y trazando por los extremos las paralelas a los lados de dicho ángulo, hasta que se encuentren.

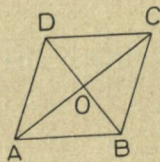
147. Los paralelogramos que tienen los cuatro ángulos rectos y los cuatro lados iguales se llaman *cuadrados*. El cuadrado es, pues, rectángulo y rombo al mismo tiempo.



El cuadrado queda determinado cuando se da uno de sus lados. El cuadrado construido sobre un segmento dado, tomado como lado, se denomina *cuadrado del segmento*.

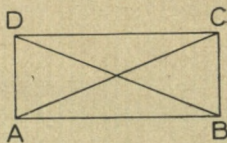
148. En todo rombo las diagonales son perpendiculares.

En efecto, los dos triángulos DOC y BOC tienen el lado común OC , e iguales los lados OD y OB (n. 143) y los lados DC y BC ; de modo que, por el tercer criterio, dichos triángulos son iguales y tienen por lo tanto iguales los ángulos $\hat{DOC}$ y $\hat{BOC}$. Pero como estos ángulos iguales son adyacentes, cada uno valdrá 90° y las dos diagonales AC y BD serán perpendiculares.

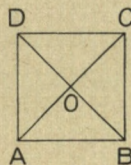


149. *En todo rectángulo las diagonales son iguales.*

Se observa, en efecto, que los dos triángulos rectángulos ABC y BAD tienen el cateto AB común y los catetos AD y BC iguales (n. 142); luego, por el tercer criterio, dichos triángulos rectángulos son



iguales y tienen, por lo tanto, las hipotenusas iguales.



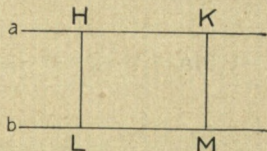
150. *Las diagonales del cuadrado son perpendiculares e iguales.*

Esto ocurre por ser el cuadrado rombo y rectángulo a la vez.

Distancia entre dos paralelas

151. De las propiedades de los paralelogramos sacaremos una observación importante.

Dadas dos rectas paralelas a y b , tomemos sobre una de ellas, por ej. sobre la a , dos puntos cualesquiera, H y K , y por ellos bajemos las perpendiculares HL y KM a la otra recta b .



Estas dos perpendiculares son paralelas (n. 59), y como lo son también entre sí las rectas a y b , el cuadrilátero $HLMK$ será un paralelogramo (precisamente un rectángulo) y tendrá iguales los lados opuestos HL y KM (n. 142), que son las distancias de H y K a la recta b . Pero H y K son dos puntos cualesquiera de la recta a ; luego podremos decir que:

Si dos rectas son paralelas, todos los puntos de la una están a igual distancia de la otra.

Esta distancia se llama *distancia entre las paralelas*.

152. En un trapecio se llama *altura* a la distancia entre las dos rectas paralelas que contienen a las bases (n. 140).

Dado un paralelogramo $ABCD$, a veces se toma un lado, por ej. el AB , como *base*. Entonces se llama *altura* correspondiente a esta base a la distancia de la recta AB a la recta CD del lado opuesto.

El paralelogramo tiene dos alturas.

En el rectángulo, tomado uno de sus lados como base, la altura correspondiente al mismo es igual a los dos lados perpendiculares a la base.

EJERCICIOS SOBRE EL CAPÍTULO VI

[140] 79. Dibújese un trapecio $ABCD$ en el cual sea la base AB de 35 mm., el lado BC de 26 mm., el ángulo en A de 70° y el ángulo en B de 36° , y midáanse la otra base CD y el otro lado AD .

80. Construir un trapecio rectángulo (es decir, teniendo dos ángulos rectos) en el cual la altura (distancia entre las dos bases) sea de 18 mm., la base mayor de 40 mm. y el ángulo que forma esta base con el lado no perpendicular, de 45° . Midáanse la otra base y los lados no paralelos.

81. Dibújese un trapecio isósceles (es decir, que tenga los lados no paralelos iguales) en el cual la base AB sea de 46 mm., la otra base de 22 mm. y la altura de 16 mm. Midáanse los lados.

[141] 82. Dibújese un paralelogramo que tenga dos lados de 40 mm. y 60 mm., y el ángulo comprendido de 50° . Midáanse las diagonales y los ángulos que forman éstas entre sí y con los lados.

83. Dibújese un paralelogramo $ABCD$ en el cual sea $AB = 50$ mm., $BC = 35$ mm., $AC = 40$ mm. Midáanse los ángulos.

[142] 84. ¿Cuál es la amplitud de los ángulos de un paralelogramo en el que uno de ellos es de 30° , o de 39° , o de 120° , o de 160° ?

En cada caso verifíquese con el transportador la respuesta, dibujando previamente el paralelogramo respectivo.

85. Dibújese un rombo de 38 mm. de lado y teniendo un ángulo de 60° . ¿Cuál será la amplitud de los otros ángulos? [150]

86. Dibújese un rombo de 40 mm. de lado y teniendo un ángulo de 50° . Dígase cuál será la amplitud de los otros tres ángulos y midáse con el doble-decímetro las dos diagonales.

87. Dibújese un rombo cuyas diagonales sean de 28 mm. y 96 mm., y midáse con el doble-decímetro y el transportador el lado y la amplitud de los ángulos.

88. Dibújese un rombo de lado igual a 34 mm. y teniendo una diagonal de 30 mm. Mídase la otra diagonal y los ángulos.

89. Dibújese una estrella de cinco puntas (*estrella de Italia*) formada por cinco rombos iguales de 25 mm. de lado, de modo que cada dos rombos consecutivos tengan un vértice y un lado común. ¿Qué amplitud deberá tener cada uno de los ángulos de vértice común?

90. Dibújese un rectángulo de lados iguales a 40 mm. y 60 mm. Mídase con el doble-decímetro y el transportador la longitud de las diagonales, y los ángulos agudos de los dos triángulos rectángulos en que queda dividido el rectángulo por una de las diagonales.

91. Dibújese un rectángulo en que la diagonal sea de 60 mm. y uno de los lados de 25 mm., y midáse el otro lado y los ángulos que la diagonal forma con los lados.

92. Dibújese un rectángulo de lados iguales a 35 mm. y 70 mm. y midáse los ángulos formados por las dos diagonales.

93. Dibújese un cuadrado de diagonal igual a 36 mm. (n. 150).

VII

POLÍGONOS REGULARES

153. Se dice que un polígono es *regular* cuando tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales.

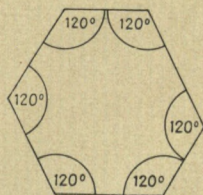
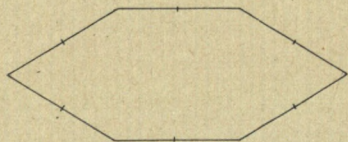
Por ej., son polígonos regulares el triángulo equilátero (n. 99) y el cuadrado (n. 147).

154. Si un triángulo tiene sus tres lados iguales (*es equilátero*), tiene también iguales sus tres ángulos (*es equiángulo*) (n. 99).

En cambio, un polígono de cuatro, cinco o más lados puede muy bien ser equilátero sin ser equiángulo, lo mismo que puede ser equiángulo sin ser equilátero.

Por ej., un rombo es equilátero (n. 145), pero, si no es un cuadrado, no es equiángulo; un rectángulo es equiángulo (n. 146), pero, si no es cuadrado, no es equilátero.

Eso mismo puede observarse en los dos exágonos de la figura siguiente.

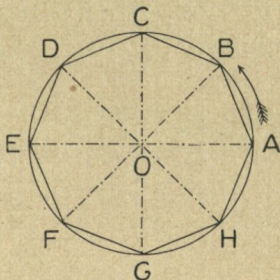


155. Dividamos una circunferencia de centro *O* en un cierto número de arcos iguales, por ej. en 8. Para esto construyamos con el transportador 8 ángulos cen-

trales iguales, cada uno, a $\frac{360^\circ}{8}$, o sea 45° ; los lados de estos ángulos cortarían a la circunferencia en los puntos $A, B, C, D, \dots, H$ y los arcos $AB, BC, CD, DE, \dots, HA$, por ellos determinados, serán iguales (n. 76).

Trazando las cuerdas respectivas se obtiene un polígono, que en nuestro caso es un octógono, el cual decimos que es regular.

En efecto, clavando en O un pincho, recortando el contorno del polígono y haciendo girar éste alrededor del centro O hasta que A vaya a caer sobre B , el vértice B caerá sobre el C , éste sobre el D , etc., y el H sobre el A ; de modo que cada lado del polígono se superpondrá exactamente sobre el que le sigue, y lo mismo pasará con cada ángulo.



Se verifica de ese modo que los lados son iguales entre sí y que los ángulos también lo son, es decir, que el polígono es regular.

Resulta, pues, que :

Si una circunferencia se divide en un cierto número de arcos iguales y se trazan las cuerdas correspondientes, el polígono que se obtiene es regular.

156. Los polígonos cuyos vértices se encuentran todos sobre la circunferencia, se llaman *inscritos en la circunferencia*. A su vez la circunferencia queda *circunscripta al polígono*.

El centro O y el radio OA (o el OB , o el OC , etc.) de la circunferencia circunscripta a un polígono regular se llaman, también, *centro* y *radio* del polígono regular.

157. Si se trazan los radios que pasan por los vértices de un polígono regular, éste queda dividido en triángulos isósceles con el centro como vértice común y teniendo por bases los lados del polígono.

Estos triángulos isósceles son todos iguales entre si por tener las bases y los lados respectivamente iguales (n. 125).

Por lo tanto, los ángulos centrales son iguales, y como la suma de todos ellos vale 360° , la amplitud de cada uno de ellos se obtendrá dividiendo 360° por el número de lados del polígono regular considerado.

En el caso de la figura precedente, como se trataba de un octógono, nos resultó la amplitud de los ángulos $\hat{A}OB$, $\hat{B}OC$, $\hat{H}OA$ igual a $\frac{360^\circ}{8}$ o sea 45° .

Haciendo el cálculo para otros polígonos regulares se obtiene:

triángulo equilátero	120°
cuadrado	90°
pentágono	72°
exágono	60°

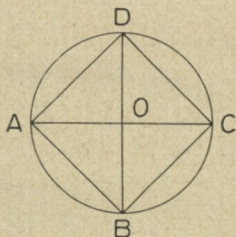
158. La altura de los triángulos isósceles centrales de un polígono regular se llama *apotema* del polígono regular. En otras palabras, se llama *apotema* de un polígono regular a la distancia del centro a uno de los lados.

Para determinarla hay que trazar, pues, la perpendicular a un lado por el centro O del polígono.

159. Estos nuevos conocimientos nos permitirán resolver los problemas siguientes:

PROBLEMA: *Inscribir un cuadrado en una circunferencia dada.*

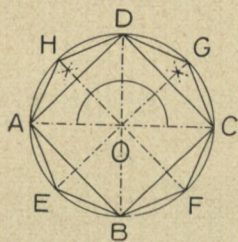
Se traza un diámetro AC y luego otro BD perpendicular al anterior. Uniendo A con B , B con C , C con D y D con A , por medio de las cuerdas AB , BC , CD y DA se obtiene un cuadrilátero inscripto en la circunferencia, del cual decimos que es un cuadrado.



En efecto, los ángulos $\hat{AOB}$, $\hat{BOC}$, $\hat{COD}$ y $\hat{DOA}$ son todos rectos y, por lo tanto, iguales. Serán, pues, también iguales los arcos correspondientes AB , BC , CD y DA (n. 76); de donde resulta que el polígono $ABCD$ es regular (n. 155), y como tiene cuatro lados será un cuadrado.

160. PROBLEMA: *Inscribir un octógono regular en una circunferencia dada.*

Como si se fuera a inscribir un cuadrado se trazan dos diámetros perpendiculares AC y BD y luego las bisectrices GE y HF de los ángulos rectos que aquellos diámetros forman.



La circunferencia queda así dividida en 8 arcos iguales, de modo que el octógono $ABCDEFGH$ será regular (n. 155).

NOTA: Trazando las bisectrices de los ángulos centrales del octógono regular podemos inscribir el polígono regular de 16 lados y, procediendo análogamente con este último, el de 32 lados, y así sucesivamente.

161. PROBLEMA: *Inscribir un exágono regular en una circunferencia dada.*

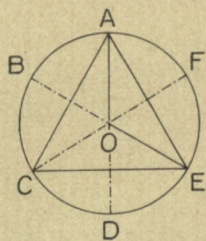
Para inscribir en la circunferencia dada O un exágono regular, basta hacer centro en un punto cualquiera A de la circunferencia (tomado como vértice), y con una abertura de compás igual al radio OA cortar la en dos puntos B y F ; luego, con centro en B y el mismo radio cortar la en un nuevo punto C , y repetir esta construcción con centro en cada nuevo punto hasta llegar al F .

El polígono $ABCDEF$ será un exágono regular inscripto.

En efecto, considerando uno cualquiera de los triángulos centrales isósceles del exágono regular, el ángulo en el vértice O será de 60° (n. 157); de donde resulta que los ángulos de la base, que son iguales, suman juntos 120° (n. 91). Luego cada uno vale 60° y el triángulo es equiángulo y, por consiguiente, equilátero (n. 99); lo que nos dice que: *el lado del exágono regular inscripto es igual al radio*.

162. PROBLEMA: *Inscribir un triángulo equilátero en una circunferencia dada.*

Dividida una circunferencia en seis partes iguales AB , BC , CD , DE , EF y FA , los arcos AC , CE y EA serán también iguales por ser los duplos de aquéllos; luego el polígono ACE será un triángulo regular, es decir, equilátero.



163. PROBLEMA: *Inscribir un polígono regular de doce lados (dodecágono regular) en una circunferencia dada.*

Se inscribe primeramente el exágono regular $ABCDEF$,

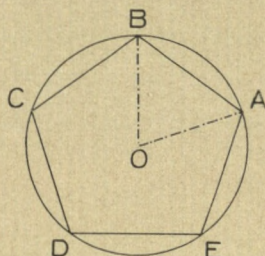
se trazan los diámetros AD , BE y CF y luego las bisectrices de los ángulos centrales formados por dichos diámetros. De ese modo la circunferencia queda dividida en doce arcos iguales cuyas cuerdas determinan el dodecágono regular. (n. 155).

NOTA: Análogamente se procede para inscribir en una circunferencia dada un polígono regular de 24 lados, de 48 lados, y así sucesivamente.

164. PROBLEMA: *Inscribir un pentágono regular en una circunferencia dada.*

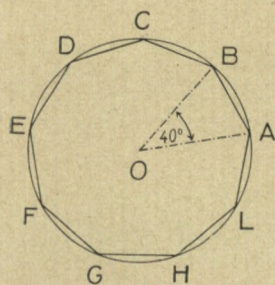
Para ello nos valdremos, no sólo de la regla y el compás, sino también del transportador.

Con este instrumento se construye en el círculo O un ángulo central $\widehat{AOB}$ de 72° . Como este ángulo $\widehat{AOB}$ es la quinta parte de 360° , también el arco AB será la quinta parte de la circunferencia.



Con radio igual a la cuerda AB se determinan los arcos BC , CD , DE y EA iguales al arco AB .

El polígono $ABCDE$ resulta así un pentágono regular.



NOTA: Análogamente, para inscribir en una circunferencia O un eneágono regular, se determina con el transportador un

ángulo central de $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$, y se repite la construcción anterior.

EJERCICIOS SOBRE EL CAPÍTULO VII

- [164] 94. ¿Cuál es la amplitud de cada ángulo de un decágono regular?
95. ¿Cuál es la amplitud de cada ángulo exterior de un pentágono regular?
96. ¿Por qué se puede construir un pavimento con mosaicos iguales cuya forma sea la de un triángulo equilátero, la de un cuadrado o la de un exágono regular?
97. ¿Se puede construir un pavimento con mosaicos iguales cuya forma sea la de un pentágono regular?
98. Para construir un pavimento se pueden emplear mosaicos iguales cuya forma sea la de un octágono regular combinados con otros de forma cuadrada y lado igual al de los octogonales ¿Por qué?
99. Para construir un pavimento se pueden emplear dodecágonos regulares combinados con triángulos equiláteros de lado igual al de los dodecágonos. ¿Por qué?
-

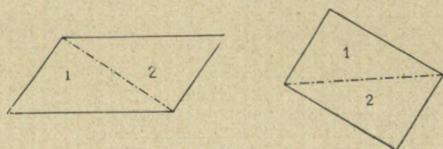
VIII

MEDICIÓN DE POLÍGONOS

Polígonos equivalentes

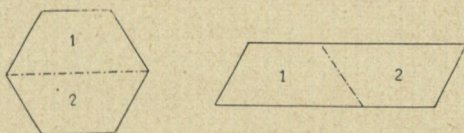
165. Dos polígonos pueden tener igual superficie aun sin ser iguales.

Por ej., los dos paralelogramos de la figura siguien-



te tienen igual superficie, porque ambos son *sumas* de los mismos triángulos 1 y 2.

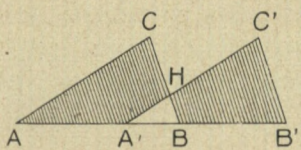
También tienen igual superficie el exágono y el



paralelogramo representados en la figura, por ser *sumas* de trapecios iguales.

En fin, tienen igual superficie los dos trapecios sombreados $AA'HC$ y $BB'C'H$ porque se obtienen *restando* el mismo triángulo $A'BH$ de los dos triángulos iguales ABC y $A'B'C'$.

166. Dos polígonos de igual superficie se dicen *equivalentes*.



167. Entre los polígonos equivalentes se cumplen las siguientes propiedades:

I) *Dos polígonos equivalentes a un tercero son equivalentes entre sí.*

II) *Las sumas de polígonos iguales o equivalentes son equivalentes.*

III) *Las diferencias de polígonos iguales o equivalentes son equivalentes.*

Medición de un polígono

168. Para medir un polígono se necesita ante todo fijar la *unidad de medida*.

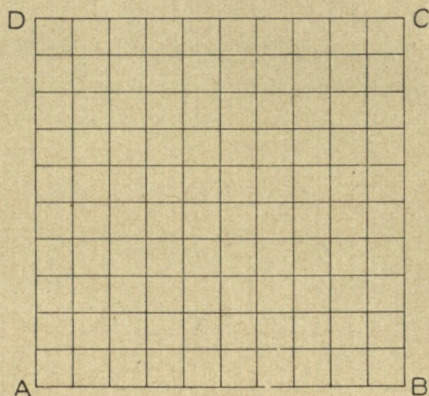
Frecuentemente se toma, como *unidad*, el cuadrado que tiene por lado la unidad de medida adoptada para los segmentos. Así, cuando se toma como unidad de longitud el *metro*, se adopta como unidad fundamental de las medidas de superficie el *metro cuadrado*, es decir, *el cuadrado que tiene por lado un metro lineal*, y esto se indica con la notación 1 m^2 .

Como unidades auxiliares se usan, en tal caso, el *decímetro cuadrado* (1 dm^2), el *centímetro cuadrado* (1 cm^2), el *milímetro cuadrado* (1 mm^2) y, por otra parte, el *decámetro cuadrado* (1 dam^2), el *hectómetro cuadrado* (1 hm^2) y el *kilómetro cuadrado* (1 km^2), es decir, cuadrados que tienen por lados un decímetro, un centímetro, un milímetro, un decámetro, un hectómetro y un kilómetro respectivamente ⁽¹⁾.

169. Si tomamos un metro cuadrado $ABCD$ y divi-

⁽¹⁾ En la medición de las superficies de los terrenos se usan, como se sabe, el decámetro cuadrado y el hectómetro cuadrado con los nombres de *área* (a) y *hectárea* (ha) respectivamente.

dimos los lados AB y BC en decímetros, trazando por los 9 puntos de división marcados sobre AB las paralelas a BC y por los 9 puntos de división de BC las paralelas a AB , el metro cuadrado queda dividido en 100 cuadrados de 1 dm. de lado.



Por consiguiente, el metro cuadrado contiene 100 dm^2 .

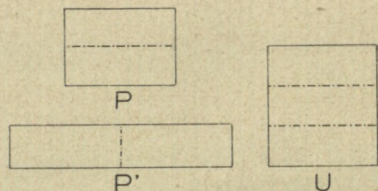
Del mismo modo el dm^2 contiene 100 cm^2 , y el cm^2 contiene 100 mm^2 ; de donde resulta que el metro cuadrado contiene 10.000 cm^2 ó 1.000.000 de mm^2 .

170. Medir un polígono P quiere decir encontrar cuántas veces contiene el polígono P al metro cuadrado, o al decímetro cuadrado, o al centímetro cuadrado, etc.

Si, por ej., P contiene exactamente 23 dm^2 , se dice que la medida o área de P en dm^2 es 23, o que la superficie de P es de 23 dm^2 .

Se puede decir también que el área de P en m^2 es 0,23; en cm^2 es 2300; en dam^2 es 0,0023; en mm^2 es 230.000, etc.

171. MEDICIÓN CON RESPECTO A UNA UNIDAD CUALQUIERA. Se puede medir un polígono P con respecto a cualquier otro, tomado como unidad.



Medir a P con otro polígono cualquiera U , quiere decir encontrar una parte alicuota de U que esté contenida exactamente en P .

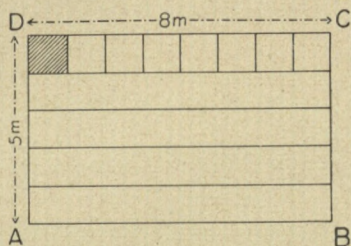
Si, como ocurre con el rectángulo P (o con el P') de la figura, la tercera parte de U está contenida exactamente 2 veces en P , se dice que la medida de P (o de P') con respecto a U es $\frac{2}{3}$.

Área del rectángulo y del cuadrado

172. Para hallar el área de un rectángulo $ABCD$, supongamos primeramente que cada uno de los lados contenga un número exacto de veces a la unidad de medida.

Por ej., que el lado AB tenga 8 m. y el AD 5 m.

Si después de marcar los metros sobre AD trazamos por los puntos de división



las paralelas a AB , el rectángulo queda dividido en 5 rectángulos iguales. Cada uno de éstos, a su vez, se puede dividir en 8 cuadrados iguales a 1 m^2 .

Resulta, pues, que el rectángulo $ABCD$ contiene 5 veces 8 metros cuadrados, o sea $(8 \times 5) \text{ m}^2$. Su área en m^2 será 40, o bien su superficie será de 40 m^2 .

173. Supongamos en segundo lugar que los dos lados del rectángulo no contengan un número exacto de metros. Sean, por ej., el AB de 3,4 m. y el AD de 2,6 m.

Esto quiere decir que los dos lados son de 34 dm. y 26 dm. respectivamente; de modo que el rectángulo es descomponible en 26 rectángulos iguales, cada uno de los cuales contiene exactamente 34 dm². Luego el rectángulo contiene 26 veces 34 dm², y su área en dm² será de 34×26 , o bien la superficie será de

$$(34 \times 26) \text{ dm}^2 = 884 \text{ dm}^2$$

o sea

$$8,84 \text{ m}^2.$$

Pero este último número se puede obtener también multiplicando 3,4 por 2,6, que eran las medidas en metros de los lados del rectángulo, y como lo que se ha dicho se puede repetir para cada rectángulo que se dé, podemos enunciar la siguiente regla:

REGLA: *Para hallar el área de un rectángulo se multiplica la medida de la base por la medida de la altura* (dimensiones del rectángulo).

Si indicamos con S el área del rectángulo y con b y h las medidas de la base y de la altura, podemos escribir:

$$S = b \times h.$$

174. NOTA: Para aplicar la regla precedente es necesario fijarse si las dos dimensiones del rectángulo están medidas con la misma unidad, es decir, las dos en *metros*, o las dos en *decímetros*, etc. La superficie resulta en tales casos medida en *metros cuadrados*, o en *decímetros cuadrados*, etc.

175. De la regla del área (n. 173) se deduce esta otra:

REGLA: *Dada el área de un rectángulo y una de sus dimensiones, para hallar la otra se divide el área por la dimensión que se conoce.*

Es decir:

$$b = \frac{S}{h} \quad \text{y} \quad h = \frac{S}{b}$$

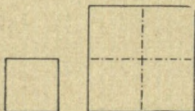
176. El cuadrado es un rectángulo que tiene las dos dimensiones iguales. Luego tenemos que:

REGLA: *Para hallar el área de un cuadrado se multiplica por sí misma la medida del lado o, como suele decirse, se eleva al cuadrado la medida del lado.*

Indicando con S el área y con l la medida del lado de un cuadrado tendremos:

$$S = l^2.$$

177. Dado un cuadrado cualquiera, por ej. de 5 mm. de lado y por consiguiente de 25 mm.² de superficie, considerando un cuadrado de lado *doble*, o sea de 10 mm. de lado, su superficie será de 100 mm.², es decir, *cuádruple* de la primitiva, como puede verse en la figura.



Si el lado del primitivo cuadrado se hubiera hecho *triple*, la superficie habría resultado *nueve* veces mayor; si se hubiera hecho *cuádruple*, diez y seis veces mayor, y así sucesivamente. De modo que:

Si el lado de un cuadrado C es múltiplo del de otro cuadrado C' según 2, 3, 4, etc., la superficie y el área de C serán múltiplos de las de C' según 2^2 , 3^2 , 4^2 , etc.

178. De la regla que da el área de un cuadrado (n. 176) se deduce esta otra:

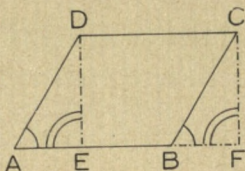
REGLA: *Dada el área de un cuadrado, para encontrar la medida del lado se extrae la raíz cuadrada de esa área.*

Es decir:

$$l = \sqrt{S}$$

Area del paralelogramo

179. Para hallar el área de un paralelogramo $ABCD$ comencemos por tomar como base del mismo uno de sus lados mayores, el AB en la figura, y en el caso particular del rombo, a uno cualquiera de sus lados. Tracemos, además, las perpendiculares DE y CF , a la base y su prolongación, por los vértices D y C ; con lo que quedará formado el rectángulo $EFCD$, de base EF igual a DC , y por consiguiente igual a la base AB del paralelogramo, y altura también igual a la del paralelogramo.



Los dos triángulos AED y BFC son iguales, lo que puede verificarse recortando el primero y superponiéndolo sobre el segundo, o bien recordando que son rectángulos y tienen los catetos iguales (n. 122): el $ED = FC$ por lados opuestos del rectángulo (n. 142) y $AE = BF$ por ser las respectivas restas de los segmentos iguales AB y EF menos el segmento EB .

Vemos así que el paralelogramo dado y el rectángulo construido $EFCD$ se obtienen sumándole al mismo trapecio $EBCD$, de uno u otro lado, el triángulo AED o su igual BFC ; luego el paralelogramo y el rectángulo tienen igual superficie o, como también se dice, son equivalentes (n. 167).

Por lo tanto el área del paralelogramo será igual a la del rectángulo, la cual se obtiene multiplicando la medida de EF por la de DE (n. 173); pero como EF

es igual a la base AB del paralelogramo, y DE es la altura del mismo, podremos enunciar la siguiente regla:

REGLA: *Para hallar el área de un paralelogramo se multiplica la medida de la base por la de la altura o, como se acostumbra a decir por brevedad, se multiplica la base por la altura.*

Indicando con S el área y con b y h las medidas de la base y de la altura respectivamente, tendremos que:

$$S = b \times h.$$

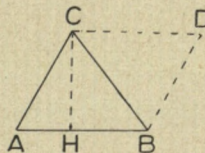
180. De la regla del área (n. 179) se deduce esta otra:

REGLA: *Dadas el área y la medida de la base (o de la altura) de un paralelogramo, para hallar la medida de la altura (o de la base) se divide el área por la medida de la base (o de la altura) dada.*

$$h = \frac{S}{b} \quad \text{y} \quad b = \frac{S}{h}$$

Area del triángulo

181. Dado un triángulo ABC , por dos de los vértices B y C tracemos las paralelas a sus respectivos lados opuestos AC y AB hasta que se encuentren en un punto D .



Obtendremos así un paralelogramo $ABCD$, dividido por la diagonal BC en dos triángulos iguales (n. 142).

Siendo uno de éstos el ABC , dicho triángulo será la mitad del paralelogramo, y para hallar su área habrá que dividir por 2 el área del paralelogramo $ABCD$.

Pero este paralelogramo tiene la misma base y la misma altura del triángulo; luego podemos enunciar la siguiente regla:

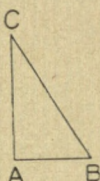
REGLA: *Para hallar el área de un triángulo se divide por 2 el producto de la medida de la base por la medida de la altura o, como suele decirse por brevedad, el área de un triángulo es igual a la mitad de la base por la altura.*

Si indicamos con S el área del triángulo, con b la medida de la base y con h la medida de la altura, tendremos:

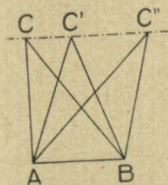
$$S = \frac{b \times h}{2}$$

182. Si en un triángulo rectángulo se toma como base a uno de los catetos, el otro cateto resulta ser la altura.

Luego *el área de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto (de las medidas) de los catetos.*



183. La regla del área del triángulo (n. 181) nos permite observar que dos triángulos de igual base y altura tienen la misma área y, por consiguiente, igual superficie. Luego:



Los triángulos de igual base y altura son equivalentes.

184. De la regla del área del triángulo podemos deducir también esta otra:

REGLA: *Dada el área de un triángulo y la medida de la base (o de la altura), para hallar la medida de la altura (o de la base)*

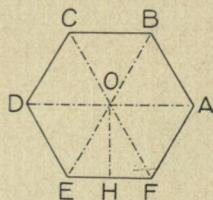
se multiplica por 2 el área y se divide el producto por la medida de la base (o de la altura) dada.

Indicando con S el área del triángulo, con b la medida de la base y con h la medida de la altura, se tiene:

$$h = \frac{2S}{b} \quad \text{y} \quad b = \frac{2S}{h}.$$

185. Si se quiere construir un triángulo doble, triple, cuádruple, etc., de uno dado, basta construir un triángulo que tenga la misma altura del dado, y la base doble, triple, cuádruple, etc.

Consideremos ahora un polígono regular $ABCDEF$ y unamos su centro O con los vértices. De ese modo el polígono quedará dividido en tantos triángulos isósceles como lados tiene, los que en el caso de la figura son 6. Estos triángulos isósceles son todos iguales y tienen por base el lado del polígono, y por altura la apotema (nos. 157 y 158); luego el polígono, que es suma de estos seis triángulos isósceles iguales, será equivalente a un triángulo igual a 6 veces el triángulo OEF .



Pero, por lo dicho al principio, el triángulo igual a 6 veces el OEF debe tener por base un segmento igual a 6 veces el EF , o sea el perímetro del polígono, y por altura la misma del triángulo OEF , o sea la apotema; y como esto mismo se puede repetir para cualquier polígono regular sin más cambio que el número 6 por el número de lados que corresponda, podemos decir que todo polígono regular es equivalente a un trián-

gulo que tiene por base el perímetro del polígono y por altura la apotema del mismo.

De lo expuesto se deduce la siguiente regla:

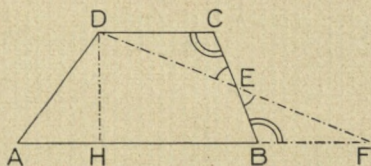
REGLA: *El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto (de la medida) del perímetro por (la medida de) la apotema.*

Indicando con S el área del polígono regular, con p la medida del perímetro y con a la medida de la apotema, tendremos:

$$S = \frac{p \times a}{2}$$

Área del trapecio

186. Dado un trapecio $ABCD$, unamos el punto medio E del lado BC con el vértice D y prolonguemos la recta DE hasta cortar en F a la prolongación del lado AB .



Si al trapecio $ABCD$ le cortamos el triángulo ECD y lo llevamos sobre el EBF , veremos que el trapecio es equivalente al triángulo AFD cuya altura DH es la misma del trapecio y cuya base AF es igual a la suma de las bases AB y CD . Luego:

Todo trapecio es equivalente a un triángulo de igual altura y de base igual a la suma de las bases del trapecio.

187. De esto último y de la regla del área del triángulo (n. 181) se deduce esta otra:

REGLA: *El área de un trapecio es igual a la mitad del producto de (la medida de) la suma de las bases por (la medida de) la altura o, como suele decirse, a la semisuma de las bases por la altura.*

Indicando con S el área, con b y b' las medidas de las bases y con h la medida de la altura, se tiene:

$$S = \frac{(b + b') \times h}{2}$$

o bien

$$S = \frac{b + b'}{2} \times h$$

188. De la regla anterior se deducen las siguientes reglas inversas:

REGLAS: a) *Para hallar la altura de un trapecio conociendo el área y (las medidas de) las bases, se divide el doble del área por la suma (de las medidas) de las bases.*

Es decir:

$$h = \frac{2S}{b + b'}$$

b) *Para hallar la (medida de la) suma de las bases de un trapecio conociendo el área y la (medida de la) altura, se divide el duplo del área por la (medida de la) altura.*

$$b + b' = \frac{2S}{h}$$

c) *Para hallar (la medida de) una de las bases de un trapecio conociendo el área, la (medida de la) altura y (la medida de) la otra base, se divide el duplo del área por (la medida*

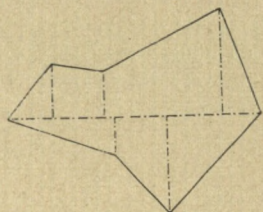
de (la altura, y del resultado obtenido se resta (la medida de) la base conocida.

$$b = \frac{2S}{h} - b' \quad \text{y} \quad b' = \frac{2S}{h} - b.$$

Area de un polígono cualquiera

189. Para determinar el área de un polígono cualquiera se lo descompone en triángulos por medio de diagonales o bien uniendo un punto interno con cada uno de los vértices; se halla el área de los triángulos obtenidos, y la suma de estas áreas da el área del polígono.

También se puede dividir el polígono en trapecios y triángulos rectángulos, trazando en él una diagonal llamada *base* (de ser posible en el sentido de la máxima dimensión) y bajando sobre esta base las perpendiculares que partan de los vértices.



Así proceden los agrimensores para determinar la superficie de los terrenos.

EJERCICIOS SOBRE EL CAPÍTULO VIII

100. Calcular el área de un rectángulo que tiene 36m. de perímetro y un lado doble del consecutivo. [174]

101. En un rectángulo el perímetro es de 26cm. y la base supera a la altura en 3cm. ¿Cuál es el área del rectángulo?

102. Calcular el área de un rectángulo en el cual el perímetro es de 60m. y la altura es igual a $\frac{2}{3}$ de la base.

103. Se desea sembrar trigo en un campo rectangular cuyas dimensiones son 294,6m. 300,5m. ¿Cuántos hectolitros de semilla serán necesarios si se quiere sembrar 2,5 hl por ha?

104. Se desea empapelar algunas habitaciones de un departamento. La superficie total a cubrir es de 120m^2 y el rollo del papel que se quiere emplear tiene 12m. de largo por 0,50m. de ancho, siendo su precio de \$ 3.50 c/u. ¿Cuántos rollos se necesitan y cuánto debe gastarse en la compra del papel?

105. Se desea embaldosar un piso de 4,50m. de largo por 3,75m. de ancho. ¿Cuánto deberá gastarse si el precio convenido con el empresario es, comprendidos el material y la mano de obra de \$ 5,60 el metro cuadrado?

106. Se desea cubrir con linoleum el piso de una habitación de 5,80m. por 4,20m., dejando descubierto, para colocar una estufa, un rectángulo de 80 cm. por 54cm. ¿Cuánto se gastará si el precio, comprendido el linoleum y la mano de obra, es de \$ 3,50 el metro cuadrado?

107. Se desea blanquear las paredes y el cielo raso de una cocina de 4m. de largo, 3,75m. de ancho y 3,50m. de alto, y además se quiere pintar al óleo las paredes hasta una altura de 1,60m. ¿Cuánto habrá que gastar si el precio convenido por el blanqueo es de \$ 0.35 el metro cuadrado y el de la pintura al óleo de \$ 0.70 el metro cuadrado?

108. Una mesa rectangular tiene 1.50m. de largo por 1.20m. de ancho. ¿Cuántos dm^2 de hule serán necesarios para cubrirla si, para clavar con pinches el hule sobre los bordes, debe sobrar 3cm. de cada uno de los cuatro lados?

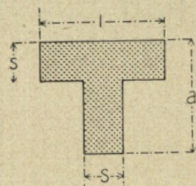
109. Se desea plantar frutales en un terreno rectangular de 760m. de largo por 260m. de ancho. ¿Cuál es el mayor número de frutales que se podrá plantar si se quiere que haya un árbol por cada 16m^2 por lo menos?

110. Un jardín rectangular de 28,4m. de largo por 15,8m. de ancho está atravesado paralelamente a los lados por un camino, en el sentido de la longitud, de 11,5dm. de ancho, y por dos senderos, en el sentido del ancho, de 95cm. de ancho. ¿Cuál es la superficie ocupada por los caminos y cuál la del terreno cultivado?

111. Una lámina de 84cm. de largo por 64cm. de ancho está rodeada por un marco plano de 13cm. de ancho. ¿Cuál es la superficie del marco?

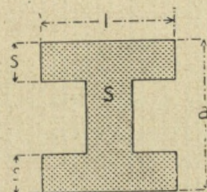
112. Calcular el área de la sección de una viga T sabiendo que sus dimensiones son (véase la figura) las siguientes:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
medida de l en mm.:	60	100	180	25	80	140
» » a » »	30	50	90	25	80	140
» » s » »	5,5	8,5	14,5	3,5	9	15



113. Calcular el área de la sección de una viga doble T cuyas dimensiones son (véase la figura) las siguientes:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
medida de l en mm.:	70	90	110	113	116	125
» » a » »	140	200	250	260	270	300
» » s » »	6	7,5	9	9,4	9,7	10,8
» » s_1 » »	9	11,3	13,6	14,1	14,7	16,2



114. ¿Cuál es la altura de un rectángulo de 19.280m^2 de superficie y en el que la base es de $705,60\text{m}$.? [175]

115. Un terreno rectangular tiene 1 hectárea de superficie y uno de los lados de 285m . ¿Cuál es la longitud del otro lado?

116. ¿Cuál es la base de un rectángulo de 19.280m^2 de superficie si la altura es de $352,80\text{cm}$.?

117. De dos rectángulos equivalentes, uno tiene 117m. de largo. por 35m. de ancho, y el otro tiene 65m. de largo. ¿Cuánto tiene de ancho este último?

[176] 118. Calcular el área de un cuadrado que tiene 29m. de perímetro.

119. Cuando se ha medido prácticamente un segmento con un cierto instrumento y se dice que tiene 13cm. de largo, se entiende que la longitud del segmento considerado puede estar comprendida entre 12,5cm. y 13,5cm. ¿Entre qué límites estará comprendida el área del cuadrado de dicho segmento?

120. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 20 cm. de lado se necesitan para pavimentar un corredor de 8 m. de largo por 80 cm. de ancho?

121. Cada casilla de un tablero de ajedrez tiene 3,8 cm. de lado. ¿Cuál será el área del tablero? (Recuérdese que sobre cada lado hay 8 casillas).

122. Se quiere cubrir con pedregullo una plaza cuadrada de 78 m. de lado. ¿Cuánto deberá gastarse si se ha convenido el precio a razón de \$ 0.15 el m^2 ?

123. ¿Cuántos m^2 , dam^2 , hm^2 , km^2 están contenidos en una milla geográfica cuadrada, si la longitud de la milla geográfica es de 7420 m. (o más exactamente 7420,44m.)?

[177] 124. Un cuadrado tiene 18 m. de lado. ¿Cuál será el lado de un cuadrado de superficie doble?

125. Un cuadrado tiene 27 mm. de lado (ó 3,8 cm., ó 2,08 m.). ¿Cuál será el lado del cuadrado doble, del quintuplo y del mitad?

[179] 126. Calcular el área de un paralelogramo sabiendo que tiene 105,75 m. de base y 86,95m. de altura.

127. Un paralelogramo tiene la base doble de la altura. La suma de la base y la altura es de 3,75 m. ¿Cuál es el área?

128. Las vidrieras de las ventanas de una iglesia están formadas por rombos rojos y azules. En cada una entran 25 rombos rojos y 36 rombos azules, los cuales tienen 12 cm. de lado y 8 cm. de altura. ¿Cuántos m^2 de vidrio rojo y cuántos de vidrio azul se habrán empleado para hacer las vidrieras de 8 ventanas?

[180] 129. Un paralelogramo de 16,92 m^2 de superficie tiene la base de 7,20 m. ¿Cuál es la altura?

130. Un paralelogramo de 20,02 m^2 de superficie tiene la altura de 3,25 m. ¿Cuál es la base?

131. Hallar el área de un triángulo que tiene 94,70 m. de base y 137,90 m. de altura.

132. El área de un rombo es igual al semi producto de las medidas de sus diagonales. ¿Por qué? (Considérense los triángulos en que queda dividido el rombo por sus diagonales).

133. Calcular el área de un rombo cuyas diagonales son de 6 m. y 8 m.

134. Calcular el área de un rombo en el que la suma de las diagonales es de 535,50 m., y una de las diagonales es igual a $\frac{4}{5}$ de la otra.

135. El área de un cuadrilátero es igual al semi producto de la medida de una de las diagonales por la suma de las medidas de las distancias que hay desde los otros dos vértices a dicha diagonal. ¿Por qué?

136. ¿Cuál es la base de un triángulo de 28728 m² de superficie si la altura es de 42 m? [184]

137. Determinar la base y la altura de un triángulo de 875 m² de superficie sabiendo que la base es igual a $\frac{2}{5}$ de la altura.

138. ¿Cuál es la altura de un triángulo que tiene 12 m. de base y es equivalente a otro triángulo de 20 m. de base y 6 m. de altura?

139. ¿Cuál es la base de un triángulo isósceles de 20 m. de altura y que es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen 30 m. y 18 m. de largo?

140. Un terreno triangular tiene 3 hectáreas de superficie, siendo la base de 485,6 m. ¿Cuál es la altura?

**Tabla de las apotemas y de las superficies de algunos [185]
polígonos regulares de 1 metro de lado**

POLÍGONO	APOTEMA	SUPERFICIE
Triángulo	0,2887 m.	0,4330 m ²
Cuadrado.....	0,5000 »	1,0000 »
Pentágono	0,6882 »	1,7205 »
Hexágono	0,8660 »	2,5981 »
Octógono	1,2071 »	4,8284 »
Decágono	1,5388 »	7,6942 »
Dodecágono.....	1,8660 »	11,1962 »

La tabla precedente sirve para encontrar la apotema y la superficie de los polígonos regulares de una de las especies indicadas en la primera columna, cualquiera que sea la longitud del lado. Así, para obtener la apotema, basta multiplicar la contenida en la tabla por la medida (en metros) del lado que se dé, y para obtener la superficie (en m^2) basta multiplicar la que da la tabla por el cuadrado de la medida (en m.) del lado que se dé.

[187] 141. Calcular el área de un trapecio en el que las bases tienen 34,25 m. y 62,41 m., y la altura 20,15 m.

142. Un farol de gas está formado por ocho vidrios de forma trapezoidal. Los cuatro vidrios inferiores son más grandes y tienen sus bases de 55 cm. y 60 cm. y una altura de 45 cm.; los otros cuatro tienen sus bases de 55 cm. y 50 cm. y una altura de 25 cm. ¿Cuál es la superficie total de los ocho vidrios?

[188] 143. De un rectángulo $ABCD$ de 25 m. de largo (AB) por 16 m. de ancho (BC) quítese un triángulo CBE , tal que el segmento BE sea igual a un cuarto de AB . ¿Cuál será el área del triángulo y cuál la del trapecio que queda?

144. Calcular la altura de un trapecio sabiendo que su superficie es de $700 m^2$ y que sus bases son de 30 m. y 40 m.

145. Determinar la altura de un trapecio sabiendo que la superficie es de $223,875 m^2$ y que sus lados paralelos son de 13,5 m. y 6,4 m.

146. Calcular la base menor de un trapecio sabiendo que la superficie es de $200 m^2$, la base mayor de 18 m. y la altura de 12 m.

147. La superficie de un trapecio es de $542,5 m^2$, la altura es de 21,7 m. y la diferencia de los dos lados paralelos es de 11,2 m. ¿Cuáles son estos dos lados?

148. Calcular las bases y la altura de un trapecio de $0,2916 m^2$ de superficie, sabiendo que la base menor es igual a la mitad de la base mayor y que la altura es igual al doble de la suma de las bases. (Recuérdese que el área se puede encontrar multiplicando la suma de las bases por la mitad de la altura).

IX

TEOREMA DE PITAGORAS Y SUS
APLICACIONES

Teorema de Pitágoras

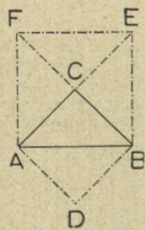
190. Cuando se conoce la longitud de los dos catetos de un triángulo rectángulo, fácilmente se puede hallar la longitud de la hipotenusa; lo mismo que, conocidas las longitudes de la hipotenusa y de uno de los catetos, se puede determinar la longitud del otro.

Para poder obtener las reglas que nos enseñarán a realizar eso, debemos hacer previamente una observación geométrica.

191. Consideremos ante todo un triángulo rectángulo *isósceles* ABC , cuya hipotenusa sea AB , y hagámoslo girar en torno a AB hasta que ocupe la posición ABD y en torno a cada uno de los catetos hasta ocupar las posiciones ACF y BCE .

El ángulo $\widehat{ECF}$ resulta recto, de modo que uniendo F con E obtendremos un quinto triángulo FCE igual al ABC .

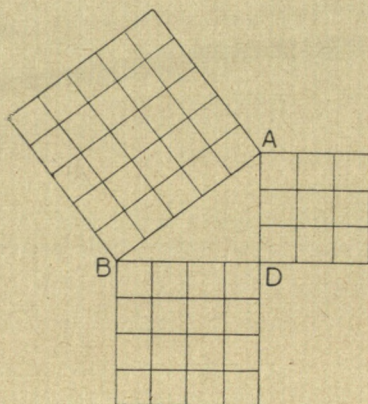
Por ser cada uno de los ángulos agudos del triángulo ABC , de 45° , resulta que el cuadrilátero $ABEF$ es el cuadrado de la hipotenusa AB , mientras que $ADBC$ es el cuadrado del cateto AC . Pero el primer cuadrado



es igual al cuádruplo del triángulo ABC y el segundo cuadrado es igual al doble del mismo triángulo; por lo tanto:

En todo triángulo rectángulo isósceles, el cuadrado de la hipotenusa es equivalente al doble del cuadrado de un cateto.

En segundo lugar, construyamos un triángulo rectángulo cuyos catetos sean de 3 cm. y 4 cm. respectivamente.



Se verifica con el doble-decímetro que la hipotenusa resulta exactamente de 5 cm. (Para hacer caber la figura hemos reducido algo las dimensiones).

Construidos los cuadrados de los catetos y de la hipotenusa, tendremos que sus respectivas superficies serán (n. 176):

$$9 \text{ cm.}^2, 16 \text{ cm.}^2 \text{ y } 25 \text{ cm.}^2$$

y como

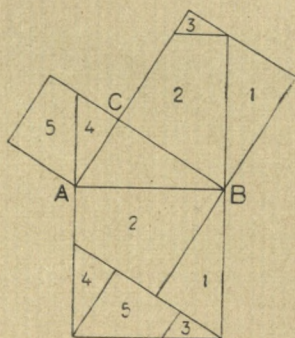
$$9 + 16 = 25$$

podemos decir que *el cuadrado de la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Hemos verificado que esta relación vale para dos triángulos rectángulos diferentes. Nace pues la sospecha de que ella valga para *cualquier* triángulo rectángulo

Para verificar que efectivamente es así, tomemos un triángulo rectángulo cualquiera y construyamos sobre la hipotenusa y sobre cada uno de los catetos los respectivos cuadrados.

Si recortamos los cuadrados de los catetos según los triángulos 1, 3 y 4 y los trapecios 2 y 5, indicados en la figura, vemos que, tal como resulta en ella, estas cinco partes en que están descompuestos los cuadrados de los catetos se pueden superponer sobre el cuadrado de la hipotenusa cubriéndolo exactamente.



Como esta verificación se puede hacer con cualquier triángulo rectángulo, obtenemos como resultado el teorema siguiente, llamado de PITÁGORAS:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

192. Recordando que se llama *cuadrado* o *segunda potencia* de un número al producto de dicho número por sí mismo, podremos expresar el resultado anterior diciendo que: *en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.*

Si indicamos por a , b y c las longitudes de la hipotenusa y de los catetos, respectivamente, tendremos:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Se deducen de aquí las dos reglas siguientes:

REGLAS: a) *Para hallar la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, conociendo las longitudes de los catetos, se extrae la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.*

O sea

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

b) *Para hallar la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo, conociendo las longitudes de la hipotenusa y del otro cateto, se extrae la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de las longitudes de la hipotenusa y del cateto conocidos.*

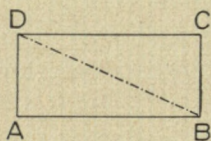
Es decir:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{y} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Las reglas anteriores suelen ser muy útiles en las aplicaciones. Aquí nos limitaremos a presentar algunos fáciles problemas, en los que se saca provecho de dichas reglas.

193. DIAGONAL DEL RECTÁNGULO. Todo rectángulo $ABCD$ queda dividido por una de sus diagonales, la BD por ej., en dos triángulos rectángulos iguales que tienen por catetos a dos lados consecutivos del rectángulo y por hipotenusa común la diagonal considerada.



Sea, por ej.:

$$AB = 3,5 \text{ cm. y } AD = 1,2 \text{ cm.}$$

La longitud en cm. de la diagonal será, en virtud de la regla a (n. 192):

$$\sqrt{3,5 \times 3,5 + 1,2 \times 1,2} = 3,7$$

Luego

$$BD = 3,7 \text{ cm.}$$

Tenemos, pues, que :

La longitud de la diagonal de un rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos dimensiones.

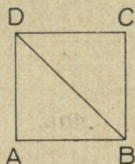
194. Análogamente se obtiene de la regla b (n. 192) que :

En todo rectángulo una de las dimensiones es igual a la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la longitud de la diagonal y el cuadrado de la otra dimensión.

195. DIAGONAL DEL CUADRADO. Los triángulos rectángulos en que un cuadrado queda dividido por la diagonal, son isósceles.

Tenemos, pues, que :

La longitud de la diagonal de un cuadrado es igual a la raíz cuadrada del doble del cuadrado de la longitud del lado; y la longitud del lado es igual a la raíz cuadrada de la mitad del cuadrado de la longitud de la diagonal.



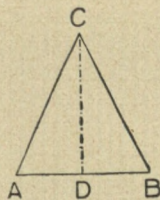
Si indicamos con l la longitud del lado, y con d la de la diagonal, tendremos :

$$d^2 = 2 l^2$$

y, por consiguiente :

$$d = \sqrt{2} l \quad \text{y} \quad l = \sqrt{\frac{d^2}{2}}$$

196. LADO, ALTURA Y BASE DE UN TRIÁNGULO ISÓSCELES. Todo triángulo isósceles ABC , de base AB , queda dividido por la altura CD en dos triángulos rectángulos iguales, que tienen un cateto igual a la mitad de la base AB y el otro igual a la altura CD .



Podremos valernos, pues, de las reglas anteriores (n. 192) para encontrar el lado, la altura o la base, cuando se conozcan los otros dos elementos.

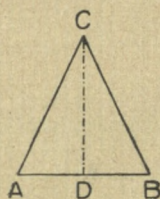
-1) Supongamos que se conozcan la base y la altura, y que se quiera encontrar el lado. Sean, por ej.,

$$AB = 10 \text{ m. y } CD = 12 \text{ m.,}$$

de donde

$$AD = 5 \text{ m.}$$

Por la regla a) (n. 192) la longitud del lado AC , en metros será:



$$\sqrt{5 \times 5 + 12 \times 12} = 13$$

Luego

$$AC = BC = 13 \text{ m.}$$

2) Supongamos que se conozcan el lado y la base, y que se desee hallar la altura. Sean, por ej.,

$$AB = 5,6 \text{ dm. y } AC = 5,3 \text{ dm.,}$$

de donde

$$AD = 2,8 \text{ dm.}$$

Por la regla b) (n. 192) la longitud de la altura, en dm., será de

$$\sqrt{5,3 \times 5,3 - 2,8 \times 2,8} = 4,5$$

Luego

$$CD = 4,5 \text{ dm.}$$

3) Supongamos que se conozcan el lado y la altura, y que se desee hallar la base. Sean, por ej.,

$$AC = 65 \text{ cm. y } CD = 63 \text{ cm.}$$

Por la regla b) (n. 192) la longitud de AD , en cm., será de

$$\sqrt{65 \times 65 - 63 \times 63} = 16.$$

Luego

$$AD = 16 \text{ cm.}$$

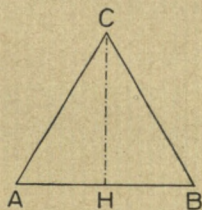
y la base buscada será

$$AB = 32 \text{ cm.}$$

197. Si en un polígono regular se une el centro con dos vértices consecutivos, se obtiene un triángulo isósceles en el que la *base* es el *lado del polígono*, el *lado* es el *radio* y la *altura* es la *apotema*.

Recordando, pues, lo dicho anteriormente (n. 196), tendremos que *bastará conocer dos de los tres elementos: lado, radio y apotema de un polígono regular para poder determinar el otro.*

198. LADO Y ALTURA DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO. Todo triángulo equilátero ABC queda dividido por la altura CH en dos triángulos rectángulos iguales en los que la hipotenusa es doble de uno de los catetos. El otro cateto es la altura del triángulo equilátero.



El cuadrado de CH es equivalente, según sabemos, a la diferencia entre el cuadrado de AC y el de AH . Pero como AH es la mitad de AC , su cuadrado será la cuarta parte del cuadrado de AC ; luego tendremos que:

En todo triángulo equilátero el cuadrado de la altura es equivalente a $\frac{3}{4}$ del cuadrado del lado y, por consiguiente, el cuadrado del lado es equivalente a $\frac{4}{3}$ del cuadrado de la altura.

Si en un triángulo equilátero el lado es de 6m., por ej., el área del cuadrado de la altura, en m², será

$$\frac{3}{4} \times 6 \times 6 = 27$$

y la longitud de la altura en m., será

$$\sqrt{27} = 5,19$$

Luego

$$CH = 5,19m$$

Análogamente, si la altura de un triángulo equilátero es de 12cm., el área del cuadrado del lado en cm², será

$$\frac{4}{3} \times 12 \times 12 = 192$$

y la longitud del lado en cm. será

$$\sqrt{192} = 13,85$$

Luego

$$AB = BC = CA = 13,85cm.$$

En general, designando por l la longitud del lado y por h la de la altura, tendremos:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2$$

o sea

$$l^2 = \frac{l^2}{4} + h^2$$

Luego

$$\frac{3}{4} l^2 = h^2 \quad \text{y} \quad l^2 = \frac{4}{3} h^2$$

de donde

$$h = \sqrt{\frac{3}{4} l^2} \quad \text{y} \quad l = \sqrt{\frac{4}{3} h^2}$$

199. Puesto que la altura de un triángulo equilátero es igual a la apotema del exágono regular de lado igual al del triángulo, podemos decir que: *Dado el lado de un exágono regular se puede calcular la apotema y viceversa.*

EJERCICIOS SOBRE EL CAPÍTULO IX

- [191] 149. Dados dos cuadrados, construir otro equivalente a su suma.
 150. Dado un cuadrado, construir otro equivalente a su triplo.
- [192] 151. Dados dos cuadrados, construir otro equivalente a su diferencia.
152. Calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen 5cm. y 12 cm. de largo.
153. La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 29 cm. de largo y un cateto de 20 cm. ¿Cuál es la longitud del otro cateto?
154. Verificar con la escuadra o el transportador que el triángulo cuyos lados son de 8cm., 15cm. y 17cm. es rectángulo.
155. En un triángulo rectángulo un cateto es igual a $3/2$ del otro y la hipotenusa tiene 30m. ¿Cuál es la longitud de cada cateto?
156. Una escalera debe apoyarse sobre el suelo a 4m. de una pared. ¿Cuál debe ser la longitud de la escalera para que pueda alcanzar hasta una altura de 6m.

157. ¿A qué distancia del pie de un muro debe estar apoyada una escalera de 10m. de largo para que alcance a una altura de 8m.?

158. Una escalera de 7,25m. de largo está apoyada a 3,40m. del pie de un muro. ¿Hasta qué altura llega?

159. ¿Cuál es el lado de un rombo que tiene sus diagonales de 6m. y 8m.?

160. Calcular el perímetro de un trapecio que tiene dos ángulos rectos y en el que las bases son de 8,5m. y 12,4m. y la altura de 5,2m. (Por uno de los vértices de la base menor trácese una perpendicular a la base mayor).

161. La superficie de un trapecio rectángulo (es decir, que tiene dos ángulos rectos) es de 300m^2 , la altura es de 9,80m. y una de las bases es de 20m. Calcular la longitud de las dos diagonales.

162. Calcular por medio del dibujo, y sirviéndose del doble-decmetro, la raíz cuadrada de 194, de 65, de 113, etc. (Descompongase el número en la suma o en la diferencia de dos cuadrados y téngase en cuenta lo dicho en el n. 192. Por ej.: $194 = 13^2 + 5^2$; $65 = 9^2 - 4^2$; etc.).

163. ¿Cuál es la diagonal de un rectángulo cuyas dimensiones son 46m. y 52m. [193]

164. La diagonal de un rectángulo tiene 30m. y la altura es igual a $\frac{3}{4}$ de la base. ¿Cuáles son las dimensiones? [194]

165. ¿Cuál es la longitud de la diagonal de un cuadrado de 46,75m. de lado? [195]

166. ¿Cuál es la longitud del lado de un cuadrado cuya diagonal es de 12m.?

167. ¿Cuál es el área de un cuadrado de 36cm. de diagonal?

168. Dos lados consecutivos de un paralelogramo tienen 14m. y 5,8m. respectivamente, siendo el ángulo comprendido de 45° . Calcular el área del paralelogramo. (La altura bajada desde uno de los vértices determina un triángulo rectángulo isósceles, luego...)

169. ¿Cuál es la altura de un triángulo isósceles cuya base es de 12m. si el lado es de 26m.? [196]

170. En un triángulo rectángulo isósceles la altura bajada desde el vértice del ángulo recto divide a la hipotenusa en dos segmentos de 6cm. cada uno. Calcular la altura y el cateto.

171. Calcular el área de un rombo en el que el lado es de 3,6m. y la diagonal de 4,9m.

172. En un círculo de 2,4m. de radio, calcular la distancia del centro a una cuerda de 0,60m. de largo.

173. ¿A qué distancia del centro se encuentra una cuerda de 2,72m. de largo en un círculo de 3,65m. de radio?

174. En un círculo de 2,25m. de radio, se da una cuerda de 3m. Calcular la longitud de la cuerda que subtiende el arco mitad.

175. En un círculo de 4,20m. de radio, dos cuerdas paralelas tienen 3,12m. y 6,80m. de largo, respectivamente. Calcular la distancia que hay entre las dos cuerdas.

176. El área de un triángulo isósceles de base a y lado b es igual a

$$\frac{a}{2} \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

[198] 177. ¿Cuál es la altura de un triángulo equilátero que tiene 26m. de lado?

178. ¿Cuál es el lado de un triángulo equilátero que tiene 5,8m. de altura?

179. La superficie de un triángulo equilátero es de 1000m². ¿Cuál es su lado?

180. ¿Cuál es el perímetro de un rombo de 60m² de superficie si la diagonal menor es igual al lado?

181. Los agrimensores romanos tomaban como área del triángulo equilátero de lado a el número $\frac{1}{2}a^2$. ¿Qué error cometían? ¿Qué error se comete cuando se adopta como área el número $\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{10}a^2$, dado por Herón?

[199] 182. La apotema de un exágono regular es de 2,80m.; ¿cuál es su perímetro?

183. ¿Cuál es la apotema de un exágono regular que tiene 120m. de perímetro?

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y AREA DEL CÍRCULO

Longitud de la circunferencia

200. Dada una circunferencia, imaginemos haber construido un modelo de ella mediante un alambre de cobre, por ejemplo. Si después de cortarlo en un punto lo extendemos sobre una recta, obtendremos un segmento c que llamaremos *circunferencia rectificada*.

Midiendo este segmento obtendremos la longitud de la circunferencia.

Pero para hallar esta medida no es indispensable valerse, como lo hemos hecho, de un hilo flexible. En efecto, consideremos los perímetros de los polígonos inscritos y circunscriptos a la circunferencia dada y observemos que los primeros son menores que c y los de los polígonos circunscriptos son mayores.

Además se ve que estos polígonos, tanto inscritos como circunscriptos, terminan casi por confundirse con la circunferencia cuando el número de lados se hace suficientemente grande.

Se explica así cómo, midiendo el perímetro de un polígono inscrito o circunscripto de un número grande de lados, se obtiene un *valor aproximado* (por defecto o por exceso, respectivamente) *de la longitud de la circunferencia*; y la aproximación es tanto mayor cuanto

más grande es el número de lados del polígono considerado.

Por ej., si tenemos una circunferencia de 1 m. de diámetro y consideramos el exágono regular inscripto y el cuadrado circunscripto, encontramos (n. 161) que la longitud de la circunferencia está comprendida entre 3 m. y 4 m. Más exactamente: considerando polígonos regulares inscriptos y circunscriptos de mayor número de lados se encuentra, como longitud de la circunferencia de 1 m. de diámetro,

$$3,14 \text{ m.}$$

o, si se desea llegar hasta los diez milímetros,

$$3,1416 \text{ m.}$$

Si el diámetro, en lugar de ser 1 m., es de 2 m., la longitud de la circunferencia resulta

$$6,2832 \text{ m.} = (3,1416 \times 2) \text{ m.}$$

es decir: *cuando se duplica el diámetro, se duplica también la longitud de la circunferencia.*

Del mismo modo, si el diámetro es de 3 m., 4 m., 5 m., etc., la longitud de la circunferencia es de

$$(3,1416 \times 3) \text{ m.} = 9,4248 \text{ m.}$$

$$(3,1416 \times 4) \text{ m.} = 12,5664 \text{ m.}$$

$$(3,1416 \times 5) \text{ m.} = 15,7080 \text{ m.}$$

etc., respectivamente.

En síntesis, se tiene este hecho importantísimo:

Cualquiera que sea la circunferencia que se considere, la razón de la longitud de la circunferencia a la

del diámetro es siempre la misma y está dada por el número 3,14 ó, con mayor aproximación, por el número 3,1416.

Podemos, por lo tanto, enunciar la siguiente regla.

REGLA: *La longitud de una circunferencia se obtiene multiplicando la longitud del diámetro por el número fijo 3,14 ó, si se quiere una aproximación mayor, por 3,1416.*

Resulta de esto que *la longitud de la semicircunferencia se obtiene multiplicando la longitud del radio por 3,14 (o por 3,1416).*

El número fijo 3,14 (o 3,1416), que da *la razón constante de la longitud de la circunferencia a la del diámetro*, se suele representar en Matemáticas con la letra griega π , llamada "pi".

Si designamos por c la longitud de la circunferencia y por r la del radio, tendremos:

$$c = \pi \times 2 r$$

o bien

$$c = 2 \pi r.$$

201. Se deduce de lo anterior la siguiente regla.

REGLA: *La longitud del diámetro de una circunferencia se obtiene dividiendo la longitud de la circunferencia por el número 3,14 ó por 3,1416.*

Es decir:

$$2 r = \frac{c}{\pi}$$

202. Determinada la longitud de una circunferencia se puede obtener fácilmente la longitud de uno cual-

quiera de sus arcos, siempre que se dé la amplitud del ángulo central correspondiente.

Supongamos, por ej., que se quiera encontrar la longitud de un arco perteneciente a una circunferencia de 1 m. de radio, siendo de 43° el ángulo central correspondiente al arco.

La longitud de la circunferencia entera es de

$$(2 \times 3,14) \text{ m.} = 6,28 \text{ m.};$$

y, puesto que 1° es la 360 ava parte de 4 ángulos rectos, la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 1° será

$$\frac{6,28 \text{ m.}}{360}$$

y la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 43° será

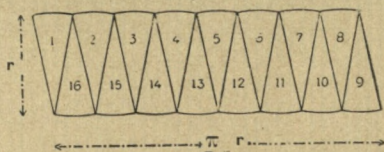
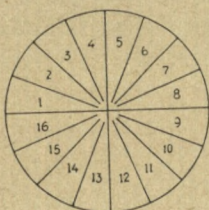
$$\frac{6,28 \text{ m.} \times 43}{360} = 0,75 \text{ m.}$$

Resulta, pues, que *la longitud de un arco se encuentra multiplicando la longitud de la circunferencia entera por el número de grados del ángulo central correspondiente y dividiendo el producto por 360.*

203. Si la amplitud del ángulo central está dada en grados, minutos y segundos, se reduce toda a segundos y, luego, para obtener la longitud del arco, se multiplica la longitud de la circunferencia por el número de segundos obtenido y se divide el producto por 1.296.000, que es el número de segundos contenido en 360° .

Area del círculo

204. Consideremos un círculo C , y sea r la longitud de su radio. Para determinar el área dividamos la circunferencia en 4 partes iguales, luego en 8, en 16 y así sucesivamente. Si nos detenemos al llegar a un número bastante grande, cada uno de los arquiteos iguales en



que queda dividida la circunferencia termina casi por confundirse con la cuerda correspondiente.

Recortemos entonces los sectores correspondientes a estos arquiteos y dispongámoslos como indica la figura, en la que nos hemos limitado a dividir la circunferencia en 16 partes iguales.

Obtenemos así una figura compuesta por los mismos sectores del círculo, la que, si los arquiteos son bastante pequeños como para poderlos considerar prácticamente confundidos con las cuerdas respectivas, se reduce a un paralelogramo cuya base es la semicircunferencia rectificada y cuya altura es el radio del círculo dado.

De acuerdo con esto podemos decir que: *el área del círculo es igual a la de un paralelogramo que tiene su base igual a la semicircunferencia rectificada y la altura igual al radio.*

Ahora bien, como la longitud de la semicircunferencia se halla multiplicando el radio por 3,14 ó por 3,1416 (n. 200) y el área del paralelogramo se encuentra multiplicando la base por la altura (n. 179), podemos enunciar la siguiente regla.

REGLA: *El área de un círculo se obtiene multiplicando el cuadrado del radio por 3,14 ó por 3,1416.*

Es decir, si S indica el área del círculo y r la medida del radio, es

$$S = \pi \times r \times r = \pi r^2.$$

205. El resultado anterior se puede enunciar también diciendo (n. 181):

El área de un círculo es igual a la de un triángulo de base igual a la circunferencia rectificada y de altura igual al radio.

206. De lo dicho anteriormente (n. 204) resulta que si un círculo C' tiene doble radio que otro círculo C , el área de C' es cuádruple de la de C ; y en general, si el radio de C' es múltiplo del de C según 3, 4,... etc., el área de C' es múltiplo de la de C según 9, 16,... etc. (n. 177).

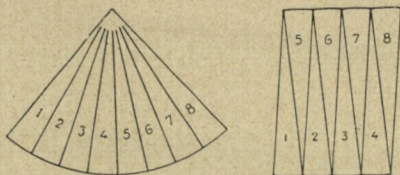
207. De la regla del área (n. 204) se obtiene, inversamente, esta otra:

REGLA: *Para obtener la longitud del radio de un círculo cuya área se conoce, se divide esta área por 3,14 (o por 3,1416) y se extrae la raíz cuadrada del cociente.*

O sea

$$r^2 = \frac{S}{\pi} \quad \text{y} \quad r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

208. Una observación semejante a la que hicimos con el círculo (n. 204), nos muestra que: *el área de un sector circular es igual a la de un paralelogramo de base igual a la mitad del arco rectificado y de altura igual al radio.*



O también, *el área de un sector circular es igual a la de un triángulo que tiene por base el arco rectificado y por altura el radio.*

Por lo tanto, *el área de un sector circular se obtiene dividiendo por 2 el producto de las longitudes del arco rectificado y del radio.*

Si representamos por l la longitud del arco rectificado, por r la del radio y por S el área del sector, tendremos:

$$S = \frac{l \times r}{2}$$

209. Determinada previamente el área de un círculo es fácil hallar, por otro procedimiento, el área de un sector de dicho círculo, conociendo la amplitud del ángulo central.

Supongamos, por ej., que un sector perteneciente a un círculo de 5 dm. de radio tenga un ángulo central de 27° .

El área del círculo será

$$(3,14 \times 5 \times 5) \text{ dm}^2 = 78,50 \text{ dm}^2$$

Luego, un sector cuyo ángulo central sea de 1° tendrá un área de

$$\frac{78,50 \text{ dm}^2}{360}$$

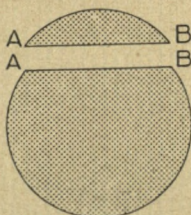
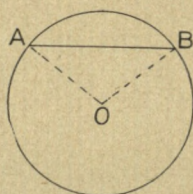
y el sector dado tendrá un área de

$$\frac{78,50 \text{ dm}^2 \times 27}{360} = 5,8875 \text{ dm}^2.$$

Lo que nos dice que *el área de un sector se puede hallar multiplicando el área del círculo entero por el número de grados del ángulo central correspondiente y dividiendo el producto por 360.*

210. Si la amplitud del ángulo central está dada en grados, minutos y segundos, se opera en forma análoga a la indicada en el núm. 203.

211. Todo círculo queda dividido por una cuerda que no pase por el centro en dos partes, cada una de



las cuales recibe el nombre de *segmento circular*.

Uno de los dos segmentos así obtenido es menor que un semicírculo, y el otro mayor.

El área de un segmento circular menor que un semicírculo se obtiene restando del área del sector (convexo) correspondiente, el área del triángulo isósceles formado por la cuerda y los radios. El área del otro segmento circular se encuentra sumándole al área del sector (cóncavo) correspondiente, el área del mismo triángulo isósceles OAB.

EJERCICIOS SOBRE EL CAPÍTULO X

184. El diámetro de un *argentino* (moneda de oro) es de 22 [200] mm. ¿Cuál es la longitud del borde?

185. Encontrar la longitud del borde de las monedas de 20 cts, 10 cts. y 5 cts. sabiendo que sus diámetros respectivos son de 21mm., 19mm. y 17mm.

186. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido un ciclista si la rueda de la bicicleta tiene 72cm. de diámetro y ha dado 3.250 vueltas?

187. Las agujas de un reloj de bolsillo tienen las longitudes siguientes: el minutero, 19mm., el horario, 9mm. y el segundero 6mm. ¿Cuál es el camino descripto por el extremo de cada una de ellas al cabo de 12 horas?

188. Se desea pegar una franja sobre el borde de una mesita circular de 60cm. de diámetro. ¿Cuántos metros de la franja se necesitarán?

189. ¿Cuánto tiempo tardará un caballo de carrera, que corre a razón de 12,6m. por segundo, para recorrer una pista circular de 112m. de diámetro?

190. ¿Cuál será el camino recorrido en 1 segundo por un punto del ecuador terrestre, como consecuencia de la rotación de la tierra? ¿Cuál será el camino recorrido en un día? (El radio ecuatorial terrestre es de 6.370km.).

191. ¿Qué distancia recorre la tierra en un segundo, durante su movimiento de revolución alrededor del sol, si este movimiento se considera como circular y uniforme? (La distancia de la tierra al sol es de 150 millones de kilómetros y el año solar es de 365 días y $\frac{1}{4}$).

192. Divídase el diámetro de una circunferencia en dos partes cualesquiera y sobre cada una de ellas, como diámetro, describese una semicircunferencia. ¿Cuál es la longitud de la suma de estas dos semicircunferencias?

193. Si se divide el diámetro de una circunferencia en tres partes iguales y se describen sobre ellas, consideradas como diámetros, las respectivas semicircunferencias, ¿Cuál es la suma de las longitudes de las mismas?

Respóndase a la misma pregunta cuando se divide el diámetro en 4, 5, ... n partes iguales.

[201] 194. ¿Cuál es el radio del ecuador terrestre si la longitud de éste es de 40.000 km.?

195. Sabiendo que se suele atribuir al radio del ecuador terrestre la longitud de 860 millas geográficas y al ecuador la de 5.400 millas geográficas, averiguar si están de acuerdo estas dos cifras.

[203] 196. ¿Cuál debe ser la longitud del diámetro de una circunferencia para que la de un arco de ella, de 1 minuto, sea de 1m.?

197. ¿Cuál será la longitud de un arco de $47^{\circ}56'39''$ si la de la circunferencia a que pertenece es de 3,8m.?

[204] 198. Calcular el área del círculo cuya circunferencia tiene 15,79m de largo.

199. ¿Cuál es el área del círculo que tiene 7,5m. de radio?

200. Una lámina rectangular de lata tiene 80cm. de largo por 64cm. de ancho. ¿Cuántos discos circulares de 4cm. de radio se podrán sacar de ella si las circunferencias respectivas deben ser tangentes? ¿Cuál es, en dm^2 , el área de la superficie restante?

201. La puerta de un palacio tiene la forma de un rectángulo complementado con un semicírculo en la parte superior. Las dimensiones del rectángulo son 4,50m. de ancho por 6,50m. de alto. ¿Cuánto habrá costado la puerta sabiendo que al carpintero se le ha pagado \$ 45 por m^2 y al pintor \$ 4,35 por m^2 de la parte exterior y \$ 3 por m^2 de la parte interna?

202. Mídase la superficie de la figura limitada por las tres semicircunferencias del ejercicio n. 192, suponiendo que dichas semicircunferencias se hayan trazado todas del mismo lado con respecto a la recta que contiene a los diámetros.

203. Mídase la superficie encerrada por dos circunferencias del mismo centro (*concéntricas*) y radios desiguales, supuestos conocidos (*corona circular*).

204. ¿Cuál es el área de la corona circular comprendida entre dos circunferencias concéntricas cuyos radios respectivos son de 3m. y 5m.?

205. Calcular el área de la corona circular comprendida entre la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscripta a un triángulo equilátero de 3,464 m. de lado.

206. Calcúlese el área del círculo en que un arco de su circunferencia, de 27,9m. de largo, tiene una amplitud de $115^{\circ}07'58''$. (Ténganse en cuenta los números 202 y 203 del texto).

207. El autor del papiro, *Rhind*, (1700 a J. C.) dice que el área de un círculo es igual a la de un cuadrado de lado igual a los $\frac{8}{9}$ del diámetro del círculo considerado. ¿Qué error se comete aplicando esta regla en lugar de la dada en el texto (n. 204), en caso de que el círculo tenga 1m. de diámetro? ¿Y si tuviera un radio r ?

208. La superficie del círculo que tiene por diámetro la hipotenusa de un triángulo rectángulo cualquiera, es igual a la suma de las de los círculos que tienen por diámetros los catetos. (Recuérdese el teorema de Pitágoras y aplíquese la fórmula que expresa el área de un círculo).

209. ¿Cuál es el radio de un círculo de $12,64\text{m}^2$ de superficie? [207]

210. Calcular el radio de un círculo de $22,8906\text{m}^2$ de superficie.

211. La superficie de una corona circular es de 120m^2 y la circunferencia menor tiene 12m. de diámetro. ¿Cuál será el diámetro de la circunferencia mayor?

212. Dentro de una circunferencia de 12,56m. de longitud se quiere construir una corona de $7,0336\text{m}^2$ de superficie. ¿Cuál será la longitud de la circunferencia interna?

213. ¿Cuál es el área de un sector de 30° y 6,40 m. de radio? [210]

214. En un círculo de 25 m. de radio, ¿cuál es la longitud del arco correspondiente a un sector de $3,60\text{m}^2$ de superficie?

215. En un círculo de 25 m. de radio, ¿cuál es el ángulo central de un sector de $4,76\text{m}^2$?

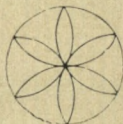
216. La superficie de un círculo es de $2827,44\text{m}^2$ y la de un sector del mismo es igual a la del triángulo equilátero inscrito en el círculo. Calcular la longitud y la amplitud del arco correspondiente a este sector.

217. ¿Cuál es el área del triángulo de lados curvilíneos determinado por tres circunferencias de 3 cm. de radio, tangentes exteriormente dos a dos?

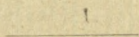
- [211] 218. Dado un círculo de 3,2 m. de radio, determinar el área del segmento circular comprendido entre un lado de un exágono regular inscripto y el arco (menor que una semicircunferencia) subtendido por ese lado.
219. Dado un círculo de centro O y radio 2m., trácese en él un diámetro AB y por los puntos medios de los radios OA y OB las cuerdas perpendiculares a estos radios. Hállese el área de cada una de las tres partes en que queda dividido el círculo.
220. ¿Cuál es el área de un segmento circular correspondiente a un ángulo central de 60° en un círculo de 6m. de radio?
221. ¿Cuál es el área de un segmento circular de 24cm. de radio correspondiente a un ángulo central de 120° ?
222. En un segmento circular de 2m. de radio y cuyo ángulo al centro es de 60° se ha inscripto un círculo. Averiguar cuál es el área de la figura que queda si se le quita al segmento el mencionado círculo.
223. En un segmento circular de 25m. de radio y cuyo ángulo central es de 90° se ha inscripto un círculo. Averiguar cuál es el área de la figura que queda si se le quita al segmento el mencionado círculo.
224. En un cuadrado $ABCD$, de 3m. de lado, describanse los dos arcos BD de centros, A y C y radio igual al lado. Calcúlese el área de cada una de las tres partes en que queda dividido el cuadrado.
225. En un triángulo equilátero ABC , de 2m. de lado, describanse los tres arcos que van de un vértice a otro pasando por el centro del triángulo y hállese el área del trifolio que así se obtiene.
226. Sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, como diámetro, trácese la semicircunferencia que queda en la misma región en que se encuentra el triángulo. Trácese, asimismo, las semicircunferencias que tienen por diámetros los catetos, pero que quedan fuera del triángulo, y calcúlese el área total de las dos *lúnulas* (*lúnulas de Hipócrates*) que así se obtienen. Compárase dicha área con la del triángulo.

Considérense las superficies de las dos lúnulas como diferencia entre la suma de las superficies del triángulo y los semicírculos menores, y la superficie del semicírculo mayor.

227. Divídase una circunferencia en seis partes iguales, y con centro en cada uno de los puntos de división y radio igual al de



la circunferencia describanse los arcos internos a ésta. Se obtendrá así una estrella de seis hojas cuya área se pide, suponiendo conocido el radio r .



RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

212. Nos hemos ocupado hasta ahora de *figuras planas*, es decir, de figuras contenidas totalmente en un plano (*Geometría plana*). Ahora nos ocuparemos, en cambio, de figuras no contenidas por completo en un solo plano, o sea de *figuras espaciales*.

La parte de la Geometría que estudia las propiedades de las figuras espaciales se llama *Geometría del espacio* o *Estereometría*.

Naturalmente que no se podrán representar sobre el papel las figuras espaciales tal cual son, sino que deberemos hacerlo en perspectiva; pero a pesar de ello nos podremos imaginar la figura verdadera, como ocurre cuando observamos la fotografía de un cuerpo cualquiera.

Rectas y planos en el espacio

213. En el ESPACIO se pueden imaginar cuantos planos se quiera. Por ejemplo, en el aula de la escuela vemos: el plano de la mesa, el plano del pizarrón, los planos de las paredes, el del piso, etc.

En la Geometría, para distinguir un plano de otro, se acostumbra a designar cada uno de ellos por una letra griega minúscula: α (alfa); β (beta); γ (gamma); δ (delta); etc.

214. También en el espacio: *Dos puntos determinan una recta* (n. 6).

215. *Si una recta pasa por dos puntos de un plano, todos sus puntos pertenecen al plano o, como suele decirse, la recta pertenece al plano.*

216. Por un punto A pueden pasar cuantos planos se quiera; y aun tomando un segundo punto B , se pueden hacer pasar por A y B tantos planos como se desee.

Por ejemplo, una puerta, fijada al marco por medio de dos bisagras, se puede abrir y cerrar; pero cerrándola con el picaporte la fijamos en un tercer punto y la puerta ya no se puede mover más. Vemos así que, si además de los puntos A y B se toma un tercer punto C fuera de la recta AB , por los tres puntos A , B y C se puede hacer pasar un plano y sólo uno. Tenemos, pues, que:

Tres puntos no situados en línea recta determinan un plano.

El plano determinado por tres puntos (no alineados) A , B y C se llama "plano ABC ".

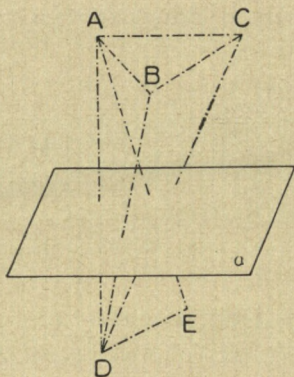
217. Resulta de esto que:

Una recta y un punto no perteneciente a ella determinan un plano.

En efecto, si A es el punto y a la recta, eligiendo sobre a dos puntos diferentes B y C tendremos que los tres puntos no alineados A , B y C pertenecerán a un plano y sólo a uno (n. 216), el cual contendrá al punto A y a la recta a (n. 215).

218. Observaremos, por último, que :

Todo plano divide al espacio en dos partes llamadas semiespacios respecto del plano considerado.



Cada punto del espacio, no perteneciente al plano dado, se encuentra en uno o en otro de los semiespacios. Si dos puntos no pertenecientes al plano están en un mismo semiespacio, el segmento que determinan no corta al plano. Si dos puntos no pertenecientes al plano quedan en semiespacios opuestos, el segmento que determinan corta al plano.

Así, los segmentos AB , BC , CA y DE no cortan al plano α , mientras que los segmentos AD , AE , BD y CD sí lo cortan.

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

219. Dos rectas a y b del espacio pueden encontrarse, la una con respecto a la otra, en alguna de las tres posiciones siguientes:

1) Las rectas a y b tienen un punto común C . En tal caso pertenecen a un mismo plano, el que se puede determinar tomando, además de C , un punto A sobre a y un punto B sobre b y considerando el plano ABC (n. 216).

Dos rectas, tales como la a y la b , que tienen un punto común y que, por lo tanto, pertenecen a un mismo plano, se llaman *incidentes*.

2) Las rectas a y b pertenecen a un plano, pero no tienen ningún punto común.

En este caso las rectas se llaman *paralelas* (n. 58).

3) Las rectas a y b son tales que ningún plano puede contener las dos a la vez, de donde resulta que tampoco pueden tener ningún punto común, porque si ello ocurriera, las dos rectas pertenecerían a un mismo plano, como se ha visto en el primer caso.

Dos rectas a y b , tales que no exista ningún plano que las contenga a la vez, se llaman *alabeadas*.

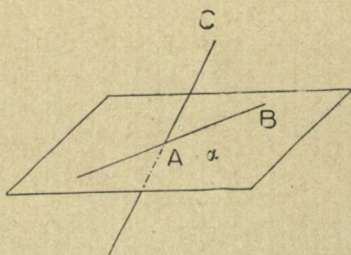
Tales son, por ej., en el aula, una de las aristas del piso y una de las dos aristas verticales que no está en la misma pared que la anterior.

Posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio

220. Una recta a y un plano α pueden encontrarse, la una con respecto al otro, en tres posiciones diversas, a saber:

1) La recta a pertenece al plano α (n. 215).

2) La recta a tiene un solo punto común con el plano α . Esto ocurre cuando se toma un punto A en el el plano y otro C fuera de él, y se unen por medio de la recta AC .



Esta recta AC no puede tener ningún otro punto común con el plano α , porque si pasara por un segundo punto de α , distinto del A ,

pertenecería por completo al plano (n. 215) y, por lo tanto, no pasaría por el punto exterior C .

Una recta y un plano, tales como la AC y el α , que tienen un solo punto común, se llaman *secantes*.

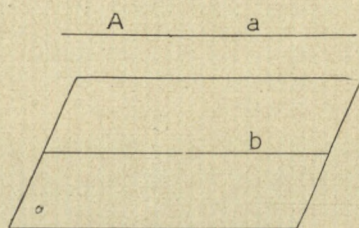
3) La recta a y el plano (aun cuando se imaginen indefinidamente prolongados) no tienen ningún punto común.

Una recta a y un plano que no tienen ningún punto común, se llaman *paralelos*, o mejor, la recta a , *paralela al plano α* , y éste, *paralelo a la recta a* .

Por ej., una arista de una mesa rectangular es paralela al plano del piso.

221. Si una recta pasa por un punto exterior a un plano y es paralela a otra recta situada en el plano, dicha primera recta es paralela al plano.

Sea a la recta que pasa por un punto A , exterior al plano α , y es paralela a la recta b de dicho plano. Por ser paralelas



las rectas a y b , estarán en un plano, el que será distinto del α porque contiene al punto A que no pertenece a este último.

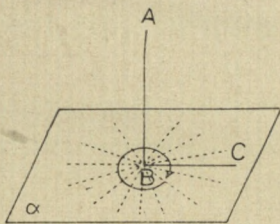
Ahora bien si la recta a y el plano α tuvieran algún punto común, ese punto, por pertenecer a a estaría en el plano de las paralelas a y b ; y por estar en dicho plano y en el α , estaría en la intersección de ambos, que es la recta b .

Pero esto es imposible porque las rectas a y b son paralelas; luego a y α no tienen ningún punto común, es decir, son paralelos.

Recta y plano perpendiculares

222. Tomemos un ángulo recto $\hat{ABC}$ y hagámoslo girar alrededor de uno de sus lados, por ej. alrededor del lado AB .

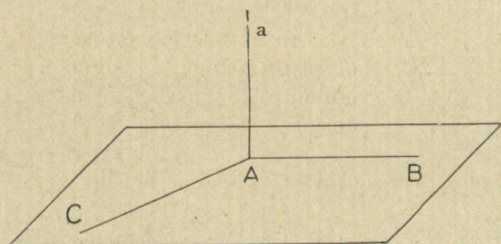
El otro lado BC , al girar, describirá un plano α al que, por su posición con respecto a la recta AC , le daremos el nombre de *perpendicular a dicha recta*. También se puede decir que la recta AC es *perpendicular al plano α* ; de modo que:



Diremos que una recta y un plano son *perpendiculares* cuando tienen un punto común y la recta es perpendicular a todas las que pasan por dicho punto en el plano.

El punto común a la recta y al plano se llama *pie* de la perpendicular.

223. Si una recta a es perpendicular a otras dos AB y AC de un plano ABC , lo es también a cualquier

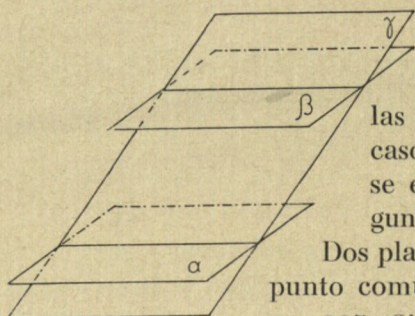


otra recta de dicho plano que pase por el punto A y, por lo tanto, la recta a es perpendicular al plano ABC .

Luego: para verificar si una recta que corta a un plano en un punto A , es perpendicular a dicho plano, basta verificar si ella lo es a otras *dos* rectas del plano que pasen por A .

Posiciones relativas de dos planos en el espacio Planos paralelos

224. Dos planos α y β , no coincidentes, o se *cortan* según una recta, o bien no tienen ningún punto común.



El piso de una habitación y una de las paredes se encuentran en las condiciones del primer caso; el piso y el cielo raso se encuentran en las del segundo.

Dos planos que no tienen ningún punto común se llaman *paralelos*.

225. Si dos planos son paralelos, todas las rectas del uno son paralelas al otro.

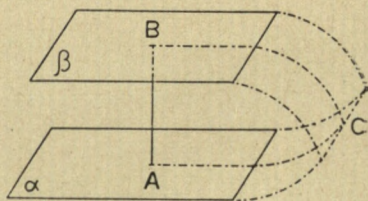
226. Si un plano corta a otros dos planos paralelos, las intersecciones son paralelas.

En efecto, estas dos intersecciones pertenecen al plano secante y no tienen ningún punto común.

227. Dos planos perpendiculares a una misma recta, en puntos distintos, son paralelos.

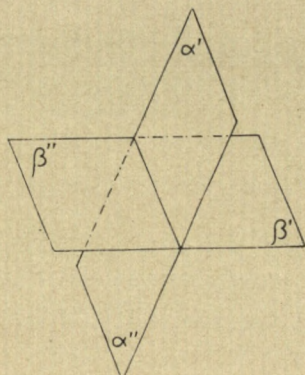
En efecto, sean α y β dos planos perpendiculares a la recta AB en los puntos A y B respectivamente.

Si los planos α y β se cortaran y fuera C un punto de la intersección, el triángulo ABC tendría dos ángulos rectos, lo que es absurdo (n. 91).



Diedros y secciones de diedros

228. Dos planos secantes α y β **dividen** al espacio en **cuatro partes**, cada una de las cuales es común a uno de los semiespacios limitados por α y a uno de los limitados por β (recuérdese el n. 26).

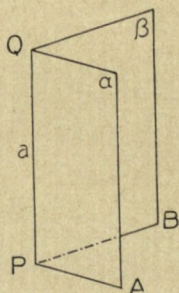


Estas cuatro partes se llaman *ángulos diedros*, o simplemente *diedros*.

229. Un diedro está determinado por dos semiplanos α y β limitados por una misma recta a ; esta recta a se llama *arista* del diedro, y los semiplanos α y β se llaman *caras*.

El diedro determinado por los semiplanos α y β se designa por $\hat{\alpha}\beta$:

Si P y Q son dos puntos de la arista a de un diedro $\hat{\alpha}\beta$, y A es un punto de la cara α y B uno de la cara β , el diedro $\hat{\alpha}\beta$ se puede designar también por $\hat{AaB}$ o por $APQB$.



230. Recordando los números 27 y 28, el alumno comprenderá qué es lo que se entiende por *diedros adyacentes* y por *diedros opuestos por la arista*.

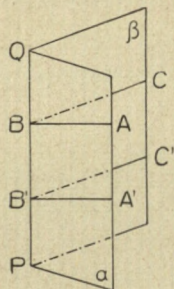
Por ej., en la figura del número 228, los diedros $\hat{\alpha}'\beta'$ y $\hat{\alpha}\beta''$ son adyacentes; y los diedros $\hat{\alpha}'\beta'$ y $\hat{\alpha}''\beta''$ son opuestos por la arista.

231. También en forma análoga a la empleada para los ángulos planos (n^{os} 30 y 31), se pueden definir los *diedros cóncavos* y los *diedros llanos*.

232. Dado un diedro, se llama *sección* del mismo a todo ángulo formado por las semirrectas en que las caras serían cortadas por un plano secante que no pasara por la arista.

En particular, se llama *sección normal* a toda sección que haya sido producida por un plano secante perpendicular a la arista.

Para obtener una sección normal de un diedro basta trazar, en cada cara, la perpendicular a la arista por un mismo punto de ésta (n. 223).



Por último, se dice que *dos secciones son paralelas* cuando sus respectivos planos son paralelos.

233. Las secciones paralelas de un mismo diedro son iguales.

Sean $\hat{ABC}$ y $\hat{A'B'C'}$ dos secciones paralelas de un mismo diedro $\hat{\alpha}\beta$.

Los lados BA y BC de la primera serán respectivamente paralelos a los lados $B'A'$ y $B'C'$ de la segunda (n. 226).

Tendremos, pues, (n. 66) que

$$\widehat{QB'A'} = \widehat{QBA} \quad \text{y} \quad \widehat{QB'C'} = \widehat{QBC}.$$

Haciendo deslizar ahora el diedro sobre si mismo hasta que el punto B coincida con el B' , debido a la igualdad de los ángulos anteriores, ocurrirá que la semirrecta BA irá a coincidir con la $B'A'$, y la BC con la $B'C'$ y, por consiguiente, el ángulo $\widehat{ABC}$ se superpondrá sobre el $\widehat{A'B'C'}$.

234. Las secciones normales de un mismo diedro son paralelas; luego, del teorema anterior se deduce, en particular, que:

Todas las secciones normales de un mismo diedro son iguales.

235. Si dos diedros son **iguales**, se verifica superponiéndolos que sus secciones normales son iguales.

Viceversa, si dos diedros tienen sus secciones normales iguales son superponibles y, por lo tanto, son iguales.

Por eso, para *medir* un diedro se adopta como *medida* del mismo la medida de una cualquiera de sus secciones normales.

Planos perpendiculares

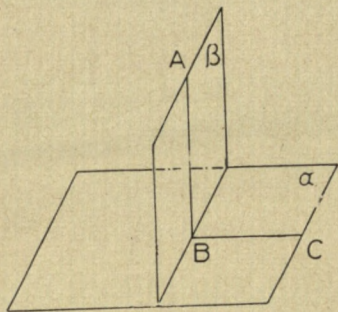
236. Todo diedro cuya sección normal es un ángulo recto se llama *diedro recto*, y los dos planos que forman las caras del diedro se llaman *perpendiculares*.

Diremos, pues, que dos planos son perpendiculares cuando forman, al cortarse, diedros rectos.

237. La amplitud de un diedro recto es de 90° .

238. Si una recta es perpendicular a un plano, todo otro plano que pase por ella es perpendicular al primero.

Sea AB una recta perpendicular a un plano α en el punto B y β un plano que pasa por AB . Decimos que β es perpendicular a α



En efecto, por B tracemos en el plano α , la perpendicular BC a la intersección $\alpha\beta$ de los dos planos.

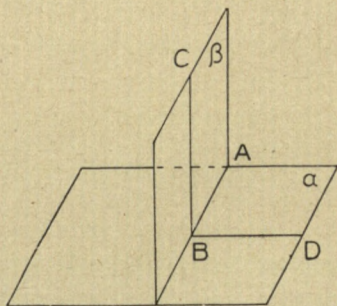
Como la AB es perpendicular a α , lo será a las rectas $\alpha\beta$ y BC (número 222); luego el ángulo $\widehat{ABC}$ será la sección normal del diedro formado por los dos planos. Y, puesto que $\widehat{ABC}$ es recto, también el diedro será recto,

o sea, los dos planos α y β serán perpendiculares.

239. Como ilustración del resultado precedente se puede recordar que los albañiles, para construir un muro vertical, es decir, perpendicular al suelo horizontal, se guían por la plomada, que es una *recta perpendicular* al plano horizontal.

240. Por consideraciones semejantes a las que se hicieron al tratar sobre rectas perpendiculares (n. 53) se comprende que:

Por una recta dada en un plano, pasa un plano y sólo uno perpendicular al primero.

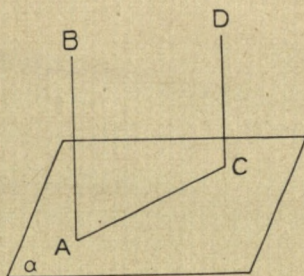


Así, por la recta AB del plano α pasa al plano β perpendicular al α y ningún otro en esas condiciones.

241. Resulta de esto que:

Dos rectas AB y CD perpendiculares a un plano α , son paralelas entre sí.

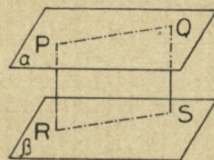
En efecto, por lo pronto están en un mismo plano, que es el perpendicular a α por la recta AC ; y además no se encuentran porque son perpendiculares a la intersección AC de los dos planos (n. 59).



242. Si dos planos son paralelos, todos los puntos de uno están a igual distancia del otro.

Sean α y β los dos planos paralelos y P y Q dos puntos de uno de ellos, por ej. del α . Trazando las perpendiculares PR y QS por los puntos P y Q al plano β , decimos que las distancias PR y QS son iguales.

En efecto, el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo, puesto que los lados PR y QS son paralelos por ser perpendiculares a un mismo plano (n. 241), y los lados PQ y RS también son paralelos por ser intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano (n. 226).



Luego los lados opuestos PR y QS son iguales (n. 142).

243. El segmento de cualquier perpendicular a dos planos paralelos, comprendido entre éstos, se llama *distancia* entre dichos planos.

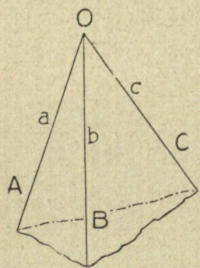
ANGULOS POLIEDROS Y CUERPOS POLIEDROS

Angulos triedros y poliedros

244. Dadas tres semirrectas a , b y c , con un mismo origen O , y no situadas todas en un mismo plano, quedan determinados tres planos ab , bc y ca , los cuales, a su vez, determinan dos a dos los tres diedros $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$.

Cada punto común a dos de estos diedros es también interno al otro. (Recuérdese la propiedad análoga n. 86),

245 DEF. Dadas tres semirrectas a , b y c que partan de un mismo origen O , y no pertenecientes todas a un mismo plano; se llama *ángulo triedro*, o simplemente *triedro* abc , a la figura constituida por los puntos comunes a los tres diedros determinados por los planos ab , bc y ca , tomados dos a dos.

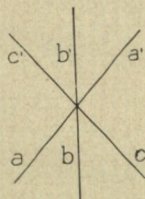


Las semirrectas a , b y c se llaman *aristas*, los ángulos $\hat{ab}$, $\hat{bc}$ y $\hat{ca}$ se llaman *caras* y el punto O , *vértice* del triedro.

Si A , B y C son tres puntos distintos del O , tomados sobre las aristas a , b y c , respectivamente, el triedro se puede designar también por $\hat{O}ABC$.

Los diedros $\widehat{AbC}$, $\widehat{BcA}$ y $\widehat{CaB}$ se llaman *diedros del triedro*.

Si a' , b' y c' son las prolongaciones de a , b y c , el triedro $\widehat{a'b'c'}$ se llama *opuesto por el vértice del $\widehat{abc}$* .

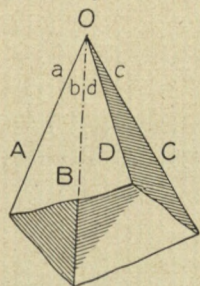


246. El conjunto de las tres caras de un triedro se llama *superficie del triedro*.

Los puntos de un triedro que no pertenecen a la superficie se llaman *internos*, mientras que los puntos del espacio que no son internos al triedro ni pertenecen a la superficie, se llaman *exteriores* al triedro.

NOTA: Los triedros se pueden definir también como la parte de espacio común a los tres semiespacios limitados por los planos de las caras y que contienen a la arista opuesta.

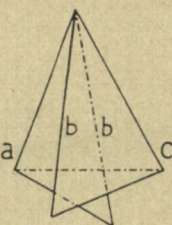
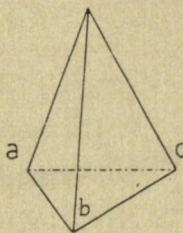
247. Por un punto O tracemos cuatro semirrectas a , b , c y d , tales que cada tres de ellas no estén en un mismo plano y que el plano ab deje a c y d de un mismo lado, que el plano bc deje a d y a de un mismo lado, etc. La figura constituida por los puntos comunes a los cuatro diedros $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ y $\widehat{d}$ se llama *ángulo poliedro de cuatro caras*. El punto O se llama *vértice*, las semirrectas a , b , c y d , *aristas*, y los diedros $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ y $\widehat{d}$ *diedros del ángulo poliedro $abcd$* .



Análogamente se definen los *ángulos poliedros de cinco, seis o más caras*.

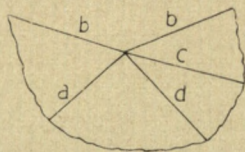
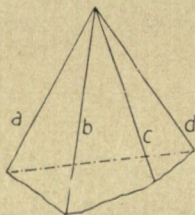
248. En todo ángulo poliedro, una cara es menor que la suma de las demás.

Verifiquémoslo para un triedro. Para ello construimos un triedro abc , en cartulina, y cortémoslo a



lo largo de una de las aristas; por ej., a lo largo de la b . Haciendo girar la cara $\hat{ab}$ alrededor de a hasta que caiga sobre la cara $\hat{ac}$, y la cara $\hat{cb}$ alrededor

de c y en sentido opuesto, hasta que caiga también sobre la $\hat{ac}$, veremos que las dos caras $\hat{ab}$ y $\hat{cb}$, en la nueva posición, se recubren en parte; de donde resulta que la cara ac es menor que la suma de las $\hat{ab}$ y $\hat{cb}$.



249. La suma de las caras de un ángulo poliedro es menor que 360° . Podemos verificar esta propiedad construyendo un ángulo poliedro $abcd$, en cartulina, cortándolo a lo largo de una de sus aristas, la b , por ejemplo, y extendiéndolo sobre un plano de modo que no se cubra una cara con otra.

La suma de las caras $\hat{ba}$, $\hat{ad}$, $\hat{dc}$ y $\hat{cb}$ resulta igual al ángulo cóncavo comprendido entre las dos nuevas posiciones de la arista b , el que es menor que 360° .

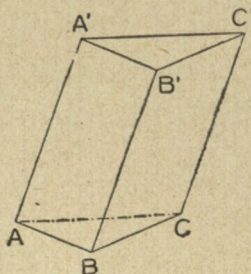
Esto mismo se puede observar en las sombrillas japonesas, las cuales se pueden abrir hasta que las varillas queden en un mismo

plano, en cuyo caso la suma de los ángulos formados por cada dos consecutivas es igual a 360° . Pues bien, cerrándolas en parte, en cuyo caso las varillas se disponen según las aristas de un ángulo poliedro, el papel queda flojo; de modo que los ángulos formados por cada dos varillas consecutivas son ahora menores que antes y, por lo tanto, su suma será también menor que la anterior, es decir, menor que 360° .

Prismas

250. Consideremos un triángulo ABC y tracemos por sus vértices tres rectas paralelas entre sí, no situadas en el plano ABC . Cortando luego estas rectas con un plano paralelo al ABC obtendremos tres puntos A' , B' y C' , los que unidos dos a dos nos darán un segundo triángulo $A'B'C'$.

Los lados $A'B'$, $B'C'$ y $C'A'$ serán, respectivamente, paralelos a los lados AB , BC y CA (n. 226), luego los cuadriláteros $ABB'A'$, $BCC'B'$ y $CAA'C'$ serán paralelogramos por tener sus lados paralelos dos a dos (n. 140).



De esto se deduce que los lados AB , BC y CA son, respectivamente, iguales a los lados $A'B'$, $B'C'$ y $C'A'$ (n. 142-1) y que, por lo tanto, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales (n. 125).

La figura $ABCC'A'B'$, constituida por los puntos comunes a los seis triedros de vértices A , B , C , A' , B' y C' recibe el nombre de *prisma triangular*.

Podemos decir, pues, que:

Dados dos triángulos iguales ABC y $A'B'C'$, situados en planos paralelos, de modo que los lados iguales sean paralelos entre sí, se llama prisma $ABCC'A'B'$ a la fi-

gura (o cuerpo) constituida por los puntos comunes a los triedros de vértices A, B, C, A', B' y C' .

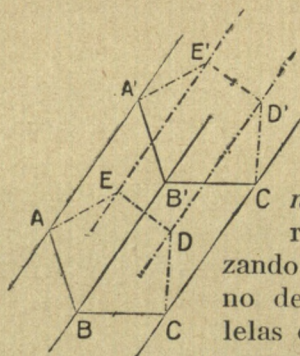
251. Los tres paralelogramos $ABB'A', BCC'B'$ y $CAA'C'$, y los dos triángulos ABC y $A'B'C'$, se llaman caras del prisma. De ellas, los dos triángulos reciben el nombre particular de *bases* y los paralelogramos el de *caras laterales*.

252. Los lados de las caras se llaman *aristas*, y en particular las AA', BB' y CC' , no pertenecientes a las bases, se designan con el nombre de *aristas laterales*.

Por último, se llama *altura* de un prisma a la distancia entre los planos paralelos de las bases.

253. De lo expuesto resulta que el prisma $ABCC'A'B'$ es la parte de espacio limitada por los paralelogramos $ABB'A', BCC'B'$ y $CAA'C'$ y los triángulos ABC y $A'B'C'$.

254. El conjunto de las caras laterales de un prisma se llama *superficie lateral* del mismo, y el de todas las caras *superficie total*.



255. Análogamente se definen los prismas *cuadrangulares, pentagonales, exagonales*, etc. Así, por ej., conside-

rando un pentágono $ABCDE$, trazando por sus vértices, fuera del plano del pentágono, cinco rectas paralelas entre sí, y cortando estas rectas con un plano paralelo al del pentágono, se obtiene un nuevo pentágono

$A'B'C'D'E'$, igual al $ABCDE$.

La figura $ABCDEE'A'B'C'D'$, constituida por los

puntos comunes a los diez triedros $A, B, C, D, E, A', B', C', D'$ y E' , se llama *prisma pentagonal*.

Recordando lo que se ha dicho sobre el prisma triangular, se comprende fácilmente qué es lo que debe entenderse por *base*, *caras laterales*, *aristas laterales*, *altura*, *superficie lateral* y *superficie total*.

256. Las aristas laterales de un prisma cualquiera son iguales.

En efecto, ellas son dos a dos iguales por ser lados opuestos de paralelogramos (n. 142-1).

257. Se dice que un prisma es *recto* cuando las aristas laterales son perpendiculares a las bases. Los prismas que no son rectos se llaman *oblicuos*.

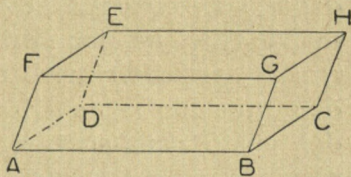
En los prismas rectos las aristas laterales son iguales a la altura.

NOTA: Entre los prismas rectos ofrecen particular interés los que tienen por bases polígonos regulares. Á estos prismas se los designa con el nombre de *prismas rectos de base regular*.

Paralelepípedos

258. Los prismas cuyas bases son paralelogramos se llaman *paralelepípedos*.

Todo paralelepípedo tiene ocho vértices, doce aristas, y seis caras. Todas las caras de un paralelepípedo son paralelogramos.



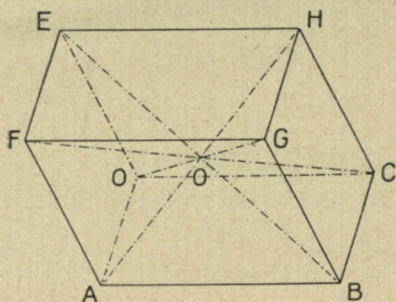
Cada vértice es común a tres caras; las otras tres caras pasan por otro vértice que se llama *opuesto del primero*.

Los segmentos que unen dos vértices opuestos se llaman *diagonales*.

Todo paralelepípedo tiene cuatro diagonales.

259. Las caras opuestas de un paralelepípedo son paralelas e iguales.

Por eso un mismo paralelepípedo se puede considerar como prisma, de tres modos diferentes, ya que se pueden tomar por bases dos caras opuestas cualesquiera.

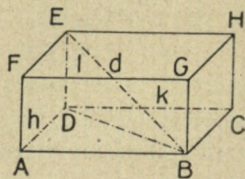


260. Las aristas de un paralelepípedo son paralelas e iguales cuatro a cuatro.

261. Las cuatro diagonales de un paralelepípedo pasan por un mismo punto, el que divide a cada una de ellas en dos partes iguales.

262. Se llama *paralelepípedo rectángulo* a todo paralelepípedo recto cuyas bases son rectángulos.

Se puede construir un paralelepípedo rectángulo, dadas las tres aristas concurrentes en un vértice, tomando por un punto tres semirrectas perpendiculares dos a dos; determinando sobre ellas, a partir del punto común, tres segmentos respectivamente iguales a los dados y haciendo pasar por el extremo de cada uno de ellos el plano paralelo al de las otras dos semirrectas.



Las longitudes de las tres aristas concurrentes en un vértice se llaman *dimensiones* del paralelepípedo rectángulo.

263. Dadas las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo (véase la figura anterior) y suponiendo que ellas sean:

$$DA = h, \quad DC = k \quad \text{y} \quad DE = l$$

se puede encontrar la longitud d de la diagonal BE .

Para ello comenzaremos por observar que, si se traza la diagonal BD de la base, los triángulos EDB y BCD son rectángulos en D y en C respectivamente. Tendremos, por lo tanto (n. 192):

$$d^2 = DB^2 + l^2 \quad \text{y} \quad DB^2 = h^2 + k^2$$

de donde

$$d^2 = h^2 + k^2 + l^2.$$

Luego

$$d = \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}.$$

Es decir: *La longitud de la diagonal de un paralelepípedo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las tres dimensiones.*

264. Si en un paralelepípedo, las tres aristas concurrentes en uno de los vértices son iguales, todas las aristas resultan iguales (n. 260). Los paralelepípedos que tienen sus ocho aristas iguales se llaman *romboedros*.

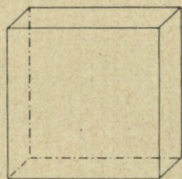
En todo romboedro las caras son rombos.

Se llama *cubo* a todo paralelepípedo rectángulo que tiene sus aristas iguales.

El cubo es, pues, un romboedro especial.

Las caras de un cubo son cuadrados iguales.

El cubo queda determinado con sólo dar la arista.



Designando por a la longitud de la arista y por d la de la diagonal de un cubo, se tiene (n. 263);

$$d^2 = a^2 + a^2 + a^2$$

de donde

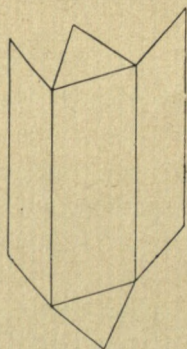
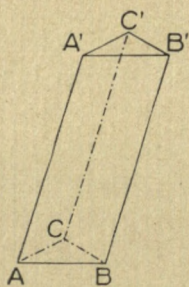
$$d^2 = 3 a^2 \quad \text{y} \quad a^2 = \frac{d^2}{3}$$

$$\text{y} \quad d = \sqrt{3 a^2} \quad a = \sqrt{\frac{d^2}{3}}$$

Por lo tanto, *para hallar la longitud de la diagonal de un cubo se extrae la raíz cuadrada del triplo del cuadrado de la longitud de la arista; y para hallar la longitud de la arista se extrae la raíz cuadrada de la tercera parte del cuadrado de la longitud de la diagonal.*

Desarrollo de la superficie del prisma

265. Supongamos tener un prisma triangular de cartulina, y sea éste el $ABCC'A'B'$. Cortándolo a lo largo

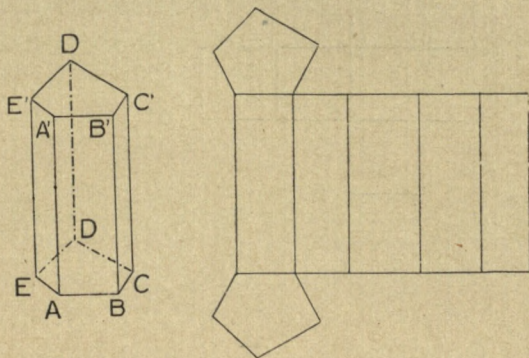


de las aristas AC , BC , CC' , $A'C'$ y $B'C'$, y extendiendo la cartulina sobre un plano, obtendremos una figura plana, compuesta por tres paralelogramos y dos triángulos, llamada *desarrollo* del prisma triangular.

También se puede dibujar este desarrollo sin necesidad de deshacer el prisma, construyendo los paralelogramos y los triángulos respectivamente iguales a las caras del prisma.

Inversamente, una vez dibujado el desarrollo de un prisma sobre papel o cartulina, recortándolo y doblándolo de modo conveniente se puede construir un modelo del prisma.

266. Si el prisma es recto, sus caras laterales son rectángulos de igual altura; luego el desarrollo será una figura formada por los polígonos de las bases y un



rectángulo de altura igual a la del prisma y base igual al perímetro de una de las bases del prisma.

Recordando la regla para hallar el área del rectángulo (n. 173) podemos enunciar esta otra:

REGLA: *El área de la superficie lateral de un prisma recto es igual al producto de la medida del perímetro de la base por la de la altura.*

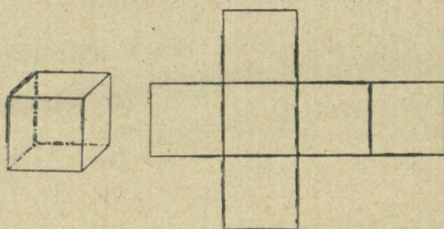
El área de la superficie total de un prisma es igual a la de la superficie lateral más el doble de la de la base.

Indicando con p la medida del perímetro de la base, con h la altura del prisma, con S_l el área de la

superficie lateral, con S_t el área de la superficie total y con B la de la base del prisma, tendremos:

$$S_l = p \times h \quad \text{y} \quad S_t = S_l + 2 B.$$

267. En la figura siguiente está representado el desarrollo de la superficie de un cubo.



El área de la superficie total de un cubo es igual a seis veces el cuadrado de la medida de la arista.

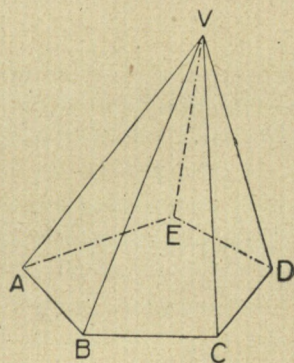
Es decir que, si indicamos con a la medida de la arista del cubo y con S el área total, la fórmula que da el área es:

$$S = 6 a^2$$

Pirámide

268. Dado un polígono, por ej. un pentágono $ABCDE$, y tomado un punto V fuera del plano del mismo, la figura constituida por los puntos del ángulo poliedro $\hat{V}ABCDE$ que quedan en el semiespacio, respecto del plano del polígono, que contiene al punto V , se llama *pirámide $VABCDE$ de vértice V y base $ABCDE$* .

Los triángulos $VAB, VBC, \dots, VEA$ reciben el nombre de *ca-*



ras laterales y su suma el de *superficie lateral* de la pirámide. Sumándole a la superficie lateral, la base, se obtiene la *superficie total*.

Los lados de las caras se llaman *aristas*. De ellas, las que no pertenecen a la base se llaman aristas laterales.

La distancia del vértice al plano de la base (n. 222) se llama *altura* de la pirámide.

Se pueden considerar pirámides cuyas bases sean polígonos de cualquier número de lados.

Las pirámides de base triangular se llaman también *tetraedros*.

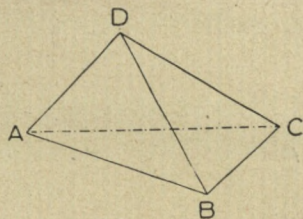
Cada tetraedro se puede considerar como pirámide de cuatro modos distintos, tomando como base una cualquiera de sus cuatro caras.

Cualquier pirámide se puede imaginar como parte de un ángulo poliedro V obtenida mediante el corte del mismo con un plano no paralelo a ninguna de las aristas.

269. NOTA: Una pirámide $VABCDE$ se puede considerar también como la región del espacio común a los ángulos poliedros

$$\hat{V}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D} \text{ y } \hat{E}.$$

270. Las pirámides que tienen por base un polígono regular y cuyo vértice pertenece a la perpendicular trazada a la base por su centro, se llaman *pirámides regulares* o *pirámides rectas*.



Si se unen los vértices de la base de una pirámide regular con el centro O de dicha base, se obtienen los triángulos rectángulos VOA , VOB , VOC , etc., que son iguales por tener el cateto VO común y los catetos OA , OB , OC , etc., iguales por radios de un polígono regular (n. 122-b). De la igualdad de estos triángulos resulta la de las aristas laterales, y de ésta y la de los lados de la base se deduce que los triángulos isósceles VAB , VBC , VCD , etc., que son las caras laterales, son iguales.

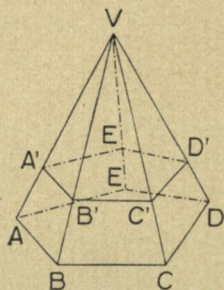
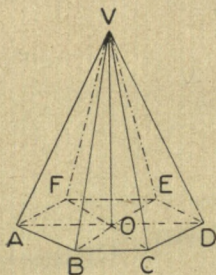
La altura de cualquiera de las caras laterales de una pirámide regular se llama *apotema* de la pirámide.

271. Toda pirámide $VABCDE$ queda dividida por un plano paralelo a la base y comprendido entre ésta y el vértice, en dos partes, de las cuales la que contiene al vértice es una nueva pirámide. La otra parte (que es la que contiene a la base de la pirámide primitiva) se llama *tronco de pirámide de bases paralelas*.

Los dos polígonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$, cuyos ángulos son respectivamente iguales (n. 233) se denominan *bases* del tronco, y los trapecios $ABB'A'$, $BCC'B'$, $EAA'E'$ *caras laterales*.

Si la pirámide originaria del tronco es regular, las caras laterales de este último son iguales y la altura de cualquiera de ellas se llama *apotema* del tronco.

La *altura* del tronco es la distancia entre sus dos bases.

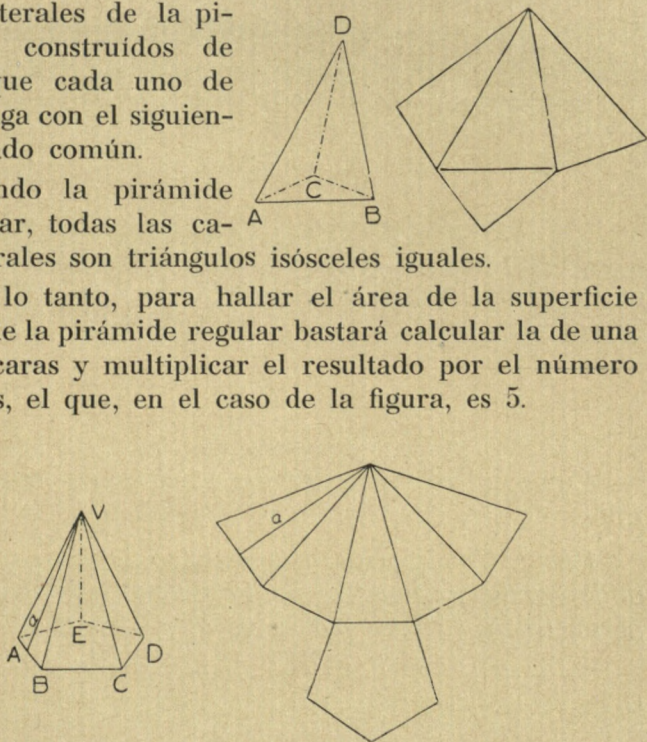


Desarrollo de la superficie de la pirámide

272. El desarrollo de la superficie de una pirámide es la figura plana constituida por el polígono de la base y por triángulos respectivamente iguales a las caras laterales de la pirámide, contruidos de modo que cada uno de ellos tenga con el siguiente un lado común.

Cuando la pirámide es regular, todas las caras laterales son triángulos isósceles iguales.

Por lo tanto, para hallar el área de la superficie lateral de la pirámide regular bastará calcular la de una de sus caras y multiplicar el resultado por el número de caras, el que, en el caso de la figura, es 5.



Designando, pues, por b la medida de la base AB del triángulo VAB , por a la de la altura, que es, pre-

cisamente, la apotema de la pirámide, y por S_l el área de la superficie lateral, tendremos (n. 181)

$$S_l = \frac{b \times a}{2} \times 5$$

o sea

$$S_l = \frac{b \times a \times 5}{2}$$

y, cambiando el orden de los factores en el numerador,

$$S_l = \frac{b \times 5 \times a}{2}$$

Pero $b \times 5$, o sea 5 veces la medida del lado AB ; es la medida del perímetro de la base de la pirámide, luego, representando por p al producto $b \times 5$, resulta:

$$S_l = \frac{p \times a}{2}$$

Como lo mismo puede decirse para cualquier pirámide regular, enunciaremos la siguiente regla:

REGLA: *El área de la superficie lateral de una pirámide regular es igual al semiproducto de la medida del perímetro de la base por la de la apotema.*

Indicando con S_t el área de la superficie total y con B la de la base, se tiene:

$$S_t = S_l + B.$$

273. El desarrollo de un tronco de pirámide de bases paralelas está constituido por los dos polígonos

de las bases y por trapecios respectivamente iguales a los de las caras.

Cuando la pirámide originaria del tronco es regular, esos trapecios son isósceles e iguales, y tienen por altura la apotema del tronco.

Por lo tanto, para hallar el área de la superficie lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas, basta calcular la de una de sus caras y multiplicar el resultado por el número de éstas. Recordando que el área de un trapecio es igual a la semisuma de las medidas de sus bases por la de la altura, y que al multiplicar estas bases por el número de caras se obtienen los perímetros de las bases del tronco, podemos enunciar la siguiente regla:

REGLA: El área de la superficie lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas es igual a la semisuma de las medidas de los perímetros de las bases del tronco por la de la apotema.

Representando por p y p' las medidas de los perímetros de las bases del tronco, por a la de la apotema y por S_1 el área de la superficie lateral, se tiene que:

$$S_1 = \frac{p + p'}{2} \times a$$

y si B y B' son las áreas de las bases del tronco y S_t es el área de la superficie total, es:

$$S_t = S_1 + B + B'.$$

Cuerpos poliedros

274. Los prismas y las pirámides son cuerpos poliedros particulares. Para definir en general los cuerpos poliedros empezaremos por explicar lo que se entiende por *superficie poliédrica*.

Se llama *superficie poliédrica* (convexa) a toda figura constituida por polígonos situados en diferentes planos y dispuestos de modo que cada lado de esos polígonos sea común a dos de ellos, y que el plano de cada polígono deje a los restantes de un mismo lado, o sea en el mismo semiespacio.

Los polígonos que constituyen la superficie poliédrica se llaman *caras* de la misma, y los vértices, lados y ángulos de las caras se llaman, también, vértices, aristas y ángulos de la superficie poliédrica.

Las aristas concurrentes en un mismo vértice determinan un ángulo poliedro.

Se llama *cuerpo poliedro*, o simplemente *poliedro*, a la figura constituida por los puntos comunes a todos los ángulos poliedros de una superficie poliédrica.

275. De lo expuesto resulta que un cuerpo poliédrico es la parte de espacio limitada por una superficie poliédrica.

Un poliedro se designa por las letras de sus vértices.

Poliedros regulares

276. Entre los poliedros, son notables los *poliedros regulares*.

Se dice que un poliedro es *regular* cuando sus caras

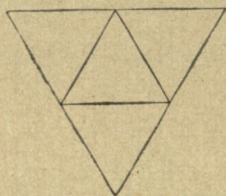
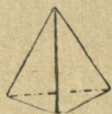
son polígonos regulares iguales y sus ángulos diedros son todos iguales.

277. *El cubo es un poliedro regular.*

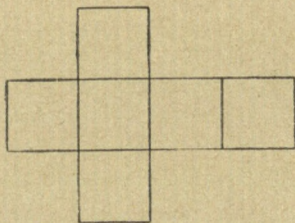
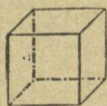
278. Los polígonos regulares pueden tener cualquier número de lados desde tres en adelante. En cambio, *entre los poliedros no hay más que cinco clases de poliedros regulares, que son las constituidas por los tetraedros regulares, los cubos o hexaedros regulares, los octaedros regulares, los dodecaedros regulares y los icosaedros regulares.*

En las figuras que siguen está representado un poliedro regular de cada una de esas cinco clases y su correspondiente *desarrollo*. Los desarrollos nos harán ver cómo se pueden construir los respectivos modelos en cartulina.

1) *Tetraedro regular.* Tiene *cuatro* caras, que son triángulos equiláteros, cuatro vértices y seis aristas. Sus ángulos poliedros son triedros.

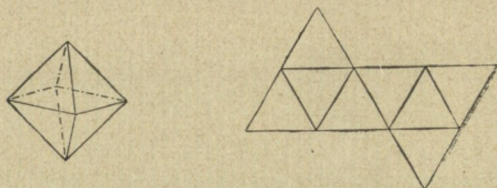


2) *Cubo o hexaedro regular.* Tiene *seis* caras, que

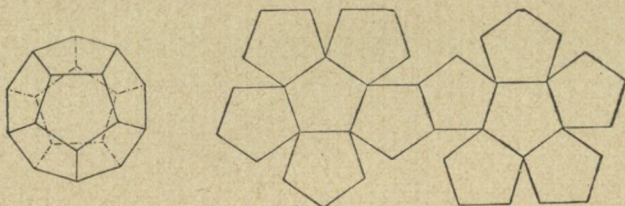


son cuadrados, ocho vértices y doce aristas. Sus ángulos poliedros son triedros.

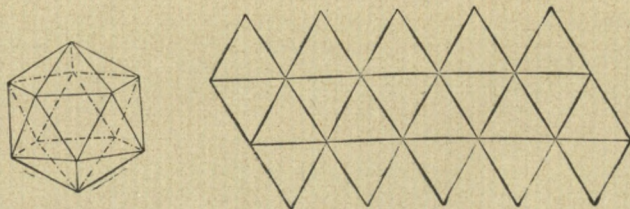
3) *Octaedro regular*. Tiene ocho caras, que son triángulos equiláteros, seis vértices y doce aristas. Sus ángulos poliedros son de cuatro caras.



4) *Dodecaedro regular*. Tiene doce caras, que son pentágonos regulares, veinte vértices y treinta aristas. Sus ángulos poliedros son triedros.



5) *Icosaedro regular*. Tiene veinte caras, que son triángulos equiláteros, doce vértices y treinta aristas. Sus ángulos poliedros tienen cinco caras.



EJERCICIOS SOBRE EL CAPÍTULO XII

228. Un prisma triangular recto tiene 12 cm. de alto, y las aristas de la base iguales a 15 cm., 9 cm. y 8 cm., respectivamente. Calcular el área de la superficie lateral. [266]

229. Calcular el área de la superficie total de un prisma recto cuya base es un rectángulo de 23 cm. por 18 cm., y cuya altura es de 0,75 m.

230. Las tres aristas concurrentes en un vértice de un paralelepípedo rectángulo tienen 8 dm., 11 dm. y 13 dm. respectivamente. Calcular el área de la superficie total del paralelepípedo.

231. Un plomero debe construir un tubo de cinc cuya sección sea un cuadrado de 15 cm. de lado. Calcular cuántos dm² deberá tener la lámina de cinc que necesitará para construir el tubo, sabiendo que el largo del mismo será de 2,25 m. y que para la soldadura debe contarse 2 cm. de más.

232. Calcular el área de la superficie de un cubo de 2,5 m. de arista.

233. ¿Cuántos cm² de papel dorado se necesitan para revestir un cubo de 15 cm. de arista?

234. Determinar la superficie de un cubo conociendo uno de los siguientes datos:

a) un lado: $a = 4,7$ m., o sino $a = 1,6$ m.

b) la diagonal de una cara: $d = 2\sqrt{2}$.

c) una diagonal del cubo: $e = 2\sqrt{3}$.

235. Calcular el área de la superficie de un tetraedro regular de 4 dm. de arista (véase n. 198). [272]

236. ¿Cuál es el área de la superficie lateral de una pirámide regular cuya base es un triángulo equilátero de 8 m. de lado, y en la que las aristas laterales tienen 10 m. de largo?

237. ¿Cuál es el área de la superficie total de un tetraedro regular de 4 cm. de arista?

238. Una pirámide regular tiene 8 m. de apotema y por base un cuadrado de 5 m. de lado. ¿Cuál es el área de la superficie total?

239. Una carpa tiene la forma de una pirámide regular de base cuadrada. El lado de la base es de 2.75 m., y la apotema de cada una de las caras es de 3.50 m. ¿Cuántos m^2 tiene la superficie de la carpa?

240. Una pirámide regular tiene 26 dm. de apotema, siendo su base un exágono regular de 48 cm. de lado. Calcular el área de la superficie lateral y de la superficie total.

241. Una pirámide regular tiene 65 dm. de arista lateral, siendo su base un exágono regular de 39 dm. de lado. Calcular la altura y el área de la superficie lateral de la pirámide.

242. Un tronco de pirámide regular de base cuadrada tiene 4 m. de alto. Los lados de las bases son de 3 m. y 5 m. respectivamente. ¿Cuál es la longitud de las aristas laterales del tronco y cuál la de la altura de las caras laterales?

Tabla de la superficie de los poliedros regulares de arista igual a un metro.

POLIEDRO	SUPERFICIE
<i>Tetraedro regular</i>	1,7320 m^2
<i>Cubo</i>	6,0000 »
<i>Octaedro regular</i>	3,4141 »
<i>Dodecaedro regular</i>	20,6457 »
<i>Icosaedro regular</i>	8,6602 »

Análogamente a lo que se dijo en Geometría Plana (pág. 105) sobre la superficie de los polígonos regulares, para hallar la superficie de un poliedro regular de arista l (dada en m) se multiplica la del correspondiente poliedro regular de 1 m. de arista por l^2 .

243. Calcular el área de la superficie de un octaedro regular de 2 m. de arista.

244. Calcular el área de la superficie de un dodecaedro regular de 3,2 m. de arista.

245. Calcular el área de la superficie de un icosaedro regular de 1,5 m. de arista.

246. ¿En qué relación están las aristas de un octaedro y de un icosaedro de igual superficie?

XIII

MEDICIÓN DE POLIEDROS

Unidad de medida y volumen de los poliedros

279. Para medir los poliedros se toma como *unidad* el cubo que tiene por arista la unidad de medida de los segmentos. Como, en general, la unidad de longitud es el *metro*, la unidad fundamental que se adopta para la medición de los poliedros es el *metro cúbico* (1 m.^3) que es un cubo de 1 m. de arista.

Se usan también, como unidades auxiliares, el *decímetro cúbico* (1 dm.^3) (*), el *centímetro cúbico* (1 cm.^3) y el *milímetro cúbico* (1 mm.^3), que son cubos de arista igual a 1 dm., 1 cm. y 1 mm., respectivamente, y a veces también el *decámetro cúbico* (dam.^3), el *hectómetro cúbico* (1 hm.^3), etc.

Si colocamos sobre el piso un metro cúbico, dividimos en decímetros las tres aristas concurrentes en un vértice y trazamos por los puntos de división los planos paralelos a las caras, el metro cúbico queda dividido por los nueve planos paralelos a las bases en 10 paralelepípedos rectángulos de 1 m.^2 de base y 1 dm. de altura.

(*) Es sabido que el decímetro cúbico es comúnmente usado como unidad de medida de los líquidos y que, en tal caso, se le llama más precisamente *litro* (1 l.).

Cada uno de estos paralelepípedos estará dividido, a su vez, por los planos perpendiculares a las bases, en 100 dm.^3 ; luego el metro cúbico contiene $100 \text{ dm.}^3 \times 10 = 1.000 \text{ dm.}^3$.

Del mismo modo se explica que el decímetro cúbico contiene 1.000 cm.^3 y que el centímetro cúbico contiene 1.000 mm.^3 .

280. Análogamente a lo que se ha dicho sobre medición de segmentos (n. 20) o de polígonos (n. 170), *medir* un poliedro P quiere decir encontrar cuántas veces contiene P al metro cúbico, o al decímetro cúbico, o al centímetro cúbico, etc.

Si, por ej., el poliedro P contiene 45 cm.^3 , se dice que la *medida* de P en cm.^3 es 45, o que el volumen de P es de 45 cm.^3 . Se puede decir también que el volumen de P es de $0,045 \text{ dm.}^3$ ó de $0,000.045 \text{ m.}^3$, etc.

281. MEDICIÓN CON RESPECTO A UNA UNIDAD CUALQUIERA. Se puede medir un poliedro P con respecto a otro cualquiera U tomado como unidad.

Medir P con la unidad U significa encontrar el número de veces que U o una parte alícuota de U está contenida exactamente en P .

Si, por ej., la quinta parte de U está contenida 4 veces en P , se dice que la medida de P con respecto a U , es

$$\frac{4}{5}$$

282. La medición directa de un poliedro cualquiera es, en general, muy difícil y prácticamente imposible. Por eso conviene considerar primero algunos casos particulares para reducir después a ellos el caso general.

Nosotros deduciremos a continuación algunas reglas prácticas para la medición de los poliedros.

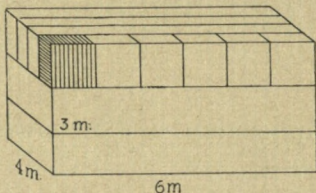
Volumen del prisma

283. VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO RECTÁNGULO.—

a) Consideremos un paralelepípedo rectángulo P y supongamos, primero, que sus tres dimensiones sean números exactos de metros, por ej.:

$$6 \text{ m.}, \quad 4 \text{ m.} \quad \text{y} \quad 3 \text{ m.}$$

La figura nos muestra cómo se puede descomponer a P en 3 paralelepípedos rectángulos iguales de base igual a la de P y altura 1 m. Cada uno de éstos es descomponible, a su vez, en 4 paralelepípedos rectángulos iguales de 1 m. de ancho, 1 m. de alto y 6 m. de largo.



En fin, cada uno de estos últimos paralelepípedos se puede dividir en 6 cubos iguales, cada uno de los cuales es 1 m.^3 .

Cada fila de una capa horizontal contiene, pues, 6 m.^3 ; las 4 filas de cada capa horizontal $(6 \times 4) \text{ m.}^3$, y las 3 capas horizontales $(6 \times 4 \times 3) \text{ m.}^3$.

Luego el volumen de P es de

$$(6 \times 4 \times 3) \text{ m.}^3 = 72 \text{ m.}^3$$

y se obtiene multiplicando entre sí las tres dimensiones.

b) Esta misma regla vale aún en el caso de que las dimensiones sean fraccionarias.

Supongamos que ellas sean, por ej., de

$$0,12 \text{ m.}, \quad 0,23 \text{ m.} \quad \text{y} \quad 0,09 \text{ m.}$$

Tomando como unidad el centímetro en lugar del metro, podemos conseguir que las dimensiones sean enteras. En efecto, 0,12 m., 0,23 m. y 0,09 m. son respectivamente iguales a

$$12 \text{ cm.}, \quad 23 \text{ cm.} \quad \text{y} \quad 9 \text{ cm.}$$

Ahora bien, siendo enteras las dimensiones de P expresadas en cm., podemos aplicar la regla del caso anterior, la cual nos dice que el volumen de P es de

$$(12 \times 23 \times 9) \text{ cm.}^3 = 2484 \text{ cm.}^3$$

o sea

$$0,002484 \text{ m.}^3$$

Pero a este mismo resultado se puede llegar multiplicando las tres dimensiones expresadas en metros, puesto que

$$(0,12 \times 0,23 \times 0,09) \text{ m.}^3 = 0,002484 \text{ m.}^3$$

Luego vale, en general, la regla siguiente:

REGLA: *La medida del volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones.*

Indicando con l , k y h las medidas de las tres aristas concurrentes en un vértice y con V la medida del volumen de un paralelepípedo tendremos, pues, que:

$$V = l \times k \times h.$$

284. Recordando que el producto de las dos dimensiones de la base da el área de ésta (n. 173), la regla anterior se puede enunciar también diciendo:

La medida del volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al área de la base por la medida de la altura.

De modo que, si B representa el área de la base y h la medida de la altura, la nueva regla se puede expresar así:

$$V = B \times h$$

285. VOLUMEN DEL CUBO. Como el cubo es un paralelepípedo rectángulo cuyas tres dimensiones son iguales, resulta, de acuerdo con la primera regla (n. 283), que:

La medida del volumen de un cubo es igual a la tercera potencia de la medida de la arista.

O sea

$$V = l^3$$

286. Considerando un cubo cuya arista sea de 3 cm., por ej., su volumen será de 27 cm³; el cubo de arista doble, es decir, de 6 cm., tendrá un volumen de 216 cm³, que es 8 veces mayor que el del primero. Como 8 es igual a 2³, podemos decir que: *cuando se duplica la arista de un cubo, el volumen queda multiplicado por la tercera potencia de 2.*

Y, en general, se verifica que:

Si la arista de un cubo se multiplica por 2, 3, 4, etc., el volumen queda multiplicado por 2³, 3³, 4³, etc.

287. De la regla del volumen del cubo se deduce que, *cuando se conoce la medida del volumen, la medida de la arista se obtiene extrayendo la raíz cúbica de la del volumen.*

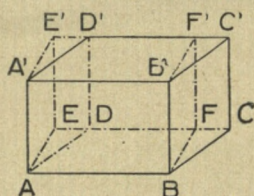
$$l = \sqrt[3]{V}$$

288. VOLUMEN DEL PRISMA RECTO. La segunda regla para la determinación de la medida del volumen de

un paralelepípedo rectángulo (n. 284) vale también para un prisma cualquiera.

Comencemos por demostrar esto para el prisma recto y, en primer lugar, consideremos un paralelepípedo recto $ABCD D'A'B'C'$.

Suponiendo que AB sea uno de los lados mayores de la base (o uno cualquiera de los lados de la base si todos fueran iguales), tracemos por A y por B las perpendiculares AE y BF a la recta DC , en el plano de la base. Quedará así formado el rectángulo $ABFE$, equiva-



lente al paralelogramo $ABCD$ y, por consiguiente, de igual área (n. 179).

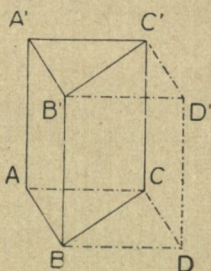
Considerando ahora el paralelepípedo recto dado y el paralelepípedo rectángulo $ABFE E'A'B'F'$, de igual altura, podremos imaginar que este último se ha obtenido quitándole al dado el prisma triangular $BCF F'B'C'$ y agregándole, en cambio, el $ADE E'A'D'$.

Pero estos dos prismas triangulares tienen ordenadamente iguales todos sus elementos y, por lo tanto, se pueden superponer; luego el volumen del paralelepípedo recto dado no habrá alterado al transformarlo en el paralelepípedo rectángulo $ABFE E'A'B'F'$. Y como la medida del volumen del paralelepípedo rectángulo se obtiene multiplicando el área de la base $ABFE$ por la medida de la altura (n. 284) y, por otra parte, esta base $ABFE$ tiene la misma área que la $ABCD$ y los dos paralelepípedos tienen la misma altura, resulta que:

La medida del volumen de un paralelepípedo recto es igual al producto del área de su base por la medida de su altura.

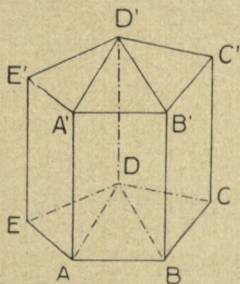
289. Para hacer extensiva esta regla al caso de un prisma recto de base triangular $ABCC'A'B'$, se observa que dicho prisma se puede considerar como la mitad de un paralelepípedo recto de igual altura y base *doble* de la del primero, como puede verse en la figura.

Y como la mitad del área de la base doble $ABDC$ es el área de la base ABC del prisma dado, podemos decir que:



La medida del volumen de un prisma recto triangular es igual al producto del área de su base por la medida de su altura.

290. Consideremos, por último, un prisma recto cualquiera, por ej. uno pentagonal. Los planos diagonales determinados por una de las aristas laterales con cada una de las restantes, dividen al prisma dado en tres prismas rectos triangulares cuya altura es la misma que la del dado y cuyas bases, sumadas, dan la base del prisma primitivo.

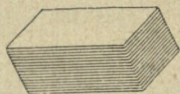
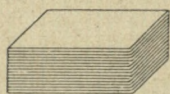


El volumen del prisma pentagonal se obtendrá, pues, sumando los volúmenes de los tres prismas triangulares.

Pero es evidente que ello equivale a multiplicar el área de la base del prisma dado por la medida de la altura.

291. VOLUMEN DE UN PRISMA CUALQUIERA. Veamos también cómo la misma regla vale aún para los prismas

oblicuos. Consideremos, por ej., cien tarjetas de visita: colocadas exactamente una sobre otra (como cuando están en la cajita) forman

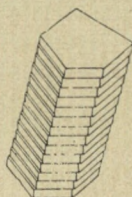
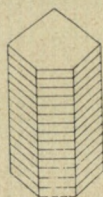


un paralelepípedo rectángulo; dispuestas, por el contrario, como se indica en la figura de la derecha,

forman un paralelepípedo oblicuo de igual base y altura que el anterior.

Pero es indudable que el nuevo paralelepípedo y el primitivo, por estar formado por las mismas tarjetas, deben tener igual volumen.

Del mismo modo, recor-
tando en cartón un número
suficiente de polígonos iguales
y colocándolos unos sobre otros
podemos construir un modelo
de prisma recto cualquiera, o



bien, disponiéndolos como indica la figura de la derecha, podemos formar con los mismos polígonos de cartón un prisma oblicuo de igual base y altura que el primitivo.

Se ha puesto así de manifiesto (intuitivamente), que: *dos prismas cualesquiera, de igual base y altura, tienen el mismo volumen.*

De donde, recordando lo dicho anteriormente (número 290), obtenemos la regla que sigue, la cual comprende como casos particulares a todas las que hemos venido enunciando (n^{os} 283 y 291).

REGLA: *La medida del volumen de un prisma cualquiera es igual al producto del área de su base por la medida de su altura.*

Indicando, pues, con V la medida del volumen de un prisma (recto u oblicuo), con B el área de su base y con h la medida de su altura, la regla anterior se expresa así:

$$V = B \times h.$$

292. Resulta de aquí la regla siguiente:

REGLA: *Dividiendo la medida del volumen de un prisma cualquiera por el área de su base (o por la medida de su altura) se obtiene la medida de la altura (o el área de la base).*

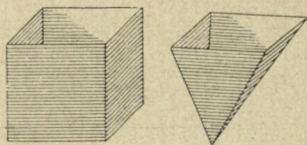
Es decir,

$$h = \frac{V}{B} \quad \text{y} \quad B = \frac{V}{h}$$

Volumen de la pirámide

293. Para encontrar una regla que nos enseñe a calcular el volumen de una pirámide, podemos realizar la siguiente verificación.

Tomemos una cajita común, de las que tienen la forma de paralelepípedo rectangular, y construyamos con cartón la superficie lateral de una pirámide de base y altura iguales a la base y altura de la caja.



Coloquemos la pirámide con la base hacia arriba, llenémosla de arena y volquemos su contenido en la caja, repitiendo esta operación por tres veces. Comprobaremos así que la caja se llena exactamente, lo que quiere decir que el volumen del paralelepípedo rectangular es el triple del de la pirámide.

Lo mismo se puede verificar para cualquier pirámide; de modo que:

El volumen de una pirámide cualquiera es igual a un tercio del de un prisma de igual base y altura.

294. Resulta de esto y de lo dicho sobre el volumen del prisma (n. 291) la regla siguiente:

REGLA: *La medida del volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto del área de su base por la medida de la altura.*

Indicando, pues, la medida del volumen de una pirámide con V , el área de la base con B y la medida de la altura con h , tendremos que

$$V = \frac{B \times h}{3}$$

295. De la regla anterior se deduce esta otra:

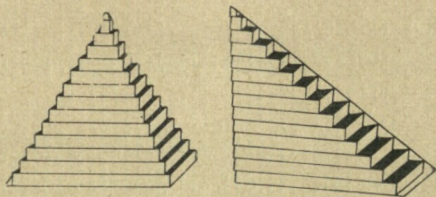
REGLA: *Dividiendo el triplo de la medida del volumen de una pirámide por el área de su base (o por la medida de su altura), se obtiene la medida de la altura (o el área de la base).*

Es decir,

$$h = \frac{3 V}{B} \quad \text{y} \quad B = \frac{3 V}{h}$$

296. Dos pirámides de igual base e igual altura pueden tener diferente forma, como puede verse en la figura que sigue. Sin embargo, de acuerdo con la regla del volumen, éste debe ser igual para las dos pirámides.

Y, efectivamente, si construimos un modelo de pirámide de base cuadrada, por ej., valiéndonos de piezas de cartón cuadradas de tamaño cada vez menor y colocadas como indica la figura de la izquierda, se podrá obtener luego otro modelo de pirámide de igual base y altura que la anterior, sin más que inclinar en un sentido o en otro la pila de cartones.



No cabe duda de que ambas pirámides deben tener igual volumen, por estar formadas por las mismas piezas de cartón.

Luego, *dos pirámides de igual base y altura tienen igual volumen.*

Esta propiedad es semejante a la que dice que dos triángulos de bases y alturas respectivamente iguales son equivalentes (n. 183).

297. VOLUMEN DEL TRONCO DE PIRÁMIDE. El volumen de un tronco de pirámide se puede determinar por medio de la siguiente regla:

REGLA: *Para hallar la medida del volumen de un tronco de pirámide (de bases paralelas) se suman las áreas de las bases con la raíz cuadrada del producto de dichas áreas, y esta suma se multiplica por la medida de la altura del tronco.*

Indicando con V la medida del volumen de un tronco de pirámide, con B y B' las áreas de las bases y con h la medida de la altura, se tiene:

$$V = \frac{(B + B' + \sqrt{BB'}) \cdot h}{3}$$

EJERCICIOS SOBRE EL CAPÍTULO XIII

- [280] 247. ¿Cuál será el peso de un cm^3 de mercurio si el peso específico es de 13,59?
248. ¿Cuál será el peso de un m^3 de aire si el peso específico es de $\frac{1}{773}$?
249. ¿Cuántas toneladas pesa una nave que desaloja 8.000 m^3 de agua?
250. Un globo que pesa 300 kg. tiene 1.000 m^3 de capacidad. Si se lo infla con un gas cuyo peso específico fuera la mitad del del aire al nivel del mar, ¿cuál sería la fuerza ascensional a este mismo nivel?
251. ¿Cuántos hectólitos contiene 1 m^3 ?
- [283] 252. ¿Cuántos litros de petróleo contiene una de las latas comunes que tienen por base un cuadrado de 24 cm. de lado, siendo la altura de 35 cm.?
253. Calcular el volumen de un cajón cuyas dimensiones son:
- 1,10 m., 70 cm. y 60 cm.*
254. Calcular la capacidad del mismo cajón sabiendo que el espesor de las paredes (incluso la tapa) es de 2 cm.
255. Un aula escolar tiene 8 m. de largo, 5 m. de ancho y 350 cm. de alto. ¿Será suficiente para 40 alumnos si la higiene exige $2,3 \text{ m}^3$ de aire por cada uno de ellos?
256. Se quiere construir un muro de 16,38 m. de largo por 2,40 de alto y 24 cm. de espesor. ¿Cuántos ladrillos serán necesarios, teniendo en cuenta que los ladrillos comunes tienen las siguientes dimensiones:
- 28 cm. $\times$ 14 cm. $\times$ 6 cm.?*
257. Con 100 dm^3 de hierro se debe construir una barra de sección cuadrada de 5 cm. de lado. ¿Qué longitud tendrá la barra?
258. El decímetro cúbico de una madera pesa 852 g. Calcular el peso de una tabla de esa misma madera, sabiendo que sus dimensiones son:

$$4,5 \text{ m.} \times 3,7 \text{ dm.} \times 6,5 \text{ cm.}$$

259. Un pilar de 3,5 m. de alto tiene por base un cuadrado de 35 cm. de lado. ¿Cuál es su volumen?

260. ¿Cuántos m³ de tierra se deben extraer para cavar un sótano de 7 m. de largo por 4,50 m. de ancho y 2,60 m. de alto?

261. ¿Cuánto pesa un cubo de hierro de 8 cm. de arista si el [286] cm³ de hierro pesa 7,8 g.?

262. ¿Cuánto pesa un cubo de arenisca de 0,80 m. de arista si el cm³ de arenisca pesa 2,4 g.?

263. ¿Cuánto pesa un dado de marfil de 4 cm. de arista? (Peso específico del marfil 1,9).

264. Calcular el volumen de un cubo cuya superficie es igual a la de un tetraedro regular de 8,4 dm. de arista.

265. Calcular la longitud de la arista de un cubo equivalente a un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son:

$$140 \text{ cm.} \times 25 \text{ cm.} \times 98 \text{ cm.}$$

266. Un prisma recto de altura h tiene por base un triángulo [290] equilátero de lado l . Determinar la superficie total y el volumen.

$$(\text{Ej.: } l = 2, \quad h = \sqrt{3})$$

267. El área de la superficie lateral de un prisma recto de base triangular equilátera es de 3,41 m². Sabiendo que el lado de la base es de 13 cm., calcular el volumen del prisma.

268. Un prisma recto de 23 cm. de altura tiene por base un exágono regular. Sabiendo que el volumen del prisma es de 975 dm³, averiguar la longitud del lado de la base.

269. ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular de 2,55 m. [294] de altura, en la que uno de los lados del triángulo de la base es de 0,75 m. y la altura correspondiente de 0,80 m.?

270. ¿Cuál es el volumen de una pirámide regular de base triangular, de 5,4 m. de altura, si el lado de la base es de 8. m?

271. Hallar el volumen de una pirámide de 4 m. de altura sabiendo que la base es un trapecio cuyas bases son de 3,72m y 5,20m y cuya altura es de 2,13 m.

272. La gran pirámide de Cheope, en Egipto, tiene por base un cuadrado de 230 m. de lado y por caras laterales triángulos equiláteros. ¿Cuál es su volumen?

273. Calcular el volumen de un tetraedro regular de 4 cm. de arista.

274. Una pirámide regular de 35 cm. de apotema tiene por base un exágono regular de 21 cm. de lado. Calcular el volumen de la pirámide.

[297] 275. Un tronco de pirámide tiene por base mayor un triángulo rectángulo cuyos catetos son de 12 m. y 16 m. de largo, respectivamente. El lado de la base menor, correspondiente al primero de dichos catetos, es de 3 m. y el correspondiente al segundo es de 4 m.; la altura del tronco es de 2,75 m. Calcular el volumen del tronco.

276. Las bases de un tronco de pirámide regular son cuadrados de 9 dm. y 4 dm. de lado respectivamente; la altura del tronco es de 15 dm. ¿Cuál es el volumen?

277. Un tronco de pirámide regular tiene 1 dm³ de volumen y 15 cm. de altura. Una de las bases es un cuadrado de 6 cm. de lado. Calcular el lado de la otra base.

278. Se ha cavado una fosa cuya forma es la de un tronco de pirámide regular de base cuadrada, invertido. El lado de la boca es de 2,3 m. y el del fondo es de 1,4 m. El volumen de la tierra extraída es de 36,4 m³. ¿Cuál es la profundidad de la fosa?

279. Calcular el peso de un bloque de granito que tiene la forma de un tronco de pirámide cuya base mayor tiene una superficie de 3,55 m² y la menor 0,78 m², siendo la altura de 2,80 m. La densidad del granito es 2,78.

280. Un obelisco de granito tiene la forma de un tronco de pirámide regular de base cuadrada, seguido de una pequeña pirámide en la parte superior. La base inferior tiene 2,42 m. de lado, la superior 1,50 m., la altura del tronco es de 21,60 m. y la de la pirámide es de 1,20 m. ¿Cuánto pesa el obelisco si la densidad del granito es de 2,78?

281. Una chimenea de ladrillo tiene la forma de un tronco de pirámide regular de base cuadrada. Las bases, tienen, exteriormente, 1,40 m. y 0,60 m. de lado, respectivamente, e interiormente

0,44 m. y 0,38 m. Calcular el volumen de las paredes teniendo en cuenta que la altura de la chimenea es de 12,50 m.

**Tabla de los volúmenes de los poliedros regulares
de un metro de arista**

POLIEDRO	VOLUMEN
<i>Tetraedro regular</i>	0,1178 m ³
<i>Cubo</i>	1,0000 »
<i>Octaedro regular</i>	0,4714 »
<i>Dodecaedro regular</i>	7,6631 »
<i>Icosaedro regular</i>	2,1816 »

Para obtener el volumen de un poliedro regular de arista l se multiplica por l^3 el del correspondiente poliedro regular de arista 1. Se advierte que la longitud de l debe expresarse en metros para que el volumen resulte en m³.

282. Calcular el volumen de un tetraedro regular de 7,5 cm. de arista.

283. Calcular el volumen de un octaedro regular de 3,2 cm. de arista.

284. Calcular el volumen de un octaedro regular de 7,1 cm. de arista.

285. Calcular el volumen de un dodecaedro regular de 5,2 dm. de arista.

286. ¿Qué arista debe tener un tetraedro regular para que su volumen sea de 1 dm³?

287. ¿En qué relación están las aristas de un tetraedro regular y de un cubo de igual volumen?

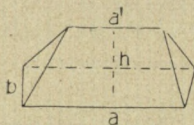
288. ¿En qué relación están los volúmenes de un cubo y de un icosaedro regular de igual superficie?

289. ¿En qué relación están las superficies de un octaedro y un dodecaedro regulares que tienen igual volumen?

Medida del volumen de los montones de pedregullo

Dos son las formas que más comúnmente se da a los montones de pedregullo:

a) El *montón prismático* (tronco de prisma triangular) que tiene por base un rectángulo, cuyas dimensiones indicaremos con a y b , y por caras laterales dos triángulos y dos trapezios.



Si representamos por a' la medida de la arista superior y por h la *altura* del montón (distancia de la arista superior a la base), el volumen está dado por la fórmula:

$$V = \frac{h}{6} b (2a + a')$$

b) El *montón piramidal*, que es un tronco de pirámide cuyas bases son rectángulos de dimensiones a y b y a' y b' respectivamente, teniendo estos rectángulos sus respectivos centros sobre una perpendicular a las bases. Designando por h la altura del montón, el volumen está dado por la fórmula:

$$V = \frac{b}{6} h (2a + a') + \frac{b'}{6} h (2a' + a)$$

290. Calcular el volumen de un montón prismático de pedregullo cuya base tiene 2 m. por 0,80 m., la arista superior 1,20 y la altura 0,45 m.

291. Calcular el volumen de un montón piramidal de pedregullo en el que las bases tienen 4,50 m. por 3,20 m. y 3,90 m. por 2,70 m. y la altura 40 cm.

XIV

CILINDRO, CONO Y ESFERA

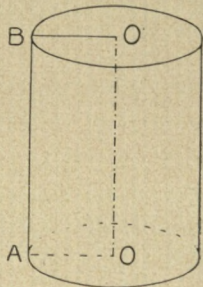
Cilindro

298. GENERACIÓN DEL CILINDRO. Haciendo girar un rectángulo $ABO'O$ alrededor de uno de sus lados OO' hasta que el lado opuesto AB vuelva a ocupar su posición inicial, se obtiene un cuerpo formado por los puntos del rectángulo $ABO'O$, considerados en sus distintas posiciones, que recibe el nombre de *cilindro circular recto* o, simplemente, *cilindro de eje OO'* .

Los dos lados opuestos $O'B$ y OA describen dos círculos iguales situados en planos paralelos, perpendiculares ambos a la recta OO' que une los centros (n. 222). Estos dos círculos se llaman *bases*, y sus radios se llaman también *radios del cilindro*.

La superficie descrita por el segmento AB se llama *superficie lateral del cilindro*. Los puntos de la superficie lateral, conjuntamente con los de las dos bases, forman la *superficie total*.

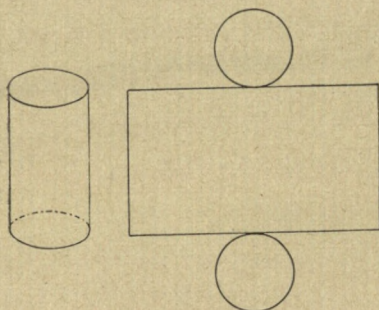
El segmento AB , en cualquiera de las infinitas posiciones que sucesivamente ocupa al girar el rectángulo, recibe el nombre de *generatriz del cilindro*.



Por último, se llama *altura* de un cilindro a la distancia entre los planos de las dos bases (n. 243).

La altura de un cilindro es igual a la generatriz y al eje del mismo.

299. DESARROLLO DEL CILINDRO. Si se nos da un cilindro de cartulina, quitándole las bases, cortándolo a



lo largo de una generatriz y extendiendo sobre un plano la superficie lateral, obtendremos un rectángulo cuya base será la circunferencia de una de las bases del cilindro, rectificada (n. 200), y cuya altura será igual a la del cilindro. Este rectángulo

recibe el nombre de *desarrollo de la superficie lateral* del cilindro, y si a él se le agregan los círculos de las bases, se obtiene lo que se llama el *desarrollo de la superficie total*.

300. ÁREAS DE LAS SUPERFICIES LATERAL Y TOTAL DEL CILINDRO. Puesto que el desarrollo de la superficie lateral de un cilindro es un rectángulo cuya base es la circunferencia de una de las bases del cilindro, rectificada, y cuya altura es igual a la del cilindro, podemos decir que:

El área de la superficie lateral de un cilindro es igual a la de un rectángulo que tiene por base la circunferencia de una de las bases del cilindro, rectificada, y por altura la del cilindro.

Por consiguiente (n. 173) podemos enunciar la siguiente regla:

REGLA: *El área de la superficie lateral de un cilindro se obtiene multiplicando la longitud de la circunferencia de la base por la medida de la altura.*

El área de la superficie total se obtiene sumando a la de la superficie lateral el doble del área del círculo de la base.

Designando por S_l el área de la superficie lateral, por r la medida del radio de la base y por h la de la altura del cilindro, y representando por π el conocido número 3,14159... (o aproximadamente 3,1416), podemos expresar la regla anterior así:

$$S_l = 2 \pi r h.$$

Y si S_t indica el área de la superficie total, tendremos:

$$S_t = 2 \pi r h + 2 \pi r^2$$

o sea

$$S_t = 2 \pi r (h + r).$$

De la regla precedente, resulta además, que:

a) *Dividiendo el área de la superficie lateral de un cilindro por la medida de la altura, se obtiene la longitud de la circunferencia de la base.*

Es decir:

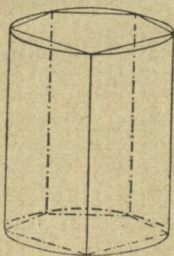
$$2 \pi r = \frac{S_l}{h}$$

b) *Dividiendo el área de la superficie lateral de un cilindro por la longitud de la circunferencia de la base, se obtiene la medida de la altura.*

Es decir:

$$h = \frac{S_l}{2 \pi r}$$

301. VOLUMEN DEL CILINDRO. Dado un cilindro C , inscribamos en una de sus bases un polígono P y consideremos el prisma recto que tiene por base a este polígono, y por altura la misma del cilindro. Es claro que el volumen del prisma será menor que el del cilindro y que la diferencia entre los dos volúmenes será tanto menor cuanto más pequeña sea la diferencia entre la base del cilindro y el polígono P , base del prisma.



Y esta diferencia resultará prácticamente despreciable si el polígono P tiene un número suficientemente grande de lados como para poderse confundir sensiblemente con el círculo de la base del cilindro.

Esto pone de manifiesto que: *el volumen de un cilindro es igual al de un prisma de igual altura y que tenga por base un polígono de igual superficie que la del círculo de la base del cilindro.*

Por consiguiente (n. 291) podemos enunciar la regla que sigue.

REGLA: *La medida del volumen de un cilindro es igual al producto del área de su base por la medida de su altura.*

Indicando, pues, con V la medida del volumen de un cilindro, tendremos:

$$V = \pi r^2 h$$

302. De la regla anterior se deduce que:

a) *Dividiendo la medida del volumen de un cilindro por la medida de la altura, se obtiene el área de la base.*

Es decir:

$$\pi r^2 = \frac{V}{h}.$$

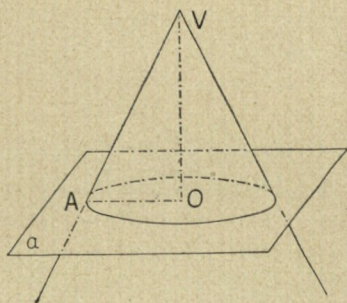
b) *Dividiendo la medida del volumen de un cilindro por el área de la base, se obtiene la medida de la altura.*

Es decir:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Cono

303. GENERACIÓN DEL CONO. Haciendo girar un triángulo rectángulo AOV alrededor de uno de sus catetos OV hasta que la hipotenusa AV vuelva a ocupar la posición inicial, se obtiene un cuerpo formado por los puntos del triángulo AOV , considerados en sus distintas posiciones, que recibe el nombre de *cono circular recto* o, simplemente, *cono*, de eje OV y vértice V .



El cateto OA describe un círculo perpendicular, en su centro, al eje (n. 222); este círculo se llama *base* del cono.

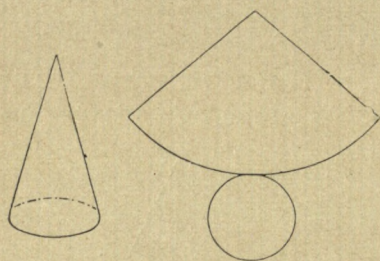
La hipotenusa VA , en cualquiera de las posiciones que sucesivamente ocupa, recibe el nombre de *generatriz* o *apotema* del cono, y la superficie descrita por VA , en este movimiento se llama *superficie lateral del cono*. Los puntos de la superficie lateral, conjuntamente con los de la base, forman la *superficie total*.

La distancia VO del vértice V al plano de la base del cono se llama *altura* del mismo.

304. La generatriz g del cono, el radio r de la base y la altura h son, respectivamente, hipotenusa y catetos de un mismo triángulo rectángulo. Por lo tanto, tenemos (n. 192):

$$g = \sqrt{r^2 + h^2}; \quad r = \sqrt{g^2 - h^2}; \quad h = \sqrt{g^2 - r^2}.$$

305. DESARROLLO DEL CONO. Si se nos da un cono de cartulina, quitándole la base, cortándolo a lo largo de una de las generatrices y extendiendo sobre un plano la superficie lateral, obtendremos un sector circular en el que el arco es la circunferencia de la base del cono, desarrollada, y el radio es igual a la generatriz del cono.



Este sector recibe el nombre de *desarrollo de la superficie lateral* del cono, y si a él se le agrega el círculo de la base se obtiene lo que se llama el *desarrollo de la superficie total* del cono.

306. AREAS DE LAS SUPERFICIE LATERAL Y TOTAL DEL CONO. Puesto que el desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector cuyo arco es la circunferencia

de la base del cono, desarrollada, y cuyo radio es igual a la generatriz del cono, podemos decir que:

El área de la superficie lateral de un cono es igual a la de un sector cuyo arco tiene una longitud igual a la de la circunferencia de la base del cono y cuyo radio es igual a la generatriz del cono.

Y recordando (n. 208) que el área de este sector es, a su vez, igual a la del triángulo que tiene por base el arco del sector rectificado (o sea la circunferencia de la base del cono, rectificada) y por altura el radio del sector (o sea la generatriz del cono), podemos enunciar la regla que sigue.

REGLA: *El área de la superficie lateral de un cono es igual a la mitad del producto de la longitud de la circunferencia de la base del cono, por la medida de la generatriz.*

El área de la superficie total de un cono se obtiene agregando el área del círculo de la base a la de la superficie lateral.

Si por razones de brevedad representamos por S_l el área de la superficie lateral, por S_t el área de la superficie total, por r la medida del radio de la base del cono y por g la medida de la generatriz, podemos expresar la regla anterior así:

$$S_l = \frac{2 \pi r \times g}{2}$$

o sea

$$S_l = \pi r g$$

y

$$S_t = \pi r g + \pi r^2$$

o sea

$$S_l = \pi r (g + r)$$

De la regla precedente se deduce que:

a) *Dividiendo el doble del área de la superficie lateral de un cono por la medida de la generatriz, se obtiene la longitud de la circunferencia de la base.*

Es decir:

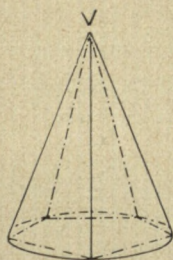
$$2 \pi r = \frac{2 S_l}{g}$$

b) *Dividiendo el doble del área de la superficie lateral de un cono por la longitud de la circunferencia de la base, se obtiene la medida de la generatriz.*

Es decir:

$$g = \frac{2 S_l}{2 \pi r}$$

307. VOLUMEN DEL CONO. Dado un cono C , de vértice V , inscribamos en la circunferencia de la base un polígono P y consideremos la pirámide que tiene por base a este polígono y por vértice el mismo del cono.



Es claro que el volumen de la pirámide será menor que el del cono y que la diferencia entre los dos volúmenes será tanto menor cuanto más pequeña sea la diferencia entre la base del cono y el polígono P , base de la pirámide.

Y esta diferencia resultará prácticamente despreciable si el polígono P tiene un número suficientemente grande de lados como para poderse confundir sensiblemente con el círculo de la base del cono.

Esto pone de manifiesto que: *el volumen de un cono es igual al de una pirámide de igual altura que el cono y que tenga por base un polígono de superficie igual a la del círculo de la base del cono.*

Por lo tanto, recordando la regla para hallar el volumen de una pirámide (n. 294), podemos enunciar la que sigue.

REGLA: *La medida del volumen de un cono es igual a un tercio del producto del área de su base por la medida de su altura.*

Indicando, pues, con V la medida del volumen y con h la medida de la altura de un cono, tendremos que:

$$V = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$$

308. Inversamente, de la regla anterior se deduce que:

a) *Dividiendo el triplo de la medida del volumen de un cono por el área de la base, se obtiene la medida de la altura.*

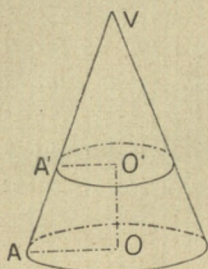
Es decir:

$$h = \frac{3 V}{\pi r^2}$$

b) *Dividiendo el triplo de la medida del volumen de un cono por la medida de la altura, se obtiene el área de la base.*

$$\pi r^2 = \frac{3 V}{h}.$$

309. TRONCO DE CONO. Dado un cono, cortándolo con un plano paralelo a la base y comprendido entre ella y el vértice, queda dividido en dos partes, de las cuales una es un nuevo cono y la otra es un cuerpo que se designa con el nombre de *tronco de cono de bases paralelas* o, simplemente, tronco de cono.



Los círculos O y O' se llaman *bases* del tronco, y la distancia OO' entre sus planos se llama *altura*.

Los segmentos AA' de las generatrices, comprendidos entre los planos de las bases, reciben el nombre de *apotemas* del tronco de cono.

Nosotros nos limitaremos a enunciar las reglas que siguen, en las que es fácil advertir su analogía con las que dan la superficie lateral y el volumen del tronco de pirámide regular (nos. 273 y 297).

310. REGLAS: a) *El área de la superficie lateral de un tronco de cono (de bases paralelas) es igual al producto de la semisuma de las longitudes de las circunferencias de sus bases por la medida de su apotema.*

b) *La medida del volumen de un tronco de cono (de bases paralelas) se obtiene sumando las áreas de las bases con la raíz cuadrada del producto de dichas áreas, multiplicando esa suma por la medida de la altura y dividiendo el producto por 3.*

De modo que si indicamos por brevedad, con r y r' las medidas de los radios de las bases del tronco, con a la de la apotema, con h la de la altura, con S_l la de la superficie lateral y con V la del volumen, tendremos,

recordando las reglas para la longitud de la circunferencia y el área del círculo, (nos. 200 y 204) que :

$$S_l = \frac{2 \pi r + 2 \pi r'}{2} \times a$$

o sea

$$S_l = \pi (r + r') a$$

y

$$V = \frac{(\pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi r^2 \times \pi r'^2}) h}{3}$$

O sea

$$V = \frac{\pi (r^2 + r'^2 + rr') h}{3}$$

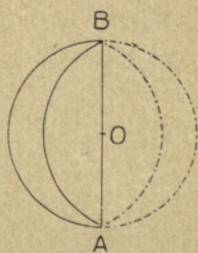
Esfera

311. GENERACIÓN DE LA ESFERA. Los puntos de una semicircunferencia que gira alrededor de su diámetro describen una superficie que se llama *superficie esférica*.

Los puntos del semicírculo describen, en cambio, en este movimiento, un cuerpo que recibe el nombre de *esfera*.

La esfera resulta ser, pues, el cuerpo limitado por la superficie esférica.

Si O es el centro de la semicircunferencia y r el radio, como todos los puntos de la semicircunferencia distan r de O , lo mismo deberá ocurrir con todos los puntos de la superficie esférica, puesto que son los de la semicircunferencia en sus distintas posiciones. Por consideraciones análogas resulta inversamente que todo



punto que se encuentre a una distancia de O igual a r debe pertenecer a la superficie esférica.

Ambas propiedades de los puntos de la superficie esférica se expresan diciendo que: *La superficie esférica de centro O y radio r es el lugar geométrico de los puntos del espacio que distan r de O .*

El punto O se llama *centro* de la esfera y de la superficie esférica, y todos los segmentos iguales a r que unen el centro O con los distintos puntos de la superficie esférica se llaman *radios*.

312. Toda superficie esférica divide al espacio en dos regiones:

1.º La *esfera* o región compuesta por los puntos de la superficie esférica y por los puntos, *interiores* a ella, cuya distancia al centro es menor que el radio;

2.º La región infinita de los puntos *exteriores* cuya distancia al centro es mayor que el radio.

313. Toda recta que pasa por el centro de una esfera corta a la superficie en dos puntos situados a distinto lado respecto del centro y a una distancia del mismo igual al radio. Los segmentos que unen dos puntos de la superficie esférica y pasan por el centro se llaman *diámetros*.

Todos los diámetros de una esfera son iguales, porque son duplos del radio.

314. Todo plano que pasa por el centro de una esfera se llama *plano diametral*.

Todo plano diametral de una esfera corta a la superficie según una circunferencia de radio igual al de la esfera.

315. Todo plano diametral de una esfera divide a ésta en dos partes iguales llamadas *hemisferios*. Las dos partes correspondientes de la superficie esférica, también iguales, se llaman *superficies hemisféricas*.

316. Una recta corta a una superficie esférica en dos puntos, o la toca en un solo punto, o no tiene ningún punto común con ella, según que la distancia del centro a la recta sea menor, igual o mayor que el radio.

La recta se llama *secante*, *tangente* o *externa* a la esfera, respectivamente.

Para demostrar la propiedad anterior basta hacer pasar un plano por la recta y el centro y la cuestión queda reducida a la de la posición de la recta con respecto a la circunferencia en que el plano corta a la superficie esférica (n. 80).

317. Un plano corta a una superficie esférica según una circunferencia, o la toca en un solo punto, o no tiene con ella ningún punto común, según que la distancia del centro al plano sea menor, igual o mayor que el radio.

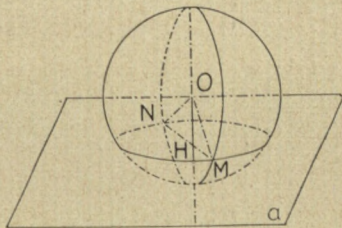
Esto se puede demostrar considerando los planos diametrales perpendiculares al plano dado y recordando lo dicho en el n. 80.

El plano se llama *secante*, *tangente* o *exterior* a la esfera, respectivamente.

318. Se demuestra fácilmente que :

Las secciones producidas por planos, en una superficie esférica, son circunferencias de radio, igual al de la esfera si el plano pasa por el centro, y menor en caso contrario.

Por eso a las circunferencias cuyos planos pasan por el centro se las llama circunferencias *máximas*, y a las circunferencias cuyos planos no pasan por el centro, circunferencias *menores* ⁽¹⁾.

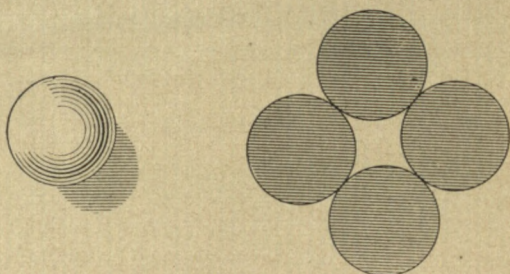


Los círculos correspondientes se llaman, también, *máximos* y *menores*, respectivamente.

⁽¹⁾ Estaría mal llamarlas mínimas.

319. ÁREA DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA. — El problema de medir la superficie de una esfera es más difícil que sus análogos relativos al cilindro y al cono, porque la esfera no se puede extender sobre un plano ni aun cortándola convenientemente. La superficie esférica no es, pues, *desarrollable*.

Consideraciones que aquí sería difícil explicar, conducen a admitir que *la superficie de una esfera es igual a 4 veces la de uno de sus círculos máximos*.



Si deseamos verificar este hecho podemos realizar el experimento siguiente:

Se toma una esfera hueca (de estaño o de cobre) y cuatro círculos del mismo material y del mismo espesor que el empleado para la esfera, cuyo diámetro sea igual al de la esfera para que se puedan considerar como círculos máximos de la misma.

Poniendo en uno de los platillos de una balanza la esfera y en el otro los cuatro círculos máximos, se verifica que los pesos correspondientes son iguales, lo que nos dice que la esfera y los cuatro círculos máximos tienen igual superficie.

Teniendo esto en cuenta y recordando la regla

que da el área del círculo, podemos enunciar la siguiente regla:

REGLA. — *El área de una superficie esférica es igual al cuádruplo del producto de π (3,14..., o aproximadamente 3,1416) por el cuadrado de la medida del radio.*

Representando por S el área de la superficie esférica y por r la medida del radio, se tiene:

$$S = 4 \pi r^2$$

320. De la regla anterior se deduce esta otra:

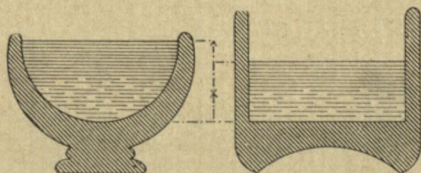
REGLA. — *Dividiendo el área de una superficie esférica por el cuádruplo de π , se obtiene el cuadrado de la medida del radio, y para obtener ésta basta extraer la raíz cuadrada de aquel cociente.*

Es decir:

$$r^2 = \frac{S}{4 \pi} \text{ y } r = \sqrt{\frac{S}{4 \pi}}$$

321. VOLUMEN DE LA ESFERA. — Para encontrar el volumen de una esfera tomemos un recipiente hemisférico y otro cilíndrico del mismo radio.

Llenando de agua el recipiente hemisférico y volcando luego el contenido en el re-



cipiente cilíndrico, se verifica que llega hasta una altura que es exactamente igual a dos tercios del radio de los recipientes.

Luego el volumen del hemisferio es igual al de un cilindro de radio igual al del hemisferio y altura

igual a dos tercios del radio; y duplicando este cilindro se obtendrá el volumen de la esfera completa.

Por lo tanto:

El volumen de una esfera es igual al de un cilindro de igual radio y de altura igual a $\frac{4}{3}$ de dicho radio.

Pero, si representamos por r la medida del radio de la esfera, el área de la base del cilindro será (número 204):

$$\pi r^2$$

y como la altura es $\frac{4}{3} r$, la medida del volumen del cilindro, y por lo tanto la del volumen de la esfera, será (n. 301):

$$\pi r^2 \times \frac{4}{3} r$$

o sea

$$\frac{4}{3} \pi r^3 ;$$

y como la tercera potencia de un número se llama también el cubo de dicho número, podemos enunciar la regla siguiente:

REGLA: *La medida del volumen de una esfera se obtiene multiplicando $\frac{4}{3}$ de π (3,14....., ó 3,1416) por el cubo de la medida del radio.*

322. De la regla anterior se deduce la que sigue.

REGLA: *Dividiendo la medida del volumen de una esfera por $\frac{4}{3}$ de π , se obtiene el cubo de la medida del radio, y para obtener ésta basta extraer la raíz cúbica de aquel cociente.*

Es decir:

$$r^3 = \frac{V}{\frac{4}{3} \pi} \quad \text{y} \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{\frac{4}{3} \pi}}$$

323. La medida del volumen de una esfera, o sea

$$\frac{4}{3} \pi r^3$$

se puede obtener también multiplicando

$$4 \pi r^2 \times \frac{1}{3} r$$

y como $4 \pi r^2$ es el área de la superficie esférica (número 319), podemos decir que:

La medida del volumen de una esfera es igual al producto del área de su superficie por $\frac{1}{3}$ de la medida del radio.

O sea

$$V = S \times \frac{1}{3} r.$$

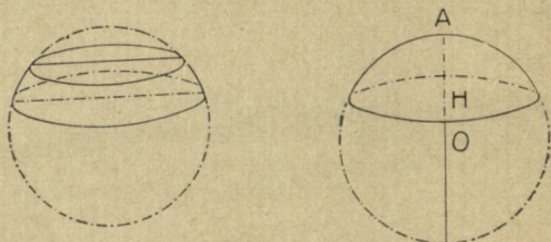
324. ZONA Y SEGMENTO ESFÉRICO. Dada una esfera y considerados dos planos secantes paralelos, el cuerpo formado por los puntos de la esfera comprendidos entre los dos planos paralelos y los de los círculos producidos por las secciones de la esfera con dichos planos, se llama *segmento esférico*. Los dos círculos se llaman *bases* y la distancia entre sus respectivos planos, *altura* del segmento.

La parte de superficie esférica comprendida entre los dos planos de las bases se llama superficie lateral del segmento esférico o *zona esférica*.

Todo plano secante a una esfera la divide en dos partes, cada una de las cuales recibe el nombre de *segmento esférico de una sola base*.

Los hemisferios son segmentos esféricos de una base, especiales.

Todo plano secante a una superficie esférica la divide en dos partes, cada una de las cuales recibe el nombre de *casquete esférico*.



Se puede decir que todo segmento esférico de una base está limitado por el círculo de la base y un casquete esférico.

Altura o flecha de un casquete o de un segmento esférico de una base es el segmento de la perpendicular a la base trazada por su centro, comprendido entre la base y el casquete.

325. ÁREA DE LA ZONA Y DEL CASQUETE. Para determinar el área de una zona o de un casquete esférico se emplea, indistintamente, la regla siguiente:

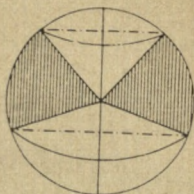
REGLA: *El área de una zona o de un casquete es igual al producto de la longitud de una circunferencia máxima de la esfera a que pertenecen, por la medida de la altura de la zona o del casquete, respectivamente.*

Es decir:

$$S = 2 \pi r \times h.$$

326. SECTOR ESFÉRICO. Otro cuerpo notable es el *sector esférico*, el cual se obtiene considerando un sector circular e imaginando que gira, describiendo una vuelta entera, alrededor de un diámetro del círculo de que forma parte.

El sector esférico está constituido por todos los puntos que representan las distintas posiciones de los puntos del sector circular, en el movimiento considerado. Si el sector circular elegido corresponde a un ángulo central recto y el eje de rotación es la recta que contiene a uno de sus lados, el sector esférico que resulta es un hemisferio.



La superficie total de un sector esférico se compone de la de una zona y la superficie lateral de dos conos, o de la de un casquete y un círculo (hemisférica), o de la de un casquete y la de la superficie lateral de un cono.

327. Para la determinación del volumen de un sector esférico se emplea la regla que sigue.

REGLA: *La medida del volumen de un sector esférico es igual al área de la zona correspondiente por $\frac{1}{3}$ de la medida del radio.*

O sea:

$$V = S_z \times \frac{1}{3} r.$$

EJERCICIOS SOBRE EL CAPÍTULO XIV

292. ¿Cuál es la superficie lateral de un cilindro de 4 m. de diámetro y 3,75 m. de altura? [299]

293. La superficie de la base de un cilindro es 12,56 m². ¿Cuál será la superficie lateral del cilindro si la altura es igual a $\frac{3}{2}$ del radio de la base?

294. ¿Cuál es la superficie total de un cilindro en el cual el radio de la base es de 0,35 m. y la altura es doble del diámetro de la base?

295. Un rectángulo tiene 2 m. de base y 3 m. de altura. ¿En qué relación estarán las superficies laterales de los dos cilindros engendrados por el rectángulo cuando gira alrededor de uno u otro de dos lados consecutivos?

296. Las áreas de las superficies laterales de los cilindros engendrados por la rotación de un rectángulo alrededor de sus lados son iguales.

297. ¿Cuál es el radio de un círculo de superficie igual a la superficie lateral de un cilindro de radio r y altura h ?

298. ¿Cuál es el radio de un círculo de superficie igual a la superficie total de un cilindro de radio r y altura h ?

299. La altura de un cilindro circular recto tiene 4 m. y la superficie del rectángulo que se obtiene al cortar el cilindro con un plano que pase por el eje es de $26,45 \text{ m}^2$. Calcular el radio del cilindro y el área de la superficie lateral.

[300] 300. Calcular la altura de un cilindro circular recto cuya superficie lateral es de $13,27 \text{ m}^2$, sabiendo que el radio de la base es de 0,50 m.

301. Calcular la altura y el radio de un cilindro circular recto en el que la superficie total es de $0,758 \text{ m}^2$ y la lateral es igual a $\frac{3}{2}$ de la de la base.

[301] 302. Calcular el volumen de un cilindro de 9,3 cm. de altura 2,5 cm. de radio.

303. ¿Cuál es el volumen de un cilindro en el que la circunferencia de la base tiene 3,08 m. y la altura 1,50 m.?

304. En un pozo de 0,90 m. de diámetro hay agua hasta una altura de 2,50 m. a contar desde el fondo. ¿Cuántos litros de agua contiene el pozo?

305. Un pozo, con las paredes comprendidas, tiene 1,86 m. de diámetro y 12 m. de profundidad. ¿Cuál es el volumen de la tierra que fué necesario extraer para construir el pozo?

306. En un depósito cilíndrico de 0,8 m. de diámetro, que contiene agua hasta una cierta altura, se mete una piedra. ¿Cuál será el volumen de ésta si después de su inmersión el nivel del agua sube 0,483 m.?

307. De un depósito cilíndrico de 8,8 m. de diámetro sale agua a razón de 2 litros por segundo. ¿Cuánto bajará el nivel del agua en tres cuartos de hora?

308. Las paredes de un pozo tienen 5 m. de circunferencia en la parte externa y 3 m. en la parte interna. La profundidad es de 15 m. ¿Cuánto cuesta el trabajo de albañilería calculado a razón de \$ 18 el metro cúbico?

309. ¿Cuál es el peso de un tubo de plomo de 2,50 m. de lar-

go y que tiene un diámetro interno de 0,36 m. y 0,008 m. de espesor? (El peso específico del plomo es 11,4).

310. ¿Cuál es la presión en kg. ejercida sobre el fondo de una cisterna cilíndrica de 5,75 m. de diámetro, por el agua contenida en la misma, sabiendo que llega hasta una altura de 3,4 m.?

311. Se ha cavado un pozo de 1,20 m. de diámetro y 9 m. de profundidad. ¿Cuál será el volumen del muro de revestimiento, sabiendo que tendrá un espesor de 30 cm.?

312. Un tubo barométrico tiene un diámetro interno de 11 mm. y el mercurio que contiene llega a una altura de 76 cm. ¿Cuánto pesa el mercurio de la columna barométrica si la densidad del mercurio es de 13,568? ¿Cuál es la presión atmosférica por cm^2 ?

313. Los volúmenes de los cilindros engendrados por la rotación de un rectángulo alrededor de uno u otro de dos de sus lados consecutivos son inversamente proporcionales a los lados fijos.

314. El tubo de un conducto de agua tiene una sección de 3 m^2 de superficie. El agua que vierte sale con una velocidad de 1 m. por segundo. ¿Cuántos litros pasarán por el tubo en una hora?

315. ¿Qué sección tiene un tubo que vierte 300 litros de agua por hora, a una velocidad de 0,6 m. por segundo?

316. ¿Qué velocidad debe llevar el agua de un tubo cilíndrico de 4 cm. de diámetro para que en una hora pasen 18 m^3 ?

317. ¿En cuántos segundos pasan 100 litros de agua con una velocidad de 0,9 m. por segundo, por un tubo cilíndrico de 2 cm. de diámetro?

318. La densidad del vapor de agua es igual a $\frac{5}{3}$ de la del aire, cuyo peso es de 1,293 g. por litro. ¿Cuál es el peso del vapor contenido en el cilindro de una máquina que tiene 0,50 m. de diámetro y 0,80 m. de largo?

319. El vapor de agua a 100° y a la presión de una atmósfera ocupa un volumen 1.700 veces mayor que el agua a 0° que lo ha originado. ¿Cuánta agua a 0° se necesitará para llenar de vapor a 100° y a la presión de una atmósfera, un cilindro de 0,52 m. de diámetro y 0,52 m. de largo?

320. ¿Qué cantidad de agua elevará una bomba a cada golpe de émbolo si el diámetro interno del cuerpo de bomba es de 0,16 m., y el recorrido del pistón es de 0,46 m.?

321. La llanta de un volante está hecha de fundición y tiene la forma de un cilindro hueco de 1,8 m. de radio interno, 2 m. de radio externo y 30 cm. de altura. Calcular su peso sabiendo que el peso específico de la fundición es de 7,5.

[302] 322. ¿Cuál es la superficie de la base de un cilindro circular recto en el que el volumen es de $3,60 \text{ m}^3$ y la altura es de 1,50 m.?

323. En un recipiente cilíndrico de 0,40 m. de diámetro interno se ponen 4,04481 kg. de leche, cuya densidad es de 1,03. ¿A qué altura llegará el líquido?

324. El depósito de una regadora de calles tiene la forma de un cilindro de 90 cm. de diámetro y 1.800 litros de capacidad. ¿Cuál es el largo del depósito?

325. Calcular el radio interno de un tubo cilíndrico de vidrio que cuando está vacío pesa 90 gr. y cuando tiene mercurio hasta una altura de 9 cm. pesa 200 gr., sabiendo que el peso específico del mercurio es de 13,568.

326. Un pluviómetro cilíndrico tiene 24 cm. de diámetro. Pasando el agua reunida en él después de una lluvia, a un vaso cilíndrico de 3 cm. de diámetro, llega hasta una altura de 166 mm. ¿Qué altura había alcanzado en el pluviómetro? ¿Cuántos hectólitros de agua habían caído por km^2 ?

327. Calcular las dimensiones de los litros que se usan para medir granos y para medir líquidos, sabiendo que ambos recipientes son cilíndricos, y que en el primero la altura es igual al diámetro de la base, en tanto que en el segundo es doble.

[303] 328. ¿A qué distancia de la base debe cortarse un cono circular recto con un plano perpendicular al eje, para obtener como sección una circunferencia de longitud igual a $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{4}$ de la de la base?

329. La superficie lateral de una pirámide circunscripta a un cono recto es equivalente a la de un triángulo que tiene por base el perímetro de la base de la pirámide y por altura la generatriz del cono.

330. ¿A qué distancia de la base debe cortarse un cono circular recto con un plano perpendicular al eje, para obtener como sección un círculo de área igual a $\frac{1}{4}$ ó $\frac{1}{9}$ ó $\frac{1}{16}$ del área de la base? (Recuérdese lo dicho en el n. 206).

331. La generatriz de un cono circular recto es igual al cuádruplo del radio de la base, y la altura tiene 9 m. Calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo que se obtienen cortando el cono con un plano perpendicular al eje trazado a $\frac{1}{5}$ de la altura a contar del vértice. [304]

332. ¿Cuál es la generatriz de un cono que tiene 7 m. de altura y una base de 3 m. de radio?

333. ¿Cuál es la altura de un cono que tiene 6 m. de generatriz y una base de 5 m. de radio?

334. Calcular el área de la superficie total de un cono circular recto que tiene una altura de 8 dm. y una base de 3,5 dm. de radio? [305]

335. ¿Cuál es la superficie lateral de un cono recto que tiene una base de 3 m. de diámetro y una generatriz de 5 m.?

336. ¿Cuál es la superficie lateral de un cono recto que tiene 9 m. de radio y 12 m. de altura?

337. ¿Cuál es la superficie total de un cono circular recto de 3,75 m. de generatriz y de 1,89 m. de radio?

338. ¿Cuál es la superficie total de un cono de 4 m. de altura y 5 m. de generatriz?

339. Un cono circular recto tiene una altura de 12,6 m. y una base de 3,49 m. de circunferencia. Calcular la generatriz y la superficie total del cono.

340. ¿Cuál es la superficie total de un cono de 4,50 m. de generatriz y base de 6,25 m. de circunferencia?

341. Una torrecilla tiene por techo un cono forrado en cinc, de 2,70 m. de diámetro y 3 m. de generatriz. Averiguar cuánto pesa la lámina de cinc sabiendo que su espesor es de un milímetro y que el peso específico del cinc es de 6,86.

342. Calcular el área de la superficie del cuerpo engendrado por la rotación de un triángulo equilátero de 0,36 m. de lado que gira alrededor de uno de sus lados.

343. Las superficies laterales y los volúmenes de los conos engendrados por la rotación de un triángulo rectángulo al girar alrededor de uno u otro de sus catetos son inversamente proporcionales a los catetos fijos.

344. Un cono equilátero (es decir, tal que sus secciones con

cualquier plano que pase por el eje sea un triángulo equilátero) tiene una altura h . Determinar primero la superficie lateral y luego la superficie total.

- [306] 345. Hallar la generatriz de un cono que tiene 2,109 m. de radio y una superficie lateral de $30,8 \text{ m}^2$.

346. Determinar la longitud de la circunferencia de la base de un cono sabiendo que la superficie lateral es de 28 m^2 y la generatriz de 7 m.

- [307] 347. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya base tiene 2m de radio siendo la altura de 5 m.?

348. ¿Cuál es un volumen de un cono cuya base tiene 1,5 m. de radio y cuya generatriz es de 2,5 m.?

349. ¿Cuál es el volumen de un cono que tiene 4,5 m. de generatriz y 3,6 m. de altura?

350. ¿En qué relación están los volúmenes de dos conos de igual altura y cuyas bases tienen 0,56 m. y 1,12 m. de diámetro respectivamente?

351. ¿En qué relación están los volúmenes de un cilindro y un cono de igual base y altura?

352. Una parva de pasto tiene 6 m. de altura. La parte inferior es cilíndrica y tiene 5 m. de diámetro y 3,80 m. de altura mientras que la parte superior es cónica. ¿Cuál es el volumen de la parva?

353. Una parva de pasto de forma cónica tiene 15 m. de altura y 44 m. de circunferencia en la parte inferior. ¿Cuál será su peso en quintales si cada m^3 tiene un peso de 2 quintales?

354. Si se llena de agua un vaso cónico de 24 cm. de radio y 18 cm. de altura y luego se vuelca esta agua en un vaso cilíndrico de 10 cm. de diámetro, ¿hasta qué altura llegará el líquido en el vaso cilíndrico?

355. ¿Cuál es un volumen de un cono equilátero (véase el ejerc. n. 344) de generatriz a ?

356. En una lámina de lata que afecta la forma de un cuadrado de 18 cm. de lado, se trazó un arco de circunferencia con centro en uno de los vértices y radio igual al lado y luego se cortó la lámina a lo largo del arco. Con el sector circular que se obtuvo se construyó un cono. Determinar la altura y el volumen de ese cono.

357. ¿Cuál es la altura de un cono cuyo volumen es de 4 m^3 y [308]
cuya base tiene $3,60 \text{ m}^2$ de superficie?

358. ¿Cuál será la altura de un cono de $3,077 \text{ m}^3$ de volumen si
el radio de la base tiene $0,35 \text{ m}$?

359. ¿Cuál será la altura de un cono de $0,18865 \text{ m}^3$ de volumen
si la circunferencia de la base tiene $1,54 \text{ m}$?

360. ¿Cuál es el radio de la base de un cono que tiene un vo-
lumen de $20,944 \text{ m}^3$ y una altura de 5 m ?

361. ¿Cuál será el diámetro de la base de un cono de estaño
de $0,25 \text{ m}$. de altura y que pesa $19,144 \text{ g}$., si el peso específico del
estaño es de $7,03$?

362. La altura de un tronco de cono es de 15 m . y los radios [310]
de las bases son de 13 m . y 33 m . Calcular la apotema del tronco.

363. Si en un tronco de cono circular recto los radios de las
bases son r_1 y r_2 ($r_2 > r_1$) y la apotema es a , la altura h está
dada por la fórmula:

$$h = \sqrt{a^2 - (r_2 - r_1)^2}.$$

364. ¿Cuál es la superficie lateral de un tronco de cono que
tiene una apotema de 3 m . y los radios de las bases respectivamente
iguales $2,1 \text{ m}$. y $2,8 \text{ m}$.

365. ¿Cuál es la superficie total de un tronco de cono de $0,21 \text{ m}$.
de altura si los diámetros de las bases son de $1,19 \text{ m}$. y $0,91 \text{ m}$?

366. En un tronco de cono circular recto, la apotema es de
 $9,5 \text{ dm}$., la altura es de $6,8 \text{ dm}$. y el radio de la base menor es de 8 cm .
Calcular el área de la superficie lateral del tronco.

367. Las bases de un tronco de cono circular recto tienen
 42 dm^2 y 86 dm^2 de superficie, y la apotema del tronco es de 15 dm .
Calcular la altura del tronco y la superficie lateral.

368. Una chimenea que tiene la forma de un tronco de cono,
tiene 22 m . de alto; los radios interno y externo de la base son,
respectivamente, de 1 m . y $1,20 \text{ m}$. y los de la abertura superior son
de $0,30 \text{ m}$. y $0,45 \text{ m}$. Calcular la superficie interna y la superficie ex-
terna de la pared.

369. El techo de una torre redonda tiene la forma de un tronco
de cono seguido, en su parte superior de un cono. El radio de la

base inferior del tronco tiene 2,5 m. y la altura del tronco es de 1 m. y, además, la apotema forma con el radio de la base un ángulo de 45° . El cono superior tiene 5 m. de alto. Hallar la superficie del techo.

370. ¿Cuál es radio de la base superior de un tronco de cono, en el que la superficie lateral es de $24,5 \text{ m}^2$, la apotema de 1,95 m. y el radio de la base inferior de 1,4 m.?

371. ¿Cuál es el volumen de un tronco de cono cuyas bases tienen $2,25 \text{ m}^2$ y $1,41 \text{ m}^2$ de superficie y la altura es de 0,90 m.?

372. ¿Cuál es el volumen de un tronco de cono de 2,1 m. de altura y en el que los radios de las bases tienen 0,63 m. y 0,42 m.?

373. Calcular, en hectólitos, la capacidad de una cuba de 1,75 m de alto y en la que los diámetros internos del fondo y de la boca son de 1,90 m. y 1,15 m., respectivamente.

374. Los radios de las dos bases de un tronco de cono son de 9 dm. y 4 dm. respectivamente, y la altura es doble de la media proporcional entre los dos radios. Calcular el volumen del tronco.

375. Los radios de las dos bases de un tronco de cono son de 9 dm. y 4 dm. respectivamente, y la apotema es igual a la suma de los radios. ¿Cuál es el volumen del tronco de cono?

376. Calcular el volumen de un tronco de cono circular recto de 3,75 m. de apotema y 2,5 m. de altura, sabiendo que la generatriz del cono que se ha quitado para obtener el tronco es de 1,50 m.

377. ¿Cuál es la altura de un tronco de cono cuyas bases tienen 3 m^2 y 12 m^2 de superficie, si el volumen del tronco es de 84 m^3 ?

378. Se desea construir un recipiente cuya forma sea la de un tronco de cono, de modo que el diámetro de la base inferior sea de 0,24 m. y el de la superior de 0,20 m., y que la capacidad sea de 12 litros. ¿Cuál debe ser la profundidad?

[314] 379. ¿Cuál es el radio de una esfera inscrita en un cubo de $0,8 \text{ m}^3$ de volumen?

[319] 380. Hallar el área de un círculo máximo de una esfera de 3,08 m. de radio. Hallar también la superficie de dicha esfera.

381. Calcular el radio de un círculo cuya área es igual a la de la superficie de una esfera de 3,6 m. de radio.

382.Cuál es la medida, en millas cuadradas, de la superficie

del globo terrestre, sabiendo que el ecuador tiene una longitud de 5.400 millas geográficas?

383. Calcular el área de las superficies interna y externa de una esfera hueca de 3,5 cm. de espesor, sabiendo que el diámetro de la externa es de 1,05 m.

384. Una caldera cuya parte central tiene forma cilíndrica termina a uno y otro lado por un hemisferio de 0,40 m. de radio. El cilindro, que tiene ese mismo radio, tiene una longitud doble de la del diámetro. ¿Cuál es el área de la superficie externa de la caldera?

385. Sabiendo que la presión del aire sobre cada cm.^2 es de 1,026 g., calcular en kg. la fuerza necesaria para separar dos hemisferios de Magdeburgo de 6 cm. de radio.

386. Calcular el área de la superficie de la esfera que pasa por los vértices de un cubo de 53 dm.² de superficie total.

387. Calcular la generatriz de un cilindro circular recto equilátero (es decir, de generatriz igual al diámetro de la base) cuya superficie lateral es igual a la de una esfera de 0,37 m. de radio.

388. Calcular la diferencia entre el área [de la superficie total del cilindro circular recto equilátero (véase el ejercicio anterior) circunscripto a una esfera de 4 dm. de radio, y la de la superficie de la esfera.

389. ¿En qué relación están las superficies de una esfera, un cilindro y un cono. tales que el cilindro y el cono tengan una altura igual al diámetro de la esfera y que el radio de la base sea igual al radio de la esfera.

390. ¿Cuál será el espesor de una esfera hueca si la superficie externa de la misma es de 3,12 m.² y la interna de 3 m.²?

391. ¿Cuál es el volumen de una esfera de 0,84 m. de radio? [321]

392. ¿Cuál será el peso de una bola de marfil que tiene 8 cm. de diámetro, si el peso específico del marfil es 1,9?

393. ¿Cuál es el volumen de una esfera cuya superficie es de 55,44 m.²?

394. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que las circunferencias máximas tienen 4,62 m. de longitud?

395. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que la superficie de sus círculos máximos es de 6,16 m.²?

396. ¿En qué relación están el volumen de una esfera de radio r y el de un cilindro de altura $2r$ y radio r ?

397. La densidad media de la Tierra es 5,44. ¿Cuál es el peso de la Tierra en millones de toneladas? (El diámetro terrestre medio es de 12735 km.).

398. ¿Cuál es el volumen de la costra terrestre cuyo espesor se considera que es igual a $\frac{1}{100}$ del radio?

399. ¿Cuál es el volumen de la capa atmosférica que rodea a la Tierra, cuyo espesor se calcula que es igual a $\frac{1}{60}$ del radio terrestre.

400. Representando por d el diámetro de la Tierra, el Sol y la Luna tienen diámetros respectivamente iguales a $108d$ y $0,27d$, y la distancia de los centros de la Tierra y la Luna es igual a $60d$. Se pregunta:

a) ¿Cuántas esferas iguales a la de la Tierra se podrían formar con el Sol?

b) ¿Cuántas esferas iguales a la esfera tangente exteriormente a la Tierra y a la Luna se pueden formar con el Sol?

401. ¿Cuál será el peso de una bocha de madera de 0,2 m. de diámetro que cuando se pone en el agua se hunde hasta que el nivel del líquido señala sobre la bocha un circunferencia máxima?

402. Un cubo y una esfera tienen ambos $2,4 \text{ m.}^2$ de superficie. ¿En qué relación estarán sus volúmenes?

403. ¿En qué relación están los diámetros de dos esferas de la misma sustancia, de las cuales una pesa el doble que la otra?

404. ¿Cuál es el radio de una esfera de 173 dm.^3 de volumen?

405. ¿Cuál es el área de una esfera de 1 m.^3 de volumen?

406. ¿Cuál es el área de uno de los círculos máximos de una esfera de 14 cm.^3 de volumen?

407. Determinar el calibre de un cañón cuyos proyectiles esféricos de hierro pesan 6 kg. (Recuérdese que el peso específico del hierro es 7,25).

408. En un recipiente cilíndrico de 68 cm. de diámetro y que contiene agua hasta una cierta altura, se ponen 80 bolitas iguales. El nivel del agua sube 20 cm. ¿Cuál es el diámetro de cada bolita?

409. Se han fundido tres esferas metálicas de 2 dm., 8 dm. y 4 dm. de diámetro, respectivamente, para construir con ellas una esfera única. ¿De qué diámetro resultará esta última?

410. Una esfera hueca tiene 43 cm. de radio externo y 4 cm. de espesor. ¿Cuál será el radio de una esfera maciza de igual volumen que aquella?

411. Con 125 cm.³ de metal se debe construir una esfera hueca cuyo radio interno sea de 20 cm. ¿Cuál será la superficie externa de la esfera?

412.Cuál es el espesor de un globo de jabón de 15 cm. de diámetro que se ha obtenido con una gota esférica de agua jabonada de 2 mm. de diámetro?

413. Se ha construido una esfera hueca de plata cuyo diámetro externo es doble del interno. Calcular estos diámetros sabiendo que la esfera pesa $38\frac{1}{2}$ kg. y que el peso específico de la plata empleada es de $10\frac{1}{2}$. Tómese para π el valor aproximado $\frac{22}{7}$.

414. ¿Cuál es el área de un casquete perteneciente a una esfera [325] de 2,10 m. de radio, siendo 0,8 m. la altura del casquete?

415. ¿Cuál es la altura de un casquete de 3 m.² de superficie, perteneciente a una esfera de 1 m. de radio?

416. La longitud de la circunferencia que resulta como sección de una superficie esférica con un plano distante 1,12 m. del centro es de 5,3 dm. Calcular el área de la superficie esférica y del menor de los dos casquetes determinados por la circunferencia.

417. Considerando el globo terrestre como una esfera de 12.735 km. de diámetro, calcular:

- 1.° El área de la superficie terrestre;
- 2.° El área de la superficie de la zona tórrida que tiene 5094 km. de altura;
- 3.° El área de la superficie de las zonas glaciales que tienen 509 km. de altura.
- 4.° El área de cada una de las dos zonas templadas.

418. Sobre una misma esfera o sobre esferas iguales, las zonas correspondientes a segmentos esféricos de igual altura tienen superficies iguales.

419. Un casquete esférico tiene 2,85 m² de superficie y 0,45 m. de alto. Calcular el área de la esfera correspondiente.

420. ¿Qué altura debe tener una zona perteneciente a una esfera de 9 m. de radio para que su superficie sea de $169,6464 \text{ m}^2$?

421. Sobre una esfera de 1,3 m. de radio considérese una zona cuya base mayor esté a una distancia del centro igual a 0,50 m. Determinese el área de cada una de las bases sabiendo que la superficie de la zona es de 12 m^2 .

[326] 422. Un sector circular cuyo radio es de 0,60 m. y cuyo ángulo al centro es de 30° , gira alrededor de uno de sus lados rectilíneos. Calcular el área de la superficie total del sector esférico que así se obtiene.

423. Una esfera de 1 m. de radio está dividida en dos casquetes por un plano que dista 4 dm. del centro. Calcular el volumen de los segmentos esféricos correspondientes a los dos casquetes.

DEF.: Se da el nombre de *huso esférico* a cada una de las dos partes en que una superficie esférica queda dividida por dos semicircunferencias máximas limitadas por un mismo diámetro. Los dos semiplanos respecto de la recta a que pertenece aquel diámetro, que contienen las referidas semicircunferencias máximas, determinan dos diedros (uno convexo y el otro cóncavo, o los dos llanos) que se llaman los *diedros de los husos*.

424. El área de un huso esférico se obtiene multiplicando el área de la superficie esférica por la medida en grados de la amplitud del diedro y dividiendo el producto por 360.

DEF.: Se llama *cuña esférica* la parte de una esfera comprendida entre dos semiplanos que parten de un mismo diámetro. La cuña es, pues, un cuerpo limitado por dos semicírculos y un huso. El diedro del huso se llama también *diedro de la cuña*.

425. El volumen de una cuña esférica se obtiene multiplicando el volumen de la esfera por la medida en grados de la amplitud del diedro de la cuña y dividiendo el producto por 360.

426. ¿Cuál será el volumen de una cuña esférica perteneciente a una esfera de 12 dm. de radio y correspondiente a un ángulo de $51^\circ 39' 45''$?

427. ¿Cuál será el volumen de una cuña esférica perteneciente a una esfera de 1 m³ de volumen y correspondiente a un ángulo de 25° ?

Medición de la capacidad de los barriles

Los barriles pueden tener diversas formas. Si uno se contenta con una aproximación grosera, un barril se puede considerar como suma de dos troncos de conos iguales y unidos por la base mayor.

Pero existen fórmulas prácticas más exactas. Indicando con D la medida en metros del diámetro máximo (correspondiente a la sección media), con d la medida en metros del diámetro mínimo (correspondiente al fondo o a la tapa) y con l la medida en metros de la longitud o profundidad del barril (distancia entre el fondo y la tapa), el volumen V está dado por la fórmula:

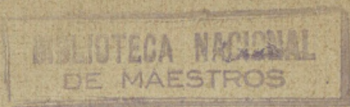
$$V = 0,7854 \times l \times [d + 0,56 (D-d)]^2 \text{ hectólitos.}$$

428. Calcular la capacidad de un barril de 1,35 m. de largo y que tiene 65 cm. de radio máximo y 60 cm. de radio mínimo.

429. Un barril tiene 1,90 m. de largo, 0,798 m. de radio máximo y 0,650 m. de radio mínimo. Calcular su capacidad, primero considerándolo como suma de dos troncos de cono y luego aplicando la fórmula anterior, y comparar los resultados.



inv. 29.388



ERRATAS

Pág. 173, línea 27, dice :

medida de la altura del tronco.

debe decir :

medida de la altura del tronco y se divide por 3.

Pág. 186, línea 8, dice :

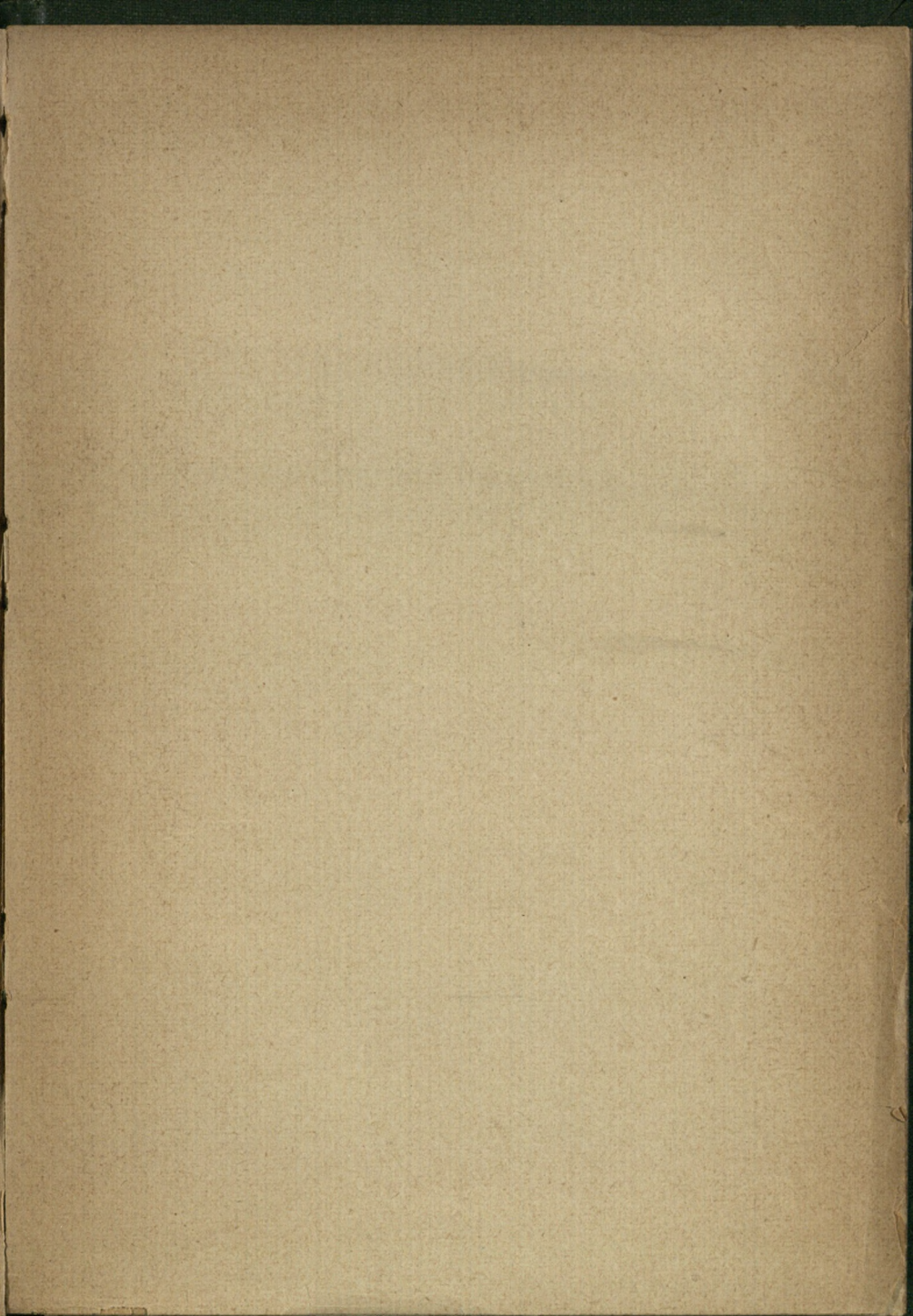
$$2 \pi r = \frac{2 S_1}{h}.$$

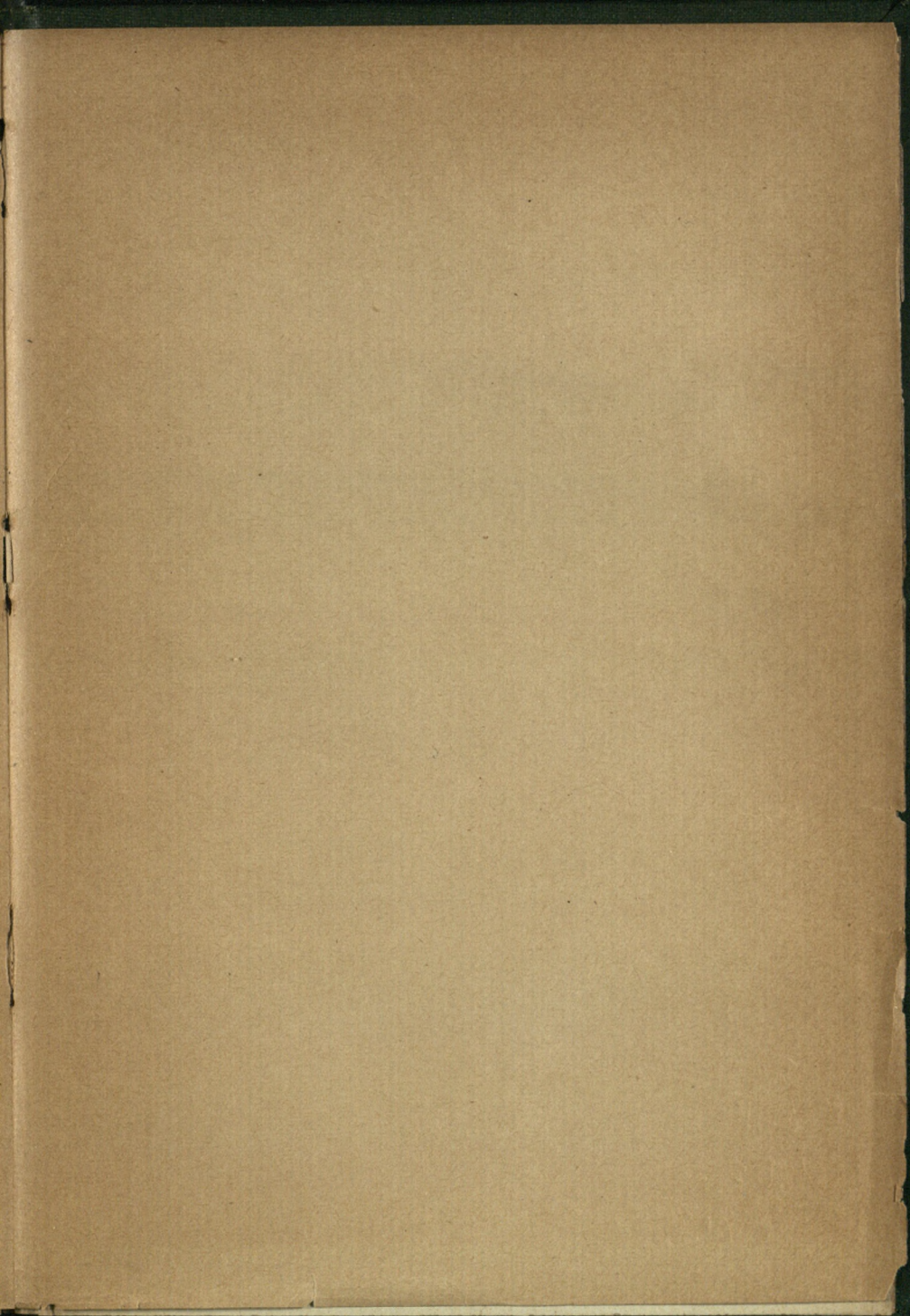
debe decir

$$2 \pi r = \frac{2 S_1}{g}.$$

A
x-3
106

GEOMETRIA





SC
LT
1935
ENR

