# GEOMETRIA DE LOS NIÑOS.

POR

JUAN IGNACIO DE ARMAS.

(TERCERA EDICION.)



NUEVA YORK,

IMPRENTA Y LIBRERÍA DE N. PONCE DE LEON,
40 Y 42 BROADWAY,
1881.

# GEOMETRIA DE LOS NIÑOS.

POR

JUAN IGNACIO DE ARMAS.

(TERCERA EDICION.)





NUEVA YORK,
IMPRENTA Y LIBRERÍA DE N. PONCE DE LEON,
40 Y 42 BROADWAY,
1881.

# INDICE.

# GEOMETRIA DE LOS NIÑOS.

## INTRODUCCION.

Este librito de *Geometría* enseña muchas cosas útiles y entretenidas. Trata de líneas como las que se hacen para formar las letras; de ángulos, como las esquinas de los libros; de círculos como las ruedas de un coche, y de otras cosas con nombres muy extraños, pero muy interesantes y fáciles de aprender.

El niño que aprenda bien lo que dice este librito podrá escribir con más regularidad, aprenderá el dibujo fácilmente, y entenderá mejor la geografía, la física y las demas cosas que estudie; porque para saber bien todo lo que estudian los niños se necesita saber geometría.

Tambien los niños que saben geometría pueden servirse de ella para muchos juegos y entretenimientos. Sabrán trazar jardines, construir cometas de papel, hacer suertes y figuras con las cartas de baraja y las piezas del dominó, y resolver enigmas y problemas muy curiosos que muchos hombres no saben resolver.

Para adquirir esos conocimientos y otros muy importantes, basta leer atentamente las páginas de este librito, tratando de entender bien todo lo que en ellas se dice. Estúdiese bien cada leccion ántes de pasar á la leccion siguiente. Si el niño encuentra dificultad en entender alguna cosa, empiece de nuevo á leer el libro desde el principio, y es seguro que cuando llegue al punto que entendia mal, lo entenderá mejor.

## LECCION PRIMERA.

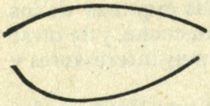
### PUNTOS Y LÍNEAS.

No hay nada tan pequeño como un *punto geométrico.* La punta de la aguja más afilada, la arenilla más fina, son muy grandes comparadas con él. Es tan pequeño que no tiene tamaño, y no puede verse. Pero no es necesario verlo para estudiar geometría; basta que sepamos la posicion que ocupa, esto es, el lugar en que está colocado.

Para indicar ese lugar se marca un puntito • en el papel ó en la pizarra. En el medio de este puntito debemos imaginar que está el punto geométrico.

*El punto geométrico es un lugar sin tamaño; no tiene largo ni ancho ni grueso.*

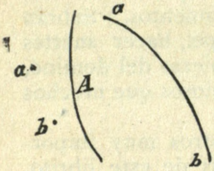
Hay lugares que solo tienen largo, sin ancho ni grueso.



Se llaman *líneas* y se indican por medio de una raya trazada en el papel ó en la pizarra. No pueden verse, pero la raya con que las marcamos demuestra claramente que tienen largo, y nos indica la posicion que ocupan. La verdadera linea debemos imaginarla en el medio de la que trazamos con el lápiz ó el yeso.

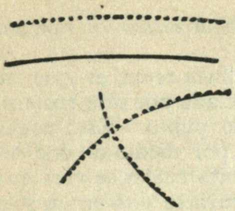
*La línea es un lugar largo sin ancho ni grueso.*

Para distinguir los puntos en geometría, se pone al lado




de ellos una letra del alfabeto, y se les da el nombre de esa letra; así se dice el punto *a*, el punto *b*. Para conocer las líneas, tambien se pone al lado de ellas una letra; ó bien se marcan con dos letras, una al principio de la línea y otra al fin. Así se dice .a línea *A*, ó bien la línea *a b*.

En la figura inmendiata se ve una série ordenada de puntos. Si entre cada dos dc ella marcamos otros puntos hasta que no quepan más y se confundan unos con otros, obtendrémos una línea tan seguida como la que hubiéramos podido trazar sin levantar el lápiz del papel. Esto



nos hace comprender que toda línea está formada de puntos; que su principio y su fin son puntos; y que el lugar en que se cortan dos lineas no puede ser sino un punto.

*La línea es una sucesion de pun-puntos.*

*Los extremos de una linea son puntos.*

*La interseccion de dos líneas, esto es, el lugar en que se cortan, es un punto.*

---

Qué es un punto geométrico? Puede verse el punto geométrico? Cómo se indica su posicion? Como se distinguen los puntos en geometría? Qué es línea? Cómo se indican las líneas? Cómo se distinguen? Una sucesion de puntos, qué forma? Qué son los extremos de una línea? Qué es la interseccion de dos líneas? Qué se entiende por interseccion?

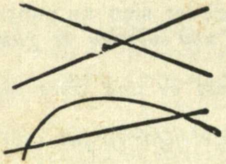
## LECCION SEGUNDA.

### RECTAS Y CURVAS.

La línea puede considerarse como el resultado del movimiento de un punto. Observemos, en efecto, que para marcarlas en el papel ó en la pizarra, es necesario imprimir un movimiento al lápiz ó al yeso. Cuando durante ese movimiento el punto cambia continuamente de direccion, como en todos los ejemplos de líneas que hasta ahora hemos presentado, la línea se llama *curva*. Cuando el punto que se mueve sigue siempre la misma direccion, la línea se llama *recta*. La mejor representacion de la línea recta, es un hilo perfectamente estirado por ambos extremos, y para trazarla bien sobre el papel ó la pizarra, es necesario hacer correr el lápiz ó el yeso á lo largo del borde de una *regla*.

*Línea curva es la que cambia de direccion en todos sus puntos.*

*Línea recta es la que no cambia de direccion en ninguno de sus puntos.*



La propiedad más esencial de la línea recta, es que no puede ser cortada por otra recta sino en un solo punto. Esto puede comprobarse por medio de dos hilos estirados, los cuales se verá que no pueden cruzarse sino en un solo punto; y para que uno de los dos hilos cruce al otro en más de un punto, es necesario que pierda la tirantez, con lo cual deja de representar una línea recta. Por el contrario, cualquiera línea curva puede ser cortada por una recta, al ménos en dos puntos.

*Dos líneas rectas no pueden cortarse sino en un solo punto.*

Por dos puntos no puede pasar más que una línea recta, segun puede verse estirando un hilo entre dos puntos que hayamos marcado en la pizarrra. Observarémos entónces que el hilo, miéntras esté estirado, solo puede tomar una direccion para pasar por los dos puntos dados, miéntras que aflojando el hilo, esto es, alargándolo, puede pasar por los puntos en muchas posiciones, cada una de las cuales representará una curva. Segun se alargue más el hilo, será mayor la curva que representa, y cuando está perfectamente estirado, medirá la menor distancia que hay entre los dos puntos marcados.

*Por dos puntos pueden pasar muchas curvas, y una sola recta.*

*La distancia menor entre dos puntos es la línea recta.*

---

Cómo puede considerarse la línea? Qué es línea curva? Qué es línea recta? Cuál es la mejor representacion de línea recta? Cómo se traza la línea recta sobre el papel ó la pizarra? En cuantos puntos pueden cortarse dos líneas rectas? En cuántos puntos puede cortar una recta á una curva? Cuántas curvas pueden pasar por dos puntos? Cuántas rectas pueden pasar por dos puntos? Cuál es la menor distancia entre dos puntos?

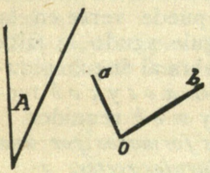
## LECCION TERCERA.

### ÁNGULOS.

Siempre que dos líneas rectas no tienen la misma direccion, se dice que forman *ángulo.* La diferencia entre sus direcciones las hace inclinarse una hácia otra, hasta que por fin se encuentran en un punto llamado *vértiee.* Entónces las dos rectas que forman el ángulo toman el nombre de *lados* del ángulo.

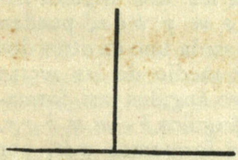
*Angulo es la diferencia de direccion entre dos líneas rectas.*

Los ángulos se distinguen por una letra puesta entre sus dos lados, ó bien por tres letras, una en el vértice y otra en cada uno de los lados. Así se dice el ángulo *A*, ó bien el ángulo *a o b.*



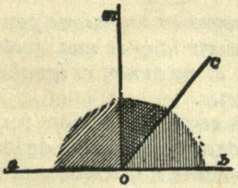

El tamaño de los ángulos no depende del tamaño de sus lados, sino de la mayor ó menor diferencia entre las direcciones de dichos lados. El ángulo *A*, por ejemplo es menor que el ángulo *a o b*, porque sus lados no se separan tanto como los del otro ángulo.

Cuando una recta encuentra á otra en un punto sin cruzarla, farma con ella dos ángulos que se llaman *adyacentes.* Cuando los dos ángulos adyacentes son iguales, como en la figura inmediata, cada uno de ellos se llama un ángulo *recto*, y las dos rectas se llaman *perpendiculares.*



*Una recta es perpendicular á otra cuando los dos ángulos adyacentes que forma con ella son iguales.*

*Angulo recto es el formado por dos reetas perpendiculares.*




Cuando los dos ángulos adyacentes no son iguales el mayor se llama *obtuso*, y el menor *agudo;* y las rectas que lo forman se llaman *oblícuas.* Así la oblícua *c o* forma con *a b* el ángulo agudo *c o b*, y el ángulo obtuso *c o a*. Obsérvese que el ángulo obtuso es mayor que el ángulo recto *m o a*, y que el ángulo agudo es menor que el recto *m o b*. *Una recta es oblícua á otra cuando los dos ángulos adyaecntes que forma con ella no son iguales.*

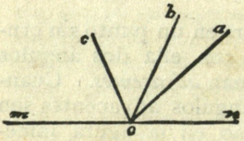
*Angulo obtuso es el mayor que un ángulo recto.*

*Angulo agudo es el menor que un ángulo recto.*

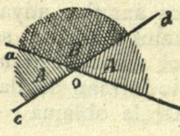
El conjunto ó suma de los dos ángulos adyacentes que forma una recta al caer perpendicularmente sobre otra, es igual á dos ángulos rectos, puesto que cada uno de ellos es un ángulo recto. Cuando la línea que forma los dos ángulos adyacentes es oblícua, el conjunto de ellos es tam bien igual á dos ángulos rectos, segun puede verse en la figura anterior, observando que al ángulo agudo le falta ser igual á un recto lo mismo que le sobra al ángulo obtuso sobre otro ángulo recto. Los ángulos *a o c* y *c o b* reunidos, son iguales á los ángulos *m o a* y *m o b* reunidos.

*La suma de los dos ángulos adyacentes formados por una recta al caer sobre otra, es igual á dos ángulos rectos.*

Dos ángulos adyacentes formados por una recta al caer sobre otra, pueden subdividirse en otros ángulos sin que por esto se altere la suma de los dos primeros. Así los dos ángulos adyacentes *b o m* y *b o n*, pueden susdividirse cada uno en otros dos ángulos por medio de las rectas *c o* y *a o*. El conjunto de los cuatro ángulos así formados, será igual á la suma de los dos ángulos *b o m* y *b o n*. Si en vez de formar cuatro ángulos formamos más, por medio de rectas que vayan todas á encontrarse en el punto *o*, siempre será su conjunto igual al de los ángulos adyacentes *b o m* y *b o n*.




*La suma de todos los ángulos formados en un mismo punto y hácia el mismo lado de una recta que pasa por dicho punto, es igual á dos ángulos rectos.*

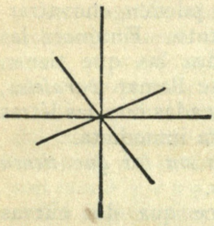



Cuando dos rectas se cruzan, forman cuatro ángulos, cada uno de los cuales es adyacente á otros dos, uno por cada lado, no tocando al último ángulo sino por el vértice. Dos ángulos que ocupan esa posicion, esto es, que están formados por dos rectas que se cruzan y no son adyacentes, se dice que son *opuestos por el vértice.* Tales son *a o d* y *c o b.*

Obsérvese que el ángulo marcado *B* y el ángulo *A* que está á su derecha, son adyacentes, y valen por consiguiente dos ángulos rectos. El mismo ángulo *B*, junto con el ángulo que está á su izquierda y que tambien lleva la letra *A*, vale tambien dos ángulos rectos. De aquí se deduce que ámbos ángulos *A* son iguales, puesto que agregando á cada uno de ellos el ángulo *B*, producen un resultado igual.

*Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

Cuando las dos rectas que se cruzan son perpendiculares, cada uno de los cuatro ángulos que forman es un ángulo recto, y su conjunto ó suma es igual á cuatro ángulos rectos. Lo mismo sucede cuando las dos rectas que se cruzan son oblícuas; basta examinar la figura para comprender que cualquiera que sea la inclinacion de dos rectas al cruzarse, la suma de los cuatro ángulos que forman es igual á cuatro ángulos rectos. Esta suma no se altera por muchos que sean los ángulos formados por rectas que se encuentren ó crucen en un mismo punto.



*La suma de todos los ángulos formados al rededor de un punto, es igual á cuatro ángulos rectos.*

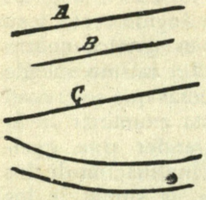
---

Qué es ángulo ? Qué es vértice ? Cómo se llaman las rectas que forman un ángulo ? Cómo se distinguen los ángulos ? De qué depende el tamaño de los ángulos? Cuándo se dice que dos ángulos son adyacentes? Qué son rectas perpendiculares ? Qué son rectas oblícuas ? Qué es ángulo recto ? Qué es ángulo obtuso ? Qué es ángulo agudo ? A qué es igual el conjunto de los dos ángulos adyacentes cuando una recta cae sobre otra? A qué es igual el conjunto ó suma de todos los ángulos formados en un mismo punto hácia el mismo lado de una recta que pasa por dicho punto? Cuántos ángulos forman dos rectas al cruzarse? Cuándo se dice que dos ángulos son opuestos por el vértice? Qué son los ángulos opuestos por el vértice? A qué es igual la suma de los cuatro ángulos que forman dos rectas al cruzarse? A qué es igual la suma de todos los ángulos formados al rededor de un punto?

## LECCION CUARTA

### PARALELAS.

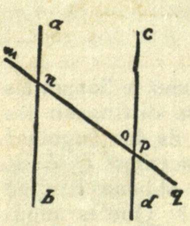
Cuando no hay diferencia entre la direccion de dos rectas, no forman ángulo, y por más que se prolonguen no pueden encontrarse en ningun punto. Entónces las dos rectas y todas las que tienen igual direccion, se llaman *paralelas*, como son las marcadas con las letras $A$ $B$ $C$ en la figura inmediata.




*Rectas paralelas son las que tienen la misma direccion.*

Tambien se dice que dos curvas son paralelas cuando no se encuentran y las separa siempre una distancia igual, como las dos que se ven en la figura. Pero á las curvas que están en ese caso, es preferible llamarlas curvas *concéntricas.*

Cuando una recta corta á dos paralelas, el ángulo que forma al caer sobre la primera es igual al ángulo que forma por el mismo lado, al caer sobre la segunda; porque siendo igual la direccion de las dos paralelas, la diferencia de direccion entre ellas y la recta que las corta, debe ser igual. Así la recta $m$ $q$ que corta á las dos para lelas, $a$ $b$.




y $c$ $d$ forma al caer sobre la primera el ángulo $m$ $n$ $a$ que es igual al ángulo $moc$ que forma del mismo lado con la segunda; porque ámbos ángulos tienen sus lados en la misma dirccion.

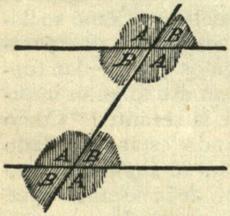
La recta que corta á dos paralelas se llama *secante;* y además de los dos ángulos que forma por cada lado al caer sobre ellas, forma otros dos de cada lado, cada uno de los cuales es adyacente á uno de los cuatro primeros. Véase en la figura que son ocho los ángulos formados por la secante y las dos paralelas.

De los ocho ángulos que forma una secante con dos paralelas, cuatro quedan entre ambas paralelas, y se llaman *internos;* los otros cuatro angulos quedan afuera del espacio comprendido entre las paralelas, y se llaman *externos.* En la figura los ángulos $ano$, $noc$, $nod$ y $onb$, son internos, y los ángulos $mna$, $mnb$, $cpq$ y $qpd$ son externos.

Los ángulos internos que no son adyacentes y quedan del lado opuesto de la secante, se llaman *alternos-internos;* $ano$, y $nod$ son ángulos alternos-internos: tambien lo son $bno$ y $noc$.

Los ángulos externos que no son adyacentes y quedan del lado opuesto de la secante, se llaman *alternos-externos;* $mna$, y $dpq$, son ángulos alternos-externos; tambien lo son $mnb$ y $cpq$.

Un ángulo alterno y otro interno, que no son adyacentes y quedan del mismo lado de la secante, se llaman *correspondientes.* Así los dos angulos $mnb$ y $mod$, son correspondientes; tambien lo son $mna$ y $moc$; $anq$ y $cpq$, y $bnq$ y $dpq$.




Para comprender mejor la relacion que existe entre los ocho ángulos formados por una secante con dos paralelas, obsérvese la figura inmediata. De los cuatro ángulos que quedan á la derecha de la secante, hay dos que hemos marcado con las letras $B$ $B$, los cuales deben ser iguales segun hemos dicho, porque la direccion de sus lados es igual. Dichos ángulos $B$ $B$ son correspondientes, porque uno es alterno y otro interno, y ámbos quedan del mismo lado de la secante.

*Los ángulos correspondientes son iguales.*

El ángulo interno *B* que queda del lado izquierdo de la secante, es igual á los otros dos ángulos *B B*, correspondientes; porque está opuesto por el vértice al ángulo externo *B* de arriba, y como éste es igual á su correspondiente interno *B*, los tres deben ser iguales. Debe observarse que los dos ángulos *B B* que quedan entre las paralelas del lado opuesto de la secante, son alternos-internos.

*Los ángulos alternos-internos son iguales.*

Otro ángulo hay en la figura marcado con la letra *B*. Es el ángulo externo que está á la izquierda por debajo, el cual debe ser igual á su correspondiente *B* situado del mismo lado izquierdo de la secante, y como este es igual al otro ángulo externo *B* que queda á la derecha de la secante, resulta que los tres deben ser iguales. Obsérvese que los dos ángulos externos *B*, por quedar del lado opuesto de la secante, son alternos-externos.

*Los ángulos alternos-externos son iguales.*

Hemos encontrado pues, que los cuatro ángulos marcados con la letra *B*, son iguales. Igualmente podemos observar que los cuatro ángulos marcados con la letra *A*, son iguales.

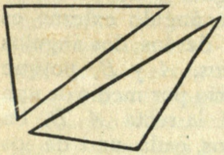
---

Qué son rectas paralelas ? Pueden encontrarse dos paralelas ? Cuándo se dice que dos curvas son paralelas ó concéntricas ? Los dos ángulos formados por una recta, del mismo lado, al caer sobre dos paralelas, qué son ? Cómo se llama la recta que corta á dos paralelas ? Cuántos ángulos forma una recta con dos paralelas ? Cómo se llaman los cuatro ángulos que quedan entre las dos paralelas ? Cómo se llaman los cuatro ángulos que quedan fuera de las dos paralelas ? Cómo se llaman dos ángulos internos cuando estan del lado opuesto de la secante ? Cómo se llaman dos ángulos externos cuando están del lado opuesto de la secante ? Cómo se llaman un ángulo interno y otro externo situados del mismo lado de la secante? Qué son los ángulos correspondientes ? Qué son los ángulos alternos internos ? Qué son los ángulos alterno-externos?

## LECCION QUINTA.

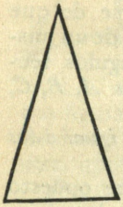
### TRIÁNGULOS.

Si los extremos de las dos rectas que forman un ángulo se unen por medio de una línea recta, se formará una figura cerrada de tres lados, á la cual se llama *triángulo*, por contener tres ángulos, segun se ve en los dos ejemplos de la figura inmediata. Las tres líneas que forman el contorno de un un triángulo se llaman *lados del triángulo.*

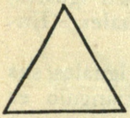


*Triángulo es una figura cuyo contorno está formado por tres líneas rectas.*

Los triángulos se distinguen por medio de letras puestas en los vértices de sus tres ángulos.



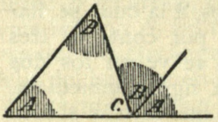
Cuando los tres lados de un triángulo son desiguales, como en los dos anteriores, el triángulo se llama *escaleno.* Cuando dos de los lados son iguales entre sí, segun se ve en el ejemplo inmediato, el triángulo se llama *isósceles.* Por último, cuando los tres lados son iguales entre sí, el triángulo se llama *equilátero*, y presenta entónces la apariencia regular que puede verse en la figura. En todo triángulo se verifica que la suma de dos lados es mayor que el otro lado; porque siendo una línea recta la menor distancia entre dos puntos, cualquiera de los tres lados medirá la menor distancia entre los dos vértices de sus extremos y será por consiguiente menor que los otros dos lados reunidos.



*La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercer lado.*

Tambien los triángulos toman diversos nombres segun sean los ángulos que lo forman. Si sus tres ángulos son agudos, el triángulo se llama *acutángulo.* Si uno de sus ángulos es recto, el triángulo se llama *rectángulo.* Por último, si uno de sus ángulos es obtuso, el triángulo se llama *obstusángulo.*

Los tres ángulos de un triángulo unidos, son iguales á dos ángulos rectos. Para convencernos de ello, prolonguemos uno de los lados de un triángulo, con lo cual formarémos un ángulo externo al triángulo y adyacente al ángulo *C*. Ese ángulo externo es igual á la suma de los dos ángulos internos opuestos, *A* y *B*; porque podemos dividirlo por medio de una recta paralela á la recta *A B*, en otros dos ángulos, cada uno de los cuales es igual á uno de los internos opuestos. Obsérvese, en efecto, que los dos ángulos marcados *A*, son *correspondientes*, y por tanto iguales; así como los dos ángulos marcados *B*, son tambien iguales por ser *alternos-internos.* Fácil es, pues, convencerse de que si los ángulos *A*, *B*, *C*, formados en el punto *C* de un mismo lado de la recta *A*, *C*, son iguales á dos ángulos rectos, tambien lo será la suma de los tres ángulos *A*, *B*, *C*, que forman el triángulo.



*La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.*

El ángulo mayor de un triángulo está siempre opuesto al mayor lado, como puede observarse en todos los ejemplos de triángulos que hemos presentado; é igualmente, al mayor lado se opone siempre el mayor ángulo.

Cuando dos de los ángulos de un triángulo son iguales, los dos lados opuestos á ellos son tambien iguales. Entónces el triángulo es *isósceles.*

Cuando los tres ángulos de un triángulo son iguales, sus tres lados son tambien iguales. Entónces el triángulo es *equilátero.*

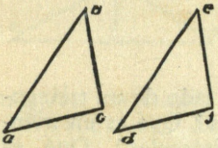
Un triángulo rectángulo puede ser *isósceles.* En tal caso siendo recto el mayor de sus ángulos, cada uno de los otros dos es igual á medio ángulo recto, á fin de que la suma de los tres sea igual á dos ángulos rectos.

Un triángulo obtusángulo tambien puede ser *isósceles.* En tal caso los dos lados iguales son los que forman el ángulo obtuso.

Un triángulo *equilátero* no puede ser sino *acutángulo;* porque para que sus tres ángulos sean iguales y valgan juntos dos rectos, es necesario que cada uno de ellos sea menor que un recto.

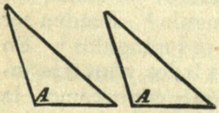
Dos triángulos iguales entre sí tienen iguales sus tres lados y sus ángulos; pero no es necesario que conozcamos todos los lados y ángulos de dos triángulos para saber si son iguales ó no. Basta conocer que tienen iguales tres de sus partes, entre lados y ángulos, para poder asegurar que dos triángulos son iguales.

Cuando sabemos que los tres lados de un triángulo son iguales á los tres lados de otro triángulo, entónces podemos asegurar que los dos triángulos son iguales entre sí; esto es, si en los dos triángulos de la figura inmediata se verifica que el lado *a b* es igual al lado *d e*, al lado *a c*, igual al lado *d f*, y el lado *b c*, igual al lado *e f*, ámbos triángulos son iguales; porque entónces el contorno de ámbas figuras será igual en forma y de la misma dimension; de modo que podriamos colocar á un triángulo encima del otro. quedando confundidos en uno solo.




*Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados iguales.*

Cuando dos lados de un triángulo son iguales á dos lados de otro triángulo, y los ángulos comprendidos por dichos lados son iguales entre sí, entónces los dos triángulos son iguales uno á otro. Porque siendo iguales los dos ángulos *A*, é iguales entre sí los lados que lo forman, ámbos triángulos podrian ponerse uno encima de otro, de modo que se confundan. Tambien se verifica la igualdad de los dos triángulos cuando alguno de los lados iguales entre sí se opone en ámbos triángulos al ángulo igual.




*Dos triángulos son iguales cuando tienen un ángulo igual y dos lados iguales colocados en igual situacion.*

Cuando dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro y hay además en cada uno de los triángulos un lado igual, colocado en situacion igual, entónces los dos triángulos son iguales, porque el tercer ángulo de cada tríángulo tambien será igual al tercero del otro triángulo, y bastará que tengan además un lado igual para que los dos triángulos puedan superponerse y confundirse uno con otro.

*Dos triángulos son iguales cuando tienen dos ángulos iguales y un lado igual colocado en situacion igual.*

Para que dos triángulos sean iguales no basta que sus tres ángulos sean iguales respectivamente; es necesario que tengan por lo ménos un lado igual.

---

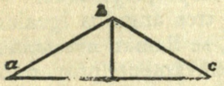
Qué es triángulo? A qué se llama lado de un triángulo? Cómo se distinguen los triángulos? Qué es un triángulo escaleno? Qué es triángulo isósceles? Qué es triángulo equilátero? La suma de dos lados de un triángulo es igual, mayor ó menor que el tercer lado? Qué es triángulo acutángulo? Qué es triángulo rectángulo? Qué es triángulo obtusángulo? A qué es igual la suma de los tres ángulos de un triángulo? Qué posicion respectiva ocupan el mayor lado y el mayor ángulo de un triángulo? Cuando en un triángulo hay dos ángulos iguales, qué es el triángulo, escaleno, ísósceles ó equilátero? Cuando los tres ángulos son iguales, qué es el triángulo? Pueden ser isósceles los triángulos rectángulos y obtusángulos? En dos triángulos iguales, qué son los tres lados y los tres ángulos de cada uno? Es necesario que conozcamos la igualdad de los tres lados y los tres ángulos de dos triángulos para saber si ámbos triángulos son iguales? Cuando dos triángulos tienen sus tres lados iguales, qué son? Cuando dos triángulos tienen un ángulo igual y dos lados iguales colocados en situacion igual, qué son? Cuando dos triángulos tienen dos ángulos iguales y un lado igual, colocado en situacion igual, qué son? Para que dos triángulos sean iguales, basta que tengan sus tres ángulos iguales?

# LECCION SESTA.

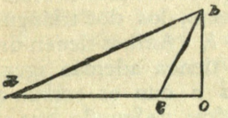
## MÁS SOBRE TRIÁNGULOS.

Ya sabemos que se llama triángulo rectángulo á aquel que tiene un ángulo recto, en cuyo caso sus otros dos ángulos son agudos. El lado opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa;* y los otros dos lados, *catetos.*

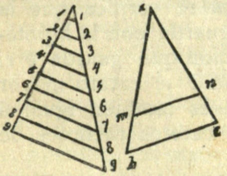
Todo triángulo puede subdividirse en dos triángulos rectángulos por medio de una perpendicular tirada á su mayor lado desde el vértice del ángulo opuesto. Cualquiera que sea la forma del triángulo *a b c*, podrá siempre subdividirse en los dos triángulos rectángulos como *a b o* y *b o c*.




En el exterior de un triángulo obtusángulo se puede siempre imaginar un triángulo rectángulo tal, que entre ámbos compongan otro triángulo rectángulo, igual á la suma de los dos. Así en el triángulo obtusángulo *a b c*, podemos prolongar el lado *a c* hasta que encuentre en *o* á la perpendicular *b o* tirada desde el vértice *b*, sobre dicha prolongacion. De ese modo se formará el triángulo rectángulo *b o c*, que unido al triángulo obtusángulo *a b c*, forma el triángulo rectángulo *a b o*.




Si un lado de un triángulo se divide en partes iguales, y por los puntos de division se tiran paralelas á uno de los otros dos lados, dichas paralelas dividirán el tercer lado en iguál número de partes iguales. Esto es, si se divide en nueve partes iguales uno de los lados, el lado al cual van á encontrar las paralelas tiradas al otro lado quedará dividido en otras nueve partes iguales entre sí.

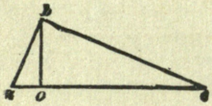



Si en un triángulo tiramos una recta paralela á uno de los lados, dicha paralela dividirá á los otros dos lados en partes proporcionales. Esto es, si en un triángulo tal como *a b c*, se tira la recta *m n*, paralela á *b c*, se verificará que *a m*, guarda con *a b*, la misma proporcion que *a n* con *a c;* si, por ejemplo, *a m* es igual á dos terceras partes de *a b*, entónces *a n*, será igual á otras dos terceras partes de *a c*. Del mismo modo se verifica que *m b* guarda con *a b* la misma proporcion que *n c* con *a c;* y *a m* guarda con *m b* la misma proporcion que *a n* con *n c*.

*En todo triángulo si se tira una paralela á uno de los lados, dividirá los otros dos lados en partes proporcionales.*

Cuando dos triángulos tienen sus tres ángulos iguales, sin tener igual ninguno de sus lados, se llaman *semejantes.* En ese caso, sus tres lados son respectivamente proporcionales.

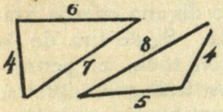
Sea, por ejemplo, el triángulo rectángulo *a b c*, el cual segun hemos dicho, puede subdividirse en otros dos triángulos rectángulos, por medio de la perpendicular *b o*. Cada uno de los dos triángulos rectángulos menores es semejante al mayor. Comparemos en efecto, los dos triángulos *a b c* y *a o b*. Ambos tienen un ángulo recto y tienen además igual el ángulo *b a o* que es comun á ámbos triángulos; de modo que el tercer ángulo *b c a* del triángulo mayor tiene que ser tambien igual al tescer ángulo *a b o*, del triángulo menor, para que se verifique la verdad demostrada de que en todo triángulo los tres ángulos sumados valen dos rectos. Los dos triángulos que consideramos, tienen pues sus tres ángulos iguales y en tal concepto son semejantes, debiendo tener sus lados proporcionales. Esto es, en ellos se verifica que la hipotenusa *a c* del mayor triángulo, guarda con la hipotenusa *a b* del menor la misma proporcion que guarda *b c*, cateto mayor del triángulo mayor con *b o*, cateto mayor del triángulo menor; proporcion que es tambien igual á á la que guardan entre sí *a b* y *a o*. catetos menores de ámbos triángulos.




Del mismo modo puede verificarse que los ángulos del triángulo *b o c*, son iguales á los del triángulo *a b c* y por consiguiente á los del otro triángulo *a o b:* resultando de aquí que los tres triángulos son semejantes, y que sus lados son respectivamente proporcionales.

*Los triángulos semejantes tienen sus lados respectivamente proporcionales.*

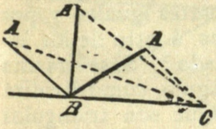
Hemos visto, pues, que dos triángulos, cuando tienen sus tres ángulos iguales, pueden ser iguales ó semejantes. Tambien debemos considerar el caso en que la suma de sus lados sea igual. Entónces los triángulos se llaman *isoperímetros*, como son los dos de la figura inmediata, al lado de cuyos lados va expresa la longitud que tienen, que podemos considerar pulgadas ó cualquiera otra unidad. La suma de los lados en el primer triángulo es $4 + 6 + 7 = 17$ y en el segundo $8 + 4 + 5 = 17$.




*Se llama perímetro de un triángulo la suma de sus lados.*

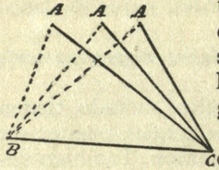
*Dos triángulos son isoperímetros cuando sus perímetros son iguales.*

Si un lado de un triángulo crece ó mengua á medida que se abre ó cierra el ángulo que le está opuesto, el triángulo será mayor cuando dicho ángulo sea recto. Así, si los lados *A B* y *B C* no pueden cambiar de magnitud y si *A C* puede acortarse ó alargarse, como una cuerda de goma, segun cambiemos la magnitud del ángulo *B* entónces el triángulo será mayor cuando el ángulo *B* sea recto.

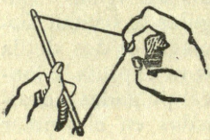



Esto puede demostrarse prácticamente apoyando contra el borde de una mesa dos varillas que se puedan abrir ó cerrar á voluntad. Cuando el ángulo que forman entre sí las dos varillas sea recto entónces el triángulo formada por ellas con el borde de la mesa será mayor que en cualquiera otra abertura de las varillas.

Si un lado de un triángulo no puede cambiar de tamaño, miéntras los otros dos cambian de tal modo que el ángulo se conserva siempre isoperímetro, será mayor el triángulo cuando los dos lados cambiables sean de igual tamaño. Es decir, si el lado *B C* no puede cambiar de tamaño, y los lados *A B* y *A C* pueden variar de modo que su suma sea siempre la misma, cuando estos dos lados sean iguales, será mayor el triángulo.




Puede darse una ilustracion práctica de esto, por medio de una cuerda atada á los dos extremos de una varilla. Si se tira de la cuerda recorriéndola toda, el perímetro de los diversos triángulos que se marquen nunca será mayor ni menor que la suma del tamaño de la cuerda y la varilla; pero el triángulo será mayor cuando los dos lados de la cuerda sean iguales.



---

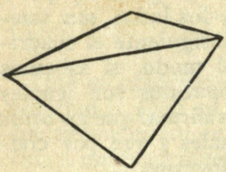
Qué es *hipotenusa* ? Qué son *catetos*? Cómo pueden subdividirse todos los triángulos ? Qué puede construirse siempre en el exterior de un triángulo obtusángulo ? Si un lado de un triángulo se divide en partes iguales y por los puntos de division se tiran paralelas á otro de los lados, cómo quedará dividido el tercer lado ? Si se tira una paralela á uno de los lados de un triángulo, cómo dividirá esa paralela á los otros dos lados ? Qué son triángulos semejantes ? Los lados de triángulos semejantes qué son ? Qué son triángulos isoperímetros ? Qué es perímetro de un triángulo ? De varios triángulos que tienen dos lados iguáles, cuál es el mayor ? De varios triángulos isoperímetros, cuál es el mayor ?

## LECCION SÉTIMA.

### CUADRILÁTEROS.

Llámase cuadrilátero á una figura formada por cuatro líneas rectas. Tiene por consiguiente cuatro ángulos internos, como se ve en la figura de al lado.

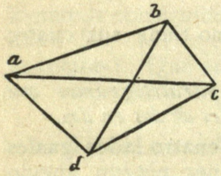
Si se unen por una línea recta los vértices de dos ángulos opuestos de un cuadrilátero, dicha línea se llama *diagonal*.



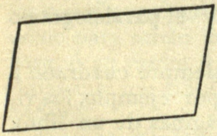
Las diagonales dividen á los cuadriláteros en dos triángulos; y en cada cuadrilátero pueden trazarse dos diagonales. La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero, es igual á cuatro ángulos rectos, porque puede dividirse la figura en dos triángulos, en cada uno de los cuales se verifica que la suma de los tres ángulos es igual á dos ángulos rectos, y por consiguiente, el conjunto de los ángulos de los dos triángulos, ó séase los ángulos del cuadrilátero total, tiene que ser igual á cuatro ángulos rectos.

*La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero, es igual á cuatro ángulos rectos.*

Hemos visto en la leccion anterior que la figura de un triángulo puede variarse, con tal que se haga variar la dimension de alguno de sus lados; pero en un cuadrilátero puede variarse su figura sin alterar la dimension de ninguno de sus lados. Véase en efecto que si los vértices *b* y *d* se alejan uno de otro y los vértices *a* y *c* se acercan entre sí, podrá alterarse el aspecto general del cuadrilátero, sin que por esto crezcan ni mengüen sus lados *a d*, *a b*, *b c* y *c d*.




Cuando un cuadrilátero tiene sus lados paralelos dos á dos, se llama *paralelógramo;* y entónces se verifica que sus ángulos opuestos son iguales respectivamente.



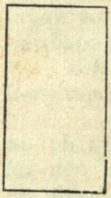
*En todo paralelógramo los ángulos opuestos son iguales.*

La diagonal de un paralelógramo divide á éste en dos triángulos exactamente iguales; de donde resulta que los lados opuestos tienen que ser iguales, respectivamente.

*En todo paralelógramo los lados opuestos son iguales.*

De aquí resulta, que si tenemos un cuadrilátero del cual sabemos que dos lados opuestos son iguales y paralelos, podemos asegurar que los otros dos lados son tambien iguales y paralelos, y que por consiguiente el cuadrilátero es un paralelógramo. De igual modo, si sabemos que en un cuadrilátero dos ángulos opuestos son iguales y dos de sus lados paralelos, podemos afirmar que los otros dos ángulos opuestos son tambien iguales y que por consiguiente el cuadrilátero es un paralelógramo.

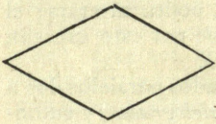
La figura de un paralelógramo puede alterarse, no solo conservando igual tamaño de sus lados, sino tambien conservándose estos paralelos respectivamente. Cuando dos de los ángulos opuestos se vuelven más agudos, el paralelógramo es menor; y por el contrario, cuando un paralelógramo sin cambiar el tamaño de sus lados, varia de modo que alguno de sus ángulos se acerque á un ángulo recto, el paralelógramo es mayor.



Cuando un paralelógramo tiene sus cuatro ángulos rectos se llama *rectángulo.*

*El rectángulo es el mayor de todos los paralelógramos que se pueden formar con cuatro lados iguales de dos en dos.*

Cuando un paralelógramo tiene sus cuatro lados iguales entre sí, sin tener ningun ángulo recto, se llama *rombo.*



Cuando un paralelógramo tiene sus cuatro lados iguales entre sí, y alguno de sus ángulos es recto, entónces sus otros tres ángulos son tambien rectos, y el paralelógramo toma el nombre de *cuadrado.*

En el lenguaje vulgar se llama casi siempre cuadrado á todo paralelógramo, como por ejemplo, los vidrios de una ventana, las páginas de un libro, la tabla de una mesa, etc. Pero en geometría, y tambien en sus conversaciones habituales, deben acostumbrarse los niños á no dar el

nombre de cuadrados, sino á aquellos objetos que en realidadad lo sean, esto es, cuando su forma sea la de un rectángulo en que todos los lados son iguales.

---

Qué es cuadrilátero? Cuántos ángulos tiene un cuadrilátero? Qué es diagonal? Cuántas diagonales pueden tirarse en un cuadrilátero? Una diagonal en que divide á un cuadrilátero? A qué es igual la suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero? Para variar la figura de un cuadrilátero, es necesario que varie el tamaño de sus lados? Qué es paralelógramo? Los ángulos opuestos en un paralelógramo, qué son? Los dos triángulos formados en un paralelógramo por una diagonal, qué son? Los dos lados opuestos en un paralelógramo, qué son? Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos, qué es el cuadrilátero? Si dos ángulos opuestos de un cuadrilátero son iguales, y dos de sus lados paralelos entre sí, que es el cuadrilátero? Entre todos los paralelógramos construidos con lados respectivamente iguales dos á dos, cuál es el mayor? Qué es rectángulo? Qué es rombo? Qué es cuadrado?

## LECCION OCTAVA.

### MEDIDA DE CUADRILÁTEROS Y TRIÁNGULOS.

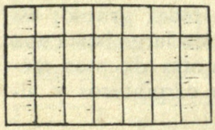
Hemos dicho que cuando los cuatro lados de un rectángulo son iguales entre sí, la figura se llama un cuadrado. Los cuadrados sirven para medir el tamaño de todas las cosas que tienen largo y ancho sin tener grueso; así como para medir las cosas que solo tienen largo basta una vara, ó un metro ó un pié, ó cualquiera otra de esas medidas que los niños han visto usar á los carpinteros y albañiles.

Pero un cuadro, por ejemplo, un suelo, ó la tabla de una mesa no pueden medirse sino por medio de cuadrados. Cuando el tapicero dice que para alfombrar la sala se necesitan tantos piés cuadrados de tela, da á entender que esa tela podria cortarse en pedazos cuadrados, cada uno de los cuales tuviese un pié de largo por cada lado, y el número de los cuadraditos que se formarian sería igual al número de piés cuadrados que tendrá la alfombra de la sala, sin romperla. Cuando un hombre dice que el patio de su casa tiene tantas varas cuadradas, quiere decir que el terreno puede divirse en otros tantos pedazos, iguales cada uno á una vara cuadrada; esto es, á un cuadrado cada uno de cuyos lados es igual á una vara. Lo mismo puede decirse respecto de la tabla de una mesa, que tiene precisamente tantas pulgadas cuadradas, como seria el número de pedazos en que se podria cortar, siendo cada uno de esos pedazos un cuadrado de una pulgada de largo por cada lado

Ahora bien, cómo se hace el cálculo de los piés cuadrados que tiene la alfombra, las varas cuadradas que encierra el patio, y las pulgadas cuadradas de la tabla de la mesa, sin necesidad de romper ni dividir ninguno de esos objetos?

De un modo muy sencillo, cuando la figura que tienen es la de un rectángulo. Basta para ello aplicar el pié, la vara, ó la pulgada, á uno de los lados del rectángulo y ver cuántas veces está contenida en él; y aplicar despues la misma medida al otro lado del rectángulo apuntando tambien el número de veces que la contiene. Multiplicando esos dos números, esto es, las cantidades que denotan el largo de cada uno de los dos lados, tendrémos que el producto será igual al número de cuadrados que caben en el rectángulo.

Para ver más claro ésto, supongamos que la medida de que hacemos uso, (sea pié, metro ó pulgada) cabe siete veces en el lado largo del rectángulo y cuatro veces en el pequeño. El producto de 7 por 4 es 28. Podemos pues asegurar que el rectángulo contiene 28 piés, metros ó pulgadas cuadradas.

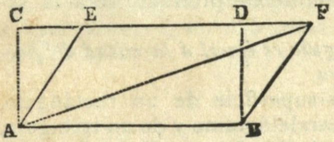


En efecto, si por cada uno de los puntos de vivision marcados en los dos lados tiramos paralelas á dichos lados, como indica la figura, verémos que se formarian 28 cuadrados de igual tamaño, cuyo conjunto es igual al del rectángulo total.

*Se llama superficie la medida del tamaño de los objetos que tienen largo y ancho sin tener grueso.*

*La superficie de un rectángulo es igual al producto del tamaño de uno de sus lados por otro.*

Cuando la figura que ha de medirse es un paralelógramo cualquiera, se halla su superficie lo mismo que si fuera un rectángulo. En efecto, todo paralelógramo es igual á un rectángulo construido sobre uno de sus lados, tirando por la extremidad de dicho lado perpendiculares que vayan á encontrar al lado opuesto ó á su prolongacion. Véase el paralelógramo A B F E de la figura; tírense por los dos extremos de su lado A B perpendiculares que vayan á encontrar al lado opuesto E F, y se tendrá el rectángulo A B D C, exactamente igual al paralelógramo A B F E. Ahora bien, la superficie de ese rectángulo se mide multiplicando el lado A B que es lo que se llama su *base*, por el lado B D que se llama su *altura;* y del mismo modo la superficie del paralelógramo A B F E es igual al producto de A B, su *base*, por la perpendicular B D tirada desde su base hasta el lado opuesto, y que tambien se llama *altura.*



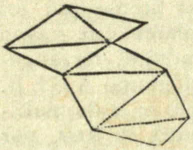

*La superficie de un paralelógramo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Cuando la figura que queremos medir es un triángulo, tambien podremos emplear una multiplicacion para hallar su superficie. Recuérdese que en la anterior leccion hemos visto que todo paralelógramo puede dividirse, por medio de su diagonal, en dos triángulos iguales. De eso tambien podremos convencernos observando la figura anterior en la cual se nota que la diagonal A F divide al paralelógramo en dos triángulos que tienen sus tres lados iguales. De modo que la superficie de uno de estos triángulos es igual á la mitad de la superficie del paralelógramo. Observemos tambien que cualquier triángulo puede considerarse como la mitad de un paralelógramo, dos de cuyos lados son dos lados del triángulo, y los otros dos lados paralelas tiradas á éstos desde los vértices correspondientes; en cuyo caso el tercer lado del triángulo viene á formar la diagonal del paralelógramo, segun podemos convencernos trazando un triángulo cualquiera y tirando por dos de sus vértices paralelas á sus lados opuestos.

Hecha esta observacion, fácil es comprender que para averiguar la superficie de un triángulo basta multiplicar su *base*, que puede ser cualquiera de sus lados, por su *altura*, que es la perpendicular bajada sobre la base desde el vértice opuesto; y la *mitad* de ese producto será la superficie del triángulo.

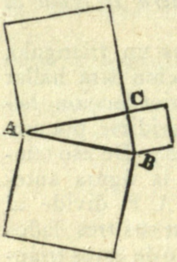
*La superficie de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

Sabiendo ya encontrar la superficie de un rectángulo, de un paralelógramo y de un triángulo, fácil es hallar la superficie de todas las figuras terminadas por líneas rectas, porque cualquiera que sea su forma, siempre se podrá descomponer en triángulos por medio de diagonales, segun indica el ejemplo de la figura inmediata.



La suma de las superficies de todos los triángulos que así se forman, será igual á la superficie de la figura total.

Los tres lados de un triángulo rectángulo guardan entre sí una relacion muy importante. Tal es, que si construimos tres cuadrados que tengan por lado respectivamente los tres lados del triángulo, se verificará que el cuadrado mayor, aquel cuyo lado es igual á la hipotenusa, será igual á la suma de los cuadrados menores, cuyos lados son los catetos del triángulo. En otras palabras, si la hipotenusa tiene de largo 5 pulgadas, un cateto 4 y otro 3, se verificará que la superficie del cuadrado mayor será igual á $5 \times 5 = 25$, y la superficie de los otros dos cuadrados serán respectivamente iguales á 16 y á 9. Sumando estos dos últimos números se verá que forman 25.



No hay para los niños mejor medio de convencerse de esta verdad que trazar cuidadosamente, con la escuadra ó por cualquier otro medio que sepan, un triángulo rectángulo y medir con exactitud sus lados, usando al efecto una medida pequeña, como milímetros, por ejemplo, á fin de llegar á la mayor exactitud posible. Multiplíquese despues cada uno de estos números por sí mismo, que es lo que tambien se llama en aritmética *hallar el cuadrado* de un número, y se verá que el producto mayor, esto es, el cuadrado de la hipotenusa, es igual á la suma de los productos menores, ó sean los cuadrados de los catetos. *En todo triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados constuidos sobre los catetos.*

---

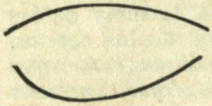
Por medio de qué se mide el tamaño de las cosas que tienen largo y ancho, sin tener grueso? Qué se da á entender cuando se dice que un objeto tiene tantos metros, piés ó pulgadas cuadradas? Cómo se halla el tamaño de un rectángulo? A qué se llama superficie? Qué es base de un rectángulo y de un paralelógramo? Qué es altura de un rectángulo? Qué es altura de un paralelógramo? A qué es igual la superficie de un paralelógramo? Qué es base de un triángulo? Qué es altura de un triángulo? A qué es igual la superficie de un triángulo? Cómo se halla la superficie de una figura cualquiera de lados rectilíneos? Qué relacion existe entre los cuadrados formados sobre los tres lados de un triángulo rectángulo?

## LECCION NOVENA.

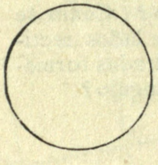
### EL CÍRCULO.

Hasta ahora hemos considerado la línea recta y los ángulos y figuras que pueden formarse con líneas rectas. Tiempo es ya de estudiar alguna línea curva, nombre que se da, segun dijimos en nuestra segunda leccion, á todas las líneas cuyos puntos no están todos en la misma direccion.

Para formarnos mejor idea de lo que es una línea curva, y en que se diferencia de la línea recta, supongamos que un niño marcha llevando en una mano una vara ó baston cuya punta toca al suelo y va marcando una raya sobre la arena. Si el niño camina de frente, en direccion á un objeto dado y sin desviarse á derecha ni á izquierda, la punta de la vara trazará en la arena una linea. Si por el contrario, el niño tuerce su marcha á un lado ú otro, sin movimientos bruscos, la punta de la vara irá trazando una línea curva, la cual puede variar de forma, hasta lo infinito, segun sea la rapidez ó frecuencia con que el niño cambie de direccion en su movimiento; siempre bien entendido que los pasos han de irse indicando gradualmente á un lado y otro, sin saltos bruscos, pues de otro modo lo que trazaría la punta de la vara sería una sucesion de pequeñas líneas rectas ó curvas, formando ángulos y esquinas hácia todos lados, en vez de un trazo regular y contínuo, que es en lo que consiste una verdadera línea curva.



Si al moverse el niño da la vuelta á un objeto cualquiera, por ejemplo, un árbol, tratando de regresar al mismo punto de que partió, trazará con su vara una curva cerrada que comprenderá un cierto espacio de terreno en torno al árbol. Y si al efectuar ese giro ó vuelta logra el niño permanecer siempre á igual distancia del árbol, entónces la curva trazada por la vara, además de ser cerrada, tendrá una figura enteramente regular debido á que todos sus puntos están á igual distancia del árbol ó punto céntrico al rededor del cual se hace el giro.



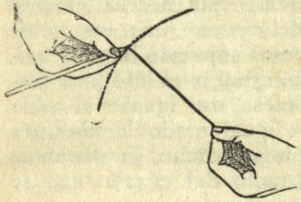
*Llámase circunferencia de círculo la curva cerrada cuyos puntos están todos á igual distancia de otro punto situado en su interior.*

*Se da el nombre de círculo al espacio encerrado dentro de una circunferencia; y algunas veces se llama así tambien á la misma circunferencia.*

*Llámase centro el punto situado en el medio de un círculo, del cual distan igualmente todos los puntos de la circunferencia.*

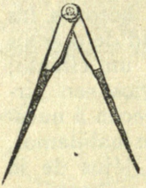
La figura circular, es la más general en las obras de los hombres, despues de la del rectángulo. Los botones, las ruedas, las monedas, los platos y otra multitud de objetos que seria largo enumerar, tienen la figura de un círculo; al paso que la mayor parte de las obras de Dios son circulares. El Sol, la Luna y las estrellas, aparecen á nuestra vista como círculos. La misma tierra que habitamos, si la observamos desde un buque en el mar, léjos de la costa, ó bien en tierra en parajes llanos, nos presenta un círculo por todo el horizonte. Las ondas que forma el agua cuando cae en ella una piedra, son circulares. Los botones de las plantas, los ojos de los animales y hasta muchos animales y plantas mismas tienen forma circular.

Trazar un círculo es tan fácil como trazar una recta, sirviéndose al efecto de medios ó instrumentos adecuados. Si el niño que hemos supuesto giraba en torno al árbol hubiese llevado en una mano la extremidad de una cuerda atada por el otro extremo del árbol, procurando tener siempre tendida dicha cuerda, es evidente que la curva trazada en el suelo por la punta de la vara seria un círculo perfecto. Siguiendo un sistema análogo puede trazarse un círculo sobre una mesa ó sobre otro cualquier cuerpo liso teniendo fijo con una mano en un punto dado la extremidad de un hilo ó de una cuerda, miéntras con la otra mano se mueve un lápiz amarrado á la otra punta del hilo, segun indica claramente la figura.



Los niños suelen trazar en sus pizarras los círculos que necesitan para sus estudios geométricos, apoyando con fuerza el dedo pequeño en el punto que ha de servir de centro. y haciendo girar la mano, con cuyo movimiento el yeso ó lápiz que sostienen entre los dedos pulgar é indice va trazando un círculo.

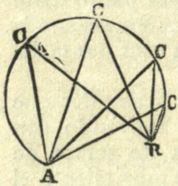
Pero hay un instrumento para trazar círculos con la posible perfeccion, el cual deben conocerlo ya todos los niños que leen mis lecciones. Es el *compás*, cuyas piernas se abren y cierran, á modo de tijeras, sirviendo ya para medir la distancia que hay de un punto á otro, ya para trazar círculos fijando la punta de una de dichas piernas en el lugar que ha de servir de centro, miéntras la otra pierna, girando en torno, marca con su punta la circunferencia. Los compases, por lo general, tienen la mitad de una de sus piernas solamente sostenida por un tornillo al resto de la pierna; de modo que con facilidad puede separarse dicha punta para ser sustituida con otra que lleva un lápiz y puede por lo tanto al moverse ir dibujando en el papel ó la pizarra la circunferencia que traza.



Dentro de un círculo pueden trazarse muchas rectas desde el centro á la circunferencia y que necesariamente son iguales. Se llaman *radios* del círculo. En los ejemplos anteriores la cuerda que hemos supuesto llevaba tendida el niño al girar en torno del árbol, y el hilo para trazar una circunferencia sobre la mesa, son iguales al radio de los respectivos círculos. De igual modo la abertura de las piernas de un compás, ó mejor dicho, la distancia entre sus dos puntas es igual al radio del círculo que se trae con dicha abertura.

*Llámase radio de un círculo toda línea trazada desde el centro á la circunferencia.*

*Todos los radios de un mismo círculo son iguales.*

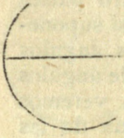



Una parte cualquiera de la circunferencia de un círculo se llama *arco*. La recta que une los dos extremos de un arco se llama cuerda. En la figura inmediata están marcadas las diversas cuerdas A C y B C con sus arcos correspondientes, por donde se observará que cuanto mayor es el arco tanto mayor es la cuerda que le corresponde.

*En un mismo círculo, arcos iguales tienen iguales cuer-*

*das y las cuerdas mayores corresponden á arcos menores.*

Si la cuerda pasa por el centro del círculo, entónces es igual á dos radios uno á continuacion de otro por cuya razon se llama diámetro. Fácil es observar que no es posible trazar ninguna cuerda mayor que el diámetro, y que los dos arcos en que el diámetro divide á la circunferencia total son iguales, puesto que tienen la misma cuerda.



*El diámetro es la cuerda mayor.*

*El diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales.*

---

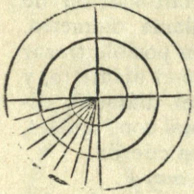
Qué es circunferencia de un círculo? Qué es círculo? Qué es centro de un círculo? Cómo se traza un círculo? Cómo se usa el compás? Qué es radio? Los radios de un círculo, qué son? Qué es arco? Qué es cuerda? Qué son las cuerdas de arcos iguales? Segun sean mayores los arcos, cómo serán las cuerdas? Qué es diámetro? Hay cuerdas mayores que el diámetro? Cómo divide el diámetro á la circunferencia.

## LECCION DÉCIMA.

### MEDIDA DE LOS ÁNGULOS.

Por medio de la circunferencia del círculo puede medirse el tamaño de los ángulos, tan exactamente como puede medirse una línea recta por medio de una regla marcada con piés, centímetros ó pulgadas.

Por el centro de un círculo cualquiera, hagamos pasar dos líneas perpendiculares entre sí, las cuales forman cuatro ángulos rectos, segun hemos visto en una leccion anterior. Cada uno de estos cuatro ángulos rectos comprende entre sus lados un arco exactamente igual á los otros tres, y que se llama cuadrante porque es la cuarta parte de la circunferencia. Si consideramos otros círculos trazados desde el mismo centro con radios mayores ó menores que el anterior, se verá que en todos casos las dos rectas, esto es, los dos diámetros perpendiculares, dividen á las respectivas circunferencias en cuatro partes iguales. Del mismo modo, si suponemos dividido uno de dichos ángulos rectos en un cierto número de ángulos iguales, por ejemplo, ocho, veremos que el cuadrante de cada una de las circunferencias trazadas desde el mismo centro quedará dividido en igual número de arcos iguales; lo cual prueba que existe siempre relacion en la apertura de los lados de un ángulo, ó sea el tamaño del ángulo, y el tamaño del arco de circunferencia trazado desde su vértice como centro, cualquiera que sea el tamaño del rádio con que se trace dicho arco.



*Los ángulos son mayores ó menores segun sean mayores ó menores los arcos trazados con un mismo rádio entre sus lados, desde su vértice como centro.*

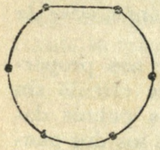
*La dimension del arco comprendido entre sus lados, es lo que se llama medida de un ángulo.*

*El ángulo recto tiene por medida la cuarta parte de la circunferencia.*

Para facilitar la medida de los ángulos se supone dividido el ángulo recto, cuyo arco es igual á la cuarta parte de la circunferencia, en *noventa* arcos iguales que reciben el nombre de *grados*, de modo que á la mitad de la circunferencia, ó sea al arco que comprende dos ángulos rectos y cuya cuerda es un diámetro, corresponden 180 grados; y á la circunferencia entera corresponden 360 grados.

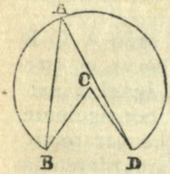
De lo que acabamos de ver se deduce que entre los tres ángulos de un triángulo componen 180 grados; porque este número de grados corresponde á dos ángulos rectos, y entre los tres del triángulo forman dos rectos. Así, si el triángulo que consideramos es rectángulo, podemos asegurar que la suma de los dos ángulos agudos es igual á 90 grados y si además de rectángulo, el triángulo es isósceles, sabremos con seguridad que cada uno de los dos ángulos agudos es igual á 45 grados.

Si dividimos la circunferencia en un cierto número de partes iguales, podemos saber el número de grados que corresponden á cada uno de los arcos así formados, dividiendo 360 por el número de los arcos. Así, por ejemplo, si dividimos en seis partes iguales una circunferencia, sabremos desde luego que cada uno de los pequeños arcos marcado por las divisiones es igual á la sexta parte de 360, esto es, á 60 grados. Una propiedad notable tiene la cuerda correspondiente al arco de 60 grados y es el ser igual al rádio con que se traza la circunferencia.

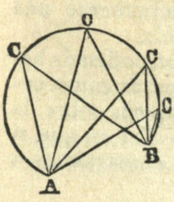


*El rádio de todo círculo es igual á la cuerda de un arco de sesenta grados, y por su tamaño puede dividirse en seis partes iguales la circunferencia.*

Si en vez de suponer el vértice de un ángulo en el centro de un círculo, lo suponemos en un punto cualquiera de la circunferencia, como el ángulo B A D, entónces el número de grados que contiene el arco comprendido entre sus lados no expresa ya con exactitud la medida del ángulo. Estos solo pueden medirse por medio del arco trazado desde su centro. Pero en el caso presente se verifica que el arco comprendido entre los lados de un ángulo cuyo vértice se apoya en la circunferencia, es precisamente igual á la mitad del ángulo construido desde el centro sobre el mismo arco. Esto es, que si el ángulo B A D, comprende sobre la circunferencia, un arco, por ejemplo, de sesenta grados correspondientes á otro ángulo B C D, trazado desde el centro, la medida del ángulo primero será igual á la mitad de la medida del segundo, esto es, á treinta grados.



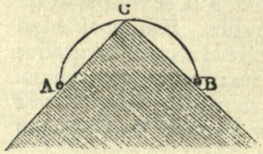

De lo dicho se deduce que todos los ángulos trazados con su vértice sobre una circunferencia, y cuyos lados comprenden un mismo arco de dicha circunferencia, segun se vé en los dichos casos de la figura inmediata, son iguales entre sí, porque todos tienen por medida la mitad del ángulo tra-



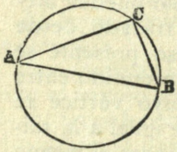
zado desde el centro de la circunferencia con el mismo arco.

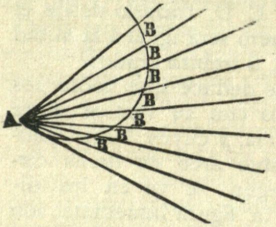
*El ángulo cuyo vértice se apoya en la circunferencia tiene por medida la mitad del arco que abrazan sus lados sobre la misma circunferencia.*

La propiedad que acabamos de observar nos proporciona un medio curioso de trazar un arco de círculo sin compás, entre dos puntos dados. Sean A y B los dos puntos que podemos marcar sobre la mesa con dos alfileres, ó sobre el terreno con dos clavos grandes. Tomemos en el primer caso un ángulo de carton cortado, y en el segundo una tabla, y hagámoslos tomar diversas posiciones, apoyándolos siempre contra los alfileres ó clavos; el vértice de la carta ó tabla irá marcando entónces sobre la mesa ó el terreno un arco de circunferencia.




Observemos en la figura próxima que si el arco A C B es igual á media circunferencia, el otro arco restante será tambien igual á media circunferencia, y por consiguiente el ángulo A C B tiene que ser recto, pues por apoyarse en la circunferencia tiene por medida la mitad del arco que abrazan sus lados. De aquí se deduce que si el ángulo de carton del ejemplo anterior fuera recto, como por ejemplo siendo una carta de baraja; y si igualmente el ángulo de la tabla fuese recto, en ambos casos el arco trazado por el vértice de la carta ó de la tabla será precisamente una semicircunferencia.




Otra deduccion podemos hacer respecto á los ángulos cuyo vértice se apoya sobre la circunferencia. Tal es, que si en un mismo punto de una circunferencia construimos á continuacion varios ángulos iguales, los arcos que interceptan en la misma circunferencia serán por precision iguales. Ese principio lo aplican los ingenieros para trazar los grandes arcos de circunferencia que necesitan para la via de sus ferro-carriles.

---

Con qué se mide el tamaño de los ángulos? Cómo se llama la cuarta parte de la circunferencia? Qué relacion existe entre los ángulos y los arcos del círculo trazados desde su vértice? Cuál es la medida de un ángulo recto? En cuántos grados se dividen respectivamente, el cuadrante, la media circunferencia y la circunferencia entera? Cuántos grados tienen juntos los tres ángulos de un triángulo? Cuántos grados tiene cada uno de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo isósceles? A qué es igual la cuerda del arco de sesenta grados? En cuántas partes iguales puede divldirse la circunferencia por medio del rádio? Qué medida tienen los ángulos cuyo vértice se apoya en la circunferencia? Hay algunos medios de trazar arcos de círculos, sin usar el rádio?

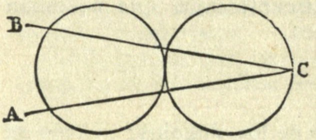
## LECCION DÉCIMA PRIMERA.

### CUERDAS Y TANGENTES.

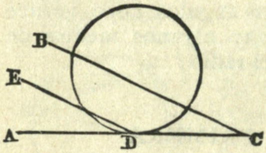
Cuando dos cuerdas no se cortan, el ángulo que forman se mide por la mitad de la diferencia de los dos arcos que intersectan en la circunferencia. Es decir, que el ángulo de las dos cuerdas A B y C D, que no se cortan, ni en el interior del círculo, ni sobre la circunferencia, es igual á la mitad de la diferencia entre los dos arcos A D y B C.

*La medida del ángulo formado por dos cuerdas que no se cortan, es igual á la mitad de la diferencia de los dos arcos que intersectan en la circunferencia.*

Si en la figura anterior prolongamos las dos cuerdas hasta que se encuentren, claro es que no se alterará el valor del angulo, pues lo único que haremos será conocer su vértice; y si una vez hallado éste movemos el círculo hácia la derecha, los arcos intersectados por las cuerdas, ó sean los lados del ángulo, variarán en cada posicion. Pero siempre se verificará que la mitad de la diferencia entre los dos arcos, será la medida de dicho ángulo, hasta que por último llegue la circunferencia á tocar el vértice, en cuyo caso no habrá más que un solo árco, cuya mitad será la medida del ángulo; resultado idéntico al que vimos en la leccion anterior.




Si suponemos, por el contrario, que el círculo se mueve, alejándose del vértice, hasta que uno de los lados del ángulo, ó sea una de las cuerdas, se salga del círculo y solo toque á la circunferencia en un punto, entónces los dos arcos quedarán confundidos en uno solo y el lado exterior no será ya cuerda del círculo, sino *tangente*, nombre que se da á toda línea recta que toca en un solo punto á la circunferencia de un círculo sin cortarla. El ángulo A C B tendrá en este caso la misma medida que el ángulo A D E formado por la tangente y una paralela al otro lado tirada por el punto de contacto.




*Llámase tangente, toda recta que toca á la circunferencia de un círculo, sin cortarla.*

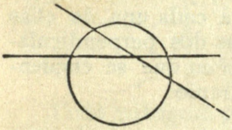
*El punto en que la tangente toca en un punto á la circunferencia, se llama punto de contacto.*

*El ángulo que forma una tangente con una cuerda que pasa por el punto de contacto, es igual á la mitad del arco de dicha cuerda.*

Si la cuerda es un diámetro, entónces el arco será la mitad de una circunferencia, esto es, 180 grados ó dos ángulos rectos. Por consiguiente, el ángulo formado entónces por la tangente y el diámetro será igual á 90 grados, ó sea un ángulo recto. De donde se deduce que ambas líneas son perpendiculares entre sí, pues de otro modo no podrian formar ángulo recto.

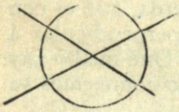
*La tangente es perpendicular al diámetro que pasa por el punto de contacto, y por consiguiente al rádio, que no es sino una porcion del diámetro.*

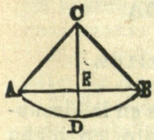
Hemos visto ya el modo de medir los ángulos cuando tienen su vértice en el centro, en la circunferencia y fuera de ella. Vamos ahora á examinar el caso en que el centro está dentro del círculo, en un punto cualquiera que no sea el centro, esto es, cuando los lados del ángulo son cuerdas que se cortan dentro del círculo. En ese caso, representado en la figura inmediata, la medida del ángulo es igual á la mitad de la *suma* de los dos arcos que forman las cuerdas; á la inversa de cuando las cuerdas se cortan fuera del círculo, en cuyo caso hemos visto que tienen por medida la mitad de la *diferencia* de los arcos.



*Los ángulos formados por dos cuerdas tienen por medida la mitad de la suma ó la mitad de la diferencia de los dos arcos que interceptan en la circunferencia, segun que el punto en que se cortan, esté dentro ó fuera del círculo.*

Si las dos cuerdas son dos diámetros, el ángulo será la mitad de la suma de los dos arcos que forman, y como estos dos arcos son iguales, resulta que la medida del ángulo estará dada por los grados que mida una de las cuerdas; resultado que confirma lo que vimos en la leccion anterior, respecto á la medida de los ángulos cuyo vértice está en el centro del círculo.

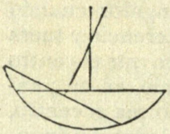





Si por el centro de una cuerda cualquiera trazamos un rádio, este rádio será perpendicular á dicha cuerda. Esto es, si por el punto E, situado al medio de la cuerda A B, tiramos el rádio C D; este rádio y la cuerda serán perpendiculares entre sí; é igualmente, si el rádio C D es perpendicular á la cuerda A B, las dos partes A E y E B en que queda dividida dicha cuerda, serán iguales entre sí.

*Cuando un rádio es perpendicular á una cuerda, divide á ésta en dos partes iguales.*

Esta verdad proporciona un medio muy sencillo para hallar el centro de un círculo cuando no está marcado, ó cuando de dicho círculo solo conocemos un arco, ó sea una parte de su circunferencia. Basta para eso tirar dos cuerdas, y trazar despues una perpendicular á cada una de ellas por su centro. Esas dos perpendiculares serán rádios del círculo y el punto en que se encuentran no será otro sino el centro del círculo.



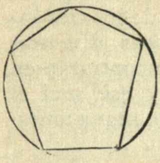
---

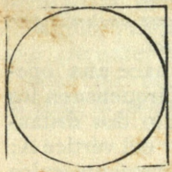
Cuál es la medida del ángulo formado por dos cuerdas que no se tocan? Qué es tangente? Cuál es la medida del ángulo formado por una tangente y una cuerda que pasa por el punto de contácto? Qué es punto de contacto? Qué son el diámetro y el rádio de un círculo, con respecto á la tangente tirada en el extremo de dicho diámetro ó rádio? Cuál es la medida del ángulo formado por dos cuerdas que se encuentran fuera de la circunferencia? Cuál es la medida del ángulo formado por dos cuerdas que se encuentran dentro de la circunferencia. El rádio trazado por el medio de una cuerda, qué es con respecto á esa cuerda? Si un rádio es perpendicular á una cuerda, cómo divide á esa cuerda? Qué medio hay para hallar el centro de un círculo cuando conocemos su circunferencia ó solo un arco de ella?

## LECCION DÉCIMA SEGUNDA.

### POLÍGONOS INSCRITOS Y CIRCUNSCRITOS.

Cuando un triángulo tiene sus tres vértices en la circunferencia de un círculo, se dice que está inscrito en dicho círculo; y si por el contrario la circunferencia queda por dentro del triángulo de tal modo que los tres lados de éste son tangentes á la circunferencia, entónces se dice que el triángulo es *circunscrito* con respecto al círculo. Si la figura es un cuadrilátero, un pentágono ú otro polígono cualquiera, se dice igualmente que está inscrito ó circunscrito á un círculo, segun sus vértices se apoyen en la circunferencia, ó sus lados sean tangentes á ésta.

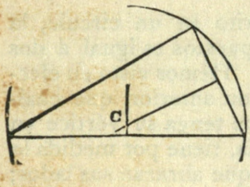




*Llámase inscrito un polígono cuando está dentro de un círculo apoyando todos sus vértices sobre la circunferencia.*

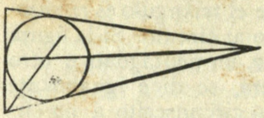
*Llámase circunscrito un polígono cuando está situado al exterior de un círculo de tal modo que todos sus lados sean tangentes á la circunferencia.*

Todo triángulo puede considerarse como inscrito en un círculo, pues en todos casos puede hacerse pasar una circunferencia por sus tres vértices Para convencernos de esto, recordemos lo que dijimos respecto á dos cuerdas tiradas en una seccion cualquiera de una circunferencia; esto es, que tirando por los centros de ellas dos rectas respectivamente perpendiculares á cada una, el punto de encuentro de ámbas perpendiculares es el centro del círculo. Considerando, pues, como cuerdas dos lados de un triángulo, podrémos fácilmente hallar el centro de la circunferencia que pasa por dos de sus vértices; y repitiendo la operacion con uno de dichos lados y el tercero, el centro que hallaremos será el mismo anterior; esto es, que desde un mismo punto pueden trazarse arcos de una misma circunferencia que pasen por los tres vértices del triángulo.




*Por los tres vértices de un triángulo siempre puede hacerse pasar la circunferencia de un círculo.*

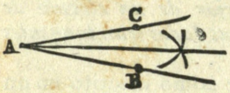
Todo triángulo puede considerarse como circunscrito á un círculo, pues en todos casos podemos construir en su interior una circunferencia que tenga por tangentes los lados del triángulo. Para esto basta dividir en dos partes iguales cada uno de los tres ángulos; las tres líneas divisoras ó bisectrices se encontrarán en un solo punto, y ese será el centro del círculo, segun muestra la figura.



*Los tres lados de un triángulo pueden siempre considerarse como tangentes á la circunferencia de un círculo.*

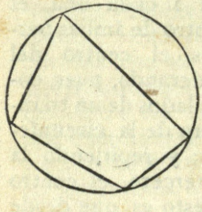
*Llámase bisectriz de un ángulo, á la recta que pasando por su vértice divide al angulo en dos partes iguales.*

Para trazar la bisectriz de un ángulo, se hace una operacion sencilla. Márquense en los dos lados del ángulo dos distancias iguales, á partir del vértice A; hágase centro sucesivamente en los puntos B y C así marcados con un rádio cualquiera y trácense dos arcos cuyo punto de encuentro, unido al vértice, marcará la posicion de la bisectriz.




El triángulo mayor que puede inscribirse en un círculo es el triángulo equilátero.

Cuando un cuadrilátero está inscrito en un circulo, la suma de cada dos de sus ángulos opuestos es igual á dos ángulos rectos. Hemos visto en efecto, en una leccion anterior que cualquier ángulo que tenga su vértice en la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco que abrazan sus lados; y como entre dos ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito abrazan la circunferencia entera, resulta que la suma de dichos dos ángulos tendrá por medida la mitad de la circunferencia ó sean dos ángulos rectos.



Un polígono cualquiera puede tener diversos tamaños sin alterar el tamaño de sus lados, segun sus ángulos tengan diversas dimensiones; pero cuando los vértices del polígono ocupan tal posicion que por ellos puede hacerse pasar un círculo, entónces será mayor que cualquier otro polígono cuyos lados sean iguales.

Cuando un triángulo tiene sus tres vértices en la circunferencia, qué es dicho triángulo con respecto á dicha circunferencia? Cuando los tres lados de un triángulo son tangentes á una circunferencia, qué es con respecto á la circunferencia? Qué es polígono inscrito? Qué es polígono circunscrito? Puede considerarse todo triángulo como inscrito ó circunscrito en una circunferencia? Por los tres vértices de un triángulo, puede siempre hacerse pasar una circunferencia? Los tres lados de un triángulo, pueden siempre considerarse como tangentes á una circunferencia? Qué es bisectriz de un ángulo? Cuando un cuadrilátero está inscrito en un círculo, á qué es igual la suma de cada dos de sus ángulos opuestos?



FIN.