

G-M. BRUÑO

ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

con
Algunas Nociones de Álgebra

18 obreros 40 días

15

x

$40x =$

15

48 días

1	1	2
120	48	24
48	0	



PARÍS
PROCURADURÍA GENERAL
78, Rue de Sèvres, 78.

OMAR GARDET

NOI DAVIOU

Nº. 1285-529-OR 3

FAMILIA

ELEMENTOS

DE

ARITMÉTICA

**DONACION
OMAR GARDET
Y FAMILIA**

PROPIEDAD

DE LA SOCIEDAD DE EDICIÓN

ELEMENTOS
DE
ARITMÉTICA

CON
ALGUNAS NOCIONES DE ÁLGEBRA

POR
G. M. BRUÑO

14.^a EDICIÓN

CORRESPONDIENTE
Á LOS CURSOS MEDIO Y SUPERIOR

PARÍS

PROCURADURÍA GENERAL

RUE DE SÈVRES, 78

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

ADVERTENCIAS

1^a Los teoremas que van en el texto y todo el Apéndice corresponden sólo al curso superior;

2^a El signo *S* que empleamos con las sumas de dinero, significa *sucres* ó *soles*, y pudiera entenderse igualmente de los *pesos*;

3^a Las números que van entre paréntesis, en caracteres más visibles, son citas ó referencias que se hacen á los respectivos párrafos de la obra;

4^a Para excusar la repetición de frases ó de operaciones en la demostración de los teoremas ó en el análisis de los problemas, empleamos una raya en el renglón que está debajo; pero al demostrarlos ó analizarlos oralmente, debe repetirse todo; v. g. :

Nº 151...

$$\begin{array}{rcl}
 (3 + 4) \times 2 & = & (3 + 4) + (3 + 4) \\
 \text{—————} & = & 3 + 4 + 3 + 4 \\
 \text{—————} & = & 3 + 3 + 4 + 4 \\
 \text{—————} & = & 3 \times 2 + 4 \times 2
 \end{array}$$

Maria E. M. de Fozzetti

ELEMENTOS DE ARITMÉTICA



INTRODUCCIÓN

1. Llámase **axioma** toda verdad evidente por sí misma, y que por tanto no necesita de demostración ninguna.

2. Los principales axiomas son los siguientes :

1º *Toda cantidad es igual á sí misma;*

2º *Cualquier cantidad puede ponerse en lugar de otra igual á ella;*

3º *Dos cantidades iguales á otra son iguales entre sí;*

4º *El todo es igual á la suma de sus partes;*

5º *El todo es mayor que cualesquiera partes suyas, cuando no se toman todas;*

6º *Una parte es igual al todo disminuido de la suma de las otras partes;*

7º *Una suma no cambia de valor cuando se invierte el orden de sus partes;*

8º *La diferencia de dos números no se altera cuando se les añade ó quita una misma cantidad;*

9º *Si con cantidades iguales se ejecutan unas mismas operaciones, los resultados son iguales;*

10º *Si con cantidades desiguales se ejecutan unas mismas operaciones, los resultados son desiguales en el mismo orden, cuando las cantidades son positivas.*

3. **Teorema** es una proposición en que se averigua la verdad de una cosa por medio de la demostración.

4. **Hipótesis** es la suposición de una cosa posible ó imposible, para sacar de ella alguna consecuencia.

5. **Tesis** es la afirmación de la verdad contenida en la enunciación de una proposición.

6. Proposición **recíproca** de otra es la que se enuncia en sentido inverso de la primera.

7. **Corolario** es la consecuencia que se deduce de lo demostrado anteriormente.

8. **Definición** es la exposición clara, exacta y precisa de la naturaleza, condición ó significación de alguna cosa.

Maria Eugenia Sagetti

LIBRO PRIMERO

NÚMEROS ENTEROS

LECCIÓN PRIMERA

DEFINICIONES PRELIMINARES

9. **Aritmética** es la ciencia de las cantidades consideradas como números.

10. Llámase **cantidad** todo lo que es susceptible de aumento ó disminución.

11. Hay dos clases de cantidades, la *continua* y la *discreta*.

12. **Cantidad continua** es aquélla cuyas partes no pueden separarse; v. g.: *la longitud de un camino, la de una pieza de paño, la altura de una pared.*

13. **Cantidad discreta** es la que consta de partes distintas ó separables, como *los alumnos de una clase, un montón de trigo, una hilera de árboles.*

14. Todo lo que se puede medir es *cantidad continua*, y lo que se puede contar es *cantidad discreta*.

15. **Número** es el conjunto de *unidades* ó partes de *unidad* de una misma especie, ó también la *unidad* misma.

16. **Medir una cantidad** es compararla con ótra conocida y de la misma especie, que se llama *unidad*.

17. **Unidad** es cada una de las cosas iguales ó semejantes que componen un número entero; por ejemplo, *si se quiere contar los árboles de una alameda, los metros que tiene una pieza de paño, etc., la unidad será un árbol, un metro.*

18. De la comparación de una cantidad con su unidad pueden resultar tres clases de números: 1º *el entero*, 2º *el quebrado*, y 3º *el mixto*.

19. Número **entero** es una cosa sola ó la reunión de varias cosas iguales ó semejantes, como *tres vasos, diez hombres*.

20. El número entero puede ser *simple* ó *compuesto*.

21. Número **simple** ó **digito** es el que consta de un solo carácter ó figura; v. g. : 1, 4, 9.

22. Número **compuesto** es el que se representa con dos ó más figuras ó caracteres, como 10, 49, 320.

23. Número **quebrado**, ó simplemente **fracción**, es el que expresa una ó más partes de la unidad, como *un tercio, dos décimos, tres quintos*.

24. Número **mixto** es el que se compone de entero y quebrado; v. g. : *dos horas y media*.

25. Estas tres clases de números se dividen en *abstractos* y *concretos*.

26. Número **abstracto** es aquél en que no está determinada la naturaleza de la unidad; por ejemplo, *cuatro, dos tercios, milésimo*.

27. Número **concreto** es aquél en que está determinada la naturaleza de la unidad, como *cuatro palomas, dos tercios de litro*.

28. El número concreto se subdivide en *complejo* ó *incomplejo*.

29. Número **complejo** se llama el que consta de varias partes que se refieren á unidades de diferentes especies; pero de un mismo género, y que no se descomponen de diez en diez; v. g. : *cuatro días seis horas cinco minutos*.

30. Número **incomplejo** es el que consta sólo de unidades enteras de un mismo género y especie; v. g. : *ocho arrobas, veinticuatro horas*.

31. La **Aritmética** enseña á *expresar* y *representar* los números; demuestra las *principales propiedades* de ellos, y da reglas para ejecutar los cálculos.

Formación de los números.

32. Se forman los números añadiendo sucesivamente la unidad á sí misma.

Así, *uno* añadido á *uno* da *dos*; *uno* añadido á *dos* da

tres; *uno* añadido á *tres* da *cuatro*, y así en adelante; de modo que añadiendo una unidad á cada número ya encontrado, se forma un nuevo número.

33. *La serie de los números enteros es ilimitada*; pues, por grande que sea un número, siempre se le puede añadir la unidad, y formar otro número mayor que él.

Si hubiera habido que dar nombre particular á cada número y representarlo con signo distinto, habría sido menester una infinidad de palabras para enunciarlos, así como una infinidad de signos para representarlos. Se ha evitado este doble inconveniente estableciendo la *numeración*.

LECCIÓN II

NUMERACIÓN

34. **Numeración** es el arte de expresar y representar todos los números por voces y signos determinados.

35. Hay dos clases de numeración : la *verbal* y la *escrita*.

§ I. Numeración verbal.

36. Numeración **verbal** es el arte de expresar los números con algunas palabras convenientemente combinadas.

37. Las palabras con que se expresan los números se llaman *nombres de los números*.

38. Los nombres de los nueve primeros números son : *uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve*.

39. Cada uno de los nueve primeros números expresa *unidades simples* ó de *primer orden*.

40. El número siguiente se llama *diez* ó *decena*; es la unidad de *segundo orden*, que se compone de diez unidades simples.

41. Por *decenas* se cuenta del mismo modo que se contó por unidades simples; se dirá pues : *una decena, dos decenas...*, hasta *nueve decenas*.

42. El uso ha reemplazado estas expresiones con las

siguientes: diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa.

43. Los nombres de los nueve números comprendidos entre dos decenas consecutivas se forman añadiendo al nombre de cada decena el de las nueve unidades simples, de esta manera: treinta y uno, cuarenta y seis..., hasta noventa y nueve.

44. El uso ha querido que en vez de decir diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y cinco, se diga once, doce, trece, catorce, quince; los demás números hasta veinte siguen la formación ordinaria: diez y seis, diez y siete, etc.

45. Desde veinte hasta treinta los números se expresan en una sola palabra: veintiuno, veintidós, veintitrés..., veintinueve.

46. El conjunto de diez decenas se llama centena ó ciento; es la unidad de tercer orden.

47. Se cuenta por centenas como se contó por decenas y por unidades simples: una centena, dos centenas..., nueve centenas, ó más simplemente: ciento, doscientos, trescientos, cuatrocientos, quinientos, seiscientos, setecientos, ochocientos, novecientos.

48. Los nombres de los números comprendidos entre dos centenas consecutivas se forman añadiendo al nombre de cada centena el de los noventa y nueve primeros números; así: ciento uno, ciento dos, ciento noventa y nueve..., novecientos uno, novecientos dos..., hasta novecientos noventa y nueve.

49. El grupo de los tres primeros órdenes de unidades constituye la primera clase de unidades ó período de las unidades simples.

50. El conjunto de diez centenas se llama mil, millar ó unidad de segunda clase.

51. El período de los millares, así como el de las unidades simples, se compone de unidades, decenas y centenas, las cuales constituyen los órdenes 4º, 5º y 6º.

52. Los nombres de los números comprendidos entre dos millares consecutivos se forman añadiendo al nombre de cada colección de miles los nombres de los novecientos noventa y nueve primeros números.

53. El conjunto de *diez centenas de mil*, ó *mil millares*, se llama *millón* ó *unidad de tercera clase*.

54. El período de los *millones*, así como el de los *millares* y el de las *unidades simples*, se compone de *unidades*, *decenas* y *centenas*, las cuales constituyen los *órdenes* 7º, 8º y 9º.

55. Los nombres de los números comprendidos entre dos *millones* consecutivos se forman añadiendo al nombre de cada colección de millones los nombres de los novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve primeros números.

56. Continuando sucesivamente se obtienen *millares de millón*, ó *unidad de cuarta clase*, en seguida los *billones*, *millares de billón*, *trillones*, *millares de trillón*, etc.

57. Para enunciar un número, se nombran sucesivamente las *centenas*, *decenas* y *unidades* de cada orden, empezando por el más elevado.

58. Llámense *órdenes de unidades* las colecciones sucesivas de ellas, en que cada una es diez veces mayor que la que inmediatamente está á su derecha.

Los nombres de los órdenes de unidades se encuentran en la siguiente

TABLA DE NUMERACIÓN

8º pe- riodo.	7º pe- riodo.	6º pe- riodo.	5º pe- riodo.	4º pe- riodo.	3º pe- riodo.	2º pe- riodo.	1º pe- riodo.
8 centenas	1 centenas	8 centenas	2 centenas	8 centenas	5 centenas	6 centenas	4 centenas
3 decenas	2 decenas	9 decenas	3 decenas	6 decenas	2 decenas	7 decenas	7 decenas
8 unidades	7 unidades	4 unidades	7 unidades	7 unidades	3 unidades	5 unidades	8 unidades
de trillón.	de trillón.	de billón.	de billón.	de millar de millón.	de millón.	de millar.	simples.

59. Llámase *clase* ó *período de unidades* la reunión de tres órdenes sucesivos, empezando desde el primero.

60. La unidad de cada clase es mil veces mayor que la de la clase *inmediatamente inferior*.

61. Diez unidades de cualquier orden forman una unidad del orden *inmediatamente superior*.

62. Mil unidades de una clase valen una unidad de la clase *inmediatamente superior*.

§ II. Numeración escrita.

63. Numeración *escrita* es el arte de representar los números por medio de ciertos signos convencionales llamados *cifras*, ó *guarismos*.

64. Para representar los números por escrito, se usan dos clases de cifras : las *romanas* y las *arábigas*.

65. *Cifras* ó *números romanos* son los que se significan con las siguientes letras del alfabeto latino.

I,	V,	X,	L,	C,	D,	M.
uno,	cinco,	diez,	cincuenta,	ciento,	quinientos,	mil.

66. Todos los números pueden representarse por estas letras repetidas ó combinadas entre sí.

67. Al repetir una letra se repite su valor; así, II representa *dos*, III representa *tres*, XX representa *veinte*, CC representa *doscientos*.

68. Si á la derecha de una letra se escribe ótra de menos valor, el número que representa ésta se agrega al expresado por la que le antecede; así, VII vale *siete*, XI vale *once*.

69. Si á la izquierda de una letra se escribe ótra de menos valor, ésta le quita á aquélla tantas unidades, decenas ó centenas como las que ella representa; v. g. : IX vale *nueve*, XL vale *cuarenta*.

70. Una rayita horizontal encima de una letra hace valer á ésta *mil* veces más; así $\overline{V}$ denota *cinco mil*, $\overline{IV}$, *cuatro mil*.

71. Llámense *números arábigos* los que fueron introducidos por los Arabes en Europa, y son los que se usan más comúnmente.

72. Los números arábigos son los diez signos ó caracteres siguientes :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

73. Las nueve primeras cifras representan los números *uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve*.

74. Se llaman *cifras significativas* porque, en virtud de una *convención*, representan por sí mismas un valor.

75. El décimo signo, llamado *cero*, no tiene valor ninguno ni por sí, ni antepuesto á otro número; es una cifra *auxiliar*.

76. Toda cifra escrita á izquierda de otra representa unidades diez veces mayores que las que expresa ésta.

77. El cero tiene por oficio ocupar el lugar de cualquier orden de unidades que falte en un número.

78. Si la primera cifra representa *unidades simples*, la que le sigue á la izquierda representará *decenas*; la tercera, *centenas*, etc.

Así, en el número 627, el 6 representa centenas; el 2, decenas, y el 7, unidades; y en el número 4009, el 4 representa millares, y el 9, unidades.

79. Cada guarismo significativo tiene dos valores: el *uno absoluto* y el *otro relativo*.

80. Valor *absoluto* de un guarismo es el que depende de la forma que tiene según la *convención primitiva*; conserva este valor en cualquier lugar en que se encuentre; v. g.: el 4 siempre valdrá 4, y no 3 ni 5.

81. Valor *relativo* ó *local* de un guarismo es el que depende del lugar que ocupa en una cantidad. Así, en 14, el 4 vale 4 unidades; en 45, vale 4 decenas ó 40 unidades; en 463, vale 4 centenas ó 400 unidades.

82. El valor relativo de un guarismo se funda en la *convención* siguiente:

Todo guarismo escrito á la izquierda de otro representa unidades 10 veces mayores, y todo guarismo escrito á la derecha de otro representa unidades 10 veces menores.

Corolario. — De aquí resulta que al escribir un número, las *unidades simples* se hallan á la derecha, las *decenas* á la izquierda de las unidades, las *centenas* á la izquierda de las decenas, y así en adelante.

83. Para representar por escrito un número menor que mil, se escribe sucesivamente, empezando por la izquierda, la cifra de las centenas, la de las decenas y la de las unidades.

Para representar, por ejemplo, el número *cuatrocientos treinta y cinco*, se escribirá 435.

84. Cuando falta un orden de unidades, se lo reemplaza con un *cero*.

85. Para representar por escrito cualquier número se escriben sucesivamente de izquierda á derecha, en línea horizontal, empezando por la clase mayor, los guarismos que expresan cuántas centenas, decenas y unidades hay de cada clase, teniendo cuidado de poner ceros en las clases ú órdenes que faltaren.

Por ejemplo, para escribir *cuatro mil seis millones veinte mil quinientas unidades*, se dispondrán los guarismos del modo siguiente :

4 006 020 500.

86. Para leer un número de tres guarismos, se enuncian separadamente las centenas, las decenas y las unidades.

Así, 739 : se leerá : *setecientos treinta y nueve*.

87. Para leer un número representado por muchos guarismos, se observarán las siguientes reglas :

Regla I. *Se divide el número en porciones de seis en seis, empezando por la derecha ; en la parte superior de la primera porción de la derecha se escribe el número 1, que representa los millones ; en la 2ª, el número 2, que representa los billones ; en la 3ª, el 3 para los trillones, etc. La última porción de la izquierda puede constar de solo uno ó dos guarismos ;*

II. *Cada porción de seis guarismos se divide en porciones de á tres con un punto, para representar los miles ó millares ;*

III. *Se lee en seguida, empezando por la izquierda, el período superior, como si estuviera solo, y después, sucesivamente los demás. Cuando falte un orden de unidades ó un período entero, no es menester mencionarlo.*

Así la cantidad

4 203 000 963 005 430 728

se dispondrá del modo siguiente :

4³203.000²963.005¹430.728

y se leerá :

Cuatro trillones-doscientos tres mil billones-novecientos sesenta y tres mil cinco millones-cuatrocientas treinta mil setecientas veintiocho unidades.

88. De los principios de la numeración resulta que para que un número entero sea 10, 100, 1000... veces mayor basta agregar á la derecha de este número uno, dos, tres.. ceros.

89. Para que un número entero *terminado por ceros sea* 10, 100, 1000... *veces menor, basta quitar uno, dos, tres... ceros de la derecha.*

EJERCICIOS SOBRE LA NUMERACIÓN

1. Cuál es la clase ó período de las mayores unidades de un número entero que tiene : 1º 9 guarismos ; 2º 13 guarismos ; 3º 17 guarismos ; 4º 12 guarismos ?

2. Cuántas cifras tienen los números enteros cuyas mayores unidades son : 1º decenas de billón ; 2º centenas de mil ; 3º unidades de millón ; 4º centenas de millón ?

3. Hágase 10 y 100 veces mayor cada uno de los números siguientes : 384, 645, 8 572.

4. Hágase 100 y 1 000 veces menor cada uno de los números siguientes : 2 000, 38 400, 75 000.

5. Escribanse con números arábigos las cantidades siguientes :

XLV, LVIII, LXIX, LXXXIV, XCIX, CIX, CCXXXIV, CDXCIX, CMLIV, MCDXCII, MDCCXIX, MDCCCLXXXVII.

6. Escribanse con números romanos las cantidades siguientes :

35, 69, 979, 904, 1099, 1214, 1328, 1355, 1451, 1515, 1610, 1648, 1699, 1779, 1794. 1800, 1814, 1830, 1848, 1870, 1880, 1900.

LECCIÓN III

OPERACIONES DE LA ARITMÉTICA EN GENERAL

90. Llámense **operaciones**, en Aritmética, las diversas combinaciones que se hacen con los números, cuando se quiere buscar algún resultado.

91. Dos son las operaciones que pueden efectuarse de la manera más general con las cantidades, á saber : **composición y descomposición.**

92. Se da el nombre de *cuatro reglas ú operaciones fundamentales* á la adición, substracción, multiplicación y división, porque de ellas se derivan todas las demás de la Aritmética.

93. Los números se componen con las operaciones de

adición y multiplicación, y se *descomponen* con las de substracción y división.

94. Problema ó **cuestión** es la propuesta que se hace de buscar, mediante ciertas cantidades conocidas, alguna ó algunas desconocidas, ó incógnitas.

95. Llámanse **datos** las cantidades conocidas por medio de las cuales se buscan las desconocidas.

96. Se da el nombre de **supuesto** á las cantidades desconocidas, ó no expresadas en el problema, pero en las cuales consiste ó se funda la verdad de él.

97. Regla es el método que se sigue para hacer una operación.

98. Resolver un problema es hallar las cantidades conocidas que se buscan.

99. La resolución ó análisis de un problema contiene dos partes : la *solución* y el *cálculo*.

100. Por **solución** de un problema se entiende la indicación de las operaciones que se deben ejecutar.

101. Cálculo es la ejecución de las operaciones indicadas en la solución.

102. Prueba de una operación es otra operación que tiene por objeto asegurarse de la exactitud de la primera.

LECCIÓN IV

ADICIÓN

103. Adición es una operación que tiene por objeto reunir varios números enteros, quebrados ó mixtos en uno solo.

Si se quiere saber cuántos niños hay en tres clases de las cuales la 1^a tiene 45, la 2^a, 62, y la 3^a, 84, se debe ejecutar una adición, reuniendo los números 45, 62 y 84 en uno solo.

104. Llámase **suma** el total que resulta de la adición de dos ó más números ó cantidades.

105. Sumar es reducir diferentes cantidades de una misma especie á una sola, añadiendo unas á otras.

106. Se da el nombre de **sumando** á cada una de las cantidades parciales que han de añadirse unas á otras, para dar por resultado la suma ó cantidad total.

107. En la suma de números concretos los sumandos han de ser cantidades de una misma especie.

Por tanto se pueden sumar pesos con pesos, metros con metros, botellas con botellas, pero no pesos con metros ni con botellas.

108. La adición se indica con el signo $+$ que se lee *más*, el cual se coloca entre los números que deben sumarse.

109. Dos rayitas horizontales $=$, forman el signo de *igualdad*, que se lee *igual á*, é indica que la cantidad ó cantidades que le preceden son iguales á las que le siguen.

110. Ocurren tres casos en la adición de enteros :

Caso I. *Sumar dos números dígitos.*

111. Se encuentra la suma de dos números dígitos por medio de la siguiente

TABLA DE ADICIÓN

Las bandas que están en sentido horizontal se llaman *filas*.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Las columnas que están en sentido vertical se llaman *hileras*.

Si se quiere saber, por medio de la tabla, cuánto suman 7 y 5, se busca en la primera hilera el número 5, y resulta que en la hilera correspondiente al 5, en la misma fila del 7, hay 12. Del propio modo se procederá para encontrar la suma de 5 y 7, y así en adelante.

112. Caso II. *Añadir un número dígito á otro cualquiera.*
Sea de añadir 5 á 28.

Basta para esto añadir á 28 todas las unidades contenidas en el número 5. Lo que puede hacerse diciendo :

$$28 + 1 = 29,$$

$$29 + 1 = 30,$$

$$30 + 1 = 31,$$

$$31 + 1 = 32,$$

$$32 + 1 = 33;$$

ó más brevemente : $28 + 5 = 33$.

113. Caso III. *Sumar dos ó más números cualesquiera.*

Para sumar dos ó más números cualesquiera, se tendrán presentes las reglas que siguen :

Regla I. *Escribir los sumandos únos debajo de otros, de modo que las unidades vayan debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc.;*

II. *Tirar una raya debajo del último sumando para separarlo del total;*

III. *Empezando por la derecha, se suman los guarismos de la columna de las unidades; si el total no pasa de 9, se lo escribe debajo; si pasa de 9, se escriben sólo las unidades, reservando la decena ó decenas que resulten, para sumarlas con los guarismos de la columna siguiente;*

IV. *Se suman del mismo modo las demás columnas, hasta la última, debajo de la cual se escribe íntegro el total que resulte.*

EJEMPLO. — Súmense las cantidades 847, 292 y 759.

OPERACIÓN **Análisis.** Escribo primero los sumandos, únos debajo de otros, colocando las unidades debajo de las unidades, etc. Tiro debajo una raya, y empiezo por la

Sumandos. $\left\{ \begin{array}{l} 847 \\ 292 \\ 759 \end{array} \right.$

1^a Columna. 7 y 2 hacen 9 y 9 hacen 18; escribo 8 unidades, y llevo una decena á la columna de las decenas.

2^a Columna. 1 que llevo y 4 hacen 5 y 9 hacen 14 y 5 hacen 19; escribo 9 decenas, y llevo 1 centena á la columna de las centenas.

Total. 1898

3^a Columna. 1 que llevo y 8 hacen 9 y 2 hacen 11 y

7 hacen 18; escribo el 8 debajo de las centenas, y el 1 en lugar de los millares; y resulta 1898, suma total de los tres números dados.

114. Se empieza la adición por la columna de las unidades para que se puedan llevar á la columna de las decenas las que provienen de la adición de la primera columna, y las centenas que provienen de la segunda columna se puedan llevar á la de las centenas, etc.

115. Cuando el total de cada columna no pasa de 9, poco importa empezar la adición por la derecha ó por la izquierda.

Pruebas de la adición.

116. La prueba de la adición puede hacerse principalmente de dos modos.

1^{er} Modo. Se suma de nuevo cada columna, empezando por el último sumando, para lo cual, encima del primero se tira una raya, y sobre ella se escriben los resultados de la prueba.

EJEMPLO. — Hágase la prueba de la adición siguiente :

PRUEBA	20.298	Análisis.	Empiezo por el último su-
			mando.
Suman- dos. {	7.642	1 ^a Columna. 1 y 5 son 6 y 2 son 8; escribo el 8 y no llevo nada.	
	8.975		
	3.681		
Total.	20.298	2 ^a Columna. 8 y 7 son 15 y 4 son 19; escribo el 9, y llevo 1 á las centenas.	

3^a Columna. 1 que llevo y 6 son 7 y 9 son 16 y 6 son 22; escribo el 2, y llevo 2 á la columna de los millares.

4^a Columna. 2 que llevo y 3 son 5 y 8 son 13 y 7 son 20; escribo el 0, y adelanto el 2. Como el total de arriba es idéntico al de abajo, digo que está bien hecha la operación.

2^o Modo. Cuando hay muchos sumandos, se pueden formar con ellos grupos de 5 ó 6, por ejemplo, que se suman separadamente; después se reúnen en uno solo estos totales parciales. El último resultado debe ser igual á la suma primitiva.

EJEMPLO

OPERACIÓN	PRUEBA		SUMA DE LOS TOTALES
12 324			PARCIALES
34 900	1 ^{er} grupo.	2 ^o grupo.	
5 625		5 625	
14 934	12 324	14 934	47 224
96 732	34 900	96 732	117 291
Total: 164 515	47 224	117 291	164 515
			Total igual al 1 ^o .

Nota. — Véase en el núm. 138 la prueba de la adición por la substracción.

Usos de la adición.

117. La adición sirve:

- 1^o Para encontrar el total de varios números;
- 2^o Para encontrar el valor neto de un objeto, conociendo el precio de compra y los gastos;
- 3^o Para saber el precio de venta de un objeto, cuando se conoce el precio de compra ó el valor neto y la ganancia, etc.

118. Se conoce que un problema se resuelve por medio de la adición siempre que se trata de encontrar un número igual á la suma de varios otros.

EJERCICIOS ORALES SOBRE LA ADICIÓN

7. Si uno de los sumandos representa sures, qué deben representar los demás?

8. De qué naturaleza son las unidades de un total?

9. Cuándo se pueden sumar cantidades que expresan objetos de diferentes especies?

10. Qué cambio resulta en el total cuando se agrega un número á cualquiera de los sumandos?

11. Qué cambio resulta en el total cuando se quita una cantidad de cualquiera de los sumandos?

12. Qué sucede con el total si se suprime uno de los sumandos?

13. Si á un total se le agregan todos los sumandos que lo formaron, ¿qué será el segundo total respecto del primero?

14. Por qué no se empieza la adición por la izquierda?

15. Cuándo puede empezarse la adición por cualquier columna?

16. ¿Qué indica el total cuando se añade la ganancia al precio de compra?
17. ¿Qué indica el total cuando se añade la pérdida al precio de venta?
18. Si se añade la edad que tienes ahora al año de tu nacimiento, ¿qué indica el total?

PROBLEMAS

19. Rudecindo tiene 12 años; ¿qué edad tendrá dentro de 27 años?
20. Onesiforo nació en 1808; ¿en qué año tuvo 27 años?
21. En un combate se han gastado 8 945 cartuchos, y quedan todavía 12 450; ¿cuántos había antes del combate?
22. Alcibiades ha hecho el día jueves tres ventas sucesivas: la 1ª de \$ 45, la 2ª de \$ 65 y la 3ª de \$ 97; ¿cuánto ha vendido por todo?
23. Cristóbal Colón nació en Génova en 1436; á los 56 años descubrió la América y murió en Valladolid 14 años después; pregúntase: 1º en qué año descubrió la América; 2º en qué año falleció.
24. Zoilo saca primero \$ 24 de su caja, luego \$ 45, y le quedan \$ 79; ¿cuánto dinero había en la caja?
25. ¿Cuántos árboles hay en un huerto que cuenta 395 manzanos, 247 naranjos y 197 perales?
26. Moisés nació el año 1571 antes de Jesucristo; ¿cuántos años han transcurrido desde entonces hasta el año de 1880 de la era cristiana?
27. Tres piezas de liencillo miden, la 1ª 105 metros, la 2ª 96, y la 3ª 104; ¿cuántos metros miden las tres juntas?
28. El fusil fue inventado en 1330 y la imprenta 110 años después; ¿cuál fue el año de esta última invención?
29. Un regimiento de caballería tiene 324 caballos en el primer escuadrón, 290 en el segundo, y 350 en el tercero; ¿cuántos caballos tiene el regimiento?
30. Aniceto ha comprado un sombrero en \$ 11, un vestido en \$ 23, un pantalón en \$ 7, un chaleco en \$ 5 y un par de botas en \$ 8; ¿cuánto ha gastado en todo?
31. En una feria se han vendido 1415 carneros, 148 vacas, 85 caballos, 247 bueyes, 105 asnos; ¿cuántos animales se han vendido por todo?
32. Atahualpa nació en 1488 y tenía 37 años cuando fue coronado Scyri de Quito; 7 años después fue coronado Inca del Perú; ¿en qué año se verificó cada una de las dos coronaciones?
33. La América Meridional cuenta 25 459 500 habitantes; la América Setentrional, 57 708 000; Europa, 295 043 000; Asia, 644 329 000; Africa, 100 000 000; Oceanía, 31 095 000; ¿cuál es la población total del globo?
34. Celidonio tiene \$ 5 786; Felisa \$ 3 794, y Endocia tanto como los dos primeros juntos; ¿cuánto tiene esta última, y cuánto todos tres?
35. La América del Sur mide 6 500 000 millas cuadradas; la del Norte, 8 000 000; Europa, 3 700 000; Asia, 15 552 000; Africa, 12 940 000, y Oceanía, 4 500 000; ¿cuál es la superficie de las cinco partes del mundo?
36. Celestino ha comprado paño, y lo revende en \$ 6 218 perdiendo \$ 143; ¿en cuánto lo había comprado?
37. El nevado de Illimani, en Bolivia, mide 7 274 metros de altura, y

el Aconcagua, volcán de Chile, le pasa con 25 metros; ¿cuál es la altura de este último?

38. El gran Pontífice Pío IX nació en Mayo de 1799 y murió de edad de 86 años; cuál fue el año de su muerte?

39. La altura del volcán de Tolima, en Colombia, es de 6 000 metros, mientras que el Chimborazo le pasa con 310 metros; ¿cuál es la altura de este último?

40. Preguntado un hacendado por el número de ovejas que tiene, responde que en un redil tiene 732, en otro 984, en otro 762, en el cuarto 978, en el quinto 723, y en el último 324; ¿cuál es el número total de sus ovejas?

41. Los ríos Misuri y Misisipi, de la América Setentrional, miden juntos 500 kilómetros más que el Amazonas, que tiene 6 000 kilómetros; ¿cuál es la longitud total de los dos primeros?

42. Varias personas contribuyen á la fábrica de una iglesia, Silvano da \$ 1 431; Milciades, \$ 1 395; Heraclio, \$ 989; Indalecio, \$ 763, y Gerardo, \$ 1 437; ¿con qué suma han contribuido los cinco juntos?

43. En la última batalla que tuvieron los dos Incas Huáscar y Atahualpa en 1532, se vieron sus ejércitos en Quipaipán, compuesto el del primero de 150 000 hombres, y el del segundo de 75 000; ¿cuál fue el total de los guerreadores de ambas partes?

LECCIÓN V

SUBSTRACCIÓN

119. **Substracción ó resta** es una operación por medio de la cual se quita un número menor de otro mayor.

120. La substracción es una operación inversa de la adición, y puede también definirse así: Es una operación en la cual dada la suma de dos números y uno de ellos, se busca el otro.

Así, la operación por medio de la cual se averigua cuántas naranjas deben separarse ó sacarse de un canasto que tiene 86, para que queden en 34, se llama *substracción*, porque para esto debe restarse 34 de 86.

121. Las cantidades que entran en una substracción son el *minuendo* y el *substraendo*.

122. Llámase *minuendo* la cantidad de que ha de restarse ó quitarse otra menor.

123. La cantidad menor que ha de restarse de la mayor se llama **substraendo**.

124. El resultado de la subtracción se llama **resto, exceso, diferencia ó déficit**.

125. En la subtracción de números *concretos* las dos cantidades dadas deben ser de una misma especie.

126. La subtracción se indica con el signo —, que se lee **menos**.

Para indicar que de 19 se resta 7, se escribirá $19 - 7$.

127. Ocurren tres casos en la subtracción de enteros.

Caso I. *Restar un número dígito de cualquier ótro número.*

Sea de restar 5 de 28.

Basta para esto ir separando de 28 cada una de las unidades contenidas en el número 5. Lo que puede hacerse diciendo :

$$28 - 1 = 27,$$

$$27 - 1 = 26,$$

$$26 - 1 = 25,$$

$$25 - 1 = 24,$$

$$24 - 1 = 23;$$

ó más brevemente : $28 - 5 = 23$.

Nota. — Por aquí se ve que la subtracción es inversa de la adición.

128. **Caso II.** *Restar un número de ótro cuando cada cifra del substraendo es menor que su correspondiente del minuendo.*

Para restar un número de ótro cuando cada cifra del substraendo es menor que su correspondiente del minuendo, se observarán las reglas siguientes :

Regla I. *Escribir el substraendo debajo del minuendo, de modo que vayan las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc.;*

II. *Tirar una raya debajo del substraendo para separarlo de la diferencia ;*

III. *Quitar sucesivamente del minuendo las unidades, decenas, centenas, etc., del substraendo.*

OPERACIÓN

Minuendo	749
Substraendo	325
Diferencia	<u>424</u>

EJEMPLO. — Así, para restar 325 de 749, dispongo las dos cantidades en el orden indicado, y digo :
 Quito 5 unidades de 9, y quedan 4, 2 decenas de 4, y quedan 2; 3 centenas de 7, y quedan 4; ó más brevemente : 5 de 9, 4; 2 de 4, 2; 3 de 7, 4; y la cantidad 424 representará la diferencia que hay entre los dos números propuestos.

129. Caso III. Restar dos números cualesquiera.

130. Al restar un número de otro sucede varias veces que algunas cifras del substraendo son mayores que sus correspondientes del minuendo.

131. Cuando un número del substraendo es mayor que su correspondiente del minuendo, se ejecuta la operación bien por el método de *préstamo*, bien por el de *compensación*.

Método de préstamo.

EJEMPLO. — Réstese 3 849 de 40 456.

OPERACIÓN	
Minuendo	40 456
Substraendo	3 849
Diferencia	<u>36 607</u>

Análisis. Como no se pueden restar 9 unidades de 6, tomo del 5 una decena, que vale 10 unidades, las cuales añadidas á las 6, dan 16, y digo : 9 de 16 quedan 7; las 5 decenas del minuendo se reducen á 4; por consiguiente, 4 de 4 da 0; paso á las centenas, y digo : 8 de 4 no puede ser, y como no hay unidades de millar, pido al último guarismo una decena de millar, que vale 10 millares; dejo 9 en el lugar de los millares, y el otro millar se convierte en 10 centenas que juntas con el 4 dan 14; digo pues, 8 de 14 quedan 6; en seguida, 3 de 9 quedan 6, y las 4 decenas de millar quedan en 3; número que se escribe debajo.

132. Cuando hay varios ceros seguidos en el minuendo, el primero de la derecha se considera como 10, cuando no se le ha pedido prestada ninguna unidad, y todos los demás como *nueves*, en el método de *préstamo*.

Método de compensación.

Nota. — Este método se funda en el N° 2, axioma 8°.

EJEMPLO. — Réstese 3849 de 6456.

OPERACIÓN $\begin{array}{r} 6456 \\ 3849 \\ \hline 2607 \end{array}$	Análisis. No pueden restarse 9 unidades de 6; añadido entonces al 6 una decena ó 10 unidades, lo cual da 16; 9 de 16, 7; como añadí una decena á las 6 unidades, debo añadir también una decena al 4 del substraendo; 1 y 4 hacen 5, de 5 queda 0; 8 de
--	--

14 quedan 6, llevo 1 millar á los 3 del substraendo; 1 y 3 hacen 4, de 6 quedan 2.

133. Cuando hay varios ceros seguidos en el minuendo, se consideran todos como 10, en el método de compensación.

134. Se empieza la substracción por la derecha, porque si se empezase por la izquierda, sería menester cambiar el resultado ya escrito cada vez que la cifra siguiente del substraendo fuere mayor que su correspondiente del minuendo.

135. Poco importa empezar la substracción por cualquier columna cuando todas las cifras del substraendo son menores que sus correspondientes del minuendo.

136. Teorema. *Para restar de un número la diferencia de otros dos, basta añadir al primero el menor de los otros dos, y restar el mayor del total encontrado.*

Así, para restar de 25 la diferencia (17 — 8) escribiremos esta diferencia, y tendremos:

$$25 - (17 - 8)$$

Agreguemos 8 á ambos números, la diferencia no se alterará (N° 2, 8°), y resulta:

$$\begin{array}{r} 25 + 8 - (17 - 8 + 8) \\ 25 + 8 - 17 \end{array}$$

6

L. Q. Q. D. (Lo que queríamos demostrar.)

Prueba de la substracción.

137. La prueba de la substracción puede hacerse principalmente de dos modos:

1º POR LA ADICIÓN. — Sumando la *diferencia* con el *substraendo*, el total debe ser igual al *minuendo*.

2º POR LA MISMA SUBTRACCIÓN. — *Restando del minuendo la diferencia*, el resultado debe ser igual al *substraendo*.

PRUEBA POR LA ADICIÓN

PRUEBA POR LA SUBTRACCIÓN.

De 1854
 Réstese 968
 Difer. 886

} se suman estas
 } cantidades.

De 2908
 Réstese 1439
 Difer. 1469

} se resta del mi-
 } nuendo.

Prueba $1854 =$ al minuendo. Prueba $1439 =$ al substraendo.

138. Para ejecutar la prueba de la adición por la subtracción :

1º *Se suman todos los sumandos, menos uno, cuyo resultado se llama suma parcial;*

2º *Se resta la suma parcial de la total; y si la operación es exacta, la diferencia debe ser igual al sumando que se dejó aparte.*

EJEMPLO

Sumandos { 648 Apartemos este primer sumando.
 594
 325
 9234

10801 Suma total de los 4 sumandos.
 10153 Suma parcial de los 3.

Diferencia y prueba $648 =$ al primer sumando que fue apartado.

Usos de la subtracción.

139. La subtracción sirve :

1º Para encontrar la ganancia ó pérdida que resulta de un negocio;

2º Para averiguar lo que todavía se debe después de haber pagado parte de una deuda;

3º En general, para encontrar con cuánto pasa un número á otro, la diferencia que hay entre dos cantidades, etc.

140. Se conoce que un problema se resuelve por medio de la subtracción :

- 1º Cuando se trata de encontrar la diferencia que hay entre dos cantidades de una misma especie ;
2º Cuando dada la suma de dos números y uno de ellos, se busca el ótro.

EJERCICIOS ORALES SOBRE LA SUBSTRACCIÓN

44. Qué número resulta sumando el substraendo con la diferencia?
45. Qué resulta si del minuendo se quita la diferencia?
46. Si se aumenta el minuendo, ¿qué sucede con la diferencia?
47. Qué sucede con la diferencia si se disminuye el minuendo?
48. Qué alteración hay en la diferencia cuando se aumenta el substraendo?
49. Se altera la diferencia si se añade una misma cantidad á ambos términos?
50. Si se quita una misma cantidad de ambos términos, ¿queda alterada la diferencia?
51. Cuándo es mayor que el substraendo la diferencia?
52. Cuándo es la diferencia menor que el substraendo?
53. Cuándo es igual al substraendo la diferencia?
54. Si la diferencia es igual al substraendo, ¿cuántas veces está contenida en el minuendo?
55. Qué cantidad resulta sumando juntamente el minuendo, el substraendo y la diferencia?
56. Si á la suma de dos números se añade su diferencia, ¿qué resulta en el total?
57. Cuando se conoce la suma de dos números y su diferencia, ¿cómo se encuentra el número mayor?
58. Si de la suma de dos números se resta su diferencia, ¿qué número sale en el resultado?
59. Conocida la suma de dos números y su diferencia, ¿qué debe hacerse para encontrar el menor?
60. Qué resulta si se resta la suma de dos números del duplo del mayor?
61. Qué resulta si se resta de la suma de dos números el duplo del menor?

PROBLEMAS

62. Qué diferencia hay entre los números 7 942 y 6 041?
63. Con cuánto pasa el número 84 498 á 55 450?
64. La diferencia entre dos números es 785; el mayor es 2 149; ¿cuál es el menor?
65. A qué número deben agregarse 54 unidades para que valga 560?
66. A qué número se le deben añadir 567 unidades para que llegue á ser 9 088?
67. Un padre tenía 45 años cuando nació su hijo, ¿cuál será la edad de éste cuando el padre tenga 87 años?
68. El Libertador Simón Bolívar nació en Caracas en 1783 : principió en

carrera militar en 1811, y murió en la quinta de San Pedro, cerca de Santa Marta, 19 años después: 1.º ¿qué edad tenía cuando principió su carrera militar? 2.º en qué año, y de qué edad murió?

69. Eustacio habría tenido que recibir \$ 176 que le eran debidos, pero su deudor no le da más que \$ 117; ¿cuánto le debe todavía?

70. Nepomuceno ha puesto 9 días para ir de Quito á Guayaquil; llegó allá el 24 de octubre, ¿en qué día salió de Quito?

71. Hipólito está condenado á 270 días de prisión; ya hace 187 días que está preso: ¿cuántos debe quedar todavía?

72. Gervasio fue puesto en la cárcel por 305 días; ¿cuántos ha pasado allí si le faltan todavía 147 días?

73. De una pieza de paño de 125 metros se han vendido ya 76; ¿cuántos quedan aún?

74. Escipión deja al morir una fortuna de \$ 15 860, que deben repartirse como sigue: á sus herederos \$ 6 700, á un convento \$ 5 400 y el resto á los pobres; ¿cuánto les tocó á éstos?

75. Segismundo tiene \$ 18 930 y Octavio \$ 24 910, ¿con cuánto le pasa éste á aquél?

76. Higinio deposita en el Banco \$ 8 752; saca una vez \$ 3 234, después \$ 1 700, más tarde \$ 962, y por fin \$ 49; ¿cuánto le queda todavía en el Banco?

77. Emerenciana cosecha en su hacienda 1 575 hectolitros de cebada y 900 de trigo. Vende 807 hectolitros de cebada y 391 de trigo á Huberto, y todo lo demás á Evaristo, ¿cuántos hectolitros de cada especie ha vendido á este último?

78. Graciliano tiene que caminar 6 784 millas, de las cuales 2 324 en ferrocarril, 1 570 en coche, 450 á caballo, 175 á pie, y las restantes en vapor; ¿cuántas millas tiene que caminar en vapor?

79. En 1819 fundó Bolívar la República de Colombia, compuesta de los estados de Venezuela, Nueva Granada y Ecuador; en 1829 se desmembró Venezuela, y un año más tarde el Ecuador; ¿á los cuántos años de la fundación de la República se desmembró Venezuela, y en qué año el Ecuador?

80. En noviembre de 1876 ambas Américas tenían 143 528 kilómetros de ferrocarriles; Europa, 140 550; Asia, 11 102; Africa, 2 049, y Oceanía, 2 489; pregúntase cuántos kilómetros de ferrocarriles tuvieron entonces las dos Américas más que cada una de las otras partes del mundo.

LECCIÓN VI

MULTIPLICACIÓN

§ I. Definiciones.

141. **Multipliación** es una operación por la cual se toma un número llamado *multiplicando* tantas veces como uni-

dades ó partes de unidad tiene ótro llamado *multiplicador*.

Según esta definición, multiplicar un número por 1, es tomarlo una vez; multiplicarlo por 4, 5, etc., es tomarlo cuatro ó cinco veces, etc.; multiplicarlo por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc., es tomar la mitad, la tercera parte de dicho número.

142. Llámase **multiplicando** el número que debe ser repetido según lo indique el sentido del problema.

143. **Multiplicador** es el número que indica las veces que debe repetirse el multiplicando.

144. El resultado de la multiplicación se llama **producto**.

145. El multiplicando y multiplicador juntamente tomados se llaman **factores del producto**.

146. El multiplicando y el multiplicador, como tales, son siempre números abstractos, aunque en la práctica el multiplicando representa ordinariamente un número concreto.

147. El producto debe ser de la misma especie que el multiplicando, y es *múltiplo* del multiplicando y del multiplicador.

Así, en este ejemplo: Si el metro de paño cuesta 4 sucres, ¿cuanto costarán 7 met.?, el multiplicando es 4 sucres, porque es el número que debe repetirse 7 veces para encontrar el precio de 7 met.; el producto buscado es también de la misma especie y el multiplicador es 7.

148. La multiplicación se indica con el signo $\times$ ó con un punto puesto entre las dos cantidades, que se lee **multiplicado por**.

La multiplicación de 6 por 4 se indica así: 6×4 ó 6.4 .

149. La multiplicación es una *adición abreviada*, porque para encontrar el producto bastaría ejecutar una suma de tantos números iguales al multiplicando cuantas unidades hay en el multiplicador.

Así, para multiplicar 8 por 6, bastaría sumar $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$; y por consiguiente $8 \times 6 = 48$.

150. Para ejecutar con facilidad la multiplicación, es necesario tomar de memoria los productos de dos números dígitos cualesquiera, contenidos en la siguiente tabla de multiplicación que, por haber sido inventada por Pitágoras, se llama

TABLA PITAGÓRICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Construcción de la Tabla Pitagórica.

Para construir la Tabla Pitagórica, se escriben en columna horizontal las nueve primeras cifras.

En seguida se añade cada número de esta primera columna á sí mismo, y resulta la 2ª, que contiene los productos de los nueve primeros números por 2.

Añadiendo cada número de la 1ª columna á su correspondiente de la 2ª, se forma la 3ª, que contiene los productos de los nueve primeros números por 3.

Añadiendo sucesivamente los números de la 1ª y 3ª, en seguida los de la 1ª y 4ª, etc., se forman las columnas siguientes, que contienen los productos de los nueve primeros números por 4, 5..., 9.

Para determinar por medio de esta tabla los productos de dos números dígitos cualesquiera, se busca uno de ellos en la primera fila horizontal y el otro en la 1ª hilera vertical; en la casilla en que se encuentran ambas, se halla el producto pedido.

Para encontrar en esta tabla el producto de dos números dígitos, de 6 y 8, por ejemplo, se busca el número 6 en la primera fila horizontal y se baja verticalmente la hilera

correspondiente á dicho número, hasta la octava fila; el número 48, que se encuentra allí, es el producto buscado.

Nota. — Se habría obtenido el mismo resultado buscando primero el 8 en la primera fila horizontal, y bajando en seguida verticalmente hasta la sexta. Por donde se ve que el producto de 6 por 8 es el mismo que el de 8 por 6.

§ II. Teoremas preliminares.

151. Teorema. *Para multiplicar una suma por un número, basta multiplicar cada parte de ella por este número y sumar los resultados.*

Sea de multiplicar $(3+4)$ por 2; digo que tendremos:

$$\begin{array}{rcl}
 & 3 \times 2 + 4 \times 2 & \\
 \text{En efecto: } (3+4) \times 2 & = (3+4) + (3+4) & (141) \\
 \hline & = 3+4 + 3+4 & \\
 \hline & = 3+3 + 4+4 & \\
 \hline & = 3 \times 2 + 4 \times 2 & (141) \\
 6+8 & = 6 + 8 & \\
 14 & = 14 & \text{L. Q. Q. D.}
 \end{array}$$

152. Nota. — La igualdad manifiesta que para sumar varios productos que contienen un factor común, basta escribir una vez este factor común que se multiplica por la suma de los factores no comunes.

153. Teorema. *Para multiplicar la diferencia de dos números por un tercero, basta multiplicar cada uno de ellos por el tercero y buscar la diferencia de los productos.*

Sea de multiplicar $(5-3)$ por 2; digo que tendremos:

$$\begin{array}{rcl}
 & 5 \times 2 - 3 \times 2 & \\
 \text{En efecto: } (5-3) \times 2 & = (5-3) + (5-3) & (141) \\
 \hline & = 5-3 + 5-3 & \\
 \hline & = 5+5 - 3-3 & (\text{N}^{\circ} 2, \text{ ax. } 7) \\
 \hline & = 5 \times 2 - 3 \times 2 & (141) \\
 10-6 & = 10 - 6 & \\
 4 & = 4 & \text{L. Q. Q. D.}
 \end{array}$$

154. Nota. — La igualdad manifiesta que para restar dos productos que contienen un factor común, basta escribir una vez este factor común que se multiplica por la diferencia de los factores no comunes.

155. Teorema. *Para multiplicar un número por una suma de varios otros, basta multiplicar este número por cada parte de la suma, y sumar los resultados.*

Sea de multiplicar 7 por la suma $(4+5)$; digo que tendremos :

$$7 \times 4 + 7 \times 5$$

En efecto :

$$\begin{array}{r} 7 \times (4+5) = (7+7+7+7) + (7+7+7+7+7) \quad (141) \\ \hline 28 + 35 = 63 \end{array}$$

L. Q. Q. D.

156. Teorema. Para multiplicar una suma por otra, basta multiplicar sucesivamente todas las partes de la primera por cada una de las de la segunda, y sumar los resultados.

Sea de multiplicar $(4+5)$ por $(2+3)$; tendremos :

$$\begin{array}{l} (4+5) \times 2 = 4 \times 2 + 5 \times 2 \quad (151) \\ (4+5) \times 3 = 4 \times 3 + 5 \times 3 \quad (151) \end{array}$$

Sumando ordenadamente miembro por miembro, resulta :

$$\begin{array}{r} (4+5) \times (2+3) = 4 \times 2 + 5 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 3 \quad (152) \\ 9 \times 5 = 8 + 10 + 12 + 15 \\ 45 = 45 \end{array}$$

L. Q. Q. D.

157. Teorema. Para multiplicar una diferencia por otra, basta multiplicar sucesivamente cada parte de la primera por cada parte de la segunda.

Sea de multiplicar $(5-3)$ por $(6-2)$; tendremos :

$$\begin{array}{l} (5-3) \times 6 = 5 \times 6 - 3 \times 6 \quad (153) \\ (5-3) \times 2 = 5 \times 2 - 3 \times 2 \quad (153) \end{array}$$

Restando ordenadamente miembro por miembro, resulta :

$$\begin{array}{r} (5-3) \times (6-2) = 5 \times 6 - 3 \times 6 - 5 \times 2 + 3 \times 2 \quad (154 \text{ y } 141) \\ 2 \times 4 = 30 - 18 - 10 + 6 \\ 8 = 8 \end{array}$$

L. Q. Q. D.

§ III. Diversos casos de la multiplicación.

158. Distinguiremos tres casos en la multiplicación de enteros.

Caso I. Multiplicar un número cualquiera por un número dígito.

Para multiplicar un número cualquiera por un número dígito, se observarán las reglas siguientes :

Regla I. Empezando por la derecha, se multiplica sucesivamente cada cifra del multiplicando por el multiplicador;

II. Si el producto es menor que 9, se lo escribe debajo;

si es mayor, se escriben solamente las unidades de cada producto parcial, y se llevan las decenas para sumarlas con el producto siguiente;

III. Se continúa la operación hasta el último producto, el cual se escribe íntegro.

EJEMPLO. — Se quiere multiplicar 847 por 5, ¿cuál será el producto?

OPERACIÓN		Análisis. Empiezo la multiplicación diciendo: 5 por 7 son 35, escribo 5, llevo 3; 5 por 4 son 20, y 3 que llevo, 23, escribo 3 y llevo 2; 5 por 8 son 40, y dos que llevo, 42, que lo escribo. El número 4235
Multiplicado	847	
Multiplicador	$\times 5$	
Producto	<u>4235</u>	

es el producto pedido, porque contiene 5 veces al multiplicando, puesto que efectivamente contiene 5 veces á las unidades, 5 veces á las decenas y 5 veces á las centenas; luego, contiene 5 veces á todo el número 847.

159. Caso II. Multiplicar entre sí dos números cualesquiera.

Para multiplicar entre sí dos números cualesquiera :

Regla I. Escribir el multiplicador debajo del multiplicando, de modo que las unidades de una misma especie vayan unas debajo de otras, para mayor facilidad y evitar equivocaciones;

II. Empezando por la derecha, se multiplica sucesivamente todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador, teniendo cuidado de escribir la primera cifra de cada producto parcial debajo de la cifra por la cual se multiplicó;

III. Se suman los productos parciales, y el total dará el producto pedido.

EJEMPLO. — ¿Cuánto da 827 multiplicado por 584?

OPERACIÓN		
	827	
	$\times 584$	
Producto por las unidades	3308	
Producto por las decenas	6616	} Productos parciales.
Producto por las centenas	4135	
	<u>482968</u>	Producto total ó resultado.

160. Se atrasa un lugar el producto de las decenas, dos el de las centenas, etc., porque al multiplicar unidades por decenas, el producto debe ser decenas, etc.

161. **Caso III.** *Multiplicar dos números que tienen ceros á la derecha en el multiplicador ó en ambos factores.*

Para multiplicar dos números que tienen ceros á la derecha en el multiplicador ó en ambos factores, se procederá del modo siguiente :

Regla I. *Multiplicar sólo las cifras significativas, sin hacer caso de los ceros;*

II. *Añadir al producto tantos ceros cuantos hay á la derecha del multiplicador ó en ambos factores juntos.*

EJEMPLOS

$$\begin{array}{r} 2567 \\ \times 1400 \\ \hline 10268 \\ 2567 \\ \hline 3593800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64800 \\ \times 5400 \\ \hline 2592 \\ 3240 \\ \hline 349920000 \end{array}$$

Corolario. Un número que remata en ceros puede siempre descomponerse en dos factores uno de los cuales se halla formado por las cifras significativas seguidas ó no de ceros, y el ótro por la unidad seguida de tantos ceros cuantos se suprimen á la derecha del número.

Así : $345000 = 345 \times 1000 = 3450 \times 100$

162. Se empieza la multiplicación por la derecha, para que en los productos sucesivos que resultan de cada cifra del multiplicando se puedan llevar las decenas de un producto á ótro.

IV. Usos de la multiplicación.

163. La multiplicación sirve :

- 1º Para hacer una cantidad cierto número de veces mayor;
- 2º Para encontrar el valor de varias unidades cuando se conoce el de una sola;
- 3º Para reducir unidades de especie superior á inferior.

164. Se conoce ordinariamente que la resolución de un problema exige una multiplicación cuando dado el valor de

la unidad, se busca el de ótras varias, ó el de algunas partes de la unidad.

Prueba de la multiplicación.

165. Para hacer la prueba de la multiplicación, se repite la operación invirtiendo el orden de los factores, y debe resultar el mismo producto. (Nº 170.)

Más adelante veremos otros procedimientos.

§ V. Teoremas relativos á la multiplicación.

166. **Definición.** Llámase *producto de varios factores* el número que resulta multiplicando el primer factor por el segundo, el resultado por el tercero, este último resultado por el cuarto, y así en adelante.

Si consideramos el producto de los factores 2, 3, 5, tendremos :

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$

167. A veces se considera un producto como efectuado, aunque no lo esté realmente, y esto sucede cuando los factores se hallan entre paréntesis ó separados por un punto; v. g.:

$$(2 \times 3 \times 5); \quad 2.3.5$$

168. En varias ocasiones los paréntesis reemplazan al signo de multiplicación. Así, $(2 \times 3 \times 5)$ 6 representa el producto efectuado de $(2 \times 3 \times 5)$ por 6. También puede sobrentenderse dicho signo entre dos ó más paréntesis.

169. Pueden reemplazarse los factores de un producto por el producto efectuado, y recíprocamente el producto por los factores, cuando éstos ó aquél están escritos primero.

Este principio es una consecuencia de la definición. (Nº 166.)

Así : $2 \times 3 \times 4 \times 5 = (2 \times 3) 4 \times 5$

170. **Teorema.** El producto de dos factores no se altera cuando se invierte el orden de ellos.

Demostremos que :

$$4 \times 3 = 3 \times 4$$

En efecto :

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Sumando miembro por miembro y verticalmente estas igualdades, tenemos :

$$\begin{array}{l} 4+4+4=3+3+3+3 \\ 4 \times 3 = 3 \times 4 \quad (141) \text{ L. Q. Q. D.} \end{array}$$

171. Teorema. *El producto de tres factores no se altera cuando se invierte el orden de ellos.*

Sean los factores 3, 4, 5.

Para demostrar este principio, basta manifestar que puede invertirse primero el orden de los dos primeros factores, y en seguida el de los dos últimos.

1º En primer lugar tenemos :

$$3 \times 4 = 4 \times 3 \quad (170)$$

multipliquemos ambos miembros por 5,

$$3 \times 4 \times 5 = 4 \times 3 \times 5 \quad (\text{Nº 2, ax. 9}).$$

2º Para demostrar que puede invertirse el orden de los dos últimos, escribamos el factor 5, 4 veces en una misma línea horizontal, y repitamos 3 veces esta línea.

$$\left. \begin{array}{l} 5+5+5+5 \\ 5+5+5+5 \\ 5+5+5+5 \end{array} \right\} 5 \times 4 \times 3$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{5 \times 3 \times 4}$$

Cada línea horizontal contiene al 5 repetido 4 veces, esto es, 5×4 ; y como hay tres líneas, tenemos $5 \times 4 \times 3$. Cada columna vertical contiene al 5 repetido 3 veces, esto es, 5×3 ; y como hay cuatro columnas, tenemos $5 \times 3 \times 4$; como siempre es uno mismo el número de unidades, decimos que $5 \times 4 \times 3 = 5 \times 3 \times 4$.

L. Q. Q. D.

172. Teorema. *El producto de varios factores no se altera cuando se invierte el orden de dos factores consecutivos cualesquiera.*

Sea el producto $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$.

Si queremos invertir el orden de los factores 4 y 5, tendremos :

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = (2 \times 3) 5 \times 4 \quad (169 \text{ y } 171).$$

Multipliquemos sucesivamente ambos miembros por 6 y por 7.

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = (2 \times 3) 5 \times 4 \times 6 \quad (\text{Nº 2, ax. 9})$$

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = (2 \times 3) 5 \times 4 \times 6 \times 7 \quad (\text{Nº 2, ax. 9})$$

$$6 \quad 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 6 \times 7 \quad (169)$$

L. Q. Q. D.

173. Teorema. *En un producto, se puede colocar cualquier factor en un lugar cualquiera.*

Sea el producto $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$.

Tenemos sucesivamente (172) :

$$\begin{aligned} 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 &= 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 6 = \\ &= 2 \times 3 \times 4 \times 7 \times 5 \times 6 = 2 \times 3 \times 7 \times 4 \times 5 \times 6 = \\ &= 2 \times 7 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 7 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \end{aligned}$$

Por donde se ve que el factor 7 se ha colocado en todos los lugares. Del propio modo se demostraría que cualquier otro factor puede también colocarse sucesivamente en todos ellos. De aquí se deduce el principio general :

174. Un producto no se altera cuando se invierte el orden de sus factores.

175. Teorema. *Un producto no se altera cuando se reemplazan varios factores por su producto efectuado.*

Hemos sentado este principio (169) cuando los factores están escritos primero; demostremos ahora que siempre es así.

Sea el producto $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$; digo que es igual, por ejemplo, á $2 \times 3 (4 \times 5) 6 \times 7$.

En efecto :

$$\begin{aligned} 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 &= 4 \times 5 \times 2 \times 3 \times 6 \times 7 & (174) \\ \hline &= (4 \times 5) 2 \times 3 \times 6 \times 7 & (169) \\ \hline &= 2 \times 3 (4 \times 5) 6 \times 7 & (174) \end{aligned}$$

L. Q. Q. D.

176. Nota. — La igualdad manifiesta que se puede reemplazar un producto efectuado por sus factores.

177. Teorema. *Para multiplicar un número sucesivamente por varios factores, basta multiplicarlo por el producto de ellos.*

Este principio es una consecuencia inmediata del anterior (175).

178. Recíprocamente. — *Para multiplicar un número por el producto de varios factores, basta multiplicarlo por el primer factor, el resultado por el segundo, y así en adelante.*

Sea de multiplicar 2 por $(3 \times 4 \times 5)$, tenemos :

$$2 (3 \times 4 \times 5) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \quad (176) \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

179. Corolario. *Para multiplicar varios productos entre sí, basta reunir todos los factores en un solo producto.*

$$\text{Así : } (2 \times 3) (4 \times 5) (6 \times 7) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$$

180. Teorema. Cuando se multiplican varios factores de un producto por otros números, el resultado es igual al producto primitivo multiplicado por el producto de dichos números.

Sea el producto $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

Si se multiplica 3 por 7, y 5 por 8, digo que :

$$2 \times (3 \times 7) \times 4 \times (5 \times 8) \times 6 = (2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6) (7 \times 8)$$

En efecto :

$$2 \times (3 \times 7) \times 4 \times (5 \times 8) \times 6 = 2 \times 3 \times 7 \times 4 \times 5 \times 8 \times 6 \quad (176)$$

$$\hline = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \quad (174)$$

$$\hline = (2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6) (7 \times 8) \quad (175)$$

L. Q. Q. D.

181. Corolario. Cuando se multiplica uno de los factores de un producto por un número, el producto queda multiplicado por dicho número.

Así, si multiplicamos por 4 el factor 3 del producto

$$2 \times 3 \times 5,$$

$$\text{tendremos : } 2 \times (3 \times 4) \times 5 = (2 \times 3 \times 5) \times 4$$

182. Nota. — La igualdad manifiesta que para multiplicar un producto por un número, basta multiplicar uno de sus factores por dicho número.

183. Teorema. Para multiplicar dos ó más números que rematan en ceros, basta multiplicar las cifras significativas sin hacer caso de los ceros, los cuales se escriben á la derecha del producto.

Sea de multiplicar 4500 por 2300; tenemos :

$$4500 = 45 \times 100$$

$$2300 = 23 \times 100$$

Multiplicando ordenadamente miembro por miembro, resulta :

$$4500 \times 2300 = 45 \times 23 \times 100 \times 100 \quad (\text{N}^{\circ} 2, \text{ ax. } 9)$$

$$\hline = 45 \times 23 \times 10000 \quad (161)$$

$$\hline = (45 \times 23) 10000 \quad (175)$$

Por donde se ve que después de haber multiplicado 45 por 23, bastará añadir cuatro ceros á la derecha del producto (161).

184. Nota. — Si hubiere varios números, se multiplicarían en primer lugar los dos primeros, luego se multiplicaría este producto por el 3^o, y así en adelante.

185. Teorema. *El producto de varios números contiene todos los factores de ellos.*

Sea el producto de 35×6 ; tenemos :

$$35 = (5 \times 7) \quad (150)$$

$$6 = (2 \times 3) \quad (150)$$

Multiplicando ordenadamente, miembro por miembro, resulta :

$$35 \times 6 = 5 \times 7 \times 2 \times 3 \quad (179)$$

L. Q. Q. D.

§ VI. Nociones sobre las potencias.

186. Llámase **potencia** de un número el producto de varios factores iguales á él.

Así $2 \times 2 \times 2$ es una potencia de 2, y 25×25 , una potencia de 25.

187. Por **grado** de una potencia se entiende el número de veces que entra en ella un mismo factor.

188. *Primera potencia* de un número es el número mismo.

Segunda potencia ó **cuadrado** de un número es el producto de dicho número multiplicado por sí mismo; así 36 es el cuadrado ó segunda potencia de 6.

Tercera potencia ó **cubo** de un número es el producto de dicho número tomado tres veces como factor; 8 es el cubo de 2.

Cuarta potencia ó **bicadrado** de un número es el producto de dicho número tomado cuatro veces como factor; así, 16 es la cuarta potencia de 2.

189. Las potencias de los números se indican por medio de una cifra que se escribe á la derecha, y en la parte superior de ellos; dicha cifra toma el nombre de **exponente**; así pues, para indicar la segunda potencia de 9, se escribe 9^2 .

El exponente 1 se subentiende siempre; así, $7^1 = 7$.

190. Teorema. *Para multiplicar entre si varias potencias de un mismo número, basta dar á éste un exponente igual á la suma de los exponentes de dichas potencias.*

Sea el producto de $2^5 \times 2^2 \times 2^3$; digo que el producto es 2^{10} (léase : 2 á la quinta, al cuadrado, al cubo... á la décima).

En efecto, tenemos :

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad (186)$$

$$2^2 = 2 \times 2 \quad (186)$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 \quad (186)$$

Multiplicando ordenadamente miembro por miembro estas igualdades, resulta :

$$2^5 \times 2^2 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} \quad (186)$$

L. Q. Q. D.

191. Teorema. *Para elevar á cualquier potencia un número con exponente, basta multiplicar el exponente del número por el de la potencia.*

Si se trata de elevar al cubo 7^2 , tendremos :

$$(7^2)^3 = 7^2 \times 7^2 \times 7^2 \quad (186) = 7^{2+2+2} \quad (190) = 7^{2 \times 3} = 7^6$$

L. Q. Q. D.

192. Teorema. *Para elevar á cualquier potencia un producto de varios factores, se eleva cada factor á dicha potencia, y se multiplican los resultados.*

Así, para elevar al cubo el producto de $2 \times 3 \times 5$, tendremos :

$$\begin{aligned} (2 \times 3 \times 5)^3 &= (2 \times 3 \times 5)(2 \times 3 \times 5)(2 \times 3 \times 5) \quad (186) \\ \hline &= 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \quad (176) \\ \hline &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \quad (174) \\ \hline &= (2.2.2)(3.3.3)(5.5.5) \quad (175) \\ \hline &= 2^3 \times 3^3 \times 5^3 \quad (186) \end{aligned}$$

193. Nota. — La igualdad manifiesta que cuando todos los factores de un producto se hallan elevados á una misma potencia, el producto tiene también la misma potencia.

194. Teorema. *Para multiplicar entre sí varios productos compuestos de factores de distintas potencias, basta escribir una sola vez dichos factores, y darles por exponente la suma de sus respectivos exponentes.*

Sean los productos $(3^2 \times 4^2)$, $(3 \times 4^3 \times 5^2)$, $(4^2 \times 5^6)$; tendremos :

$$\begin{aligned} (3^2 \times 4^2)(3 \times 4^3 \times 5^2)(4^2 \times 5^6) &= 3^2 \times 4^2 \times 3 \times 4^3 \times 5^2 \times 4^2 \times 5^6 \quad (179) \\ \hline &= (3^2 \times 3)(4^2 \times 4^3 \times 4^2)(5^2 \times 5^6) \quad (174, 175). \\ \hline &= 3^3 \times 4^7 \times 5^8 \quad (186) \end{aligned}$$

L. Q. Q. D.

195. Teorema. *Un producto de varios factores con exponentes se eleva á cualquier potencia, multiplicando cada exponente por la potencia indicada.*

Para elevar el producto ($3^2 \times 4^5$) al cuadrado, tendremos :

$$(3^2 \times 4^5)^2 = (3^2)^2 \times (4^5)^2 = \quad (192)$$

$$= 3^4 \times 4^{10} \quad (191)$$

L. Q. Q. D.

EJERCICIOS ORALES SOBRE LA MULTIPLICACIÓN

81. ¿Cuándo es el producto igual al multiplicando, y cuándo mayor que él?

82. ¿Cuándo es el multiplicando mayor que el producto?

83. ¿Cuándo es el producto igual al multiplicador, y cuándo mayor ó menor que él?

84. ¿Qué pasa á ser el producto cuando se duplica, triplica ó cuadruplica uno de los factores?

85. Si se toma la mitad, la tercera ó cuarta parte de un factor, ¿á qué se reduce el producto?

86. La suma de cinco números es 125; ¿cuál será ésta si se multiplica cada uno de los cinco números por 4?

87. La diferencia de dos números es 15; ¿cuál será ésta si ambos números se multiplican por 3?

88. ¿Cuál es la sexta potencia de 2; la cuarta de 3, de 5?

89. Búsquese el producto de 25 por 9, sin ejecutar directamente la multiplicación.

90. Búsquese el producto de 18 por 11, sin ejecutar directamente la multiplicación.

91. Búsquese del propio modo el producto de 49: 1º por 99 y 2º por 101.

92. Cuál es el producto de 51 por 1010, sin ejecutar directamente la multiplicación?

93. Un número debe ser multiplicado sucesivamente por 3, 5, 8; ¿qué cantidad puede reemplazar á estos factores sucesivos?

94. Un número debe ser multiplicado por 24; ¿podrá encontrarse el producto por medio de multiplicaciones sucesivas? Cuáles serían éstas?

95. Cuánto suman los productos siguientes: 18×25 más 42×25 ? Cómo puede encontrarse la misma suma con una sola multiplicación?

96. Búsquese la diferencia de los productos siguientes: 1º 43×16 y 23×16 ; 2º 54×12 y 42×12 .

97. Qué alteración recibe un producto cuando se añade un mismo número, 5 por ejemplo, á ambos factores?

PROBLEMAS

98. ¿Cuántos días hay en 24 semanas de 7 días cada una?

99. ¿Qué número de duraznos hay en 14 canastos, si cada uno tiene 17 docenas?

100. ¿Cuántos minutos hay en un mes de 31 días, sabiendo que cada día tiene 24 horas y cada hora 60 minutos?
101. Una mano de papel tiene 25 pliegos; ¿cuántos pliegos hay en 257 manos?
102. Veintiocho docenas de albaricoques, ¿cuántos albaricoques hacen?
103. La rueda de un molino da 27 vueltas en un minuto; ¿cuántas dará en 45 minutos?
104. ¿Cuántos renglones hay en un libro de 450 páginas, á razón de 25 renglones por página?
105. Un correo camina 3 leguas por hora; ¿cuántas caminará en 18 horas?
106. Calasancio compra 6 panes de azúcar á \$ 27 cada uno, y los revende á \$ 31 el pan; ¿cuánto ha ganado en el negocio?
107. Esteban compra 148 hectolitros de cebada, á \$ 2 hectolitro, por lo cual da en pago 67 metros de paño á \$ 4 metro, y el resto en especias; ¿á cuánto asciende el valor de éstas?
108. Heliodoro y Venancio salen de una misma ciudad en dirección contraria; el 1º camina 35 millas por día, y el 2º sólo 29; ¿á qué distancia estarán los dos al cabo de 16 días?
109. Pascasio compra 14 vacas á \$ 23 cada una, 7 caballos á \$ 96 cada uno, 34 bueyes á \$ 57 cabeza, y 300 ovejas á \$ 2 cada una; revende todos estos animales en \$ 3842; ¿cuánto gana en el negocio?
110. La luz camina 192 500 millas por segundo; ¿cuánto caminará en 494 segundos?
111. Gaudencio y Avelino salen juntos de Quito con dirección á Colombia. El 1º camina 35 millas por día, y el 2º 42; ¿á qué distancia se encontrarán los dos al cabo de 10 días de marcha?
112. Leovigildo compra 15 piezas de paño, de 47 metros cada una, á \$ 7 metro; ¿cuánto debe pagar por todos ellos?
113. Fabricio tiene 367 carneros, Servando tiene 3 veces más que él, menos 409, y Hermenegildo tiene tanto como ambos juntos; ¿cuántos carneros tienen los dos últimos, y cuántos los tres juntos?
114. Geroncio tiene \$ 145, Ezequías 7 tantos como él, más \$ 299, y Sulacio tiene 3 veces tanto como los dos juntos, menos \$ 1999. ¿Qué suma poseen los dos últimos, y todos tres juntos?

LECCIÓN VII

DIVISIÓN

§ I. Definiciones.

196. **División** ó **partición** es una operación por la cual se busca cuántas veces un número llamado *dividendo* contiene á otro llamado *divisor*.

Así, dividir 28 por 7, es buscar cuántas veces contiene al 7 el número 28. Esta definición supone que el cuociente es número entero.

197. La división es una operación inversa de la multiplicación, que tiene por objeto, conociendo el producto de dos factores cualesquiera y uno de ellos, hallar el otro.

198. Llámase **dividendo** el número que debe dividirse ó partirse en tantas partes iguales como unidades tiene el divisor.

199. **Divisor** es el número por el cual se ha de partir el dividendo, para saber cuántas veces cabe en él.

200. El número que resulta de la partición del dividendo por el divisor se llama **cuociente**.

201. El divisor y el cuociente son los *factores del dividendo*.

202. La división de un número por otro es *exacta* ó no. Es exacta cuando el dividendo es un múltiplo cabal del divisor.

Así, como 45 dividido por 9 da exactamente 5 en el cuociente, tenemos : $45 = 9 \times 5$. También habría podido dividirse 45 por 5, y encontrar exactamente 9 en el cuociente. De donde resulta este principio :

203. *Cualquier número es divisible por cada uno de sus factores.*

204. La división de un número por otro *no es exacta* cuando el dividendo no es un múltiplo cabal del divisor.

Así, como 45 dividido por 7 da 6 por cuociente y 3 de

residuo, tenemos : $45 = 7 \times 6 + 3$. De donde resulta este principio :

205. Cuando la división de dos números no es exacta, el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cuociente más el residuo.

206. Llámase *residuo de una división* el excedente del dividendo sobre el mayor múltiplo del divisor. El residuo ha de ser necesariamente menor que el divisor.

207. El dividendo y divisor representan cantidades abstractas, aunque en la práctica el dividendo es número concreto, y las unidades del cuociente deben ser de la misma especie que las del dividendo.

208. La división se indica con el signo $:$, que se lee *dividido por*, ó poniendo el dividendo encima del divisor, separados con una raya horizontal ú oblicua.

Así, la división de 42 por 7 se indica $42:7$, ó $\frac{42}{7}$, ó $42/7$.

§ II. Diversos casos de la división.

209. Distinguiremos tres casos en la división de enteros.

Caso I. El divisor y el cuociente son números dígitos.

Sea de dividir 42 por 7.

Dividir 42 por 7 es, según la definición, buscar cuántas veces el número 7 está contenido en 42; se puede pues encontrar el resultado por medio de subtracciones sucesivas. Así :

$$\begin{aligned} 42 - 7 &= 35, \\ 35 - 7 &= 28, \\ 28 - 7 &= 21, \\ 21 - 7 &= 14, \\ 14 - 7 &= 7, \\ 7 - 7 &= 0; \end{aligned}$$

por donde se ve que el número 7 está contenido 6 veces en 42. Pero para proceder más rápidamente, se escribe el número 42; á su derecha, encima de una raya horizontal, el 7; se separa con una raya vertical el dividendo del divisor (las dos rayas se llaman *galera*);

$$\begin{array}{r|l} 42 & 7 \\ 0 & 6 \end{array}$$

en seguida se dice: en 42 cuántas veces 7, 6 veces; 6 por 7 son 42, de 42 queda 0. El número 6 es el cuociente buscado.

Nota. — Este ejemplo manifiesta que la división no es más que una substracción abreviada, y que es inversa de la multiplicación.

210. Caso II. *El dividendo y el divisor son números compuestos, y el cuociente, número dígito.*

Sea de dividir 5847 por 849.

Dispongamos la operación como arriba:

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividendo} & 5847 \\ & 5094 \\ \hline \text{Residuo} & 753 \end{array} \quad \begin{array}{l} 849 \text{ Divisor} \\ \hline 6 \text{ Cuociente} \end{array}$$

Dividir 5847 por 849, es buscar un cuociente que, multiplicado por 849, dé 5847. Ahora bien, 5847 está comprendido entre:

$$849 \times 1$$

y

$$849 \times 10;$$

luego el cuociente estará comprendido entre 1 y 10, y tendrá por tanto una sola cifra.

Para determinar cuál es ésta, se observa que el producto de las centenas del divisor por dicha cifra da centenas, y este producto no puede encontrarse sino en las 58 centenas del dividendo.

Pero en las 58 centenas pueden encontrarse algunas más provenientes del producto de las otras partes del divisor por dicha cifra. Luego, dividiendo 58 por 8, no resultará una cifra mucho menor, pero podría resultar una *muy superior*.

58 dividido por 8 da 7.

Para ver si 7 es la cifra verdadera, se multiplica 849 por 7:

$$849 \times 7 = 5943$$

Como el producto 5943 es mayor que 5847, el guarismo 7 excede al verdadero. Probemos con 6.

$$849 \times 6 = 5094$$

Ya que este último es menor que 5847, se deduce que 6 es el guarismo verdadero. Se resta 5094 de 5847, y el residuo 753 indica que la división no es exacta.

$$\begin{array}{r|l} 5847 & 849 \\ & 5094 \\ \hline 753 & 6 \end{array}$$

Nota. — En la práctica se dice : 58 entre 8 á 6; $6 \times 9 = 54$, de 57 quedan 3, y llevo 5; $6 \times 4 = 24$ y 5 que llevo son 29, de 34 quedan 5, y llevo 3; $6 \times 8 = 48$ y 3 que llevo son 51, de 58 quedan 7. El cuociente es 6, y el residuo 753.

211. Caso III. *El dividendo, el divisor y el cuociente son números compuestos.*

Para dividir un número compuesto por ótro, ténganse presentes las reglas que siguen :

Regla I. *Se escribe el divisor á la derecha del dividendo, seperándolo por la galera;*

II. *Se separan en el dividendo tantas cifras como tiene el divisor; si la cantidad separada es menor que el divisor, se toma otra cifra más del dividendo;*

III. *Se parte este dividendo parcial por el divisor, y se encuentra así la primera cifra del cuociente;*

IV. *Se multiplica todo el divisor por la cifra encontrada, y el producto se resta del dividendo parcial;*

V. *Al lado de la diferencia que resulta se baja la siguiente cifra del dividendo; luego se divide este número que forma el 2º dividendo parcial, por el divisor, y se encuentra la segunda cifra del cuociente;*

VI. *Se multiplica esta última cifra por el divisor, y el producto se resta del 2º dividendo parcial;*

VII. *Se continúa la operación hasta que se hayan bajado todos los guarismos del dividendo.*

El conjunto de las cifras encontradas forma el cuociente.

EJEMPLO. — Divídase 1 676 418 por 82.

OPERACIÓN			Ó más brevemente.	
1º divid. parcial	1 676 418	82	1 676 418	82
	164	20 444	.364	20 444
2º » »	.364		.361	
	328		.338	
			10	
3er » »	.361			
	328			
4º » »	.338			
	328			
Residuo	.10			

Análisis. Como hay dos guarismos en el divisor, tomo dos del dividendo; 16 en 82, no puede ser; tomo otro guarismo del dividendo, y digo: 16 en 8, 2 veces; escribo 2 en el cuociente, y multiplico por él el divisor; el producto se resta del primer dividendo parcial, y sobran 3; bajo el guarismo siguiente 6, y tengo 36 por segundo dividendo parcial; 36 en 82 no alcanza, pongo cero al cuociente, y bajo el guarismo siguiente 4, lo que me da 364; continuando del mismo modo la división, resulta en el cuociente 20444, más 10 de residuo.

212. El producto del divisor por la cifra que se escribe en el cuociente, debe ser menor que el dividendo parcial del cual debe restarse, ó siquiera ser igual á él.

213. El residuo de cada división parcial debe ser siempre menor que el divisor, de otro modo deben aumentarse al correspondiente guarismo del cuociente una ó más unidades.

214. La cifra del cuociente jamás debe pasar de 9 en cada división parcial; porque entonces la cifra anterior del cuociente es inferior á la verdadera con una ó más unidades.

215. Cuando después de bajar un guarismo del dividendo para formar otro dividendo parcial, éste es menor que el divisor, se escribe un cero en el cuociente y se baja otra cifra para formar el verdadero dividendo parcial: el cero es necesario para reemplazar las unidades que faltan en el cuociente.

Prueba de la división.

216. La prueba de la división puede hacerse principalmente por medio de la multiplicación ó de otra división.

217. Para ejecutar la prueba de la división por medio de la multiplicación, basta multiplicar el cuociente por el divisor, y al producto agregar el residuo cuando lo hay; si el resultado es igual al dividendo, estará exacta la operación.

EJEMPLO. — Divídase 8467 por 8.

OPERACIÓN	
8467	8
.46	1058
.67	
3	

PRUEBA
1058
$\times 8$
8464
+ 3 residuo.
8467

218. Se hace la prueba de la división por la división cuando no queda residuo, partiendo el dividendo por el cuociente, para que salga el divisor.

EJEMPLO. — Divídase 6435 por 15.

OPERACIÓN	PRUEBA
$\begin{array}{r l} 6435 & 15 \\ 43 & 429 \\ 135 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r l} 6435 & 429 \\ 2145 & 15 \\ \hline \end{array}$
..	...

219. Si la operación ha dado un residuo menor que el cuociente, al partir el dividendo por el cuociente se debe encontrar el divisor y un residuo igual al de la operación.

EJEMPLO. — Divídase 386501 por 785.

OPERACIÓN	PRUEBA
$\begin{array}{r l} 386501 & 785 \\ 7250 & 492 \\ 1851 & \\ .281 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r l} 386501 & 492 \\ 4210 & 785 \\ 2741 & \\ .281 & \\ \hline \end{array}$

Nota. — Cuando el residuo es mayor que el cuociente, mejor es ejecutar la prueba por la multiplicación.

220. Para ejecutar la prueba de la multiplicación por la división, se parte el producto por uno de los factores; el cuociente será el otro factor.

Si se trata de hacer la prueba de una multiplicación cuyo producto es 99408, y sus factores 109 y 912, se divide el producto 99408 por 109, y se tendrá en el cuociente 912; y si se divide el producto por 912, el cuociente será 109.

§ III. Usos de la división.

221. La división tiene por objeto :

- 1º Dividir un número en partes iguales;
- 2º Reducirlo á cierto número de veces menor;
- 3º Encontrar cuántas veces un número contiene á otro;
- 4º Buscar por cuánto debe multiplicarse un número dado para encontrar otro;

5º Encontrar el valor de una unidad cuando se conoce el de varias de una misma especie, ó partes de ella; v. g. : *el precio de compra ó de venta de un metro, la ganancia ó pérdida por metro, etc.*;

6º Encontrar el número de unidades cuando se conoce su valor total y el de una de ellas; v. g.: *el número de días que debe trabajar un obrero para ganar tal cantidad;*

7º Reducir unidades de especie inferior á superior; v. g.: *horas á días, etc.*

222. Se conoce ordinariamente que la resolución de un problema exige una división :

1º Cuando conocido el valor de varias unidades ó partes de unidad se busca el de una sola;

2º Cuando conocido el valor de una ó más unidades, ó partes de unidad, se busca el número de unidades ó partes de unidad.

§ IV. Teoremas relativos á la división.

223. **Teorema.** *Para dividir por 10, 100, 1000, un número entero que remata en ceros, basta quitar uno, dos, tres ceros, etc. de la derecha.*

Sea de dividir 350 por 10; digo que :

$$350 : 10 = 35$$

En efecto, quitando un cero á la derecha de 35, se hace correr cada guarismo significativo un lugar hacia la derecha. Luego, el valor relativo de cada uno de ellos, y por consiguiente el del número mismo, es 10 veces menor. (82)

L. Q. Q. D.

De igual modo se demuestra que se divide por 100, 1000, etc., un número que remata en ceros, cuando se quitan dos, tres ceros, etc. de la derecha.

224. **Teorema.** *Para dividir por un número un producto de varios factores, basta dividir uno de ellos por este número.*

Sea el producto $3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$.

Tenemos :

$$(1) \quad 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = (3 \times 5 \times 6 \times 7) 4 \quad (174 \text{ y } 175)$$

Supongamos ahora que se haya dividido 4 por 2; entonces tendremos :

$$3 \times \frac{4}{2} \times 5 \times 6 \times 7 = (3 \times 5 \times 6 \times 7) \frac{4}{2} \quad (174)$$

$$\text{ó } (2) \quad 3 \times \frac{4}{2} \times 5 \times 6 \times 7 = (3 \times 5 \times 6 \times 7) 2$$

Si comparamos las igualdades (1) y (2), encontramos en la

segunda un multiplicador dos veces menor. Luego el producto se halla dividido por 2. (141.) L. Q. Q. D.

225. Corolario. — De este principio se deduce que *cuando se divide un producto por un número, uno de los factores queda dividido por el mismo número.*

226. Teorema. *Cuando se dividen varios factores de un producto por otros números, el producto primitivo queda dividido por el producto de dichos números.*

Sea el producto $4 \times 5 \times 6 \times 7$

Si dividimos 4 por 2, tendremos :

$$\frac{4}{2} \times 5 \times 6 \times 7 = (5 \times 6 \times 7) 2 \quad (224)$$

ó un producto dos veces menor.

Si ahora dividimos el factor 6 de este último producto por 3, tendremos :

$$5 \times \frac{6}{3} \times 7 \times 2 = (5 \times 7 \times 2) 2 \quad (224)$$

ó un producto aún tres veces menor. Luego el producto primitivo $4 \times 5 \times 6 \times 7$ se ha hecho 2×3 ó 6 veces menor. Lo que puede representarse como sigue :

$$\frac{4}{2} \times 5 \times \frac{6}{3} \times 7 = (4 \times 5 \times 6 \times 7) : (2 \times 3)$$

L. Q. Q. D.

227. Teorema. *No se altera el valor de un producto cuando se multiplica ó divide uno ó varios de sus factores por un mismo número.*

En efecto, un producto queda multiplicado por un número, cuando se multiplica uno de sus factores por dicho número (181), y un producto queda dividido por un número cuando se divide uno de sus factores por dicho número (224). Luego, cuando se multiplica y divide uno de los factores de este producto por un número, no se altera el producto.

Nota. — El mismo raciocinio se aplica á la multiplicación y división de varios factores de un producto por otros números.

228. Teorema. *Para dividir un número por otro, basta suprimir en el dividendo todos los factores del divisor; el producto de los restantes será el cuociente.*

En efecto, como el dividendo es el producto del divisor por el cuociente, y un producto de varios números que con-

tiene todos los factores de ellos (185), se deduce de esto que, si se suprimen todos los factores del divisor, no quedarán más que los factores del cuociente. Lo cual puede representarse del modo siguiente :

$$\frac{3 \times 4 \times 5 \times 6}{4 \times 6} = 3 \times 5$$

229. Teorema. *Para dividir un número por el producto de varios factores, basta dividirlo por uno de ellos; en seguida, el cuociente encontrado, por otro factor, y así sucesivamente.*

Sea de dividir 180 por el producto ($2 \times 3 \times 5$) ó 30.

Dividiendo sucesivamente 180 por los factores de este producto, resulta :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 0 & \hline 90 & 3 \\ 0 & \hline 30 & 5 \\ 0 & \hline 6 & \end{array}$$

Lo que da 6 por cuociente.

Si manifestamos que 6 es también el cuociente al dividir 180 por el producto de los factores, quedará demostrado el teorema. Para esto dispongamos los cálculos anteriores del modo siguiente :

$$\begin{array}{ll} 180 = 2 \times 90 & (141) \\ 90 = 3 \times 30 & (141) \\ 30 = 5 \times 6 & (141) \end{array}$$

Multiplicando miembro por miembro y verticalmente estas igualdades, tenemos :

$$180 \times 90 \times 30 = 2 \times 3 \times 5 \times 90 \times 30 \times 6 \quad (\text{N}^\circ 2, \text{ax. } 9^\circ)$$

Dividamos ambos miembros por 90 y por 30 :

$$\begin{array}{ll} 180 = 2 \times 3 \times 5 \times 6 \\ 180 = (2 \times 3 \times 5) 6 & (175) \end{array}$$

Luego 180 dividido por el producto ($2 \times 3 \times 5$) da 6 en el cuociente. L. Q. Q. D.

230. Teorema. *Para dividir una suma por un número, basta dividir todas las partes de la suma por dicho número.*

Se deduce este principio del que damos en el N^o 151.

Sea de dividir, por ejemplo, $15 + 6$ por 3.

La suma $15 + 6$ es el producto del divisor 3 por el cuociente, que ha de ser evidentemente una suma. Ahora bien,

para formar el dividendo, ha debido multiplicarse cada parte del cuociente por el divisor (151). Luego, para dividir $15 + 6$ por 3, bastará dividir 15 por 3, y 6 por 3.

Estos cálculos van representados en la igualdad siguiente:

$$(15 + 6) : 3 = (15 : 3) + (6 : 3) = 5 + 2$$

231. Nota. — Un raciocinio semejante probaría que para dividir una diferencia por un número, basta dividir cada parte de esta diferencia por dicho número.

Así, $15 - 6 : 3 = (15 : 3) - (6 : 3) = 5 - 2$

232. Teorema. No se altera el residuo de una división cuando se añade ó quita al dividendo un múltiplo del divisor.

Este principio es una consecuencia de la definición del residuo (206); porque, ya que el residuo es igual al excedente del dividendo sobre el mayor múltiplo del divisor, si se añade ó quita á este múltiplo un múltiplo del divisor, es evidente que el residuo no se altera. L. Q. Q. D.

233. Teorema. Cuando un número se compone de dos partes, una de las cuales es múltiplo del divisor, y la otra menor que él, esta última es el residuo.

Este principio es también una consecuencia de la definición del residuo (206).

Así, si $153 = 150 + 3$

y si 10 es el divisor, 3 será el residuo, puesto que representa el excedente del dividendo sobre el mayor múltiplo del divisor.

234. Teorema. Cuando se multiplica el dividendo y el divisor por un mismo número, no se altera el cuociente; pero el residuo, si lo hay, queda multiplicado por dicho número.

Siendo 27 el dividendo, 6 el divisor, 4 el cuociente y 3 el residuo, tenemos :

$$27 = 6 \times 4 + 3 \quad (205)$$

Multiplicando ambos miembros por 5, resulta :

$$27 \times 5 = (6 \times 5) 4 + (3 \times 5) \quad (181 \text{ y } 151)$$

Dividamos ambos miembros por (6×5) ,

$$(27 \times 5) : (6 \times 5) = 4 + (3 \times 5) : (6 \times 5) \quad (230)$$

Y ya que 3 es menor que 6 (206), 3×5 será menor que 6×5 (Nº 2, ax. 10); por consiguiente 3×5 es el residuo (233).

L. Q. Q. D.

Demostración general de este principio.

Llamemos A al dividendo, B al divisor, C al cuociente, R al residuo. Tenemos pues :

$$A = BC + R \quad (205)$$

Multipliquemos ambos miembros por un número cualquiera m , por ejemplo :

$$Am = Bm \times C + Rm \quad (151 \text{ y } 181)$$

Dividamos ambos miembros por Bm , y tendremos :

$$\frac{Am}{Bm} = C + \frac{Rm}{Bm} \quad (230)$$

Pero $R < B$ (206); luego $Rm < Bm$; por consiguiente, Rm es el residuo (233). L. Q. Q. D.

Nota. — El signo $>$ se lee *mayor que*; y $<$, *menor que*.

235. Teorema. *Cuando se divide el dividendo y el divisor por un mismo número, no se altera el cuociente; pero el residuo, si lo hay, queda dividido por dicho número.*

Sea 44 el dividendo, 8 el divisor, 5 el cuociente y 4 el residuo; entonces :

$$44 = 8 \times 5 + 4 \quad (205)$$

Dividiendo por 6 ambos miembros, resulta :

$$44 : 6 = (8 : 6) \times 5 + (4 : 6) \quad (224 \text{ y } 230)$$

Dividiendo ambos miembros de esta igualdad por $8 : 6$, tenemos :

$$\frac{44 : 6}{8 : 6} = 5 + \frac{4 : 6}{8 : 6} \quad (224 \text{ y } 230)$$

Y ya que 4 es menor que 8 (206), $4 : 6$ será menor que $8 : 6$ (Nº 2, ax. 10); por consiguiente $4 : 6$ es el residuo.

L. Q. Q. D.

236. Nota. — *Si el dividendo y el divisor rematan en ceros, se puede suprimir á la derecha de ellos igual número de ceros sin alterar el cuociente.*

Porque esto equivale á dividir el dividendo y el divisor por un mismo número. Así,

$$\frac{46\,000}{23\,000} = \frac{46}{23} = 2$$

237. Teorema. *El cuociente de dos potencias de un mismo*

número se obtiene restando el exponente del divisor del exponente del dividendo.

Así, por ejemplo : $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$.

Para comprobar este principio, basta multiplicar el divisor por el cuociente, y debe resultar el dividendo. (217)

Tenemos en efecto : $2^3 \times 2^2 = 2^5$. (190)

Nota. — En álgebra se trata del caso en que el exponente del divisor es igual al del dividendo ó superior á él.

EJERCICIOS ORALES

115. En una división exacta, ¿cómo se encuentra el dividendo, siendo conocidos el divisor y el cuociente?

116. ¿Cómo se encuentra el dividendo si se conoce el divisor, el cuociente y el residuo?

117. En una división exacta, ¿cómo se encuentra el divisor, siendo conocidos el dividendo y el cuociente?

118. ¿Qué debe hacerse para encontrar el residuo cuando se conoce el dividendo, el divisor y el cuociente?

119. ¿Cuándo es el cuociente menor que el dividendo? — y cuándo mayor.

120. ¿Qué sucede en el cuociente si se duplica, triplica, etc., el dividendo?

121. Si se toma la mitad, tercera parte, etc., del dividendo, ¿qué sucede en el cuociente?

122. Si se duplica, triplica, etc., el divisor, ¿qué viene á ser el cuociente?

123. Si se toma la mitad, tercera parte, etc., del divisor, ¿qué pasa á ser el cuociente?

124. ¿Qué alteración ocurre en el producto, cuando se multiplica uno de sus factores por un número?

125. ¿Qué cambio hay en el producto, cuando se divide uno de sus factores por un número?

126. ¿Qué sucede al producto, si se multiplican dos de sus factores por un número?

127. Si se dividen dos factores de un producto por un mismo número, ¿qué cambio se verifica en el producto?

128. Se altera un producto si se multiplica uno de sus factores por un número, y se divide otro factor por el mismo número?

129. ¿Cuál es el divisor si el dividendo es : 1° doble; 2° triple; 3° cuádruple del cuociente?

130. ¿Cuál es el divisor cuando el cuociente es : 1° doble; 2° cuádruple; 3° quintuplo del dividendo?

131. ¿Qué se hace el cuociente de una división : 1° si se aumenta el dividendo; 2° si se disminuye el dividendo; 3° si se disminuye el divisor; 4° si se aumenta el divisor?

132. ¿Qué se hace el cociente de una división: 1º si se añade el divisor al dividendo; 2º si se resta el divisor del dividendo?

133. Dada la suma de dos números y su cociente, ¿qué debe hacerse para encontrar el número menor? — Aplicación: suma 64, cociente 7.

134. Dada la diferencia de dos números y su cociente, ¿cómo se encontrará el menor? — Aplicación: diferencia 144, cociente 13.

135. Habiendo partido el dividendo por un número, 7 por ejemplo, si se multiplica el divisor por este mismo número; ¿qué se hace el cociente?

136. Un número debe dividirse por el producto $3 \times 5 \times 7 \times 9$; ¿qué alteración habría en el cociente si se suprimiera en el divisor: 1º el factor 5; 2º los factores 7 y 9?

137. En lugar de dividir sucesivamente un número por los factores 3 y 8, ¿por qué cantidad sería menester dividirlo para ejecutar una sola división?

138. ¿Cómo podría dividirse un número por 21, haciendo dos divisiones sucesivas?

139. Cuando acontece que el número que se añade al dividendo, aumenta sólo el residuo sin hacer variar el cociente?

140. ¿Cuándo altera el cociente un número que se añade al dividendo?

141. Si una división da residuo, ¿cuál es el menor número que se puede quitar del dividendo para que resulte un cociente exacto?

142. Si la división da residuo, ¿cuál es el menor número que se puede añadir al dividendo para que salga un cociente exacto?

PROBLEMAS

143. ¿Cuántas veces está contenido el número 20 en 4480?

144. ¿Por qué número debe dividirse 106 938 para que resulte 457?

145. ¿Cuál es el número que, multiplicado por 954, da 358 704?

146. El producto de dos números es 390 600, uno de ellos 840, ¿cuál es el otro?

147. ¿Por cuánto debe multiplicarse 347 para tener 331 038?

148. ¿Cuántas horas hay en 840 minutos, sabiendo que una hora tiene 60 minutos?

149. Un cañón dispara 120 tiros por hora, ¿cuántas horas tardará en disparar 1 680 tiros?

150. ¿En cuántas horas recorrerá 252 kilómetros un coche que camina 14 por hora?

151. ¿Cuántos días necesitará un escribiente para copiar un libro de 730 páginas, si copia 3 en 1 hora, y si trabaja 12 horas por día?

152. ¿Cuántos buques son menester para embarcar á 6 840 hombres suponiendo que en uno entren 1 368?

153. Un labrador tiene que trazar 2 304 surcos en su campo; ¿cuántos días tardará en concluirlos, si trabaja 8 horas diarias y pone 5 minutos para cada uno?

154. Un general reparte 110 000 cartuchos á 5 batallones compuestos de 550 hombres cada uno; ¿á cuántos cartuchos le caben á cada soldado?

155. Ciento treinta y cinco páginas de escritura han sido escritas por 45 alumnos, ¿cuántas ha escrito cada uno?

156. El cociente que proviene de la división de un número por otro es 345, y el dividendo 273 585, ¿cuál es el divisor?

157. El cociente de una división es 437, el divisor 413 y el residuo 247 ¿cuál es el dividendo?

158. Un ejército de 6 000 hombres tiene víveres para 5 meses; si se despiden 4 500, ¿cuánto tiempo podrán durar los mismos víveres para los restantes?

159. Compró 150 hectáreas de terreno en \$ 9 750, y vendió una parte de él en \$ 7 140, a \$ 85 la hectár.; deseo saber cuántas me quedan y cuánto he ganado en cada una de las que he vendido.

160. En una semana hay 7 días, ¿cuántas semanas hay en 17 675 días?

161. De la suma de $374 + 1\,562 + 25 + 946$ réstese 2 723; divídase la diferencia por 97; multiplíquese el cociente por 142, y dése el resultado final.

162. El cociente de un número dividido por otro es 37, el divisor 245, y el residuo 230, ¿cuál es el dividendo?

163. Si se multiplica 256 por 25, y del producto se resta 625, y se parte la diferencia por 35, ¿cuál será el cociente?

164. La tierra tiene 25 000 millas de circunferencia; si un vagón de ferrocarril puede caminar 625 millas por día, ¿en cuántos días daría el vagón la vuelta del globo?

165. Cerbeleón compra igual número de vacas y caballos en \$ 9 600; cada vaca le sale a \$ 23, y cada caballo a \$ 97; pregúntase cuántas vacas y caballos ha comprado.

166. Un hacendado compra cierto número de animales en \$ 8 050, vende una parte de ellos en \$ 6 237, a \$ 63 cada uno, y gana en todos éstos \$ 1 683; pregúntase cuántos compró al principio, y qué suma ganó en cada uno de los vendidos.

167. Luciano compra cierta cantidad de barriles de harina en \$ 1 424, y los vende todos en \$ 2 492, ganando así \$ 3 por barril; ¿cuántos barriles compró, y cuánto le costó cada uno?

168. El producto de tres números es 107 100; uno de ellos es 42, y el otro 34, ¿cuál es el tercero?

PROBLEMAS DE RECAPITULACIÓN

SOBRE LAS CUATRO OPERACIONES FUNDAMENTALES

169. Prisciliano nació en 1804 y vivió 44 años; ¿cuál fue el año de su muerte?

170. Marcelino nació cuando tenía 27 años su padre, y contaba 33 cuando murió éste; ¿cuánto tiempo vivió el padre?

171. Germán murió en 1853 de edad de 38 años; ¿cuál fue el año de su nacimiento?

172. Un viaje en ferrocarril, que debe durar 86 horas, empieza el lunes a las cuatro de la mañana; ¿en qué día y hora terminará?

173. Dígase el día y la hora en que principió un viaje de 86 horas, por el mar, sabiendo que terminó el sábado a las 11 del día.

174. ¿Cuántas horas ha durado un viaje por mar, que empezó el lunes a las siete de la mañana, y terminó el miércoles siguiente a las ocho de la noche?

175. Baltasar compra caballos en S 4100; al revenderlos en S 4400, gana S 20 en cada uno; pregúntase cuántos caballos ha comprado.

176. Tres toneles de aguardiente han costado juntos S 675 de compra, S 175 de derechos, y S 50 de transporte y otros gastos; ¿en cuánto debe venderse el litro para ganar en todo S 180, sabiendo que un tonel contiene 120 litros?

177. Dos obreros que trabajaban juntos durante 30 días, han ganado S 150; la ganancia diaria del uno es de S 3, ¿cuál es la del otro?

178. En una familia el padre gana S 5 por día, y la madre S 2; si el gasto diario es de S 3, ¿cuánto habrán economizado al cabo de un mes de 30 días, de los cuales sólo 26 son de trabajo?

179. Heduvis va al mercado con duraznos; ha perdido 35, da 8 á los pobres, vende 7 docenas en el camino y llega con 476, ¿cuántos tenía al salir de su casa?

180. Flavio, que gana S 45 por mes, ha recibido ya S 315; ¿cuántos meses tiene que recibir todavía su sueldo para completar el año?

181. El comerciante Simplicio manda fabricar 16 pares de botas en S 206; vende la mitad á S 14 el par; ¿en cuánto debe vender cada uno de los pares restantes para ganar en todo S 26?

182. Jacinto hace un viaje de 9 días, caminando 20 kilómetros por día; á su regreso no camina más que 12 diarios; ¿cuántos días pondrá para volver?

183. Dos socios se han repartido cierta cantidad: al primero le han cobrado S 445; al segundo, tres veces tanto como al primero, menos S 246; ¿cuál es la suma repartida?

184. Un labrador ha cosechado 784 hectolitros de trigo en un campo, en otro ha cosechado 54 más que en el primero, en otro 172 también más que en el primero, ¿cuántos hectolitros ha cosechado en los dos últimos campos y en todos tres juntos?

185. Un librero ha entregado 1703 volúmenes de una obra, ¿cuántos le habían pedido si él ha dado 1 más en cada docena?

186. Cada vez que un aprendiz gana S 7, su maestro le da S 1 en recompensa; ¿á cuánto asciende el dón del maestro cuando la ganancia del aprendiz es de S 56?

187. Dos individuos se hallan á 50 millas de distancia uno de otro, y vienen á encontrarse, andando el uno 2 millas por hora, y el otro 3; ¿á qué distancia se hallarán después de 5 horas de marcha?

188. Mauricio compra 9 metros de paño, á S 4 cada uno, y da en pago algunos barriles de sidra, á S 3 barril; ¿cuántos barriles ha entregado?

189. Enfrasio concierta un maestro albañil, y conviene en pagarle S 6 por cada 3 días de trabajo; ¿cuánto recibirá el albañil en una semana de 6 días de trabajo, y cuánto en un mes de 4 semanas cabales?

190. El mayor de dos números es 73 veces 109, y la diferencia de ambos es igual á 17 veces 28, ¿cuál es el número menor?

191. La suma de dos números es 360, y el menor 114; ¿cuál es el producto del mayor por el menor?

192. El cociente de una división es 345, el dividendo 273240; ¿cuál es el divisor?

193. El cociente de una división es 437, el divisor 213, y el residuo 196, ¿cuál es el dividendo?

194. Ceferino paga S 294 por igual número de metros de paño de tres

precios diferentes : el 1º de á \$ 5, el 2º de á \$ 7, y el 3º de á \$ 9 metro; ¿cuántos metros ha comprado de cada precio?

195. Jerónimo compra igual número de pollos, patos y gansos en 1776 centavos; los primeros á 12, los segundos á 37, y los terceros á 69 centavos cada uno; ¿cuántas aves ha comprado de cada especie?

196. Enrique paga \$ 18 810 por cierto número de caballos, y vende una parte de ellos en \$ 7 990, á \$ 85 cada uno, perdiendo en este negocio \$ 10 por caballo; ¿en cuánto debe vender los restantes para ganar \$ 2 180 en todos los caballos?

197. ¿Cuál es el número que si se divide por 45, y se aumenta 50 al cociente, y á la suma que resulta se le quita la diferencia de 16 á 28, y el resultado se multiplica por 6, y el producto de esta multiplicación se parte por 24, da 12 en el cociente?

198. ¿De qué número es 3 042 divisor y cociente á un mismo tiempo?

199. ¿Cuál es el número que, dividido por 453, da por cociente 307 y por residuo 109?

200. Si 16 hombres pueden concluir un trabajo en 36 días, ¿en cuánto tiempo lo terminarán con el auxilio de 8 hombres más?

201. ¿Cuál es el dividendo de una división cuyo divisor es 1 111, su cociente 1 111 y su residuo 1 110?

202. Tomás quiere dividir \$ 4 590 en tres partes, de modo que la 2ª tenga \$ 150 menos que la 1ª, la cual debe ser de \$ 1 850; ¿cuál será la 3ª?

203. Se han multiplicado entre sí dos números enteros, siendo el multiplicando 63 y el producto 3 339; pero ha habido un error tomando 3 en vez de 5 en las unidades del multiplicador; ¿cuál debe ser el verdadero producto?

204. Teodosio ha comprado 15 docenas de naranjas en dos sacos; pero hay en el uno 30 naranjas más que en el otro; ¿cuántas corresponden á cada saco?

205. Una madre tiene 30 años y su hija 8; ¿al cabo de cuánto tiempo será la edad de ésta la tercera parte de la de aquélla?

206. Un anciano cuenta 75 años y un nieto suyo 25; ¿cuántos años hace que la edad de éste fue la sexta parte de la de aquél?

207. Se han dado 456 metros de paño en pago de 1 064 de casimir; ¿á cuánto sale el metro de este último género si el de paño importa \$ 14?

208. Una fuente tiene 1 980 litros de capacidad; ¿qué cantidad de agua debe echar por minuto una llave que lo llena en 3 horas?

209. Dos caños arrojan por minuto, el uno 12 litros y el otro 16, y llenan juntos un aljibe en 3 horas 15 minutos; ¿cuántos litros de capacidad tiene el aljibe?

210. Una pila tiene 4 775 litros de capacidad; ¿en cuántas horas la llenarán dos caños que arrojan por minuto, el uno 10 litros y el otro 15 litros?

211. Un estanque de 5 688 litros de capacidad se llena en 3 horas 57 minutos por medio de dos caños, uno de los cuales le da 16 litros por minuto; ¿qué cantidad de agua recibe por minuto del 2º caño?

212. Dos caños llenan un pozo en 2 horas 20 minutos; uno de ellos echa por minuto 10 litros de agua, y el otro 15; ¿en cuántas horas lo llenará el 1º solo?

213. Un convoy de ferrocarril sale con 495 viajeros; en la 1ª estación

deja la novena parte de éstos, y toma 64; en la 2ª estación deja la 3ª parte de los actuales, y toma 42; ¿cuál es entonces el número de viajeros?

214. Un reloj se adelanta 3 minutos cada 2 horas, ¿cuánto ha adelantado al cabo de 18 horas?

215. Un reloj se adelanta 3 minutos cada 4 horas, ¿cuánto habrá adelantado al fin de una semana?

216. Hace ya 45 horas que un reloj se adelanta 3 minutos cada 5 horas; ¿qué hora señala el reloj cuando son las 8 y 50 minutos?

217. Ya hace 18 horas que se adelanta un reloj; ¿cuánto se adelanta por hora, si señala las 5 y 25 minutos cuando son las 5 y 16 minutos?

218. Un reloj se adelanta 3 minutos cada 4 horas: ¿cuántas horas há que empezó á adelantarse, sabiendo que el adelanto es de 12 minutos?

219. Desde las 4 de la mañana se adelanta un reloj 2 minutos cada 3 horas; ¿qué hora señalará á las 7 de la noche?

220. Un reloj se adelanta 3 minutos cada 2 horas; ¿desde cuándo ha empezado á adelantarse, si cuando son las 5 señala las 5 y 27 minutos?

221. Un reloj se adelanta 2 minutos en 3 horas; ¿á qué hora empezó á adelantarse, si á las 10 y 20 minutos de la noche señala las 10 y 32 minutos?

222. Hace 22 horas que un reloj se atrasa 1 minuto cada 2 horas; ¿qué hora es cuando el reloj señala las 8 y 55 minutos?

223. Ya hace 33 horas que un reloj se atrasa 2 minutos cada tres horas; ¿qué hora señala este reloj cuando son las 3 y 8 minutos?

224. Hace 45 horas que un reloj está atrasado; ¿de cuánto es el atraso por hora, sabiendo que señala las 2 y 48 minutos cuando son las 3 y 18 minutos?

225. Un reloj se atrasa 3 minutos cada 5 horas; ¿cuánto tiempo hace que empezó á atrasarse, si señala las 4 y 18 minutos cuando son las 5 y 9 minutos?

226. Desde las 6 de la tarde, se atrasa un reloj 3 minutos cada 2 horas; ¿qué hora señala el día siguiente á las 10 del día?

227. Un reloj se atrasa 2 minutos cada 5 horas; ¿en qué día y hora empezó el atraso, si el sábado á las 4 y 5 minutos de la mañana, señala las 3 y 35 minutos?

228. Dos correos salen á un mismo tiempo de dos ciudades distantes 360 millas una de otra; el 1º camina 6 millas por hora, y el 2º 9; ¿al cabo de cuánto tiempo se encontrarán, si andan 11 horas por día, y á qué distancia de ambas ciudades?

229. Por 48 días de trabajo 19 obreros han recibido \$ 2 976; á cada uno de los 12 primeros le toca el duplo de cada uno de los otros 7; pregúntase á cómo gana cada obrero por día.

230. Un peón que camina 5 leguas por día de 10 horas de marcha sale de Ambato con dirección á Guayaquil; dos días después, un caballero que camina 15 leguas por día sale de Quito también con dirección á Guayaquil. Como hay 24 leguas de Quito á Ambato, ¿en cuántos días alcanzará el caballero al peón?

LIBRO II

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS

LECCIÓN PRIMERA

DIVISIBILIDAD

§ I. Definiciones y teoremas preliminares.

238. Un número es **divisible** por otro cuando al partir el primero por el segundo resulta un cuociente entero, sin quedar ningún residuo.

Por ejemplo, 18 es divisible por 6, porque al partir 18 por 6, resulta por cuociente el número entero 3, y no queda residuo ninguno.

239. Llámase **submúltiplo**, **factor** ó **divisor** de un número entero, otro número entero contenido exactamente en el primero dos ó más veces.

Así, 5 es divisor ó submúltiplo de 20 porque está contenido 4 veces exactamente en 20; del mismo modo, 2, 3, 6 y 9 son divisores ó factores de 18.

240. Llámase **divisor común** de varios números el número que los divide á todos exactamente.

241. A los submúltiplos de un número también se les da el nombre de partes **alicuotas**.

242. Llámase **múltiplo** el número que contiene á otro dos ó más veces exactamente.

Así, 15 es múltiplo de 3 porque lo contiene exactamente 5 veces.

243. Número **par** es el que se puede dividir en dos canti-

dades iguales sin quebrado, y remata por consiguiente en un guarismo par; v. g. : 12, 20.

244. Guarismos pares son el cero y las cifras divisibles por 2, á saber : 2, 4, 6, 8.

245. Número impar ó non es aquél cuya mitad contiene algún quebrado; y remata por consiguiente en un guarismo impar; v. g. : 31, 47.

246. Llámense guarismos impares los que no pueden dividirse por 2, y son : 1, 3, 5, 7, 9.

247. Teorema. Cuando un número es divisor común de varios otros, divide también á la suma de ellos.

Sean los números 6, 12 y 15, que tienen por divisor común á 3, digo que este número divide también á la suma de dichos números. En efecto :

$$6 = 3 \times 2$$

$$12 = 3 \times 4$$

$$15 = 3 \times 5$$

Sumando ordenadamente, miembro por miembro, resulta :

$$6 + 12 + 15 = 3(2 + 4 + 5) \quad (152)$$

$$\text{luego 3 divide á } (6 + 12 + 15). \quad (203)$$

L. Q. Q. D.

248. Corolario. — Como los números 6, 12 y 15 son múltiplos de 3, se deduce que : la suma de varios múltiplos de un número es también múltiplo de dicho número.

249. Teorema. Cuando un número es divisor común de otros dos, divide también á la diferencia de ellos.

Sean los números 18 y 6, que tienen por divisor común á 3; digo que este número divide también á la diferencia de ambos. En efecto :

$$18 = 3 \times 6$$

$$6 = 3 \times 2$$

Restando ordenadamente, miembro por miembro, resulta :

$$18 - 6 = 3(6 - 2) \quad (154)$$

$$\text{luego 3 divide á } (18 - 6) \quad (203)$$

L. Q. Q. D.

250. Corolario I. — Como los números 18 y 6 son múltiplos de 3, se deduce que : la diferencia de dos múltiplos de un número es también múltiplo de dicho número.

251. Corolario II. Cuando un número es divisor común

de una suma y de una de sus partes, lo es también de la otra.

En efecto, si $20 = 12 + 8$
 $8 = 20 - 12$ (Nº 2, ax. 6.)

Ahora bien, si 20 y 12 son divisibles por 4, 8 lo será también. (249)

252. Corolario III. — Cuando una de las dos partes de una suma admite un divisor y la otra no, la suma total no lo admitirá tampoco.

En efecto, si la suma admitiera el mismo divisor que una de sus partes, la otra parte debería también admitirlo, ya que es la diferencia entre la suma y la 1ª parte; lo que es contra la hipótesis.

Así, por ejemplo, $60 = 36 + 24$. El número 9 divide á 36 y no á 24; luego la suma 60 no será divisible por 9.

253. Teorema. Cuando se combinan varios múltiplos de un número por adición y sustracción, el resultado es también múltiplo de dicho número.

Este principio se deduce de lo expuesto en los nos 248 y 250, observando que las operaciones indicadas en este teorema equivalen á reunir por una parte los múltiplos que han de sumarse, y por otra los que han de restarse, y en seguida buscar la diferencia de los dos resultados. Así, combínense, como se indica, los múltiplos siguientes del factor 3.

$$18 + 12 - 15 - 6 + 21 = (18 + 12 + 21) - (15 + 6) \\ = 51 - 21 = 30$$

254. Teorema. Cualquier múltiplo de un número admite los divisores de dicho número.

Sea 30 múltiplo de 6; digo que 2 y 3, factores de 6, dividen á 30. En efecto :

$$30 = 6 \times 5 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 \quad (141)$$

Pero, por hipótesis, 2 y 3 dividen á 6, luego dividen á 30. (248) L. Q. Q. D.

255. Corolario I. — Como 6 es múltiplo de 2 y de 3, lo mismo que 30, resulta que un múltiplo de varios números, repetido algunas veces, es también múltiplo de dichos números.

256. Corolario II. — Cualquier número que divide al dividendo y al divisor divide también al residuo.

Sea el dividendo 54, el divisor 12, el cuociente 4 y el residuo 6. Tenemos :

$$54 = 12 \times 4 + 6 \quad (205)$$

Si 3 divide á 54 y á 12, divide también á 6.

En efecto, como 3 divide á 54 y á 12, divide también á 12×4 (254); y si 3 divide á 54 y á 12×4 , divide también á 6 (251). L. Q. Q. D.

257. Teorema. *Cuando entre dos partes de una suma, la una admite un divisor y la otra no, el residuo de la división de la suma por este divisor es el mismo que el que da la parte no divisible.*

Sea $47 = 30 + 17$, y 6 el divisor de 30; tendremos :

$$30 = 6 \times 5$$

$$17 = 6 \times 2 + 5$$

Sumando ordenadamente, miembro por miembro, resulta :

$$30 + 17 = 6(5 + 2) + 5$$

$$47 = 6 \times 7 + 5$$

Ahora bien, el residuo de la división de 17 por 6 es 5. (233)

Del mismo modo el residuo de la división de 47 por 6 es también 5 (233). L. Q. Q. D.

§ II. Caracteres de divisibilidad.

258. Por caracteres de divisibilidad de los números se entiende en qué se conoce prontamente si éstos pueden ser divididos por otros números.

Observaciones sobre los potencias de 10.

259. *Cualquier potencia de 10 es igual á la unidad seguida de tantos ceros cuantos lo indica el exponente de la potencia.*

Porque : $10^1 = 10$

$$10^2 = 10 \times 10 \text{ (186) } = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$$

y así en adelante.

260. *Cualquier múltiplo de 10 es divisible por 2 y por 5.*

Porque, ya que $10 = 2 \times 5$, cualquier múltiplo de 10 contiene los factores 2 y 5 (254).

261. *Cualquier múltiplo de 100 es divisible por 4 y por 25.*

Porque, ya que $100 = 10^2 = 2^2 \times 5^2 = 4 \times 25$, cualquier múltiplo de 100 contiene los factores 4 y 25 (254).

262. *Cualquier múltiplo de 1000 es divisible por 8 y por 125.*

Porque, ya que $1000 = 10^3 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125$, cualquier múltiplo de 1000 contiene los factores 8 y 125 (254).

Divisibilidad por 10, 100, 1000, 10^n .

263. Teorema. *Nunca puede tener ningún número un divisor mayor que la mitad de él mismo.*

Si dividimos 30 por su mitad 15, tendremos :

$$30 : 15 = 2$$

Ahora bien, si se añadiera al divisor 15, aunque no fuera más que una unidad, sin añadir nada al dividendo, es claro que el cuociente disminuirá. Pero entre 1 y 2 no hay cuociente entero.

L. Q. Q. D.

264. Teorema. *El residuo de la división de un número por 10 es el primer guarismo que queda á la derecha de este número.*

Sea de dividir 456 por 10; sabemos que

$$456 = 450 + 6$$

El número $450 = 45 \times 10$ (161 corol.). Luego 450 es divisible por 10 (203).

El residuo de 456 dividido por 10 es el mismo que el de 6 dividido por 10 (257).

Pero este residuo es 6 (233).

L. Q. Q. D.

265. De esto se deduce que : *Para que un número sea divisible por 10, es menester y suficiente que su primer guarismo de la derecha sea un cero.*

266. Teorema. *El residuo de la división de un número por 100 ó 10^2 es el mismo que el número formado por los dos primeros guarismos de la derecha de este número.*

Sea de dividir 456 por 100; sabemos que

$$456 = 400 + 56$$

El número $400 = 4 \times 100$ (161 corol.). Luego 400 es divisible por 100 (203).

El residuo de 456 dividido por 100 es el mismo que el de 56 dividido por 100 (257).

Pero este residuo es 56 (233).

L. Q. Q. D.

267. De esto se deduce que : *Para que un número sea divisible por 100, es menester y suficiente que sus dos primeros guarismos de la derecha sean dos ceros.*

268. Teorema. *El residuo de la división de un número por 1000 ó 10^3 es el mismo que el número formado por los tres primeros guarismos de la derecha de este número.*

Sea de dividir 3456 por 1000; sabemos que

$$3456 = 3000 + 456$$

El número $3000 = 3 \times 1000$ (**161** corol.). Luego 3000 es divisible por 1000 (**203**).

El residuo de 3456 dividido por 1000 es el mismo que el de 456 dividido por 1000 (**257**).

Pero este residuo es 456 (**233**). L. Q. Q. D.

269. De esto se deduce que : *Para que un número sea divisible por 1000, es menester y suficiente que sus tres primeros guarismos de la derecha sean tres ceros.*

270. Nota. De estos raciocinios se deduce que : *Un número es divisible por 10^n cuando remata en N ceros.*

Divisibilidad por 2, 4, 8, 2^n .

271. Teorema. *El residuo de la división de un número por 2 se encuentra dividiendo por 2 la primera cifra de la derecha de este número.*

Sea de dividir 457 por 2; sabemos que

$$457 = 450 + 7$$

Pero 450 es divisible por 2 (**260**).

Luego el residuo de 457 dividido por 2 es el mismo que el de 7 dividido por 2 (**257**). L. Q. Q. D.

272. De esto se deduce que : *Para que un número sea divisible por 2, es menester y suficiente que su primera cifra de la derecha sea par ó cero.*

273. Teorema. *El residuo de la división de un número por 4 ó 2^2 se encuentra dividiendo por 4 el número formado por las dos primeras cifras de la derecha de este número.*

Sea de dividir 457 por 4; sabemos que

$$457 = 400 + 57$$

Pero 400 es divisible por 4 (**261**).

Luego el residuo de 457 dividido por 4 es el mismo que el de 57 dividido por 4 (257). L. Q. Q. D.

274. De esto se deduce que : Para que un número sea divisible por 4, es menester y suficiente que sus dos primeras cifras de la derecha sean dos ceros ó expresen un múltiplo de 4.

275. Teorema. El residuo de la división de un número por 8 ó 2^3 se encuentra dividiendo por 8 el número formado por las tres primeras cifras de la derecha de este número.

Sea de dividir 3457 por 8; sabemos que

$$3457 = 3000 + 457$$

Pero 3000 es divisible por 8 (262).

Luego el residuo de 3457 dividido por 8 es el mismo que el de 457 dividido por 8 (257). L. Q. Q. D.

276. De esto se deduce que : Para que un número sea divisible por 8, es menester y suficiente que sus tres primeras cifras de la derecha sean tres ceros ó expresen un múltiplo de 8.

277. Nota. De estos raciocinios se deduce que : Un número es divisible por 2^n , cuando sus n primeras cifras de la derecha son N ceros ó expresan un múltiplo de 2^n .

Divisibilidad por 5, 25 125, 5^n .

278. Teorema. El residuo de la división de un número por 5 se encuentra dividiendo por 5 su primera cifra de la derecha.

Sea de dividir 457 por 5; sabemos que

$$457 = 450 + 7$$

Pero 450 es divisible por 5 (260).

Luego el residuo de 457 dividido por 5 es el mismo que el de 7 dividido por 5 (257). L. Q. Q. D.

279. De esto se deduce que : Para que un número sea divisible por 5, es menester y suficiente que su primera cifra de la derecha sea 5 ó cero.

280. Teorema. El residuo de la división de un número

por 25 ó 5^2 se encuentra dividiendo por 25 el número formado por las dos primeras cifras de la derecha de este número.

Sea de dividir 457 por 25; sabemos que

$$457 = 400 + 57$$

Pero 400 es divisible por 25 (261).

Luego el residuo de 457 dividido por 25 es el mismo que el de 57 dividido por 25 (257). L. Q. Q. D.

281. De esto se deduce que : Para que un número sea divisible por 25, es menester y suficiente que sus dos primeras cifras de la derecha sean dos ceros ó expresen un múltiplo de 25.

282. Teorema. El residuo de la división de un número por 125 ó 5^3 se encuentra dividiendo por 125 el número formado por las tres primeras cifras de la derecha de este número.

Sea de dividir 3457 por 125; sabemos que

$$3457 = 3000 + 457$$

Pero 3000 es divisible por 125 (262).

Luego el residuo de 3457 dividido por 125 es el mismo que el de 457 dividido por 125 (257). L. Q. Q. D.

283. De esto se deduce que : Para que un número sea divisible por 125, es menester y suficiente que sus tres primeras cifras de la derecha sean tres ceros ó expresen un múltiplo de 125.

284. Nota. De estos raciocinios se deduce que: Un número es divisible por 5^n , cuando sus N primeras cifras de la derecha son n ceros ó expresan un múltiplo de 5^n .

Divisibilidad por 9 y por 3.

285. Teorema. El residuo de la división de un número por 9 se encuentra dividiendo por 9 la suma de los guarismos que lo componen.

Para demostrarlo, observemos que :

286. Cualquier cifra significativa seguida de uno ó más ceros es un múltiplo de 9 aumentado de dicha cifra.

Porque :

$$\begin{aligned}
 10 &= 9 + 1 = \text{mult. de } 9 + 1 \\
 100 &= 10 \times 10 = (m9 + 1)10 = m9 + 10 \quad (151) = \\
 &\quad m9 + m9 + 1 = m9 + 1 \quad (248) \\
 1000 &= 100 \times 10 = (m9 + 1)10 = m9 + 10 = m9 + \\
 &\quad m9 + 1 = m9 + 1
 \end{aligned}$$

y así en adelante.

Multipliquemos los miembros extremos de estas igualdades por cualesquier números de un solo guarismo, v. g. por 2, 3, 4, y resulta :

$$\begin{aligned}
 20 &= m9 + 2 & (151) \\
 30 &= m9 + 3 \\
 40 &= m9 + 4
 \end{aligned}$$

Siendo esto así, consideremos el número 12345, para fijar la atención, y tenemos :

$$12345 = \begin{cases} 10000 = m9 + 1 \\ 2000 = m9 + 2 \\ 300 = m9 + 3 \\ 40 = m9 + 4 \\ 5 = +5 \end{cases}$$

Sumemos ordenadamente estas igualdades, miembro por miembro :

$$12345 = m9 + 15 \quad (\text{N}^{\circ} 2, \text{ ax. } 9, \text{ y } 248).$$

Pero 9 divide al múltiplo de 9. (203)

Luego el residuo de 12345 dividido por 9 es el mismo que el de 15 dividido por 9 (257). L. Q. Q. D.

287. De esto se deduce que : *Para que un número sea divisible por 9, es menester y suficiente que la suma de sus guarismos significativos sea un múltiplo de 9.*

288. Teorema. *El residuo de la división de un número por 3 es el mismo que el de la suma de sus guarismos dividida por 3.*

Sea N un número cualquiera, y s la suma de sus guarismos, entonces :

$$N = m9 + s \quad (285)$$

Pero el número 3 divide á m9 (254).

Luego el residuo de N dividido por 3 es el mismo que el de s dividido por 3 (257). L. Q. Q. D.

289. De esto se deduce que : *Para que un número sea divisible por 3, es menester y suficiente que la suma de sus guarismos sea un múltiplo de 3.*

Divisibilidad por 11.

290. Teorema. *El residuo de la división de un número por 11 se encuentra dividiendo por 11 el exceso de la suma de los guarismos de orden impar sobre la de los guarismos de orden par, contados de derecha á izquierda.*

Para demostrarlo, observemos que :

291. *Todo guarismo de orden impar representa un múltiplo de 11 más dicho guarismo, y todo guarismo de orden par, un múltiplo de 11 menos dicho guarismo; porque*

$$\begin{aligned}
 10 &= 11 - 1 = m\,11 - 1 \\
 100 &= 10 \times 10 = (m\,11 - 1) 10 = m\,11 - 10 \quad (153) = m\,11 - m\,11 + 1 \quad (136) = m\,11 + 1 \quad (250) \\
 1000 &= 100 \times 10 = (m\,11 + 1) 10 = m\,11 + 10 = m\,11 + m\,11 - 1 = m\,11 - 1 \\
 10000 &= 1000 \times 10 = (m\,11 - 1) 10 = m\,11 - 10 = m\,11 - m\,11 + 1 = m\,11 + 1 \\
 100000 &= 10000 \times 10 = (m\,11 + 1) 10 = m\,11 + 10 = m\,11 + m\,11 - 1 = m\,11 - 1
 \end{aligned}$$

Multipliquemos los miembros extremos de estas igualdades, v. g., por 2, 3, 4, 5, 6, y resulta :

$$\begin{aligned}
 20 &= m\,11 - 2 & (153) \\
 300 &= m\,11 + 3 & (151) \\
 4000 &= m\,11 - 4 \\
 50000 &= m\,11 + 5 \\
 600000 &= m\,11 - 6
 \end{aligned}$$

L. Q. Q. D.

Y ahora, para fijar la atención, consideremos un número cualquiera, 1234567, por ejemplo :

$$1.234.567 = \left\{ \begin{array}{l} 1000000 = m\,11 + 1 \\ 200000 = m\,11 - 2 \\ 30000 = m\,11 + 3 \\ 4000 = m\,11 - 4 \\ 500 = m\,11 + 5 \\ 60 = m\,11 - 6 \\ 7 = \quad \quad + 7 \end{array} \right.$$

Sumando ordenadamente, y miembro por miembro, resulta :

$$\begin{array}{l} 1.234.567 = m\ 11 + (1 + 3 + 5 + 7) - (2 + 4 + 6) \\ \delta \quad \quad \quad 1.234.567 = m\ 11 + (16 - 12) \end{array}$$

Pero 11 divide á $m\ 11$. (203)

Luego el residuo de 1.234.567 dividido por 11 es el mismo que el de $16 - 12$ dividido por 11 (257). L. Q. Q. D.

292. De esto se deduce que : *Para que un número sea divisible por 11, es menester y suficiente que la suma de los guarismos de orden impar, menos la de los guarismos de orden par, sea cero ó un múltiplo de 11.*

293. Nota. — Puede acontecer que la suma de los guarismos de orden impar sea menor que la de los de orden par; entonces se agrega á la primera, según el caso, 11 ó un múltiplo de 11, sin que por eso se altere la diferencia (232).

§ V. Pruebas por 9.

294. Teorema. *Cuando se dividen varios números como también la suma de ellos por un mismo divisor, el residuo de la suma y el del total de los residuos de los números, dividido por dicho divisor, son cantidades iguales.*

Sean los números 345, 1534, 1237, y el divisor 9. Tenemos :

$$\begin{array}{r} 345 = m\ 9 + 3 \\ 1534 = m\ 9 + 4 \\ 1237 = m\ 9 + 4 \end{array} \quad (285)$$

Sumándolos, tenemos : $3116 = m\ 9 + 11$

El residuo de 3116 dividido por 9 es el mismo que el de 11 dividido por 9 (257). L. Q. Q. D.

295. Prueba por 9 de la adición. — La prueba por 9 de la adición se funda en el principio que acabamos de demostrar. Para esto, se busca el residuo que da cada sumando dividido por 9, así como el de la suma total dividida también por 9; se suman los residuos de los sumandos, cuyo total se divide aún por 9. Este último residuo debe ser igual al de la suma total.

EJEMPLO :

Residuos

$$\text{Sumandos } \left\{ \begin{array}{rcl} 435 & \text{—} & 3 \\ 27 & \text{—} & 0 \\ 4039 & \text{—} & 7 \end{array} \right\} 1, \text{ residuo de la suma de los residuos.}$$

$$\text{Total } \underline{4501} \text{ ————— } 1, \text{ residuo de la suma total.}$$

296. Teorema. *Cuando se dividen dos números y su producto por un mismo divisor, resultan tres residuos. El producto de los dos primeros, dividido por este divisor, debe ser igual al tercero.*

Sean los números 345 y 29, y el divisor 9. Tenemos :

$$\begin{aligned} 345 &= m9 + 3 & (285) \\ 29 &= m9 + 2 \end{aligned}$$

Multiplicando ordenadamente, miembro por miembro, resulta :

$$345 \times 29 = m9 \times m9 + 3 \times m9 + 2 \times m9 + 3 \times 2 \quad (156)$$

$$6 \qquad 345 \times 29 = m9 + 3 \times 2 \quad (248)$$

Pero el residuo de 345×29 dividido por 9 es el mismo que el de 3×2 dividido por 9 (257). L. Q. Q. D.

297. Prueba por 9 de la multiplicación. — La prueba por 9 de la multiplicación se funda en el principio que acabamos de demostrar. Para esto, *se buscan los residuos que dan el multiplicando, el multiplicador y el producto divididos por 9. Se multiplican entre sí los dos primeros residuos, y su producto dividido por 9 debe dar un residuo igual al del producto total.*

EJEMPLO :

Residuos

$$\text{Factores } \left\{ \begin{array}{rcl} 357 & \text{—} & 6 \\ 24 & \text{—} & 6 \end{array} \right\} 36 \text{ — } 0, \text{ residuo de los factores.}$$

 1428

 714

$$\text{Producto } \underline{8568} \text{ ————— } 0, \text{ residuo del producto.}$$

298. Prueba por 9 de la división. — La prueba por 9 de la división se deduce de la de la multiplicación por 9, teniendo

presente que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo, si lo hay.

Para esto, se buscan los residuos que dan el dividendo, divisor, cociente y residuo divididos por 9. Se multiplican entre sí los residuos del divisor y del cociente, á cuyo producto se añade el cuarto residuo. El residuo de la división de esta última suma dividida por 9 debe igualar al del dividendo.

EJEMPLO :

		Residuos	
1745	23	5	} 15 — 6, residuo de los factores.
135	75	3	
20	.	.	2, residuo del residuo.
8, residuo del dividendo			8, residuo de la suma.

299. Nota I. — Cuando la división es exacta, el residuo del dividendo es igual al producto de los residuos del divisor y del cociente, dividido por 9.

300. Nota II. — Las pruebas por 9 no son exactas cuando los errores cometidos en los cálculos son de 9 ó de un múltiplo de 9. Si se hicieran estas pruebas por 11, tampoco serían exactas si los errores fueran de 11 ó de un múltiplo de 11.

Pero si las pruebas por 9 y por 11, ejecutadas sucesivamente, no indicaran ningún error, éste, si lo hubiera, no podría ser sino de un múltiplo de 9 y de 11, esto es, de 99.

LECCIÓN II

DEL MÁXIMO DIVISOR COMÚN

301. Máximo divisor común de dos ó más números es el mayor número que los divide á todos sin residuo.

Nota. — Designamos el máximo divisor común por medio de las iniciales *m. d. c.*

302. Problema. — *Búsquese el máximo divisor común de los números 117 y 51.*

Primer método.

El *m. d. c.* de 117 y de 51 no puede ser mayor que 51, puesto que debe dividirlo; pero sería 51 mismo, dado caso que 51 dividiera á 117 sin residuo. Tenemos, pues, que dividir 117 por 51.

$$\begin{array}{r|l} 117 & 51 \\ 15 & 2 \end{array}$$

de donde : $117 = 51 \times 2 + 15$ (205)

Pero todo divisor común de 117 y de 51 divide á 15 (256).

Recíprocamente, todo divisor común de 15 y de 51, que divida á 51×2 (254), dividirá también á 117 (248). Luego, los divisores comunes de 117 y de 51 son los mismos que los de 51 y de 15; por consiguiente, el *m. d. c.* de 117 y de 51 será el mismo que el de 51 y de 15. De donde se deduce este principio.

303. Teorema. *El m. d. c. de dos números es el mismo que el del menor de ellos y del residuo de su división.*

Ahora bien, el *m. d. c.* de 51 y de 15 sería 15 mismo suponiendo que dividiera exactamente á 51. Tenemos pues todavía que dividir 51 por 15.

$$\begin{array}{r|l} 51 & 15 \\ 6 & 3 \end{array}$$

de donde : $51 = 15 \times 3 + 6$ (205)

Pero el *m. d. c.* de 51 y de 15 es el mismo que el de 15 y de 6 (303); por consiguiente este *m. d. c.* sería 6, dado caso que 6 dividiera exactamente á 15. Dividamos 15 por 6 :

$$\begin{array}{r|l} 15 & 6 \\ 3 & 2 \end{array}$$

de donde : $15 = 6 \times 2 + 3$ (205)

Así también, dividamos 6 por 3 :

$$\begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ 0 & 2 \end{array}$$

de donde : $6 = 3 \times 2 + 0$

La última igualdad manifiesta que 3 es el *m. d. c.* de 6 y de 3.

Pero el *m. d. c.* de 6 y de 3 es el mismo que los de 15 y

de 6, de 51 y de 15, de 117 y de 51. De donde sacamos la siguiente :

304. Regla. — *Para encontrar el m. d. c. de dos números, se divide el mayor por el menor. Si no hay residuo, el número menor es el m. d. c.; si hay residuo, se divide el divisor por este residuo, en seguida, el 1er residuo por el 2º, el 2º por el 3º, y así en adelante, hasta que no quede residuo. Entonces el último divisor empleado es el m. d. c. pedido.*

Segundo método.

305. Se enuncia primero la regla anterior. Luégo, según esta regla, se disponen los cálculos como sigue :

117	2	3	2	2	cuocientes
51	51	15	6	3	divisores
15	6	3	0		residuos.

Estos cálculos dan las igualdades siguientes :

$$117 = 51 \times 2 + 15$$

$$51 = 15 \times 3 + 6$$

$$15 = 6 \times 2 + 3$$

$$6 = 3 \times 2$$

Demostremos ahora :

- 1º que 3 es divisor común de 117 y de 51;
- 2º que 3 es el m. d. c. de estos dos números.

I. El número 3 evidentemente se divide á sí mismo; divide también á su múltiplo 6. Ya que divide á 6, divide también á 6×2 (254), divide también á 15 (248). Ya que divide á 15, divide también á 15×3 , divide igualmente á 51. Ya que divide á 51, divide también á 51×2 , y también á 117. Luego 3 es divisor común de 117 y de 51.

II. Es también el máximo divisor común. En efecto, supon- gamos un número N mayor que 3 que sea el m. d. c. de estos dos números.

Si el número N divide á 117 y á 51, dividirá también á 15 (303). Dividiendo á 51 y á 15, dividirá á 6. Dividiendo á 15 y á 6, dividirá á 3, lo que es imposible, puesto que N es mayor que 3.

Ya que 3 divide á 117 y á 51, y que un número mayor que 3 no podría dividirlos, 3 es el m. d. c. pedido.

L. Q. Q. D.

306. Nota I. — *Cualquier divisor común de dos números divide á los residuos sucesivos que resultan al buscar el m. d. c. de estos dos números.*

307. Nota II. — *El m. d. c. de dos números es el mismo que el de dos residuos consecutivos cualesquiera.*

308. Nota III. — *Cualquier divisor común de dos números divide á su m. d. c.*

Puesto que divide á todos los residuos sucesivos, y que el m. d. c. es uno de estos residuos.

309. Nota IV. — *Cuando los dos números son primos entre sí, al buscar el m. d. c. se encuentra necesariamente la unidad.*

Porque, como los residuos sucesivos van disminuyendo siempre, el último será *cero* ó la *unidad*. Ya que no puede ser *cero*, tiene que ser la *unidad*.

Máximo divisor común de varios números.

310. Regla. *Para encontrar el m. d. c. de varios números, se busca el de los dos primeros; en seguida el m. d. c. de este último y del 3º número, y así en adelante. El último m. d. c. encontrado es el de los números propuestos.*

Sean los números 48, 18 y 15. Según la regla, busquemos el m. d. c. de 48 y de 18 (**304**). Sea

6 este m. d. c.

Busquemos en seguida el de 15 y 6. Sea 3 este último.

Demostremos ahora que 3 es el m. d. c. de 48, 18 y 15.

En efecto, 3 es *divisor común* de estos tres números, porque ya que 3 divide á 6, divide también á 48 y á 18 (**254**). Luego divide á 48, 18 y 15.

Además 3 es el m. d. c. de estos tres números.

Porque, si suponemos un número $N > 3$ que sea este m. d. c., como N divide á 48 y 18, dividirá también á 6 (**308**). Si N divide á 6 y 15, dividirá igualmente á 3 (**308**). lo que es imposible, puesto que N es mayor que 3. Luego 3 es el m. d. c. de 48, 18 y 15.

L. Q. Q. D.

311. Nota I. — *Cualquier divisor común de varios números divide á su m. d. c.*

Porque en el ejemplo anterior, cualquier divisor común

de 48 y 18 divide á 6 (308), y cualquier divisor común de 6 y 15 divide á 3. Luego divide á su *m. d. c.*

312. Nota II. — Si los números son primos entre sí, al buscar el *m. d. c.* resulta la unidad.

Porque se puede notar que los *m. d. c.* van disminuyendo sucesivamente. El último será necesariamente *cero* ó la *unidad*. Como no puede ser *cero*, ha de ser la *unidad*.

313. Teorema. Cuando se multiplican varios números por ótro, el *m. d. c.* de ellos queda multiplicado también por dicho número.

1^o Caso de 2 números. Sean los números 51 y 15.

Al buscar el *m. d. c.* de estos dos números, tenemos las igualdades siguientes :

$$51 = 15 \times 3 + 6$$

$$15 = 6 \times 2 + 3$$

$$6 = 3 \times 2$$

Y 3 es el *m. d. c.* de estos dos números. (304)

Si multiplicamos estas igualdades por un mismo número, 7 por ejemplo, tendremos :

$$51 \times 7 = (15 \times 7) 3 + (6 \times 7) \quad (304)$$

$$15 \times 7 = (6 \times 7) 2 + (3 \times 7)$$

$$6 \times 7 = (3 \times 7) 2$$

Al buscar el *m. d. c.* de 51×7 y de 15×7 resultan los residuos 6×7 y 3×7 ; el último residuo 3×7 es el *m. d. c.* de estos dos números. (304)

2^o Caso de más de dos números. Sean los números 48, 18 y 15.

Al buscar el *m. d. c.* de estos números resulta que es 3.

$$\begin{array}{r} 48 \qquad 18 \qquad 15 \\ \hline \qquad 6 \\ \hline \qquad \qquad 3 \end{array}$$

Si multiplicamos estos números por 7, al buscar el *m. d. c.* tendremos por último residuo 3×7 , el cual es el *m. d. c.* de 48×7 , 18×7 y 15×7 (310).

$$\begin{array}{r} 48 \times 7 \quad 18 \times 7 \quad 15 \times 7 \\ \hline \qquad 6 \times 7 \qquad 15 \times 7 \\ \hline \qquad \qquad 3 \times 7 \end{array}$$

L. Q. Q. D.

314. Nota. — De igual modo se demuestra que cuando se dividen varios números por ótro, el *m. d. c.* de ellos queda dividido también por dicho número.

LECCIÓN III

DE LOS NÚMEROS PRIMOS

§ I. Propiedades.

315. Llámase **número primo** el que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad; v. g. : 3, 5, 17, son números primos.

316. Dos ó más números son **primos entre sí** cuando no tienen otro divisor común que la unidad, aunque cada uno separadamente no sea primo; v. g. : 4 y 13, 16 y 27, son números primos entre sí; lo mismo que 12, 25, 91.

317. Teorema. *Dos números enteros consecutivos son primos entre sí.*

Sean los números 24 y 25. Tenemos :

$$25 = 24 + 1$$

Ahora bien, cualquier número que dividiera á 25 y á 24 debería también dividir á 1 (**251**); lo que es imposible.

318. Teorema. *Cualquier número primo que no divide á otro es primo con él.*

Sea 7, que no divide á 64; digo que estos dos números son primos entre sí.

En efecto, si 7 y 64 no fueran primos entre sí, admitirían un divisor común. Este divisor tendría que dividir á 7, número primo; lo que es imposible.

319. Teorema. *Cuando se dividen varios números por su m. d. c., los cuocientes son primos entre sí.*

Sean los números 48, 18 y 15, que se han dividido por su m. d. c. 3; demostremos que sus cuocientes respectivos 16, 6 y 5 son primos entre sí.

En efecto, si los cuocientes 16, 6 y 5 no fueran primos entre sí, admitirían un divisor común. Supongamos que sea 2 este divisor.

Multipliquemos por 3 los números 16, 6 y 5; los productos 48, 18 y 15 tendrían por m. d. c. á 2×3 , ó 6 (**313**); lo que es contra la hipótesis.

48	18	15
	: 3	
16	6	5
	2	
16×3	6×3	5×2
ó	2×3	
48	18	15
	6	

320. Recíprocamente. Cuando varios números divididos por ótro han dado cuocientes primos entre sí, el número que ha servido de divisor es su *m. d. c.*

Supongamos que los números 48, 18 y 15, divididos por 3, hayan dado por cuocientes los números 16, 6 y 5, primos entre sí. Demostremos que 3 es el *m. d. c.* de 48, 18 y 15.

En efecto, ya que por hipótesis los números 16, 6 y 5 son primos entre sí, al buscar su *m. d. c.*, encontraremos la unidad (**312**).

Si multiplicamos 16, 6 y 5 por 3, los productos 48, 18 y 15 tendrán por *m. d. c.* á 1×3 ó 3 (**313**).

16	6	5
	1	
16×3	6×3	5×3
	1×3	
ó		
48	18	15
	3	

L. Q. Q. D.

321. Teorema. Un número es primo cuando no es divisible por ninguno de los números primos menores que la mitad de dicho número.

Recuérdese primero que ningún número puede tener un divisor mayor qui la mitad de él mismo (**263**).

Sea el número 19, que no es divisible por ninguno de los números primos 2, 3, 5, 7; menores que su mitad. Demostremos que 19 es primo.

En efecto, si 19 no es número primo, admite un divisor menor que la mitad de él mismo. Pero este divisor no es número primo, según la hipótesis.

Supongamos que este divisor sea el número 6.

Pero $6 = 2 \times 3$; entonces 19 sería divisible por 2 y por 3 (**254**). Lo que es contra la hipótesis.

322. Ejercicio. Fórmese una tabla de números primos.

Sea de buscar, p. ej., todos los números primos menores que 100. Primero se escribe la serie natural de los números :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

En seguida, contando desde el 2, se rayan ó testan de 2 en 2 los números de esta tabla, y quedan así borrados todos los múltiplos de 2.

Contando desde el 3, que se conserva, se rayan ó tachan de 3 en 3, y quedan suprimidos todos los múltiplos de 3.

Se pasa al 5, y se hace lo mismo, de 5 en 5; luego, de 7 en 7, con lo cual queda terminada la operación.

Por la tabla anterior se ve que hay 25 números primos menores que 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Este método se conoce con el nombre de *criba de Eratóstenes*, y se funda en la propiedad siguiente, á saber, que *todos los números de la serie natural que van de dos en dos, son los múltiplos de 2; los que van de tres en tres, son los múltiplos de 3; los que van de cinco en cinco, son los múltiplos de 5, y así sucesivamente.*

323. Observaciones. — 1ª No debe contarse el número 1 entre los primos, puesto que todos los números, primos ó no, son divisibles por 1.

2ª Después de testados todos los múltiplos de 2, 3, 5, 7, el primer número no testado, 11, es número primo; porque si no lo fuera, sería múltiplo de uno de los números 2, 3, 5, 7, y como tal habría sido testado; por consiguiente, este método va indicando sucesivamente los números primos cuyos múltiplos deben testarse ó rayarse.

3ª Para testar los múltiplos de cada número primo, basta empezar desde el cuadrado, de cada uno; así, para el número 7, por ejemplo, se empezará desde 49; porque como los múltiplos precedentes son productos de 7 por los números menores que él, ya están testados como múltiplos de 2, 3 ó 5.

4ª La tabla queda concluída después de testados los múltiplos de un número primo cuyo cuadrado es superior al límite que uno se ha propuesto; en el ejemplo anterior, en que el límite es 100, como $7^2 = 49$, y $11^2 = 121$, se suspende después de haber suprimido los múltiplos de 7.

Por medio del teorema siguiente se conocerá con facilidad si un número dado es primo ó no.

324. Teorema. *Un número es primo cuando no puede dividirse por ninguno de los números primos cuyos cuadrados son menores que este número.*

Sea 113 un número que no es divisible por ninguno de los números primos 2, 3, 5 y 7, cuyos cuadrados son menores que 113; digo pues que este número es primo.

En efecto, si no lo fuera, no podría admitir por factor primo más que á 11 ó á un número mayor que 11; pero esto no es posible, porque como 113 es menor que 11×11 , si admitiera un divisor igual ó superior á 11, el cuociente sería menor que 11, y 113 sería divisible por 2, 3, 5 ó 7, lo que es contra la hipótesis. Luego 113 que no admite ningún divisor, es número primo. L. Q. Q. D.

325. Teorema. *Un número que no es primo admite necesariamente un divisor primo.*

En efecto, un número que no es primo admite, por hipótesis, otro divisor que la unidad y menor que él mismo.

Sea N un número que no es primo, y a el menor de sus divisores.

a tiene que ser primo, sin lo cual admitiría á su vez otro divisor que la unidad y menor que él mismo, lo que es contra la hipótesis. Luego N admite un divisor primo. L. Q. Q. D.

326. Teorema. *La serie de los números primos es ilimitada.*

En efecto, supongamos que 101 sea el mayor de los números primos.

Representemos por S la suma formada por la unidad y el producto de todos los números primos hasta 101.

$$S = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \dots \times 89 \times 97 \times 101) + 1$$

Si S es primo, el número 101 no es el mayor de los números primos.

Si S no es primo, admite un divisor primo (325). Pero este divisor no puede encontrarse dentro del paréntesis, sin lo cual debería dividir á 1 (251). Luego el mayor de los números primos no es 101.

Como este raciocinio se aplica á cualquier número primo que se considere, se deduce que la serie de los números primos es ilimitada. L. Q. Q. D.

327. Teorema. *Cualquier número que divide á un producto de dos factores, y es primo con uno de ellos, debe dividir al otro.*

Sea 6 que divide á 35×12

Demostremos que si 6 es primo con 35, dividirá á 12.

En efecto, ya que 6 y 35 son primos entre sí, al buscar su *m. d. c.* resultará la unidad (309).

	6	35
		1
	6×12	35×12
		$1 \times 12 \text{ ó } 12$

Multipliquemos 6 y 35 por 12; su *m. d. c.* será 1×12 ó 12 (313).

Pero, por hipótesis, 6 divide á 35×12 , divide también á 6×12 (203). Luego 6 divide á 12 (308). L. Q. Q. D.

328. Teorema. *Cualquier número primo que divide á un producto, divide necesariamente á un factor.*

1º Este principio conviene á un producto de dos factores.

Sea 5 que divide á 12×15 .

Si 5 divide á 12, está demostrado el principio.

Si 5 no divide á 12, es primo con él (318); debe pues dividir á 15 (327). L. Q. Q. D.

2º Este principio conviene también á un producto cualquiera.

Sea 5 que divide á $12 \times 17 \times 15$.

Si 5 no divide á 12, divide á (17×15) (1º)

Si 5 no divide á 17, divide á 15. (1º)

L. Q. Q. D.

329. Corolario I. — *Cualquier divisor primo de una potencia de un número, divide á este número.*

Sea 5 que divide á 25^3 . Tenemos :

$$25^3 = 25 \times 25 \times 25 \quad (186)$$

Luego 5 divide á 25 (328).

330. Observación. — *Las potencias de 10 no admiten más factores primos que 2 y 5.*

Porque cualquier divisor primo de estas potencias divide á 10 (329), y 10 no tiene más factores primos que 2 y 5.

331. Corolario II. — *Cualquier número primo que divide á un producto de factores primos es necesariamente igual á uno de ellos.*

332. Teorema. *Cualquier número que es primo con otros, lo es también con el producto de ellos.*

Sea 6 que es primo con 35, 55 y 17.

Demostremos que 6 es primo con $35 \times 55 \times 17$.

En efecto, si el número 6 y el producto $35 \times 55 \times 17$ no fuesen primos entre sí, admitirían un divisor común. Este divisor tendría que dividir á 6 y á uno de los factores del producto (328); lo que es contra la hipótesis.

333. Corolario I. — *Cuando un número es primo con otro, lo es también con todas las potencias de éste.*

Porque cualquier potencia de un número es un producto. Así 15, que es primo con 28, lo es por consiguiente con

$$28^3 = 28 \times 28 \times 28$$

334. Corolario II. — *Las potencias de dos números primos son primas entre sí.*

Sean 14 y 25 números primos entre sí.

Las potencias 14^3 y 25^6 son primas entre sí, porque cualquier divisor primo común á 14^3 y á 25^6 , debería dividir á 14 y á 25 (**329**); lo que es contra la hipótesis.

335. Teorema. — *Cuando un número es divisible por otros números, que son primos entre sí de dos en dos, también es divisible por el producto de ellos.*

Supongamos el número 360 divisible por 4, 5 y 9. Demostremos que es divisible por $4 \times 5 \times 9$.

En efecto, dividiendo 360 por 4, resulta:

$$(1) \quad 360 = 4 \times 90$$

Ahora bien, por hipótesis, 5 divide á 360; por consiguiente divide á 4×90 .

Pero como 5 es primo con 4, divide á 90 (**327**).

$$(2) \quad 90 = 5 \times 18$$

De igual modo 9 divide á 360, y por consiguiente divide á 4×90 . Pero siendo primo con 4, divide á 90 (**327**).

Por lo mismo, 9 que divide á 90, dividirá á 5×18 . Pero como es primo con 5, divide á 18 (**327**).

$$(3) \quad 18 = 9 \times 2$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, miembro por miembro, resulta:

$$360 \times 90 \times 18 = 4 \times 5 \times 9 \times 90 \times 18 \times 2 \quad (\text{N}^\circ 2, \text{ ax. } 9).$$

$$6 \quad 360 = (4 \times 5 \times 9) 2$$

Luego 360 es divisible por $(4 \times 5 \times 9)$ (**203**)

L. Q. Q. D.

336. Corolario. — *Cuando un número es divisible por números primos, lo es también por el producto de ellos.*

Porque los números que son primos tomados de uno en uno, lo son con mayor razón tomados de dos en dos. Luego, este número será divisible por el producto de ellos (**335**).

Así, 60 que es divisible por 3 y por 5, lo es también por 3×5 .

337. Nota. — De este último principio se deduce que cualquier número que es divisible por 2 y por 3, lo es también por 6; el que es divisible por 3 y por 4, lo es también por 12; el que es divisible por 5 y por 9, lo es por 45; el que es divisible por 9 y por 11, lo es por 99, etc., etc.

§ II. Descomposición de un número en factores primos.

338. Definición. — Descomponer un número en factores primos es escribirlo en forma de un producto cuyos factores sean números primos.

339. Teorema. *Un número que no es primo puede descomponerse en factores primos.*

Sea 30 un número que no es primo.

Este número admite un factor primo (325). Sea 2 este divisor.

$$(1) \quad 30 = 2 \times 15$$

Si 15 fuera primo, la proposición quedaría demostrada. Pero si 15 no es primo, admite un divisor primo (325). Sea 3 este divisor.

$$(2) \quad 15 = 3 \times 5$$

Multiplicando ordenadamente, miembro por miembro, estas igualdades, resulta :

$$30 \times 15 = 2 \times 15 \times 3 \times 5 \quad (\text{N}^{\circ} 2, \text{ax. } 9).$$

$$\delta \quad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

Además, fácil es ver que los cuocientes 15,5 van disminuyendo; se llegará pues necesariamente á un cuociente que sea primo. L. Q. Q. D.

340. Teorema. *Un número que no es primo no puede descomponerse más que en un solo sistema de factores primos.*

Sea 360.

Supongamos que una descomposición de 360 en factores primos haya dado :

$$(1) \quad 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Demostremos que 360 no admite otros divisores primos que 2, 3 y 5, y que estos divisores irán con los mismos exponentes.

1º En efecto, 360 no admite más divisores primos que 2, 3 y 5, porque si admitiera otro cualquiera, por ejemplo 7, este divisor tendría que dividir á 2^3 , ó á 3^2 , ó á 5 (328), y por consiguiente á 2, á 3 ó á 5 (329); lo que es imposible (315).

2º Estos divisores deben ir con los mismos exponentes.

En efecto, supongamos que otra descomposición de 360 en factores primos haya dado :

$$(2) \quad 360 = 2^5 \times 3 \times 5$$

Por tanto los productos

$$2^3 \times 3^2 \times 5 \quad \text{y} \quad 2^5 \times 3 \times 5$$

serían iguales por representar un mismo número (Nº 2, ax. 3).

Dividiéndolas por 2^3 , resulta :

$$3^2 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5 \quad (\text{Nº 2, ax. 9})$$

lo que es imposible, puesto que el segundo número es divisible por 2, mientras que el primero no lo es.

341. Regla. — *Para descomponer un número en sus factores primos, se divide primero el número por el menor de sus divisores primos; se hace lo mismo con el cuociente, luego con el segundo cuociente, y así en adelante, hasta que resulte un cuociente igual á 1. Los divisores son los factores primos del número propuesto.*

342. EJEMPLO. — *Descompóngase 252 en sus factores primos.*

252 es divisible por 2		252 = 2 × 126
126	— 2	126 = 2 × 63
63	— 3	63 = 3 × 21
21	— 3	21 = 3 × 7
7 es número primo		7 = 7 × 1

Así, $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$ ó $2^2 \times 3^2 \times 7$

En la práctica se escriben los dividendos á la izquierda, y los divisores á la derecha de una misma línea vertical.

252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

LECCIÓN IV

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

§ I. Divisores de un número.

Primer método.

343. Para encontrar todos los divisores de un número,

Regla I. *Se lo descompone en sus factores primos, después de lo cual se escriben en una línea horizontal el número 1 y las diferentes potencias de un mismo factor del número propuesto;*

II. *Se multiplican los números de la primera línea por cada potencia del segundo factor; en seguida se multiplican todos los divisores ya encontrados por cada potencia del tercer factor, y así en adelante.*

Cuando se ha concluido la operación, resultan en un mismo cuadro todos los divisores pedidos.

344. EJEMPLO. *Búsquense todos los divisores de 180.*

Descompongamos 180 en sus factores primos.

Sea $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ (342)

El número 180 es divisible por :

$$(A) \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ & 1 & 5 \end{array} \right\} \text{ ó bien } \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ & 1 & 5 \end{array} \right\}$$

Los números de la primera línea horizontal dividen á 180, y son primos con los de la segunda que dividen también á 180; sus productos de dos en dos dividirán á 180 (335). Estos productos son :

$$(B) \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & 36 \end{array} \right\}$$

Del propio modo, los productos del cuadro (B) dividen á 180, lo mismo que los números de la tercera línea del cuadro (A). Como los unos son primos con los otros, los

productos de ellos, combinados de dos en dos, dividirán á 180 (335). Estos productos son :

$$(C) \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & 36 \\ 5 & 10 & 20 \\ 15 & 30 & 60 \\ 45 & 90 & 180 \end{array} \right\}$$

El número 180 no admite otros divisores, porque si hubiera ótro, por ejemplo, $2^3 \times 5$, sería menester que el número 180 encerrase el factor 2^3 (185); lo que es absurdo (340).

Segundo método.

345. También podría procederse como sigue :

Sea 210 el número dado.

Descomponiéndolo en sus factores primos, resulta :

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \quad (342)$$

Todos los productos de los factores de 210, que son primos entre sí, combinados de dos en dos, de tres en tres, etc., dividen á 210 (335).

Dispongamos, para esto, en una linea vertical, los factores primos de 210 por orden de valor :

210		2							
105		3	6						
35		5	10	15	30				
7		7	14	21	42	35	70	105	210

Multiplicando 2 por 3, se escribe el producto 6 á la derecha del 3; multiplicando en seguida por 5 las dos primeras líneas compuestas de los números 2, 3 y 6, se escriben los productos á la derecha del 5; por fin se multiplican por 7 las tres primeras líneas, y resulta la cuarta. Todos los números del cuadro dividen á 210 (335).

El número 210 no admite otros divisores, porque si hubiera ótro, por ejemplo $2^2 \times 7$, sería preciso que 210 encerrase el factor 2^2 (185), lo que es absurdo (340).

346. Encontrar cuántos divisores tiene un número. — Para saber cuántos divisores tiene un número, basta añadir una unidad á los exponentes de sus factores primos, y multiplicar entre sí estos números así aumentados; el producto dará el número de divisores pedido.

$$\text{Sea } 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Para encontrar todos los divisores de un número descompuesto en sus factores primos, acabamos de ver (344) que se puede formar el cuadro siguiente :

1	2	4	8
	1	3	9
		1	5

Ahora bien, fácil es observar que cada línea horizontal tiene tantos divisores más uno, cuantos lo indica el exponente del número primo que ha servido para formar dicha línea.

Y como para encontrar estos divisores, se multiplican todos los términos de la 1ª línea por cada término de la 2ª, en seguida todos los productos obtenidos, por cada término de la 3ª, y así en adelante, tendremos en el ejemplo anterior :

$$(3 + 1) (2 + 1) (1 + 1) = 24 \text{ divisores}$$

L. Q. Q. D.

347. Divisores comunes á varios números. — *Para encontrar todos los divisores comunes á varios números, basta buscar todos los divisores del m. d. c. de estos números.*

Sean los números 48 y 18, y 6 su m. d. c.

Demostremos que todos los divisores de 6 son también todos los divisores comunes de 48 y 18.

En efecto, todos los divisores de 6 dividen á 48 y 18 (254).

Recíprocamente, todos los divisores de 48 y 18 dividen á 6, su m. d. c. (311).

L. Q. Q. D.

§ II. Máximo divisor común de varios números.

348. *Para encontrar el m. d. c. de varios números descompuestos en factores primos, basta multiplicar entre sí los factores primos comunes á estos números, tomados con su menor exponente.*

Sean los números 210, 360 y 540.

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

El m. d. c. de estos números será $2 \times 3 \times 5$.

En efecto, dividamos por $2 \times 3 \times 5$ los números dados, escritos bajo la forma de :

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7), \quad (2^3 \times 3^2 \times 5), \quad (2^2 \times 3^3 \times 5);$$

sus cuocientes respectivos son :

$$7, \quad 2^2 \times 3, \quad 2 \times 3^2,$$

como no admiten otro divisor común, el número $2 \times 3 \times 5$ es su *m. d. c.* (**320**). L. Q. Q. D.

§ III. Mínimo común múltiplo.

349. Llámase **común múltiplo** de varios números el número que es exactamente divisible por cada uno de ellos.

Así, 30 que es divisible por 2, 3 y 5, es común múltiplo de estos números.

350. **Mínimo común múltiplo** de varios números es el menor número divisible por cada uno de ellos. Se lo designa con las iniciales *m. c. m.*

351. *Para encontrar el m. c. m. de varios números, se los descompone en sus factores primos; en seguida se multiplican entre sí, tomándolos una sola vez con su mayor exponente.*

Sean los números 210, 360 y 540.

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

El *m. c. m.* será $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7$.

En efecto, este producto es múltiplo de 210, 360 y 540 (**185**).

Además, es el *m. c. m.*, porque si se disminuyera, sea suprimiendo un factor, por ejemplo el 5, sea rebajando el exponente de uno de ellos, de 3 por ejemplo, el producto dejaría de ser múltiplo de alguno de estos números (**185**).

L. Q. Q. D.

352. Nota. — Si varios números son primos entre sí, su *n. c. m.* es el producto de ellos.

EJERCICIOS ORALES

231. ¿Cómo se forma un múltiplo de un número?
232. ¿Cuántos múltiplos puede tener un número?
233. ¿Qué otros nombres tiene el divisor?
234. Cuando se divide un número por uno de sus divisores, ¿á qué es igual: 1° el cociente; 2° el residuo?
235. ¿Qué número par es primo?
236. ¿De que número son múltiplos todos los números pares?
237. ¿Cuál es el menor número que se debe añadir ó quitar á un número par, para hacerlo impar?
238. ¿Cuál es el menor número que se debe añadir ó quitar á un número impar, para hacerlo par?
239. ¿Un número es múltiplo ó submúltiplo de sus divisores?
240. ¿Qué viene á ser respecto de un número la suma de varios de sus múltiplos?
241. ¿Qué es respecto de un número la diferencia de dos de sus múltiplos?
242. Un número que divide al divisor, divide también al producto de éste por el cociente. ¿Por qué?
243. Todo número que divide al dividendo y al divisor, divide al residuo de su división. ¿Por qué?
244. Todo número que divide al divisor y al residuo, divide al dividendo. ¿Por qué?
245. Un número que divide al dividendo y al residuo, divide al divisor. ¿Por qué?
246. ¿Qué clase de número resulta al sumar: 1° dos números pares; 2° dos números impares; 3° un número par con un impar?
247. ¿Qué clase de número resulta al se resta: 1° un número par de otro; 2° un número impar de otro impar; 3° un número par de un impar, y *viceversa*?
248. ¿Qué parte de cualquier número es siempre divisible por 2?
249. ¿Cuál es el mayor múltiplo de 2 contenido en un número cualquiera?
250. ¿Qué parte de un número es siempre divisible por 5?
251. Si se divide un número por 5, ¿cuándo sale en el residuo el guarismo de las unidades de este número?
252. ¿Cuáles son los números de dos cifras que se pueden escribir á la derecha de cualquier número impar á fin de que resulte un número divisible por 4?
253. ¿Qué números diferentes pueden ponerse en las dos últimas cifras de la derecha en los números divisibles por 25?
254. ¿Cuál es el residuo de la división de 34 284 por 25; de 1 339 por 4?
255. ¿Qué múltiplo resulta restando de un número la suma de sus guarismos?
256. ¿Qué se debe restar de un número para que resulte el mayor múltiplo de 3 contenido en él?

257. Dígase el menor número que debe añadirse á 452 para que sea divisible por 3.

258. ¿Qué cifras pueden escribirse á la derecha de 451, para formar un número de 4 cifras divisible por 3?

259. ¿Puede un número impar ser divisible por 6?

260. ¿Es par un número divisible por 18? y por qué?

261. ¿Qué especie de número resulta multiplicando entre sí: 1º dos números pares; 2º dos impares; 3º un par por un impar, y *vice versa*?

262. ¿Cuál es el menor número que da 5 de residuo al dividirlo por 6 ó por 8?

263. ¿Cuál es el menor número que da 7 de residuo al dividirlo por 8, por 12 ó por 15?

264. ¿Dos números pares son primos entre sí?

265. ¿Cuál es el m. d. c. entre un múltiplo y su submúltiplo?

266. ¿Cómo se llama el número que tiene por factores todos los divisores primos comunes á dos números?

267. ¿Cuál es el m. d. c. de dos números si 1 es el residuo de la división del mayor por el menor?

268. Tres vapores se emplean en un mismo servicio, el 1º cada 6 días, el 2º cada 8 días y el 3º cada 10 días. Todos tres salen juntos un día, ¿en qué otro día volverán á salir juntos, y cuántas veces habrá servido cada uno?

PROBLEMAS

269. ¿Cuáles son los múltiplos menores que 100 de cada uno de los números siguientes: 13, 17, 20, 25?

270. ¿Cuáles son los múltiplos pares menores que 1 000 de cada uno de los números siguientes: 97, 102, 125, 150?

271. ¿Qué números menores que 100 son á la vez divisibles por 2, por 3 y por 4?

272. ¿Qué números menores que 1 000 son divisibles á un tiempo por 4, por 5, por 6 y por 8?

273. Escribanse los números de 4 cifras divisibles á la vez por 2, por 3, por 4, por 5, por 6 y por 7.

274. ¿Por cuál de los números siguientes: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 25 y 125 es divisible cada uno de los números 1 166, 1 288 y 1 938?

275. Búsquense los factores primos de los números siguientes:

1)	280	4)	14 700	7)	147 231	10)	1 280 125
2)	2 646	5)	16 335	8)	839 160		
3)	2 970	6)	15 147	9)	873 425		

276. Búsquense todos los divisores de los números siguientes:

1)	100	4)	1 755	7)	5 145	10)	31 416
2)	360	5)	2 646	8)	8 398	11)	35 992
3)	1 728	6)	8 819	9)	15 435	12)	42 378

277. Cuáles son los divisores comunes á los números siguientes :

1)	420	y	720		
2)	900	y	375		
3)	12 285	y	4 375		
4)	42 432	y	945 945		
5)	172 172	y	1 126 125		
6)	1 890	y	3 528		
7)	672		8 624	y	502 656
8)	183 456		458 640	y	642 096
9)	810 810		729 729	y	4 459 455
10)	388 800		472 500	y	2 337 500

278. Búsquese el m. d. c. de los números siguientes, 1º por el método ordinario; 2º descomponiéndolos en sus factores primos :

1)	128	y	192	6)	72	216	y	128
2)	240	y	160	7)	24	80	y	160
3)	180	y	224	8)	90	180	y	945
4)	900	y	7 290	9)	60	320	y	360
5)	571 428	y	999 999	10)	100	550	y	10 500

279. Búsquese el m. c. m. de los números siguientes :

1)	60	81	y	90	5)	15	24	28	y	44
2)	70	130	y	190	6)	72	135	216	y	648
3)	506	759	y	1771	7)	12	18	24	36	y 48
4)	3 168	6 048	y	4 896	8)	7	12	21	24	y 42

280. El m. d. c. de dos números es 312, su m. c. m. 6 552; ¿cuál es el producto de ambos?

281. El m. d. c. de dos números es 12, su m. c. m. 420; ¿cuáles son estos números, sabiendo que su diferencia es menor que 30?

282. Búsquese, por medio de los divisores, dos números consecutivos, cuyo producto sea 1 260.

283. Búsquese, por medio de los divisores, dos números cuya diferencia sea 3, y el producto 1 120.

284. Rufino da á su hijo menor 35 cent. y al mayor 50 para que los repartan á cierto número de pobres, de modo que á cada uno le toque igual suma; ¿cuál es el mayor número de centavos que le tocará á cada uno, y cuántos los pobres socorridos por cada hijo?

285. ¿Cuál es la menor suma de dinero con la cual se puede comprar un número exacto de libros á \$ 5, á \$ 3, á \$ 4 ó á \$ 6 cada uno?

286. Fabricio manda comprar al mercado pollos, patos y gallipavos, empleando la menor suma posible; pero una misma para cada especie de aves, so pena de tener que pagarle el criado 5 cent. por cada ave que compre demás. Encontró el criado pollos de á 12 cent., patos de á 30, y gallipavos de á 75 y de á 90; tomó los más baratos de estos últimos, y tuvo que pagar una suma á su señor; se pregunta cuál fue ésta.

287. Si Diógenes puede andar 14 millas por día; Engelberto, 25; Fabián, 8, y Gabino, 20; ¿en cuántos días puede andar cada uno de ellos un mismo número de millas?

288. ¿Con qué menor suma posible se pueden comprar carneros de á \$ 4, ó vacas de á \$ 21, ó mulas de á \$ 49, ó caballos de á \$ 72?

LIBRO III

NÚMEROS QUEBRADOS

LECCIÓN PRIMERA

DE LOS QUEBRADOS COMUNES

§ I. Definiciones.

353. Llámase **quebrado** ó **fracción** una ó más partes iguales de aquéllas en que se divide la unidad.

Por ejemplo, si se divide una manzana en dos partes iguales, cada parte representará una fracción de la manzana, y se llamará *un medio* ó *una mitad*; si se divide en tres partes iguales, una de ellas representará *un tercio*, y dos, *dos tercios*; si se divide en diez partes, cada una representará *un décimo*, etc.

354. Los quebrados se dividen en dos clases, en quebrados **comunes** ú **ordinarios** y en quebrados **decimales**.

355. Por **quebrado común** se entiende una ó más partes iguales de cualquier cantidad, representada con dos números.

356. Los dos números con que se representa un quebrado común se escriben uno encima de otro y separados entre sí por una raya horizontal ú oblicua.

Por ejemplo: Un tercio se escribe $\frac{1}{3}$, y equivale á 1:3

Tres cuartos	»	$\frac{3}{4}$	»	3:4
Siete octavos	»	$\frac{7}{8}$	»	7:8
Cinco sextos	»	$\frac{5}{6}$	»	5:6
Nueve décimos	»	$\frac{9}{10}$	»	9:10
Once doceavos	»	$\frac{11}{12}$	»	11:12

357. Un quebrado puede también considerarse como la expresión de la división de un número por otro.

358. El número escrito encima de la raya es el dividendo, y el que está debajo, el divisor. El *valor* del quebrado representa el cuociente.

359. Los **términos** de un quebrado son el numerador y el denominador.

360. Llámase **numerador** el término escrito encima de la raya.

361. El numerador denota las partes que se toman de la unidad para formar el quebrado.

362. **Denominador** se llama el término escrito debajo de la raya.

363. El denominador indica :

1º El número de partes iguales en que se divide la unidad;

2º El nombre y valor de cada una de las partes;

3º El número de partes que igualan á un entero.

Por ejemplo, en el quebrado $\frac{3}{4}$, el denominador indica que se ha dividido la unidad en 4 partes, que cada una de ellas se llama y vale *un cuarto*, y que 4 de estas partes igualan á un entero. El numerador 3 indica que se han tomado 3 de las partes en que se ha dividido la unidad.

364. Para leer un quebrado común se enuncia primero el numerador y después el denominador, agregando á éste la terminación **avo** cuando es 8, y siempre que es número compuesto, sea cual fuere la cifra en que termine.

V. g. : $\frac{3}{8}$, tres octavos; $\frac{7}{11}$, siete onzavos; $\frac{8}{22}$, ocho veintidós avos; $\frac{14}{130}$, catorce ciento treinta avos; $\frac{25}{300}$, veinticinco trescientos avos.

365. **Nota.** — Cuando el denominador se compone de varias cifras, puede omitirse la terminación **avo**, leyendo del modo siguiente : primero el numerador, después del cual se dice *sobre*, y en seguida el denominador; v. g. : $\frac{16}{6485}$, diez y seis *sobre* seis mil cuatrocientos ochenta y cinco.

366. Si el denominador es uno de los números 2, 3, 4, 5, 6, 7 ó 9, no se le agrega la terminación *avo*, porque cada uno de estos números tiene la suya propia, á saber: *medio*, *tercio*, *cuarto*, *quinto*, *sexto*, *séptimo*, *noveno*.

367. Cuando el denominador es la unidad seguida de uno ó más ceros, como 10, 100, 1 000, etc. tampoco se le agrega la terminación *avo*; pues se dice *décimo*, *centésimo*, *milésimo*, etc.

368. Según su valor los quebrados comunes se dividen en *propios* é *impropios*.

369. Quebrado **propio** se llama aquél cuyo numerador es menor que el denominador; v. g.: $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{12}{13}$.

370. Quebrado **impropio** ó **expresión fraccionaria** es cualquier valor que se representa en forma de quebrado, cuando el numerador es igual al denominador ó mayor que él; v. g.: $\frac{3}{3}$, $\frac{9}{7}$.

371. Cuando el numerador es igual al denominador, el quebrado es igual á la unidad; así $\frac{3}{3} = 1$.

372. Un entero puede escribirse en forma de quebrado, poniéndole el número 1 por denominador; $\frac{9}{1} = 9$, que se lee *nueve unidades*, ó simplemente *nueve*.

373. Un quebrado se llama **inverso** de otro cuando se trastornan los terminos de éste, poniendo por numerador el denominador, y por denominador el numerador.

Así, el quebrado *inverso* de $\frac{4}{5}$ es $\frac{5}{4}$, ó como si dijéramos *quebrado invertido*.

374. El valor de un quebrado depende del número de las partes del numerador comparado con el de las del denominador.

Así, el quebrado $\frac{4}{7}$ es mayor que $\frac{3}{7}$, porque contiene 4 partes de una unidad dividida en 7, mientras que el segundo no contiene más que 3. El quebrado $\frac{3}{8}$ es mayor que $\frac{3}{16}$, porque contiene 3 partes de una unidad dividida en 8; el

segundo contiene también 3 partes, pero como la unidad está dividida en 16, éstas son menores.

§ II. Principales propiedades de los quebrados.

375. Teorema. *Si dos ó más quebrados tienen un mismo denominador, el mayor es el que tiene mayor numerador.*

Sean los quebrados $\frac{5}{7}$ y $\frac{3}{7}$ que tienen un mismo denominador.

Digo que el primero es mayor que el segundo.

En efecto, estos dos quebrados representan partes iguales de la unidad, á saber, séptimos; pero el primero tiene 5 de estas partes, mientras que el 2º no tiene más que 3;

luego $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$.

L. Q. Q. D.

376. Teorema. *Si dos ó más quebrados tienen un mismo numerador, el mayor es el que tiene menor denominador.*

Sean los quebrados $\frac{3}{8}$ y $\frac{3}{11}$ que tienen un mismo numerador.

Digo que el 1º es mayor que el 2º.

Cada uno de estos quebrados contiene 3 partes de la unidad; pero como las partes del 1º son octavos, han de ser mayores que las del 2º que son onzavos; luego $\frac{3}{8} > \frac{3}{11}$.

L. Q. Q. D.

377. Corolario. — *Si se añade un número al numerador de un quebrado, queda aumentado el valor del quebrado; pero si se lo añade al denominador, se disminuye el valor del quebrado.*

378. Teorema. *Si se multiplica el numerador de un quebrado por un número cualquiera, el quebrado queda multiplicado por el mismo número.*

Sea el quebrado $\frac{4}{7}$.

Demostremos que al multiplicar el numerador por 3, el quebrado se hace tres veces mayor.

En efecto, $\frac{4}{7}$ representa 4 partes de la unidad dividida en 7 partes iguales, y $\frac{4 \times 3}{7}$ representa un quebrado que

contiene un número de estas mismas partes 3 veces mayor; luego $\frac{4 \times 3}{7}$ es un quebrado 3 veces mayor que $\frac{4}{7}$.

L. Q. Q. D.

379. Teorema. *Si se multiplica el denominador de un quebrado por un número, el quebrado queda dividido por el mismo número.*

Sea el quebrado $\frac{4}{7}$.

Demostremos que al multiplicar el denominador por 3, el quebrado se hace tres veces menor.

En efecto, $\frac{4}{7}$ representa 4 partes de la unidad dividida en 7 partes iguales, y $\frac{4}{7 \times 3}$ representa también 4 partes iguales de la unidad, pero estas partes son tres veces menores; luego el quebrado $\frac{4}{7 \times 3}$ es 3 veces menor que $\frac{4}{7}$.

L. Q. Q. D.

380. Corolario. — *Si se multiplican ambos términos de un quebrado por un mismo número, no se altera su valor.*

Porque esto se reduce á hacer, por una parte, el quebrado cierto número de veces mayor, y por ótra, igual número de veces menor.

381. Teorema. *Si se divide el numerador de un quebrado por un número cualquiera, el quebrado queda dividido por el mismo número.*

Sea el quebrado $\frac{6}{9}$.

Demostremos que al dividir el numerador por 3, el quebrado se hace 3 veces menor.

En efecto, $\frac{6}{9}$ representa 6 partes de la unidad dividida en 9 partes iguales, y $\frac{6:3}{9}$ representa un quebrado que contiene un número de estas partes 3 veces menor; luego el quebrado $\frac{6:3}{9}$ es 3 veces menor que $\frac{6}{9}$. L. Q. Q. D.

382. Teorema. *Si se divide el denominador de un quebrado por un número cualquiera, el quebrado queda multiplicado por el mismo número.*

Sea el quebrado $\frac{6}{9}$.

Demostremos que al dividir el denominador por 3, el quebrado se hace 3 veces mayor.

En efecto, $\frac{6}{9}$ representa 6 partes de la unidad dividida en 9 partes iguales, y $\frac{6}{9:3}$ representa también 6 partes iguales de la unidad, pero estas partes son tres veces mayores; luego el quebrado $\frac{6}{9:3}$ es 3 veces mayor que $\frac{6}{9}$.

L. Q. Q. D.

383. Corolario. — Si se dividen ambos términos de un quebrado por un mismo número, no se altera su valor.

Porque esto se reduce á hacer, por una parte, el quebrado cierto número de veces menor, y por ótra, igual número de veces mayor.

384. Teorema. Un quebrado representa el cuociente de su numerador por su denominador.

Sea el quebrado $\frac{5}{7}$.

Para esto demostremos que multiplicando el divisor 7 por el cuociente $\frac{5}{7}$, reproducimos el dividendo 5 (217).

En efecto :

$$\frac{5}{7} \times 7 = \frac{5 \times 7}{7} = (378).$$

$$= 5 \times \frac{7}{7} = (378).$$

$$= 5 \times 1 = (371).$$

$$= 5$$

385. Nota. — Cuando la división no es exacta, siempre puede representarse el cuociente de su numerador por su denominador.

$$\text{Así, } 27 : 6 = \frac{27}{6} = 4 + \frac{3}{6} = 4\frac{3}{6}.$$

386. Quebrado irreducible. — Llámase *quebrado irreducible* el que no puede reducirse á una forma más sencilla, es decir que no puede ser representado por términos respectivamente menores.

387. Teorema. *Los dos términos de un quebrado irreducible son primos entre sí.*

Sea el quebrado $\frac{5}{7}$.

Si ambos términos no fueran primos entre sí, admitirían un divisor común. Los cuocientes de 5 y de 7 por este divisor serían evidentemente menores que estos números. De modo que el quebrado no se habría alterado en su valor (383), y sería representado por términos respectivamente menores: lo que es contra la hipótesis.

388. Teorema. *Los términos de un quebrado equivalente á otro cuyos términos son primos entre sí, son equimúltiplos de éstos.*

Sea el quebrado $\frac{5}{7}$.

Demostremos que cualquier quebrado equivalente á $\frac{5}{7}$ tiene por términos respectivos otros equimúltiplos de 5 y de 7.

Sea este quebrado $\frac{a}{b}$; tenemos:

$$\frac{5}{7} = \frac{a}{b}$$

Multiplicando ambos términos del primero por b , y ambos términos del segundo por 7, resulta:

$$\frac{5 \times b}{7 \times b} = \frac{a \times 7}{b \times 7} \quad (380)$$

Multiplicando ambos miembros por el denominador común, esto es, suprimiéndolo, resulta:

$$5 \times b = a \times 7 \quad (1)$$

Ahora bien, 5 divide á $5 \times b$, divide también á $a \times 7$; pero 5 es primo con 7, por hipótesis. Luego 5 divide á a (327).

Pongamos que

$$\frac{a}{5} = c$$

$$a = 5 \times c \quad (2)$$

Sustituyamos en la igualdad (1) a con su valor,

$$5 \times b = 5 \times c \times 7$$

$$b = 7 \times c \quad (3)$$

Por donde se ve que a y b son los productos de 5 y de 7 por un mismo número c , esto es, equimúltiplos de 5 y de 7.

L. Q. Q. D.

389. Corolario. — *Cualquier quebrado cuyos términos son primos entre sí es irreducible.*

Puesto que cualquier quebrado equivalente tiene sus términos respectivamente mayores (388).

Así los quebrados equivalentes á $\frac{5}{7}$ son: $\frac{10}{14}$, $\frac{15}{21}$, $\frac{25}{35}$...

LECCIÓN II

REDUCCIONES DE LOS QUEBRADOS

390. Llámense **reducciones** de los quebrados los diversos cambios que se hacen en ellos sin alterar su valor.

391. Hay cuatro reducciones principales de quebrados, á saber :

1^a Reducir números enteros ó mixtos á una sola expresión fraccionaria ;

2^a Sacar los enteros contenidos en una expresión fraccionaria ;

3^a Reducir los quebrados á su más simple expresión ;

4^a Reducir los quebrados á un denominador común.

Primera reducción.

392. Para reducir un entero á expresión fraccionaria,

Regla. *Se multiplica el denominador dado por el entero, y al producto se le pone el mismo denominador.*

EJEMPLO. — Redúzcanse 6 enteros á séptimos.

OPERACIÓN

$$7 \times 6 = \frac{42}{7} R.$$

Análisis. Un entero vale 7 séptimos

ó $\frac{7}{7}$, 6 enteros valdrán 6 veces $\frac{7}{7}$,

$$ó \frac{7 \times 6}{7} = \frac{42}{7}.$$

EJERCICIOS

289. Redúzcanse á expresión fraccionaria los enteros siguientes

1) 2 á tercios.	7) 12 á séptimos.	13) 24 á octavos.
2) 3 » medios.	8) 9 » quinceavos.	14) 81 » onceavos.
3) 4 » quintos.	9) 25 » catorceavos.	15) 17 » sextos.
4) 8 » séptimos.	10) 36 » novenos.	16) 36 » novenos.
5) 10 » onceavos.	11) 70 » cuartos.	17) 763 » catorceavos.
6) 7 » décimos.	12) 40 » sextos.	18) 359 » séptimos.

393. Para reducir un número mixto á una sola expresión fraccionaria,

Regla. Se multiplica el entero por el denominador de quebrado, al producto se le añade el numerador, y a total se le da por denominador el mismo del quebrado.

EJEMPLO. — Redúzcanse $6\frac{3}{4}$ á una sola expresión fraccionaria.

OPERACIÓN

$$\begin{array}{r} 6\frac{3}{4} \\ \times 4 \\ \hline 27 \\ \frac{4}{4} \text{ R.} \end{array}$$

Análisis. Los 6 enteros valen $\frac{24}{4}$, según el caso anterior; $\frac{24}{4} + \frac{3}{4}$ valdrán 27 cuartos, que se escribe así $\frac{27}{4}$.

EJERCICIOS

290. Representense los valores siguientes en una sola expresión fraccionaria.

1) $6\frac{5}{6}$	7) $4\frac{1}{3}$	13) $12\frac{5}{7}$	19) $1\frac{11}{18}$
2) $9\frac{3}{5}$	8) $3\frac{2}{3}$	14) $10\frac{1}{3}$	20) $2\frac{3}{20}$
3) $7\frac{3}{7}$	9) $8\frac{1}{2}$	15) $7\frac{21}{23}$	21) $1\frac{28}{45}$
4) $5\frac{3}{4}$	10) $5\frac{3}{7}$	16) $16\frac{4}{5}$	22) $7\frac{2}{11}$
5) $4\frac{3}{8}$	11) $7\frac{3}{8}$	17) $33\frac{3}{5}$	23) $34\frac{2}{9}$
6) $3\frac{2}{4}$	12) $8\frac{6}{9}$	18) $14\frac{5}{7}$	24) $94\frac{3}{19}$

Segunda reducción.

394. Para sacar los enteros contenidos en una expresión fraccionaria,

Regla. Se divide el numerador por el denominador, y el cociente representa los enteros.

Si hay residuo se lo escribe en forma de quebrado, poniéndole por denominador el mismo de la expresión fraccionaria.

EJEMPLO. — Sáquense los enteros contenidos en $\frac{72}{7}$.

OPERACIÓN

$$\frac{72}{7} = 72 : 7 = 10 + \frac{2}{7} \quad (384)$$

Análisis. Como cada unidad vale 7 séptimos, tantas veces como 7 esté contenido en 72, tantas unidades contendrá la expresión fraccionaria.

EJERCICIOS

291. Búsquense los enteros contenidos en las siguientes expresiones fraccionarias, indicando el residuo si lo hay.

1) $\frac{8}{2}$	7) $\frac{45}{15}$	13) $\frac{15}{4}$	19) $\frac{1\ 278}{63}$
2) $\frac{15}{3}$	8) $\frac{72}{18}$	14) $\frac{89}{12}$	20) $\frac{827}{15}$
3) $\frac{12}{4}$	9) $\frac{100}{2}$	15) $\frac{78}{7}$	21) $\frac{237}{3}$
4) $\frac{36}{5}$	10) $\frac{56}{7}$	16) $\frac{34}{8}$	22) $\frac{1\ 000}{36}$
5) $\frac{40}{6}$	11) $\frac{63}{9}$	17) $\frac{47}{4}$	23) $\frac{3\ 802}{15}$
6) $\frac{48}{9}$	12) $\frac{9}{2}$	18) $\frac{349}{13}$	24) $\frac{16\ 315}{104}$

Tercera reducción.

395. Simplificar un quebrado es expresar su valor en términos menores.

Por ejemplo, el quebrado $\frac{16}{24}$ se simplifica representando su valor por una de las formas siguientes: $\frac{8}{12}$, $\frac{4}{6}$ y $\frac{2}{3}$.

396. Reducir un quebrado á su más simple expresión es indicar su valor en los menores términos posibles.

Así, cada uno de los quebrados $\frac{8}{12}$, $\frac{4}{6}$ y $\frac{2}{3}$ es una expresión más simple de $\frac{16}{24}$; pero sólo $\frac{2}{3}$ es la más simple de todas.

En efecto, reducir un quebrado á su más simple expresión es hacerlo irreducible (386).

Pero, para hacer á un quebrado irreducible, basta hacer á sus dos términos primos entre sí (389).

Luego, basta dividirlos por su *m. d. c.* (319).

397. Para reducir un quebrado á su más simple expresión,

Regla. *Se dividen de una vez ambos términos por el máximo divisor común á ellos.*

EJEMPLO. — Simplifíquese el quebrado $\frac{117}{1365}$.

OPERACIÓN

$$\frac{117:39}{1365:39} = \frac{3}{35} \quad (383)$$

Análisis. Buscando el máximo divisor común de los dos términos de este quebrado según el número 305, tenemos 39. Y par-

tiendo 117 y 1365 por 39, resulta el quebrado $\frac{3}{35}$, que es la más simple expresión del quebrado propuesto.

398. También puede simplificarse un quebrado dividiendo sucesivamente sus dos términos por los factores comunes á ellos, porque el producto de sus divisores comunes expresa el *m. d. c.* de ambos (310).

EJEMPLO. — Simplifíquese el quebrado $\frac{210}{270}$.

$$\frac{210:2}{270:2} = \frac{105}{135}; \quad \frac{105:3}{135:3} = \frac{35}{45}; \quad \frac{35:5}{45:5} = \frac{7}{9}$$

Análisis. Para simplificar este quebrado, divido sus dos términos por el mínimo factor común á ellos, que es 2; el quebrado que resulta puede ser dividido por el factor común 3, y el último que resulta es divisible por 5, y queda por fin $\frac{7}{9}$.

EJERCICIOS

292. Simplifíquense por medio de divisiones sucesivas los quebrados siguientes :

1) $\frac{4}{6}$	7) $\frac{8}{14}$	13) $\frac{16}{36}$	19) $\frac{630}{1350}$
2) $\frac{2}{10}$	8) $\frac{12}{15}$	14) $\frac{42}{54}$	20) $\frac{180}{450}$
3) $\frac{15}{21}$	9) $\frac{18}{20}$	15) $\frac{56}{60}$	21) $\frac{400}{1500}$
4) $\frac{25}{35}$	10) $\frac{15}{18}$	16) $\frac{32}{84}$	22) $\frac{600}{1300}$
5) $\frac{21}{27}$	11) $\frac{14}{35}$	17) $\frac{60}{90}$	23) $\frac{6174}{7350}$
6) $\frac{26}{28}$	12) $\frac{50}{56}$	18) $\frac{72}{80}$	24) $\frac{9702}{22050}$

Cuarta reducción.

399. Reducir los quebrados á un común denominador es transformarlos en ótros equivalentes á los primeros, pero todos con un mismo denominador.

400. Se reducen los quebrados á un común denominador para que expresen unas mismas partes de la unidad, ó sean de una misma especie, y que así puedan ser sumados ó restados.

401. Ocurren dos casos en la reducción de quebrados á un común denominador :

1º Reducir *sólo dos* quebrados á un común denominador;

2º Reducir *varios* quebrados á un común denominador.

402. Para reducir dos quebrados á un común denominador,

Regla. *Se multiplican los dos términos del primero por el denominador del segundo, y los dos términos de éste por el denominador de aquél.*

EJEMPLO. — Redúzcanse á un común denominador los quebrados $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{7}$.

OPERACIÓN

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = \frac{20}{28}$$

Análisis. Multiplico los dos términos del primer quebrado por el denominador 7 del 2º, y resulta $\frac{21}{28}$; después multiplico los dos términos del 2º quebrado por el denominador

4 del primero, lo que da $\frac{20}{28}$. Estos quebrados equivalen á los primeros (**380**), y tienen un denominador común, porque $4 \times 7 = 7 \times 4$.

EJERCICIOS

293. Redúzcanse á un mismo denominador los quebrados siguientes :

1) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$	7) $\frac{1}{3}, \frac{11}{12}$	13) $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}$	19) $\frac{6}{13}, \frac{4}{7}$
2) $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}$	8) $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}$	14) $\frac{4}{7}, \frac{2}{11}$	20) $\frac{9}{11}, \frac{6}{27}$
3) $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}$	9) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$	15) $\frac{4}{9}, \frac{2}{13}$	21) $\frac{15}{24}, \frac{12}{29}$
4) $\frac{7}{8}, \frac{2}{6}$	10) $\frac{5}{7}, \frac{3}{4}$	16) $\frac{2}{3}, \frac{3}{8}$	22) $\frac{4}{18}, \frac{16}{36}$
5) $\frac{8}{9}, \frac{2}{7}$	11) $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}$	17) $\frac{3}{4}, \frac{5}{12}$	23) $\frac{21}{39}, \frac{13}{16}$
6) $\frac{5}{6}, \frac{3}{5}$	12) $\frac{7}{9}, \frac{5}{6}$	18) $\frac{6}{9}, \frac{3}{14}$	24) $\frac{15}{22}, \frac{17}{20}$

403. Para reducir varios quebrados á un común denominador,

Regla. Se multiplican los dos términos de cada uno por los denominadores de todos los demás.

EJEMPLO. — Redúzcanse á un común denominador los quebrados $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{11}$ y $\frac{2}{9}$.

OPERACIÓN

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} &= \frac{3 \times 7 \times 11 \times 9}{4 \times 7 \times 11 \times 9} = \frac{2079}{2772} \\ \frac{5}{7} &= \frac{5 \times 4 \times 11 \times 9}{7 \times 4 \times 11 \times 9} = \frac{1980}{2772} \\ \frac{8}{11} &= \frac{8 \times 4 \times 7 \times 9}{11 \times 4 \times 7 \times 9} = \frac{2016}{2772} \\ \frac{2}{9} &= \frac{2 \times 4 \times 7 \times 11}{9 \times 4 \times 7 \times 11} = \frac{616}{2772}\end{aligned}$$

Análisis. Como se ve en la operación, multiplico los dos términos de cada quebrado por los denominadores de los demás. Los quebrados que así resultan son equivalentes á los primeros (380).

Nota. — Después de reducidos los quebrados á un común denominador es mucho más fácil compararlos y ver cuál es mayor ó menor; así, de los quebrados propuestos, se ve inmediatamente que $\frac{3}{4}$ es el mayor y $\frac{2}{9}$ el menor, y que $\frac{8}{11}$ es mayor que $\frac{5}{7}$.

EJERCICIOS

294. Redúzcanse á un común denominador los quebrados siguientes :

1)	$\frac{1}{3}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{5}{6}$
2)	$\frac{2}{3}$,	$\frac{5}{6}$,	$\frac{3}{8}$
3)	$\frac{5}{6}$,	$\frac{5}{8}$,	$\frac{7}{12}$
4)	$\frac{1}{3}$,	$\frac{5}{6}$,	$\frac{7}{15}$
5)	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{7}{16}$
6)	$\frac{5}{6}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{8}{15}$
7)	$\frac{5}{6}$,	$\frac{7}{12}$,	$\frac{9}{16}$

8)	$\frac{2}{5}$,	$\frac{3}{10}$,	$\frac{7}{15}$
9)	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{8}$,	$\frac{7}{18}$
10)	$\frac{1}{2}$,	$\frac{5}{6}$,	$\frac{3}{8}$
11)	$\frac{2}{3}$,	$\frac{5}{9}$,	$\frac{3}{4}$
12)	$\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{1}{6}$
13)	$\frac{3}{4}$,	$\frac{5}{18}$,	$\frac{7}{12}$
14)	$\frac{4}{9}$,	$\frac{5}{8}$,	$\frac{5}{12}$

15)	$\frac{5}{8}$,	$\frac{7}{12}$,	$\frac{9}{16}$	20)	$\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{7}$,	$\frac{5}{6}$,	$\frac{9}{20}$	
16)	$\frac{2}{9}$,	$\frac{5}{6}$,	$\frac{4}{16}$	21)	$\frac{5}{16}$,	$\frac{7}{8}$,	$\frac{3}{5}$,	$\frac{5}{54}$	
17)	$\frac{1}{3}$,	$\frac{5}{6}$,	$\frac{4}{9}$	22)	$\frac{9}{16}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{1}{60}$	
18)	$\frac{3}{4}$,	$\frac{11}{12}$,	$\frac{3}{7}$	23)	$\frac{9}{14}$,	$\frac{5}{21}$,	$\frac{5}{9}$,	$\frac{3}{35}$	
19)	$\frac{8}{9}$,	$\frac{4}{5}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{6}{25}$	24)	$\frac{11}{16}$,	$\frac{7}{18}$,	$\frac{5}{27}$,	$\frac{4}{11}$

Reducción de los quebrados á su mínimo denominador común.

404. Para reducir varios quebrados al mínimo denominador común se observarán las reglas siguientes:

Regla I. *Descomponer cada denominador en sus factores primos;*

II. *Se multiplican entre sí todos los factores primos distintos, tomado cada uno según el denominador que lo contiene mayor número de veces;*

III. *Dividir el producto total por cada uno de los denominadores;*

IV. *Multiplicar los dos términos de cada quebrado por el cuociente encontrado.*

EJEMPLO. — Redúzcanse al mínimo denominador común los quebrados $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{11}{30}$ y $\frac{9}{40}$.

La expresión *mínimo denominador común* puede abreviarse así: *m. d. c.*

Nótese que estos quebrados están reducidos á su más simple expresión. Luego los quebrados que les son equivalentes tendrán por términos respectivos cantidades equimúltiples de los términos de los quebrados propuestos (388).

Por consiguiente, el *m. d. c.* será el *m. c. m.* de los números 12, 18, 30 y 40.

DISPOSICIÓN DE LA OPERACIÓN

$$\text{Mínimo D. C.} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$$

$360 : 12 = 30$	$\frac{7 \times 30}{12 \times 30} = \frac{210}{360}$
$360 : 18 = 20$	$\frac{5 \times 20}{18 \times 20} = \frac{100}{360}$
$360 : 30 = 12$	$\frac{11 \times 12}{30 \times 12} = \frac{132}{360}$
$360 : 40 = 9$	$\frac{9 \times 9}{40 \times 9} = \frac{81}{360}$

Análisis. Descomponiendo los denominadores en sus factores primos, tenemos: $12 = 2 \times 2 \times 3$; $18 = 2 \times 3 \times 3$; $30 = 2 \times 3 \times 5$; $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$. Los factores primos distintos son 2, 3 y 5. Se toma 3 veces el factor 2, porque el denominador 40 le contiene más veces que los otros; 2 veces el factor 3, á causa del denominador 18, y 1 vez el factor 5, á causa de los denominadores 30 ó 40.

405. Nota. — Si los denominadores de los quebrados fueran números primos, el m. d. c. sería el producto de dichos números.

Teoremas sobre las reducciones de los quebrados.

EJERCICIOS

295. Redúzcanse al mínimo denominador común los quebrados siguientes :

1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{18}$
2)	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{5}{21}$
3)	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{7}{24}$
4)	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{5}{27}$
5)	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{5}{6}$
6)	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{49}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{7}{42}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{14}$
7)	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{45}$
8)	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{7}{72}$
9)	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{9}{48}$	$\frac{8}{75}$	$\frac{19}{96}$
10)	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{19}{84}$	$\frac{5}{54}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{7}{90}$
11)	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{7}{42}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{5}{72}$
12)	$\frac{5}{14}$	$\frac{8}{49}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{18}{48}$	$\frac{9}{56}$

406. Teorema. Cuando dos quebrados son iguales, el productor del numerador del 1º por el denominador del 2º es el mismo que el del numerador del 2º por el denominador del 1º.

Sea

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Demostremos que $2 \times 6 = 4 \times 3$. En efecto,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$6 \quad \frac{2 \times 6}{3 \times 6} = \frac{4 \times 3}{6 \times 3} \quad (402)$$

multiplicando ambos miembros por 3×6 , resulta :

$$2 \times 6 = 4 \times 3 \quad (382)$$

L. Q. Q. D.

407. Teorema. Si se añade un mismo número á los dos términos de un quebrado, se aumenta el valor de éste.

Sea el quebrado $\frac{5}{7}$.

Demostremos que si añadimos 3 á sus dos términos, tendremos $\frac{5}{7} < \frac{8}{10}$.

En efecto, faltan $\frac{2}{10}$ al quebrado $\frac{8}{10}$ para igualar á la unidad (371). Del propio modo, faltan $\frac{2}{7}$ al quebrado $\frac{5}{7}$ para igualar á la unidad. Pero $\frac{2}{10} < \frac{2}{7}$ (376). Luego, menos le falta al quebrado $\frac{8}{10}$ que á $\frac{5}{7}$ para igualar á la unidad. Por tanto :

$$\frac{5}{7} < \frac{8}{10}$$

L. Q. Q. D.

Demostración general. Sea $\frac{a}{b} < 1$. Evidentemente $a < b$.

Llamemos c la cantidad que ha de añadirse á ambos términos.

Debe resultar :

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

ó reduciéndolos á un común denominador :

$$\frac{a(b+c)}{b(b+c)} < \frac{(a+c)b}{(b+c)b}$$

y luégo sucesivamente :

$$a(b+c) < (a+c)b$$

$$ab+ac < ab+bc$$

$$ac < bc$$

$$a < b$$

Pero, por hipótesis, $a < b$: luego $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

L. Q. Q. D.

408. Corolario. — *El límite de un quebrado menor que la unidad será la unidad cuando se añada indefinidamente un mismo número á sus dos términos.*

Así, añadiendo indefinidamente 5 á los dos términos del quebrado $\frac{3}{7}$, resulta :

$$\frac{3}{7}, \frac{8}{12}, \frac{13}{17}, \frac{18}{22}, \frac{23}{27}, \frac{28}{32}, \frac{33}{37}, \frac{38}{42}, \frac{43}{47} \dots$$

quebrados que van aproximándose á la unidad sin llegar á igualarla jamás, porque la diferencia entre sus términos es siempre una misma.

409. Teorema. *Si se añade un mismo número á los dos términos de una expresión fraccionaria, se disminuye el valor de ésta.*

Sea la expresión fraccionaria $\frac{7}{5}$.

Demostremos que al añadir 1, por ejemplo, á sus dos términos, tendremos : $\frac{7}{5} > \frac{8}{6}$

En efecto, $\frac{8}{6}$ pasa á la unidad con $\frac{2}{6}$ (**371**).

Del mismo modo, $\frac{7}{5}$ pasa á la unidad con $\frac{2}{5}$.

Pero $\frac{2}{6} < \frac{2}{5}$ (**376**) ; luego $\frac{8}{6}$ pasa á la unidad con una cantidad menor que aquélla con que le pasa $\frac{7}{5}$. Por consiguiente $\frac{7}{5} > \frac{8}{6}$.
L. Q. Q. D.

410. Corolario. — *El límite de una expresión fraccionaria comprendida entre 1 y 2 será la unidad, cuando se añada indefinidamente un mismo número á sus dos términos.*

Así, añadiendo indefinidamente el número 8, por ejemplo, á los dos términos del quebrado $\frac{7}{5}$, resulta :

$$\frac{7}{5}, \frac{15}{13}, \frac{23}{21}, \frac{31}{29}, \frac{39}{37}, \frac{47}{45}, \frac{55}{53}, \frac{63}{61}, \frac{71}{69} \dots$$

quebrados que tienden á la unidad sin igualarla jamás, porque la diferencia entre sus términos es siempre una misma.

411. Teorema. Si se quita un mismo número á los dos términos de un quebrado, se disminuye el valor de éste.

Sea el quebrado $\frac{7}{9}$.

Demostremos que al quitar 3, por ejemplo, á sus dos términos, el quebrado $\frac{7}{9} > \frac{4}{6}$. En efecto, faltan $\frac{2}{9}$ al quebrado $\frac{7}{9}$ para igualar á la unidad (371). Del propio modo, faltan $\frac{2}{6}$ á $\frac{4}{6}$ para igualar á la unidad. Pero $\frac{2}{6} > \frac{2}{9}$ (376). Luego, menos le falta al quebrado $\frac{7}{9}$ para igualar á la unidad, que á $\frac{4}{6}$, y por consiguiente $\frac{7}{9} > \frac{4}{6}$. L. Q. Q. D.

412. Corolario. — Si se quita sucesivamente la unidad á los dos términos de un quebrado, se llega al límite cero, quedando positivos ambos términos.

Sea el quebrado $\frac{7}{9}$. Quitando sucesivamente la unidad á ambos términos, resulta:

$$\frac{7}{9}, \frac{6}{8}, \frac{5}{7}, \frac{4}{6}, \frac{3}{5}, \frac{2}{4}, \frac{1}{3}, \frac{0}{2} = 0$$

413. Teorema. Si se quita un mismo número á los dos términos de una expresión fraccionaria, se aumenta el valor de ésta.

Sea la expresión fraccionaria $\frac{7}{5}$.

Demostremos que al quitar 3, por ejemplo, de sus dos términos, tendremos: $\frac{7}{5} < \frac{4}{2}$.

En efecto, $\frac{4}{2}$ pasa á la unidad con $\frac{2}{2}$ (371).

Del propio modo, $\frac{7}{5}$ pasa á la unidad con $\frac{2}{5}$.

Pero $\frac{2}{2} > \frac{2}{5}$ (376). Luego $\frac{7}{5}$ pasa á la unidad con una cantidad menor que aquélla con que le pasa $\frac{4}{2}$. Por consiguiente $\frac{7}{5} < \frac{4}{2}$. L. Q. Q. D.

414. Corolario. — Si se quita sucesivamente la unidad á los dos términos de una expresión fraccionaria, resulta por límite el infinito, quedando positivos ambos términos.

Sea la expresión $\frac{7}{5}$. Quitando sucesivamente la unidad á los dos términos, resulta :

$$\frac{7}{5}, \frac{6}{4}, \frac{5}{3}, \frac{4}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{0} = \infty \text{ (lease : infinito)}$$

415. Nota. — Para formarse una idea del crecimiento del quebrado hasta el infinito, supongamos que se divida un numerador cualquiera, por ejemplo a , mayor que la unidad, por un denominador más y más pequeño. Y sean los quebrados sucesivos :

$$\frac{a}{1}, \frac{a}{0,1}, \frac{a}{0,01}, \frac{a}{0,001}, \frac{a}{0,0001}, \frac{a}{0,00001}, \frac{a}{0,000001} \dots$$

se ve que los cuocientes :

$a, 10a, 100a, 1000a, 10000a, 100000a, 1000000a \dots$, van aumentando más y más hasta que en fin haciéndose el denominador infinitamente pequeño ó cero, el cuociente se hace infinitamente grande ó ∞ .

416. Teorema. *Si se agrega ó quita un mismo valor á los dos términos de un quebrado igual á la unidad, no se altera el valor de éste.*

Puede mirarse este principio como evidente; porque sea que se agregue ó quite un mismo valor á los dos términos del quebrado, el numerador quedará siempre igual al denominador, y por consiguiente el quebrado será siempre igual á la unidad (**371**).

LECCIÓN III

OPERACIONES QUE SE EJECUTAN CON LOS QUEBRADOS

417. Con los quebrados se ejecutan las mismas operaciones que con los enteros, á saber : adición, substracción, multiplicación y división.

§ I. Adición.

418. La adición ó suma de quebrados es una operación que tiene por objeto reunir en un solo número todas las unidades y partes de unidades contenidas en varios ótros.

419. Los sumandos en la adición de quebrados deben ser, como en la de enteros, de una misma naturaleza; por consiguiente deben reducirse aquéllos á un común denominador, esto es, á una misma denominación.

420. Ocurren tres casos en la adición de números quebrados :

- 1º Cuando los quebrados tienen un mismo denominador ;
- 2º Cuando los quebrados tienen distinto denominador ;
- 3º Cuando los quebrados van acompañados de números enteros.

421. Caso I. — Cuando los quebrados tienen un mismo denominador,

Regla I. *Se suman los numeradores, y á la suma se le pone por denominador el mismo denominador común;*

II. *Si el quebrado que resulta fuere impropio, se divide el numerador por el denominador, para sacar los enteros que contenga.*

EJEMPLO. — Cuántas unidades hay en los quebrados siguientes : $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ y $\frac{7}{8}$?

OPERACIÓN. $1 + 3 + 5 + 7 = \frac{16}{8}$. R. $\frac{16}{8} = 16 : 8 = 2$ unidades.

422. Caso II. Para sumar los quebrados que tienen distintos denominadores.

Regla I. *Se reducen los quebrados á un común denominador.*

II. *Se suman los numeradores; y lo demás como en el caso anterior.*

Debe mirarse esta regla como evidente, si se tiene en vista que la suma de los numeradores no es ótra que la suma de las partes iguales de la unidad, y que el denominador indica la especie de estas partes.

EJEMPLO. — Búsquense las unidades contenidas en $\frac{3}{5} + \frac{6}{7} + \frac{2}{3}$.

OPERACIÓN

Análisis. Reduciendo los quebrados á un común denominador, tenemos

$$\frac{63}{105} + \frac{90}{105} + \frac{70}{105}$$

La suma debe contener 63 + 90 + 70 ciento-cin-

coavos, esto es, $\frac{223}{105}$;

como este quebrado es

impropio, divido el numerador por el denominador, para sacar los enteros que contiene; así $223 : 105 = 2 + \frac{13}{105}$.

R. En $\frac{3}{5} + \frac{6}{7} + \frac{2}{3}$ hay 2 unidades + $\frac{13}{105}$.

EJERCICIOS SOBRE LA ADICIÓN DE QUEBRADOS

296. ¿Cuál es la suma de los quebrados siguientes?

1)	$\frac{8}{9}$,	$\frac{4}{9}$,	$\frac{2}{9}$		13)	$\frac{5}{6}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{5}{7}$,	$\frac{1}{2}$
2)	$\frac{7}{8}$,	$\frac{6}{8}$,	$\frac{5}{8}$		14)	$\frac{2}{16}$,	$\frac{4}{10}$,	$\frac{3}{26}$,	$\frac{6}{36}$
3)	$\frac{7}{10}$,	$\frac{8}{10}$,	$\frac{9}{10}$		15)	$\frac{2}{14}$,	$\frac{3}{16}$,	$\frac{2}{18}$,	$\frac{5}{26}$
4)	$\frac{2}{7}$,	$\frac{4}{7}$,	$\frac{6}{7}$,	$\frac{3}{7}$	16)	$\frac{1}{6}$,	$\frac{9}{15}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{4}{5}$
5)	$\frac{3}{4}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{8}{9}$,	$\frac{1}{2}$	17)	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{3}$
6)	$\frac{7}{8}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{7}$,	$\frac{3}{12}$	18)	$\frac{1}{7}$,	$\frac{2}{6}$,	$\frac{2}{5}$,	$\frac{3}{10}$
7)	$\frac{3}{4}$,	$\frac{3}{8}$,	$\frac{3}{7}$,	$\frac{2}{5}$	19)	$\frac{4}{8}$,	$\frac{3}{9}$,	$\frac{3}{6}$,	$\frac{5}{15}$
8)	$\frac{1}{3}$,	$\frac{3}{7}$,	$\frac{2}{5}$,	$\frac{5}{8}$	20)	$\frac{6}{12}$,	$\frac{4}{14}$,	$\frac{1}{24}$,	$\frac{5}{15}$
9)	$\frac{2}{7}$,	$\frac{7}{8}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{3}$	21)	$\frac{3}{18}$,	$\frac{13}{15}$,	$\frac{35}{46}$,	$\frac{54}{112}$
10)	$\frac{5}{9}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{7}{12}$,	$\frac{1}{6}$	22)	$\frac{11}{66}$,	$\frac{72}{83}$,	$\frac{63}{75}$,	$\frac{33}{118}$
11)	$\frac{5}{6}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{3}$		23)	$\frac{12}{33}$,	$\frac{42}{147}$,	$\frac{72}{85}$,	$\frac{34}{75}$
12)	$\frac{3}{4}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{5}{6}$		24)	$\frac{23}{34}$,	$\frac{23}{57}$,	$\frac{59}{95}$,	$\frac{32}{105}$

Adición de números mixtos.

423. Caso III. — Para sumar números mixtos, se puede seguir uno de los dos métodos que van á continuación.

1er Método. Se suman primero los quebrados, y luego los enteros, añadiendo á éstos los que resulten de la suma de los quebrados.

EJEMPLO. — ¿Cuál es el total de los números siguientes:

$$14\frac{3}{5}, 19\frac{8}{9}, 41\frac{2}{7} \text{ y } 34\frac{6}{11}?$$

DISPOSICIÓN DE LA OPERACIÓN

$$D. C. = 5 \times 9 \times 7 \times 11 = 3465$$

	Divisores	Numeradores.
3465 : 5 = 693	$14 + \frac{3}{5}$	$3 \times 693 = 2079$
3465 : 9 = 385	$19 + \frac{8}{9}$	$8 \times 385 = 3080$
3465 : 7 = 495	$41 + \frac{2}{7}$	$2 \times 495 = 990$
3465 : 11 = 315	$34 + \frac{6}{11}$	$6 \times 315 = 1890$
Total de los enteros. 108		8039
» quebrados. $2 + \frac{1109}{3465}$		1109
R. Total general. $110 + \frac{1109}{3465}$		3465 $2 + \frac{1109}{3465}$

2º Método. Se reduce cada número mixto á una sola expresión fraccionaria, y las que resulten se suman como los quebrados comunes; si hay lugar, se sacan los enteros de la suma obtenida.

EJERCICIOS SOBRE LA ADICIÓN DE NÚMEROS MIXTOS

297. ¿Cuánto suman las expresiones siguientes?

1) $3\frac{1}{4}, 5\frac{3}{4}$

2) $8\frac{1}{6}, 9\frac{5}{6}$

3) $4\frac{3}{5}, 12\frac{4}{9}$

4) $4\frac{4}{7}, 2\frac{3}{5}$

5) $2\frac{5}{7}, 7\frac{2}{3}$

6) $9\frac{1}{2}, 1\frac{5}{8}$

7)	$4 \frac{5}{6},$	$3 \frac{2}{3}$	16)	$8 \frac{4}{5},$	$9 \frac{7}{9},$	$4 \frac{5}{7}$	
8)	$5 \frac{5}{6},$	$4 \frac{3}{4}$	17)	$19 \frac{3}{5},$	$2 \frac{3}{7},$	$5 \frac{8}{9}$	
9)	$7 \frac{5}{8},$	$9 \frac{1}{4}$	18)	$4 \frac{1}{4},$	$8 \frac{2}{5},$	$8 \frac{7}{11}$	
10)	$4 \frac{3}{8},$	$9 \frac{5}{24}$	19)	$15 \frac{1}{3},$	$6 \frac{1}{8},$	$4 \frac{2}{5}$	
11)	$12 \frac{5}{6},$	$4 \frac{5}{9},$	$3 \frac{1}{2}$	20)	$6 \frac{3}{4},$	$8 \frac{1}{9},$	$9 \frac{5}{7}$
12)	$16 \frac{1}{2},$	$9 \frac{4}{5},$	$2 \frac{2}{3}$	21)	$4 \frac{1}{2},$	$5 \frac{1}{3},$	7
13)	$27 \frac{1}{2},$	$8 \frac{4}{5},$	$9 \frac{3}{7}$	22)	$5 \frac{2}{5},$	8,	$1 \frac{3}{5}$
14)	$14 \frac{1}{7},$	$2 \frac{2}{3},$	$6 \frac{3}{5}$	23)	$12 \frac{1}{5},$	$3 \frac{1}{5},$	$14 \frac{7}{18}$
15)	$7 \frac{4}{5},$	$5 \frac{2}{3},$	$3 \frac{4}{5}$	24)	$95 \frac{2}{3},$	$9 \frac{7}{20},$	$74 \frac{2}{9}$

§ II. Substracción.

424. La **substracción** de los quebrados es, como la de enteros, una operación inversa de la adición, que tiene por objeto encontrar uno de los dos números que forman una suma, cuando se conoce ésta y el otro número.

425. Ocurren tres casos en la substracción de quebrados :

1º Cuando ambos quebrados tienen un mismo denominador;

2º Cuando los quebrados tienen distinto denominador;

3º Cuando hay enteros juntos con los quebrados.

426. **Caso I.** Para restar dos quebrados que tienen un mismo denominador,

Regla. Se resta el numerador del quebrado menor del numerador del ótro, y se pone á la diferencia el denominador común á ambos.

EJEMPLO. Réstese $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$.

OPERACIÓN. $\frac{8}{9} - \frac{5}{9} = \frac{3}{9}$. La diferencia es $\frac{3}{9}$, y simplificando tenemos $\frac{1}{3}$.

427. **Caso II.** Para restar dos quebrados que tienen distinto denominador,

Regla I. Se los reduce primero á un común denominador;

II. *Se restan los numeradores, y lo demás como en el caso anterior.*

EJEMPLO. — Réstese $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$.

OPERACIÓN. Reduciendo los quebrados á un común denominador, tenemos $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$. R.

EJERCICIOS SOBRE LA SUBTRACCIÓN DE QUEBRADOS

298. Réstense los quebrados siguientes :

1) De $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$	9) De $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$	17) De $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$
2) De $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{7}$	10) De $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$	18) De $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$
3) De $\frac{8}{9}$, $\frac{6}{9}$	11) De $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$	19) De $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{6}$
4) De $\frac{8}{10}$, $\frac{7}{10}$	12) De $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$	20) De $\frac{9}{11}$, $\frac{5}{8}$
5) De $\frac{7}{11}$, $\frac{4}{11}$	13) De $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{3}$	21) De $\frac{8}{15}$, $\frac{5}{12}$
6) De $\frac{9}{15}$, $\frac{6}{15}$	14) De $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{5}$	22) De $\frac{7}{16}$, $\frac{1}{12}$
7) De $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$	15) De $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{7}$	23) De $\frac{17}{24}$, $\frac{5}{32}$
8) De $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$	16) De $\frac{10}{11}$, $\frac{4}{5}$	24) De $\frac{11}{18}$, $\frac{3}{14}$

Subtracción de números mixtos.

428. Caso III. — Para restar números mixtos de números mixtos, se puede observar uno de los dos métodos siguientes :

1^{er} Método. *Se restan primero los quebrados y luego los enteros, escribiendo los resultados uno al lado del otro.*

EJEMPLO. — Réstese $3\frac{5}{11}$ de $6\frac{7}{9}$.

DISPOSICIÓN DE LA OPERACIÓN

$$\text{D. C. } 9 \times 11 = 99$$

Numeradores.

$$6 + \frac{7 \times 11}{9 \times 11} = 77$$

$$3 + \frac{5 \times 9}{11 \times 9} = 45$$

$$\text{Diferencia } 3 + \frac{32}{99} \quad 32$$

429. Si el quebrado del substraendo es mayor que el del minuendo, se añade una unidad á éste, para lo cual se suma el numerador con el denominador.

Para que no se altere la diferencia, se añade una unidad á la parte entera del substraendo.

EJEMPLO. — ¿Qué diferencia hay entre $19\frac{1}{5}$ y $12\frac{3}{7}$?

DISPOSICIÓN DE LA OPERACIÓN

$$D. C. = 5 \times 7 = 35$$

Numeradores.

$$\begin{array}{r} 19 + \frac{1 \times 7}{5 \times 7} = \dots\dots 7 \\ \left\{ \begin{array}{l} 12 + \frac{3 \times 5}{7 \times 5} = \dots\dots 15 \\ + 1 \end{array} \right. \frac{7 \times 5}{7 \times 5} = \frac{35}{35} \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 + 35 = 42 \\ \frac{15}{27} \end{array}$$

Diferencia $6 + \frac{27}{35}$

430. Para restar un quebrado de un entero, se toma de éste una unidad que se divide en tantas partes cuantas indica el denominador del quebrado, y se restan los numeradores.

V. g. para restar $\frac{3}{8}$ de 7.

Tomo del 7 una unidad que vale $\frac{8}{8}$, el 7 queda sólo en 6, y la operación se reduce á $6\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = 6 + \frac{5}{8}$.

431. Para restar un número mixto de otro número mixto, también puede procederse del modo siguiente:

2º Método. Se reduce cada número mixto á una sola expresión fraccionaria, se les da un denominador común, y se ejecuta la operación como en la substracción de quebrados comunes.

EJEMPLO. — Réstese $4\frac{3}{4}$ de $9\frac{2}{3}$

DISPOSICIÓN DE LA OPERACIÓN

$$D. C. = 3 \times 4 = 12$$

Numeradores.

$$9 + \frac{2}{3} = \frac{29}{3}, \quad \frac{29 \times 4}{3 \times 4} = 116$$

$$4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}, \quad \frac{19 \times 3}{4 \times 3} = 57$$

$$\text{Diferencia : } 59 : 12 = 4 \frac{11}{12} \quad 59$$

EJERCICIOS SOBRE LA SUBTRACCIÓN
DE NÚMEROS MIXTOS

299. Ejecútense las subtracciones siguientes :

1)	35	$\frac{2}{5}$	—	27	17)	8	$\frac{2}{9}$	—	5	$\frac{4}{9}$
2)	43	$\frac{3}{7}$	—	39	18)	4	$\frac{2}{3}$	—	2	$\frac{3}{5}$
3)	52	$\frac{1}{8}$	—	46	19)	5		—		$\frac{7}{9}$
4)	4		—	$\frac{1}{2}$	20)	8		—		$\frac{3}{7}$
5)	7		—	$\frac{2}{3}$	21)	6		—		$\frac{4}{11}$
6)	1		—	$\frac{3}{4}$	22)	7		—		$\frac{1}{2}$
7)	5		—	$\frac{2}{5}$	23)	8		—		$\frac{2}{3}$
8)	4		—	$\frac{3}{8}$	24)	4		—		$\frac{3}{4}$
9)	3		—	$\frac{5}{6}$	25)	5		—		$\frac{4}{5}$
10)	6	$\frac{1}{3}$	—	5 $\frac{1}{6}$	26)	14	$\frac{2}{3}$	—	9	
11)	4	$\frac{2}{5}$	—	3 $\frac{3}{7}$	27)	15	$\frac{1}{2}$	—	7	
12)	9	$\frac{3}{7}$	—	2 $\frac{3}{8}$	28)	24	$\frac{3}{4}$	—	19	
13)	6	$\frac{5}{7}$	—	4 $\frac{5}{9}$	29)	8	$\frac{4}{5}$	—	4	$\frac{2}{7}$
14)	7	$\frac{1}{3}$	—	2 $\frac{3}{10}$	30)	6	$\frac{2}{5}$	—	3	$\frac{1}{7}$
15)	4	$\frac{3}{4}$	—	2 $\frac{1}{4}$	31)	9	$\frac{3}{4}$	—	8	$\frac{2}{5}$
16)	5	$\frac{3}{7}$	—	2 $\frac{4}{7}$	32)	2	$\frac{2}{3}$	—	1	$\frac{1}{4}$

33)	5	$\frac{1}{5}$	—	2	$\frac{1}{2}$	41)	6	$\frac{3}{4}$	—	4	$\frac{2}{3}$
34)	4	$\frac{2}{5}$	—	1	$\frac{3}{7}$	42)	7	$\frac{1}{2}$	—	2	$\frac{3}{4}$
35)	3	$\frac{1}{7}$	—	2	$\frac{2}{9}$	43)	8	$\frac{1}{5}$	—	4	$\frac{4}{7}$
36)	5	$\frac{3}{4}$	—	3	$\frac{7}{8}$	44)	9	$\frac{1}{3}$	—	3	$\frac{2}{5}$
37)	7	$\frac{2}{5}$	—	4	$\frac{8}{9}$	45)	4	$\frac{6}{7}$	—	2	$\frac{7}{8}$
38)	6	$\frac{2}{3}$	—	2	$\frac{3}{4}$	46)	6	$\frac{3}{4}$	—	4	$\frac{3}{5}$
39)	9	$\frac{4}{5}$	—	4	$\frac{5}{6}$	47)	8	$\frac{2}{5}$	—	1	$\frac{6}{7}$
40)	4	$\frac{2}{3}$	—		$\frac{1}{2}$	48)	7	$\frac{2}{5}$	—	1	$\frac{3}{4}$

§ III. Multiplicación.

432. La multiplicación de quebrados es, como la de enteros, una operación que tiene por objeto buscar un número que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad.

Así, multiplicar 18 por $\frac{2}{3}$ es buscar un número que sea los $\frac{2}{3}$ de 18, ya que el multiplicador es los $\frac{2}{3}$ de la unidad.

Del mismo modo, multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ es tomar los $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, etc.

433. Si el multiplicador contiene 2, 3, 4 veces, etc. á la unidad, el producto contendrá el mismo número de veces al multiplicando.

434. Si el multiplicador fuere $\frac{1}{3}$, los $\frac{3}{4}$, etc. de la unidad, el producto será también $\frac{1}{3}$, los $\frac{3}{4}$, etc. del multiplicando.

435. La multiplicación de un número cualquiera por un quebrado se reduce á tomar de dicho número la parte indicada por el quebrado.

436. Ocurren cuatro casos en la multiplicación de quebrados :

- 1º Multiplicar un quebrado por un entero;
- 2º Multiplicar un entero por un quebrado;
- 3º Multiplicar un quebrado por ótro;
- 4º Multiplicar un número mixto por ótro.

437. **Caso I.** Para multiplicar un quebrado por un entero,

Regla I. Se multiplica el numerador por el entero, conservando el mismo denominador; ó también,

II. Si es posible, se divide el denominador por el entero, conservando el mismo numerador;

III. Si el quebrado que resulta es impropio, se sacan los enteros que contenga.

EJEMPLO. — Multiplíquese $\frac{11}{14}$ por 7.

PRIMERA OPERACIÓN

$$\frac{11}{14} \times 7 = \frac{11 \times 7}{14} = \frac{77}{14} = 5 \frac{7}{14} = 5 \frac{1}{2} \quad (378)$$

SEGUNDA OPERACIÓN

$$\frac{11}{14} \times 7 = \frac{11}{14 : 7} = \frac{11}{2} = 5 \frac{1}{2} \quad (382)$$

Análisis. En la 1ª operación se multiplica por 7 el quebrado, tomando 7 veces el numerador; y en la 2ª se multiplica por 7 el quebrado, dividiendo por este número el denominador.

EJERCICIOS SOBRE EL CASO 1º DE LA MULTIPLICACIÓN

300. Multiplíquense las cantidades siguientes :

1) $\frac{1}{2}$ por 3	9) $\frac{7}{10}$ por 5	17) $\frac{2}{15}$ por 5
2) $\frac{2}{3}$ por 5	10) $\frac{3}{4}$ por 4	18) $\frac{7}{9}$ por 3
3) $\frac{3}{5}$ por 8	11) $\frac{11}{12}$ por 6	19) $\frac{5}{8}$ por 40
4) $\frac{3}{4}$ por 9	12) $\frac{9}{10}$ por 5	20) $\frac{5}{7}$ por 25
5) $\frac{4}{7}$ por 3	13) $\frac{5}{6}$ por 3	21) $\frac{8}{9}$ por 72
6) $\frac{2}{9}$ por 5	14) $\frac{11}{12}$ por 4	22) $\frac{5}{12}$ por 3
7) $\frac{3}{4}$ por 2	15) $\frac{9}{21}$ por 7	23) $\frac{7}{18}$ por 9
8) $\frac{2}{8}$ por 3	16) $\frac{5}{8}$ por 3	24) $\frac{13}{72}$ por 2

438. Caso II. Para multiplicar un entero por un quebrado,

Regla I. Se multiplica el entero por el numerador del quebrado, conservando el mismo denominador;

II. Si el quebrado que resulta es impropio, se sacan los enteros que contenga.

EJEMPLO. — Multiplíquese 21 por $\frac{4}{7}$.

Multiplicar 21 por $\frac{4}{7}$ es tomar los $\frac{4}{7}$ de 21 (**435**).

Ahora bien $\frac{1}{7}$ de 21 vale. $\frac{21}{7}$

y los $\frac{4}{7}$, ó 4 veces $\frac{1}{7}$, valdrán 4 veces más,

$$\frac{21 \times 4}{7} = \frac{84}{7} = 12 \quad (\mathbf{437}).$$

L. Q. Q. D.

EJERCICIOS SOBRE EL 2º CASO DE LA MULTIPLICACIÓN

301. Multiplíquense las cantidades siguientes :

1) 3 por $\frac{1}{2}$	9) 10 por $\frac{2}{5}$	17) 10 por $\frac{2}{5}$
2) 8 por $\frac{2}{3}$	10) 15 por $\frac{2}{3}$	18) 27 por $\frac{5}{9}$
3) 5 por $\frac{3}{4}$	11) 12 por $\frac{3}{4}$	19) 9 por $\frac{5}{8}$
4) 4 por $\frac{2}{5}$	12) 14 por $\frac{6}{7}$	20) 7 por $\frac{4}{5}$
5) 9 por $\frac{3}{4}$	13) 16 por $\frac{5}{8}$	21) 12 por $\frac{2}{3}$
6) 6 por $\frac{3}{7}$	14) 21 por $\frac{2}{7}$	22) 24 por $\frac{3}{6}$
7) 7 por $\frac{3}{7}$	15) 9 por $\frac{2}{9}$	23) 13 por $\frac{21}{33}$
8) 3 por $\frac{2}{3}$	16) 24 por $\frac{5}{6}$	24) 40 por $\frac{16}{32}$

439. Caso III. Para multiplicar un quebrado por otro,

Regla I. Se multiplica el numerador del primer quebrado por el numerador del segundo, y el denominador del primero por el del segundo;

II. Si el producto da un quebrado impropio, se sacan los enteros que contenga.

EJEMPLO. — Multiplíquese $\frac{5}{14}$ por $\frac{7}{9}$.

Multiplicar $\frac{5}{14}$ por $\frac{7}{9}$, es tomar los $\frac{7}{9}$ de $\frac{5}{14}$ (435)

Ahora bien, $\frac{1}{9}$ de $\frac{5}{14}$ vale $\frac{5}{14 \times 9}$ (379)

y los $\frac{7}{9}$, ó 7 veces $\frac{1}{9}$, valdrán 7 veces más, ó $\frac{5 \times 7}{14 \times 9}$ (378)

L. Q. Q. D.

440. Corolario. — Si se tratase de buscar el producto de varios quebrados, se buscaría primero el de dos de ellos, en seguida se multiplicaría el resultado por el tercer quebrado el 2º resultado por el cuarto quebrado, y así en adelante.

EJERCICIOS SOBRE EL 3º CASO DE LA MULTIPLICACIÓN

302. Multiplíquense los quebrados siguientes :

1) $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{3}$	9) $\frac{8}{9}$ por $\frac{3}{4}$	17) $\frac{20}{21}$ por $\frac{4}{7}$
2) $\frac{1}{4}$ por $\frac{2}{3}$	10) $\frac{2}{3}$ por $\frac{5}{6}$	18) $\frac{16}{24}$ por $\frac{5}{8}$
3) $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$	11) $\frac{5}{7}$ por $\frac{2}{5}$	19) $\frac{18}{32}$ por $\frac{11}{16}$
4) $\frac{2}{3}$ por $\frac{3}{5}$	12) $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$	20) $\frac{12}{15}$ por $\frac{15}{17}$
5) $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{7}$	13) $\frac{4}{7}$ por $\frac{5}{9}$	21) $\frac{15}{19}$ por $\frac{21}{23}$
6) $\frac{5}{6}$ por $\frac{2}{3}$	14) $\frac{8}{9}$ por $\frac{4}{5}$	22) $\frac{57}{89}$ por $\frac{25}{94}$
7) $\frac{2}{5}$ por $\frac{1}{2}$	15) $\frac{12}{17}$ por $\frac{1}{3}$	23) $\frac{37}{47}$ por $\frac{37}{78}$
8) $\frac{6}{7}$ por $\frac{2}{3}$	16) $\frac{15}{19}$ por $\frac{3}{5}$	24) $\frac{72}{94}$ por $\frac{83}{120}$

Multiplificación de números mixtos.

441. Caso IV. Para multiplicar un número mixto por otro,

Regla. Se reduce cada número mixto á una sola expresión fraccionaria, y luego se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

EJEMPLO. — Multiplíquese $3\frac{2}{5}$ por $4\frac{6}{7}$.

OPERACIÓN

$$3\frac{2}{5} \times 4\frac{6}{7} = \frac{17}{5} \times \frac{34}{7} = \frac{17 \times 34}{5 \times 7} \text{ (439)} = \frac{578}{35} = 16 + \frac{18}{35}$$

EJERCICIOS SOBRE EL 4º CASO DE LA MULTIPLICACIÓN

303. Búsquese el producto de las expresiones siguientes :

1) $1 \frac{1}{2}$ por $1 \frac{3}{4}$	9) $4 \frac{1}{5}$ por $1 \frac{3}{7}$	17) $6 \frac{3}{5}$ por $5 \frac{4}{7}$
2) $4 \frac{1}{3}$ por $7 \frac{1}{5}$	10) $5 \frac{2}{3}$ por $1 \frac{1}{2}$	18) $8 \frac{1}{4}$ por $9 \frac{1}{5}$
3) $8 \frac{2}{3}$ por $3 \frac{2}{5}$	11) $3 \frac{2}{5}$ por $6 \frac{3}{9}$	19) $9 \frac{2}{7}$ por $4 \frac{1}{3}$
4) $9 \frac{1}{5}$ por $2 \frac{1}{4}$	12) $1 \frac{2}{5}$ por $3 \frac{1}{3}$	20) $5 \frac{5}{9}$ por $6 \frac{2}{5}$
5) $7 \frac{2}{3}$ por $1 \frac{3}{4}$	13) $7 \frac{3}{7}$ por $3 \frac{6}{7}$	21) $8 \frac{1}{2}$ por $8 \frac{1}{4}$
6) $8 \frac{2}{5}$ por $9 \frac{2}{7}$	14) $9 \frac{3}{5}$ por $4 \frac{1}{2}$	22) $1 \frac{4}{7}$ por $2 \frac{2}{5}$
7) $4 \frac{1}{6}$ por $7 \frac{1}{5}$	15) $3 \frac{1}{8}$ por $9 \frac{2}{3}$	23) $8 \frac{2}{3}$ por $4 \frac{1}{7}$
8) $1 \frac{3}{7}$ por $2 \frac{3}{4}$	16) $7 \frac{1}{2}$ por $7 \frac{1}{4}$	24) $2 \frac{8}{9}$ por $4 \frac{1}{5}$

§ IV. Quebrados compuestos ó quebrados de quebrados.

442. Se da el nombre de **quebrados de quebrados** al producto de varios quebrados entre sí.

443. Para ejecutar la reducción de varios quebrados de quebrados, se observará la siguiente

Regla. *Se multiplican entre si los numeradores, y luego los denominadores, y se divide el primer producto por el segundo (440).*EJEMPLO. — Cuáles son los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{5}$ de $\frac{7}{8}$?

OPERACIÓN

$$\frac{7 \times 4 \times 2}{8 \times 5 \times 3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$$

Análisis. Empezando por el fin, tomemos primero los $\frac{4}{5}$ de $\frac{7}{8}$, del modo siguiente :

$\frac{5}{5} = \frac{7}{8}$, $\frac{1}{5}$ será 5 veces menor que $\frac{7}{8}$, ó $\frac{7}{8 \times 5}$, y los $\frac{4}{5}$ que se quieren tomar, serán 4 veces mayores, ó $\frac{7 \times 4}{8 \times 5}$.

Para tomar los $\frac{2}{3}$ de este último quebrado, procederemos del propio modo : los $\frac{2}{3} = \frac{7 \times 4}{8 \times 5}$; $\frac{1}{3}$ será 3 veces me-

nor, ó $\frac{7 \times 4}{8 \times 5 \times 3}$, y los $\frac{2}{3}$ serán dos veces mayores, ó

$$\frac{7 \times 4 \times 2}{8 \times 5 \times 3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}.$$

EJERCICIOS SOBRE LOS QUEBRADOS DE QUEBRADOS

304. Cálculense los ejercicios siguientes :

1) Los $\frac{3}{4}$ de 8.

4) La $\frac{1}{3}$ parte de los $\frac{3}{5}$ de 10.

2) Los $\frac{2}{5}$ de $\frac{2}{3}$.

5) Los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$.

3) Los $\frac{5}{6}$ de $4\frac{1}{2}$.

6) La $\frac{1}{4}$ parte de los $\frac{4}{5}$ de $5\frac{2}{3}$.

7) La $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ de la $\frac{1}{4}$ parte de 8.

8) Los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{5}$ de la $\frac{1}{6}$ parte de $\frac{1}{4}$.

9) Los $\frac{4}{5}$ de los $\frac{5}{6}$ de los $\frac{3}{7}$ de $4\frac{2}{5}$.

10) La $\frac{1}{3}$ parte de los $\frac{4}{7}$ de los $\frac{5}{8}$ de los $\frac{3}{5}$ de $6\frac{5}{7}$.

11) Los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{5}{7}$ de los $\frac{7}{9}$ de los $\frac{2}{3}$ de $4\frac{1}{5}$.

12) Los $\frac{3}{7}$ de los $\frac{7}{11}$ de los $\frac{11}{13}$ de los $\frac{13}{15}$ de $6\frac{4}{9}$.

13) Los $\frac{8}{9}$ de los $\frac{9}{10}$ de los $\frac{5}{7}$ de los $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{5}$ de $15\frac{3}{4}$.

14) La $\frac{1}{7}$ parte de los $\frac{7}{9}$ de los $\frac{8}{11}$ de $12\frac{1}{4}$.

15) Los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{4}{9}$ de $\frac{1}{5}$ de los $\frac{2}{3}$ de $9\frac{1}{5}$.

16) Los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{7}$ de los $\frac{7}{15}$ de $7\frac{1}{2}$.

17) Los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{7}$ de los $\frac{7}{8}$ de los $\frac{4}{9}$ de los $\frac{9}{15}$ de $7\frac{1}{2}$.

18) Los $\frac{3}{7}$ de $\frac{1}{2}$ de los $\frac{3}{9}$ de $\frac{1}{3}$ de los $\frac{2}{7}$ de los $\frac{4}{5}$ de 48.

§ V. Teoremas relativos á la multiplicación de quebrados.

444. Teorema. *El producto de varios quebrados no se altera aunque se invierta el orden de ellos.*

1er Caso, de dos quebrados. Sea $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$; tendremos :

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{4 \times 6} \text{ (439) } = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} \text{ (170) } = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4}.$$

L. Q. Q. D.

2º Caso, de más de dos quebrados. Sea $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{7}$; tendremos :

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{2 \times 5 \times 4}{3 \times 6 \times 7} (443) = \frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 7 \times 6} (171) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{5}{6}$$

L. Q. Q. D.

445. Teorema. Para elevar un quebrado á una potencia, basta elevar á dicha potencia el numerador y el denominador.

Sea de elevar $\frac{3}{4}$ á la 5ª potencia. Tendremos :

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} (186) = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4} (443) = \frac{3^5}{4^5}$$

446. Nota. — Para cuadrar ó cubicar un quebrado, se elevan á la segunda ó tercera potencia el numerador y el denominador.

447. Teorema. Las potencias de un quebrado menor que la unidad son tanto menores cuanto mayor sea el exponente.

Sea $\left(\frac{5}{6}\right)^2$. Tenemos : $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$ (186).

Pero $\frac{5}{6} > \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$ ó $\frac{5^2}{6^2}$, porque $\frac{5^2}{6^2}$ no es más que los $\frac{5}{6}$ de $\frac{5}{6}$ (432).

Así también : $\frac{5^2}{6^2} > \frac{5^3}{6^3}$, porque $\frac{5^3}{6^3} = \frac{5^2}{6^2} \times \frac{5}{6}$; es decir que $\frac{5^3}{6^3}$ no es más que los $\frac{5}{6}$ de $\frac{5^2}{6^2}$. Del mismo modo se probaría que $\frac{5^n}{6^n} > \frac{5^{n+1}}{6^{n+1}}$.

Así se ve que el quebrado se disminuye conforme se aumentan los exponentes de sus dos términos.

448. Teorema. Las potencias de una expresión fraccionaria son tanto mayores cuanto más grande sea el exponente.

Sea $\left(\frac{6}{5}\right)^2$. Tenemos : $\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$ (186).

Pero $\frac{6}{5} < \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$, ó $\frac{6^2}{5^2}$, porque $\frac{6^2}{5^2}$ es los $\frac{6}{5}$ de $\frac{6}{5}$ (432).

Así también : $\frac{6^2}{5^2} < \frac{6^3}{5^3}$, porque $\frac{6^3}{5^3} = \frac{6^2}{5^2} \times \frac{6}{5}$; es decir que $\frac{6^3}{5^3}$ es los $\frac{6}{5}$ de $\frac{6^2}{5^2}$. Del mismo modo se probaría que $\frac{6^n}{5^n} < \frac{6^{n+1}}{5^{n+1}}$. Y así se ve que el quebrado se aumenta según se aumenten los exponentes de sus dos términos.

449. Teorema. *Las potencias de un quebrado irreducible son quebrados irreducibles.*

Sea $\frac{5}{7}$ el quebrado irreducible.

Tenemos pues : $\left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{5^4}{7^4}$ (445)

Digo que $\frac{5^4}{7^4}$ es un quebrado irreducible. En efecto, los términos 5 y 7 son primos entre sí (387). Luego las potencias 5^4 y 7^4 son primas entre sí (334). Por consiguiente, el quebrado $\frac{5^4}{7^4}$ es irreducible (389). L. Q. Q. D.

§ VI. División.

450. La **división** de quebrados es, como la de enteros, una operación en que dados dos números, llamados *dividendo* y *divisor*, se busca ótro llamado *cuociente*, que multiplicado por el divisor dé el dividendo.

Así, dividir 12 por $\frac{3}{4}$, es buscar el factor que debe multiplicarse por $\frac{3}{4}$ para que dé 12 en el producto. Del mismo modo, dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, es buscar el factor que debe ser multiplicado por $\frac{4}{5}$ para que dé $\frac{2}{3}$ en el producto.

451. Ocurren cuatro casos en la división de números quebrados :

- 1º Dividir un quebrado por un entero;
- 2º Dividir un entero por un quebrado;
- 3º Dividir un quebrado por ótro;
- 4º Dividir un número mixto por ótro.

452. Caso I. Para dividir un quebrado por un entero,

Regla I. Se multiplica el denominador por el entero, conservando el mismo numerador; ó también,

II. Si es posible, se divide el numerador por el entero, y se conserva el denominador.

EJEMPLO. — Divídase $\frac{21}{25}$ por 3.

PRIMERA OPERACIÓN

$$\frac{21}{25} : 3 = \frac{21}{25 \times 3} = \frac{21}{75} = \frac{7}{25} \quad (379)$$

SEGUNDA OPERACIÓN

$$\frac{21}{25} : 3 = \frac{21 : 3}{25} = \frac{7}{25} \quad (381)$$

Dividir $\frac{21}{25}$ por 3 es buscar un cuociente que, multiplicado por 3, dé $\frac{21}{25}$. Luego, 3 veces el cuociente = $\frac{21}{25}$; 1 vez el cuociente = $\frac{1}{3}$ de $\frac{21}{25} = \frac{21}{25 \times 3}$.

EJERCICIOS SOBRE EL PRIMER CASO DE LA DIVISIÓN

305. Ejecútense las divisiones siguientes :

1) $\frac{1}{2} : 2$	9) $\frac{8}{11} : 4$	17) $\frac{6}{7} : 2$
2) $\frac{1}{3} : 3$	10) $\frac{10}{13} : 5$	18) $\frac{16}{21} : 8$
3) $\frac{2}{3} : 4$	11) $\frac{9}{13} : 3$	19) $\frac{5}{7} : 14$
4) $\frac{3}{4} : 5$	12) $\frac{14}{15} : 2$	20) $\frac{1}{2} : 16$
5) $\frac{2}{5} : 6$	13) $\frac{12}{17} : 4$	21) $\frac{3}{4} : 20$
6) $\frac{5}{6} : 9$	14) $\frac{15}{16} : 5$	22) $\frac{6}{7} : 36$
7) $\frac{2}{5} : 2$	15) $\frac{14}{15} : 7$	23) $\frac{3}{5} : 15$
8) $\frac{6}{7} : 3$	16) $\frac{9}{11} : 3$	24) $\frac{8}{9} : 81$

453. Caso II. — Para dividir un entero por un quebrado,

Regla. Se multiplica el entero por el quebrado divisor invertido (373).

EJEMPLO. — Divídase 15 por $\frac{3}{7}$.

$$15 : \frac{3}{7} = \frac{15 \times 7}{3} = \frac{105}{3} = 35$$

Análisis. Dividir 15 por $\frac{3}{7}$ es buscar un cuociente que, multiplicado por $\frac{3}{7}$, dé 15 en el producto. Por tanto, los $\frac{3}{7}$ del cuociente = 15; $\frac{1}{7}$ del cuociente = $\frac{1}{3}$ de 15 = $\frac{15}{3}$, y los $\frac{7}{7}$ ó todo el cuociente = $\frac{15}{3} \times 7 = \frac{15 \times 7}{3} = \frac{105}{3} = 35$ (450).
L. Q. Q. D.

EJERCICIOS SOBRE EL SEGUNDO CASO DE LA DIVISIÓN

306. Ejecútense las divisiones siguientes :

1) $3 : \frac{1}{2}$	7) $12 : \frac{3}{5}$	13) $8 : \frac{2}{3}$	19) $31 : \frac{2}{7}$
2) $5 : \frac{2}{3}$	8) $10 : \frac{5}{6}$	14) $9 : \frac{3}{4}$	20) $4 : \frac{3}{4}$
3) $6 : \frac{1}{4}$	9) $6 : \frac{3}{7}$	15) $20 : \frac{4}{5}$	21) $6 : \frac{2}{5}$
4) $7 : \frac{3}{4}$	10) $12 : \frac{4}{7}$	16) $21 : \frac{3}{4}$	22) $7 : \frac{4}{7}$
5) $5 : \frac{4}{5}$	11) $15 : \frac{3}{8}$	17) $6 : \frac{2}{5}$	23) $12 : \frac{4}{5}$
6) $9 : \frac{2}{7}$	12) $9 : \frac{3}{7}$	18) $15 : \frac{2}{9}$	24) $874 : \frac{2}{3}$

434. **Caso III.** Para dividir un quebrado por otro,

Regla. Se multiplica el quebrado dividendo por el quebrado divisor invertido (373).

EJEMPLO. — Divídase $\frac{4}{15}$ por $\frac{3}{5}$.

OPERACIÓN. $\frac{4}{15} \times \frac{5}{3} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$.

Análisis. Dividir $\frac{4}{15}$ por $\frac{3}{5}$ es buscar un cuociente que, multiplicado por el divisor $\frac{3}{5}$, dé por producto el dividendo $\frac{4}{15}$. Luego, los $\frac{3}{5}$ del cuociente = $\frac{4}{15}$; $\frac{1}{5}$ del cuociente

valdrá 3 veces menos que los $\frac{3}{5}$, ó $\frac{4}{15 \times 3}$; y los $\frac{5}{5}$, ó todo el cuociente, valdrán 5 veces más que $\frac{1}{5}$, ó $\frac{4 \times 5}{15 \times 3} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$ (439). L. Q. Q. D.

EJERCICIOS SOBRE EL TERCER CASO DE LA DIVISIÓN

307. ¿Cuál es el cuociente de los quebrados siguientes?

1) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$	9) $\frac{4}{7} : \frac{2}{5}$	17) $\frac{20}{25} : \frac{4}{5}$
2) $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$	10) $\frac{3}{8} : \frac{6}{11}$	18) $\frac{18}{24} : \frac{9}{12}$
3) $\frac{1}{3} : \frac{2}{5}$	11) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	19) $\frac{3}{5} : \frac{4}{5}$
4) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$	12) $\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$	20) $\frac{7}{8} : \frac{2}{3}$
5) $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$	13) $\frac{5}{8} : \frac{3}{4}$	21) $\frac{6}{7} : \frac{3}{5}$
6) $\frac{4}{5} : \frac{3}{7}$	14) $\frac{6}{10} : \frac{3}{5}$	22) $\frac{3}{16} : \frac{3}{8}$
7) $\frac{3}{7} : \frac{2}{8}$	15) $\frac{12}{16} : \frac{3}{8}$	23) $\frac{4}{14} : \frac{2}{7}$
8) $\frac{3}{8} : \frac{5}{9}$	16) $\frac{14}{18} : \frac{7}{9}$	24) $\frac{7}{8} : \frac{2}{5}$

División de números mixtos.

435. **Caso IV.** — Para dividir un número mixto por otro,

Regla. *Se reducen los enteros á expresión fraccionaria, y se procede luego como para la división de dos quebrados (454).*

EJEMPLO. — Divídase $5 + \frac{2}{3}$ por $3 + \frac{4}{5}$.

OPERACIÓN

$$5 + \frac{2}{3} : 3 + \frac{4}{5} = \frac{17}{3} : \frac{19}{5} = \frac{17 \times 5}{3 \times 19} = \frac{85}{57} = 1 + \frac{28}{57}$$

436. **Observación I.** — Cuando los denominadores son iguales, el cuociente es igual al primer numerador sobre el segundo.

$$\text{Así : } \frac{5}{7} : \frac{6}{7} = \frac{5}{7} \times \frac{7}{6} = \frac{5 \times 7}{7 \times 6} = \frac{5}{6}.$$

437. **Observación II.** — Cuando los numeradores son iguales, el cuociente es igual al segundo denominador sobre el primero.

$$\text{Así : } \frac{5}{7} : \frac{5}{9} = \frac{5}{7} \times \frac{9}{5} = \frac{5 \times 9}{7 \times 5} = \frac{9}{7}.$$

453. **Observación III.** — Cuando se divide la unidad por un quebrado, el cuociente es igual á este quebrado invertido.

$$\text{Así : } 1 : \frac{5}{7} = 1 \times \frac{7}{5} \text{ (453)} = \frac{7}{5}.$$

EJERCICIOS SOBRE EL CUARTO CASO DE LA DIVISIÓN

308. ¿Qué cuociente resulta de las siguientes divisiones?

1) $1 \frac{3}{4} : 3 \frac{1}{3}$	13) $8 \frac{2}{9} : 4 \frac{1}{9}$	25) $5 \frac{6}{7} : 4 \frac{1}{5}$
2) $6 \frac{1}{2} : 1 \frac{1}{2}$	14) $6 \frac{1}{2} : 4 \frac{1}{5}$	26) $8 \frac{1}{5} : 5 \frac{1}{5}$
3) $8 \frac{1}{4} : 5 \frac{1}{2}$	15) $7 \frac{2}{5} : 4 \frac{1}{4}$	27) $5 \frac{3}{4} : 9 \frac{1}{2}$
4) $1 \frac{3}{4} : 5 \frac{1}{4}$	16) $8 \frac{1}{3} : 7 \frac{1}{7}$	28) $7 \frac{1}{5} : 4 \frac{2}{7}$
5) $4 \frac{2}{3} : 1 \frac{4}{5}$	17) $2 \frac{2}{7} : 4 \frac{1}{4}$	29) $7 \frac{5}{9} : 5 \frac{1}{7}$
6) $2 \frac{3}{4} : 2 \frac{1}{2}$	18) $5 \frac{1}{5} : 5 \frac{3}{5}$	30) $8 \frac{1}{5} : 4 \frac{2}{5}$
7) $5 \frac{1}{5} : 4 \frac{2}{3}$	19) $6 \frac{5}{7} : 5 \frac{5}{6}$	31) $9 \frac{1}{2} : 4 \frac{1}{7}$
8) $3 \frac{2}{5} : 4 \frac{1}{4}$	20) $8 \frac{2}{9} : 4 \frac{1}{4}$	32) $9 \frac{1}{4} : 8 \frac{1}{2}$
9) $2 \frac{3}{5} : 4 \frac{1}{2}$	21) $5 \frac{2}{3} : 3 \frac{1}{3}$	33) $9 \frac{1}{2} : 3 \frac{1}{7}$
10) $4 \frac{1}{4} : 5 \frac{2}{5}$	22) $8 \frac{1}{2} : 7 \frac{1}{2}$	34) $5 \frac{1}{3} : 9 \frac{3}{4}$
11) $7 \frac{3}{7} : 2 \frac{1}{5}$	23) $9 \frac{2}{5} : 4 \frac{3}{7}$	35) $8 \frac{1}{9} : 4 \frac{2}{5}$
12) $9 \frac{1}{2} : 5 \frac{6}{7}$	24) $4 \frac{2}{5} : 8 \frac{3}{9}$	36) $6 \frac{3}{4} : 9 \frac{1}{2}$

§ VII. Método de la unidad.

459. La mayor parte de los problemas de la Aritmética pueden resolverse por un método analítico, llamado *de la unidad*.

460. Este método se llama **analítico** porque al ejecutar el problema se lo analiza, esto es, se estudian separadamente sus diferentes partes.

461. Llámase este método **de la unidad** porque al analizar el problema se comparan con *la unidad* ciertos datos del supuesto (nos 95 y 96).

Ejemplos con números enteros.

I. Si 2 manzanas cuestan 4 centavos, ¿cuánto costarán diez?

Análisis. Como 1 manzana es la mitad de 2, el precio de la una será también la mitad del precio de las dos, esto es, $4 : 2 = 2$ centavos.

Luego, si 1 manzana cuesta 2 centavos.

3 manzanas costarán 3 veces 2 cent. ó 6 cent.

4 ————— 4 — 2 — ú 8 cent.

10 ————— 10 — 2 — ó 20 cent. etc.

En resumen : 2 manzanas = 4 cent.

1 ————— = 2 cent.

4 ————— = 8 cent.

10 ————— = 20 cent.

II. Tres obreros tejen 24 varas de tela; ¿cuántas tejerán 5 obreros?

Análisis. Si los 3 obreros tejen 24 varas, 1 obrero tejerá la tercera parte de lo que tejen los 3, ó $24 : 3 = 8$ varas.

Luego, si 1 obrero teje 8 varas.

2 obreros tejerán el doble, ó 2 veces 8, esto es, 16 varas.

4 obreros tejerán el cuádruplo, ó 4 veces 8, esto es, 32 varas.

Y los 5 obreros tejerán el quintuplo, ó 5 veces 8, esto es, 40 varas.

En resumen : 3 obr. tejen 24 vars.

1 — tejerá 8 vars.

2 ————— 16 vars.

5 ————— 40 vars.

III. Rudecindo camina 15 leguas en 7 horas; ¿en cuánto tiempo caminará 30?

Análisis. Como busco aquí el tiempo en que Rudecindo caminará 30 leguas, empiezo el análisis por el término opuesto que son las leguas, así : En caminar 15 leguas

tarda 7 horas, en caminar 1 legua, ó la quinceava parte de 15, tardará 15 veces menos, esto es, $7:15$ ó $\frac{7}{15}$ de hora.

Luego, si en caminar 1 legua tarda $\frac{7}{15}$ de hora,

en caminar 2 leguas tardará 2 veces $\frac{7}{15}$,

ó $\frac{14}{15}$ de hora.

en caminar 3 leguas tardará 3 veces $\frac{7}{15}$,

ó $\frac{21}{15} = 1 \text{ hora } \frac{6}{15}$.

Y en caminar las 30 leguas tardará 30 veces $\frac{7}{15}$,

ó $\frac{110}{15} = 14 \text{ horas}$.

En resumen : 15 leguas en 7 horas.

1 legua en $\frac{7}{15}$ de hora.

2 ——— $\frac{7 \times 2}{15}$

3 ——— $\frac{7 \times 3}{15}$

30 ——— $\frac{7 \times 30}{15}$

Ejemplos con números quebrados.

I. He comprado la tercera parte de un pan de azúcar en S 3, ¿cuánto me costarían las $\frac{2}{3}$ partes del mismo pan?

Análisis. Si la $\frac{1}{3}$ parte del pan de azúcar cuesta S 3, las $\frac{2}{3}$ partes que son el duplo de una sola, costarán también el duplo de S 3, esto es, $2 \times 3 = 6$ S.

Las $\frac{3}{3}$ partes, ó todo el pan, costarán 3 veces los S 3, esto es S 9.

Las $\frac{4}{3}$ partes costarán 4 veces los S 3, esto es, $4 \times 3 = 12$.

En resumen : $\frac{1}{3}$ del pan cuesta S 3.
 $\frac{2}{3}$ ————— costarán 6.
 $\frac{3}{3}$ ————— 9.
 $\frac{4}{3}$ ————— 12.

II. Si los $\frac{3}{4}$ de un canasto de peras cuestan 6 reales, ¿cuánto costará todo el canasto?

Análisis. Ya que los $\frac{3}{4}$ del canasto importan 6 reales, $\frac{1}{4}$ de él costará 3 veces menos que los $\frac{3}{4}$, esto es, $\frac{6}{3}$ de real, y los $\frac{4}{4}$, ó todo el canasto, costarán 4 veces más que $\frac{1}{4}$, ó $\frac{6 \times 4}{3} = \frac{24}{3}$ de real = 8 reales.

$\frac{1}{4}$ del canasto cuesta $\frac{6}{3}$ de real, ó 2 rs.
 $\frac{2}{4}$ ————— costarán 2 veces $\frac{6}{3}$, ó $\frac{12}{3} = 4$ rs.
 $\frac{3}{4}$ ————— 3 veces $\frac{6}{3}$, ó $\frac{18}{3} = 6$ rs.
 $\frac{4}{4}$ ————— 4 veces $\frac{6}{3}$, ó $\frac{24}{3} = 8$ rs.

En resumen : $\frac{1}{4}$ del canasto cuesta 2 rs.
 $\frac{2}{4}$ ————— costarán 4 rs.
 $\frac{3}{4}$ ————— 6 rs.
 $\frac{4}{4}$ ————— 8 rs.

Problemas razonados sobre los quebrados.

I. Un pozo lleno de agua puede vaciarse con una bomba en 87 horas, y con ótra en 57; si se hacen jugar ambas á un mismo tiempo, ¿en cuántas horas quedará vacío el pozo?

Análisis. En 1 hora la 1ª bomba vaciará $\frac{1}{87}$ del pozo, y

la 2ª, $\frac{1}{57}$. Ambas juntas vaciarán $\frac{1}{87} + \frac{1}{57}$ ó $\frac{144}{87 \times 57}$ del pozo. Para vaciar los $\frac{144}{4959}$ del pozo, ponen las bombas 1 hora; para vaciar $\frac{1}{4959}$, pondrán $\frac{1}{144}$ de hora, y para vaciar los $\frac{4959}{4959}$, ó todo el pozo, pondrán $\frac{4959}{144} = \text{R. } 34 \text{ horas } \frac{7}{16}$.

II. ¿Cuál es el número cuya mitad, duplo, tercera parte y triple dan 1435?

Análisis. Sea 1 el número pedido; $\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{3} + 3 = 5 \frac{5}{6}$ ó $\frac{35}{6}$. Los $\frac{35}{6}$ del número valen 1435, 1 sexto valdrá 35 veces menos, ó $\frac{1435}{35}$, y los 6 sextos, ó todo el número, valdrán 6 veces más que 1 sexto, ó $\frac{1435 \times 6}{35} = \text{R. } 246$.

III. Durante 4 años la fortuna de un negociante se ha aumentado cada año de la cuarta parte de lo que era el año anterior; al cabo de este tiempo posee el negociante S 78125; ¿cuánto tenía al principio y al fin de cada uno de los tres primeros años?

Análisis. Según los datos del problema, la fortuna del negociante era al fin de cada año los $\frac{5}{4}$ de lo que era al fin del año anterior: 78125 son pues los $\frac{5}{4}$ de lo que era la fortuna al fin del 3º año. Si los $\frac{5}{4}$ valen S 78125, 1 cuarto valdrá 5 veces menos, ó $\frac{78125}{5}$, y los 4 cuartos valdrán 4 veces más, ó $78125 \times \frac{4}{5}$; sean S 62500.

Se ve pues que basta multiplicar por $\frac{4}{5}$ la fortuna al fin de un año, para encontrar lo que era al fin del año anterior.

Al fin del 2º año la fortuna era de $62500 \times \frac{4}{5} = \text{S } 50000$

Al fin del 1º ————— $50000 \times \frac{4}{5} = 40000$

Y al principio del 1º ————— $40000 \times \frac{4}{5} = 32000$

IV. Un niño que tenía una caja de plumas, gasta los $\frac{2}{7}$ de ella más 4 plumas $\frac{4}{7}$ de pluma, y entonces no le quedan más que los $\frac{2}{3}$ de lo que tenía al principio. ¿Cuántas plumas tenía el niño?

Análisis. Ya que después de haber gastado el niño algunas plumas, le quedan los $\frac{2}{3}$ de las que tenía antes, es claro que las gastadas igualan al un tercio; luego los $\frac{2}{7}$ del número total más 4 plumas $\frac{4}{7}$ igualan á un tercio de la caja; por consiguiente, lo que falta á los $\frac{2}{7}$ del número para igualar á $\frac{1}{3}$ del mismo son precisamente las 4 plumas $\frac{4}{7}$ ó $\frac{32}{7}$ de pluma.

Ahora bien $\frac{1}{3} - \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$; si $\frac{1}{21}$ del número iguala á $\frac{32}{7}$ de pluma, los $\frac{21}{21}$ valdrán 21 veces más, ó $\frac{32 \times 21}{7} =$
R. 96 plumas tenía el niño en su caja.

V. *Rudecindo* compra los $\frac{2}{3}$ de una pieza de tela, menos 15 metros; *Toribio* compra la $\frac{1}{4}$ parte de la misma pieza, más 4 metros, con lo cual recibe 21 metros menos que el 1º; ¿cuál es la longitud de la pieza?

Análisis. Si *Toribio* hubiera comprado sólo la $\frac{1}{4}$ parte de la pieza, habría recibido 4 metros menos, y entonces *Rudecindo* hubiera tenido $21 + 4$, ó 25 met. más que aquél. Del mismo modo, si *Rudecindo* hubiera tomado los $\frac{2}{3}$ cabales de la pieza, habría comprado 15 met. más, y por consiguiente hubiera recibido $25 + 15$, ó 40 met. más que *Toribio*. Esto prueba que la diferencia entre los $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$ de la pieza es de 40 metros.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

Ya que $\frac{5}{12}$ valen 40 met., $\frac{1}{12}$ valdrá 5 veces menos ó $\frac{40}{5}$,
 y $\frac{12}{12}$ valdrán 12 veces más, ó $\frac{40 \times 12}{5} = \text{R. } 96$ metros.

VI. Una vendedora de huevos vende los $\frac{2}{9}$ de su canasto, menos 5 huevos; si añadiera 37 á los que le quedan, el número primitivo quedaria aumentado de $\frac{1}{6}$. ¿Cuántos huevos había en el canasto?

Análisis. Si la vendedora hubiera vendido 5 huevos más, habría vendido exactamente los $\frac{2}{9}$ de su canasto, y entonces habría sido menester añadir $37 + 5$ ó 42 huevos á lo que queda, para aumentar de $\frac{1}{6}$ el número primitivo. Luego 42 huevos igualan á los $\frac{2}{9}$ que se han vendido, más $\frac{1}{6}$ del canasto.

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{12+9}{54} = \frac{21}{54} = \frac{7}{18}$$

Los $\frac{7}{18}$ del canasto valen 42, $\frac{1}{18}$ valdrá $\frac{42}{7}$, y los $\frac{18}{18}$ valdrán $\frac{42 \times 18}{7} = \text{R. } 108$ huevos.

VII. Sebastián tiene 45 años, y su hijo 21. ¿Dentro de cuánto tiempo será la edad del hijo los $\frac{4}{7}$ de la de su padre?

Análisis. El padre pasa á su hijo con $45 - 21$ ó 24 años, y siempre habrá la misma diferencia entre ambas edades. Pero en la época en que el hijo tenga los $\frac{4}{7}$ de la del padre, estos 24 años serán evidentemente los $\frac{3}{7}$ de la edad del padre mismo; por tanto, si los $\frac{3}{7}$ de la edad del padre son 24 años, $\frac{1}{7}$ será los $\frac{24}{3}$, y los $\frac{7}{7}$ serán $\frac{24 \times 7}{3} = 56$ años.

R. El tiempo pedido es de $56 - 45 = 11$ años.

VIII. Dos acequias juntas llenan una cisterna en 10 horas; ¿cuánto tiempo pondrá la 1ª sola, si la 2ª necesita 18 horas para llenarla?

Análisis. Ambas acequias en diez horas llenan una vez la cisterna; en 1 hora llenarán 10 veces menos, ó $\frac{1}{10}$ de la cisterna. La 2ª sola en 18 horas llena una vez la cisterna, en 1 hora llenará $\frac{1}{18}$. La 1ª acequia, por consiguiente, llenará en 1 hora $\frac{1}{10} - \frac{1}{18} = \frac{18}{180} - \frac{10}{180} = \frac{8}{180}$. Para llenar los $\frac{8}{180}$ de la cisterna, pone la 1ª acequia 1 hora: para llenar $\frac{8}{180}$, pondrá un tiempo 8 veces menor, ó $\frac{1}{8}$ de hora: y para llenar los $\frac{180}{180}$, ó toda la cisterna, pondrá un tiempo 180 veces mayor, ó $\frac{1 \times 180}{8} = 22$ horas $\frac{1}{2}$.

R. La 1ª acequia sola pondrá 22 horas $\frac{1}{2}$ para llenar la cisterna.

IX. Una zorra que da 2 saltos $\frac{1}{3}$ por segundo, tiene ya caminados 30 saltos $\frac{3}{4}$, cuando se suelta en pos de ella un dogo que da 4 saltos $\frac{1}{2}$ por segundo; ¿cuánto tardará éste en alcanzar á aquélla?

Análisis. Averigüemos primero cuántos saltos más que la zorra da por segundo el dogo; así:

$$4 \frac{1}{2} - 2 \frac{1}{3} = \frac{9}{2} - \frac{7}{3} = \frac{27}{6} - \frac{14}{6} = \frac{13}{6}$$

Ahora bien, para ganar $\frac{13}{6}$ de paso, el dogo pone 1 segundo; para ganar $\frac{1}{6}$ de paso, pondrá $\frac{1}{13}$ de segundo, y para ganar $\frac{6}{6}$, ó un paso, pondrá 6 veces más, ó $\frac{6}{13}$ de segundo; y como debe ganar los 30 pasos $\frac{3}{4}$, ó $\frac{123}{4}$ de paso que ya tiene caminados la zorra, para ganar $\frac{1}{4}$ de paso pondrá 4 veces menos que para ganar los $\frac{6}{6}$ ó $\frac{4}{4}$, esto

es, $\frac{6}{13 \times 4}$, y para ganar los $\frac{123}{4}$, pondrá 123 veces más que para $\frac{1}{4}$, ó $\frac{6 \times 123}{13 \times 4} = 14 \frac{5}{26}$.

R. El dogo tardará 14 segundos $\frac{5}{26}$ en alcanzar á la zorra.

X. *Dos compañías de segadores se presentan para cosechar un campo; la 1ª podría concluir su trabajo en 7 días y la 2ª en 5. Si sólo se toma la $\frac{1}{3}$ parte de la 1ª compañía y los $\frac{3}{4}$ de la 2ª, ¿en cuántos días se concluirá el trabajo?*

Análisis. La 1ª compañía puede concluir el trabajo en 7 días; pero si sólo se toma la $\frac{1}{3}$ parte de ella, pondrá $7 \times 3 = 21$ días. La 2ª puede hacerlo en 5 días; si se tomara sólo la $\frac{1}{4}$ parte, tardaría $5 \times 4 = 20$ días; pero tomando las $\frac{3}{4}$, pondrá un número de días 3 veces menor, esto es $\frac{20}{3}$ de día.

Ahora bien, si la fracción que se toma de la 1ª compañía tardara 21 días en cosechar el campo, claro es que en 1 día no cosecharía más que $\frac{1}{21}$ de él; del mismo modo la 2ª, en $\frac{20}{3}$ de día cosecharía una vez el campo, en $\frac{1}{3}$ de día no podría hacer más que $\frac{1}{20}$, y en $\frac{3}{3}$ ó 1 día entero, haría 3 veces más, ó $\frac{3}{20}$. Luego, las dos fracciones de las compañías en 1 día cosechan $\frac{1}{21} + \frac{3}{20}$ ó $\frac{20}{420} + \frac{63}{420} = \frac{83}{420}$ del campo. Para cosechar los $\frac{83}{420}$, ponen 1 día; para cosechar $\frac{1}{420}$, pondrán un espacio 83 veces menor de tiempo, ó $\frac{1}{83}$, y para cosechar los $\frac{420}{420}$, pondrán un espacio de tiempo 420 veces mayor, esto es, $\frac{1 \times 420}{83} = 5 \text{ días} + \frac{5}{83}$ de día.

XI. Venancio tiene cierto número de manzanas, y las distribuye del modo siguiente: da á Silverio la $\frac{1}{4}$ parte del número, más 1 manzana $\frac{1}{4}$; á Remigio, la $\frac{1}{5}$ parte del número total, más $\frac{2}{7}$ de manzana; á Heliodoro, los $\frac{2}{7}$ del número total, más 2 manzanas $\frac{3}{7}$, y le quedan 2 para él. Pregúntase cuántas manzanas tenía, y cuántas ha dado á cada uno de sus compañeros, sabiendo que no ha partido ninguna.

Análisis. Sumemos primero las partes del número total: $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{103}{140}$. Sumemos además las manzanas y partes de manzana: $1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + 2 + \frac{3}{7} + 2 = 5 + \frac{151}{140} = \frac{851}{140}$ de manzana.

Á los $\frac{103}{140}$ del número total faltan $\frac{37}{140}$ para completarlo; luego los $\frac{37}{140}$ del número valen los $\frac{851}{140}$ de manzana; $\frac{1}{140}$ valdrá 37 veces menos, ú $\frac{851}{140 \times 37}$, y los $\frac{140}{140}$, ó todo el número, valdrán $\frac{851 \times 140}{140 \times 37} = R. 23$ manzanas.

Á Silverio le toca $\frac{1}{4}$ de 23 ó $5\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4}$, sean 7 manzanas.

Á Remigio » $\frac{1}{5}$ de 23 ó $4\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$ » 5 »

Á Heliodoro » $\frac{2}{7}$ de 23 ó $6\frac{4}{7} + 2\frac{3}{7}$ » 9 »

Le quedan. 2 »

Total. 23 manzanas.

XII. Un jugador ha perdido los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{5}$ de S 45; ¿á cuánto asciende su pérdida?

Análisis. Empezando por el fin, tenemos que los $\frac{5}{5} = S 45$;

$\frac{1}{5}$ será 5 veces menor, ó $\frac{45}{5}$, los $\frac{4}{5}$ serán 4 veces más,

ó $\frac{45 \times 4}{5}$. Esta última expresión equivale, según el sen-

tido del problema, á $\frac{3}{3}$; luego, si $\frac{3}{3} = \frac{45 \times 4}{5}$, $\frac{1}{3}$ será 3 veces menos, ó $\frac{45 \times 4}{5 \times 3}$, y los $\frac{2}{3}$ serán 2 veces más, esto es, $\frac{45 \times 4 \times 2}{5 \times 3} = S 24$.

R. La pérdida del jugador asciende á S 24.

EJERCICIOS ORALES

309. ¿Cuál de los dos quebrados $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{8}$ es mayor, y por qué?
310. ¿Qué quebrado debe añadirse á $\frac{2}{9}$ para igualarlo á 1?
311. ¿A qué quebrado le faltan $\frac{5}{9}$ para que sea igual á la unidad?
312. Si se añade 2 al numerador de un quebrado, por ejemplo $\frac{3}{7}$, ¿de cuánto se aumenta el quebrado? — Lo mismo á la expresión $\frac{6}{5}$.
313. Si se resta 5 del numerador de un quebrado, $\frac{7}{9}$, por ejemplo, ¿de cuánto se disminuye el quebrado? — Lo mismo de la expresión $\frac{11}{5}$.
314. Si se añade 3 al denominador de un quebrado, $\frac{1}{7}$, por ejemplo, ¿de cuánto se disminuye el quebrado?
315. Si se resta 5 del denominador de un quebrado, por ejemplo $\frac{1}{11}$, ¿de cuánto se aumenta el quebrado?
316. ¿Qué alteración ocurre en una expresión fraccionaria, tal como $\frac{15}{7}$: 1º si se añade 3 al denominador; 2º si se resta 3 del denominador?
317. ¿Depende el valor de un quebrado del valor de sus términos?
318. Multiplíquese por $\frac{2}{3}$ el quebrado $\frac{5}{18}$, operando con uno solo de sus términos.
319. Divídase por $\frac{3}{4}$ el quebrado $\frac{12}{17}$, operando con uno solo de sus términos.
320. ¿Cómo se encontrarán todos los quebrados iguales á otro dado, por ejemplo $\frac{1}{3}$?

PROBLEMAS

321. Leoncio ha vendido por una parte 3 costales $\frac{2}{5}$ de harina, y por otra 2 y $\frac{3}{4}$; ¿cuánto ha vendido en todo?
322. Dos obreros han trabajado, el uno 18 días y $\frac{1}{2}$ y el otro 15 y $\frac{3}{4}$: ¿cuántos días han trabajado entre ambos?
323. El lunes ha tejido una máquina la $\frac{1}{4}$ parte de una pieza de tela, y el martes los $\frac{2}{7}$; ¿qué parte de la pieza ha tejido en ambos días?
324. ¿Cuál es la longitud de un enrejado compuesto de dos partes, la una de 18 metros $\frac{1}{4}$, y la otra de 6 y $\frac{3}{5}$?
325. Maximiliano ha vendido en una ocasión 34 metros $\frac{4}{5}$ de merino, y 32 $\frac{3}{4}$ de tafetán; ¿cuántos metros de tela ha vendido en todo?
326. Dos caños dan por minuto, el uno 12 litros de agua, y el otro 15 $\frac{3}{5}$; ¿qué cantidad de agua dan juntos por minuto?
327. ¿Cuántas buenas notas tiene Wenceslao, si un tercio y un cuarto de las que le han dado igualan á 28?
328. Dos amigos han formado un fondo común de S 2610; el 1º ha puesto $\frac{1}{4}$ más que el 2º; ¿con cuánto contribuyó cada uno?
329. Los $\frac{2}{7}$ y $\frac{1}{5}$ de una pieza de paño miden juntos 34 metros; ¿cuál es la longitud de esta pieza?

330. Severino da los $\frac{3}{5}$ del dinero que tenía en su caja; recibe en seguida \$ 2 674, y el valor primitivo de ésta queda aumentado de un tercio; ¿qué suma tenía al principio?

331. ¿Cuánto tiempo necesitan dos canales para llenar de agua un pozo, si el primero pone 4 horas y el segundo 6?

332. Un acueducto llena una pila en 6 horas $\frac{3}{4}$; otro la llena en 3 horas $\frac{3}{8}$; ¿cuánto tiempo pondrán ambos acueductos para llenarla?

333. Dos partidas de obreros se conciertan para trabajar un camino: la 1ª sola podría hacerlo en 8 días de 10 horas de trabajo; la 2ª, en 12 días de 9 horas; ¿cuánto tiempo pondrán ambas juntas, si trabajan sólo 8 horas diarias?

334. ¿Qué hora es cuando la parte transcurrida del día es igual á los $\frac{3}{5}$ de lo que falta para acabarse?

335. Durante tres años consecutivos, la fortuna de Marcial ha ascendido á \$ 54 000, yéndose aumentando cada año de la mitad de lo que era al principio del mismo año; ¿cuál fue su fortuna primitiva?

336. Preguntado el pastor Eulogio por el número de sus ovejas, responde: Si agregara $\frac{1}{3}$ á las que tengo y 12 más, llegarían á 132, décidme el número cabal de ellas.

337. ¿Cuánto tiempo tardarán dos caños en llenar de agua una pila, si el primero solo pone 4 horas, y el segundo 6?

338. Tres albañiles se proponen construir una obra: el 1º puede acabarla en $\frac{1}{5}$ de día, el 2º en $\frac{1}{4}$, y el 3º en $\frac{1}{3}$; si se reúnen los tres, ¿en cuánto tiempo la concluirán, contándose de 10 horas el día de trabajo?

339. Dos muebles cuestan juntos \$ 42; la cuarta parte del precio del primero es igual á la tercera parte del precio del segundo; ¿cuál es el precio de cada uno?

340. Un viajero ha recorrido los $\frac{2}{5}$ de su camino; ¿qué parte le queda todavía por andar?

341. De un tonel de vino de 224 litros de capacidad se han sacado 180; ¿qué parte del tonel queda vaciada?

342. De otro tonel de 225 litros de capacidad se han sacado 125; ¿qué parte del tonel queda todavía con vino?

343. ¿A cuál quebrado le falta $\frac{1}{4}$ para valer $\frac{7}{9}$?

344. Los $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$ de una estaca están plantados en tierra; ¿qué parte de la estaca se halla fuera?

345. Un aljibe recibe por minuto 4 litros $\frac{2}{3}$ de agua de una fuente, y pierde por un caño 3 litros $\frac{3}{4}$; dígase qué cantidad de agua le queda al aljibe por minuto.

346. ¿Cuánto debe agregarse á una longitud de 39 metros $\frac{2}{5}$ para que resulten 64 metros $\frac{3}{4}$?

347. ¿Cuánto queda de una pieza de paño de 42 metros $\frac{1}{5}$, si se venden 27 metros $\frac{1}{4}$?

348. Hortensia puede tejer un encaje en 2 horas $\frac{1}{4}$, y Felicitas en 1 hora $\frac{1}{2}$; ¿cuánto tiempo más pone aquélla que ésta?

349. Foción tiene 12 años $\frac{3}{4}$, y Nicasio 9 años $\frac{1}{2}$; ¿cuál es la diferencia de la edad de ambos?

350. ¿Qué diferencia hay entre dos líneas de las cuales la primera mide $\frac{3}{4}$ de metro y la segunda 2 metros $\frac{1}{2}$?

351. Para trabajar los $\frac{3}{7}$ de una puerta, el carpintero Gíriaco pone 12 horas; ¿cuánto tiempo pondrá para hacer lo demás?

352. Gertrudis teje en 6 horas las $\frac{3}{5}$ parte de una bufanda; ¿cuánto tiempo necesita para tejerla toda?

353. Silvestre ha vendido ya los $\frac{3}{5}$ de un rimero de tablas, y le quedan todavía 26; ¿cuántas tablas ha vendido?

354. Ezequiel ha gastado los $\frac{3}{7}$ de su dinero, y le quedan \$ 28; ¿cuánto tenía antes de gastar nada?

355. Nazario compra una quinta, y con \$ 8 595 paga al contado los $\frac{3}{7}$ de su valor; ¿cuál es el precio de esta quinta?

356. Después de haber vendido los $\frac{5}{9}$ de una pieza de paño, queda $\frac{1}{7}$ de ella más 26 metros; ¿cuál era la longitud de esta pieza?

357. El asta de una bandera está pintada de diversos colores, del modo siguiente: $\frac{1}{3}$ de negro, $\frac{1}{4}$ de blanco, $\frac{1}{5}$ de azul, y los 65 centímetros restantes de colorado; ¿cuál es la longitud del asta?

358. Tres socios se reparten su ganancia como sigue: al 1º le cabe la $\frac{1}{5}$ parte; al 2º los $\frac{5}{7}$, y al 3º lo restante, que asciende á \$ 19 500; preguntase cuál es la ganancia total y la de cada socio.

359. ¿Cuál es el número que tiene 14 de diferencia entre sus $\frac{3}{4}$ y sus $\frac{2}{5}$?

360. Aparicio hace 3 metros de una obra en 4 horas, y Virgilio 5 metros en 7 horas; ¿cuál de los dos trabaja más, y cuánto por hora?

361. Tres jugadores se reparten su ganancia como sigue: al 1º le tocan los $\frac{2}{7}$, el 2º los $\frac{3}{5}$ de lo que queda; ¿qué parte de la ganancia le toca á cada uno?

362. A un pozo dan 3 canales; el 1º lo llena en 1 hora $\frac{2}{5}$; el 2º en 2 horas $\frac{3}{4}$, y el 3º en 4 horas $\frac{5}{8}$. Un desagadero lo vacía en 1 hora $\frac{2}{3}$; ¿cuánto tardará el pozo en llenarse, si se abren á un tiempo los canales y el desagadero?

363. Mientras una locomotiva recorre todo un camino, una diligencia no anda más que los $\frac{4}{19}$ de él; ¿cuántas veces va más pronto la locomotiva que la diligencia?

364. En una clase de 60 alumnos, 25 están ocupados en leer, 20 en escribir, y los demás en aritmética; ¿qué parte de la clase está ocupada en cada cosa?

365. Luciano, en una operación aritmética que hizo, tomó por equivocación el quebrado $\frac{3}{4}$ en lugar de $\frac{4}{5}$; ¿qué error cometió, y en qué sentido?

366. Preguntada Cenaida por su edad, responde: Los $\frac{5}{7}$ de mi edad menos 4 años dan la que tenía yo hace 12 años; haced la cuenta, y lo sabréis.

367. Un peón camina 4 millas en 1 hora, ¿cuántas caminará en 3 horas $\frac{1}{4}$?

368. Para hacer 1 vara de cierta obra, Maximino pone 2 horas $\frac{3}{4}$; ¿cuánto tiempo pondrá para hacer 12 varas $\frac{2}{5}$?

369. Indíquese el número que es 12 veces mayor que 2 enteros $\frac{3}{7}$.

370. Silverio bebe por día $\frac{3}{4}$ de litro de vino; ¿qué cantidad bebe en un mes de 31 días?

371. Con una vuelta que da la rueda de un coche adelanta éste 6 metros $\frac{1}{4}$; ¿cuánto adelantará en 24 vueltas?

372. ¿Qué cantidad de paño será menester para 13 chalecos, á razón de $\frac{3}{5}$ de metro para cada uno?

373. Un tejedor hace $\frac{3}{5}$ de metro de tela por hora; ¿cuántos hará en 10 horas de trabajo?

374. Hernando pone 18 días para labrar una puerta; ¿cuánto tiempo pondrá para labrar sólo los $\frac{2}{3}$?
375. ¿Cuál es la longitud de una pieza de tela, cuyas $\frac{3}{4}$ partes dan un corte de 72 metros?
376. Los $\frac{3}{25}$ del número de ovejas de un rebaño dan 42; ¿cuál es el número total de ellas?
377. En $\frac{3}{5}$ de hora un caño da 46 litros de agua; ¿qué cantidad dará en el resto de la hora?
378. Vicente, que cuenta 12 años $\frac{1}{2}$, tiene los $\frac{2}{5}$ de la edad de Cristóbal; ¿cuántos años tiene este último?
379. ¿Cuáles son los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de S 20?
380. ¿Cuántas horas hay en la $\frac{1}{2}$ de los $\frac{3}{4}$ de un día ó 24 horas?
381. ¿Cuántas horas hay en los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de un día de trabajo de 10 horas?
382. Cecilia encuentra 3 pobres huerfanitos y 5 pordioseros, y da á cada uno de los primeros $\frac{3}{5}$ de sucre, y á cada uno de los segundos $\frac{4}{5}$ de sucre, y le quedan á ella S 4; ¿qué suma tenía al principio?
383. Una persona á quien se pregunta qué hora es, responde: Son los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{6}$ de 24 horas. Pregúntase pues cuál es la respuesta.
384. Beatriz cuenta 20 años, y los $\frac{9}{4}$ de su edad dan la de su padre; ¿cuántos años tiene éste?
385. He comprado una mula en S 60, y la revendo por los $\frac{7}{5}$ del precio que me costó; ¿cuánto he ganado en el negocio?
386. Hugo pone 2 horas $\frac{3}{4}$ para tejer un metro de tela; ¿cuánto tiempo pondrá para tejer 12 metros?
387. Valentín acaba una obra en 18 días; ¿cuánto tiempo pondrá para hacer sólo los $\frac{2}{3}$ de ella?
388. ¿Cuál es el valor de una recua de mulas que ha sido vendida de la manera siguiente: los $\frac{5}{9}$ de ella á S 45 mula, los $\frac{3}{8}$ á S 42 mula, y las 25 mulas restantes tasadas todas en S 750?
389. Serían menester 1800 metros de paño para vestir á un batallón, si el paño tuviera $\frac{6}{4}$ de metro de ancho; pero sucede que siendo más angosto el paño, el vendedor da 2000 metros; ¿cuál fue el ancho de este último?
390. Un obrero hace 2 metros $\frac{3}{5}$ de una obra en 2 horas $\frac{1}{4}$; ¿cuántos hará en 5 horas $\frac{1}{2}$?
391. Zollo ha recibido S 154 por 25 días $\frac{2}{3}$ de trabajo; ¿cuál fue su ganancia diaria?
392. Un telar hace 8 metros de cinta en 5 horas; pregúntase cuánto hace por hora.
393. ¿Cuál es el número que, multiplicado por 99 $\frac{4}{11}$, da por producto 244 $\frac{7}{9}$?
394. ¿Por qué número debe multiplicarse 77 $\frac{4}{7}$, para tener por producto 24 $\frac{5}{9}$?
395. Una rueda da 1200 vueltas en 5 horas $\frac{1}{2}$; ¿cuántas da en una hora?
396. Zacarías ha recibido S 120 por 25 días $\frac{1}{2}$ de trabajo; ¿cuál es su ganancia diaria?
397. Si se pagan S 140 $\frac{1}{2}$ por 12 metros $\frac{3}{4}$ de paño; ¿cuál es el importe de cada uno?
398. Un reloj se atrasa 5 minutos $\frac{1}{3}$ en 3 días $\frac{3}{4}$; ¿cuánto se atrasa en un día?

399. Wenceslao hace 5 metros $\frac{3}{8}$ de una obra en 4 horas y $\frac{1}{2}$; ¿cuántos hace en 1 hora?

400. Una plaza que no tiene viveres más que para 8 días no puede ser socorrida sino al cabo de 12; ¿á cuánto debe reducirse la ración diaria de cada hombre?

401. Un alumno copia 2 páginas $\frac{1}{2}$ en 1 hora $\frac{1}{4}$; ¿cuánto tiempo pondrá para copiar 10 páginas $\frac{3}{4}$?

402. Una diligencia recorre 15 kilómetros $\frac{1}{2}$ en 1 hora, mientras que un coche no recorre más que 7 kilómetros $\frac{1}{4}$; si salen ambos á un tiempo de un mismo lugar, con dirección á una ciudad distante 60 kilómetros $\frac{3}{4}$, pregúntase cuántas horas antes que el coche llegará la diligencia.

403. Se ha despachado de Quito 4 horas há, un posta que camina 13 kilómetros $\frac{1}{2}$ por hora; al cabo de este tiempo se despacha otro que camina 18 kilómetros por hora, en pos del primero; ¿cuánto tardará aquél en alcanzar á éste?

404. Para empapelar un salón se necesitan 8 $\frac{1}{2}$ rollos de papel del ancho de $\frac{2}{3}$ de metro; ¿cuántos rollos se necesitarán si no tienen más que $\frac{4}{9}$ de metro de ancho?

405. Un correo se pone en camino, y anda 3 leguas en 2 horas. Tres horas después, otro correo que anda 9 leguas en 5 horas, sale tras el 1º; ¿al cabo de cuánto tiempo lo alcanzará?

LECCIÓN IV

QUEBRADOS DECIMALES

462. Llámanse **quebrados decimales**, ó simplemente **decimales**, las partes de la unidad dividida en 10, 100, 1 000, etc. partes iguales.

Así, $\frac{1}{10}$, $\frac{57}{100}$, $\frac{349}{1000}$ son quebrados decimales.

463. Las partes contenidas 10 veces en la unidad se llaman **décimos**.

464. Las décimas partes de los décimos se llaman **centésimos**, porque están contenidas *cien* veces en la unidad.

465. Las décimas partes de los centésimos se denominan **milésimos**, porque están contenidas *mil* veces en la unidad.

466. Las décimas partes de los milésimos llevan el nombre de **diezmilésimos**; las décimas de éstos, **cienmilésimos**; las decimas de éstos últimos, **millonésimos**, y así en adelante.

467. Los quebrados decimales siguen el sistema de la numeración de los enteros, pero en sentido inverso: el **décimo** es diez veces menor que la unidad, mientras que la **decena** vale diez unidades; el **centésimo** es cien veces menor que la unidad, y una **centena** vale cien unidades, etc.

Nota. — Por la simple inspección de esta tabla se ve que los nombres de los decimales se derivan de los de la numeración de enteros, cambiando la terminación *ena* de *dec-ena* en *imo*, *décimo*; la terminación *ena* de *cent-ena* en *ésimo*, *centésimo*; á los nombres *mil*, *millón*, *billón*, etc., se les agrega la terminación *ésimo*, para formar los derivados *milésimo*, *millonésimo*, *billonésimo*, etc.

470. Llámase **número decimal** el que consta de un entero y un quebrado decimal, ó también de un quebrado decimal solo.

471. Para representar por escrito los números decimales,

Regla I. *Si hay número entero, se lo escribe primero, seguido de una coma, que es el signo de los decimales;*

II. *Cuando no hubiere entero, se lo reemplaza con un cero, seguido de la coma;*

III. *Después de la coma se escriben de izquierda á derecha los decimales, teniendo cuidado de colocar cada guarismo en el lugar correspondiente al orden que representa;*

IV. *Si falta algún orden decimal, se lo reemplaza con un cero.*

472. Nota. — El guarismo de las unidades sirve como punto de partida para escribir los decimales; pues éstos, por derivarse de los enteros, ocupan á la derecha de la unidad el mismo lugar que á la izquierda ocupa el entero correspondiente; por ejemplo, los millones ocupan el séptimo lugar á la izquierda de la unidad; los millonésimos deben también ocupar el séptimo lugar á la derecha, contando desde la unidad.

EJEMPLO. — Escribase el quebrado decimal *trescientos cuarenta y nueve milésimos*.

Como no contiene enteros este quebrado, pongo un cero seguido de la coma, en lugar de las unidades, luego observo que los trescientos milésimos valen 3 décimos, que se escriben después de la coma; los cuarenta milésimos valen 4 centésimos, que vienen después de los décimos, y por fin los 9 milésimos, de este modo : 0,349.

Así también, la expresión *catorce unidades novecientos catorce diezmilésimos*, se escribirá : 14,0914, poniendo un cero para reemplazar los décimos que faltan.

473. Para leer los números decimales,

Regla. *Se enuncian primeramente los enteros, si los hay, en seguida los decimales, dándoles el nombre de la última cifra de la derecha.*

Así, el número 142,35 se leerá : 142 unidades 35 centésimos.

474. Cuando hay varias cifras decimales, es preferible dividir las en porciones de á tres, de izquierda á derecha, las cuales se leen separadamente.

Por ejemplo : 3,141 592 65 se lee : 3 unidades, 141 milésimos, 592 millonésimos, 65 cienmillonésimos.

Nota. — También pueden juntarse los enteros con los decimales; y así, 4,75 se leerá 475 centésimos, porque 4 unidades igualan á 400 centésimos.

Reducciones de los quebrados decimales.

475. Con los quebrados decimales ocurren dos reducciones principales :

1º Reducción de quebrados decimales á quebrados comunes,

2º Reducción de quebrados comunes á decimales.

476. Para reducir quebrados decimales á quebrados comunes,

Regla I. *Se pone por numerador la cantidad dada, sin hacer caso de la coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantas son las cifras decimales;*

II. *Si hubiere lugar, se simplifica el quebrado que resulta.*

EJEMPLO I. — Reducir 0,375 á quebrado común.

OPERACIÓN $0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$	Análisis. Escribiendo la parte decimal 375 encima del denominador 1000, tenemos $\frac{375}{1000}$, que simplificado da $\frac{3}{8}$.
--	--

EJEMPLO II. — Reducir $0,13 \frac{1}{3}$ á quebrado común.

OPERACIÓN

$$0,13 \frac{1}{3} = 13 \frac{1}{3} = \frac{40}{3} = \frac{40}{3} : 100 = \frac{40}{300} = \frac{2}{15}$$

Nota. — El quebrado $0,13 \frac{1}{3}$ puede llamarse propiamente *quebrado decimal complejo*.

EJEMPLO III. — Reducir $7,4$ á quebrado común.

OPERACIÓN. $7,4 = \frac{74}{10} = 7 \frac{4}{10} = 7 \frac{2}{5}$.

EJERCICIOS SOBRE LA 1ª REDUCCIÓN DE DECIMALES

406. Expresense en quebrados comunes los valores siguientes :

1)	0,2	6)	0,04	11)	0,004	16)	2,025
2)	0,4	7)	0,14	12)	0,015	17)	0,0005
3)	0,5	8)	12,05	13)	0,017	18)	0,0075
4)	9,8	9)	24,17	14)	0,104	19)	0,0161
5)	4,9	10)	74,21	15)	4,107	20)	6,0025

477. Como todo quebrado común representa el cuociente del numerador por el denominador, para reducir quebrados comunes á decimales,

Regla I. *Se divide el numerador por el denominador; si aquél es menor que éste, se escribe en el cuociente un cero, seguido de una coma, para reemplazar á las unidades;*

II. *Se ponen á la derecha del dividendo tantos ceros cuantos decimales deben sacarse, y se continúa la división.*

EJEMPLO. — Reducir $\frac{5}{8}$ á quebrado decimal.

OPERACIÓN

$$\frac{5}{8} = 5 : 8 = 5,000 \quad \begin{array}{r} 8 \\ 20 \\ 40 \end{array} \left| \begin{array}{r} 8 \\ 0,625 \end{array} \right.$$

Análisis. Divido el numerador 5 por el denominador 8, y como no alcanza, pongo en el cuociente un cero seguido de la coma, para reemplazar á los enteros, y añadido al dividendo tantos ceros cuantos decimales quiero sacar, y por último resulta que $\frac{5}{8} = 0,625$ en quebrado decimal.

Nota. — Si después de haber sacado varios decimales, queda residuo todavía, se puede escribir éste al lado del cuociente como numerador, poniéndole por denominador el divisor.

EJERCICIOS SOBRE LA 2ª REDUCCIÓN DE DECIMALES

407. Expresense en decimales los valores siguientes :

1)	$\frac{1}{2}$	6)	$\frac{5}{8}$	11)	$4\frac{1}{2}$	16)	$18\frac{15}{20}$
2)	$\frac{1}{4}$	7)	$\frac{7}{10}$	12)	$6\frac{2}{5}$	17)	$24\frac{18}{25}$
3)	$\frac{3}{4}$	8)	$\frac{9}{12}$	13)	$8\frac{3}{4}$	18)	$40\frac{27}{32}$
4)	$\frac{2}{5}$	9)	$\frac{6}{15}$	14)	$9\frac{2}{10}$	19)	$30\frac{36}{48}$
5)	$\frac{3}{5}$	10)	$\frac{11}{25}$	15)	$14\frac{9}{12}$	20)	$42\frac{48}{72}$

LECCIÓN V

APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS DE LA NUMERACIÓN DE ENTEROS Y DECIMALES

478. Para que un número entero valga 10 veces más, ó para multiplicarlo por 10, se le agrega un cero á la derecha; para multiplicarlo por 100, dos ceros; por 1 000, tres ceros, etc.

Si al número 26 se le agrega un cero, resulta 260, número 10 veces mayor que el primero, puesto que las unidades han pasado á ser decenas, y las decenas, centenas. Agregándole dos ceros, resulta 2 600, número 100 veces mayor que el primero, puesto que las 26 unidades han pasado á ser 26 centenas.

479. Para que un número entero valga 10 veces menos, ó para dividirlo por 10, se separa con la coma un guarismo de la derecha; para dividirlo por 100, se separan dos guarismos; tres para dividirlo por 1 000, y así en adelante.

480. Si el número entero no contiene bastantes cifras para poder correr la coma, se escriben á la izquierda tantos ceros como fueren necesarios, más uno para ocupar el lugar de las unidades.

Para que el número 425 valga 100 veces menos, se separan dos cifras de la derecha con una coma, y resulta 4,25, número 100 veces menor que el primero, puesto que las centenas han pasado á ser unidades, y las decenas décimos. Si queremos hacerlo 10 000 veces menor, habrá que escribir 0,0425, número que es efectivamente 10 000 veces menor que el primero, ya que las 425 unidades han pasado á ser 425 diezmilésimos.

Propiedades de los números decimales.

481. Teorema. *Un número decimal no se altera si se le agregan ó quitan ceros á la derecha.*

Así, $45,63 = 45,6300$.

Esta propiedad se funda en el valor relativo de cada guarismo con respecto á la posición que ocupa.

Además, bien puede demostrarse. En efecto, tenemos :

$$45,63 = \frac{4563}{100} \quad (476)$$

$$45,63 = \frac{4563 \times 100}{100 \times 100} \quad (380) = \frac{456300}{10\,000} = 45,6300 \quad (469)$$

L. Q. Q. D.

482. Observación. — De idéntico modo se demostraría que un número decimal que remata en ceros, no se altera cuando se suprime uno ó más de ellos.

Así, $123,456000 = 123,456$.

483. Teorema. *Para multiplicar un número decimal por 10, 100, 1 000, etc., basta correr la coma uno, dos, tres lugares, etc., hacia la derecha.*

Sea de multiplicar $25,73$ por 10 .

Demostremos que resultará : $25,73 \times 10 = 257,3$.

En efecto, cada guarismo del segundo miembro de esta igualdad ha pasado á un valor diez veces mayor, por haberse corrido la coma un lugar hacia la derecha (**82**); luego todo el número se ha hecho diez veces mayor.

Además, puede también demostrarse esta propiedad de otra manera :

$$\text{En efecto : } 25,73 \times 10 = \frac{2573}{100} \times 10 \quad (476)$$

$$\text{—————} = \frac{25730}{100} = \frac{2573}{10} \quad (383) = 257,3 \quad (469)$$

L. Q. Q. D.

484. Observación. — De idéntico modo se demostraría que para multiplicar un número decimal por 100, 1 000, etc., basta correr la coma dos, tres lugares, etc., hacia la derecha.

485. Teorema. Para dividir un número decimal por 10, 100, 1000, etc., basta correr la coma uno, dos, tres lugares, etc., hacia la izquierda.

Sea de dividir 25,73 por 10.

Demostremos que : $25,73 : 10 = 2,573$.

En efecto, al correr la coma un lugar hacia la izquierda, cada guarismo del segundo miembro de esta igualdad no tiene más que un valor 10 veces menor (82); luego el número ha sido dividido por 10.

Además, puede también demostrarse esta propiedad de otra manera :

$$\text{En efecto : } 25,73 : 10 = \frac{2573}{100} : 10 \quad (476)$$

$$25,73 : 10 = \frac{2573}{100 \times 10} \quad (452)$$

$$\text{—————} = \frac{2573}{1000} = 2,573 \quad (469)$$

L. Q. Q. D.

486 Observación. — De idéntico modo se demostraría que para dividir un número decimal por 100, 1000, etc., basta correr la coma dos, tres lugares, etc., hacia la izquierda.

EJERCICIOS

408. Hágase que el N° 47 valga :

- 1° 10 veces más;
- 2° 10 veces menos;
- 3° 100 veces más.

409. Hágase que el N° 475 valga :

- 1° 10 veces menos;
- 2° 100 veces más;
- 3° 100 veces menos.

410. Hágase que el N° 450 valga :

- 1° 100 veces más;
- 2° 10 veces menos;
- 3° 1000 veces más.

411. Hágase que el N° 0,05 valga :

- 1° 10 veces más;
- 2° 1000 veces más;
- 3° 10 veces menos.

412. Hágase que el N° 24,025 valga :

- 1° 100 veces más;
- 2° 100 veces menos;
- 3° 1000 veces más.

413. Hágase que el N° 2 456,025 valga :

- 1° 1000 veces más;
- 2° 1000 veces menos;
- 3° 100 000 veces más.

LECCIÓN VI

OPERACIONES QUE SE EJECUTAN CON
LOS QUEBRADOS DECIMALES

487. Con los quebrados decimales pueden ejecutarse las mismas operaciones que con los números enteros y con los quebrados comunes; esto es: adición, sustracción, multiplicación y división.

§ I. Adición.

488. Para sumar números decimales,

Regla. *Se colocan los sumandos únos debajo de otros, de modo que las unidades vayan debajo de las unidades, los décimos debajo de los décimos, los centésimos debajo de los centésimos, etc., y luego se suman como los números enteros, teniendo cuidado de poner la coma en el total á la derecha de las unidades.*

EJEMPLO. — Súmense las cantidades siguientes :

$$4,037 + 1709,34 + 40004,003079$$

OPERACIÓN

4,037

1709,34

40004,003079

Total. 41717,380079

Nota. — El total tiene tantos guarismos decimales como el sumando en que hay más.

§ II. Substracción.

489. Para restar números decimales, se observarán las reglas siguientes :

Regla I. *Se escribe el substraendo debajo del minuendo, de modo que las unidades vayan debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc., los décimos debajo de los décimos, los centésimos debajo de los centésimos, etc.*

II. Si no hubiere igual número de cifras decimales en ambos términos, se agregan á la derecha del que tiene menos, tantos ceros como fueren menester para igualar al que tiene más, y se ejecuta la operación como con los enteros;

III. En la diferencia se pone la coma debajo de las de los dos términos.

EjemPlo. — De 3456,7 réstese 2986,354.

Análisis. Se han puesto dos ceros á la derecha del 7 para que el minuendo tenga tantos guarismos decimales como el substraendo : se han separado á la derecha de la diferencia tres cifras decimales, ya que el substraendo tiene tres; la diferencia que resulta es de 470 unidades 346 milésimos.

OPERACIÓN

3456,700

2986,354

470,346

§ III. Multiplicación.

490. Para multiplicar números decimales,

Regla. Se busca el producto de ellos como si fuesen números enteros, sin hacer caso de la coma; pero teniendo cuidado de separar á la derecha del producto tantas cifras decimales como hay en ambos factores juntos.

Sea de multiplicar 32,25 por 13,47. Tendremos :

$$32,25 = \frac{3225}{100} \quad (476)$$

$$13,47 = \frac{1347}{100} \quad (476)$$

Multiplicando miembro por miembro, resulta :

$$32,25 \times 13,47 = \frac{3225}{100} \times \frac{1347}{100} = \frac{3225 \times 1347}{10\,000} \quad (439)$$

De donde se ve que, después de haber multiplicado 3225 por 1347, habrá que separar, con una coma, 4 guarismos á la derecha del producto (469). Lo que dará 4 cifras decimales.

L. Q. Q. D.

Además, puede demostrarse esta regla de otra manera :

En efecto, ejecutando la multiplicación sin hacer caso de la coma, cada número se halla multiplicado por 100; por tanto el producto quedará multiplicado por 100×100 (180) ó por 10 000. Para hacerlo 10 000 veces menor, basta separar con la coma 4 guarismos á la derecha (485).

32,25

13,47

22575

12900

9675

3225

434,4075 Prod. total.

§ IV. División.

491. En la división de números decimales pueden considerarse dos casos :

1º Cuando en el dividendo y divisor, hay igual número de cifras decimales;

2º Cuando no es igual el número de cifras decimales en el dividendo y en el divisor.

492. **Caso I.** — Para dividir dos números que tienen tantas cifras decimales en el dividendo como en el divisor,

Regla. *Se ejecuta la división sin hacer caso de las comas, y el cuociente que resulta es el verdadero.*

Sea de dividir 2,34 por 1,17. Tendremos :

$$2,34 = \frac{234}{100} \quad (476)$$

$$1,17 = \frac{117}{100}$$

Dividiendo miembro por miembro, resulta :

$$\begin{aligned} 2,34 : 1,17 &= \frac{234}{100} : \frac{117}{100} = \frac{234}{100} \times \frac{100}{117} \quad (454) = \\ &= \frac{234 \times 100}{100 \times 117} \quad (439) = \frac{234}{117} \text{ L. Q. Q. D.} \end{aligned}$$

493. **Caso II.** — Para dividir dos números cuando no hay tantas cifras decimales en el dividendo como en el divisor,

Regla. *Se hace de modo que el dividendo y el divisor tengan igual número de cifras decimales, agregando ceros á la derecha del que tenga menos; luego se quitan las comas, y se ejecuta la división como en los números enteros.*

Sea de dividir 4,7 por 2,35. Tenemos :

$$4,7 = \frac{47}{10} \quad (469)$$

$$2,35 = \frac{235}{100}$$

Dividiendo miembro por miembro, resulta :

$$4,7 : 2,35 = \frac{47}{10} : \frac{235}{100} = \frac{47}{10} \times \frac{100}{235} = \frac{47 \times 100}{10 \times 235} = \frac{470}{235} \text{ L. Q. Q. D.}$$

Valuación de un cuociente en decimales.

494. Por calcular un cuociente con una aproximación dada en decimales, se entiende que deben sacarse tantos decimales en dicho cuociente cuantos indique la aproximación que se pide.

Así, calcular el cuociente de 3 por 7 con aproximación de 0,0001 quiere decir que debe haber 4 cifras decimales en el cuociente.

495. Para encontrar un cuociente con una aproximación decimal dada,

Regla. *Se parte el dividendo por el divisor, y se continúa la división agregando los ceros que fueren menester á los dividendos parciales, hasta que en el cuociente haya el número pedido de cifras decimales.*

OPERACIÓN

$$\begin{array}{r} 30 \quad | \quad 7 \\ 20 \quad | \quad 0,4285 \\ 60 \\ 40 \\ 5 \end{array}$$

EJEMPLO. — Búsquese el cuociente de 3 por 7 con aproximación de 0,0001, esto es, con 4 decimales.

Nota. — Si se continuara indefinidamente la división sin que se terminase el cuociente, éste se llamaría periódico.

EJERCICIOS

414. Exprésense en decimales los valores siguientes, con aproximación de 0,1.

1) $\frac{2}{3}$	3) $\frac{4}{7}$	5) $\frac{3}{7}$	7) $\frac{6}{13}$
2) $\frac{5}{6}$	4) $\frac{5}{9}$	6) $\frac{5}{11}$	8) $\frac{9}{11}$

415. Exprésense en decimales los valores siguientes, con aproximación de 0,01.

1) $12 \frac{2}{7}$	3) $9 \frac{2}{3}$	5) $13 \frac{2}{5}$	7) $11 \frac{7}{15}$
2) $24 \frac{4}{9}$	4) $7 \frac{1}{6}$	6) $25 \frac{7}{9}$	8) $9 \frac{9}{18}$

416. Exprésense en decimales los valores siguientes, con aproximación de 0,001.

1) $12 \frac{2}{7}$	3) $24 \frac{6}{11}$	5) $21 \frac{3}{7}$	7) $32 \frac{9}{13}$
2) $17 \frac{8}{9}$	4) $32 \frac{8}{17}$	6) $15 \frac{5}{9}$	8) $21 \frac{2}{11}$

LECCIÓN VII

QUEBRADOS PERIÓDICOS

496. Varias veces sucede que cuando se reduce un quebrado común á decimal, la división no puede terminarse, y ciertas cifras decimales se reproducen siempre en un mismo orden. En este caso, el quebrado decimal se llama **periódico**.

$$\text{V. g. : } \frac{2}{3} = 0,666 \dots \quad \frac{8}{11} = 0,72 \, 72 \, 72 \dots \quad \frac{4}{7} = 0,571 \, 428 \, 571 \, 428 \dots$$

$$\frac{7}{22} = 0,3 \, 18 \, 18 \dots$$

497. **Teorema.** *Cuando el cuociente de los dos términos de un quebrado irreducible no llega á terminarse, dicho cuociente es periódico.*

Demostremos pues que un cuociente decimal que no llega á terminarse es periódico.

En efecto, cuando se divide el numerador de un quebrado irreducible por su denominador, resulta cierto número de residuos consecutivos, menores todos que el divisor. El número de estos residuos es, cuando más, igual al número de unidades del denominador *menos uno* (206). El residuo que resulte en seguida será igual á otro de los anteriores, y poniendo un *cero* á su derecha, resulta un dividendo parcial que ya se ha encontrado, y desde el cual se repetirán, en un mismo orden, algunos guarismos en el cuociente ó en los residuos.

L. Q. Q. D.

EJEMPLO. — Sea $\frac{1}{7}$

10	7
30	0142857142857...
20	
60	
40	
50	
10	
30	
20	
60	
40	
50	
1.	
...	

498. Llámase **quebrado periódico** un quebrado decimal en el cual los mismos guarismos se reproducen en un mismo orden.

499. Llámase **periodo** en los quebrados decimales la serie de los guarismos que se reproducen.

500. **Corolario.** — *El mayor número de guarismos de un periodo es igual al número de unidades del divisor menos uno.*

501. El quebrado periódico puede ser *simple* ó *mixto*.

502. El quebrado periódico es **simple** cuando el guarismo de los décimos da principio al primer periodo, como en 0,356 356 356...

503. El quebrado periódico es **mixto** cuando el periodo no empieza inmediatamente después de la coma; v. g.: 0,37 456 456 456...; 37... constituye la parte *irregular* ó *no periódica*.

504. **Observación.** — El último guarismo del periodo no puede ser igual al último de la parte no periódica, porque entonces el periodo comenzaría en el guarismo anterior.

505. **Teorema.** *Para que un quebrado ordinario irreducible pueda convertirse exactamente en quebrado decimal, es necesario y suficiente que el denominador no contenga más factores primos que 2 y 5.*

1º Esta condición es necesaria.

Sea el quebrado irreducible $\frac{a}{b}$ que suponemos puede reducirse exactamente á quebrado decimal.

Demostremos que el denominador de este quebrado no contiene más factores primos que 2 y 5.

En efecto, ya que el quebrado $\frac{a}{b}$ debe ser equivalente á un quebrado decimal exacto, tendremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{10^m} \quad (462)$$

Ahora bien, por hipótesis, $\frac{a}{b}$ es quebrado irreducible, luego A y 10^m son respectivamente equimúltiplos de a y de b; por consiguiente, b divide á 10^m ; pero 10^m no admite sino los factores 2 y 5 (330), por tanto b no puede formarse sino de estos factores.

L. Q. Q. D.

2º Esta condición es suficiente.

Sea el quebrado $\frac{7}{20}$.

Si suponemos que el denominador 20 no contiene más que los factores primos 2 y 5, demostremos que puede transformarse exactamente este quebrado en quebrado decimal. En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{7}{20} &= \frac{7}{2^2 \times 5} = \frac{7 \times 5}{2^2 \times 5 \times 5} \quad (380) = \frac{7 \times 5}{2^2 \times 5^2} \quad (190) = \\ &= \frac{7 \times 5}{10^2} \quad (193) = \frac{35}{100} = 0,35 \end{aligned} \quad (469)$$

L. Q. Q. D.

Demostración general.

Sea $\frac{A}{B} = \frac{A}{2^{m+n} \times 5^m}$. Tendremos:

$$\frac{A}{2^{m+n} \times 5^m} = \frac{A \times 5^n}{2^{m+n} \times 5^m \times 5^n} \quad (380) = \frac{A \times 5^n}{2^{m+n} \times 5^{m+n}} = \frac{A \times 5^n}{10^{m+n}} \quad (193)$$

Pero este último quebrado puede convertirse exactamente en quebrado decimal (469).

506. Observación I. — Fácil es ver que el número de decimales es igual al mayor exponente de 2 ó de 5 del denominador; porque siendo el numerador A primo con B, no contiene el factor 2, y $A \times 5^n$ no rematará en cero.

507. Observación II. — Cuando un quebrado irreducible $\frac{a}{b}$ da origen á un quebrado decimal periódico, el quebrado $\frac{a}{b}$ se llama *fracción generatriz* del quebrado periódico.

Modo de buscar las fracciones generatrices.

508. Teorema. *La fracción generatriz que da origen á un quebrado periódico simple, menor que la unidad, tiene por numerador el periodo y por denominador un número formado de tantos 9 cuantos guarismos hay en el periodo.*

Sea el quebrado 0,37 37 37...

Llamemos Q el valor de un número limitado de periodos, 3 por ejemplo, y tendremos :

$$Q = 0,37\ 37\ 37 \quad (1)$$

Multipliquemos ambos miembros por 100,

$$100\ Q = 37,37\ 37 \quad (2)$$

Restando la 1ª igualdad de la 2ª, se destruyen los dos primeros periodos, y resulta :

$$99\ Q = 37 - 0,000037$$

de donde,

$$Q = \frac{37}{99} - \frac{0,000037}{99} \quad (231)$$

El valor Q se compone de $\frac{37}{99}$ menos la 99ª parte del 3º periodo. Esta última parte será tanto menor cuanto mayor sea el número de periodos tomados. En el límite, esto es, cuando el número de periodos sea muy considerable, dicha parte será insignificante. Llamemos x este límite, y entonces :

$$x = \frac{37}{99} \quad \text{L. Q. Q. D}$$

509. Observación. — El denominador de la fracción generatriz $\frac{37}{99}$ no contiene los factores 2 ni 5 (**272** y **279**); luego, si se reduce este quebrado á su más simple expresión, el denominador que resulte tampoco los contendrá. De donde se saca este principio :

Toda fracción irreducible, generatriz de un quebrado

decimal periódico simple, no contiene en su denominador los factores 2 ni 5.

510. Teorema. La fracción generatriz que da origen á un quebrado periódico simple mayor que la unidad, tiene por numerador la parte entera seguida de un periodo menos la misma parte entera, y por denominador, un número formado de tantos nueves cuantos guarismos hay en el periodo.

Sea la expresión fraccionaria 4, 57 57 57

$$4,57\ 57\ 57\ .\ .\ .\ .\ . = 4 + 0,57\ 57\ 57\ .\ .\ .\ .\ .$$

Pero 0,57 57 57 tiene por límite á $\frac{57}{99}$ (508).

Luego,

$$4,57\ 57\ 57\ .\ .\ .\ .\ . = 4 + \frac{57}{99} \text{ en el límite.}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 4 + \frac{57}{99} &= \frac{4 \times 99 + 57}{99} \quad (393) = \frac{4(100 - 1) + 57}{99} = \\ &= \frac{400 - 4 + 57}{99} = \frac{457 - 4}{99} \quad \text{L. Q. Q. D.} \end{aligned}$$

Nota. — Si el último guarismo de la parte entera no es igual al último del período, el numerador de este quebrado no rematará en cero.

511. Teorema. La fracción generatriz que da origen á un quebrado periódico mixto menor que la unidad, tiene por numerador la parte no periódica seguida de un periodo, menos la misma parte no periódica, y por denominador un número formado de tantos nueves cuantos guarismos hay en el periodo, con tantos ceros como guarismos hay en la parte no periódica.

Sea el quebrado 0,45 378 378 378

Llamando x el límite de este quebrado, resulta :

$$x = 0,45\ 378\ 378\ 378\ .\ .\ .\ .\ .$$

Multipliquemos ambos miembros por 100, y tendremos :

$$100x = 45,378\ 378\ 378\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\delta \quad 100x = \frac{45378 - 45}{999} \quad (510)$$

$$\text{de donde} \quad x = \frac{45378 - 45}{99900} \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

Por consiguiente :

$$4,5699\dots = 4,56 + 0,00999\dots = 4,56 + 0,01 = 4,57$$

$$0,50999\dots = 0,50 + 0,00999\dots = 0,50 + 0,01 = 0,51$$

Pero el período 9 no existe, porque si existiera, tendríamos, por ejemplo : $4,56999\dots = 4,57 = \frac{457}{100}$

Y entonces un quebrado decimal periódico sería igual á un quebrado decimal exacto; lo que es evidentemente absurdo.

De modo que un quebrado decimal ordinario daría origen á un cuociente periódico; lo que es imposible (495, nota).

514. Observación I. — Cuando se suprimen algunos guarismos á la derecha de un número decimal, el error que se comete es menor que una unidad del orden inmediatamente superior al primer guarismo suprimido, porque la parte suprimida es menor que el período 9.

Así, si en vez de 45,378 479 3, se toma sólo 45,378, el error cometido no es de 0,001.

515. Observación II. — Hemos visto (495) que para encontrar un cuociente con una aproximación decimal dada, hay que detenerse en el número pedido de guarismos para la aproximación; pero un cuociente aproximado puede serlo por *exceso* ó por *defecto*.

Lo es por defecto cuando es menor que el verdadero cuociente, y por exceso en el caso contrario.

Así $\frac{13}{15}$ se halla comprendido entre 0,866 y 0,867; el primer cuociente es por defecto, y el 2º, por exceso.

516. Observación III. — Para acercarse lo más que sea posible de un número decimal á una aproximación dada, se distinguen tres casos :

Caso 1º. — Si el primer guarismo que ha de suprimirse es menor que 5, se lo tacha con todos los que lo siguen; el error cometido por defecto es menor que una media unidad del último guarismo conservado.

Caso 2º. — Si el primer guarismo que ha de suprimirse es mayor que 5, se aumenta *uno* al último guarismo que debe conservarse, y se tachan todos los que siguen; el error cometido por exceso es menor que una media unidad del último guarismo conservado.

Caso 3º. — Si el primer guarismo que ha de suprimirse es 5 no seguido de otros guarismos significativos, se tacha este guarismo y se aumenta ó no el último guarismo conservado. Según el caso, el cuociente será por exceso ó por defecto con aproximación de una media unidad del orden del último guarismo conservado.

517. Teorema. *Cuando el denominador de un quebrado irreducible no contiene ninguno de los factores 2 ó 5, este quebrado da origen á un quebrado decimal periódico simple.*

Sea el quebrado $\frac{a}{b}$.

Primero este quebrado debe ser periódico (505).

Si lo suponemos periódico mixto,

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

El término b' rematará en cero, lo que no sucederá con a' , porque entonces sería menester que el último guarismo del período fuese igual al último de la parte no periódica.

Pero $a \times b' = a' \times b$ (406)

Ahora bien, 10 divide á $a \times b'$ (265), por tanto dividirá también á $a' \times b$.

Pero 10 es primo con b , puesto que por hipótesis b no contiene ninguno de los factores 2 ni 5. Por tanto 10 divide á a' (327); lo que es imposible, puesto que a' no remata en cero. Así pues, el quebrado $\frac{a}{b}$ dará origen á un quebrado periódico simple.

518. Teorema. *Cuando el denominador de un quebrado irreducible contiene los factores 2 ó 5 combinados con otros factores, da origen á un quebrado decimal periódico mixto.*

Primero da origen á un quebrado periódico (505); y éste será mixto; porque, si fuera simple, el denominador no debería contener ninguno de los factores 2 ó 5 (509). Lo que es contra la hipótesis.

Ejemplo : $\frac{7}{12} = 0,583333.....$

EJERCICIOS ORALES

417. ¿Todos los quebrados comunes son exactamente reducibles á quebrados decimales?
418. ¿Todos los quebrados decimales son exactamente reducibles á quebrados ordinarios?
419. ¿Puede reducirse el quebrado $\frac{2}{5}$ á quebrado decimal limitado?
420. ¿El quebrado $\frac{18}{30}$ es reducible exactamente á quebrado decimal?
421. Pregúntase lo mismo de los quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{41}{64}$, $\frac{3}{14}$, y explíquese el porqué. Si son irreducibles, ¿á qué clase de quebrado periódico dan origen?
422. ¿Cuántas cifras tendrá después de la coma el quebrado decimal equivalente á $\frac{12}{25}$?
423. Pregúntase lo mismo de los quebrados $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{17}{200}$ y $\frac{15}{96}$.
424. ¿Cuántas cifras tendrá la parte no periódica del quebrado decimal equivalente á $\frac{5}{24}$? y por qué?
425. Pregúntase lo mismo de los quebrados $\frac{3}{14}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{2}{28}$, $\frac{4}{55}$, $\frac{7}{75}$.

PROBLEMAS SOBRE LOS QUEBRADOS

COMUNES Y LOS DECIMALES

426. ¿Qué número se debe añadir á 4 milésimos para tener 15 centésimos?
427. Dos mercaderes han formado un fondo de \$ 18 500; el 1º ha puesto \$ 6 590,40; ¿cuánto debe agregar á su porción para que iguale á la del segundo?
428. Multiplicar 485,72 : 1º por 1 décimo; 2º por 1 centésimo; 3º por 1 milésimo.
429. Maximiliano se ha encargado de suministrar el forraje necesario para 3 680 caballos de tropa, durante 23 meses; cada caballo consume 3 hectolitros por mes; el forraje importa á razón de \$ 0,65 por hectolitro; pregúntase qué suma le será debida al cabo de los 23 meses.
430. Un encuadernador ha comprado 5 docenas de badanas, á \$ 4 docena, y 2 docenas de cabritillas; la docena de esta última especie de piel importa el triple de la primera, menos \$ 0,80 centavos; ¿qué cantidad de dinero debe gastar el encuadernador?
431. ¿Cuál es el número que multiplicado por 0,025 ha dado 1 en el producto?
432. Habiendo multiplicado 6,55 por otro número, ha resultado 57,3125 en el producto; ¿cuál es este otro número?
433. Búsquese el número que multiplicado por 0,005 da en el producto 0,025.
434. Quiero saber cuál es el cociente de 0,00001 dividido por 0,001.
435. Un taller que trabaja 10 horas por día, tiene una obra para 16 días; si se quiere que el trabajo dure 20 días, ¿qué parte deberá disminuirse del trabajo diario?
436. Andrés compra 12 volúmenes á \$ 2,60 cada uno, y recibe 13 en lugar de 12; ¿á cuánto le sale el volumen?

437. ¿Cuál es la longitud de una pieza de paño que ha costado \$ 877,50, sabiendo que al revender 25 metros en \$ 437,50 se han ganado \$ 2,50 por metro?
438. Sebastián promete dar á los pobres \$ 0,25 cada vez que gane \$ 9,25; ¿cuánto le queda á él si su limosna asciende á \$ 5,25?
439. Cada vez que un joven gana \$ 9,25 su padre le da cierta suma; ¿cuál es esta suma, sabiendo que cuando el dón del padre es de \$ 12,25 el hijo tiene por todo \$ 77?
440. Una bujía de 0^m 23 de largo se disminuye de 0^m 0011 por minuto, al estar encendida; ¿cuántas horas tardará en acabarse?
441. Dos jugadores, Alfonso y Bernardo, convienen en que, después de cada mano, el que pierda dará al otro \$ 0,05. Después de 15 manos, Alfonso ha ganado \$ 0,35; ¿cuántas manos ha ganado cada uno?
442. Cirilo dice á uno de sus condiscípulos: « Si yo comprara 40 chilrimoyas, me faltarían \$ 0,15; pero si no comprara más que 15, me sobrarían \$ 0,35; dime 1^o cuánto importa cada fruta, y 2^o qué suma tengo en mi poder. »
443. El cociente de dos números es $\frac{3}{7}$; su m. d. c. es 5; ¿cuáles son estos números?
444. El cociente de dos números es $7\frac{2}{7}$; su m. c. m., 107100; búsquense estos números y su m. d. c.
445. El cociente de dos números es $\frac{22}{12}$; su m. d. c., 102; ¿cuál es el m. c. m. de estos dos números?
446. Un trabajo puede ser concluido en 2 días por un obrero, y en 3 días por otro. ¿Cuánto tiempo pondrán ambos obreros juntos para concluir el trabajo?
447. Un copiante puede escribir un expediente en 6 horas, y otro lo escribiría en 8 h. $\frac{1}{2}$. Si se emplean ambos copistas juntos, ¿cuánto se tardarán en concluir este trabajo?
448. Doroteo puede terminar un trabajo en 3 días, y Eduardo podría hacerlo en 4 días. ¿Qué parte de la obra harían juntos en $\frac{3}{4}$ de día?
449. Filiberto puede blanquear una pared en 3 horas; su mujer puede hacerlo en 4 horas, y su hijo en 6. Si se reúnen los tres, ¿qué parte de la pared blanquearán en 1 hora, y cuánto tiempo pondrán para blanquearla enteramente?
450. Cuatro ruedas se engranan sucesivamente, y cada una no tiene más que los $\frac{2}{3}$ del número de dientes de la rueda que le precede; si la 1^a tiene 162 dientes, ¿cuántos tiene la menor?
451. Se ha comprado una pieza de tela á razón de \$ 7 cada 5 metros; y se la revende en \$ 16 cada 11 metros, ganando así \$ 24; ¿cuál es la longitud de la pieza?
452. Gabriel compra carbón á \$ 13 los 7 hectolitros, y lo revende á \$ 19 los 9 hectol. ¿Cuántos hectol. deberá vender para ganar \$ 80?
453. Dos correos van al encuentro uno de otro; el 1^o recorre $\frac{1}{5}$ del camino más que el 2^o, que anda 8 km. por hora. ¿A qué hora se encontrarán, si han salido á las 6 de la mañana de dos ciudades distantes 44 km. una de otra?
454. ¿Qué número debe restarse de cada uno de los términos del quebrado $\frac{11}{16}$, para reducirlo á $\frac{1}{2}$?
455. ¿Qué número debe añadirse á cada uno de los términos del quebrado $\frac{3}{11}$, para que equivalga á $\frac{5}{9}$?

456. Si se restan 13 años $\frac{1}{3}$ del duplo de mi edad en 1880, resultan los $\frac{3}{4}$ más los $\frac{5}{6}$ de la misma. ¿En qué año nací?

457. Si á los $\frac{3}{7}$ de la edad de una persona se añaden los $\frac{2}{5}$ de la misma más 15 años, resulta la edad que tendrá dicha persona dentro de 6 años. ¿Cuál es su edad actual?

458. La suma de dos quebrados es $\frac{8}{9}$; su diferencia, $\frac{1}{36}$. ¿Cuáles son estos quebrados?

459. La suma de dos quebrados es $1\frac{1}{5}$; su cuociente, $1\frac{4}{7}$. ¿Cuáles son estos quebrados?

460. La diferencia de dos quebrados es $\frac{1}{7}$; su cuociente, $\frac{4}{9}$. ¿Cuáles son estos quebrados?

461. La diferencia de dos quebrados es $\frac{2}{9}$; su cuociente, $\frac{13}{27}$. ¿Cuáles son estos quebrados?

462. Una cuadrilla de segadores puede cosechar un campo en 9 días, y otra podría hacerlo en 8 días. Si se toman los $\frac{3}{5}$ de la primera cuadrilla y los $\frac{2}{3}$ de la segunda, ¿cuánto tiempo pondrán para cosechar el campo?

463. Una bola cae de una altura de 80 centímetros sobre una mesa de mármol; cada vez que toca á la mesa, rebota y se eleva á una altura igual á la tercera parte de aquélla de que cayó. ¿A qué altura se elevará la bola después de haber tocado á la mesa por tercera vez?

464. Una bola cae desde cierta altura sobre una mesa de mármol; rebota, vuelve á caer y á rebotar, y así en adelante. Después de haber tocado cuatro veces á la mesa, rebota la bola hasta 7 centím. ¿Desde qué altura cayó la primera vez, si después de cada caída volvía á elevarse á los $\frac{2}{3}$ de la altura de donde había caído?

465. Un reloj que señala la hora verdadera el domingo á medio día, se adelanta $\frac{2}{3}$ de minuto en 1 hora. ¿Qué hora será el martes cuando el reloj señale las 9 y 45 min. de la noche?

466. Un reloj se adelanta 10 segundos $\frac{2}{3}$ por hora; el domingo á las 8 de la mañana, se nota que se ha adelantado $\frac{1}{2}$ hora. ¿En qué día y á qué hora había sido arreglado el reloj?

467. Un reloj que se atrasa 2 min. en 3 horas ha sido arreglado á las 12 del día. ¿Qué hora es cuando señala al día siguiente las 10 de la mañana?

468. En 1858, decía Hilario á su hijo: Mi edad es el quintuplo de la tuya, pero en 1879 no será más que el duplo. ¿En qué año nació el hijo, y qué edad tenía el padre en 1879?

469. En 1853, la edad de Ignacio era 9 veces la de su hijo; en 1858, no era más que el quintuplo de la de éste. ¿Cuántos años tuvo el padre en 1880?

470. Una diligencia camina 16 km. $\frac{1}{2}$ por hora, mientras que un coche no camina más que 7 km. $\frac{1}{4}$. Ambos salen á la vez de una misma ciudad para ir á otra, distante 60 km. $\frac{3}{4}$ de la 1ª; preguntase: 1º cuántas horas antes que el coche llegará la diligencia; 2º á qué distancia de ésta se hallará el coche 2 h. 45 m. después de que se pusieron en marcha.

471. Jerónimo compra cierto número de manzanas, la mitad á 4 por 5 cent., y la otra mitad á 3 por 5 cent. Revende los $\frac{2}{3}$ á 2 por 5 cent., y el resto á 4 por 11 cent. ¿Cuánto habrá ganado al vender S 15,50 de manzanas?

472. Leoncio compra manzanas, la mitad del número á 5 por 6 cent., y la otra mitad á 6 por 7 cent. Revende los $\frac{3}{5}$ del número á 3 por 5 cent.,

y lo demás á 4 por 7 cent. ¿Cuántas manzanas habrá vendido cuando gane \$ 9,30?

473. La fortuna de un comerciante se ha aumentado de la manera siguiente : durante el 1^{er} año se ha aumentado de la mitad ; durante el 2^o, de la tercera parte de lo que era á principios de este 2^o año. Como la fortuna del comerciante es entonces de \$ 180 000, ¿qué suma tenía á principios del 1^{er} año?

474. ¿Qué hora es cuando las dos manecillas de un reloj se hallan la una sobre la otra : 1^o entre las 3 y las 4 ; 2^o entre las 10 y las 11?

475. ¿Qué hora es cuando las dos saetillas de un reloj se hallan en línea recta entre las 4 y las 5?

476. Los dos índices de un reloj están uno encima del otro ; ¿ al cabo de cuánto tiempo volverán á encontrarse?

477. Las dos agujas de un reloj están la una sobre la otra entre las 5 y las 6 ; ¿ á qué hora volverán á encontrarse?

478. Mauricio tiene 47 años, y Narciso 32. ¿Cuánto tiempo hace que la edad del 1^o fue : 1^o el duplo ; 2^o el triple ; 3^o el cuádruplo de la del segundo?

479. Onesiforo tiene 47 años, y Pablo 32. ¿Qué edad tenía éste : 1^o cuando la edad de aquél era el duplo de la de Pablo ; 2^o cuando era el triple ; 3^o cuando era el cuádruplo?

480. Una guarnición tiene víveres para 121 días ; si se aumenta de $\frac{1}{3}$ el número de individuos de la guarnición, ¿de cuánto debe disminuirse la ración para que los víveres duren el mismo tiempo?

481. Quintín distribuye por partes iguales cierto número de albaricoques á tres hermanos suyos. Al 1^o le da los $\frac{2}{9}$ del número total, más un albaricoque y $\frac{1}{3}$; al 2^o los $\frac{3}{7}$ del número, menos un albaricoque y $\frac{1}{7}$, y al 3^o lo demás ; ¿cuántos albaricoques tenía Quintín?

482. Reinaldo reparte á tres amigos suyos cierto número de cocos. Al 1^o da los $\frac{4}{11}$ del número, más 3 cocos y $\frac{8}{11}$; al 2^o los $\frac{5}{9}$ del resto, más $\frac{7}{9}$ de coco ; al 3^o le cupieron los 25 cocos que quedaban. ¿Cuántos les tocaron á los dos primeros?

483. Sebastián regala algunas naranjas á tres de sus compañeros. Da al 1^o los $\frac{2}{7}$ del número más 1 naranja y $\frac{5}{7}$; al 2^o los $\frac{5}{9}$ del número, menos 5 naranjas y $\frac{7}{9}$; al 3^o le cabe lo demás, que iguala á los $\frac{3}{4}$ de la parte del 1^o. ¿Cuántas naranjas tuvo cada uno?

484. Una vasija llena de agua pierde durante la 1^a hora la $\frac{1}{3}$ parte de su capacidad ; durante la 2^a, la $\frac{1}{3}$ parte del resto, y así en adelante. Al cabo de 5 horas, quedan 5 litros en la vasija ; ¿cuál es la capacidad de ésta?

485. Una vasija llena de agua contiene 1 kilogramo de sal en disolución. Se vacía $\frac{1}{4}$ de la vasija, y luego se la llena de agua ; se vacía nuevamente $\frac{1}{3}$ de la vasija, y se vuelve á llenarla de agua ; por fin se vacía la $\frac{1}{2}$ de la vasija. Después de estas operaciones, ¿qué cantidad de sal queda en disolución en la vasija?

486. En una vasija de tres litros de capacidad, se ponen dos litros de vino y uno de agua. En seguida se vacía $\frac{1}{3}$ de la mezcla y se llena de agua la vasija ; después se vacía $\frac{1}{4}$ de la nueva mezcla, y se vuelve á llenar de agua la vasija ; por último se vacía la mitad de esta postrera mezcla, y se llena nuevamente de agua la vasija. ¿Qué cantidad de vino contiene 1 litro de la última mezcla?

LIBRO IV

POTENCIAS Y RAÍCES

LECCIÓN PRIMERA

CUADRADOS Y RAÍCES CUADRADAS

§ I. Definiciones y teoremas.

(Véanse las definiciones de los números 186 y 188.)

519. *Segunda potencia* ó **cuadrado** de un quebrado es el producto de este quebrado por sí mismo.

Así, el cuadrado de $\frac{1}{5}$ es $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$. Por donde se ve que el cuadrado de un quebrado es igual al cuadrado del numerador, dividido por el cuadrado del denominador.

520. El cuadrado de un quebrado es siempre menor que dicho quebrado.

521. Por *extracción de raíces* se entiende la operación que se ejecuta para averiguar la raíz cuadrada, cúbica ú otra de algún número ó cantidad.

Nota. — La elevación á potencias es una operación de *composición*, y la extracción de raíces, una operación de *descomposición*, y por consiguiente inversa de la primera.

522. Llámase **raíz** de un número la cantidad que multiplicada por sí misma una ó más veces, según lo indica el índice de la raíz, da por resultado el número mismo.

523. La extracción de raíces se indica por medio del signo $\sqrt{\quad}$, llamado **radical**. El nombre ó **índice** de la raíz se escribe en la abertura del ángulo; así $\sqrt[3]{27}$ denota la *raíz cúbica* de 27.

El signo radical sin índice expresa la raíz cuadrada, subentendiéndose el 2.

524. Llámase **subradical** la cantidad cuya raíz debe extraerse; así 27 es el *subradical* en el ejemplo anterior.

525. La raíz es **racional** cuando resulta sin ningún residuo.

526. La raíz es **irracional** ó **sorda** cuando resulta con algún residuo.

527. Llámase **raíz cuadrada** de un número la cantidad que, multiplicada por sí misma una vez, da el número propuesto.

528. *Raíz cuadrada de un quebrado* es otro quebrado que, multiplicado por sí mismo, da por producto el primero. Es la raíz cuadrada del numerador dividida por la del denominador.

529. La raíz cuadrada de un quebrado es siempre mayor que el quebrado mismo.

Nota. — Para indicar la potencia de un quebrado ó también de cualquier otra cantidad compuesta, como suma, diferencia, etc., se escribe entre paréntesis, poniendo el exponente fuera de él, para que no parezca que se aplica sólo al denominador; v. g.: $\left(\frac{3}{4}\right)^3$, significa que debe elevarse á la tercera potencia el quebrado $\frac{3}{4}$; así también $(4+2)^2$, $(6-2)^3$.

530. El cuadrado de una cantidad colocada bajo el signo radical se obtiene suprimiendo dicho signo. Así, el cuadrado de $\sqrt{3}$ es 3, el de $\sqrt{4}$ es 4, porque multiplicando $\sqrt{4} \times \sqrt{4} = 4$, etc.

531. **Teorema.** Cuando un número entero remata en uno ó más ceros, su cuadrado remata en un número doble de ceros.

$$\begin{aligned}\text{Así:} \quad 10^2 &= 10 \times 10 = 100 \\ 200^2 &= 200 \times 200 = 40\,000 \\ 5\,000^2 &= 5\,000 \times 5\,000 = 25\,000\,000\end{aligned}$$

532. **Corolario.** — El cuadrado de un número de decenas es un número exacto de centenas.

533. **Teorema.** El cuadrado de un número formado de dos partes se compone: 1º del cuadrado de la primera; 2º del doble producto de la primera por la segunda; 3º del cuadrado de la segunda.

Sea $7 = 4 + 3$.

Tendremos : $7^2 = (4 + 3)^2 = (4 + 3) (4 + 3)$ (188)

Ejecutando el producto indicado, resulta :

$$\begin{array}{r}
 4 + 3 \\
 4 + 3 \\
 \hline
 4^2 + 4 \times 3 \\
 4 \times 3 + 3^2 \\
 \hline
 \text{Cuadrado. . . } 4^2 + 2(4 \times 3) + 3^2
 \end{array}
 \quad (151)$$

Nota. — Si representamos de una manera general las partes por a y b , tendremos :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

534. Corolario. — Si el número consta de decenas y unidades, su cuadrado se compone : 1º del cuadrado de las decenas; 2º del doble producto de las decenas por las unidades; 3º del cuadrado de las unidades.

535. Teorema. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual al duplo del menor, más 1.

Sean los números 17 y 18.

$$17^2 = 17 \times 17 = 289$$

$$18^2 = 18 \times 18 = 324$$

La diferencia de los cuadrados, $324 - 289 = 35 =$ al número menor $(17 \times 2) + 1 = 35$.

Y en general, siendo a y $a + 1$ los dos números consecutivos, tendremos :

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 \quad (533)$$

Restando a^2 de ambos miembros, resulta :

$$(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1 \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

Nota. — Este principio puede también expresarse como sigue : Si se aumenta 1 á un número, el cuadrado de él se aumenta del duplo de dicho número más 1.

536. Corolario I. — Si se aumenta $\frac{1}{2}$ al número, el cuadrado de él se aumenta del mismo número más $\frac{1}{4}$.

$$\text{Así : } \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + 2a \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad (533)$$

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - a^2 = a + \frac{1}{4} \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

537. Corolario II. — Cuando se conoce el cuadrado de un número entero cualquiera, se puede encontrar inmediatamente el cuadrado del número que le precede y del que le sigue.

Así, ya que el cuadrado de 20 es 400,
 el de 21 será, $400 + (2 \times 20) + 1 = 400 + 41 = 441$ (535)
 el de 19 será, $400 - (2 \times 19) + 1 = 400 - 39 = 361$
 porque, generalizando este 2º caso, tenemos que si a es un número entero cualquiera, el que le precede será $a - 1$, y resulta :

$$(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1$$

Restando a^2 de ambos miembros, tendremos :

$$(a - 1)^2 - a^2 = 2a + 1 \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

538. Teorema. El producto de varios radicales cuadrados es igual á la raíz cuadrada del producto de las cantidades colocadas bajo los radicales.

Se trata de probar que :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} = \sqrt{2 \times 3 \times 4} \quad (1)$$

ó, elevando ambos miembros al cuadrado, que :

$$(\sqrt{2})^2 (\sqrt{3})^2 (\sqrt{4})^2 = (\sqrt{2 \times 3 \times 4})^2 \quad (192)$$

ó en fin, que : $2 \times 3 \times 4 = 2 \times 3 \times 4$. (2)

Ahora bien, esta última igualdad es evidente. Y como sus dos miembros son los cuadrados de los dos miembros de la igualdad (1) (530), se deduce que las raíces cuadradas : $(\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4})$, $\sqrt{2 \times 3 \times 4}$, son también iguales.

539. Observación. — La igualdad (1) manifiesta que para extraer la raíz cuadrada de un producto, basta extraer la de cada factor.

540. Corolario I. — Para sacar del radical un factor cuadrado, basta extraer la raíz cuadrada de este factor, y escribirla antes del radical.

$$\text{Así : } \sqrt{4 \times 3} = 2 \sqrt{3} ; \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5 \sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{20}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9} \times 5} = \frac{2}{3} \sqrt{5}$$

541. Corolario II. — Para pasar un factor bajo el radical, se debe multiplicar por el cuadrado de este factor la cantidad subradical.

Así: $3\sqrt{2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$
 $\frac{4}{3}\sqrt{5} = \sqrt{\frac{16 \times 5}{9}} = \sqrt{\frac{80}{9}}$

542. Teorema. *La raíz cuadrada de una suma compuesta de dos partes es menor que la suma de las raíces cuadradas de sus partes.*

Demostremos que:

$$\sqrt{3+4} < \sqrt{3} + \sqrt{4}$$

En efecto, comprobemos la desigualdad, cuadrando ambos miembros:

$$3+4 < 3+4+2\sqrt{3 \times 4} \quad (533 \text{ y } 538)$$

lo que es evidente.

543. Teorema. *La raíz cuadrada de un cuociente es igual á la raíz cuadrada del dividendo dividida por la raíz cuadrada del divisor.*

Sea: $\frac{144}{36} = 4$

$$144 = 36 \times 4$$

$$\sqrt{144} = \sqrt{36} \times \sqrt{4} \quad (539)$$

de donde: $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{36}} = \sqrt{4}$

L. Q. Q. D.

544. Teorema. *Para que un número sea cuadrado perfecto, es menester y suficiente que los exponentes de sus factores primos sean pares.*

1º Esta condición es necesaria.

Sea: $A = 2^3 \times 5^7$

Cuadrando ambos miembros, tendremos:

$$A^2 = 2^{3 \times 2} \times 5^{7 \times 2} \quad (192 \text{ y } 191) = 2^6 \times 5^{14}$$

Es decir que los exponentes de los factores primos del cuadrado de A son pares.

2º Esta condición es suficiente.

Para esto, demostremos que si los exponentes de los factores primos que componen un número son pares, siempre puede extraerse su raíz cuadrada.

Sea: $A = 2^6 \times 5^6$

(193)

Esta igualdad puede transformarse en las siguientes :

$$A = (2^3 \times 2^3) (5^3 \times 5^3) \quad (190)$$

$$— = 2^3 \times 2^3 \times 5^3 \times 5^3$$

$$— = 2^3 \times 5^3 \times 2^3 \times 5^3 \quad (174)$$

$$— = (2^3 \times 5^3) (2^3 \times 5^3)$$

Ahora bien, $2^3 \times 5^3$ es precisamente la raíz cuadrada de A (527).

Luego los exponentes pares indican cuadrados perfectos.

545. Teorema. *Para que un quebrado irreducible sea cuadrado perfecto, es menester y suficiente que sus dos términos sean cuadrados perfectos.*

1º La condición es necesaria.

Sea el quebrado irreducible $\frac{5^3}{7^3}$.

Cuadrando ambos miembros, tendremos :

$$\left(\frac{5^3}{7^3}\right)^2 = \frac{5^6}{7^6} \quad (445 \text{ y } 191)$$

Ahora bien, si $\frac{5^3}{7^3}$ es quebrado irreducible, $\frac{5}{7}$ lo será también evidentemente, y por tanto $\frac{5^6}{7^6}$ lo es también (449). Pero 5^6 y 7^6 son cuadrados perfectos (445). Luego, cuando un quebrado es cuadrado perfecto, sus dos términos lo son igualmente.

2º La condición es suficiente.

Supongámosla cumplida, y sea : $\frac{a}{b} = \frac{5^6}{7^6}$

$$\frac{a}{b} = \frac{5^3 \times 5^3}{7^4 \times 7^4} = \frac{5^3}{7^4} \times \frac{5^3}{7^4}$$

Pero $\frac{5^3}{7^4}$ es la raíz cuadrada de $\frac{a}{b}$ (527). L. Q. Q. D.

546. Teorema. *Un número que remata en 2, 3, 7 ú 8 no puede ser cuadrado perfecto.*

En efecto, el cuadrado de un número cualquiera remata siempre como el cuadrado del guarismo de sus unidades (533). Pero los cuadrados de los nueve primeros números rematan en 1, 4, 9, 6, 5; y si el número remata en cero, su cuadrado rematará también en cero; por tanto, un número que remata en 2, 3, 7 ú 8 no puede ser cuadrado perfecto.

547. Teorema. *Un número que remata en ceros no puede ser cuadrado perfecto sino con tal que el número de ceros sea par.*

En efecto, como los números que rematan en ceros son los únicos cuyos cuadrados rematan también en ceros (546), si consideramos los números 360 y 700, tendremos (192):

$$360^2 = (36 \times 10)^2 = 36^2 \times 10^2 = 36^2 \times 100$$

$$700^2 = (7 \times 100)^2 = 7^2 \times 100^2 = 7^2 \times 10\,000$$

y cada uno de estos cuadrados tiene un número de ceros doble del número propuesto (531).

En general, si N es un número que remata en ceros, este número será de la forma $N = a \times 10^n$.

Cuadrando ambos miembros, tendremos: $N^2 = a^2 \times 10^{2n}$, y el cuadrado tendrá $2n$ ceros. L. Q. Q. D.

548. Teorema. *Si un número consta de uno ó dos guarismos, su raíz cuadrada tiene un guarismo; si el número consta de tres ó cuatro guarismos, su raíz cuadrada tiene dos; en general, si tiene $(2n-1)$ ó $2n$ guarismos, su raíz tendrá n guarismos.*

En efecto, como los números que tienen uno ó dos guarismos están comprendidos entre 1 y 100, su raíz estará comprendida entre 1 y 10, y no tendrá más que un guarismo; ya que los de tres ó cuatro guarismos están comprendidos entre 100 y 10000, su raíz estará comprendida entre 10 y 100, y tendrá dos guarismos.

En general, un número N , que tiene $(2n-1)$ ó $2n$ guarismos, estará comprendido entre 10^{2n-2} y 2^{2n} , porque 10^{2n-2} es el menor número de $(2n-1)$ guarismos, y 10^{2n} es el menor número de $(2n+1)$ guarismos; por consiguiente, extrayendo la raíz, tendremos (544):

$$10^{n-1} < \sqrt{N} < 10^n$$

Estando comprendida la raíz del número entre 10^{n-1} y 10^n , tendrá n guarismos.

§ II. Raíz cuadrada de un número entero, con aproximación de una unidad.

549. Extraer la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto, con aproximación de una unidad, es buscar la raíz del mayor cuadrado contenido en el número propuesto.

550. Para extraer la raíz cuadrada de un número que es cuadrado perfecto,

Regla. Se descompone dicho número en sus factores primos (nº 341), y se multiplican entre sí, uno de cada dos factores iguales; el producto será la raíz cuadrada pedida (544).

EJEMPLO. — ¿Cuál es la raíz cuadrada de 1296?

Análisis. Puesto que la raíz cuadrada de un número es uno de sus dos factores iguales, tomamos uno de cada dos factores primos iguales de 1296, señalados con un asterisco, y tenemos $\sqrt{1296} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$.

OPERACIÓN

2	1296
* 2	648
2	324
* 2	162
3	81
* 3	27
3	9
* 3	3
	1

EJEMPLOS

487. Ejecútense las operaciones siguientes : 1º $\sqrt{625}$; 2º $\sqrt{225}$; 3º $\sqrt{2025}$; 4º $\sqrt{99225}$; 5º $\sqrt{20736}$; 6º $\sqrt{5489031744}$.

551. En la extracción de la raíz cuadrada de un número entero ocurren tres casos :

- 1º El número es menor que 100;
- 2º El número se halla comprendido entre 100 y 10000;
- 3º El número es mayor que 10000.

552. **Caso I.** — *El número es menor que 100.*

Para extraer la raíz cuadrada de un número menor que 100, con aproximación de una unidad, basta saber de memoria los cuadrados de los diez primeros números.

Números.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrados.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Sea de extraer la raíz cuadrada de 49.

La tabla pitagórica ó este cuadro dan inmediatamente 7.

Sea también de extraer la raíz cuadrada de 73.

Basta para esto consultar también el cuadro anterior, y se ve que 73 se halla comprendido entre 64 y 81. Luego, su raíz aproximada es 8.

553. **Caso II.** — *El número se halla comprendido entre 100 y 10000.*

Sea el número 4096.

Como el número 4096 se halla comprendido entre 100 y

10000, esto es, entre 10^2 y 100^2 , tendrá su raíz comprendida entre 10 y 100. Por tanto, esta raíz constará de dos guarismos: el de las *decenas* y el de las *unidades*.

Ahora bien, si se conociera esta raíz, cuadrándola y añadiéndole el residuo, si lo hay, resultaría el número 4096.

Así, se puede considerar este número como compuesto de cuatro partes, á saber:

- 1º *Del cuadrado de las decenas;*
- 2º *Del doble producto de las decenas por las unidades;*
- 3º *Del cuadrado de las unidades;*
- 4º *Y del residuo, si lo hay.*

Dispongamos la operación como sigue:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{40.96} & 64 \text{ raíz cuadrada.} \\ 4 \ 9.6 & 124 \\ 0 \ 0 & \end{array}$$

Siendo el cuadrado de las decenas un número exacto de centenas (532), no puede encontrarse sino en las 40 centenas del número dado.

Separo con un punto estas 40 centenas, y busco el mayor cuadrado contenido en 40.

El mayor cuadrado contenido en 40 es 36, cuya raíz es 6.

Demostremos que 6 expresa el guarismo de las decenas de $\sqrt{4096}$. En efecto, 40 centenas están comprendidas entre 6^2 centenas y 7^2 centenas. Pero 40 centenas y 7^2 centenas difieren, evidentemente por lo menos, de una centena. Así pues, si añadido á las 40 centenas las 96 unidades, que son menores que una centena, el número 4096 estará comprendido entre 6^2 centenas y 7^2 centenas; por consiguiente, 6 es el guarismo de las decenas de la raíz de 4096.

Escribo 6 en la raíz; resto su cuadrado 36 de 40, y el residuo 496 formado de la diferencia 4 y del período 96 no contendrá ya sino tres partes, á saber:

- 1º *El doble producto de las decenas por las unidades;*
- 2º *El cuadrado de las unidades;*
- 3º *Y el residuo, si lo hay.*

Como el doble producto de las decenas por las unidades da un número exacto de decenas, no puede encontrarse aquél sino en las 49 decenas de 496.

Separo con un punto 49 de 6, y duplico el guarismo 6 de las decenas de la raíz.

2 por 6 son 12, escribo 12 debajo de la raíz.

La división de 49 por 12, duplo de las decenas, dará el guarismo de las unidades ó uno mayor, porque 49 puede encerrar decenas provenientes del cuadrado de las unidades.

49 dividido por 12 da 4.

Para ver si 4 es el guarismo verdadero, existen dos modos:

1º Se cuadra 64. Si este cuadrado puede restarse de 4096, el número 4 es el verdadero, si no se puede restar, se le disminuye sucesivamente una unidad, hasta encontrar un cuadrado que pueda restarse.

2º El segundo modo consiste en escribir el número 4 á la derecha de las decenas de la raíz, y también á la derecha del duplo de las decenas. El producto del número 4 de las unidades de la raíz, por 124, formado del duplo de las decenas y del guarismo de las unidades, da á la vez *el doble producto de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades*. Si este producto puede restarse del dividendo parcial 496, el número 4 es el verdadero, si no, se le disminuye sucesivamente una unidad, hasta que resulte un producto que pueda restarse.

En el caso presente, el producto de 4 por 124 da exactamente 496. Por consiguiente, el número 4 es el guarismo exacto de las unidades.

554. Caso III. — *El número es mayor que 10000.*

Sea de extraer la raíz cuadrada de 453458.

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{45. 34. 58} & 673 \text{ raíz cuadrada.} \\
 9 \ 3.4 & 127 \\
 4 \ 5 \ 5.8 & \\
 \hline
 \text{Residuo.} \quad . \quad . \quad 5 \ 2 \ 9 & 1343
 \end{array}$$

Como este número es mayor que 100, su raíz será mayor que 10, y constará de *decenas y unidades*.

El cuadrado de las decenas se halla contenido en las centenas de 453458.

Separemos con un punto estas centenas; y tendremos las decenas de la raíz buscando el mayor cuadrado contenido en 4534.

Como el número 4534 está comprendido entre 100 y 10000, tendrá dos guarismos en su raíz (Caso II, 553).

Separemos con un punto 45 centenas de 34. El mayor cuadrado contenido en 45 es 36, cuya raíz es 6.

Restando 36 de 45, al lado del residuo 9, se baja el período siguiente 34.

Separemos con un punto 93 de 4; duplicando el 6 de la raíz, dividamos 93 por 12, y, después de haber escrito el cuociente 7 á la derecha de la raíz y de 12, multipliquemos 127 por 7. Como el producto 889 restado de 934 da por residuo 45, indica que el guarismo 7 no es excesivo. De modo que 67 es la raíz cuadrada del mayor cuadrado contenido en 4534. El número 67 representa al propio tiempo las decenas de la raíz de 453458.

Se probaria, como en el 2º caso, que 67 representa el verdadero valor de las decenas de la raíz.

Al lado de 45, bajemos el periodo 58; separemos con un punto 455 de 8; dupliquemos 67 y dividamos 455 por 134. Escribamos el cuociente 3 á la derecha de 67 y de 134. Multipliquemos 1343 por 3, y restemos el producto 4029 de 4558. El residuo 529 indica que el guarismo 3 no es excesivo.

De modo que la raíz cuadrada de 453458 con aproximación de una unidad es 673, y el residuo 529.

De todo lo que precede, se pueden deducir las reglas siguientes :

555. Para extraer la raíz cuadrada de un número entero, se debe proceder de un modo inverso que para la elevación á la segunda potencia, y por consiguiente,

Regla I. *Se lo divide en periodos de dos en dos guarismos, con un punto, yendo de derecha á izquierda; el último periodo puede constar de un solo guarismo;*

II. *A la derecha de la cantidad se pone la galera, como para la división, y se busca cuál es el mayor cuadrado contenido en el último periodo de la izquierda, cuya raíz se escribe en la galera ;*

III. *Se cuadra la raíz, y el cuadrado se resta de dicho último periodo, con la cual queda satisfecha la primera parte de la fórmula a^2 ;*

IV. *A la derecha de la diferencia, si la hay, se baja el periodo siguiente, separando con un punto el primer guarismo de la derecha; los demás números forman el primer dividendo, y se toma por divisor el duplo de la cantidad escrita ya en la raíz, que representa decenas con respecto al número que debe seguirle;*

V. *El cuociente debe escribirse en la raíz, y también á la derecha del divisor (lo que da las últimas partes de la fórmula $2ab + b^2$); luego se multiplica este divisor por el cuociente, y el producto se resta del dividendo.*

Se repiten las dos últimas operaciones (IV y V) hasta que se hayan bajado todos los períodos del subradical, y que esté concluida la operación.

Si no sale ningún residuo, la raíz es racional; en el caso contrario es irracional, y sólo aproximada.

556. Observación I. — El número de guarismos de la raíz es igual evidentemente al número de períodos en que se ha dividido el número propuesto.

557. Observación II. — Si una de las divisiones indicadas diera cero por cociente, se escribiría este cero en la raíz y en el duplo de ella, y se bajaría el periodo siguiente.

558. Observación III. — Si se escribieran á ojo los guarismos que siguen al primero, se conocería su insuficiencia por el residuo, el cual sería entonces igual ó superior al duplo de la raíz encontrada más 1 (535).

559. Teorema. *Si, en la extracción de la raíz cuadrada de un número, es el residuo menor que la raíz, ésta se ha encontrado con aproximación de media unidad.*

Este principio se deduce del de el N^o 536; pero también puede demostrarse directamente.

Sea N un número cualquiera, a su raíz cuadrada aproximada, y R el residuo.

Tendremos evidentemente :

$$N = a^2 + R$$

pero

$$R < a$$

$$N < a^2 + a$$

a fortiori :

$$N < a^2 + a + \frac{1}{4}$$

ó lo que es lo mismo $N < \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$ (533 invertido).

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, resulta :

$$\sqrt{N} < a + \frac{1}{2}$$

Como la raíz cuadrada de N se halla comprendida entre a y $a + \frac{1}{2}$, la cantidad a se encuentra con aproximación de media unidad.

L. Q. Q. D.

560. Teorema. *Si, en la extracción de la raíz cuadrada de un número, el residuo es menor que el duplo de la raíz, ésta se ha encontrado con aproximación de una unidad.*

También podría deducirse este principio del de el N^o 535.

Sea N un número cualquiera, a su raíz cuadrada aproximada, y R el residuo.

$$N = a^2 + R$$

pero

$$R < 2a$$

$$N < a^2 + 2a$$

a fortiori:

$$N < a^2 + 2a + 1$$

ó lo que es lo mismo $N < (a + 1)^2$ (533 invertido).

Por consiguiente $\sqrt{N} < a + 1$

Como la raíz cuadrada de N se halla comprendida entre a y $a + 1$, la cantidad a se encuentra con aproximación de una unidad.

L. Q. Q. D.

561. Teorema. *La raíz cuadrada, con aproximación de una unidad, de un número que no es entero, es la misma que la de su parte entera.*

Sea el número 45,327 8109.

Demostremos que con aproximación de una unidad, la raíz de este número es la misma que la de 45.

En efecto, 45 se halla comprendido entre 6^2 y 7^2 . Luego, la raíz cuadrada con aproximación de una unidad es 6 (549).

Pero como 45 y 7^2 son números enteros, difieren por lo menos en una unidad. Por consiguiente, si á 45 se le añade la parte decimal, que no iguala á un entero, el número 45,327 8109 quedará también comprendido entre 6^2 y 7^2 . Luego su raíz con aproximación de una unidad será también 6 (549).

6^2	45	7^2
	6	
	45,327 8109	
6^2	6	7^2

L. Q. Q. D.

§ III. Raíz cuadrada de los quebrados comunes.

562. La raíz cuadrada de los quebrados comunes presenta tres casos:

- 1^o Ambos términos son cuadrados perfectos;
- 2^o Sólo el denominador es cuadrado perfecto;
- 3^o El denominador no es cuadrado perfecto.

563. Caso I. — *Ambos términos son cuadrados perfectos.*

Regla. *Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado*

cuando sus dos términos son cuadrados perfectos, se extrae separadamente la raíz cuadrada del numerador y la del denominador.

Esta regla es evidente, porque, para cuadrar un quebrado, se eleva á la segunda potencia el numerador y el denominador (446).

EJEMPLO :

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

564. Caso II. — Sólo el denominador es cuadrado perfecto.

Regla. Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado cuando sólo el denominador es cuadrado perfecto, se divide la raíz cuadrada del numerador, con la aproximación que se quiera, por la raíz cuadrada del denominador.

Esta regla se deduce aún de la que dimos para cuadrar un quebrado. Así:

$$\frac{5}{9} = \sqrt{\frac{5}{9}} \times \sqrt{\frac{5}{9}} \text{ (519)} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ (563)}$$

de donde resulta que $\frac{\sqrt{5}}{3}$ es la raíz cuadrada de $\frac{5}{9}$ (528).

565. Caso III. — El denominador no es cuadrado perfecto.

Regla. Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado cuando el denominador no es cuadrado perfecto, se multiplican ambos términos por el denominador, con lo cual éste se hace cuadrado perfecto; en seguida se divide la raíz cuadrada del numerador por la del denominador.

Sea el quebrado $\frac{3}{5}$. Tenemos :

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 5}{5 \times 5} \text{ (380)} = \frac{3 \times 5}{5^2}$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, resulta :

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3 \times 5}}{5} \text{ (564)}$$

L. Q. Q. D.

566. Observación. — Para hacer cuadrado perfecto al denominador, puede descomponerse en sus factores primos, y ver por qué números deben multiplicarse ambos términos

del quebrado para que todos los exponentes del denominador sean pares.

$$\text{Así : } \frac{11}{63} = \frac{11}{3^2 \times 7} = \frac{11 \times 7}{3^2 \times 7^2} = \frac{77}{3^2 \times 7^2}$$

$$\text{de donde } \sqrt{\frac{11}{63}} = \frac{\sqrt{77}}{3 \times 7} = \frac{\sqrt{77}}{21} \quad (564)$$

567. Raíz cuadrada de un número mixto. — *Para extraer la raíz cuadrada de un número mixto, se lo reduce á una sola expresión fraccionaria, y se extrae su raíz como la de los quebrados.*

Sea el número mixto $7 \frac{15}{23}$. Tenemos :

$$7 \frac{15}{23} = \frac{176}{23} = \frac{176 \times 23}{23^2}$$

$$\text{de donde } \sqrt{7 \frac{15}{23}} = \frac{\sqrt{176 \times 23}}{23} \quad (564)$$

§ IV. Cuadrado y raíz cuadrada de los números decimales.

568. Regla. *El cuadrado de un número decimal se encuentra como el de los enteros, sin hacer caso de la coma; en seguida se separa á la derecha del producto el duplo de los decimales contenidos en el número dado.*

Sea de cuadrar el número 3,25. Tendremos :

$$3,25 = \frac{325}{100} \quad (476)$$

$$(3,25)^2 = \frac{325^2}{100^2} = \frac{325 \times 325}{10\,000}$$

Fácilmente se ve que después de encontrar el cuadrado de 325, han de separarse cuatro guarismos decimales.

L. Q. Q. D.

569. Observación. — El cuadrado de un número decimal tiene siempre número par de guarismos decimales.

570. *Para extraer la raíz cuadrada de un número decimal, ha de cuidarse primero de que tenga número par de guarismos decimales, agregándole un cero á la derecha, si es necesario, y se quita la coma. En seguida se extrae su raíz como la de los números enteros, cuidando de sepa-*

rar con una coma la mitad del número de decimales contenidos en el número dado.

Sea el número decimal 45,732. Tendremos :

$$45,732 = \frac{45\,732}{1\,000} = \frac{457\,320}{10\,000} = \frac{457\,320}{100^2}$$

de donde $\sqrt{45,732} = \frac{\sqrt{457\,320}}{100} \quad (564)$

L. Q. Q. D.

§ V. Raíz cuadrada por aproximación.

571. Llámase *raíz cuadrada de un número cualquiera por aproximación* á $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$, etc., el mayor número de *décimos*, *centésimos*, ... *séptimos*, *veinteavos*, etc., contenidos en la raíz cuadrada de dicho número.

§ VI. Raíces cuadradas incommensurables.

572. Llámase *comensurable* una cantidad cuando tiene una medida común con la unidad.

573. Llámase *incommensurable* la cantidad que no tiene medida común con la unidad.

574. **Observación.** — Ni los números enteros ni los quebrados pueden ser cantidades incommensurables puesto que tienen medida común con la unidad.

575. **Teorema.** Si la raíz cuadrada de un número entero no es entera, tampoco será fraccionaria, sino incommensurable.

Sea N un número entero, cuya raíz cuadrada no es entera. Demostremos que $\sqrt{N}$ no es un valor fraccionario.

En efecto, si $\sqrt{N} = \frac{a}{b}$

$$N = \frac{a^2}{b^2}$$

Pero suponiendo que $\frac{a}{b}$ es quebrado irreducible, $\frac{a^2}{b^2}$ lo será también (449), y no podrá igualar al cociente N.
L. Q. Q. D.

376. De aquí se deduce que, cuando un número cualquiera no es cuadrado perfecto, no puede representarse exactamente su raíz cuadrada.

EJERCICIOS ORALES

488. ¿A qué es igual la diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos?

489. Ya que el cuadrado de 25 es 625, dígame según esto: 1º cuál es el cuadrado de 24; 2º cuál es el cuadrado de 26.

490. ¿Cuáles son los cuadrados de los números siguientes: 19, 21, 29, 31, 99, 101?

491. ¿De qué se compone el cuadrado de un número formado de decenas y unidades?

492. ¿A qué es igual el cuadrado: 1º de una decena; 2º de un centésimo; 3º de un décimo; 4º de una centena?

493. ¿Pueden ser cuadrados los números terminados por 2, 3, 7, 8? ¿Por qué?

494. ¿Puede ser cuadrado un número terminado por un número impar de ceros? ¿Por qué?

495. ¿Cuándo puede ser cuadrado un número que remata en 5? ¿Por qué?

496. ¿Cuántos números enteros de dos cifras son cuadrados perfectos?

497. ¿Cuántos números enteros de tres cifras son cuadrados perfectos?

498. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener el residuo en la extracción de la raíz cuadrada de un número? ¿Por qué?

499. ¿A qué es igual la diferencia de los cuadrados de dos números que tienen entre sí dos unidades de diferencia? Ejemplos, 25 y 27.

PROBLEMAS SOBRE LA RAÍZ CUADRADA

500. ¿Cuál es la raíz cuadrada de cada uno de los números siguientes: 1º 169; 2º 576; 3º 1 225; 4º 2 401; 5º 3 249; 6º 4 096; 7º 5 329; 8º 6 724; 9º 9 801; 10º 10 816?

501. Extraer la raíz cuadrada de los números siguientes: 1º 61 009; 2º 454 276; 3º 505 521; 4º 637 821; 5º 648 132; 6º 738 417; 7º 809 215; 8º 927 748; 9º 977 137; 10º 999 999.

502. Extraer, con aproximación de 1 centésimo, la raíz cuadrada de los números siguientes: 1º 9 828 432; 2º 16 032 016; 3º 30 858 025; 4º 31 900 584; 5º 98 964 006; 6º 48 832 144; 7º 63 091 249; 8º 64 738 116; 9º 95 981 209; 10º 99 980 001.

503. Extraer, con aproximación de 0,00001, la raíz cuadrada de los quebrados decimales siguientes:

1º 0,83754; 2º 0,008782; 3º 0,000075328; 4º 0,000237.

504. Extraer la raíz cuadrada de los quebrados siguientes :

$$1^{\circ} \frac{256}{1156}; \quad 2^{\circ} \frac{5776}{19881}; \quad 3^{\circ} \frac{9409}{1369}.$$

505. ¿Cuál es la raíz cuadrada de los quebrados siguientes :

$$1^{\circ} \frac{529}{1112}; \quad 2^{\circ} \frac{567}{3040}; \quad 3^{\circ} \frac{2754}{8904}.$$

506. ¿Cuáles son los dos números consecutivos que tienen por diferencia de sus cuadrados : 1° 49; 2° 85; 3° 439; 4° 723?

507. ¿Cuáles son los dos números pares consecutivos que tienen por diferencia de sus cuadrados : 1° 36; 2° 52; 3° 412; 4° 2084?

508. La suma de los cuadrados de dos números es 1625, y el mayor de ellos 40; ¿cuál es el menor?

509. Un jardín que mide 90 metros de longitud por 40 de latitud debe ser cambiado por otro de igual valor, y cuadrado; ¿qué dimensiones debe tener este último?

510. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo de 9408 metros cuadrados de superficie, si su longitud es el triple de la latitud?

511. Si se resta 12 de un número entero, resulta el mayor cuadrado que contiene este número; pero si se le añade 77, resulta el cuadrado inmediatamente superior al mismo número. ¿Cuál es éste?

512. Bonifacio quiere plantar árboles á igual distancia, en un terreno cuadrado. ¿Cuántos debe plantar en cada lado para que entren 15129?

513. El producto de dos números es 3645; uno de ellos es los $\frac{5}{9}$ del otro. ¿Cuáles son estos números?

514. La superficie de un rectángulo es de 405,60 metros cuadrados; uno de los lados del rectángulo es los $\frac{5}{12}$ del otro. ¿Cuáles son sus dimensiones?

515. Búsquese 1° un número que, aumentado de su cuadrado, dé 272; 2° un número que, al restarlo de su cuadrado, dé 600; 3° un número cuyo duplo y cuadrado den 195363.

516. Un campo cuadrado contiene 12544 pies de árboles plantados en cuadro á 4 metros uno de otro; preguntase cuántas hileras van á dar á cada uno de los cuatro lados.

517. Se trata de murar un terreno cuadrado que contiene 3600 metros cuadrados de superficie; ¿cuál será la longitud de cada muro?

518. Se trata de cuadrar un terreno que mide 625 metros de longitud por 400 de ancho; preguntase cuánto se debe disminuir á la longitud y aumentar al ancho para que el terreno tenga la misma superficie.

519. Un rapazuelo preguntaba á un labrador cuáles eran las dimensiones de su terreno. «Caballero, dijo el labrador, el largo excede al ancho en dos metros, y la superficie del terreno es de 20163 mets. cuad.; busque Ud. lo que me pregunta.»

520. Preguntado un profesor por el número de sus alumnos, contesta que el número de ellos es tal, que multiplicado por $\frac{1}{3}$ del mismo, da 2523; ¿cuántos alumnos tiene?

521. Hay dos números, de los cuales el mayor es 40, y el total de sus cuadrados es 1625; ¿cuál es el menor?

522. ¿Cuál es el número que, multiplicado por su $\frac{1}{3}$ parte, da 108?

523. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 129457; ¿cuáles son estos números?

524. Un jardinero quiere plantar un cuadrado de dalias; á este efecto pone sus tubérculos á igual distancia unos de otros, tanto á lo largo como á lo ancho; la 1ª vez, le faltan 15; la 2ª pone 1 menos en todo sentido, y entonces le sobran 34; ¿cuántos tubérculos tenía?

525. Un general quiere formar, con 1152 hombres, un cuadrado de centro vacío que pueda contener 42 hombres en cada lado; ¿cuántos hombres hay en la columna exterior, y cuántas son las columnas?

526. Un labrador, nada versado en matemáticas, debe hacer una plantación de café en un campo de forma cuadrada; después de concluida su tarea, nota que le sobran 132 pies, y se pone á plantar uno más en cada hilera, y entonces le faltan 29 pies para completar el cuadrado; preguntase: 1º cuántos fueron los pies de café; 2º cuántos entraron en cada fila la 1ª y la 2ª vez.

LECCIÓN II

CUBOS Y RAÍCES CÚBICAS

Véanse los n.ºs 186, 188, 522 y 523.

§ I. Definiciones y teoremas.

577. **Cubo** de un quebrado es el producto de tres factores iguales á este quebrado.

Así, el cubo de $\frac{2}{3}$ es $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$; de donde se ve que el cubo de un quebrado es igual al cubo del numerador dividido por el del denominador.

578. Llámase **raíz cúbica** ó **tercera** de un número, la cantidad que, multiplicada por sí misma dos veces consecutivas, da el número propuesto.

La raíz cúbica de 216 es 6, porque $6 \times 6 \times 6 = 216$.

579. **Raíz cúbica** de un quebrado es otro quebrado que, elevado al cubo, reproduce el primero. Es la **raíz cúbica del numerador** dividida por la **del denominador**.

580. La raíz cúbica se indica con el signo $\sqrt[3]{}$, llamado radical del 3º grado; el 3, puesto en la abertura del radical, es el índice de la raíz que se ha de extraer.

Así $\sqrt[3]{64}$ indica que se debe extraer la raíz cúbica de 64.

581. El cubo de $\sqrt[3]{2}$ es 2; el de $\sqrt[3]{25}$ es 25. De donde se ve que el cubo de un número que está bajo un radical de 3º grado, se obtiene suprimiendo el radical.

582. Teorema. El cubo de la suma de dos números se compone : 1º del cubo del primero ; 2º del triple producto del cuadrado del primero por el segundo ; 3º del triple producto del primero por el cuadrado del segundo ; 4º del cubo del segundo.

Sea $7 = 4 + 3$

Tenemos : $7^3 = (4 + 3)^3 = (4 + 3)(4 + 3)(4 + 3)$ (188)

DISPOSICIÓN DE LA OPERACIÓN :

$$\begin{array}{r}
 4 + 3 \\
 4 + 3 \\
 \hline
 4^2 + 4 \times 3 \\
 4 \times 3 + 3^2 \\
 \hline
 4^2 + 2(4 \times 3) + 3^2 \dots \text{cuadrado} \quad (151) \\
 4 + 3 \\
 \hline
 4^3 + 2(4^2 \times 3) + 4 \times 3^2 \\
 4^2 \times 3 + 2(4 \times 3^2) + 3^3 \\
 \hline
 4^3 + 3(4^2 \times 3) + 3(4 \times 3^2) + 3^3 \dots \text{cubo} \quad (151)
 \end{array}$$

583. Observación. — Si representamos en general por a y b las dos partes de un número, tendremos :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

584. Corolario. — Si el número consta de decenas y unidades, su cubo se compone : 1º del cubo de las decenas ; 2º del triple producto del cuadrado de las decenas por las unidades ; 3º del triple producto de las decenas por el cuadrado de las unidades ; 4º del cubo de las unidades.

585. Teorema. La diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos es igual al triple del cuadrado del menor, más el triple de este número, más 1.

Sean los números 18 y 19.

$$18^3 = 18 \times 18 \times 18 = 5832$$

$$19^3 = 19 \times 19 \times 19 = 6859$$

La diferencia de los cubos, $6859 - 5832 = 1027 = (3 \times 18^2) + (3 \times 18) + 1$.

Y en general, siendo a y $a + 1$ los dos números consecutivos, tendremos :

$$(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1^3 \quad (582)$$

Restando a^3 de ambos miembros, resulta :

$$(a + 1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1$$

L. Q. Q. D.

Nota. — Este principio puede también expresarse como sigue: Si se aumenta 1 á un número, el cubo de él se aumenta del triple cuadrado de este número, más el triple de este número, más la unidad.

536. Teorema. El producto de varios radicales cúbicos es igual á la raíz cúbica del producto de las cantidades colocadas bajo los radicales.

Se trata de probar que :

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a \times b \times c} \quad (1)$$

5, elevando ambos miembros al cubo, que :

$$(\sqrt[3]{a})^3 (\sqrt[3]{b})^3 (\sqrt[3]{c})^3 = (\sqrt[3]{abc})^3$$

6, por fin, que :

$$a \times b \times c = a \times b \times c \quad (2)$$

Ahora bien, esta última igualdad es evidente. Luego la 1ª tiene iguales ambos miembros. L. Q. Q. D.

537. Observación. — La igualdad (1) manifiesta además que para extraer la raíz cúbica de un producto, basta extraer la raíz cúbica de cada factor.

538. Teorema. Para extraer la raíz cúbica de un cociente, basta extraer la raíz cúbica del dividendo y la del divisor.

Sea : $\frac{36}{9} = 4$

Tenemos : $36 = 9 \times 4$

y $\sqrt{36} = \sqrt{9} \times \sqrt{4} \quad (537)$

de donde : $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \sqrt{4}$

L. Q. Q. D.

539. Teorema. Para que un número sea cubo perfecto, es menester y suficiente que los exponentes de sus factores primos sean múltiplos de 3.

1º Esta condición es necesaria.

Demostremos, para esto, que cubicando un número, todos sus factores primos tienen por exponentes múltiplos de 3.

Sea pues $A = 2^5 \times 5^7$.

Cubicando ambos miembros, resulta :

$$A^3 = 2^{5 \times 3} \times 5^{7 \times 3} = 2^{15} \times 5^{21} \quad (191 \text{ y } 297)$$

L. Q. Q. D.

2º Esta condición es suficiente.

Para esto, demostremos que cuando los exponentes de los factores primos de un número son múltiplos de 3, siempre se puede extraer la raíz cúbica de este número.

Sea $A = 2^{15} \times 15^{15}$. Tenemos :

$$A = (2^5)^3 \times (5^5)^3 \quad (191)$$

$$\text{de donde} \quad \sqrt[3]{A} = 2^5 \times 5^5 \quad (587)$$

L. Q. Q. D.

590. Teorema. *La raíz cúbica de una suma no es igual á la suma de las raíces cúbicas de sus partes.*

Porque, si tuviéramos : $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a+b}$

Elevando al cubo ambos miembros, resultaría :

$$a + b + 3(\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{b}) + 3(\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b^2}) = a + b$$

Igualdad evidentemente imposible.

§ II. Raíz cúbica de un número entero, con aproximación de una unidad.

591. Extraer la raíz cúbica de un número entero, con aproximación de una unidad, es buscar la raíz del mayor cubo contenido en dicho número.

592. Para extraer la raíz cúbica de un cubo perfecto,

Regla. *Se descompone el cubo en sus factores primos, y se multiplican entre sí uno de cada tres de sus factores iguales; el producto será la raíz cúbica pedida (589).*

EJEMPLO. — ¿Cuál es la raíz cúbica de 216000?

Análisis. Los factores primos de este número son $2^3 \times 2^3 \times 3^3 \times 5^3$ (341). Ahora bien, ya que la raíz cúbica de un número es uno de sus tres factores iguales, el producto de $2 \times 2 \times 3 \times 5$, esto es, el de uno de cada tres factores primos iguales es la raíz cúbica pedida; por consiguiente

$$\sqrt[3]{216000} = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60. \text{ R.}$$

OPERACIÓN

	2	216000
	2	108000
*	2	54000
	2	27000
	2	13500
*	2	6750
	3	3375
	3	1125
*	3	375
	5	125
	5	25
*	5	5
		1

EJEMPLOS :

527. Cuál es la raíz cúbica de los números siguientes : 1º 74 088 ; 2º 592 704 ; 3º 12 326 391 ; 4º 15 625 ; 5º 2 985 984 ; 6º 704 969 ?

593. En la extracción de la raíz cúbica de un número entero ocurren tres casos :

- 1º El número es menor que 1000;
- 2º El número se halla comprendido entre 1000 y 1000000;
- 3º El número es mayor que 1000000.

594. **Caso I.** — *El número es menor que 1000.*

Para extraer la raíz cúbica de un número menor que 1000, con aproximación de una unidad, basta saber de memoria los cubos de los diez primeros números.

Números.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Sea de extraer la raíz cúbica de 512.

El cuadro anterior nos da inmediatamente 8 por raíz.

Sea también de extraer la raíz cúbica de 580.

Como el número 580 es menor que 1000, su raíz cúbica será menor que 10; y hallándose comprendido este número entre 512 y 729, esto es, entre 8^3 y 9^3 , su raíz cúbica, con aproximación de una unidad, será 8 (**591**).

595. **Caso II.** — *El número se halla comprendido entre 1000 y 1000000.*

Sea de extraer la raíz cúbica de 79507.

Como este número se halla comprendido entre 1000 y 1000000, esto es, entre 10^3 y 100^3 , su raíz estará comprendida entre 10 y 100, y por consiguiente constará sólo de dos guarismos : el de las decenas y el de las unidades.

Puede pues considerarse el número 79507 como compuesto de cinco partes, á saber :

- 1º Del cubo de las decenas;
- 2º Del triple producto del cuadrado de las decenas por las unidades;
- 3º Del triple producto de las decenas por el cuadrado de las unidades;
- 4º Del cubo de las unidades;
- 5º Y del residuo, si lo hay.

El cubo de las decenas da evidentemente un número exacto de miles. Luego el cubo de las decenas no puede encontrarse sino en los 79 miles del número 79507.

Dispongamos la operación como sigue :

$\begin{array}{r} \sqrt[3]{79.507} \\ 64 \\ \hline 155.07 \\ 15507 \\ \hline 00000 \end{array}$	43 raíz cúbica $4^2 \times 3 = 48 \text{ c. 1}^{\text{ra}} \text{ divis.}$ $3a^2b = 14400$ $3ab^2 = 1080$ $b^3 = 27$ 15507	ó más brevemente : $\begin{array}{r} \sqrt[3]{79.507} \\ 64 \\ \hline 15507 \\ 79507 \\ \hline 00000 \end{array}$	43 raíz cúbica $4^2 \times 3 = 48 \text{ cent}$
---	--	--	--

Separemos con un punto 79 de 507.

Ahora bien, 79 mil se halla comprendido entre 4^3 mil y 5^3 mil. Pero como 79 mil y 5^3 mil son números enteros de miles, difieren por lo menos en un mil. De modo que si á los 79 mil añadimos las 507 unidades menores que un mil, todo el número 79507 se hallará comprendido entre 4^3 mil y 5^3 mil. Luego el número 4, que representa las decenas de la raíz del mayor cubo contenido en 79 mil, representa también las decenas de la raíz de 79507.

Escribamos 4 en la raíz; restemos su cubo 64 de 79, y el residuo 15507, formado de la diferencia 15 y del periodo 507, no contendrá más que :

El triple producto del cuadrado de las decenas por las unidades;

El triple producto de las decenas por el cuadrado de las unidades;

El cubo de las unidades;

Y el residuo, si lo hay.

Conociendo las decenas, multipliquemos su cuadrado por 3, lo que da 48 centenas.

Como el triple producto del cuadrado de las decenas por las unidades da centenas, éstas no pueden encontrarse sino en las 155 centenas del residuo.

Separemos con un punto 155 de 07.

La división de 155 por 48 nos dará el verdadero guarismo de las unidades ó uno mayor, porque las 155 centenas contienen también las centenas que pueden provenir del triple producto de las decenas por el cuadrado de las unidades, más del cubo de las unidades y del residuo, si lo hay.

Dividamos 155 por 48, lo que da 3.

Para probar si 3 es verdaderamente el guarismo de las unidades, tenemos dos medios :

1º Se suma el triple producto del cuadrado de las decenas por las unidades ($3a^2b = 14400$) con el triple producto de

las decenas por el cuadrado de las unidades ($3ab^2 = 1080$), más el cubo de las unidades ($b^3 = 27$). Si esta suma puede restarse de 15507, el número 3 será el guarismo verdadero de las unidades; si así no fuere, se le disminuye sucesivamente una unidad; habrán de repetirse las operaciones hasta que se encuentre una cantidad que pueda restarse.

2º Otro modo más rápido consiste en escribir el guarismo de las unidades á la derecha del de las decenas, y en *cubicar* el número que así resulta. Si este cubo puede restarse de 79507, el guarismo 3 encontrado será el verdadero de las unidades. Si este guarismo fuese excesivo, se le disminuiría sucesivamente una unidad; sería menester *cubicar* cada vez el número hasta que resulte uno que pueda restarse de 79507. En el ejemplo dado :

$$43^3 = 79507$$

Como este número es igual al propuesto, el guarismo 3 es verdaderamente el de las unidades, y 43 la raíz exacta de 79507.

596. Caso III. — *El número es mayor que 1000000.*

Sea de extraer la raíz cúbica de 177697529.

Como este número es mayor que 1000 ó 10^3 , su raíz cúbica será mayor que 10, y por consiguiente constará de decenas y de unidades.

Siendo el cubo de las decenas un número exacto de *miles*, no puede encontrarse sino en los 177697 *miles* del número propuesto.

Separemos con un punto 177697 de 529.

Dispongamos la operación del modo siguiente :

$\sqrt[3]{177.697.529}$		562 raíz cúbica	
	125	$5^2 \times 3 = 75 \dots\dots$ 1º divisor	
1º residuo.....	526.97	$56^2 \times 3 = 9408 \dots$ 2º divisor	
56³.....	175616		
2º residuo.....	20815.29		
562³.....	177504328		
3º residuo.....	193201		

Encontramos las decenas de la raíz extrayendo la raíz del mayor cubo contenido en 177697 *miles*.

Pero 177697 es mayor que 1000 y menor que 1000000; luego encontraremos esta raíz conforme al caso 2º (595).

Separémos con un punto 177 de 697. Busquemos la raíz cúbica del mayor cubo contenido en 177, la cual es 5.

Restando 5^3 ó 125 de 177, resulta 52, á cuya derecha se baja el periodo siguiente 697.

Separando con un punto 526 de 97, se multiplica por 3 el cuadrado de 5, lo que da 75; dividiendo 526 por 75, se escribe el cuociente 6 á la derecha del 5 de la raíz; se cubica 56, y el número 175616 que resulta, manifiesta que el 6 del divisor no es excesivo.

Se resta 175616 de 177697, y al lado del residuo 2081 se baja el periodo siguiente 529, y entonces el residuo total 2081529 no contiene más que :

El triple producto del cuadrado de las decenas por las unidades;

El triple producto de las decenas por el cuadrado de las unidades;

El cubo de las unidades;

Y el residuo, si lo hay.

Continuemos ahora como si no tuviéramos más que buscar las unidades, conociendo las decenas.

Para esto, separemos con un punto 20815 de 29; multiplicando por 3 el cuadrado de 56, resulta 9408, que es el segundo divisor, y por el cual se divide 20815; el cuociente 2 se escribe en la raíz á la derecha de 56. Cubicando 562 resulta 177504328, que, restados de 177697529, dan por residuo 193201, lo que indica que el número 2 del cuociente no es excesivo, y que la raíz cúbica de 177697529, con aproximación de una unidad, es 562.

De lo que precede pueden deducirse las reglas siguientes :

597. Para extraer la raíz cúbica de cualquier número entero, se debe proceder de un modo inverso que para la elevación á la 3ª potencia, y por consiguiente,

Regla I. *Si el número propuesto no tiene más de tres cifras, su raíz se encuentra en las unidades, porque 10 que es el menor número de dos cifras, tiene cuatro en su cubo ($10 \times 10 \times 10 = 1000$). Si dicho número tiene más de tres cifras, se lo divide en periodos de á tres, con un punto, de derecha á izquierda; el último periodo puede tener uno á dos guarismos solamente;*

II. *A la derecha de la cantidad se pone la galera, como para la división, y se busca cuál es el mayor cubo conte-*

nido en el último periodo de la izquierda, cuya raíz se escribe en la galera;

III. Se cubica la raíz, y el cubo se resta de dicho último periodo, con lo cual queda satisfecha la 1ª parte de la fórmula a^3 ;

IV. A la derecha de la diferencia, si la hay, se baja el periodo siguiente, separando con un punto los dos primeros guarismos de la derecha; los demás números forman el 1º dividendo, cuyo divisor es el triple cuadrado de la cantidad escrita ya en la raíz, esto es, $3a^2$, que representa decenas con respecto al número que debe seguirle;

V. El cuociente debe escribirse en la raíz; luego se multiplica por este último número el triple cuadrado de las decenas, cuyo producto se escribe aparte, y tenemos $3a^2b$;

VI. En seguida se multiplica el triple producto de las decenas por el cuadrado de las unidades, cuyo producto se escribe debajo del anterior, y resulta $3ab^2$;

VII. Por fin se cubican las unidades, esto es, b^3 ; se escribe el resultado debajo de los números anteriores, para sumarlos, y el total se resta del dividendo.

Se repiten las cuatro últimas operaciones (IV, V, VI, VII) hasta que se hayan bajado todos los periodos del subradical, y que esté concluida la operación.

Es preferible seguir el modo más rápido que se indica en el caso II.

598. Nota. El cubo de un número menor que 10 es inferior á 1000; tiene pues cuando más tres guarismos.

El cubo de un número menor que 100 es inferior á 1000000, y tiene cuando más seis guarismos.

El cubo de un número menor que 1000 es inferior á 1000000000, y tiene cuando más nueve guarismos, etc.

Luego, la raíz cúbica de un número tiene tantos guarismos cuantos periodos de tres cifras contenga dicho número, pudiendo el último periodo tener sólo una ó dos cifras.

599. Observación. — Si se escribieran á ojo los guarismos que siguen á la raíz del mayor cubo, se conocería la insuficiencia de ellos por el valor de los residuos sucesivos que entonces serian iguales ó superiores al triple cuadrado de la raíz encontrada, más el triple de esta raíz, más uno (585).

600. Teorema. Si, en la extracción de la raíz cúbica de un número, el residuo es menor que el triple cuadrado de la raíz más el triple de la misma, la raíz cúbica se ha encontrado con aproximación de una unidad.

Este principio se deduce del de el N° 585; pero puede también demostrarse directamente.

Sea N un número cualquiera, a su raíz cúbica y R el residuo. Tendremos entonces :

$$N = a^3 + R$$

pero

$$R < 3a^2 + 3a$$

$$N < a^3 + 3a^2 + 3a$$

a fortiori

$$N < a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

ó lo que es lo mismo $N < (a + 1)^3$ (582 invertido)

de donde

$$\sqrt[3]{N} < a + 1$$

Como la $\sqrt[3]{N}$ se halla comprendida entre a y $a + 1$, la cantidad a se encuentra con aproximación de una unidad.

L. Q. Q. D.

601. Teorema. La raíz cúbica, con aproximación de una unidad, de un número que no es entero, es la misma que la de su parte entera.

Sea el número 45,372.

Se trata de demostrar que la raíz cúbica de 45,372, con aproximación de una unidad, es la misma que la de 45.

En efecto, 45 se halla comprendido entre 3^3 y 4^3 . Luego la raíz cúbica de 45, con aproximación de una unidad, es 3. (591)

Pero, como 45 y 4^3 son números enteros, difieren por lo menos en una unidad. Por consiguiente, si al número 45 se le añade la parte decimal 0,372, menor que una unidad, el número 45,372 quedará aún comprendido entre 3^3 y 4^3 . Así pues, la raíz cúbica de 45,372, con aproximación de una unidad, será 3 mismo. (591)

3^3	45	4^3
	3	
	45,372	
3^3		4^3
	3	

L. Q. Q. D.

§ III. Raíz cúbica de los quebrados comunes.

602. Ocurren tres casos en la raíz cúbica de los quebrados comunes :

- 1° Ambos términos son cubos perfectos;
- 2° Sólo el denominador es cubo perfecto;
- 3° El denominador no es cubo perfecto.

603. Caso I. — *Ambos términos son cubos perfectos.*

Regla. Para extraer la raíz cúbica de un quebrado, cuando sus dos términos son cubos perfectos, basta extraer separadamente la raíz cúbica de cada uno de ellos.

Esta regla debe mirarse como evidente; ya que es sabido que para cubicar un quebrado, se eleva á la tercera potencia cada uno de sus términos.

$$\text{Así :} \quad \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{3}{4}$$

604. Caso II. — *Sólo el denominador es cubo perfecto.*

Regla. Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuando sólo el denominador es cubo perfecto, se extrae la raíz cúbica del numerador con la aproximación que se quiera, y se divide el resultado por la raíz cúbica del denominador.

Esta regla también es evidente.

$$\text{Así :} \quad \sqrt[3]{\frac{13}{64}} = \frac{\sqrt[3]{13}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{13}}{4}$$

605. Caso III. — *El denominador no es cubo perfecto.*

Regla. Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuando el denominador no es cubo perfecto, se extrae la raíz cúbica del producto del numerador por el cuadrado del denominador, y el resultado se divide por el denominador.

Sea el quebrado $\frac{3}{5}$. Tenemos :

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 5^2}{5 \times 5^2} = \frac{3 \times 5^2}{5^3}$$

Extrayendo la raíz cúbica de ambos miembros, resulta :

$$\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 5^2}}{5} \quad (\text{Caso II})$$

L. Q. Q. D.

606. Observación. — Para hacer cubo perfecto al denominador, puede descomponerse en sus factores primos, y ver por qué números deben multiplicarse ambos términos del quebrado para que todos los exponentes del denominador sean múltiplos de 3.

$$\text{Así :} \quad \frac{7}{12} = \frac{7}{3 \times 2^2} = \frac{7 \times 3^2 \times 2}{3^3 \times 2^3}$$

$$\text{de donde} \quad \sqrt[3]{\frac{7}{12}} = \frac{\sqrt[3]{7 \times 3^2 \times 2}}{3 \times 2}$$

607. Raíz cúbica de un número mixto. — Para extraer la raíz cúbica de un número mixto, se lo reduce á una sola expresión fraccionaria, y se extrae su raíz como la de los quebrados.

Sea el número mixto $15 \frac{3}{7}$. Tenemos :

$$15 \frac{3}{7} = \frac{108}{7} = \frac{108 \times 7^2}{7^3}$$

de donde

$$\sqrt[3]{15 \frac{3}{7}} = \frac{\sqrt[3]{108 \times 7^2}}{7} \quad (605)$$

§ IV. Cubo y raíz cúbica de los números decimales.

608. Regla. El cubo de un número decimal se encuentra como el de los enteros, sin hacer caso de la coma; en seguida se separa á la derecha del resultado el triple de los decimales contenidos en el número dado.

Sea de cubicar el número 4,56. Tenemos :

$$4,56 = \frac{456}{100} \quad (476)$$

$$(4,56)^3 = \frac{456^3}{100^3} = \frac{456 \times 456 \times 456}{1000000}$$

El último miembro manifiesta que después de encontrado el cubo de 456, han de separarse 6 guarismos decimales á la derecha.

609. Nota. — El cubo de un número decimal tiene siempre sus guarismos decimales en número de 3 ó de un múltiplo de 3.

610. Para extraer la raíz cúbica de un número decimal, se escriben á su derecha uno ó dos ceros, si fuere necesario, á fin de que el número de sus decimales sea múltiplo de 3, y se borra la coma; en seguida se extrae su raíz como la de los números enteros, y á la derecha del resultado, se separa, con una coma, la tercera parte del número de decimales contenidos en el número propuesto y completado.

$$\text{Sea el número } 7,4568 = \frac{74568}{10000} = \frac{7456800}{1000000} = \frac{7456800}{100^3}$$

de donde

$$\sqrt[3]{7,4568} = \frac{\sqrt[3]{7456800}}{100} \quad (605)$$

L. Q. Q. D.

EJERCICIOS ORALES

528. ¿A qué es igual la diferencia de los cubos de dos números consecutivos?

529. ¿Cómo se reconoce que un número dado es la diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos? Búsquense estos números, y hágase la aplicación con 751 501.

530. ¿Cuándo puede ser cubo un número que remata en ceros?

531. ¿Se puede conocer si un número es ó no cubo perfecto por la última cifra de la derecha?

PROBLEMAS SOBRE LA RAÍZ CÚBICA

532. ¿Cuáles son los cubos de las cantidades siguientes:

1º 19; 2º 138; 3º 1,50; 4º 0,185; 5º $2\frac{2}{7}$; 6º $11\frac{11}{17}$?

533. ¿Cuál es la raíz cúbica de cada uno de los números siguientes:

1º 1 331; 2º 3 375; 3º 12 167; 4º 32 768; 5º 110 592?

534. ¿Cuál es la raíz cúbica de cada uno de los números siguientes:

1º 1 367 631; 2º 9 938 375; 3º 41 781 923; 4º 96 071 912;
5º 184 220 009; 6º 300 763 000; 7º 476 379 541; 8º 709 732 288;
9º 736 314 327; 10º 977 002 999?

535. Extraer la raíz cúbica de los quebrados decimales siguientes, con aproximación de 0,01: 1º 0,0046; 2º 0,10904; 3º 0,002; 4º 0,304376.

536. ¿Cuál es la raíz cúbica de los quebrados siguientes:

1º $\frac{1\ 331}{357\ 911}$; 2º $\frac{17\ 576}{373\ 248}$; 3º $\frac{103\ 823}{23\ 149\ 135}$?

537. Búsquese la raíz cúbica de los quebrados siguientes, haciendo que el denominador sea cubo perfecto:

1º $\frac{17}{21}$; 2º $\frac{1\ 248}{2\ 800}$; 3º $\frac{84}{12\ 648}$.

538. ¿Cuál es el número cuya raíz cúbica disminuida de 3 da 24?

539. ¿Cuál es el número cuya mitad, tercera y cuarta parte multiplicadas entre sí, dan 9 por producto?

540. Encuéntrase el número cuya tercera parte, multiplicada por el cuadrado del mismo, dé por producto 1 944.

541. Con \$ 164,64 he comprado cajas de sardinas en cierto número de cajones, cada uno de los cuales contiene un número de cajas triple del de los cajones; cada caja de sardinas importa un número de centavos doble del de los cajones; ¿cuántas son las cajas de sardinas y los cajones en que están guardadas?

542. Búsquese 1º un número cuyo cubo y cuadrado den 252; 2º un número cuyo cubo menos su cuadrado dé 448; 3º un número cuyo cubo, triple cuadrado y triple den 39 303.

LIBRO V

DE LAS MEDIDAS

LECCIÓN PRIMERA

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

611. **Sistema métrico** es el conjunto de las medidas que se derivan del metro.

612. *Medir una cantidad* es buscar cuántas veces contiene á otra de la misma especie que se toma por unidad.

613. En las medidas usuales, se consideran ordinariamente seis especies de cantidades, á saber : las *longitudes*, las *superficies*, los *volúmenes*, las *capacidades*, los *pesos* y las *monedas*.

614. El sistema métrico debe pues contener seis especies de unidades, siendo las principales :

- 1º El *metro*, para las longitudes;
- 2º El *área*, para las superficies;
- 3º El *metro cúbico*, para los volúmenes;
- 4º El *litro*, para las capacidades;
- 5º El *gramo*, para los pesos;
- 6º El *franco*, en Francia, y el *sucré*, en el Ecuador, para las monedas.

615. Las unidades de tiempo y las que sirven para medir los arcos y los ángulos, no están sujetas á la división decimal, y no entran en el sistema métrico.

616. Para valuar con mayor comodidad las diversas cantidades, se emplean, á más de las unidades principales, varios múltiplos y submúltiplos decimales de estas mismas unidades.

617. Los múltiplos se expresan por medio de las siguientes voces griegas, antepuestas al nombre de la unidad principal :

<i>deca</i> , que signif.	10;	así <i>decámetro</i> signif.	10 metros.
<i>hecto</i> , —	100	» <i>hectolitro</i> —	100 litros.
<i>kilo</i> , —	1000	» <i>kilogramo</i> —	1000 gramos.
<i>miria</i> , —	10000	» <i>miriámetro</i> —	10000 metros.

618. Los submúltiplos se expresan por medio de las siguientes voces latinas, antepuestas al nombre de la unidad principal :

<i>deci</i> , que signif.	10 ^a parte;	así <i>decímetro</i> signif.	$\frac{1}{10}$ de metro.
<i>centi</i> , —	100 ^a parte;	» <i>centilitro</i> —	$\frac{1}{100}$ de litro.
<i>mili</i> , —	1000 ^a parte;	» <i>miligramo</i> —	$\frac{1}{1000}$ de gramo.

§ I. Medidas lineales ó de longitud.

619. Llámanse *medidas de longitud* las que sirven para medir la extensión considerada como línea, ó las distancias.

620. La unidad de las medidas de longitud es el **metro**, que iguala á la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.

621. Los múltiplos del metro son :

1º El <i>decámetro</i> ó <i>Dm</i>	que vale	10 metros.
2º El <i>hectómetro</i> ó <i>hm</i>	—	100 —
3º El <i>kilómetro</i> ó <i>km</i>	—	1000 —
4º El <i>miriámetro</i> ó <i>Mm</i>	—	10000 —

622. Los submúltiplos del metro son :

1º El <i>decímetro</i> ó <i>dm</i>	que vale	$\frac{1}{10}$ del metro.
2º El <i>centímetro</i> ó <i>cm</i>	—	$\frac{1}{100}$ —
3º El <i>milímetro</i> ó <i>mm</i>	—	$\frac{1}{1000}$ —

623. Las medidas de longitud son de dos clases :

- 1º Las medidas de longitud *propriadamente tales*;
- 2º Las medidas *itinerarias*.

624. Llámanse medidas de longitud **propriadamente tales** las que sirven para valuar las longitudes poco considerables,

como la altura de una casa, el ancho de una calle, el largo de una pieza de tela, etc.

La unidad es el *metro*.

625. Medidas *itinerarias* son las que se emplean en la valuación de las distancias geográficas, como la longitud de un camino, de un ferrocarril, etc.

La unidad es el *kilómetro* ó el *miriámetro*.

§ II. Medidas de superficie.

626. Las medidas de *superficie* ó *cuadradas* sirven para medir la extensión considerada en el sentido de su longitud y latitud.

627. La unidad de superficie es el *metro cuadrado*, que es un cuadrado de un metro de lado.

628. Los múltiplos del metro cuadrado son :

1º El <i>decámetro</i> cuad.	ó Dm^2	que vale	100 m^2
2º El <i>hectómetro</i> cuad.	ó hm^2	—	10 000 m^2
3º El <i>kilómetro</i> cuad.	ó km^2	—	1 000 000 m^2
4º El <i>miriámetro</i> cuad.	ó Mm^2	—	100 000 000 m^2

629. Los submúltiplos son :

1º El <i>decímetro</i> cuad.	ó dm^2	que vale la	100 ^a p. del m^2
2º El <i>centímetro</i> cuad.	ó cm^2	—	10 000 ^a —
3º El <i>milímetro</i> cuad.	ó mm^2	—	1 000 000 ^a —

630. Los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado son sucesivamente 100 veces mayores ó menores únos que otros.

631. Las medidas de superficie son de tres clases :

- 1º Las medidas de *superficie propiamente tales*;
- 2º Las medidas *topográficas*;
- 3º Las medidas *agrarias*.

632. Las medidas de superficie *propiamente tales* se emplean en la valuación de las superficies de corta extensión, como la de una pared, de un patio, etc.

La unidad es el *metro cuadrado*.

633. Las medidas *topográficas* tienen por objeto la valuación de las superficies considerables, como la de una provincia, de un estado, etc.

La unidad es el *kilómetro cuadrado* ó el *miriámetro cuadrado*.

634. Medidas **agrarias** son las que tienen por objeto la valuación de la superficie de los terrenos productivos, como campos, cañaverales, cacaotales, etc.

635. La unidad es el *área*, que equivale á un decámetro cuadrado; el *área* tiene un múltiplo, la *hectárea*, que vale 100 áreas ó un hectómetro cuadrado, y un submúltiplo, la *centiárea*, que vale la 100ª parte del *área*, ó un metro cuadrado.

§ III. Medidas cúbicas ó de volumen.

636. Medidas de **volumen** son las que sirven para valuar la extensión considerada en sus tres dimensiones: *longitud*, *latitud* y *profundidad*.

637. La unidad de volumen es el *metro cúbico*, sólido que tiene por caras seis cuadrados iguales, y cuyos lados miden un metro de longitud.

638. Los múltiplos del metro cúbico se emplean rara vez.

639. Los submúltiplos del metro cúbico son :

1º El *decímetro cúbico* ó dm^3 vale la 1 000ª p. del m^3

2º El *centímetro cúbico* ó cm^3 — 1 000 000ª —

3º El *milímetro cúbico* ó mm^3 — 1 000 000 000ª —

640. Hay dos clases de medidas de volumen :

1º Las medidas de volumen *propriadamente tales*, cuya unidad es el *metro cúbico*;

2º Las medidas para la leña, cuya unidad es el *estéreo*, que equivale á un metro cúbico.

641. El *estéreo* tiene un múltiplo, el *decaestéreo*, que vale 10 *estéreos*, y un submúltiplo, el *deciestéreo*, que vale la 10ª parte del *estéreo*.

642. **Nota.** — No debe confundirse el *deciestéreo* con el *decímetro cúbico*; el *deciestéreo* vale 100 *decímetros cúbicos*.

§ IV. Medidas de capacidad.

643. Medidas de **capacidad** son las medidas cúbicas ó cilíndricas por medio de las cuales se averigua la cabida ó espacio que ocupan los áridos y los líquidos.

644. Llámense **áridos** los granos y legumbres para los cuales se emplean medidas de capacidad.

645. Por **liquidos** se entiende los cuerpos ó materias que mojan y se pegan á los cuerpos sumergidos en ellos, como el agua, la leche, el vino, el aceite, etc.

646. La unidad de capacidad es el **litro**, cuya cabida es igual á un decímetro cúbico.

647. Los múltiplos del litro son :

1º El **decalitro** ó *Dl* que vale 10 lit., ó $\frac{1}{100}$ del m^3

2º El **hectolitro** ó *hl* — 100 lit., ó $\frac{1}{10}$ del m^3

3º El **kilolitro** ó *kl* — 1 000 lit., ó 1 met. cúb.

Este último es poco usado, y se cuenta más bien por litros y por hectolitros; así se dice : 1 000 litros, 10 000 litros, etc., ó 10 hectol., 100 hectol.

648. Los submúltiplos del litro son :

1º El **decilitro** ó *dl* que vale $\frac{1}{10}$ del lit., ó la 10 000ª del m^3

2º El **centilitro** ó *cl* — $\frac{1}{100}$ — ó la 100 000ª —

§ V. Medidas ponderales ó de peso.

649. **Medidas de peso**, ó simplemente **pesas**, son las que sirven para determinar el **peso** ó *gravedad* de las cosas por medio de una balanza ó de otro instrumento equivalente.

650. La unidad de las pesas es el **gramo**, igual al peso en el vacío, de un centímetro cúbico de agua destilada, en su mayor densidad, esto es, en la temperatura de 4º.

651. Los múltiplos del gramo son :

1º El **decagramo** ó *Dg* que vale 10 gramos.

2º El **hectogramo** ó *hg* — 100 —

3º El **kilogramo** ó *kg* — 1 000 —

4º El **miriagramo** ó *Mg* — 10 000 —

5º El **quintal métrico** ó *Q* — 100 kilogramos.

6º La **tonelada métrica** ó *ton* — 10 quintales.

652. Los submúltiplos del gramo son :

1º El *decigramo* ó *dg* que vale $\frac{1}{10}$ del gramo.

2º El *centigramo* ó *cg* — $\frac{1}{100}$ —

3º El *miligramo* ó *mg* — $\frac{1}{1000}$ —

653. **Nota.** — En el comercio se toma ordinariamente como unidad el *kilogramo*, y á veces el *quintal* ó *la tonelada*.

Densidad de los cuerpos.

654. Llámase **densidad de un cuerpo**, ó peso específico, el cuociente del peso de este cuerpo por el peso de igual volumen de agua.

Así, decir por ejemplo que la densidad de un cuerpo es de 6,5, significa que este cuerpo pesa seis veces y media más que un volumen igual de agua.

EJEMPLO. — Búsquese el peso de una barra de hierro de 3 decím. cúb. siendo la densidad del hierro 7,788.

Ya que un decímetro cúbico de hierro pesa 7 kg. 788, 3 decímetros cúbicos pesarán 3 veces más, ó 23 kg. 364.

655. *El peso de un cuerpo es igual al producto de su volumen por su densidad.*

El peso resulta en toneladas, si el volumen está expresado en met. cúb.; en kilog., si se da el volumen en decím. cúb.; en gramos, si se da el volumen en centim. cub.

Luego $P = VD$, y por consiguiente $\frac{P}{D} = V$.

656. Así, *se obtiene el volumen de un cuerpo dividiendo su peso por su densidad.*

El volumen resulta en metros cúbicos, decímetros cúbicos ó centímetros cúbicos, según se dé el peso en toneladas, en kilog. ó en gramos.

657. *La densidad de un cuerpo se obtiene dividiendo su peso por su volumen; así $\frac{P}{V} = D$.*

§ VI. Medidas monetarias.

658. Llámanse **medidas monetarias**, ó simplemente **mone-**
das, las que sirven para valuar el precio de las cosas.

659. En Francia, la unidad monetario es el *franco*, pieza de plata que pesa 5 gramos, y contiene 9 partes de plata por 1 de cobre.

660. Los múltiplos del franco no tienen nombre particular; los submúltiplos son :

1º El *décimo* ó la 10ª parte del franco.

2º El *céntimo* ó la 100ª — —

661. Las monedas son de tres especies : de oro, de plata y de vellón.

662. La unidad monetaria, en el Ecuador, es el *sucre*, dividido en cien centavos¹.

663. Los múltiplos y submúltiplos del sucre son los siguientes :

NOMBRES	PESO	LEY	VALOR
PIEZAS DE ORO			
Doble cóndor.	32 gr. 25806	0,900	S 20
Cóndor.	12 gr. 12903	0,900	10
Doblón.	6 gr. 45161	0,900	4
Quinto de cóndor.	3 gr. 22580	0,900	2
Décimo »	1 gr. 61290	0,900	1
PIEZAS DE PLATA			
Sucre.	25 gr.	0,900	1 fuerte.
Medio sucre.	12 gr. 50	0,900	50 cent.
2 décim. de sucre.	5 gr.	0,900	20 cent.
Décimo »	2 gr. 50	0,900	10 cent.
Medio décimo.	1 gr. 25	0,900	5 cent.
PIEZAS DE VELLÓN			
Medio décimo.	de níkel.		5 cent.
Centavo.	de cobre puro ó aliado.		1 cent.
Medio centavo.	» » »		$\frac{1}{2}$ cent.

¹ Conforme al decreto de la Convención Nacional de 1º de abril de 1884, nº 94 de « El Nacional ».

664. Ley de una ligación es el cuociente del peso del metal precioso por el peso total.

Luego $L = \frac{P'}{P}$, y por consiguiente $P \times L = P'$.

665. Así, el peso del metal precioso se obtiene multiplicando el peso total por la ley.

666. El peso total de la ligación se encuentra dividiendo el peso del metal precioso por la ley; así $P = \frac{P'}{L}$.

Valor relativo de las monedas.

667. En igualdad de peso :

1º El oro vale $15 \frac{1}{2}$ veces más que la plata, y 310 veces más que el bronce;

2º La plata vale $15 \frac{1}{2}$ veces menos que el oro, y 20 veces más que el bronce;

3º El bronce vale 310 veces menos que el oro, y 20 veces menos que la plata.

Relaciones que existen entre las medidas métricas.

MEDIDAS DE SUPERFICIE

Relación de las medidas de superficie entre sí.

668. El metro cuad.	igual a	1 centiárea.
El decámetro cuad.	—	1 área.
El hectómetro cuad.	—	1 hectárea.
El kilómetro cuad.	—	100 hectáreas.
El miriámetro cuad.	—	10 000 hectáreas.

Y recíprocamente :

La centiárea	igual a	1 met. cuad.
El área	—	1 Dm ² ó 100 met. cuad.
La hectárea	—	1 Hm ² ó 10 000 met. cuad.

MEDIDAS DE VOLUMEN

Relación del metro cúbico con las medidas para la leña y con las de capacidad y de peso.

669. Ya que 1 met. cúb.	igual a	1 estéreo,
10 met. cúb.		1 decaestéreo.
100 m. cúb.		1 hectoestéreo.

**BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS**

670. Como el *litro* es igual á 1 *decim. cúb.*, y 1 *decim. cúb.* de agua pesa 1 *kilog.*,

1 <i>decil.</i>	—	igual a 100 <i>centim. cúb.</i>	y pesa 100 <i>gram.</i>
1 <i>centil.</i>	—	10 <i>centim. cúb.</i>	— 10 <i>gram.</i>
1 <i>milil.</i>	—	1 <i>centim. cúb.</i>	— 1 <i>gram.</i>
1 <i>Decal.</i>	—	10 <i>decim. cúb.</i>	— 10 <i>kilog.</i>
1 <i>hectol.</i>	—	100 <i>decim. cúb.</i>	— 100 <i>kilog.</i>
1 <i>kilol.</i>	—	1 000 <i>dec. cúb.</i> ó 1 <i>m³</i>	— 1 000 <i>kilog.</i>

EJERCICIOS ORALES

543. ¿A qué múltiplo del metro cuadrado equivale el área? — la hectárea? — la centiárea?

544. ¿Qué parte de la hectárea representan: 1° 1 250 met. cuad.; 2° 25 decim. cuad.; 3° $\frac{1}{10}$ de met. cuad.?

545. ¿Qué parte del decám. cuad. representan: 1° 50 áreas; 2° 0 a. 005; 3° 20 centim. cuad.?

546. ¿Cuánto pesa la tonelada métrica?

547. ¿El peso de qué volumen de agua pura representa cada uno de los múltiplos del gramo?

548. ¿Qué volumen de agua pura pesa: 1° un quintal métrico; 2° una tonelada métrica?

549. ¿Qué se llama densidad de un cuerpo?

550. ¿Cómo se encuentra la densidad de un cuerpo, siendo dados su volumen y su peso?

551. ¿Cómo se encuentra el peso de un cuerpo, cuando se conoce su volumen y su densidad?

552. ¿Cómo se encuentra el volumen de un cuerpo, conocida su densidad y su peso?

PROBLEMAS SOBRE EL SISTEMA MÉTRICO

553. Se ha medido una pieza de tela con un metro ya gastado, y que no tenía más que 98 centim.; la longitud encontrada es de 94 m. 50. ¿Qué pérdida sufre el comprador, si la tela le ha sido dada á \$ 4 el metro?

554. Las ruedas de una locomotiva miden 5 m. 65 de circunferencia; las de los vagones tienen 2 m. 60. ¿Cuántas vueltas dará cada una de estas ruedas al recorrer una distancia de 315 kilóm.?

555. Ambrosio compra una quinta de 5 hectár. 7 cent. en \$ 5 600; ¿á cómo le sale el metro cuad.?

556. Los $\frac{5}{7}$ de una hectár. de terreno importan \$ 680; ¿cuánto costarán 28 ár. 6 centiá.?

557. Un terreno de 5 hectár. 75 cent., que ha sido vendido á razón de 80 cent. el metro cuad., había costado \$ 1 527 la hectárea. ¿Cuánto se ha ganado en esta venta?

558. Se ha abierto un sendero de 450 met. de largo por 0^m 40 de ancho en un terreno tasado á \$ 40 el área; ¿cuánto vale el sendero?

559. Un sendero de 0^m 50 de ancho ha sido abierto en un terreno tasado á \$ 35 el área, y se han pagado por él \$ 75,60. ¿Cuál es el largo de este sendero?

560. Para edificar una casa, se ha comprado un terreno en \$ 9 000, á razón de \$ 4 el metro cuadrado. Uno de los lados de este terreno rectangular mide 72 met. ¿Cuál es la otra dimensión?

561. Se han pintado al óleo las 4 paredes de una sala de 3^m 80 de alto y de 5^m 60 de ancho. Se han pagado \$ 34,47 por este trabajo, á razón de 24 cent. el metro cuad. ¿Cuál es la longitud de la sala?

562. Hablándose medido un campo con una cadena de agrimensor que sólo tenía 9^m 96, han resultado 3 hectár. 16 ár. 20 centiár. ¿Cuál es la extensión real del campo?

563. Una viga de 108 decímetros cúbicos de volumen ha costado \$ 15; ¿á cómo sale el metro cúbico?

564. Para construir una pared de 683 met. cúb. 595 se emplean ladrillos que, comprendidas las juntas, tienen 1 022 centim. cúb. ¿Cuántos millares se necesitarán, y cuál será el gasto, si el ciento importa \$ 1,40?

565. Un trozo cúbico de nieve tiene 1^m 20 de lado; ¿qué peso será menester poner sobre el trozo para que su superficie superior venga á flor de agua, siendo la densidad de la nieve de 0,92?

566. ¿Cuál es el volumen de la pieza de \$ 1, siendo la densidad de la plata acuñada de 10,12 más ó menos?

567. ¿Cuál es el volumen de la pieza de doble cóndor si la densidad del oro acuñado es más ó menos de 17,3?

568. Una vasija llena de aceite pesa 17^{ks} 250, vacía pesa 2^{ks} 610. ¿Cuál es la capacidad de la vasija, siendo la densidad del aceite de 0,915?

569. La densidad del petróleo es de 0,847. ¿Cuál es la capacidad de un bote que, lleno de este aceite, pesa 40^{ks} 840, y vacío, 9^{ks} 300?

570. Si un litro de alcohol importa 76 cent., ¿cuánto vale un kilog., siendo la densidad del alcohol de 0,84?

571. Un trozo de hierro fundido, sumergido en una vasija llena de agua, desaloja 2 lit. 35 centil. ¿Cuánto pesa el trozo de hierro, si su densidad es de 7,200?

572. ¿Cuánto pesa un trozo de nieve de 12 m. cúb. 640, si la densidad de la nieve es de 0,92?

573. Se ha puesto un pedazo de plomo en una vasija llena de agua pura. El peso del agua derramada es de 650 gr. La vasija con todo su contenido pesa ahora 6^{ks} 7 288 más que antes. ¿Cuál es la densidad del plomo?

574. Braulio vende 1 958 gr. de patatas á razón de \$ 4,50 el quintal métrico; ¿qué suma recibirá en pago?

575. Se sabe que el aire pesa 770 veces menos que el agua, y que la densidad del oxígeno es igual á 1,1057 vez la del aire. ¿Cuánto pesa un litro de oxígeno?

576. ¿Qué cantidad de plata pura se debe emplear para acuñar: 1^o 250 piezas de 1 sucre; 2^o 500 piezas de medio sucre?

577. ¿Cuánto vale una barra de oro que tiene la ley de las monedas, y en la que han entrado 12 gramos de cobre?

578. ¿Cuánto pesan 25 litros de agua, y qué volumen representan?

579. Un aljibe tiene 28 hectolitros de capacidad, ¿cuál es su volumen y el peso del agua?

580. El peso del agua contenida en una vasija es de 8kg 6 hectog. ¿Cuál es la capacidad de la vasija y el volumen del agua?

581. Una pila tiene 5 m. cúb. 300 decím. cúb. de volumen, ¿cuál es su capacidad y el peso del agua que contiene?

582. ¿Qué cantidad de agua pesa tanto como un sucre?

LECCIÓN II

NÚMEROS COMPLEJOS

671. Número complejo ó denominado es el que consta de varias partes que se refieren á unidades de diferentes especies, pero de un mismo género, y que no se descomponen de diez en diez.

Así 3 años 4 meses 15 días; 43 grados 18 minutos 17 segundos, son números complejos.

672. Los números complejos se emplean sobre todo en la medida del *tiempo*, en la valuación de los *arcos* y *ángulos*, y en los pesos y medidas que no pertenecen al sistema métrico.

673. División del tiempo. El *siglo* se divide en 100 *años*; el año civil en 365 *días* repartidos en 12 *meses*; el día se divide en 24 *horas*; la hora, en 60 *minutos*, y el minuto, en 60 *segundos*.

Nota. Las subdivisiones de los segundos se escriben ordinariamente en quebrado decimal. Los días, horas, minutos y segundos se indican respectivamente por las letras *d*, *h*, *m*, *s*; así, 3 días 15 horas 20 minutos y 30 segundos, se escriben: 3^d 15^h 20^m 30^s. — El año bisiesto tiene 366 días.

674. División de la circunferencia. En Geometría se divide la circunferencia en 4 *cuadrantes*; el cuadrante, en 90 *grados*; el grado, en 60 *minutos*, y el minuto, en 60 *segundos*.

Nota. Las fracciones de los segundos se expresan en quebrados ordinarios ó decimales. Los grados, minutos y segundos se indican respectivamente por los signos °, ', ''; así, 17 grados 32 minutos 19 segundos, se escriben: 17° 32' 19".

§ I. Reducción de los números complejos.

675. Por **reducción** de los números complejos se entiende la operación por la cual se cambian los números de una especie de unidad en ótra, sin que por esto se altere su valor.

676. Las reducciones de números complejos son dos : la *reducción descendente* y la *reducción ascendente*.

677. La **reducción descendente** es el cambio que se hace con las cantidades de especie superior en la inferior, esto es, convertir números complejos en un incomplejo (30) de especie inferior, y se efectúa por medio de la multiplicación.

678. Para reducir un número complejo de especie superior á la inferior,

Regla I. *Se multiplican las unidades superiores del número dado por el número de partes en que se divide inmediatamente una de ellas;*

II. *Al producto que resulta se le añaden las unidades que son de la misma especie que él;*

III. *El total encontrado se reduce á la especie inmediata, multiplicándolo también por las partes en que se divide una de sus unidades, y añadiendo luego las de la misma especie, dadas en el problema, y se continúa así hasta la última denominación.*

EJEMPLO. — Redúzcanse á segundos $13^{\circ} 17' 18''$.

13°	Como 1 grado vale $60'$, los 13° valdrán
$\times 60$	$60 \times 13 = 780'$; $780' + 17' = 797'$; un minuto
$780'$	vale $60''$, los $797'$ valdrán $797 \times 60 = 47\,820''$,
$+ 17'$	y añadiendo los $18''$ dados, tenemos $47\,838''$.
$797'$	También puede expresarse este resultado
$\times 60$	en quebrado ordinario de grados ó de minutos;
$47\,820''$	en efecto, puesto que 1 grado vale 60×60
$+ 18''$	ó 3600 segundos, podemos escribir $\frac{47\,838}{3\,600}$
$47\,838''$	de grado, ó también $\frac{47\,838}{60}$ de minuto.

679. La **reducción ascendente** es el cambio que se hace con las cantidades de especie inferior en quebrado de la especie superior, esto es, convertir un número complejo en incomplejo de la especie superior.

680. Para reducir un número complejo de especie inferior á quebrado de la especie superior,

Regla I. *Principiando por la especie inferior, se ve qué parte es de la inmediatamente superior, y al quebrado que resulta se le añaden las unidades que son de la misma especie que él;*

II. *El resultado se multiplica por el quebrado que indica el valor de una de las partes en que se divide la especie inmediatamente superior;*

III. *Al producto se le añaden las unidades de la misma especie, dadas en el problema, y se continúa así con todas las unidades, excepto con la de especie superior, ya que el quebrado final expresa partes de esta última.*

EJEMPLO. — Redúzcanse 3 días, 6 horas, 10 minutos á días y partes de día.

Principiando por la especie inferior, digo :

Como 1 min. = $\frac{1}{60}$ de hora, 10 min. = $\frac{10}{60}$ de hora; añá-

diendo á esto las 6 horas dadas, tendré $6 + \frac{10}{60} = \frac{370}{60} = \frac{37}{6}$

de hora. Ahora bien, 1 hora = $\frac{1}{24}$ de día, $\frac{37}{6}$ de hora

= $\frac{37 \times 1}{6 \times 24} = \frac{37}{144}$ de día; los que añadidos á los 3, dan

3d. $\frac{37}{144}$.

§ II. Operaciones que se ejecutan con los números complejos.

681. Con los números complejos se ejecutan las mismas operaciones que con los números abstractos, esto es: Adición, Substracción, Multiplicación y División.

ADICIÓN

682. Para sumar números complejos,

Regla I. *Se escriben los sumandos únos debajo de otros, de modo que las unidades de una misma especie vayan en columnas;*

II. *Se tira una raya debajo del último sumando, y se*

empieza la operación por la primera columna de la derecha, como en los números enteros;

III. Del total de la primera columna se sacan las unidades que contenga de la especie inmediatamente superior, si las hubiere; se escriben debajo de la raya las que sobren, reservando las demás para sumarlas con las de la columna siguiente;

IV. Se continúa del mismo modo hasta la última columna, con la cual se termina la operación.

EJEMPLO

(1	(1	
17 ^d	14 ^h	35 ^m
39	8	50
53	13	23
110 ^d	12 ^h	46 ^m

La suma de los minutos da 108^m, que valen 1 hora, que se lleva á la columna siguiente, y 48^m, que se escriben; la suma de las horas da 36^h, que valen 1 día, que se lleva á la columna siguiente, y 12^h, que se escriben; la suma de los días da 110^d.

SUBSTRACCIÓN

683. Para restar números complejos,

Regla I. Se escribe el substraendo debajo del minuendo, de modo que las unidades de una misma especie vayan en columnas;

II. Debajo del substraendo se tira una raya; se empieza la operación por la derecha, restando cada cantidad del substraendo de su correspondiente del minuendo, y se escribe la diferencia debajo de la raya;

III. Si un término del substraendo fuere mayor que su correspondiente del minuendo, se le añade á éste una unidad de la especie inmediatamente superior, reducida á la inferior; y al restar el término siguiente se quita del minuendo la unidad tomada ya, ó se la añade al substraendo para que haya compensación;

IV. Se continúa del mismo modo la operación, hasta que se hayan restado todos los términos.

EJEMPLO 1º. — De 36 sem. 3 días 12 hors. 43 mints. 15 segs., réstense 9 sem. 3 días 15 hors. 47 mints. 43 segs.

OPERACIÓN

36 sem.	3 días	12 hors.	43 mints.	15 segs
9	3	15	47	43
26	6	20	55	32

Análisis. Empezando por la derecha, noto desde luego que 43 segs. no pueden restarse de 15, por lo cual tomo 1 mi-

nuto que vale 60 segs., que, añadidos á los 15, dan 75; $75 - 43 = 32$. Pasando á los minutos, veo que tampoco pueden restarse 47 de 43, ó mejor dicho 48, por el 1 que se tomó, añado pues 1 hora, que vale 60 mints., los cuales sumados con los 43 dan $60 + 43 = 103$; $103 - 48 = 55$, y así sucesivamente.

R. La diferencia de las dos cantidades es de 26 sem. 6 días 20 hors. 55 mints. 32 segs.

EJEMPLO 2º. — Jorge Wáshington nació el 11 de Febrero de 1732, y murió el 14 de Diciembre de 1799; ¿cuánto tiempo había vivido?

OPERACIÓN

año	mes	día
1799	12	14
1732	2	11
67	10	3

Análisis. Se colocan los números de la fecha posterior encima de los de la más remota, escribiendo primero el número del año, luego el número de orden del mes, y después el del día, y se ejecuta la operación según las reglas dadas.

R. Wáshington vivió 67 años 10 ms. 3 días.

MULTIPLICACIÓN

684. Para multiplicar números complejos,

Regla I. *Se escribe el multiplicador debajo del término menor del multiplicando;*

II. *Se multiplica cada especie de unidad por el multiplicador, como en los números enteros;*

III. *Se sacan del producto encontrado de cada unidad, las unidades que contenga de la especie inmediatamente superior, partiendo dicho producto por el número de unidades que contiene ésta de la especie inferior;*

IV. *Si queda residuo, se lo escribe debajo de la raya, en su columna respectiva, y se lleva el cuociente para sumarlo con el producto de la especie siguiente;*

V. *Se procede del mismo modo hasta terminar la operación.*

EJEMPLO. — Multiplíquense 4 años 10 meses 18 días por 7.

Empezando la operación por la derecha, digo: 7 veces 18 días dan 126^d , que valen $4^m 6^d$; escribo 6 y llevo 4; 7 veces 10^m dan 70^m , más 4 que llevo, son 74 ó 6 años 2 meses; escribo 2 y llevo 6; por fin, 7 veces 4^a dan 28^a y 6 que llevo son 34 años, que completan el producto.

OPERACIÓN

4 ^a	10 ^m	18 ^d
		7
34 ^a	2 ^m	6 ^d

685. Nota. Cuando se trata de multiplicar entre sí dos números complejos, ordinariamente se reducen ambos á la especie inferior. El multiplicando es entonces un número entero ó decimal; el multiplicador es un número fraccionario, que tiene por denominador el número que indica cuantas unidades de la especie inferior contiene el número superior dado.

EJEMPLO. — Multiplíquense $6^h 25^m 4,65$ segundos por $3^\circ 42'$.

$6^h 25^m 4,65^s$ valen 23 104,65 segundos.

$3^\circ 42'$ valen $3 \times 60' + 42' = \frac{222}{60}$ de grado.

No hay más que multiplicar 23 104,65 segundos por $\frac{222}{60}$, y el producto dará segundos.

DIVISIÓN

686. Para dividir números complejos,

Regla I. Si el divisor es número entero incomplejo, se empieza, como en la división ordinaria, por las unidades de especie superior, partiendo cada unidad por el divisor;

II. Si hay residuo, se lo reduce á la unidad de la especie inmediatamente inferior, y se añaden al producto las de la misma denominación que haya en el dividendo, cuyo total se parte por el divisor;

III. Se continúa la operación del mismo modo hasta la última denominación dada.

EJEMPLO. — Cuál es el cuociente de $309^\circ 27' 52''$ por 25?

309°	$27'$	$52''$	25	
59	$\vdots$	$\vdots$	$12^\circ 22' 42''$	$\frac{22}{25}$ de segundo.
$9 \times 60 = 540$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$567'$	$\vdots$	$\vdots$	
	67	$\vdots$	$\vdots$	
	$17 \times 60 = 1020$	$\vdots$	$\vdots$	
		$1072''$	$\vdots$	
		72	$\vdots$	
		22	$\vdots$	

Dividiendo 309° por 25, resultan 12° en el cuociente y 9 de residuo; como 1 grado vale $60'$, los 9° valdrán $60 \times 9 = 540'$,

más los 27 del dividendo, lo que da 567', que, divididos por 25, dan 22' en el cuociente, y así en adelante. El cuociente pedido es $12^{\circ} 22' 42'' \frac{22}{25}$ de segundo.

687. Nota 1^a. — Por medio de esta operación se pueden reducir á número complejo los quebrados ordinarios como $\frac{47\ 838}{3\ 000}$ de grado, ó $\frac{54\ 784}{185}$ de hora.

EJEMPLO. — Divídanse $12^{\text{d}} 15^{\text{h}} 30^{\text{m}}$ por $5 \frac{8}{9}$.

Para esto basta reducir á quebrado $5 \frac{8}{9}$, lo que da $\frac{53}{9}$, multiplicar en seguida $12^{\text{d}} 15^{\text{h}} 30^{\text{m}}$ por 9 y dividir el producto encontrado por 53.

688. Nota 2^a. — Si el dividendo y el divisor son números complejos, se reduce cada uno á expresión fraccionaria de la unidad principal, se ejecuta la división, y se reduce el cuociente á la unidad de especie superior.

PROBLEMAS SOBRE LOS NÚMEROS DENOMINADOS

583. ¿Cuántos minutos hay en $1^{\text{a}} 7^{\text{m}} 28^{\text{s}} 16^{\text{h}} 37^{\text{m}}$?

584. Redúzcanse los valores siguientes á la especie superior: 1^o 16 452 segundos á *grados*; 2^o 78 692 horas á *años* comunes; 3^o 90 060 segundos de tiempo á *días*.

585. ¿Cuál es el total de las cantidades siguientes: 1^o 12 años 10^{da} 13^h 42^m 27^s; 2^o 16 años. 102^{da} 18^h 24^m 36^s; 3^o 19 años. 8^{da} 21^h 54^m 57^s; 4^o 23 años 13^{da} 19^h 49^m 48^s; 5^o 29 años. 18^{da} 23^h 58^m 56^s?

586. ¿Cuánto tiempo transcurrió entre el descubrimiento de América por Cristóbal Colón, el 12 de 7bre de 1492, y la muerte de este grande hombre, acaecida en Valladolid el 20 de Mayo de 1506?

587. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde el 28 de 10bre de 1856, á las 10 A. M. (antes del medio día), hasta el 16 de Enero de 1888, á las 4 P. M. (después del medio día)?

588. ¿Cuántos días hay desde el 10 de Marzo hasta el 8 de 9bre?

589. ¿Cuántos días hay desde el 15 de Julio hasta el 23 de Enero?

590. Una persona nacida el 29 de Febrero de 1824, murió el 18 de Marzo de 1864; ¿de qué edad murió, y cuántos aniversarios vio del día de su nacimiento?

591. Suponiendo que una persona nació en 29 de Febrero de 1788, ¿cuántos aniversarios de su cumpleaños hubo hasta el 29 de Febrero de 1840?

592. ¿Cuál es el producto de $7^{\text{a}} 264^{\text{d}} 23^{\text{h}} 47^{\text{m}}$ por 8?

593. Un sastre emplea $8^{\text{h}} 46^{\text{m}} 50^{\text{s}}$ en hacer un vestido; ¿cuánto tiempo se tardará en hacer 11 vestidos semejantes?

594. Redúzcanse $6^{\text{d}} 7^{\text{h}} 10^{\text{m}} 45^{\text{s}}$ á decimales de semana.

595. ¿Cuál es el valor de los 0,367 de año, en días, etc.?
596. ¿Qué parte de 1 segundo es $\frac{1}{103\ 608}$ de día?
597. ¿Cuántas horas, minutos y segundos dan los $\frac{9}{78}$ de un día?
598. ¿Cuáles son los $\frac{5}{13}$ de un año?
599. De los $\frac{3}{7}$ de 1 día réstense los $\frac{7}{9}$ de 1 hora.
600. ¿Cuál es la suma de los dos ángulos siguientes : de $27^{\circ} 35' 44''$ y $19^{\circ} 50' 28''$?
601. La suma de dos ángulos es 90° ; uno de ellos vale $18^{\circ} \frac{1}{2}$; ¿cuánto vale el otro?
602. Si 14 ángulos iguales tienen juntos $867^{\circ} 17' 45''$; ¿cuánto vale cada uno?
603. Un viajero camina 6 km. por hora, y otro sólo 5. Si ambos salen juntos de Quito, ¿á qué distancia estará uno de otro después de $2^h 35^m 20^s$ de marcha?
604. Se ha dividido una circunferencia en 17 partes iguales; ¿cuántos segundos tiene cada una de estas partes?
605. El año solar es de $365^d 5^h 48^m 47^s$; una lunación dura $29^d 12^h 44^m 3^s$. ¿Cuántas lunaciones hay en 18 años 11 días?

LECCIÓN III

CORRESPONDENCIA DE LAS MEDIDAS MÉTRICAS CON LAS ANTIGUAS MEDIDAS CASTELLANAS Y VICEVERSA ¹

§ I. Medidas de longitud castellanas.

1 legua = 3 millas.	1 pie = 12 pulgadas.
1 milla = $33 \frac{1}{3}$ cuadras.	1 palmo = 9 pulgadas.
1 cuadra = 100 varas.	1 pulgada = 12 líneas.
1 vara = 3 pies.	1 dedo = 9 líneas.
	1 línea = 12 puntos.

¹ Las antiguas medidas castellanas han sido tomadas de las leyes 1, 2, 3 y 4 del tít. 13, lib. 9.^o de la *Recopilación Castellana*; ó leyes 1, 2, 3, 4 y 5 del tít. 9, lib. 9.^o de la *Novísima Recopilación*.

El sistema métrico decimal ha sido adoptado en el Ecuador desde 10bre de 1856; pero quedó en desuso hasta que la ley de Instrucción pública de 1862 hizo obligatoria su enseñanza en las escuelas primarias. Por decreto de 30 de 8bre. de 1873 se fijó la equivalencia de la vara de Burgos á 0 met. 838 milím., y en esta correspondencia se funda el cálculo de estas tablas.

MÉTRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	MÉTRICAS
1 kilómetro.	11 cuadras 968.	1 legua españ.	5 klm. 572 m.
1 hectómetro.	1 cuadra 1968.	1 id. métrica.	5 klm.
1 decámetro.	11 vars. 968.	1 cuadra.	83 met. 60.
1 metro.	3 p. 7 pul. 0,758 lín.	1 vara.	0,836 m.
1 decímetro.	4 pul. 3,7236 lín.	1 pie.	0,2786 m.
1 centímetro.	5,1679 lín.	1 pulgada.	0,0232 m.
1 milímetro.	0,5167 lín.	1 línea.	0,001935 m.

Además se han fijado según la dicha ley de Aduanas, las siguientes correspondencias con las medidas extranjeras :

100 <i>anas</i> de Berlín	valen	66 met. 69
100 — Brabante	—	69 — 56
100 — Bremen	—	57 — 84
100 — Francfort	—	54 — 73
100 — Hamburgo	—	57 — 30
100 — Leipzig	—	56 — 53
100 — Viena	—	77 — 92
100 <i>yardas</i>	—	91 43

§ II. Medidas agrarias y de superficie.

1 <i>leg. cuad.</i>	= 10 000 cuad ² .	1 <i>caballería</i>	= 16 cuadras ² .
1 <i>yugada</i>	= 50 fanegadas	1 <i>cuadra</i> ²	= 4 solares.
1 <i>fanegada</i>	= 576 estad ² .	1 <i>solar</i>	= 2 500 varas ² .
1 <i>celemin</i>	= 48 —	1 <i>vara</i> ²	= 9 pies ² .
1 <i>cuartillo</i>	= 12 —	1 <i>pie</i> ²	= 144 pulgs ² .
1 <i>aranzada</i>	= 400 —	1 <i>pulgada</i> ²	= 144 líneas ² .
1 <i>estadal cuad.</i>	= 16 varas ² .	1 <i>línea</i> ²	= 144 puntos ² .

MÉTRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	MÉTRICAS
1 miriám ² .	3,22 leguas ² .	1 legua ² .	3105,5 hectár.
1 kilóm ² .	155,289 fans.	1 yugada.	32,298 hectár.
1 hm ² . ó hectár.	894,469 estad.	1 caballería.	11,1798 hectár.
1 Dm ² . ó área.	143,0828 var ² .	1 cuadra ² .	69,8737 áreas.
1 met ² . ó centiá.	1,4308 vara ² .	1 fanegada.	64,596 áreas.
1 decím ² .	0,1288 pie ² .	1 aranzada.	44,729 áreas.
1 centím ² .	0,1854.. pulg ² .	1 solar.	17,4684 áreas.
1 milím ² .	0,2670.. lín ² .	1 vara ² .	0,6988 m ² .

Nota. — La *caballería*, *cuadra cuadrada* y *solar* son usados en el Ecuador y en otras repúblicas.

§ III. Medidas de volumen.

1 vara cúbica = 27 pies cúbicos.

1 pie cúbico = 1728 pulgadas cúbicas.

1 pulgada cúbica = 1728 líneas cúbicas.

MÉTRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	MÉTRICAS
1 metro ³ .	1,711516 var ³ .	1 vara ³ .	0,584277 m ³ .
1 decim ³ .	79,8527 pul ³ .	1 pie ³ .	0,021624 m ³ .
1 centim ³ .	0,079852 pul ³ .	1 pulgada ³ .	0,012519 dm ³ .
1 milim ³ .	0,137985 lin ³ .		

§ IV. Medidas de capacidad (áridos).

1 cahiz = 12 fanegas. || 1 celemin = 4 cuartillos.

1 fanega = 4 cuartillas. || 1 cuartillo = 4 ochavos.

1 cuartilla = 3 celemines. || 1 ochavo = 4 ochavillos.

(para líquidos)

1 moyo = 16 cántaras. || 1 azumbre = 4 cuartillos.

1 cántara = 8 azumbres. || 1 cuartillo = 4 copas.

MÉTRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	MÉTRICAS
1 litro.	3,46 ochavos.	1 cahiz.	6,30168 hl.
1 decalítro.	2,285 celemin.	1 fanega.	52,514 lit.
1 hectolítro.	1,9042 faneg.	1 cuartilla.	13,128 lit.
1 kilolítro.	1 cah. 7 fan. 042.	1 celemin.	4,376 lit.
1 decilítro.	0,346 ochavos.	1 cuartillo.	1,156 lit.
1 centilítro.	0,0346 ochavos.	1 ochavo.	0,273 lit.
2,5824 hl.	1 moyo.	1 azumbre.	2,017 lit.
16,140 lit.	1 cántara.	1 cuartillo.	0,504 lit.

§ V. Medidas de peso (ordinarias).

1 tonelada = 20 quintales. || 1 onza = 16 adarmes.

1 quintal = 4 arrobas. || 1 adarme = 3 tomines.

1 arroba = 25 libras. || 1 tomin = 12 granos.

1 libra = 16 onzas.

(para el aceite)

1 arroba = 25 libras.

1 cuartilla = $6\frac{1}{4}$ libras.

1 libra = 4 panillas.

(pesas de las farmacias)

1 <i>libra</i>	= 12 onzas.	1 <i>escrúpulo</i>	= 2 óbolos.
1 <i>onza</i>	= 8 dracmas.	1 <i>óbolo</i>	= 12 granos.
1 <i>dracma</i>	= 3 escrúpulos.		

(para el oro)

1 <i>libra</i>	= 2 marcos.
1 <i>marco</i>	= 8 onzas.
1 <i>onza</i>	= $6\frac{1}{4}$ castell.
1 <i>castellano</i>	= 8 tomines.
1 <i>tomín</i>	= 3 quilates.
1 <i>quilate</i>	= 4 granos.

(para la plata)

1 <i>libra</i>	= 2 marcos.
1 <i>marco</i>	= 8 onzas.
1 <i>onza</i>	= 8 ochavas.
1 <i>ochava</i>	= 2 adarmes.
1 <i>adarme</i>	= 3 tomines.
1 <i>tomín</i>	= 12 granos.

(para las piedras preciosas y las perlas)

1 <i>onza castellana</i>	= 140 quilates.
1 <i>quilate</i>	= 4 granos.

MÉTRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	MÉTRICAS
1 gramo.	20,32 granos.	1 tonelada.	908,0098 kg.
1 decagramo.	0,35241 onz.	1 quintal.	45,40049 kg.
1 hectogramo.	3,5241 onz.	1 arroba.	11,350125 kg.
1 kilogramo.	2,2026 lib.	1 libra.	45,40049 Dg.
1 miriagramo.	22,026 lib.	1 onza.	28,3753 gr.
1 quint. mét.	2,2026 quint.	1 adarme.	1,7734 gr.
1 tonelad. métr.	22,026 quint.	1 grano.	0,0492 gr.
1 decigramo.	2,032 gran.		
1 centigramo.	0,2032 gran.	1 onza.	37,8337 gr.
1 miligramo.	0,02032 gran.	1 dracma.	4,7292 gr.
		1 escrúpulo.	1,5764 gr.
		1 óbolo.	0,7882 gr.
		1 grano.	0,0657 gr.

La susodicha ley fija también las siguientes correspondencias :

Libra inglesa (*avoirdupois*) = 4 gr. 5355.

Quintal inglés = 112 libr. ingl. = 50 kg. 80.

Tonelada ingl. de 20 quint. ingl. = 1 015 kg. 94 = 10 quint. mét. 16.

LIBRO VI

DE LAS RAZONES Y PROPORCIONES

Y REGLAS EN QUE TIENEN APLICACIÓN

LECCIÓN PRIMERA

RAZONES

689. Llámase *razón* ó *relación* el resultado de la comparación de dos cantidades de una misma especie.

690. Dos cantidades pueden compararse entre sí por *diferencia* ó por *cuociente*, de donde resultan dos clases de razones: las *aritméticas* y las *geométricas*.

Así, 15 — 8 es una razón por diferencia, ó *aritmética*; y 5 es la razón por cuociente, ó *geométrica*, de 15 á 3.

Del propio modo, cuando se dice que la relación de dos cantidades es 5, esto significa que la primera contiene 5 veces á la segunda. Si la relación entre dos cantidades es $\frac{7}{8}$, la primera no vale más que 7 veces la octava parte de la segunda.

691. El primer término de una relación se llama *antece-dente*, y el segundo, *consecuente*; así, en $\frac{7}{8}$, el 7 es antecedente y el 8 consecuente.

692. Dos relaciones son *inversas*, cuando los términos de la una son los mismos que los de la otra, pero dispuestos en orden inverso.

Así, $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{4}$ son relaciones inversas, lo mismo que $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$; según esto, el producto de dos relaciones inversas es 1.

693. Teorema. *Una razón aritmética no se altera cuando se aumenta ó disminuye una misma cantidad á sus dos términos.*

Porque esto equivale á añadir ó quitar una misma cantidad á dos números (2, ax. 8). Así :

$$18 - 6 = (18 + 3) - (6 + 3)$$

y
$$18 - 6 = (18 - 2) - (6 - 2)$$

694. Teorema. *Una razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número.*

Sea la razón $\frac{a}{b}$. Se trata de demostrar que :

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

En efecto, hagamos :

$$\frac{a}{b} = c \quad (1)$$

tendremos : $a = bc$.

Multiplicando ambos miembros por m , resulta

$$am = bm \times c$$

Dividiendo por bm ,

$$\frac{am}{bm} = c \quad (2)$$

De las igualdades (1) y (2), sacamos :

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

Porque dos cantidades iguales á otra son iguales entre sí (2, ax. 3). L. Q. Q. D.

Nota. — De idéntico modo se demostraría que pueden dividirse los dos términos de una razón por un mismo número sin que se altere el valor de ella.

LECCIÓN II

PROPORCIONES

§ I. Definiciones.

695. Dase el nombre de **proporción** á la igualdad de dos razones.

Así las razones $10 : 5$ y $12 : 6$, en que cada una es igual á 2, forman una proporción.

696. Según sus razones, las proporciones se dividen en aritméticas y geométricas.

697. **Proporción aritmética** ó **equidiferencia** es la igualdad de dos razones aritméticas.

698. **Proporción geométrica** es la igualdad de dos razones geométricas.

699. Para escribir una proporción aritmética se pone una razón á continuación de la ótra, separadas con dos puntos, ó con el signo $=$, v. g.: $17.9 : 22.14$, ó $17.9 = 22.14$; y se lee: *17 es á 9 como 22 es á 14*.

También puede escribirse: $17 - 9 = 22 - 14$; entonces se lee: *17 menos 9 es igual á 22 menos 14*.

700. Para escribir una proporción geométrica se pone una razón á continuación de la ótra, separadas entre sí con cuatro puntos, ó con el signo $=$; v. g.: $3 : 15 :: 4 : 20$, ó $3 : 15 = 4 : 20$; y se lee: *3 es á 15 como 4 es á 20*; ó en forma de quebrado $\frac{3}{15} = \frac{4}{20}$, en cuyo caso se puede leer: *3 sobre 15 es igual á 4 sobre 20*.

701. Una proporción consta de cuatro términos, que son: 1º el antecedente de la primera razón; 2º su consecuente; 3º el antecedente de la segunda razón, y 4º su consecuente.

702. En las proporciones geométricas puede decirse indiferentemente *antecedentes* ó *numeradores*, *consecuentes* ó *denominadores*.

Nota. — Cuando alguno de los términos es desconocido, se lo reemplaza por lo regular con una x .

703. El 1º y 4º término de una proporción se llaman también **extremos**, y el 2º y 3º se llaman **medios**.

704. Llámase **cuarta proporcional** cualquiera de los cuatro términos de una proporción, cuando todos ellos son diferentes.

En la proporción $\frac{14}{21} = \frac{18}{27}$, cada uno de los cuatro términos es una cuarta proporcional con respecto á los ótros tres.

705. Se llama **media proporcional** cada uno de los medios de una proporción, cuando éstos son iguales. En cuyo caso la proporción se llama *continua*.

En la proporción $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$, 6 es una media proporcional entre 4 y 9.

706. Llámase *tercia proporcional* el primero y cuarto término de una proporción continua.

En la proporción $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$, 9 es una *tercia proporcional* con respecto á los otros tres términos; lo mismo es el 4.

§ II. Principales propiedades de las proporciones aritméticas.

707. **Teorema.** *En toda proporción aritmética, la suma de los extremos es igual á la de los medios.*

Sea la proporción $7:4:5:2$.

Se trata de demostrar que $7+2=5+4$.

En efecto, escribamos la proporción en la forma:

$$7-4=5-2$$

Añadiendo á ambos miembros la suma de los consecuentes resulta:

$$7-4+4+2=5-2+4+2 \quad (2, \text{ ax. } 9).$$

Destruyendo en el 1º miembro $-4+4$, y en el 2º $-2+2$, queda:

$$7+2=5+4 \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

708. **Recíprocamente.** — *Si la suma de dos números iguala á la de otros dos, los cuatro números forman proporción; los dos términos de una de las sumas son los extremos y los otros dos los medios.*

Sea $7+2=5+4$

Se trata de demostrar que $7-4=5-2$

En efecto, ya que se da: $7+2=5+4$

Restando 2 y 4 de ambos miembros, tenemos:

$$7+2-2-4=5+4-2-4 \quad (2, \text{ ax. } 9).$$

Y destruyendo $+2-2$ en el 1º, y $+4-4$ en el 2º, resulta:

$$7-4=5-2 \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

709. **Teorema.** *El 4º término de una proporción aritmética es igual á la suma de los medios menos el otro término.*

Sea la proporción $7:4:5:x$.

Tenemos: $7+x=5+4$ (707)

Restando 7 de ambos miembros, resulta:

$$x=5+4-7 \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

710. Teorema. *La media proporcional aritmética entre dos números es igual á la semisuma de ellos.*

Sea la proporción $7.x : x.5$.

Tenemos : $2x = 7 + 5$ (707)

Dividiendo ambos miembros por 2, resulta :

$$x = \frac{7+5}{2} \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

§ III. Principales propiedades de las proporciones geométricas.

711. Teorema fundamental. *En toda proporción geométrica, el producto de los extremos es igual al de los medios.*

Sea la proporción $8:4::6:3$.

Demostremos que $8 \times 3 = 6 \times 4$. En efecto, escribamos la proporción en la forma : $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$

Reduciendo estos quebrados á un común denominador, resulta :

$$\frac{8 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6 \times 4}{3 \times 4} \quad (402)$$

Multiplicando ambos miembros por el denominador común, tenemos :

$$8 \times 3 = 6 \times 4 \quad (2, \text{ ax. } 9).$$

L. Q. Q. D.

712. Recíprocamente. — *Cuando el producto de dos números es igual al de otros dos, los cuatro números forman proporción; los factores de uno de los productos son los extremos, y los otros dos, los medios.*

Si $8 \times 3 = 6 \times 4$, se trata de demostrar que $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$.

En efecto, dividiendo ambos miembros de la igualdad $8 \times 3 = 6 \times 4$ por 4×3 , resulta :

$$\frac{8 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6 \times 4}{4 \times 3} \quad (2, \text{ ax. } 9).$$

Y dividiendo por 3 y 4 los dos términos respectivos de estos quebrados, tenemos : $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ L. Q. Q. D.

713. Corolario. — *En toda proporción geométrica se pueden alternar, invertir y permutar sus términos sin que*

deje de ser igual el producto de los extremos al de los medios, ya que los productos se componen de unos mismos factores.

714. Alternar es cambiar de lugar los medios; **invertir** es mudar de lugar los términos en cada razón, y **permutar** es mudar de lugar las razones.

715. Se alternan, invierten y permutan los términos de una proporción, para que el término desconocido pase al cuarto lugar, si no lo está.

716. Por medio de la *alteración, inversión y permutación* pueden darse ocho formas diferentes á una proporción, del modo siguiente :

Sea la proporción $(1) \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \text{ ó } \frac{6}{3} = \frac{8}{4} (5)$

Alternando los medios $(2) \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ ó } \frac{4}{3} = \frac{8}{6} (6)$

Invirtiendo los términos $(3) \frac{4}{8} = \frac{3}{6} \text{ ó } \frac{3}{6} = \frac{4}{8} (7)$

Permutando las razones $(4) \frac{3}{4} = \frac{6}{8} \text{ ó } \frac{6}{8} = \frac{3}{4} (8)$

Nota. — Aunque cada una de estas ocho transposiciones forme proporción, no son sin embargo una misma, lo cual puede comprobarse, buscando la razón de cada una de ellas.

717. Teorema. *El 4º término de una proporción geométrica es igual al producto de los medios dividido por el 1º término.*

Sea la proporción : $\frac{8}{4} = \frac{6}{x}$

Tenemos : $8 \times x = 6 \times 4 \quad (711)$

Dividiendo ambos miembros por 8, resulta :

$$x = \frac{6 \times 4}{8} \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

718. Observación. — De idéntico modo se demostraría que si fuese desconocido uno de los medios, se lo encontraría multiplicando los extremos, y dividiendo el producto por el medio conocido.

719. Teorema. *La media proporcional geométrica entre dos números es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos.*

Sea la proporción : $\frac{9}{x} = \frac{x}{4}$

Tenemos : $x^2 = 9 \times 4$ (711)

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, resulta:

$$x = \sqrt{9 \times 4} = 6 \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

720. Teorema. *Pueden multiplicarse un extremo y un medio por un mismo número, sin que deje de ser exacta la proporción.*

Sea la proporción : $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$

Si los dos términos multiplicados por un mismo número pertenecen á una misma razón, ésta no se altera (694), y la proporción no deja de ser exacta (698).

Así pues, tendremos : $\frac{8}{4} = \frac{6 \times 5}{3 \times 5}$

ó también : $\frac{8 \times 5}{4 \times 5} = \frac{6}{3}$.

Demostremos que lo mismo sucede cuando se multiplican un extremo y un medio cualesquiera.

Sea el 1^{er} extremo 8, y el 2^o medio 6 los que han de multiplicarse por 5. De la proporción :

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$$

sacamos : $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ (713 y 716, 2^o).

Multiplicando por 5 los dos términos de la 1^a razón, resulta :

$$\frac{8 \times 5}{6 \times 5} = \frac{4}{3} \quad (694)$$

de donde : $\frac{8 \times 5}{4} = \frac{6 \times 5}{3}$ (713 y 716, 2^o).

L. Q. Q. D.

721. Observación I. — De igual modo se demostraría que *puede dividirse un extremo y un medio por un mismo número sin que deje de ser exacta la proporción.*

Así, tendríamos : $\frac{8:2}{4:2} = \frac{6}{3}$

ó también : $\frac{8:2}{4} = \frac{6:2}{3}$.

722. Observación II. — El principio demostrado en el n° 720 da un modo para hacer desaparecer los denominadores de los quebrados que están en proporción.

Sea la proporción: $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: \frac{4}{8} : \frac{5}{15}$.

Reduciendo á un común denominador los dos términos de la primera razón, y también los de la segunda, tenemos:

$$\frac{3}{6} : \frac{2}{6} :: \frac{60}{120} : \frac{40}{120}$$

Multipliquemos por 6 el 1^{er} extremo y el 1^{er} medio, y por 120 el 2^o medio y el 2^o extremo, y resultará:

$$3 : 2 :: 60 : 40 \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

723. Teorema. *Cuando dos proporciones tienen una razón común, las otras dos razones están en proporción.*

Sean las dos proporciones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
 $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

Sabemos que dos cantidades iguales á otra $\frac{a}{b}$ son iguales entre sí (2, ax. 3). Luego:

$$\frac{c}{d} = \frac{m}{n} \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

724. Teorema. *Cuando dos proporciones tienen unos mismos antecedentes, sus consecuentes están en proporción.*

Sean las dos proporciones:

$$(1) \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3}$$

$$(2) \quad \frac{8}{12} = \frac{6}{9}$$

De la 1^a sacamos:

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad (713 \text{ y } 716, 2^o).$$

De la 2^a, también:

$$\frac{8}{6} = \frac{12}{9} \quad (713 \text{ y } 716, 2^o).$$

Y como estas dos últimas tienen una razón común, resulta:

$$\frac{4}{3} = \frac{12}{9} \quad (723).$$

L. Q. Q. D.

725. Teorema. *Cuando dos proporciones tienen unos mismos consecuentes, sus antecedentes están en proporción.*

Sean las dos proporciones :

$$(1) \quad \frac{a}{b} = \frac{m}{d}$$

$$(2) \quad \frac{c}{b} = \frac{n}{d}$$

De la 1ª sacamos :

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{d} \quad (713 \text{ y } 716, 2^{\circ})$$

De la 2ª, también :

$$\frac{c}{n} = \frac{b}{d} \quad (713 \text{ y } 716, 2^{\circ}).$$

Y como estas dos últimas tienen una razón común, resulta :

$$\frac{a}{m} = \frac{c}{n} \quad (723) \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

726. Teorema. *En toda proporción geométrica, la suma de los dos primeros términos es al 2º, como la suma de los dos últimos es al 4º.*

Sea la proporción : $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$

Añadiendo 1 á cada razón, tenemos :

$$\frac{8}{4} + 1 = \frac{6}{3} + 1$$

Y reduciendo el entero á quebrado :

$$\frac{8+4}{4} = \frac{6+3}{3} \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

727. Teorema. *En toda proporción geométrica, la diferencia de los dos primeros términos es al 2º, como la diferencia de los dos últimos es al 4º.*

Sea la proporción : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

1er caso $a > b$

Restando 1 de ambos miembros, resulta :

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$

Y reduciendo el entero á quebrado :

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

2º caso

$$a < b$$

Restando de cada razón la unidad, tenemos :

$$1 - \frac{a}{b} = 1 - \frac{c}{d}$$

6

$$\frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d}$$

L. Q. Q. D.

728. Teorema. En toda proporción geométrica, la suma de los dos primeros términos es á la de los dos últimos, como el 2º es al 4º.

Sea la proporción : $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$

Tenemos : $\frac{8+4}{4} = \frac{6+3}{3}$ (726)

de donde $\frac{8+4}{6+3} = \frac{4}{3}$ (713 y 716, 2º).

L. Q. Q. D.

729. Teorema. En toda proporción geométrica, la diferencia de los dos primeros términos es á la de los dos últimos, como el 2º es al 4º.

Dada la proporción : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Tenemos : $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (727)

de donde $\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}$ (713 y 716, 2º).

L. Q. Q. D.

730. Teorema. En toda proporción geométrica, la suma de los dos primeros términos es á la diferencia de los mismos, como la suma de los dos últimos es también á la diferencia de ellos.

Dada la proporción : $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$

Sacamos de ella las dos siguientes :

$$\frac{8+4}{6+3} = \frac{4}{3} \quad (728)$$

$$\frac{8-4}{6-3} = \frac{4}{3} \quad (729)$$

Y estas dos últimas dan :

$$\frac{8+4}{6+3} = \frac{8-4}{6-3} \quad (723)$$

y además $\frac{8+4}{8-4} = \frac{6+3}{6-3} \quad (713 \text{ y } 716, 2^{\circ})$

L. Q. Q. D.

731. Teorema. *En toda proporción geométrica, el 1^{er} término es á la suma de los dos primeros, como el 3^o es á la suma de los dos últimos.*

Dada la proporción : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Sacamos de ella : $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (713 \text{ y } 716, 3^{\circ})$

de donde $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \quad (726)$

y en fin : $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \quad (713 \text{ y } 716, 3^{\circ})$

L. Q. Q. D.

732. Teorema. *En toda proporción geométrica, la diferencia de los dos primeros términos es al 1^o, como la de los dos últimos es al 3^o.*

Sea la proporción : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Tenemos : $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (713 \text{ y } 716, 3^{\circ}).$

De esta última, sacamos :

$$\frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c} \quad (727, 1^{\text{er}} \text{ caso})$$

ó tambien : $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \quad (727, 2^{\circ} \text{ caso}).$

L. Q. Q. D.

733. Teorema. *La suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como cada antecedente es á su consecuente.*

Dada la proporción : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Sacamos $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (713 \text{ y } 716, 2^{\circ})$

Y por fin, de esta última :

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \quad (728)$$

L. Q. Q. D.

734. Teorema. *La diferencia de los antecedentes es á la de los consecuentes, como cada antecedente es á su consecuente.*

Dada la proporción : $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$

Sacamos : $\frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad (713 \text{ y } 716, 2^o).$

Y por fin, de esta última :

$$\frac{8-6}{4-3} = \frac{4}{3} \quad (729).$$

L. Q. Q. D.

735. Teorema. *La suma de los antecedentes es á la diferencia de ellos, como la suma de los consecuentes es á su diferencia.*

Dada la proporción : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Sacamos las dos siguientes :

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \quad (733)$$

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d} \quad (734)$$

de donde : $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \quad (723)$

y en fin : $\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \quad (713 \text{ y } 716, 2^o).$

L. Q. Q. D.

736. Teorema. *En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como cada antecedente es á su consecuente.*

Sean las razones : $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \dots\dots$

Las dos primeras nos dan :

$$\frac{8+6}{4+3} = \frac{6}{3} \quad (733).$$

Tenemos por hipótesis :

$$\frac{10}{5} = \frac{6}{3}$$

de donde :
$$\frac{8+6}{4+3} = \frac{10}{5} \quad (723)$$

y en fin :
$$\frac{8+6+10\dots}{4+3+5\dots} = \frac{10}{5} \quad (733)$$

L. Q. Q. D.

737. Teorema. *Las potencias semejantes de cuatro términos que están en proporción, forman una nueva proporción.*

Sea la proporción :
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Tenemos :
$$a \times d = c \times b \quad (711).$$

Elevemos ambos miembros á una potencia cualquiera, n por ejemplo, y tendremos :

$$a^n \times d^n = c^n \times b^n \quad (192)$$

de donde :
$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} \quad (712)$$

L. Q. Q. D.

738. Teorema. *Si se elevan á una misma potencia todos los términos de una serie de razones iguales, las nuevas razones serán también iguales.*

Sean las razones :
$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \dots$$

Las dos primeras razones elevadas al cuadrado, por ejemplo, vienen á ser :

$$\frac{8^2}{4^2} = \frac{6^2}{3^2} \quad (737)$$

La 2ª y la 3ª :
$$\frac{6^2}{3^2} = \frac{10^2}{5^2} \quad (737)$$

de donde :
$$\frac{8^2}{4^2} = \frac{6^2}{3^2} = \frac{10^2}{5^2} \quad (2, \text{ ax. } 3^\circ)$$

L. Q. Q. D.

739. Teorema. *Las raíces semejantes de cuatro términos que están en proporción, forman una nueva proporción.*

Dada la proporción :
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Tenemos :
$$a \times d = c \times b \quad (711).$$

Extrayendo, por ejemplo, la raíz cuadrada de ambos miembros, resulta :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{d} = \sqrt{c} \times \sqrt{b} \quad (539)$$

de donde :
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}} \quad (712)$$

L. Q. Q. D.

740. Teorema. *En una serie de razones iguales, la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los antecedentes es á la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los consecuentes, como cada antecedente es á su consecuente.*

Dadas las razones : $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} \dots\dots$

Tenemos : $\frac{8^2}{4^2} = \frac{6^2}{3^2} = \frac{10^2}{5^2} \dots\dots$ (738)

De estas razones sacamos :

$$\frac{8^2 + 6^2 + 10^2}{4^2 + 3^2 + 5^2} = \frac{8^2}{4^2} = \frac{6^2}{3^2} = \dots \quad (736)$$

Extrayendo la raíz cuadrada, resulta :

$$\frac{\sqrt{8^2 + 6^2 + 10^2 \dots}}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2 \dots}} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \dots \quad (739)$$

L. Q. Q. D.

741. Teorema. *Cuando se multiplican término por término varias proporciones, los productos forman una nueva proporción :*

Dadas las proporciones :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

Sacamos de ambas las igualdades siguientes :

$$(1) \quad a \times d = c \times b \quad (711)$$

$$(2) \quad m \times q = p \times n \quad (711)$$

Multiplicándolas miembro por miembro verticalmente, resulta :

$$(a \times m) (d \times q) = (c \times p) (b \times n)$$

$$\text{de donde :} \quad \frac{a \times m}{b \times n} = \frac{c \times p}{d \times q} \quad (712)$$

L. Q. Q. D.

742. Teorema. *Cuando se dividen término por término dos proporciones, los cuocientes forman una nueva proporción.*

Dadas las proporciones :

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{13}{15} = \frac{26}{30}$$

Sacamos de ambas :

$$8 \times 3 = 6 \times 4 \quad (711)$$

$$13 \times 30 = 26 \times 15 \quad (711)$$

Dividiendo miembro por miembro, resulta :

$$\frac{8 \times 3}{13 \times 30} = \frac{6 \times 4}{26 \times 15}$$

ó también :

$$\frac{8}{13} \times \frac{3}{30} = \frac{6}{26} \times \frac{4}{15}$$

De esta última igualdad se saca :

$$\frac{8}{13} : \frac{4}{15} :: \frac{6}{26} : \frac{3}{30} \quad (712)$$

L. Q. Q. D.

LECCIÓN III

APLICACIONES DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

743. Cuando los cuatro términos de una proporción son números concretos, deben ser de dos en dos de una misma especie, ú homogéneos.

Así, en este ejemplo : 5 caballos consumen 10 cargas de alfalfa, ¿cuántas consumirán 15 caballos?, las cantidades 5 y 15 caballos, 10 cargas y x pueden formar una proporción, porque los objetos que representan son homogéneos de dos en dos. De donde tenemos $5 : 15 = 10 : x$.

744. Las dos cantidades homogéneas conocidas se llaman **principales**.

745. Las dos cantidades homogéneas, de las cuales una sola es conocida, se llaman **relativas**.

Llámanse **primera cantidad principal** aquélla á la que se refiere la relativa conocida, y **segunda cantidad principal**, aquélla á la que se refiere la relativa desconocida.

746. Todas las cuestiones que se refieren á las proporciones pueden ser consideradas como una comparación entre dos *causas* y dos *efectos*; de modo que, en el ejemplo del nº 743, los *caballos* son causas, y las *cargas de alfalfa*, efectos.

747. Pueden considerarse como *causas* las acciones de cualquier especie que sean, el productor, el consumidor, los hombres, los animales, el tiempo, la distancia, el peso, las mercaderías compradas ó vendidas, el dinero puesto á intereses, y en general el principio que produce alguna cosa.

748. Puede considerarse como *efectos* todo lo que se sigue de alguna causa y es producido por ella, como víveres consumidos, moneda pagada, etc.

749. Las causas y efectos son de dos especies: *simples* y *compuestos*.

750. Causa ó efecto *simple* es el que contiene un solo elemento, como mercaderías compradas ó vendidas, y dinero pagado ó recibido por ellas.

751. Causa ó efecto *compuesto* es el producto de dos ó más elementos, como los obreros que trabajan, tomados con relación al tiempo, y el resultado de su trabajo, con respecto á las dimensiones de longitud, latitud, etc.

752. Una causa y su efecto están en razón directa, ó son directamente proporcionales, cuando al duplicarse, triplicarse, etc. la una, también se duplica ó triplica el otro; ó si, reduciéndose la una á la mitad, tercera parte, etc. también el otro se reduce á la mitad ó tercera parte.

Así, cuando se vende una mercancía según el peso, el valor que se recibe es proporcional al peso, ya que si se duplica éste, también se duplicará aquél.

Las ciencias y la industria nos suministran una multitud de causas y efectos directamente proporcionales, como el trabajo ejecutado con relación al número de obreros que se han empleado en él.

753. De todo lo dicho sacamos las proporciones siguientes:

La 1^a causa : 2^a = el 1^{er} efecto : 2^o

El 1^{er} efecto : 2^o = la 1^a causa : 2^a

ó también La 1^a cant. princ. : 2^a = la 1^a relat. : 2^a

754. Una causa y un efecto están en razón inversa ó son inversamente proporcionales, cuando al duplicarse, tripli-

carse, etc., la una, el otro se reduce á la mitad ó tercera parte, etc., ó si, reduciéndose la una á la mitad, tercera parte, etc., el otro se duplica ó triplica, etc.

Así, el número de obreros es inversamente proporcional al tiempo que ponen en ejecutar un trabajo dado, puesto que si sólo se toma la mitad de los obreros, pondrán un tiempo doble.

755. De lo expuesto se deducen las proporciones siguientes :

La 2^a causa : 1^a = el 1^{er} efecto : 2^o

El 2^o efecto : 1^o = la 1^a causa : 2^a

ó también La 2^a cant. princ. : 1^a = la 1^a relat. : 2^a

756. Sucede á menudo que una cantidad es directamente proporcional á una ó más, é inversamente proporcional á otras; así, el tiempo que se emplea en concluir una obra es *directamente proporcional* á las dimensiones ó extensión de ella, é *inversamente proporcional* al número de obreros que la ejecutan.

757. En las aplicaciones aritméticas de las proporciones, las operaciones se ejecutan no con las cantidades concretas, sino con los números abstractos que sirven de medida á estas cantidades; sin lo cual muchas operaciones no tendrían sentido.

758. Las propiedades de las proporciones geométricas tienen aplicación directa en los problemas de *reglas de tres* y en las cuestiones de *tanto por ciento*, de *intereses*, de *aseguraciones*, de *descuento*, de *repartimientos*, de *compañía*, de *mezcla*, de *aligación*, de *cambio*, de *falsa posición*, como también en la *regla conjunta*.

LECCIÓN IV

REGLA DE TRES

759. Llámense *reglas de tres* ciertos problemas en que dados los valores correspondientes de varias cantidades directa ó inversamente proporcionales, se trata de buscar una de estas cantidades, cuando se conocen todas las demás.

760. También puede definirse la regla de tres : Una opo

ración por medio de la cual se busca el cuarto término de una proporción, de la cual se conocen los otros tres.

761. Las reglas de tres pueden resolverse por medio de las propiedades de las proporciones, ó por el método de reducción á la unidad.

762. Las reglas de tres son de dos clases : *simples* y *compuestas*.

§ I. Regla de tres simple.

763. La regla de tres es **simple** cuando cada término de la proporción está representado por un solo número, ó sólo se consideran dos especies de cantidades.

764. La regla de tres simple puede ser *directa* ó *inversa*.

765. La regla de tres simple es **directa** cuando las causas y efectos son *directamente* proporcionales (**752**), é **inversa** cuando las causas y efectos son *inversamente* proporcionales (**754**).

766. Para resolver las reglas de tres simple por medio de las proporciones,

Regla I. *Se escriben los términos en proporción, de modo que las causas formen la una razón y los efectos la otra (según las fórmulas del núm. 753 cuando la regla es directa, y según las del núm. 755 cuando es inversa), y se pone x en lugar del término desconocido;*

II. *Si el término buscado es un extremo, se divide el producto de los medios por el extremo conocido, y si el término buscado es un medio, se divide el producto de los extremos por el medio conocido.*

767. Nota. — 1ª Si los términos de una de las razones fueren de diferentes denominaciones, deben reducirse á una misma unidad de valor.

2ª Si la primera cantidad relativa fuere un número complejo, debe reducirse á la especie menor, ó á quebrado común ó decimal.

3ª Si hubiere factores comunes al dividendo y divisor se los simplifica.

4ª Si uno de los términos de la proporción contiene números mixtos, deben reducirse á quebrado impropio, ó á decimal.

5ª En la regla de tres simple inversa, la 1ª causa y el 1º efecto han de ser siempre medios ó extremos.

EJEMPLO DE REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

Si 15 obreros han tejido 45 metros de tela, durante cierto tiempo, ¿cuántos metros tejerán 63 obreros en el mismo tiempo?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

15 obreros..... 45 mets.
63 x

PROPORCIÓN

obrs. obrs. mets. mets.
15 : 63 = 45 : x
1ª causa 2ª causa 1º efecto 2º efecto
1ª princ. 2ª princ. 1ª relat. 2ª relat.

OPERACIÓN

$$x = \frac{63 \times 45}{15} = 189 \text{ mets.}$$

Análisis. Veamos primero si esta regla es directa ó inversa : en el 1º caso, 15 obreros tejen 45 mets.; en el 2º hay *más* obreros, luego tejerán *más* mets.; por consiguiente, la relación es *directa*, porque aumentándose los obreros, deben aumentarse los mets. que tejen; y como el término que se busca en este ejemplo es un *efecto*, tenemos la proporción $15 : 63 = 45 : x$. Partiendo 63×45 , producto de los medios, por 15, extremo conocido, resulta que $x = 189$ mets.

MÉTODO DE LA UNIDAD

Si 15 obreros tejen 45 metros

1 ——— tejerá 15 veces menos, ó $\frac{45}{15}$

y 63 ——— 63 ——— *más* ó $\frac{45 \times 63}{15} = 189 \text{ mets}$

EJEMPLO DE REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

Si 12 obreros se tardan 30 días en acabar una obra, ¿cuántos obreros serán menester para acabar la misma obra en 24 días?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

12 obreros..... 30 días.
 x 24

PROPORCIÓN

	días		días		obrs.		obrs.
	24	:	30	=	12	:	x
ó	2 ^o efecto	1 ^{er}	efecto	1 ^a	causa	2 ^a	causa
	2 ^a princ.	1 ^a	princ.	1 ^a	relat.	2 ^a	relat.

OPERACIÓN

$$x = \frac{30 \times 12}{24} = 15 \text{ obreros.}$$

Análisis. En el 1^{er} caso tenemos que en 30 días acaban la obra los 12 obreros; como en el 2^o hay *menos* días, claro es que se necesitarán más obreros para acabar la misma obra; luego la relación es inversa, porque *disminuyéndose* el tiempo se *aumentan* los obreros; y como el término que se busca es una causa, tenemos la proporción $24 : 30 = 12 : x$. Partiendo 30×12 , producto de los medios por 24, extremo conocido, resulta que $x = 15$ obreros.

MÉTODO DE LA UNIDAD

Si para acabar la obra en 30 días se necesitan 12 obreros
 para acabar la en 1 — necesitarán 30 veces más, ó $\frac{12 \times 30}{24}$
 y ————— — 24 ————— 24 — menos, ó $\frac{12 \times 30}{24}$
 = 15 obreros

768. Para resolver cualquier regla de tres por el método de la unidad (nos 459, 460, 461) se observarán las siguientes:

Regla I. En dos líneas horizontales, se escriben las cantidades en el mismo orden en que van enunciadas en el problema, de modo que las de una misma especie formen columna;

II. Se leen, en seguida, las cantidades de la línea en que no hay desconocida, de modo que se termine por la correspondiente á x ;

III. Se escribe encima de una raya horizontal esta última cantidad, considerándola como numerador;

IV. Se comparan con la unidad todas las demás cantidades dadas, y se escriben encima de la raya, como factores del numerador, las cantidades que dan más que la unidad;

V. Se escriben debajo de la raya, como factores del denominador, las cantidades que, comparadas con la unidad, dan menos.

° EJEMPLO. — 1º Un correo camina 30 kilómetros en 5 horas, ¿cuántos caminará en 18 horas?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

30 kilm..... 5 horas.
 x 18

MÉTODO DE LA UNIDAD

Si en 5 horas camina 30 kilómetros

— 1 ——— caminará 5 veces menos, ó $\frac{30}{5}$

y en 18 ——— 18 ——— más, ó $\frac{30 \times 18}{5} = 108 \text{ km.}$

EJEMPLO. — 2º Si 25 hombres pueden concluir una obra en 27 días $\frac{1}{2}$, ¿cuántos días pondrán 5 hombres para ejecutar la misma obra?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

25 hombres..... 27 $\frac{1}{2}$ días
 5 x

MÉTODO DE LA UNIDAD

Si 25 h. se tardan 27 $\frac{1}{2}$ d. ó $\frac{55}{2}$ d. en concluir la obra,

1 solo se tardará 25 veces más, ó $\frac{55 \times 25}{2}$

y 5 ——— 5 ——— menos, ó $\frac{55 \times 25}{2 \times 5} = 137 \text{ d. } \frac{1}{2}$

§ II. Regla de tres compuesta.

769. La regla de tres es **compuesta** cuando la proporción consta de términos representados por varios números, esto es, cuando se consideran más de dos especies de cantidades.

770. El término desconocido de una proporción compuesta puede ser una causa ó un efecto simple (750), ó un elemento solo de una causa ó efecto compuesto (751).

771. En una regla de tres compuesta hay tantas cantidades principales de dos en dos, cuantos son los números conocidos de una misma especie.

772. Para resolver las reglas de tres compuesta por las proporciones, se observarán las siguientes :

Regla I. Después de escribir en dos líneas horizontales los datos del problema, se averigua si las dos primeras cantidades principales son directa ó inversamente proporcionales con la relativa conocida, y se forma una proporción, cuyo resultado se representa por x' (x prima);

II. Las dos cantidades principales siguientes se comparan del mismo modo con el resultado anterior, y se forma otra proporción, cuyo valor se representa por x'' (x segunda);

III. Se procede del mismo modo con todas las demás cantidades principales, poniendo sucesivamente x''' , x'''' , etc., hasta concluir el problema;

IV. En las varias proporciones simples que resultan, se simplifican las x del un extremo con las correspondientes del medio respectivo, y luego se forma una proporción, compuesta del producto de los términos que quedan.

EJEMPLO DE REGLA DE TRES COMPUESTA, RESUELTA POR LAS PROPORCIONES

Para hacer 180 metros de una obra, 15 obreros han trabajado 12 días á razón de 10 horas por día; ¿cuántos días de 8 horas necesitarán 32 obreros de igual fuerza, para hacer 600 metros de la misma obra?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

15 obreros,	10 horas,	180 met.,	12 días
32	8	600	x

Consideremos primero solamente los obreros, y llamemos x' los días que necesitarán para hacer el trabajo. La proporción evidentemente será inversa, y tendremos :

$$(1) \quad 32 : 15 = 12 : x' \quad \text{ó} \quad \frac{32}{15} = \frac{12}{x'}$$

Conocido el número de días x' , consideremos ahora el número de horas que trabajan diariamente, y es claro que se modificará el número de días. Llamemos x'' este nuevo número de días. Las razones son también inversas, y tendremos :

$$(2) \quad 8 : 10 = x' : x'' \quad \text{ó} \quad \frac{8}{10} = \frac{x'}{x''}$$

Por fin, si comparamos los días con la cantidad de trabajo, y si los llamamos x , como la proporción en este caso es directa, tendremos:

$$(3) \quad 180 : 600 = x'' : x \quad \text{ó} \quad \frac{180}{600} = \frac{x''}{x}$$

Multiplicando miembro por miembro las tres igualdades, resulta:

$$32 \times 8 \times 180 : 15 \times 10 \times 600 = 12 \times x' \times x'' : x' \times x'' \times x$$

$$\text{ó también:} \quad \frac{32 \times 8 \times 180}{15 \times 10 \times 600} = \frac{12 \times x' \times x''}{x' \times x'' \times x}$$

$$\text{de donde} \quad x = \frac{15 \times 10 \times 600 \times 12}{32 \times 8 \times 180} = 23 \text{ d. } \frac{7}{16}.$$

Nota. — Si multiplicamos entre sí el número de obreros, de días y de horas, el producto puede considerarse como un número de horas de trabajo. Por tanto, la cantidad de metros de obra será directamente proporcional al número de horas de trabajo, y tendremos:

$$\frac{180}{600} = \frac{15 \times 12 \times 10}{32 \times x \times 8}$$

$$\text{de donde:} \quad 180 \times 32 \times x \times 8 = 600 \times 15 \times 12 \times 10 \quad (711)$$

$$\text{y en fin:} \quad x = \frac{600 \times 15 \times 12 \times 10}{180 \times 32 \times 8} = 23 \text{ d. } \frac{7}{16}$$

773. Las reglas de tres compuesta se resuelven por el método de la unidad del mismo modo que las reglas de tres simple (768).

EJEMPLO DE REGLA DE TRES COMPUESTA, RESUELTA POR EL MÉTODO DE LA UNIDAD

Setenta y cinco obreros que trabajan 5 horas $\frac{3}{4}$ por día, han empleado 6 días $\frac{1}{2}$ en cavar una zanja; ¿cuántos días pondrán 150 obreros, que trabajan 8 horas $\frac{2}{3}$ por día, para cavar la misma zanja?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

$$\begin{array}{l} 75 \text{ obreros} \dots\dots 5 \frac{3}{4} \text{ ó } \frac{23}{4} \text{ de hora} \dots\dots 6 \frac{1}{2} \text{ ó } \frac{13}{2} \text{ días} \\ 150 \dots\dots\dots 8 \frac{2}{3} \text{ ó } \frac{26}{3} \dots\dots\dots x \end{array}$$

Análisis

Si 75 obr. trabajando $\frac{23}{4}$ de h. se tardan $\frac{13}{2}$ días

$$1 \text{ ————— } \frac{23}{4} \text{ — se tardará 75 veces más, ó } \frac{13 \times 75}{2}$$

$$1 \text{ ————— } \frac{1}{4} \text{ ————— } 23 \text{ ————— } \text{ó } \frac{13 \times 75 \times 23}{2}$$

$$1 \text{ ————— } \frac{4}{4} \text{ ó 1 h. — } 4 \text{ — menos, ó } \frac{13 \times 75 \times 23}{2 \times 4}$$

$$150 \text{ ————— } \frac{4}{4} \text{ ó } \frac{3}{3} \text{ — } 150 \text{ ————— } \text{ó } \frac{13 \times 75 \times 23}{2 \times 4 \times 150}$$

$$150 \text{ ————— } \frac{1}{3} \text{ ————— } 3 \text{ — más, ó } \frac{13 \times 75 \times 23 \times 3}{2 \times 4 \times 150}$$

$$150 \text{ ————— } \frac{26}{3} \text{ ————— } 26 \text{ — menos, ó } \frac{13 \times 75 \times 23 \times 3}{2 \times 4 \times 150 \times 26} =$$

$$\frac{69}{32} = 2 \text{ días } + \frac{5}{32}$$

PROBLEMAS SOBRE LA REGLA DE TRES

(Cada problema debe resolverse por las proporciones y por el método de la unidad.)

+ 606. Seis obreros ganan \$ 7,68; ¿cuánto ganarán: 1º 10 obreros, 2º 36 obreros?

607. Por $17 \frac{2}{3}$ días de trabajo, he pagado á mi dependiente \$ 25,44; ¿cuánto le pagaré: 1º por 1 día; 2º por $45 \frac{1}{2}$ días; 3º por $89 \frac{1}{3}$ días?

+ 608. Si 60 met. de tela importan lo mismo que 15 de paño, ¿cuántos met. de aquella valdrán lo mismo que 75 de éste?

+ 609. Durante 20 días de trabajo Héctor ha ganado \$ 144; ¿cuántos habría ganado si hubiera trabajado 6 días más?

+ 610. Suponiendo que 5 duraznos cuestan lo mismo que 7 manzanas, ¿cuántas frutas de éstas costarán lo mismo que: 1º 35 duraznos; 2º 280 duraznos?

+ 611. Si 3 hombres pueden concluir un trabajo en 51 días, ¿cuántos deberán añadirse á éstos para concluirlo: 1º en 17 días; 2º en 9 días?

612. Hablando hecho bancarrota, Néstor conviene con sus acreedores en pagarles \$ 0,64 por cada sucre; ¿cuánto recibirán todos ellos sobre una deuda de \$ 2 563,50?

3904 + 613. Dos piezas de paño de igual calidad cuestan la una \$ 335 y la otra \$ 390; pregúntase la longitud de cada una, sabiendo que la 2ª tiene 11 metros más que la 1ª.

— 614. Si la luna recorre $13^\circ 10' 35''$ por día, ¿en cuánto tiempo hace su revolución?

— 615. He comprado 4 950 cuadernos con la condición de recibir 6 más en cada ciento; ¿cuántos debe darme el vendedor?

— 616. Al revender ciertas mercaderías en \$ 5 600, pierdo \$ 4,50 en cada \$ 100; ¿en cuánto las había comprado?

617. Si una docena de plumas de acero importa $6\frac{1}{4}$ centavos, ¿cuánto costarán: 1º $10\frac{3}{4}$ gruesas; 2º $16\frac{1}{6}$ gruesas; 3º $25\frac{2}{3}$ gruesas?

618. ¿Cuántos met. de paño debe vender un comerciante para realizar una ganancia de \$ 850, si gana \$ 50 por cada 100 met.?

— 619. Dos números son entre sí como $5 : 7\frac{1}{2}$, y el menor es 164,50; ¿cuál es el mayor?

620. Dos piezas de paño tienen, la una 41 met. y la otra 36; la primera cuesta \$ 45 más que la segunda; dígame el precio de cada una.

621. Se trata de mandar hacer un capote para cada uno de los soldados de un batallón de 1 000 hombres; en cada capote entran $3\frac{3}{4}$ met. de un paño de $1\frac{7}{8}$ met. de ancho; el forro mide $1\frac{1}{4}$ met. de ancho; ¿cuántos met. de este último serán menester para forrar todos los capotes?

622. Para atraer la bendición de Dios sobre mis negocios, me propongo dar \$ 5 á los pobres siempre que gane \$ 150; ¿cuánto habré ganado al ascender mi limosna á \$ 100?

623. Heliodoro deshierba un campo en 5 días, y Mauricio en 6 días; ¿en cuánto tiempo lo desherbarán si trabajan juntos?

624. Indalecio compra 4 piezas de terciopelo en \$ 738; ¿cuántos met. miden juntas, si 11 met. importan \$ 82?

625. Para empapelar una sala, han sido menester 20 rollos de papel de 0^m 60 de ancho; ¿cuántos rollos habrían sido necesarios, á tener cada uno 0^m 75 de ancho?

626. Al respirar un hombre vicia por día 7 met. cúb. y medio de aire, ¿qué cantidad de aire vicia en 15 horas?

627. Un hombre de 1^m 70 de estatura da 0^m 60 de sombra; ¿cuál es la altura de un campanario que en el mismo momento da 24^m 60 de sombra?

628. En una plaza hay 1 500 hombres provistos de víveres para 6 meses; ¿cuántos habrá que despedir, para que los víveres duren dos meses más, dando á cada hombre la misma ración?

629. ¿Cuántos hombres son menester para concluir una obra en 9 días, si 36 hombres pueden concluirla en 20?

630. Se han pagado \$ 36 por el transporte de 450 kilogr. á 450 kilóm., ¿á qué distancia se harán transportar 2 250 kilogr. por la misma suma?

631. Veinticuatro hombres han puesto 15 días para concluir 1 575 met. de una obra; ¿cuántos días hubieran puesto á no ser más que 16 los trabajadores?

632. En 6 días, 16 obreros han construido una pared de 18 met. de largo, 6 de alto y 95 cent. de espesor; ¿cuánto se hubieran tardado, siendo sólo 12 los obreros?

633. Mauricio ha tejido $86\frac{1}{2}$ de tela en 10 días $\frac{1}{4}$; ¿cuánto tiempo pondrá para tejer 50 met. de la misma tela?

634. Nicéforo se tarda 9 días $\frac{2}{3}$ para tejer $69\frac{11}{15}$ de tela; ¿cuánto se tardará para tejer $52\frac{1}{5}$ de esta tela?

635. Un tejedor ha labrado $41\frac{5}{24}$ de tela en 5 días $\frac{3}{4}$; ¿cuál es la longitud de la pieza, si necesita el tejedor 9 días $\frac{1}{4}$ para la tejedura de toda ella?

636. La destreza de dos obreros está en razón de 7 á 12. ¿Cuántos metros de una obra puede hacer el 2º mientras el 1º hace 175?

637. Una suma se compone de dos partes, que son entre sí como 6 es á 30; si la menor es 1836, ¿cuál es la mayor?

638. La suma de dos números es 490; su relación es $\frac{3}{7}$; ¿cuáles son estos números?

639. Dos números están en la relación de 2 á 5; si se añade 175 á uno de ellos, y 115 al otro, ambos se hacen iguales; ¿cuáles son estos números?

640. Dos números son entre sí como 4 y 9, su diferencia es 1205; ¿cuáles son estos números?

641. Se hacen disolver 250 gramos de azúcar en 5 litros de agua; ¿cuántos litros de agua deben añadirse á esta mezcla para que un litro de la nueva mezcla no contenga más que 8 gramos de azúcar?

642. Con \$ 28 800 pueden mantenerse 500 hombres durante 6 meses, dándoles á cada uno 32 cent. diarios; ¿á cuánto debe reducirse la ración para que los fondos duren 2 meses más?

643. Quince albañiles trabajaron juntos en la construcción de un puente, durante 12 días, é hicieron los $\frac{3}{4}$ de él, después de esto se retiraron 7 de la obra; ¿en cuánto tiempo la concluyeron los restantes?

644. Para tejer 46 $\frac{1}{4}$ met. de liencillo, han sido menester 11 obreros que trabajaron 10 $\frac{2}{3}$ horas por día; ¿cuántos obreros que trabajen 8 $\frac{4}{5}$ horas por día, serán necesarios para tejer 41 $\frac{5}{8}$ met. del mismo liencillo?

645. Una plaza fuerte tiene 13 500 hombres de guarnición, vituallados para 8 meses; el comandante recibe orden de despedir tal número de hombres que los víveres puedan durar 4 meses más, dándoles la misma ración; ¿cuántos hombres deberá despedir el comandante?

646. Para confeccionar 12 vestidos completos se han empleado 140 met. de una tela de $\frac{9}{10}$ de met. de ancho; ¿cuántos met. habrían sido menester si la tela no hubiera tenido más que $\frac{4}{5}$ de met. de ancho?

647. Un agrimensor que ha trabajado durante 20 días, 8 horas diarias, ha recibido \$ 120; ¿cuántas horas habrá empleado diariamente, en otro trabajo de la misma especie, que ha durado 30 días, y por el cual ha recibido \$ 225?

648. Andando 14 horas por día, un viajero camina 1 500 kilóm en 20 días; ¿cuántos kilóm. caminará el viajero en 14 días, andando con la misma velocidad, sólo 12 horas por día?

649. Para cavar un pozo se han empleado 10 hombres que han trabajado durante 84 días y 13 horas por día; ¿cuántos días serían menester á 15 hombres para el mismo trabajo, si se ocupan 12 horas diarias?

650. Cuatro caballos, la fuerza de cada uno de los cuales está representada por 150 kilogr., tiran de un coche que pesa 1 640 kilogr.; ¿cuántos caballos serían menester para tirar del mismo coche, si su fuerza estuviera representada por 100 kilogr.?

651. Una pared de 60 met. de largo, 6 de alto y 75 centimet. de espesor, ha sido construida en 12 días por 9 hombres que trabajan 12 horas por día; preguntase qué altura tendrá otra pared que debe ser construida en 18 días por 16 hombres que trabajan 13 horas por día, si ha de tener 65 met. de largo y 1 met. de espesor.

652. Se sabe que en 12 días 11 obreros, que trabajan 10 horas $\frac{1}{2}$ por día, han hecho 152^m 46; como aun quedaban 80 met. 85 centimet., 4 obreros los han concluido en 15 días, trabajando 12 horas $\frac{1}{4}$ por día; ¿cuáles obreros han sido más diestros?

653. Dos artesanos que trabajan juntos han ganado \$ 352; el 1º, que ha trabajado durante 30 días y 12 horas por día, ha recibido \$ 132; ¿cuántos días de 9 horas $\frac{1}{2}$ de trabajo ha debido emplear el 2º para ganar lo demás?

654. Octavio tiene que desherbar dos terrenos, cuya resistencia es entre sí como 11 es á 15. Pregúntase cuántos metros del 2º desherbará en 495 horas, sabiendo que ha desherbado 510 met. del 1º en 18 días de 11 horas de trabajo cada uno.

655. Si se conviene en que la gran muralla del Imperio Chino haya tenido 2 600 kilóm. de longitud, 6^m 50 de latitud y 6 met. de altura, ¿qué espesor tendría un muro que se pudiera construir con estos materiales, al rededor de la tierra, de 2^m 50 de altura?

LECCIÓN V

TANTO POR CIENTO

774. Llámase **tanto por ciento** la cantidad que proporcionalmente se paga ó cobra por cada *cient* partes de una cosa.

Así, al decir 6 por ciento, se entiende 6 centavos por cada 100 cents., \$ 6 por cada \$ 100, 6 francos por cada 100 francos, 6 lbs. por cada 100 lbs., etc. Por consiguiente,

6 por ciento equivale á 6 *centésimos* $= 0,06 = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$.

7 por ciento equivale á 7 *centésimos* $= 0,07 = \frac{7}{100}$.

Nota. — Úsase generalmente del signo % para indicar las palabras *por ciento*; así, 5 % significa 5 por ciento. El *tanto por mil* se indica así : ‰.

775. Ya que el tanto por ciento representa un número cualquiera de centésimos, se lo expresa ordinariamente por medio de un *quebrado decimal*; aunque también puede expresarse por un quebrado ordinario.

776. Las operaciones del tanto por ciento encierran cinco partes distintas, á saber: el *tanto* propiamente tal, la *cantidad centesimal*, la *base*, el *monto* y la *diferencia*.

777. Llámase **tanto** propiamente tal, ó *tasa*, el guarismo que indica cuántos centésimos deben tomarse de un número.

778. Por *cantidad centesimal* se entiende la parte que se toma de un número, según lo indica el tanto %.

779. Llámase **base** el número del cual se toma la parte indicada por el tanto.

780. Dase el nombre de **monto** al total que resulta de la suma de la *base* y de la *cantidad centesimal*.

781. Llámase **diferencia** lo que queda restando de la *base* la *cantidad centesimal*.

782. **Caso I.** Para encontrar la cantidad centesimal cuando se conoce la base y el tanto,

Regla. *Multiplicar la base por el tanto expresado en decimales, y el producto será la cantidad centesimal.*

EJEMPLO. — ¿Cuál es el 6 % de 450?

OPERACIÓN

$$\begin{array}{r} \text{Base} \quad 450 \\ \text{Tanto} \quad 0,06 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Cant. centes.} \quad 27,00 = R.$$

ó también

$$450 \times \frac{6}{100} = 27$$

ó $\frac{6}{100}$; y como la base es 450, la cantidad centesimal será 45 veces mayor, ó $\frac{6 \times 450}{100} = 27$.

783. **Nota.** — La cantidad centesimal es siempre un **producto** cuyos factores son la base y el tanto.

EJERCICIOS SOBRE EL CASO I

656. ¿Cuál es el 5 por ciento de 3 500?

657. Búsquese : 1º el 4 por ciento de 1 550; 2º el 8 por ciento de \$ 630,25; 3º el 7 por ciento de 580 kilómet.; 4º el 9 por ciento de \$ 75,37 $\frac{1}{2}$.

658. ¿Cuál es : 1º el 12 $\frac{1}{2}$ por ciento de 1 260 lits.; 2º el 32 por ciento de \$ 760,60; 3º el 20 p. c. de 90 estéreos?

659. Búsquese : 1º el $\frac{1}{2}$ por ciento de \$ 850; 2º los $\frac{3}{8}$ por ciento de 320 gramos; 3º el $9 \frac{4}{5}$ por ciento de 550 met.; 4º el 15 por ciento de $\frac{7}{9}$.

660. Calcúlese : 1º el 25 por ciento de 12 horas 30 min.; 2º el $\frac{1}{4}$ por ciento de \$ 80; 3º el $2 \frac{1}{2}$ por ciento de $8 \frac{2}{4}$; 4º el $3 \frac{2}{3}$ por ciento de 20 toneladas.

784. **Caso II.** Para encontrar el tanto cuando se conoce la cantidad centesimal y la base,

Regla. *Dividir la cantidad centesimal por la base, y el cociente será el tanto por ciento.*

EJEMPLO. — De S 360 que tenía Fulgencio, ha perdido S 18; ¿qué tanto por ciento de su dinero representa esta pérdida?

OPERACIÓN

$$18 : 360 = 0,05 = \text{R. } 5\%$$

ó también

$$18 \times \frac{100}{360} = \text{R. } 5\%$$

Análisis. Puesto que la cantidad centesimal es siempre el *producto* de la base y del tanto (783), divido la cantidad centesimal dada 18, por la base 360, y encuentro el tanto pedido. *De otro modo:* Si sobre S 360 pierde Fulgencio 18, sobre 1 perderá

una suma 360 veces menor, ó $\frac{18}{360}$; y sobre S 100 perderá

una suma 100 veces mayor, ó $\frac{18 \times 100}{360} = \text{R. } 5\%$.

EJERCICIOS SOBRE EL CASO II

661. ¿A qué tanto por ciento deben colocarse: 1º S 20 para tener una utilidad de S 2; 2º S 5 para tener S 0,25; 3º S 144 para tener S 21,60; 4º S 4 para tener S 0,30?

662. ¿Qué tanto por ciento: 1º de S 578 da S 26,01; 2º de S 250 da S 80; 3º de $\frac{2}{7}$ da $\frac{3}{50}$?

663. ¿Qué tanto por ciento de S 300 da el 25 % de S 72?

785. Caso III. Para encontrar la base cuando se conoce la cantidad centesimal y el tanto,

Regla. Dividir la cantidad centesimal por el tanto expresado en decimales, y el cuociente será la base.

EJEMPLO. — He perdido S 18, que son el 25 % del dinero que tenía yo; ¿cuál era el valor de éste antes de perder nada?

OPERACIÓN

$$18 : 0,25 = \text{R. } S 72$$

ó también

$$18 \times \frac{100}{25} = \text{R. } S 72$$

Análisis. Puesto que la cantidad centesimal es siempre el *producto* de la base y del tanto (783), divido la cantidad centesimal dada 18, por el tanto 0,25, y encuentro la base perdida.

De otro modo: Si el 25 %, de mi dinero = S 18, el 1 % será

25 veces menor, ó $\frac{18}{25}$, y el 100 % ó todo mi dinero será
 100 veces mayor, esto es, $\frac{18 \times 100}{25} = \text{R. S } 72.$

EJERCICIOS SOBRE EL CASO III

664. ¿De qué cantidad es : 1° el 10 por ciento el número 35; 2° el 7 por ciento el núm. 84; 3° el 15 por ciento el número 3,60; 4° son 4 $\frac{1}{3}$ por ciento S 55,50?

665. ¿De qué suma son : 1° S 66 el 5 $\frac{1}{2}$ por ciento; 2° los $\frac{5}{8}$ de gramo el 30 por ciento?

666. ¿De cuánto son : 1° el 12 $\frac{1}{2}$ por ciento S 2,81 $\frac{1}{4}$; 2° el 6 $\frac{1}{4}$ por ciento 3 metros; 3° el 2 $\frac{3}{4}$ por ciento 16 $\frac{1}{2}$?

667. ¿Cuál es la base cuando el tanto por ciento es 2 $\frac{1}{2}$ y la cantidad centesimal S 37,50?

786. **Caso IV.** Para encontrar la base cuando se conoce el monto y el tanto,

Regla. Dividir el monto por la suma de 1 más el tanto expresado en decimales, y el cuociente será la base pedida.

EJEMPLO. — ¿Cuál es el número que aumentado de su 6 % da por total 477?

OPERACIÓN

$$1 + 0,06 = 1,06$$

$$477 : 1,06 = \text{R. } 450$$

ó también

$$477 \times \frac{100}{106} = \text{R. } 450$$

ó también

$$1 + \frac{3}{50} = \frac{53}{50}$$

$$477 : \frac{53}{50} = \text{R. } 450$$

Análisis. Si se añade á un número su 6 %, el monto será 1,06, ó 1 vez y 6 centésimos del mismo. Por esto, divido el *monto* dado 477 por 1,06 y resulta 450, la base pedida.

De otro modo: Añadiendo 6 á la base 100, tenemos el monto 106; luego, si el monto 106 proviene de la base 100, 1 de monto provendrá de una base 106 veces menor, ó $\frac{100}{106}$ y los 477 de monto provendrán de una base 477 veces mayor, esto es, de $\frac{100 \times 477}{106} = \text{R. } 450.$

787. **Nota.** — El monto es siempre un *producto*, cuyos factores son 1° la base, y 2° la unidad más el tanto expresado en decimales.

EJERCICIOS SOBRE EL CASO IV

668. ¿Cuál es el número que aumentado de su 5 p. c. da 378?

669. Evaristo tiene \$ 407,55, esto es un $4\frac{1}{2}$ p. c. más que Leovigildo preguntase qué suma posee este último.

670. He vendido un caballo en \$ 300, ganando así el 25 p. c. de lo que me había costado; ¿en cuánto lo compré?

671. ¿Cuál es el número que aumentado de $\frac{5}{8}$ p. c., da \$ 52,32 $\frac{1}{2}$?

672. Habiéndose aumentado mi capital de un $15\frac{1}{2}$ p. c., me encuentro con la suma de \$ 5 682,60; ¿cuál fue mi capital primitivo?

788. Caso V. Para encontrar la base cuando se conoce la diferencia y el tanto,

Regla. Dividir la diferencia por 1 menos el tanto expresado en decimales, y el cuociente será la base.

EJEMPLO. — ¿Cuál es el número que, disminuido del 6 %, da 423?

OPERACIÓN

$$1 - 0,06 = 0,94$$

$$423 : 0,94 = R. 450$$

ó también

$$1 - \frac{3}{50} = \frac{47}{50}$$

$$423 : \frac{47}{50} = R. 450$$

ó también

$$423 \times \frac{100}{94} = R. 450$$

Análisis. Si se disminuye un número cualquiera del 6 %, se tendrá por diferencia 0,94 de este número. Divido pues la diferencia dada, 423 por 0,94, y encuentro la base 450.

De otro modo: Si de 100 se disminuye 6, queda 94; luego, la diferencia 94 proviene de 100, 1 de diferencia provendrá de un número 94 veces menor, ó $\frac{100}{94}$, y 423 provendrán de un número 423 veces

mayor, esto es, de $\frac{100 \times 423}{94} = 450$.

EJERCICIOS SOBRE EL CASO V

673. ¿Cuál es el número que disminuido del 5 por ciento da 429,40?

674. Siendo la diferencia \$ 9,48 $\frac{1}{2}$ y el tanto $12\frac{1}{2}$ por ciento, ¿cuál es la base?

675. Después de haber tomado el 12 % de una parva de trigo, quedan 44 hectol.; ¿cuántos había en toda la parva?

676. Habiendo cundido una epidemia sobre un rebaño de ovejas, ha perecido el 12 por ciento de él, y han quedado 1 100; ¿de cuántas ovejas constaba el rebaño?

677. Un ejército, diezmado dos veces en una batalla, queda reducido á 19 440 hombres; ¿cuántos había antes del combate?

LECCIÓN VI

REGLA DE INTERÉS

§ I. Definiciones.

789. Llámase *interés* lo que se paga ó cobra por el uso de una cantidad prestada, ó por las deudas no pagadas en sus respectivos vencimientos.

790. Dase el nombre de *rédito* á la renta, utilidad ó beneficio que rinde algún capital.

791. *Capital* es la suma de dinero que se presta; también se llama *principal*.

792. *Tanto por ciento* es el interés que se paga por cada \$ 100 ó 100 frs., etc., que se han recibido en préstamo, durante la unidad de tiempo, que por lo regular es un año.

793. El tiempo, en la regla de interés, designa el número de años ó de meses que queda impuesto un capital.

794. En las reglas de interés, los meses se consideran según el número de días que tienen, y los años de 360.

795. El interés es de dos clases : *simple* y *compuesto*.

796. *Interés simple* es la ganancia producida por el capital liquido solamente, en todo el tiempo del préstamo; quedando por consiguiente el mismo capital durante dicho tiempo.

Nota. — Hablaremos más adelante del interés compuesto.

797. Llámase *interés legal* el mayor tanto por ciento autorizado por la ley.

798. *Usura* es un interés excesivo y mayor que el que autoriza la ley.

799. *Regla de interés* es una operación por medio de la cual se determina la ganancia que produce un capital, con arreglo al tanto $\%$.

800. En las operaciones de regla de interés se puede tratar de buscar uno de los cuatro términos siguientes, á saber :

1º el interés; 2º el capital; 3º el tanto ‰; 4º el tiempo, de lo cual resultan cuatro casos principales.

El interés se representa por **I**; el capital, por **C**; el tanto, por **T**; y el tiempo, por **t**.

801. El interés corresponde á la cantidad centesimal (778), y el capital, á la base (779).

§ II. Casos principales.

802. **Caso primero.** Para encontrar el interés cuando se conoce el capital, el tanto y el tiempo,

Regla I. Si se busca el interés durante **un año**, se multiplica el capital por el tanto, y se divide el producto por 100. Si es durante **varios años**, se multiplica este último resultado por el número dado de años;

II. Si se busca el interés durante **varios meses**, se multiplica el capital por el número de meses y por el tanto, y se divide el producto por 1200;

III. Si se busca el interés durante **varios días**, se multiplica el capital por el número de días y por el tanto, y se divide el producto por 36000.

EJEMPLO. — ¿Qué interés producirá un capital de \$ 12000 colocados al 5 ‰ durante 4 años?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

Capital.	Tiempo.	Tanto é interés.
\$ 100.....	1 año.....	\$ 5
12000.....	4.....	x

Análisis.

Si \$ 100 de capit. en 1 año prod. \$ 5 de int.

$$\begin{array}{rcl}
 1 & \text{—} & 1 \text{ producirá } 100 \text{ veces menos, } \text{ó} \frac{5}{100} \\
 12000 & \text{—} & 1 \text{ — } 12000 \text{ — más, } \text{ó} \frac{5 \times 12000}{100} \\
 \text{y } 12000 & \text{—} & 4 \text{ — } 4 \text{ — } \text{ó} \frac{5 \times 12000 \times 4}{100} = \\
 & & = \$ 2400
 \end{array}$$

Simplificando el análisis, por el cálculo mental, diremos
 En 1 año el interés es de \$ 5, en 4 años será de $5 \times 4 = 20$
 Los \$ 20 son interés de 1 centena; el de \$ 12000 ó 120 cent
 será $20 \times 120 = \$ 2400$.

Nota. — Como acaba de verse, los problemas de interés no son otra cosa que reglas de tres compuesta, y se resuelven según las reglas dadas en el núm. 768, cuidando, para mayor facilidad, de que la cantidad correspondiente á x ocupe el último lugar á la derecha.

803. Para resolver cualquiera de los cuatro casos de la regla de interés por medio de las proporciones, se admite que los capitales son directamente proporcionales á los intereses, y resulta, por tanto, la fórmula siguiente:

$$100 : T \times t = c : i$$

que se lee: *Ciento es al tanto multiplicado por el tiempo como el capital es al interés.*

EJEMPLO. — Poniendo en proporción el ejemplo anterior, en que se busca el **interés**, tenemos para el 1^{er} caso:

$$100 : 5 \times 4 = S\ 12000 : x$$

de donde
$$x = \frac{5 \times 4 \times 12000}{100} = R.\ S\ 2400$$

Si buscamos el **capital**, tendremos para el 2^o caso:

$$100 : 5 \times 4 = x : S\ 2400$$

de donde
$$x = \frac{100 \times 2400}{5 \times 4} = R.\ S\ 12000$$

Si buscamos el **tanto**, tendremos para el 3^{er} caso:

$$100 : x \times 4 = S\ 12000 : S\ 2400$$

de donde
$$x = \frac{100 \times 2400}{4 \times 12000} = R.\ 5\ \%$$

Si buscamos el **tiempo**, tendremos para el 4^o caso:

$$100 : 5 \times x = S\ 12000 : S\ 2400$$

de donde
$$x = \frac{100 \times 2400}{5 \times 12000} = R.\ 4\ \text{años.}$$

804. Caso segundo. Para encontrar el capital cuando se conoce el interés, el tanto y el tiempo,

Regla. Multiplicar el interés por 100, y dividir el producto por el tanto multiplicado por el tiempo.

Ó también: Dividir el interés dado por el interés de $S\ 1$ en el tiempo y al tanto dados.

EJEMPLO. — ¿Cuál es el capital que impuesto al 6 % ha producido $S\ 1593,40$ en 4 años 3 meses 12 días?

SOLUCIÓN.— 4 años 3 meses = $(12 \times 4 = 48) + 3 = 51$ meses,
y 51 meses 12 días = $(30 \times 51 = 1530) + 12 = 1542$ días.

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

Capital. tiempo. tanto é interés.

S 100..... 360 días..... S 6
x 1542..... 1593,40

Análisis.

Si S 6 de Int. en 360 d. prov. de un capit. de 100.

$$\begin{aligned}
 1 & \text{ ————— } 360 \text{ — provendrá ————— } 6 \text{ veces menor, } \acute{o} \frac{100}{6} \\
 1 & \text{ ————— } 1 \text{ ————— } 360 \text{ — mayor, } \acute{o} \frac{100 \times 360}{6} \\
 1593,40 & \text{ ————— } 1 \text{ ————— } 1593,40 \text{ ————— } \acute{o} \frac{100 \times 360 \times 1593,40}{6} \\
 1593,40 & \text{ ————— } 1542 \text{ ————— } 1542 \text{ veces menor, } \acute{o} \frac{100 \times 360 \times 1593,40}{6 \times 1542} = \\
 & = S 6 200
 \end{aligned}$$

Ó también :

El interés de S 1 en el tiempo dado es $\frac{6 \times 1542}{100 \times 360} = 0,257$.

Luego $1593,40 : 0,257 = R. S 6 200$

PROPORCIONES

$$100 : 6 \times \frac{1542}{360} = x : 1593,40$$

805. **Caso tercero.** Para encontrar el tanto cuando se conoce el capital, el interés y el tiempo,

Regla Multiplicar el interés por 100, y dividir el producto por el capital multiplicado por el tiempo.

Ó también : Dividir el interés dado por el interés del capital al 1 % en el tiempo dado.

EJEMPLO. — ¿A qué tanto deben imponerse S 2580, para que den un interés de S 40 en 124 días?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

S 2580..... 124 días..... S 40
100..... 360..... x

Análisis.

Si S 2580 en 124 d. prod. un int. de 40.

$$1 - 124 - \text{producirá} - 2580 \text{ veces menor, } \dot{o} \frac{40}{2580}$$

$$1 - 1 - \text{ } 124 - \text{ } \dot{o} \frac{40}{2580 \times 124}$$

$$100 - 1 - \text{ } 100 \text{ veces mayor, } \dot{o} \frac{40 \times 100}{2580 \times 124}$$

$$y \quad 100 - 360 - \text{ } 360 - \text{ } \dot{o} \frac{40 \times 100 \times 360}{2580 \times 124} =$$

$$= 4,50 \dot{o} \text{ al } 4 \frac{1}{2} \%$$

Ó también :

El interés de S 2580 al 1 %

$$\text{en } 124 \text{ días} = \frac{1 \times 2580 \times 124}{100 \times 360} = \text{R. S } 8,88 \frac{2}{3}$$

$$\text{Luego, } 40 : 8,88 \frac{2}{3} = \text{R. S } 4,50 \%$$

PROPORCIONES

$$100 : x \times \frac{124}{360} = 2580 : 40$$

806. Caso cuarto. Para encontrar el tiempo cuando se conoce el capital, el interés y el tanto,

Regla. Multiplicar el interés por 100, y dividir el producto por el capital multiplicado por el tanto.

Ó también : Dividir el interés dado por el que produce en un año el capital que se expresa; el cuociente será el tiempo pedido.

EJEMPLO. — ¿ Durante cuánto tiempo deben imponerse á intereses S 4950 al 6 %, para que produzcan S 782 ?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

$$\begin{array}{lll} \text{S } 100 \dots\dots\dots & \text{S } 6 \dots\dots\dots & 1 \text{ año} \\ 4950 \dots\dots\dots & 782 \dots\dots\dots & x \end{array}$$

Análisis.

Si \$100 para prod. 6 de int. se tardan 1 año

1 ——— 6 — se tardará 100 veces más, ó 1×100

1 ——— 1 ——— 6 — menos, ó $\frac{1 \times 100}{6}$

4950 ——— 1 ——— 4950 ——— ó $\frac{1 \times 100}{6 \times 4950}$

y 4950 ——— 782 ——— 782 ——— más, ó $\frac{1 \times 100 \times 782}{6 \times 4950} =$
 $= 2 \text{ a. } 7 \text{ m. } 18 \text{ d.}$

Ó también :

El int. de \$ 4950 en 1 año al 6 % $= \frac{6 \times 4950}{100} = \$ 297.$

Luego, $782 : 297 = 2 \text{ a. } 7 \text{ m. } 18 \text{ d.}$

PROPORCIONES

$$100 : 6 \times x = 4950 : 782$$

307. A más de los cuatro casos principales que ocurren en la regla de interés simple, podemos considerar otros tres particulares, derivados de aquéllos, y que llamaremos *casos quinto, sexto y séptimo*.

§ III. Casos particulares.

308. El quinto caso de la regla de interés consiste en buscar el capital líquido ó sólo el interés, cuando se conocen estos dos términos juntos, ó el *monto* (nº 780) y todos los demás términos.

309. **Caso quinto.** Para encontrar el capital líquido cuando se conoce el capital junto con los intereses, ó el monto, el tanto y el tiempo,

Regla I. Dividir el monto indicado por el monto de \$ 1 en el tiempo y al tanto dados, y el cuociente será el capital pedido.

Ó también : Multiplicar el monto por 100, y dividir el producto por 100 más el tanto multiplicado por el tiempo;

II. Para el interés solo, se resta del monto el capital líquido encontrado.

EJEMPLO. — ¿Cuál es el capital que, impuesto en 9 años al 8 %, da un monto de \$ 860?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

Monto.	Capit. liquid.
$S\ 100 + 72$	$S\ 100$
860	x

Análisis. Para tener un número de la misma especie que $S\ 860$, que representa el monto, busquemos los intereses de $S\ 100$ en 9 años al 8 %; así :

$$\frac{8 \times 9 \times 100}{100} = S\ 72; \text{ el monto será : } 100 + 72 = 172.$$

Si $S\ 172$ de monto prov. de un capit. líq. de 100,

$$1 \text{ ——— provendrá ——— } 172 \text{ veces menor, } \acute{o} \frac{100}{172}$$

$$\text{y } 860 \text{ ————— } 860 \text{ ——— mayor, } \acute{o} \frac{100 \times 860}{172} = \\ = S\ 500$$

Simplificando el análisis, por el cálculo mental, diremos : El interés de $S\ 100$ en 1 año es de 8, en 9 años será de 72; el monto 172 es de una centena, y el capital será de tantas centenas cuantas veces esté contenido 172 en 860, esto es, $860 : 172 = 5$ centenas, ó $S\ 500$.

Ó también :

El monto de $S\ 1$ en 9 años

$$\text{al } 8 \% = \frac{8 \times 9}{100} = \frac{72}{100} = 0,72; S\ 1 + 0,72 = S\ 1,72$$

$$\text{Luego,} \quad S\ 860 : 1,72 = S\ 500$$

PROPORCIONES

$$100 + (8 \times 9) : 860 = 100 : x$$

810. El sexto caso de la regla de interés se reduce á buscar el capital que, dividido en varias partes, cada una de las cuales ha sido colocada á distinto tanto %, produce un interés conocido.

811. Caso sexto. Para encontrar dicho capital se observarán las reglas siguientes :

Regla I. Suponer un capital exactamente divisible en las partes que indica el problema;

II. Dividir el capital supuesto en las partes indicadas,

y calcular el interés que produce cada una de ellas, según el tanto correspondiente;

III. Sumar los intereses parciales que resulten;

IV. Multiplicar el capital supuesto por el interés conocido, y dividir el producto por la suma de los intereses parciales; el cuociente será el capital pedido.

EJEMPLO. — Los $\frac{3}{5}$ de un capital han sido impuestos al 4 %, y los $\frac{2}{5}$ al 5 %; si el interés anual es de \$ 144,10, ¿cuál es dicho capital?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

$$\begin{array}{r} \$ 100 \dots\dots\dots \$ 4,40 \\ x \dots\dots\dots 144,10 \end{array}$$

Análisis. Supongamos que el capital es 500 ó 5 centenas, entonces los $\frac{3}{5}$ serán 3 centenas, y los $\frac{2}{5}$, 2 centenas.

1 cent. en 1 año da \$ 4, las 3 cent. darán \$ 12

1 ————— 5, las 2 ————— 10

Suma \$ $\frac{22}{1}$ int. parciales.

Si \$ 22 de int. prov. de un capit. de 500,

1 — provendrá — 22 veces menor, ó $\frac{500}{22}$

y 144,40 ————— 144,40 — mayor, ó $\frac{500 \times 144,40}{22} =$
= \$ 3275

PROPORCIONES

$$4,40 : 144,10 = 100 : x$$

812. En el séptimo caso de la regla de interés se busca qué partes de un capital conocido se han colocado á dos distintos tantos %, siendo dado el interés de dicho capital.

813. Caso séptimo. Para esto se observarán las siguientes :

Regla I. Buscar el interés de todo el capital á cualquiera de los dos tantos señalados, y ver la diferencia que hay entre el interés encontrado y el que se da en el problema;

II. Partir la diferencia de los intereses por la diferencia de los tantos, y multiplicar el cuociente por 100;

III. El resultado será la parte del capital colocada al tanto que no se tomó al principio; y restando este capital parcial del total, se encontrará la parte colocada al otro tanto.

EJEMPLO. — Un capital de \$ 12000 ha sido impuesto, parte al 5 %, y parte al 8 %, y durante 1 año ha producido \$ 840 de interés; ¿qué parte de él ha sido impuesta al 5, y qué parte al 8 %?

OPERACIÓN

Los intereses de \$ 12000 al 8 % = $\frac{12000 \times 8}{100} = \$ 960$.

$$\$ 960 - 840 = 120 \text{ de ganancia.}$$

Capital.	Ganancia.
100	3
x	120
$x = \frac{100 \times 120}{3} = \$ 4000$	

Análisis. Si los \$ 12000 hubiesen sido impuestos sólo al 8 %, los intereses serían de $\frac{12000 \times 8}{100} = \$ 960$; pero este interés excede al verdadero en $960 - 840 = \$ 120$, cantidad que debe disminuirse. Es así que, sobre el interés de \$ 100 impuestos al 5 % la disminución es de $8 - 5 = \$ 3$; luego, para que los intereses sean disminuídos de \$ 3, se deben imponer \$ 100 al menor de los dos tantos; para que los intereses sean disminuídos de \$ 1, habrá que imponer una suma 3 veces menor, ó $\frac{100}{3}$, y para que los intereses sean disminuídos de \$ 120, habrá que colocar una suma 120 veces mayor, ó $\frac{100 \times 120}{3} = \$ 4000$, que es la parte impuesta al 5 %; para saber la que lo fue al 8 %, resto \$ 4000 de 12000, lo que da \$ 8000.

PRUEBA. 1 centena da \$ 8 de int., 80 cent. darán $8 \times 80 = 640$

$$1 \text{ ————— } 5 \text{ ————— } 40 \text{ ————— } 5 \times 40 = 200$$

Suma 840

= al interés indicado en el problema.

814. Fórmulas. Si representamos para el interés simple :

el interés por i
 el capital por c
 el tanto por T
 el tiempo por t

y si en el resultado del problema dado en el 1.^{er} caso

$$x = \frac{12000 \times 5 \times 4}{100}$$

se reemplazan los números con las letras convenidas, resulta la fórmula $i = \frac{c \times T \times t}{100}$ ó $\frac{cTt}{100}$ (1)

De aquí se deduce primero $cTt = 100i$

en seguida $c = \frac{100i}{Tt}$ (2)

$$T = \frac{100i}{ct} \quad (3)$$

$$t = \frac{100i}{cT} \quad (4)$$

En estas cuatro fórmulas están contenidas las cuatro reglas para resolver las reglas de interés simple.

815. Observación. Si hacemos $\frac{T}{100} = r$, la letra r representa el tanto ó rédito de un sucre. Substituyendo este valor en la fórmula (1) tenemos :

$$i = crt; \text{ de donde: } c = \frac{i}{rt}; \quad r = \frac{i}{ct}; \quad t = \frac{i}{cr}$$

Añadiendo c á ambos miembros de la igualdad $i = crt$, resulta : $c + i = c + crt = c(1 + rt)$

Poniendo $M = c + i$, esto es el *capital aumentado de sus intereses*, se podrá escribir

$$M = c(1 + rt) \quad (5)$$

Esta fórmula es muy útil en los problemas de *descuento*.

§ IV. Modo de abreviar el cálculo de los intereses.

816. En el comercio ocurre ordinariamente tener que calcular el interés de una suma durante cierto número de días.

Si n representa un *número* cualquiera de días, tenemos :

$= \frac{n}{360}$; reemplazando este valor en la fórmula (1), re-

sulta : $i = \frac{cTn}{36000}$ ó $i = \frac{crn}{360}$

817. Método de los números y de los divisores fijos. Cuando el tanto es submúltiplo de 360, como 12, 10, 9, 6, etc., se simplifica la fórmula, y viene á ser :

$$i = \frac{nc}{3000} \cdots \frac{nc}{3600} \cdots \frac{nc}{4000} \cdots \frac{nc}{4500} \cdots \frac{nc}{6000} \cdots \frac{nc}{7200} \cdots$$

Los números 3000, 3600, 4000, etc., se llaman *divisores fijos*.

El numerador constante *nc*, producto del número de días por el capital, se llama *número*.

818. Regla. El interés producido por un capital durante cierto número de días se encuentra dividiendo el número por el divisor fijo correspondiente al tanto dado.

819. Para encontrar el divisor fijo, se parte 36000 por el tanto del interés.

Así, al	2 %	el divisor fijo es	18000
—	3	— —	12000
—	4	— —	9000
—	4 $\frac{1}{2}$	— —	8000
—	5	— —	7200
—	6	— —	6000
—	8	— —	4500
—	9	— —	4000
—	10	— —	3600
—	12	— —	3000

EJEMPLOS. — Búsquese el interés de S 5400 durante 150 días al 12 %, 10 %, 6 %, 5 %, 4 $\frac{1}{2}$ %.

$$n \times c = 150 \times 5400 = 810000$$

El interés al 12 % será $\frac{810000}{3000} = S\ 270$

— 10 % — $\frac{810000}{3600} = 225$

— 6 % — $\frac{810000}{6000} = 135$

— 5 % — $\frac{810000}{7200} = 112,50$

— 4 $\frac{1}{2}$ % — $\frac{810000}{8000} = 101,25$

820. Observación I. Cuando el tanto no da divisor fijo exacto, por ejemplo para el $3\frac{1}{2}\%$, se calcula primero al 3% , y se añade al resultado $\frac{1}{6}$ porque $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ de 3; para el $4\frac{3}{4}\%$ se calcula al 5% el interés y de él se resta $\frac{1}{20}$, etc.

821. Observación II. Si se cuenta el año de 365 días, el método de los números para n días es también aplicable á los tantos 10% y 5% que dividen exactamente á 365; pero el divisor fijo es entonces 3650 para el primero, y 7300 para el segundo.

822. Método por las partes alicuotas. 1º *Partes alicuotas del capital que produce S 1 de interés por día.*

Si en la fórmula $i = \frac{nc}{3000} \cdots \frac{nc}{3600} \cdots \frac{nc}{6000} \cdots \frac{nc}{7200}$ (817)

aconteciere que c sea igual al divisor, tendremos que $i = n$; entonces el capital 3000, 3600, 6000, etc., produce S 1 de interés por día. Esta observación da lugar á la siguiente,

823. Regla. Cuando el capital cuyo interés se busca está en relación simple con el divisor fijo, se tomarán de este último las partes alicuotas que sean necesarias para formar el capital cuyo interés se pide, y las correspondientes partes alicuotas de los días, consideradas como suces, darán el interés pedido.

EJEMPLOS. Búsquese el interés :

- 1º De S 1500 al 12% en 118 días;
- 2º De S 2400 al 9% en 150 días;
- 3º De S 4000 al 6% en 95 días.

1º *Intereses de S 1500 al 12% en 118 días .*

S 3000 en 118 días dan S 118

S 1500 dan la $\frac{1}{2}$ de 118, ó S 59

2º Intereses de S 2400 al 9% en 150 días :

S 4000 en 150 días dan S 150

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{S 2000 dan la } \frac{1}{2} \text{ de 150, ó.....} & 75 \\ \text{S 400 dan la } \frac{1}{5} \text{ parte de 75, ó.....} & 15 \end{array} \right\}$$

Luego S 2400 dan..... S 90

3º Intereses de S 4000 al 6% en 95 días:

S 6000 en 95 días dan S 95

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{S 3000 dan la } \frac{1}{2} \text{ de 95, ó.....} & 47,50 \\ \text{S 1000 dan la } \frac{1}{6} \text{ parte 95, ó.....} & 15,83 \end{array} \right\}$$

Luego S 4000 dan..... S 63,33

824. 2º Partes alicuotas del número de días necesarios para producir un interés igual á $\frac{1}{100}$ del capital.

En la fórmula $i = \frac{nc}{3000} \cdots \frac{nc}{3600} \cdots \frac{nc}{6000}$ (817) reemplazando el divisor fijo por sus dos factores 100 y $\frac{360}{T}$, tendremos :

$$i = \frac{nc}{100 \times 30} \cdots \frac{nc}{100 \times 36} \cdots \frac{nc}{100 \times 60} \cdots$$

Si hacemos n igual á $\frac{360}{T}$, tendremos $i = \frac{c}{100}$; entonces según el tanto, un capital cualquiera producirá un interés igual á la 100ª parte de este capital, en 30, 36, 60, 72, 80 días, etc... Esta observación da lugar á la siguiente,

825. Regla. Para encontrar el interés de una suma durante n días al 12%, 10%, 9%, 8%, 6%, etc., se deben tomar las partes alicuotas de 30, 36, 40, 45, 60, etc. días que son necesarias para igualar á n , y las partes alicuotas correspondientes del centésimo del capital darán el interés buscado.

EJEMPLOS. — Búsquese el interés :

1º De \$ 2650 al 12 % en 166 días ;

2º Al 10 % en 188 días ;

3º Al 9 % en 224 días.

1º *Intereses de \$ 2650, al 12 % en 166 días :*

En 30 días, \$ 2650 producen \$ 26,50

{	En 120 días	—	—	4 veces	26,50 ó 106,00	}
	En 40 —	—	—	$\frac{1}{3}$ de	106 ó 35,33	
	En 6 —	—	—	$\frac{1}{5}$ de	26,50 ó 5,30	

Luego, en 166 — \$ 2650 — \$ 146,63

2º *Intereses de \$ 2650, al 10 % en 188 días :*

En 36 días, \$ 2650 producen \$ 26,50

{	En 108 días	—	—	3 veces	26,50 ó 79,50	}
	En 72 —	—	—	2 veces	26,50 ó 53,00	
	En 8 —	—	—	$\frac{1}{9}$ de	53 ó 5,88	

Luego, en 188 — \$ 2650 — \$ 138,38

3º *Intereses de \$ 2650, al 9 % en 224 días :*

En 40 días, \$ 2650 producen \$ 26,50

{	En 200 días	—	—	5 veces	26,50 ó 132,50	}
	En 20 —	—	—	$\frac{1}{2}$ de	26,50 ó 13,25	
	En 4 —	—	—	$\frac{1}{5}$ de	13,25 ó 2,65	

Luego, en 224 — \$ 2650 — \$ 148,40

826. Observación. Cuando el tanto no divide exactamente á 360, los métodos de los números y de las partes alicuotas no son directamente aplicables. Se puede entonces buscar el interés á uno de los tantos submúltiplos de 360, y deducir de él el interés al tanto pedido : se encontrará, por ejemplo, el interés al $5\frac{1}{2}$ %, tomando el interés al 5 % y añadiéndole su décima parte, ó calculándolo al 6 %, y restando de éste su $\frac{1}{12}$.

PROBLEMAS SOBRE LA REGLA DE INTERÉS

678. Búsquense, por el método de la unidad y las proporciones, los intereses de los problemas siguientes :

1)	De \$ 850	en	1 año,			al	6	$\frac{0}{0}$
2)	796,28	»	3 años,			al	6	»
3)	488,30	»	5 años,			al	6	»
4)	580,50	»	1 año	5 meses,		al	6	»
5)	750,75	»	4 años	8 meses,		al	5	»
6)	972,40	»	1 año	7 meses	18 días,	al	7	»
7)	147,90	»		8 meses	4 días,	al	5	»
8)	579,75	»	1 año	3 meses	2 días,	al	5	»
9)	1 265,60	»	5 años	2 meses	9 días,	al	7	»
10)	336	»		5 meses	15 días,	al	5	»
11)	497,36	»	1 año	6 meses	1 día,	al	5	»
12)	7 671,09	»	3 años	8 meses	5 días,	al	8	»
13)	51,17	»		10 meses	29 días,	al	4	»
14)	548,12	»	6 años	1 mes	3 días,	al	7	»
15)	909,50	»	5 años	5 meses	4 días,	al	6	»
16)	955,10	»		7 meses	15 días,	al	9	»
17)	2 000	»	1 año	3 meses	10 días,	al	9	»
18)	640,70	»		8 meses	26 días,	al	$5\frac{1}{2}$	»
19)	960	»	4 años	7 meses	9 días,	al	$8\frac{1}{4}$	»
20)	150,80	»		7 meses	20 días,	al	$7\frac{1}{4}$	»
21)	601,20	»	4 años	2 meses	3 días,	al	$8\frac{1}{2}$	»
22)	1 425,20	»	1 año		16 días,	al	$4\frac{1}{2}$	»
23)	742,30	»	4 años	9 meses	19 días,	al	$6\frac{3}{4}$	»
24)	1 370,40	»	3 años	4 meses	27 días,	al	$7\frac{1}{2}$	»
25)	1 463,60	»	7 años	7 meses	22 días,	al	$6\frac{1}{2}$	»
26)	1 560	desde el 9 de abril, hasta el 10 de 9bre.,					al	$5\frac{1}{2}$
27)	176,89 $\frac{1}{2}$	» 6 de ener. de 1878, hasta el 22 de jul. de 1879,					al	$6\frac{1}{2}$
28)	1 530,50	» 10 de febr. de 1878, » 25 de en. de 1879,					al	$\frac{1}{2}$
29)	1 728,19	» 7 de mayo de 1888, » 17 de jul. de 1889,					al	$\frac{1}{4}$
30)	990,75	» 5 de 8bre. de 1888, » 15 de en. de 1889,					al	$1\frac{3}{4}$
31)	1 030,10	» 8 de 9bre. de 1877, » 3 de marz. de 1879,					al	$8\frac{7}{8}$

679. Búsquese el capital en los ejercicios siguientes :

1)	que al	$4\frac{0}{0}$	produce \$ 2 048 de intereses en 5 años 4 meses 0 días.					
2)	»	$6\frac{1}{2}$	»	97,50	»	0	»	5 » 6 »
3)	»	$5\frac{1}{4}$	»	288	»	3	»	5 » 18 »
4)	»	5	»	150,37 $\frac{1}{2}$	»	4	»	5 » 14 »
5)	»	$5\frac{3}{4}$	»	1 451,52	»	3	»	5 » 17 »

680. Búsquese el tiempo en que han sido colocados los capitales siguientes :

1)	\$ 625	al	6	$\frac{0}{0}$	para dar \$ 262,50 de interés.			
2)	1 779	»	5	»	»	296,50	»	
3)	242	»	$4\frac{3}{4}$	»	»	55	»	
4)	2 178	»	$4\frac{1}{6}$	»	»	632,25	»	
5)	481,25	»	5	»	»	192,50	»	

681. ¿A qué tanto deben colocarse los capitales siguientes para alcanzar el interés señalado?

1)	\$ 978,20,	para alcanzar	\$ 48,91	de interés en	1 año.
2)	1 290	»	»	19,99 $\frac{1}{2}$	» » 124 días.
3)	4 340	»	»	585,90	» » 3 años.
4)	675	»	»	142,31 $\frac{1}{4}$	» » 44 meses.
5)	7 500	»	»	60	» » 48 días.
6)	11 004,75	»	»	550,23 $\frac{3}{4}$	» » 1 año.

682. He comprado una casa en \$ 7 356, y la arriendo en \$ 295; ¿a qué tanto por ciento he impuesto mi dinero?

683. ¿Qué negocio es más ventajoso entre colocar \$ 3 374 al 4 $\frac{1}{2}$ 0/0, ó comprar una quinta que puede ser arrendada en \$ 151,83?

684. ¿Qué suma será menester pagar por la renta de un terreno que da anualmente \$ 40,50 al 6 0/0?

685. Andrés ha impuesto los $\frac{4}{5}$ de su capital al 4 0/0, y el resto al 5 0/0; cada año saca con que pagar los jaezes y el alimento de su caballo, gasto que asciende á \$ 117,60; ¿qué suma ha colocado en todo?

686. ¿Cuál es el interés de \$ 17,18 desde el 29 de Julio de 1888 hasta el 1º de 7bre de 1892 al 6 0/0?

687. Si Crisanto impuso \$ 1 756,75 á intereses, el 29 de Julio de 1886, ¿cuál será el monto debido el 12 de Febrero de 1889, al 7 0/0?

688. Anselmo ha impuesto al 5 0/0 cierto capital desconocido; al cabo de 4 años recibe, tanto por el capital como por los intereses, la suma de \$ 10 305; ¿cuál fue dicho capital?

689. Simón prestó \$ 5 259 el 16 de Agosto de 1880 al 6 0/0; ¿qué suma le fue debida el 2 de Mayo de 1888, no habiendo recibido él ningún interés?

690. Indalecio ha impuesto \$ 13 200 á intereses, parte al 5 $\frac{1}{4}$ 0/0, y parte al 6 $\frac{1}{2}$ 0/0, y ha recibido por los intereses al fin del año, \$ 805,50; ¿qué parte del capital fue impuesta á cada uno de los tantos señalados?

691. ¿Cuál es el monto de \$ 17 041,20 al 4 $\frac{3}{4}$ 0/0 en 1 año 7 meses 28 días?

692. Quintín ha impuesto á réditos una suma de dinero al 4 $\frac{1}{2}$ 0/0, y en 10 años le ha producido \$ 900; ¿cuál fue dicha suma?

693. Un dependiente, habiendo hecho algunos ahorros, quiere gozar de un rédito anual de \$ 140; ¿qué principal necesita para ello, si lo impone al 5 0/0?

694. Pedro pide prestada la suma de \$ 4 690, perteneciente á un menor de 15 años 3 meses 20 días de edad; se sirve de ella hasta que el dueño tenga 21 años; ¿qué cantidad deberá entonces á éste, al 6 0/0 de interés simple?

695. ¿Cuál es el precio de un mueble que, revendido en \$ 360, da un beneficio de un 12,50 0/0 sobre el precio de compra?

696. Una docena de silletas importa \$ 60; ¿en cuánto debe venderse para que el dinero se halle colocado al 5 0/0?

697. Cristóbal vende en \$ 350 un piano que le costó \$ 280; ¿á qué tanto por ciento impone su dinero?

698. Marcos impone la mitad de su capital al 6 0/0, la tercera parte al 5 0/0, y lo demás al 4 0/0, y gana así un rédito anual de \$ 1 600; ¿cuál es este capital?

699. Antonio dice que la ganancia que ha obtenido durante los 3 años de sus negocios equivale al precio de 3 659 met. de paño estimado á \$ 2,08 el met., y desea saber qué beneficio anual le ha resultado, habiendo impuesto su capital al 5 $\frac{0}{100}$?

700. Fulgencio ha hecho una imposición de \$ 35 680 en el Banco, y saca mensualmente un rédito de \$ 223; ¿cuál es el tanto por ciento anual del interés que recibe?

701. Cirilo impone \$ 4 000 á intereses, una parte al 4 $\frac{0}{100}$, y la otra al 3 $\frac{0}{100}$; la 1ª parte le produce \$ 104 de interés anual más que la 2ª; ¿cuáles son estas dos partes?

702. Hilario ha vendido una hacienda en \$ 14 150, con las condiciones siguientes: el comprador le paga \$ 4 000 al contado, \$ 4 375 al cabo de 6 meses, \$ 3 125 al cabo de 10 meses, y el resto al cabo de 1 año 3 meses, con los intereses al 7 $\frac{0}{100}$; ¿á cuánto asciende todo lo que le ha pagado el comprador?

703. Marcelo impone la tercera parte de su capital al 5 $\frac{0}{100}$, y lo demás al 4 $\frac{0}{100}$; saca anualmente \$ 600 más por esta parte que por la primera; ¿cuál es su capital impuesto?

704. Habiendo ahorrado Mario, durante los 6 años de su tráfico, un capital de \$ 2 965,10, desea saber al cabo de cuánto tiempo recibirá \$ 889,53, suponiendo que ha impuesto su capital al 5 $\frac{0}{100}$.

705. ¿Durante cuánto tiempo deberá imponerse un capital al 4 $\frac{1}{2}$ $\frac{0}{100}$, para que los intereses equivalgan á los $\frac{4}{3}$ del capital?

706. Los $\frac{3}{5}$ de un capital han sido impuestos al 4 $\frac{0}{100}$, y lo demás al 5 $\frac{0}{100}$; si el interés anual es de \$ 28,82, ¿cuál es el capital impuesto?

707. Teófilo tiene empleado en sus negocios un capital de \$ 21 840 que le produce un 12 $\frac{1}{2}$ $\frac{0}{100}$ al año; pero por motivos de salud, deja el tráfico y presta su dinero al 7 $\frac{3}{4}$ $\frac{0}{100}$; ¿cuánto pierde á causa de este cambio en 2 años 5 meses 10 días?

708. ¿Cuál es el capital cuyas $\frac{4}{5}$ partes impuestas al 6 $\frac{0}{100}$, y el resto al 7 $\frac{0}{100}$, dan \$ 4 340 de interés?

709. Una suma de dinero impuesta durante 8 meses vale junto con sus intereses \$ 1 277,20; la misma impuesta durante 1 año 3 meses, al mismo tanto $\frac{0}{100}$, vale con los intereses simples \$ 1 309,75; ¿cuál es la suma impuesta, y cuál el tanto del interés?

710. Audifaz impone los $\frac{3}{4}$ de su capital al 4,75 $\frac{0}{100}$, y el resto al 5,50 $\frac{0}{100}$, y saca un interés de \$ 493,75 en 72 días; ¿cuál es el capital impuesto?

711. El capital de \$ 480 000 junto con sus intereses, vale al cabo de 3 años 7 meses \$ 583 200; preguntase á qué tanto fue impuesto este capital.

712. ¿Qué suma debo imponer en este momento para recibir dentro de 3 meses 18 días el valor de \$ 875 de monto, siendo el tanto al 5 $\frac{0}{100}$?

713. Policarpo presta á dos de sus amigos \$ 58 100. El primero le paga los intereses al 6 $\frac{0}{100}$, y el 2º sólo al 4,10 $\frac{0}{100}$; los réditos le proporcionan una renta anual con la que puede comprar 40 qq. de cera á razón de \$ 72 quintal; ¿cuál es la suma prestada á cada uno de los dos amigos?

714. El 1º de Julio, depone un comerciante en el Banco la suma de \$ 2 476. Como quiere el comerciante poder sacar el dinero cuando lo necesite, el banquero le paga sólo el 3 $\frac{0}{100}$ anual. Si el comerciante saca su dinero el 25 de Octubre siguiente, ¿qué suma recibirá?

715. Ambrosio ha comprado una casa en \$ 9 000; paga á buena cuenta

\$ 2 500. Pregúntase qué suma debe imponer al 5 % para pagar los intereses de lo que debe todavía, si el vendedor le cobra sólo el 4 % de interés al año.

716. Una quinta, por la que se paga anualmente un rédito de \$ 49, ha sido comprada en \$ 18 600 : ¿cuánto produce por 100, si se arrienda en \$ 700 por año?

717. Pedro presta á Luis \$ 25; al cabo de 15 días éste entrega á aquél \$ 25,25. ¿A qué tanto ha impuesto Pedro su dinero?

718. Braulio impone un capital de \$ 5 800 durante 4 años; al cabo de este tiempo debe recibir, por el capital y los intereses simples, \$ 6 278 ¿á qué tanto impuso su dinero?

719. Calixto impone cierto capital al 4 % y lo deja durante 3 años; al cabo de este tiempo saca el capital y los intereses, é impone toda esta suma al 5 %, por la cual recibe un rédito anual de \$ 720; ¿cuál era su capital primitivo?

720. Doroteo impone cierta suma al 3,5 %; al cabo de 8 años 3 meses saca esta suma y la impone con los intereses producidos al 5,5 %; ¿qué suma había impuesto al 3,5 %, sabiendo que recibe ahora un rédito anual de \$ 200?

721. Un rentero impone la $\frac{1}{3}$ parte de su capital al 6 %, y lo demás al 4 %; ¿en qué relación se encuentran los intereses anuales producidos por ambas sumas impuestas?

722. Debo los intereses de \$ 1 000 en 6 meses al 5 %; ¿durante cuánto tiempo debo prestar \$ 920 al 4 % para compensar los intereses que debo?

723. Eulogio impone los $\frac{4}{5}$ de sus fondos disponibles al 4 %, y lo demás al 5 %. Cada año debe recibir por los réditos de ambas imposiciones \$ 844; ¿cuál es la suma impuesta á cada uno de estos tantos?

724. La fortuna de Filiberto está dividida en dos partes : la 1ª que es los $\frac{2}{3}$, da \$ 4,75 %; la 2ª da \$ 360. Como los réditos anuales de Filiberto son de \$ 1 200, se pregunta : 1º cuánto p. % da la 2ª parte; 2º cuál es la fortuna de Filiberto.

725. Geroncio impone la $\frac{1}{5}$ parte de su capital al 5 %, los $\frac{2}{3}$ del resto al 4,5 % y lo demás al 5,5 %. Si el rédito anual asciende á \$ 907,72, ¿cuál es el capital total y el valor de cada una de las imposiciones?

726. Los $\frac{3}{7}$ de un capital se han impuesto al 4 %, los $\frac{3}{5}$ del resto al 5 %, y lo demás al 5,5 %. Al cabo de 4 años se sacan, tanto por el capital como por los intereses simples, \$ 1 967,29; ¿cuál es el capital y cuáles las sumas impuestas á cada tanto?

727. La diferencia entre la fortuna de dos individuos es de \$ 1 181,82. El uno ha impuesto su capital al 5,5 %, el otro ha comprado un fondo de comercio que le produce el 12 % neto. Siendo iguales los intereses de ambos, ¿cuál es la fortuna de cada uno?

728. ¿Durante cuánto tiempo se duplicará una suma impuesta al 5 %, al 4 $\frac{1}{2}$ %, al 3 %?

729. Tres personas han impuesto juntas una suma de \$ 2 400; al cabo de 8 años han sacado, por capital é intereses reunidos, la 1ª \$ 1 008, la 2ª \$ 1 152, y la 3ª \$ 1 296; pregúntase á qué tanto impusieron la suma, y cuál es la imposición de cada una.

730. Hilario toma prestados \$ 8 000; al fin de cada año paga $\frac{1}{6}$ del capital y todos los intereses; ¿qué suma tiene que dar al completarse el año, siendo el tanto al 5 %?

RESUÉLVANSE POR LOS MÉTODOS DE ABREVIACIÓN
LOS SEIS PROBLEMAS SIGUIENTES :

731. ¿Cuál es el interés de \$ 4 500 durante 62 días al 5 $\frac{0}{100}$?
732. Se ha impuesto la suma de \$ 3 784,70 el 7 de Octubre; ¿ qué interés se sacará el 4 de Abril siguiente, siendo el tanto al 6 $\frac{0}{100}$? (Los meses con su número propio de días.)
733. Ildefonso toma prestados \$ 2 000 al 5 $\frac{0}{100}$ el 30 de Mayo; ¿ qué suma debe volver, con capital é intereses, el 2 de Agosto siguiente ?
734. Un comerciante pide prestadas al 6 $\frac{0}{100}$ las cantidades siguientes : \$ 2 800 durante 140 días, \$ 1 850 durante 42 días, y \$ 2 000 durante 3 meses; ¿ que intereses debe pagar ?
735. El valor de una venta, después de deducido el precio de la comisión al 2 $\frac{1}{2}$ $\frac{0}{100}$, asciende á \$ 728,30; indíquese la suma pagada por la comisión.
736. ¿ Cuánto se pagará sobre el importe de una factura de \$ 1 830,50 si se hace una rebaja de 4 $\frac{1}{2}$ $\frac{0}{100}$?

LECCIÓN VII

COMISIÓN Y CORRETAJE

827. Llámase **comisión** el tanto $\frac{0}{100}$ que se paga á un agente ó comisionista, por la compra ó venta de mercaderías, el cobro de deudas, ó cualquiera otra operación comercial.

828. **Corretaje** es el tanto $\frac{0}{100}$ que se paga como premio y estipendo al corredor, por su diligencia.

829. **Producto neto** de una venta, etc., es lo que resulta líquido en la suma, precio ó valor, después de deducir la comisión y demás gastos.

830. La comisión y el corretaje se calculan ordinariamente á un tanto $\frac{0}{100}$ del valor de la operación comercial; de lo cual resultan las relaciones siguientes :

1º La comisión equivale á la *cantidad centesimal* (778), ó lo que es lo mismo, al *interés*.

2º La suma que el agente de un mercader recibe en pago de una venta, ó la que el mismo agente emplea en la compra de alguna propiedad, es la *base* según la cual se calcula la comisión (779), ó, como si dijéramos, el *capital*.

3º La suma remitida á un agente, y que comprende el precio de compra y la comisión de éste, equivale al *monto* (780).

4º La suma que el agente debe al consignador por producto liquido de una venta, ó por el cobro de deudas, es la *diferencia* (781).

EJEMPLO I. — *Mi corresponsal en Burdeos ha comprado S 9375 de mercaderías para remitirmelas; deseo saber qué comisión le toca á él, al 3 %.*

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

S 100	S 3 comisión
9375	x

Análisis.

Sobre S 100 de compra pago al corresponsal 3 de comis.

————— 1 ——— le pagaré 100 veces menos, ó $\frac{3}{100}$

y ——— 9375 ——— 9375 ——— más, ó $\frac{3 \times 9375}{100} =$
 $= S 281,25$

EJEMPLO II. — *Augurio remite S 4740 á su agente de Guayaquil para la compra de arroz y de café; después de haber deducido su comisión al 2 %, ¿cuánto gastará el agente para su comitente, y cuánto tomará por su comisión?*

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

S 102	100
4740	x

OPERACIÓN

$$\frac{100 \times 4740}{102} = R. S. 4647,05 \frac{45}{51}$$

$$\text{Comisión} = 4740 - 4647,05 \frac{45}{51} = S 92,94 \frac{6}{51}$$

Análisis. Para tener una cantidad de la misma especie que S 4740, que representa el *monto*, sumo con el capital S 100 la comisión 2, lo que da S 102. Ahora bien, de S 102 de monto se reservan S 100 para la compra de los granos, de S 1 de monto se reservará una cantidad 102 veces menor para la compra, ó $\frac{100}{102}$, y de los S 4740 de monto,

se reservará para la compra una cantidad 4740 veces mayor, esto es, $\frac{100 \times 4740}{102} = S\ 4647,05 \frac{45}{51}$. Para encontrar la comisión, resto $S\ 4647,05 \frac{45}{51}$ de 4740, y resultan $S\ 92,94 \frac{6}{51}$.

EJEMPLO III. — *Un agente ha vendido inmuebles al 4 % de comisión, y ha remitido al dueño, como producto neto, la suma de S 10095,36; ¿en cuánto ha vendido los inmuebles, y qué comisión le corresponde á él?*

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

S 96	S 100
10095,36	x

OPERACIÓN

$$\frac{100 \times 10095,36}{96} = S\ 10516$$

$S\ 10516 - 10095,36 = S\ 420,64$ para la comisión.

Análisis. Como la suma de S 10095,36 representa la *diferencia* (nº 830, 4º), para tener una cantidad de la misma especie resto la comisión S 4 de 100, y tengo S 96. Luego, si S 96 de producto neto vienen de una venta de S 100, S 1 de producto neto vendrá de una suma 96 veces menor, ó $\frac{100}{96}$, y los S 10095,36 de producto neto vendrán de una suma tantas veces mayor, esto es, de $\frac{100 \times 10095,36}{96} = S\ 10516$, precio en que han sido vendidos los inmuebles. Y $S\ 10516 - 10095,36 = S\ 420,64$ dan la comisión que le corresponde al agente.

PROBLEMAS SOBRE LA COMISIÓN Y EL CORRETAJE

737. Búsquese la comisión : 1º sobre S 874 al $2 \frac{1}{4} \%$; 2º sobre S 71,50 al $3 \frac{1}{2} \%$; 3º sobre S 1580,70 al $4 \frac{3}{4} \%$; 4º sobre S 309,10 al $5 \frac{1}{2} \%$; 5º sobre S 4705,20 al 6 p. c.

738. ¿Qué suma pagaré por el corretaje : 1º de S 750 al $\frac{1}{4} \%$; 2º de S 1540,40 al $\frac{1}{2} \%$; 3º de S 3610,80 al $1 \frac{1}{2} \%$; 4º de S 823,50 al $\frac{3}{4} \%$; 5º de S 1560,70 al $1 \frac{1}{4} \%$.

739. ¿Cuál será mi corretaje total por el cambio de las siguientes letras : 1º de S 590 á 26 cents. p. c.; 2º de S 745,30 á 28 cents. p. c.; 3º de 1615,72 á 30 cents. p. c.; 4º de S 4532,09 á 32 cents. p. c.; 5º de S 87,30 á 29 cents. p. c.?

740. Casimiro ha recibido \$ 63 por el cobro de una deuda de \$ 1 575; ¿cuál es el tanto de su comisión?

741. Cecilio ha vendido una consignación de cascarillas en \$ 12 686. Pide \$ 66 por almacenaje, y $6\frac{1}{4}\%$ de comisión; ¿cuál fue el producto neto de la venta?

742. Un arquitecto pide á Romualdo $\frac{3}{8}\%$ por planos y diseños, y $1\frac{1}{2}\%$ p. c. por la dirección de los trabajos de la casa que acaba de hacer edificar, y que le cuesta \$ 24 000; ¿cuánto recibirá el arquitecto?

743. Teniendo que cobrar una deuda de \$ 1 570, Ildefonso transige con el deudor á razón de 90% ; ¿cuál es su comisión al $5\frac{1}{2}\%$?

744. He pagado á Raimundo \$ 5,46 por cambio de \$ 364 en plata de los Estados Unidos; ¿cuál es el tanto del corretaje?

745. He comprado en Guayaquil un cargamento de 9 500 qq. de cacao, á \$ 12 ql., y los he remitido en seguida á mi agente de Panamá, quien los ha vendido á razón de \$ 15 cada uno; ¿qué beneficio he realizado después de haber pagado \$ 312 por varios gastos, y la comisión al $3\frac{1}{2}\%$?

746. Mi corresponsal del Callao ha tomado en pago de su comisión \$ 74,20 por 364 qq. de arroz á \$ 10,50 cada uno; ¿cuál es el tanto de su comisión?

747. Se ha vendido un terreno en \$ 3 925, y el dueño ha recibido por producto neto \$ 3 866,12 $\frac{1}{2}$; ¿á qué tanto se ha calculado la comisión?

748. Matías cobra $1\frac{1}{2}\%$ por imposición de cierta suma á intereses, y ha realizado \$ 285 por su corretaje; ¿cuál es la suma impuesta?

749. He recibido de Sinforiano la suma de \$ 700 en plata; para cambiarlos en oro he pagado $3\frac{1}{2}\%$; y después de haber tomado 2% de comisión, he empleado lo restante en la compra de azúcares; ¿cuánto he pagado por estos últimos, y cuál es mi comisión?

750. Un especulador ha recibido \$ 412,50 por producto neto de una venta, después de deducida la comisión al 5% ; ¿cuál era el valor de la propiedad vendida?

LECCIÓN VIII

ASEGURACIÓN

831. **Aseguración** ó **seguro** es el contrato ó escritura en que un capitalista ó una sociedad se comprometen á pagar á un propietario las pérdidas que éste puede sufrir sobre sus mercaderías ó caudales, que corren algún riesgo de mar ó tierra.

832. Se da el nombre de **asegurador** al que responde, mediante cierto interés, del riesgo que pueden correr las mercaderías ó caudales.

833. Llámase **asegurado** el que es protegido por la Compañía de seguros.

834. **Póliza de seguros** es el contrato escrito del asegurador y del asegurado.

835. **Prima ó premio de seguros** es el tanto por ciento que cobra el asegurador, al fin de cada año ó al terminar un viaje, sobre el valor de los artículos que asegura.

836. **Aseguración marítima** es una fianza contra los riesgos y daños que pueden recibir en el mar los caudales ó mercaderías embarcadas, y los buques en que se conducen.

837. **Aseguración terrestre** es una fianza contra los riesgos de incendio ú otras contingencias, que pueden correr las casas, los almacenes, las cosechas, etc.

838. El valor de las propiedades, resguardado por la aseguración, es el que representa la *diferencia* entre la suma asegurada y la prima ó premio que se paga.

839. En la aseguración terrestre la prima se paga cada año; en la marítima, generalmente, la prima se paga por el tiempo que dura el viaje.

840. Los problemas de aseguración pueden considerarse como casos particulares de la regla de interés.

841. En las reglas de aseguración el cálculo se funda en los principios siguientes:

1º El premio ó prima es la *cantidad centesimal* (778), y equivale al *interés*;

2º La suma asegurada es la *base* según la cual se calcula la prima (779);

3º La suma resguardada, ó puesta á salvo, por la aseguración es la *diferencia* (781).

EJEMPLO I. — ¿Qué prima se pagará, al $2\frac{1}{2}\%$ por la aseguración de mercaderías tasadas en S 4500?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

S 100..... S 2,50
4500..... x

OPERACIÓN

$$\frac{2,50 \times 4500}{100} = S 112,50$$

Análisis. Sobre un valor de S 100 de mercaderías, se paga un premio de $2\frac{1}{2}\%$, ó S 2,50; sobre el valor de S 1 se pagará un premio 100 veces menor, ó $\frac{2,50}{100}$, y sobre un valor de S 4500 se pagará una prima 4500 veces

mayor, esto es, $\frac{2,50 \times 4500}{100} = R. S 112,50$.

EJEMPLO II. — *¿En qué suma debe asegurarse una troja al 2 % de modo que se ponga á salvo la pérdida del trigo, valuado en S 1617 con la prima?*

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

S 100 — 2..... S 100
1617..... x

OPERACIÓN

$$\frac{100 \times 1617}{98} = R. S 1650$$

De otro modo :

$$1,00 - 0,02 = S 0,98$$

$$S 1617 : 0,98 = S 1650$$

98 veces menor, ó $\frac{100}{98}$, y cuando el valor es de S 1617, la suma asegurada será 1617 veces mayor, á saber :

$$\frac{100 \times 1617}{98} = R. S 1650$$

PRUEBA

$S 1650 \times 0,2 = S 33$ de premio; $S 1650 - S 33 = S 1617$ la suma resguardada.

PROBLEMAS SOBRE LAS ASEGURACIONES

751. ¿Qué premio debe pagarse al $1 \frac{3}{4} \%$ por la aseguración de una casa valuada en S 5728?

752. Una goleta, asegurada en S 5000, al $2 \frac{1}{4} \%$ ha sufrido naufragio; ¿qué parte de la pérdida se halla resguardada por la aseguración?

753. Un almacén con sus mercaderías vale S 6370; ¿en qué suma debe asegurarse, al 2% para poder cubrir la propiedad y el premio?

754. Pago anualmente S 45 por la aseguración de mi biblioteca, esto es, el 3% de la suma convenida en la póliza; ¿por cuánto estoy asegurado?

755. Gervasio tiene S 12000 en mercaderías, y las hace asegurar por los $\frac{4}{5}$ de su valor, á los $\frac{3}{4} \%$ de premio; si en un incendio no puede salvar más que S 2000, ¿á cuánto asciende la pérdida actual que sufre?

756. ¿En qué suma debe hacerse asegurar al $1 \frac{1}{2} \%$ una casa estimada en S 8274, para que no se pierda nada, si se destruye dicha casa?

757. El premio de seguros de una casa, al $1 \frac{1}{4} \%$, es de S 50; ¿en cuánto está asegurada?

758. Una compañía de seguros después de haber asegurado todas las casas de un barrio en \$ 36 000, al $2\frac{1}{2}\%$, reasegura la mitad de ellas al 3% ; ¿qué diferencia hay entre ambas primas?

759. Un bergantín tasado en \$ 40 000 ha sido asegurado por los $\frac{3}{4}$ de su valor al $1\frac{1}{2}\%$, y el cargamento, estimado en \$ 36 000, á los $\frac{4}{5}\%$; ¿cuánto importa la aseguración?

760. Pelagio ha pagado \$ 1 450 de premio por la aseguración de un cargamento de algodón; siendo el tanto de aseguración el $2\frac{1}{2}\%$; ¿cuál era el valor del cargamento?

761. He pagado \$ 18 por una aseguración de \$ 1 200; ¿cuál es el tanto del premio?

762. Un comerciante ha hecho asegurar un cargamento de 500 brls. de harina por el 80% de su valor, al $3\frac{1}{4}\%$, y ha pagado \$ 107,25 de premio; ¿cuánto le había costado el barril?

763. Mi casa estaba asegurada en \$ 45 000 durante 5 años. El 1.^o año pagué \$ 1,50 por póliza y planos, y los $\frac{5}{8}\%$ de premio; y cada uno de los otros años $\frac{1}{2}\%$ de premio. Como la casa se quemó en el quinto año, pregunto cuál fue la pérdida de la aseguración, no habiéndose abonado ningún interés.

764. Un hacendado había hecho asegurar su casa y sus cosechas, cuyo valor total ascendía á \$ 75 400. Ha pasado 3 años 9 meses sin pagar el premio, cuyo tanto era el 1,40 p. mil : ¿qué suma debe á la compañía?

LECCIÓN IX

DESCUENTO

842. **Descuento**, en general, es la rabaja que se hace sobre una suma pagada antes de su vencimiento.

843. **Descuento**, en el comercio, es el negocio de los bancos y capitalistas que consiste en pagar ó realizar en numerario, letras ó pagarés cuyo vencimiento no ha llegado aún, cobrando un tanto $\%$ convenido.

844. Por **vencimiento** de una letra, pagaré, etc., se entiende el cumplimiento del plazo en que deben ser pagados.

845. Se descuentan ordinariamente las *facturas* y los documentos comerciales, como *pagarés*, *libranzas*, *letras de cambio*, etc.

846. El descuento de las facturas viene á ser una simple *rebaja* arreglada por convenio de las partes, ó por los usos del comercio relativos á la mercadería vendida.

847. El descuento de una factura se calcula por lo regular á un tanto $\%$ de su valor, sin hacer caso del tiempo.

Decir que una factura de S 4560, por ejemplo, es pagadera, bien á 6 meses plazo, bien al contado con un descuento del 3 %, quiere decir que el comprador queda libre de pagar 6 meses después de la fecha indicada en la factura (en cuyo caso debe pagar los S 4560 íntegros), ó de pagar inmediatamente, con una reducción del 3 %, esto es,

$$\frac{4560 \times 3}{100} = S 136,80; \text{ en este caso, satisface al acreedor pagándole } S 4560 - 136,80 = S 4423,20.$$

848. El descuento de los documentos comerciales se calcula proporcionalmente á la suma y al tiempo indicados en ellos; si sólo se dice que el descuento está, v. g., al 6 %, se entiende que es para un año.

849. En los documentos comerciales se consideran dos valores : el *nominal* y el *efectivo*.

850. El valor **nominal** es la suma inscrita en el pagaré, letra, etc., esto es, la que debe ser pagada al vencimiento del plazo.

851. El valor **efectivo** ó **actual** es la suma pagada antes del vencimiento, esto es, la que se diera en cambio de la letra si fuese negociada actualmente.

852. **Descotar** una letra, pagaré, etc., es adelantar su importe al tenedor de ellos, deduciendo el interés señalado; ó en otros términos es *comprarlos*.

853. **Negociar** una letra, pagaré, etc., es darlos en cambio de su valor actual, ó *venderlos*.

854. Hay dos clases de descuentos : el *externo* y el *interno*.

§ I. Descuento externo.

855. **Descuento externo** ó **comercial** es el interés simple del valor nominal de la letra, etc., el cual valor se considera como capital.

856. Es bueno observar que el *descuento externo* y el *interés* se parecen sólo en el modo de calcularse : la suma que cobra el banquero sobre el importe del documento no es un interés, sino una remuneración determinada por el uso,

857. Ocurren dos casos principales en el descuento externo :

1º Encontrar el valor actual y el descuento, cuando se conoce el valor nominal de una letra;

2º Encontrar el valor nominal de la letra, cuando se conoce su valor actual.

858. **Caso I.** Cuando se conoce el valor nominal de un pagaré, para encontrar el valor actual,

Regla I. Para el descuento comercial, se busca simplemente el interés de la suma inscrita en el pagaré, durante el tiempo y al tanto señalados; el resultado será el descuento.

II. Del valor nominal se resta el descuento, y la diferencia es el valor actual ó efectivo.

EJEMPLO. — ¿Cuál es el descuento comercial y el valor actual de una letra de \$ 1487, pagadera dentro de 30 días al 6 %?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

\$100.....	360 días.....	\$ 6
1487.....	30.....	x

PROPORCIONES

$$100 : 1487 = 6 \times \frac{30}{360} : x \text{ ó el descuento.}$$

$$100 : 1487 = 100 - \left(6 \times \frac{30}{360} \right) : x \text{ ó el valor actual.}$$

Análisis.

Si sobre \$ 100 en 360 d. se descuentan 6

$$\text{_____ } 1 - 360 - \text{se descontarán } 100 \text{ veces menos, ó } \frac{6}{100}$$

$$\text{_____ } 1 - 1 \text{ _____ } 360 \text{ _____, ó } \frac{6}{100 \times 360}$$

$$\text{_____ } 1487 - 1 \text{ _____ } 1487 \text{ _____ más, ó } \frac{6 \times 1487}{100 \times 360}$$

$$\text{_____ } 1487 - 30 \text{ _____ } 30 \text{ _____, ó } \frac{6 \times 1487 \times 30}{100 \times 360} =$$

$$= \$ 7,435$$

que son el descuento. Restando el descuento del valor nominal, tenemos, $\$ 1487 - 7,435 = \text{R. } \$ 1479,565$.

Como se ve, los problemas de descuento externo se resuelven como los de interés por medio de la fórmula

$$i = \frac{cTt}{100} \quad \text{ó} \quad crt \quad (814 \text{ y } 815)$$

y de las que de ella se deducen; i representa el descuento, c el valor nominal del pagaré, t el tiempo en años, T el tanto por ciento, y r el tanto por 1 sucre.

839. Caso II. Para encontrar el valor nominal de una letra cuando se conoce su valor actual,

Regla I. Se busca el descuento de S 100 en el tiempo y al tanto dados, el cual descuento se resta de 100 mismo, para tener su valor actual;

II. Se multiplica por 100 el valor actual dado, y se divide el producto por el valor actual de S 100; el cociente será el valor nominal.

Nota. — Téngase presente que 100 en el descuento externo representa un valor nominal, y por eso de él debe restarse el descuento que él mismo arroja, en el tiempo y al tanto señalados, para formar un valor actual.

EJEMPLO. — ¿Cuál es el valor nominal de una letra que, descontada por 8 meses, al 6 % de descuento externo, da por valor actual 768 sucres?

Análisis El descuento de S 100 en 8 meses, al 6 %, es de:

$$\frac{6 \times 8}{12} = 4; \quad 100 - 4 = 96, \text{ valor actual de S 100.}$$

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

S 96 de valor actual S 100 de valor nominal
768 x

Si S 96 de V.A. provienen de un V.N. de 100

1 ——— provendrá ——— 96 veces menor, ó $\frac{100}{96}$

y 768 ————— 768 ——— mayor, ó $\frac{100 \times 768}{96} =$
 $= S 800$

PROPORCIONES

$$100 - \left(6 \times \frac{8}{12}\right) : 768 = 100 : x \text{ ó valor nominal.}$$

§ II. Descuento interno.

360. Descuento interno, racional ó verdadero es el interés simple del valor actual de la letra, etc., según el tanto convenido.

361. En el descuento interno, *el valor actual* es la suma que, colocada actualmente á intereses simples y al mismo tanto, llegará á ser en el momento del vencimiento, el *valor nominal*, esto es, la suma inscrita en la letra. Por consiguiente, en esta clase de descuento se debe considerar el valor nominal como un capital unido á sus intereses, ó como el monto (**780**).

362. Este descuento se llama *racional*, porque la suma descontada, impuesta á intereses el día en que se hace el descuento, llega á ser, en el momento mismo del vencimiento, igual al valor nominal de la letra, lo que no sucede en el descuento externo.

Ya que en el descuento interno debe considerarse el valor nominal como un capital unido á sus intereses, si llamamos c el valor actual, i sus intereses, el valor nominal ó monto será $c + i$ ó M ; la fórmula (5) dada ya para los intereses, es

$$M = c(1 + rt) \quad (815)$$

de donde

$$c = \frac{M}{1 + rt}$$

El interés simple de esta suma será el *descuento interno* del valor nominal M ; tenemos pues (**814**):

$$i = \frac{Mrt}{1 + rt}$$

Observemos que Mrt sería el descuento externo del valor nominal M ; así *el descuento interno es el cuociente del descuento externo por $1 + rt$.*

363. Para encontrar el valor efectivo y el descuento interno de cualquier suma, en un tiempo y á un tanto dados,

Regla I. Se busca el descuento de \$100, en el tiempo y al tanto dados; el cual descuento se suma con 100 mismo, para tener su valor nominal;

II. Se multiplica por 100 el valor nominal dado, y se divide el producto por el valor nominal de \$100; el cuociente será el valor actual ó efectivo;

III. Se resta este último valor del nominal indicado en el problema, y la diferencia será el descuento interno.

Nota. Conviene advertir que, en el descuento interno, 100 representa un valor actual, y por eso se le debe añadir el descuento que él mismo arroja, en el tiempo y al tanto dados, para formar un valor nominal.

EJEMPLO. — ¿Cuál es el valor actual y el descuento interno de una letra de S 2500 pagadera en 120 días al 6 %?

Análisis. El descuento de S 100 en 120 días al 6 %, es de:

$$\frac{6 \times 120}{360} = S 2: 100 + 2 = S 102, \text{ valor nominal de } 100.$$

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

S 102 valor nominal..... S 100 valor actual
2500..... x

Si S 102 de V.N. corresponden á un V.A. de 100

1 ——— corresponderá ——— 102 veces menor, ó $\frac{100}{102}$

y 2500 ————— 2500 ——— mayor, ó $\frac{100 \times 2500}{102} =$
 $= S 2450,98, \text{ valor nominal.}$

El descuento interno es $2500 - 2450,98 = S 49,02.$

PROPORCIONES

1º Para el valor efectivo.

$100 + \left(6 \times \frac{120}{360}\right) : 2500 = 100 : x$, que se lee :

Ciento más el tanto multiplicado por el tiempo, es al valor nominal, como ciento es al valor efectivo.

2º Para el descuento.

$100 + \left(6 \times \frac{120}{360}\right) : 2500 = 6 \times \frac{120}{360} : x$, que se lee :

Ciento más el tanto multiplicado por el tiempo, es al valor nominal, como el tanto multiplicado por el tiempo es al descuento.

864. El descuento externo es más elevado que el interno, y también menos exacto y menos equitativo.

363. El descuento externo se compone del verdadero interés del valor actual de la letra; esto es, del descuento interno, más el interés de este mismo interés.

Así, por ejemplo, en el descuento externo al 5 %, \$100 son el valor nominal ó la suma que debe descontarse; en el descuento interno \$100 son el valor actual ó la suma descontada, y \$105 sería la suma que debe descontarse.

§ III. Comparación del descuento externo con el interno.

366. EJEMPLO 1º. — *Búsquese el descuento de una letra de \$ 5300 pagaderos en un año, al 6 % anual.*

Para el descuento externo, se deben descontar \$ 6 sobre \$100, y como \$100 están contenidos 53 veces en \$ 5300, se descontarán 53 veces \$ 6, ó \$ 318, esto es,

$$\frac{6 \times 5300}{100} = \$ 318$$

Para el descuento interno analizamos así: \$100 impuestos al 6 %, valen al cabo de un año \$ 106; y recíprocamente, una letra de \$ 106 pagadera en un año, representa un valor actual de \$100, y no debe sufrir sino \$ 6 de descuento. En esto precisamente se diferencian los dos descuentos: en el externo, se descuentan \$ 6 sobre \$100, y en el interno sólo se descuentan \$ 6 sobre \$ 106. Si sobre \$ 106 se descuentan 6, sobre uno se descontarán $\frac{6}{106}$, y sobre \$ 5300 se descontarán $\frac{6 \times 5300}{106} = \$ 300$.

Como acabamos de ver, el descuento externo es superior al interno, porque se compone del interés verdadero del valor actual de la letra, esto es, del descuento interno, más del interés de este mismo interés. En efecto, calculemos el interés de \$ 300 al 6 %, y tendremos $\frac{6 \times 300}{100} = \$ 18$, que, añadidos á los \$ 300, que son el descuento interno, dan \$ 318, esto es, el descuento externo.

367. EJEMPLO 2º. — *Una letra de \$ 1500 es pagadera al cabo de 90 días; si se quiere pagarla al contado, búsquese: 1º el descuento externo, 2º el interno, siendo el tanto 6 %.*

Descuento externo. Como el descuento externo es el interés simple del valor *nominal*, será pues el interés de \$ 1500 al 6 % durante 90 días, ó (802).

$$\frac{6 \times 1500 \times 90}{100 \times 360} = \text{R. } \$ 22,50$$

Descuento interno. El descuento interno es el interés simple del valor *actual*. El valor nominal es igual al valor actual aumentado de los intereses de este último.

Ahora bien, \$ 100 en 90 días al 6 % dan $\frac{6 \times 90}{360}$ ó \$ 1,50; por consiguiente, un valor actual de \$ 100 corresponderá á un valor nominal de \$ 101,50. Luego sobre una suma de \$ 101,50 hay \$ 1,50 de descuento, sobre \$ 1 habrá $\frac{1,5}{101,5}$, y sobre \$ 1500 el descuento será de $\frac{1,5 \times 1500}{101,5} = \$ 22,16$.

868. EJEMPLO 3º. — *Se han dado \$ 1800 en pago de una letra descontada al 5 % en 2 años; ¿cuál era el valor nominal de la letra, suponiendo 1º el descuento externo, 2º el interno?*

Notemos primero que \$ 100 al 5 % dan $5 \times 2 = \$ 10$ en 2 años.

Descuento externo. Este descuento es el interés del valor nominal.

Cuando este valor es de \$ 100, el valor actual es de $100 - 10$ ó \$ 90.

Luego con \$ 90 se pagan \$ 100, con \$ 1 se pagarán $\frac{100}{90}$, y con \$ 1800, $\frac{100 \times 1800}{90} = \text{R. } \$ 2000$, valor de la letra.

Descuento interno. El descuento interno es el interés del valor actual; cuando éste es de \$ 100, el valor nominal es de $100 + 10 = \$ 110$.

Luego con \$ 100 se pagan \$ 110, con \$ 1 se pagarán $\frac{110}{100}$, y con \$ 1800, $\frac{110 \times 1800}{100} = \text{R. } \$ 1980$ valor de la letra.

869. EJEMPLO 4º. — *Una letra de cambio pagadera á 36 días ha sido presentada á un banquero que, á más del descuento al 6 %, ha cobrado una comisión de $\frac{1}{2}$ %. El*

banquero ha pagado S 2749,42; ¿cuál era el valor nominal de la letra?

El descuento en 36 días será de $\frac{6 \times 36}{360}$ ó 0,6. Si se añaden 0,5 de comisión, resultan, por descuento total sobre S 100, $0,60 + 0,50 = S 1,10$. Por un valor nominal de S 100 se reciben sólo $100 - 1,1$ ó 98,9; por consiguiente, la letra valdrá tantas veces S 100 como lo indica el cuociente $\frac{2749,42}{98,9}$, esto es, $\frac{2749,42 \times 100}{98,9} = R. S 2780$.

370. Observación. El descuento externo ó comercial no puede cobrarse sino sobre documentos de vencimiento corto, porque de otro modo saldrían resultados evidentemente erróneos; por ejemplo, el descuento de S 1000 en 20 años al 5 % sería $\frac{1000 \times 5 \times 20}{100} = 1000$; por tanto esta suma nada valdría actualmente, lo que es inadmisibile.

PROBLEMAS SOBRE EL DESCUENTO

765. ¿Cuál es el valor actual de las letras siguientes, según el descuento externo?

- 1) Del 16 de jul., de S 626,85, á 5 meses, descont. el 12 de 8bre,
al $4 \frac{3}{4}$ 0/0.
- 2) Del 7 de en., de 2 341,50, á 11 mes., descont. el 3 de 9bre,
al $7 \frac{1}{4}$ 0/0.
- 3) Del 17 de may., de 1 310,25, á 3 mes., descont. el 22 de jun.,
al $5 \frac{1}{2}$ 0/0.
- 4) Del 14 de marz., de S 1 800, á 7 mes., descont. el 7 de 7bre,
al 7 0/0.
- 5) Del 11 de 9bre., de 525,90, á 7 mes, descont. el 4 de mayo,
al 6 0/0.

766. Búsquese el valor actual, según el descuento interno, de las letras siguientes, en la época en que han sido descontadas, á saber :

- 1) Del 3 de feb., de S 313,80, á 5 meses, descont. el 6 de junio,
al 5 0/0.
- 2) Del 2 de abril, de 618,45, á 4 mes., descont. el 30 de mayo,
al $4 \frac{1}{2}$ 0/0.
- 3) Del 7 de ag., de 8 000, á 6 mes., descont. el 5 de 10bre.,
al 5 0/0.
- 4) Del 14 de jun., de 4 682,70, á 3 mes., descont. el 2 de ag.,
al 6 0/0.
- 5) Del 9 de 7bre., de 2 385,30, á 10 mes., descont. el 13 de feb.,
al 5 0/0.
- 6) Del 6 de 10bre., de 1 891,50, á 11 mes., descont. el 18 de 7bre.,
al 5 0/0.

767. ¿Cuál es el descuento y el valor actual de una letra de \$ 1 000 debida al cabo de 60 días, al 6 %?

768. ¿Cuál es la diferencia entre el descuento interno y el externo de \$ 950, por 3 meses al 7 %?

769. Descontar el 4 de mayo, al 6 % anual, una letra de \$ 3 450, pagadera el 4 de 8bre. del mismo año.

770. Buscar el descuento interno de la letra del problema anterior.

771. Una letra de \$ 1 500 es pagadera al cabo de 90 días; si se quiere pagarla al contado, ¿cuál será el descuento externo al 6 %?

772. Patricio desea sacar \$ 5 000 del banco; ¿cuál debe ser el valor nominal de su letra, á 90 días, siendo el descuento de 6 %?

773. Hernando compra mercaderías por \$ 1 486,90, y da en cambio de ellas su pagaré á 4 meses, con 7 $\frac{1}{2}$ % de descuento; ¿qué cantidad debe inscribir en el pagaré?

774. Con \$ 1 800 se ha pagado una letra descontada al 5 % en 2 años; ¿cuál era el valor nominal de dicha letra según el descuento externo?

775. He descontado en el banco el 12 de Marzo, al 6 % una letra de \$ 705,60, pagadera el 28 de Junio: ¿qué suma he recibido?

776. Debo la suma de \$ 514,22, bajo las condiciones siguientes: \$ 208,32 pagaderos dentro de 10 meses, más \$ 123,20 pagaderos dentro de 18 meses, y el resto dentro de 22 meses; si logro poder pagar al contado con el descuento interno del 4 % anual, ¿qué suma debo desembolsar?

777. Bonifacio ha comprado \$ 1 795,50 de sederías; sobre esta suma paga sólo \$ 1 710; ¿á qué tanto % se calculó el descuento interno?

778. La suma de \$ 1 720 es pagadera al cabo de un año, la de \$ 10 900 lo es dentro de 18 meses; pero, pagando al contado, se puede alcanzar una rebaja del 5 % anual por la primera, y del 4 $\frac{1}{2}$ % por la segunda; ¿á cuánto asciende dicha rebaja, por el descuento interno?

779. He comprado dos relojes en \$ 505, á 18 meses plazo; pero habiéndolos pagado antes del vencimiento, he obtenido un descuento de \$ 18,05, al 5 % anual; ¿en qué época hice el pago?

780. Una deuda de \$ 1 640,50 pagadera al cabo de 17 meses ha sido saldada con \$ 1 515,52; ¿en qué época se verificó el pago, si ha habido un descuento del 6 % anual?

781. ¿Cuál es el valor nominal de una letra que, descontada por 211 días al 6 %, se reduce á \$ 1 350,25, debiendo calcularse por el descuento interno y el externo?

782. ¿Cuál es el valor nominal de una letra que, descontada por 180 días al 6 %, daría una diferencia de \$ 0,50 entre el descuento externo y el interno?

783. ¿Cuál es la suma que, descontada en 1 año al 5 %, queda disminuida de \$ 62?

784. ¿Qué suma se reduce á \$ 2 342 si se la descuenta al 4 % en un año?

785. ¿Cuál es la suma que, descontada por 4 años al 5 $\frac{1}{2}$ %, se disminuye de \$ 88?

786. ¿Cuál es la suma que, descontada por 9 meses al 4 %, queda disminuida de \$ 79,20?

787. ¿Cuál es valor nominal de una letra que, descontada por 18 meses al 5 %, se disminuye de \$ 195?

788. Búsquese el valor nominal de una letra que, descontada por 15 meses al 5 %, queda reducida á \$ 4 350.

789. ¿A qué tanto $\frac{0}{100}$ anual debe descontarse una letra de \$ 900 para que resulte un descuento de \$ 36?

790. ¿Cuál es el tanto del descuento de una letra de \$ 2 840, que da en 3 años \$ 426 de descuento?

791. Una letra de \$ 1 000, descontada por 9 meses, se reduce á \$ 973,75; ¿cuál es el tanto del descuento?

792. ¿Cuál es el valor actual de \$ 117,60 pagaderos al cabo de un año al 12 $\frac{0}{100}$ de descuento?

793. ¿Cuál debe ser la disminución sobre \$ 373,75 pagados 11 meses antes del término convenido, al descuento anual de 6 $\frac{1}{2}$ $\frac{0}{100}$?

794. Una letra de \$ 139,94 es pagadera al cabo de 9 meses; ¿cuál es su valor actual, si el descuento es de 5 $\frac{0}{100}$ al año?

795. ¿Cuál es el descuento actual de un pagaré de \$ 429,98 $\frac{3}{8}$, debido dentro de 1 año 6 meses 1 día, al 5 $\frac{1}{2}$ $\frac{0}{100}$?

796. La suma de \$ 195,10 es pagadera al cabo de 13 meses; ¿de cuánto se disminuirá, si se consigue una rebaja de un 4 $\frac{0}{100}$ pagando al contado?

797. Una casa me ha costado \$ 2 964,12, y la he vendido en \$ 3 665,20, pagaderos al cabo de un año y medio; ¿cuál fuera mi ganancia si concedo un 8 $\frac{0}{100}$ de descuento, con tal que me paguen al contado?

798. He comprado \$ 5 464 de mercaderías, á 15 meses plazo; pero si pago antes, me conceden un descuento del 5 $\frac{0}{100}$ anual; ¿en qué época deberé pagar para no desembolsar mas que \$ 5 204?

799. Un negociante ha dado dos letras: la 1^a de \$ 243,16, pagaderos el 6 de mayo de 1882; la 2^a de \$ 178,64, pagaderos el 25 de 7bre. del mismo año; ¿qué suma fue menester para descontar ambas letras el 11 de 8bre. de 1881, siendo el tanto del descuento al 7 $\frac{0}{100}$?

800. He pagado \$ 370 por una suma que debía; ¿qué suma era ésta, sabiendo que me han concedido un descuento del 5 $\frac{1}{4}$ $\frac{0}{100}$?

801. ¿Cuál es más ventajoso entre comprar harina á \$ 6,25 barril y á 6 meses plazo, ó á \$ 6,50, á 9 meses plazo, debiendo ser el descuento al 8 $\frac{0}{100}$?

802. ¿Cuál era el valor nominal de un pagaré que, descontado por 210 días al 6 $\frac{0}{100}$ anual, se ha reducido á \$ 640?

803. Un pagaré de \$ 721, descontado por 9 meses, se ha reducido á \$ 700; ¿cuál fue el tanto del descuento?

804. Una factura asciende á \$ 528; se concede una rebaja de 5 $\frac{1}{2}$ $\frac{0}{100}$ al contado; ¿cuál es el precio neto de dicha factura?

805. Estoy debiendo la suma de \$ 2 571,10, á saber: \$ 800 pagaderos dentro de 10 meses, \$ 616 dentro de 9 meses, y lo demás al cabo de 12 meses: si pagando al contado, me conceden un descuento del 4 $\frac{0}{100}$ anual, ¿cuánto tendré que pagar?

806. El precio neto de un piano es de \$ 364; dos aficionados se presentan, y el uno ofrece \$ 400 con tal que le den el 12 $\frac{0}{100}$ de descuento; el otro, \$ 388 y pide el 8 $\frac{0}{100}$ de descuento. ¿Qué oferta es más ventajosa, y cuál es en ambos casos el beneficio ó la pérdida?

807. Se ha hecho una rebaja del 6 $\frac{0}{100}$ sobre el importe de una factura que se ha pagado al contado; ¿cuál era su importe si la rebaja total ha sido de \$ 17,20?

808. La diferencia entre el descuento interno y el externo de un pagaré descontado por 180 días, al 6 $\frac{0}{100}$, es de \$ 5,40; ¿cuál es el valor nominal del pagaré?

809. La diferencia entre el descuento interno y el externo de un pagaré descontado por 200 días, al 6 % es de \$ 9,80; ¿cuál es el valor actual del pagaré?

810. ¿Cuál es el valor nominal de un pagaré que, descontado por 180 días, al 6 %, da una diferencia de \$ 0,50 entre el descuento interno y el externo?

811. Se han recibido \$ 5 917 por dos letras de cambio que valen juntas \$ 5 970, y que se han descontado al 6 %; la 1ª pagadera en 1 mes $\frac{1}{2}$, la 2ª en 2 meses 25 días; ¿cuál es el valor de cada una?

LECCIÓN X

GANANCIAS Y PÉRDIDAS

871. Las palabras **Ganancias y Pérdidas** son términos que indican el beneficio realizado ó los perjuicios que uno sufre, con arreglo á un tanto %, en las operaciones comerciales.

872. Las Ganancias y Pérdidas se calculan como el tanto %, sobre el precio de compra de las mercaderías.

873. En las operaciones de Ganancias y Pérdidas pueden entrar las cuatro especies de cantidades siguientes :

1ª El *Costo*, ó precio de compra, que equivale á la *base* (779);

2ª El *Tanto %* de *ganancia* ó *perdida* (777);

3ª La *Ganancia* ó la *Pérdida*, que es la *cantidad centesimal* (778);

4ª El *Precio de venta*, que representa el *monto* (730) ó la *diferencia* (781) según fuere mayor ó menor que el *costo*.

De donde tenemos las relaciones siguientes :

El Precio de venta = *Costo* + *la Ganancia*, ó *al Costo* — *la Pérdida*.

El Costo = *Precio de venta* — *la Ganancia*, ó *al Precio de venta* + *la Pérdida*.

La Ganancia = *Precio de venta* — *el Costo*.

La Pérdida = *Costo* — *el Precio de venta*.

374. EJEMPLO 1º. — *Abraham ha comprado café à 18,50 sucres el qtl., y ha ganado el 6 % al revenderlo; ¿en qué precio lo revendió?*

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

S 100..... S 6 ganancia
18,50..... x

OPERACIÓN

$$\frac{6 \times 18,50}{100} = S 1,11 \text{ gan.}$$

$$S 18,50 + 1,11 = R. S 19,61, \text{ precio de venta.}$$

Análisis. Sobre una venta de S 100 gana 6 sucres; sobre una venta de 1 sucre, ganará 100 veces menos, ó $\frac{6}{100}$, y sobre una venta de 18,50 sucres ganará tantas veces más, esto es, $\frac{6 \times 18,50}{100} = S 1,11$. Luego, revendió el qtl. de café en $18,50 + 1,11$, esto es, en 19,61 sucres.

De otro modo : Ya que el tanto de la ganancia es el 6 %, lo que cuesta 1 sucre valdrá 1,06, y el precio de venta será 1 vez y 6 centésimos del precio de compra, de donde $18,50 \times 1,06 = 19,61$ sucres.

375. EJEMPLO 2º. — *Un negociante ha vendido 1280 sucres de mercaderías secas, sacando un beneficio neto de 192 sucres; ¿cuál es el tanto % de su ganancia?*

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

S 1280. S 192 gan.
100. x

OPERACIÓN

$$\frac{192 \times 100}{1280} = R. 15 \%$$

Análisis. Si sobre 1280 sucres de venta gana el negociante 192, sobre 1 sucre de venta ganará 1280 veces menos, ó $\frac{192}{1280}$, y sobre 100 sucres de venta ganará 100 veces más, á saber, $\frac{192 \times 100}{1280} = R. 15 \%$.

376. EJEMPLO 3º. — *Al vender ciertas mercaderías en 16500 sucres pierdo el 8 %; ¿cuánto me habían costado?*

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

$$\begin{array}{l} S 100 - 8. \dots\dots\dots S 100 \\ 16500. \dots\dots\dots x \end{array}$$

OPERACIÓN

$$\frac{100 \times 16500}{92} = R. S 17934,78\dots$$

De otro modo :

$$\frac{16500 \times 25}{23} = S 17934,78\dots$$

siguiente, si 92 sucres de venta provienen de un valor de 100, 1 sucre de venta provendrá de un valor 92 veces menor, ó de $\frac{100}{92}$, y los 16500 sucres de venta provendrán de un valor 16500 veces mayor, esto es, de

$$\frac{100 \times 16500}{92} = R. S 17934,78\dots$$

O mejor todavía : El 8 % de pérdida representa los $\frac{8}{100}$, ó los $\frac{2}{25}$ del primer costo de las mercaderías, las cuales valen $\frac{25}{25}$; luego, el precio en que se han vendido será los $\frac{25}{25} - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$. Si los $\frac{23}{25}$ del 1^{er} costo importan 16500 sucres, $\frac{1}{25}$ del mismo valdrá 23 veces menos, ó $\frac{16500}{23}$, y los $\frac{25}{25}$, ó todo el costo primitivo, valdrán 25 veces más, esto es, $\frac{16500 \times 25}{23} = R. S 17934,78\dots$

877. EJEMPLO 4^o. — Anastasio vende cierta cantidad de harina, con una pérdida de 86,50 sucres que son el 20 % del costo primitivo; ¿cuál es éste?

OPERACIÓN

$$S 86,50 \times 5 = S 432,50$$

Análisis. Siendo la pérdida el 20 % ó los $\frac{20}{100}$ ó $\frac{1}{5}$ del primer costo, tenemos que si la pérdida,

ó $\frac{1}{5}$ del costo vale 86,50 sucres, los $\frac{5}{5}$, ó todo el costo, valdrán 5 veces más, ú $S 86,50 \times 5 = S 432,50$.

PROBLEMAS SOBRE LAS GANANCIAS Y PÉRDIDAS

812. Cristóbal vende paño á $S 5$ el metro, que no le costó más que $S 3,75$; ¿cuánto gana por ciento?

813. Un comerciante ha comprado mercaderías en $S 9562,50$; si las revende con un aumento del 20% sobre el precio de compra, ¿cuál es su ganancia después de quitados $S 600$ de gastos?

814. He comprado 9 qq. de azúcar en $S 65$, y he pagado $S 5,15$ por el transporte; ¿en cuánto debo revender el quintal para ganar el 25% sobre el precio de compra?

815. Un mercader de pieles ha sacado un beneficio de $S 156$ sobre cierta cantidad que vendió con un 12% de ganancia; ¿á cuánto asciende el valor de las pieles vendidas?

816. Vendiendo té á 90 cents. la libra, se gana el 20% ; ¿cuánto se ganaría $\%$ vendiéndolo, á $S 1$ la libra?

817. Si vendo paño á $S 4$ el metro, pierdo el 20% ; ¿cuánto me había costado?

818. Si se vende una bala de papel en $S 480$, se pierde el 15% ; ¿en cuánto se habría debido vender para ganar el 12% ?

819. Gumersindo vende su caballo ganando un 30% , y con este dinero compra otro y lo revende en $S 225$, perdiendo el $12\frac{1}{2}\%$; ¿cuánto le costó cada caballo?

820. Un especulero ha pedido por cierta cantidad de ciruelas pasas un 22% más de lo que le habían costado; pero como se encontraban algo pasadas ha tenido que venderlas al 10% menos de lo que había pedido, y ha ganado $S 98$ en esta venta; ¿qué suma pidió al principio?

821. Jacinto ha comprado $S 6840$ de mercaderías, y ha vendido la $\frac{1}{4}$ parte con un 15% de ganancia, $\frac{1}{3}$ con un $18\frac{3}{4}\%$, $\frac{1}{6}$ con un 20% , y el resto con $33\frac{1}{3}\%$ de ganancia; ¿cuál ha sido su ganancia total?

822. Leovigildo ha revendido dos caballos, en $S 150$ cada uno, y así ha ganado sobre el 1º el 25% y ha perdido el 25% sobre el 2º; pregúntase si ha ganado ó perdido en el negocio.

823. He comprado 35 barriles de harina á $S 4,75$ el barril, y los he revendido á $S 5,25$ el barril; ¿cuánto he ganado?

824. Rigoberto compra paño á $S 2,50$ el metro, y lo revende después ganando el 25% ; ¿en cuánto ha revendido el metro?

825. Majencio vendió dos relojes en $S 12$ cada uno; en el uno ganó el 50% y en el otro perdió el 50% ; ¿ganó ó perdió en el negocio, y cuánto?

826. Ansovino emplea $S 8560$ en un negocio, y al fin del año se encuentra con una ganancia de $S 2140$; ¿qué tanto $\%$ representa su ganancia?

827. Basilio vende el mazo de paja toquilla en $S 0,87\frac{1}{2}$, perdiendo así el $12\frac{1}{2}\%$; ¿cuál es el precio del mazo?

828. Un individuo vendió dos lapiceros de oro en \$ 6 $\frac{1}{4}$; en el uno ganó el 20 $\frac{0}{100}$ y en el otro perdió el 20 $\frac{0}{100}$; ¿ganó ó perdió en el negocio, y cuánto?

829. Al vender una partida de géneros en \$ 106, se gana el 6 $\frac{0}{100}$ sobre el precio de compra; ¿cuánto habían costado dichos géneros?

830. Vendiendo en \$ 106 una partida de sombreros, se gana el 6 $\frac{0}{100}$ sobre el precio de venta; ¿cuál es el importe de los sombreros?

831. Se ha vendido en \$ 1344 una recua de mulas que había importado \$ 1200; preguntase: 1º cuánto $\frac{0}{100}$ se ha ganado sobre el precio de compra; 2º sobre el precio de venta.

832. Vendiendo en \$ 174,40 una partida de azúcares, se ha ganado el 9 $\frac{0}{100}$ sobre el precio de compra; ¿cuánto había costado dicha partida?

833. Si se vende en \$ 174,40 una remesa de aguardientes, se gana el 9 $\frac{0}{100}$ sobre el precio de venta; ¿cuánto había costado la remesa?

834. Sobre una mercancía comprada y revendida sucesivamente por cuatro comerciantes, los dos primeros tuvieron cada uno el 10 $\frac{0}{100}$ de beneficio, y cada uno de los dos últimos el 10 $\frac{0}{100}$ de pérdida. Se pregunta en cuánto la compró el 1º, sabiendo que el 4º la revendió en \$ 490,05.

LECCIÓN XI

REPARTIMIENTOS PROPORCIONALES

838. Llámase regla de **repartimientos proporcionales** aquélla por medio de la cual se divide un número propuesto en partes proporcionales á otros números dados.

839. Los repartimientos proporcionales son de dos clases: *simples* y *compuestos*.

890. Los repartimientos proporcionales son **simples** cuando los números proporcionales no están descompuestos en factores; y **compuestos**, cuando dichos números son productos de varios otros.

§ I. Repartimientos proporcionales simples.

391. **Problema general.** — Dividase un número A en partes proporcionales á los números a, b, c.

Llamemos x, y, z las tres partes respectivas, y tendremos

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad \text{ó} \quad x : a :: y : b :: z : c$$

$$\delta \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c} \quad (736)$$

Si llamamos s la suma de los números a, b, c , tendremos también :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{s} = \frac{A}{c}$$

de donde (1) $x = \frac{A}{s} \times a$

(2) $y = \frac{A}{s} \times b$

(3) $z = \frac{A}{s} \times c$

892. Pueden distinguirse 5 casos en la regla de repartimientos proporcionales simples :

1º Cuando los números proporcionales son enteros;

2º Cuando estos números son quebrados;

3º Cuando el repartimiento debe hacerse en razón inversa de los números dados;

4º Cuando algunos de los números proporcionales se hallan representados por dos cantidades que expresan distintas razones de unos con otros;

5º Cuando no están determinados los números proporcionales.

893. **Caso I.** — Para dividir una cantidad en partes proporcionales á números enteros,

Regla. *Se multiplica el número que debe dividirse por cada uno de los números proporcionales, y se dividen los productos por la suma de dichos números.*

EJEMPLO. — Divídanse 600 sucres proporcionalmente á los números 3, 5 y 7.

Representemos por x, y, z las tres partes, y tendremos :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$$

Por consiguiente :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{x+y+z}{3+5+7} = \frac{600}{15} \quad (736)$$

Y aplicando inmediatamente las tres fórmulas anteriores, resulta :

$$x = \frac{A}{s} \times a = \frac{600}{15} \times 3 = S 120$$

$$y = \frac{A}{s} \times b = \frac{600}{15} \times 5 = 200$$

$$z = \frac{A}{s} \times c = \frac{600}{15} \times 7 = 280$$

También puede plantearse la proporción como sigue :

$$\left. \begin{array}{r} 3 \\ + 5 \\ + 7 \end{array} \right\} : 600 = \left\{ \begin{array}{l} 3 : x \\ 5 : y \\ 7 : z \end{array} \right.$$

y se expresa así :

La suma de los números proporcionales es á la cantidad que debe dividirse, como cada número proporcional es á la parte que le corresponde.

MÉTODO DE LA UNIDAD

La suma de los números proporcionales es $3 + 5 + 7 = 15$.

Si hubiera que repartir S 15, la 1ª parte sería 3

_____ 1 _____ 15 veces menos, ó $\frac{3}{15}$

y como hay _____ 600 _____ será 600 _____ más ó $\frac{3 \times 600}{15} =$

Se procede del mismo modo para encontrar las otras dos partes.

894. Caso II. — Para dividir una cantidad en partes proporcionales á números quebrados,

Regla. *Se reducen los quebrados á un común denominador, y se divide el número proporcionalmente á los numeradores.*

EJEMPLO. — Dividase el número 540 en partes proporcionales á los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$.

Representemos por x , y , z , las tres partes, y tendremos :

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{2}{3}} = \frac{z}{\frac{5}{6}} \quad \text{ó} \quad x : \frac{1}{2} :: y : \frac{2}{3} :: z : \frac{5}{6}$$

Reduciendo los quebrados á un común denominador, resulta :

$$\frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{y}{\frac{4}{6}} = \frac{z}{\frac{5}{6}}$$

Estas razones no se alteran si multiplicamos los quebrados por el denominador común 6, suprimiéndolo, y resultará, como en el caso 1º :

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{8} = \frac{z}{10} = \frac{x + y + z}{6 + 8 + 10} = \frac{540}{24} \quad (893)$$

de donde :

$$x = \frac{540}{24} \times 6 = 135; \quad y = \frac{540}{24} \times 8 = 180; \quad z = \frac{540}{24} \times 10 = 225$$

Para el método de la unidad se raciocina como en el caso 1º.

895. Caso III. Para dividir una cantidad inversamente á los números proporcionales dados,

Regla. Se buscan las razones inversas de los números dados, las que resultan en números quebrados, y se procede en seguida como en el caso 2º.

EJEMPLO. — Un testador deja en herencia 4550 sures á cuatro sobrinos suyos, que tienen respectivamente 18, 15, 10 y 6 años, con la condición de que se dividan esta suma en partes inversamente proporcionales á la edad que tienen; ¿á cómo debe caberle á cada uno?

Las razones directas de las edades son evidentemente :

$$\frac{18}{1}, \quad \frac{15}{1}, \quad \frac{10}{1}, \quad \frac{6}{1}$$

Pero como al mayor debe tocarle menor suma, las razones inversas serán :

$$\frac{1}{18}, \quad \frac{1}{15}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{6}$$

Si llamamos v, x, y, z las partes respectivas, tendremos :

$$\frac{v}{18} = \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}$$

ó reduciendo los quebrados á un común denominador :

$$\frac{5}{90}, \quad \frac{6}{90}, \quad \frac{9}{90}, \quad \frac{15}{90}$$

y suprimiendo los denominadores :

$$\frac{v}{5} = \frac{x}{6} = \frac{y}{9} = \frac{z}{15} = \frac{v+x+y+z}{5+6+9+15} = \frac{4550}{35} \quad (894)$$

de donde :

$$v = \frac{4550}{35} \times 5 = 650; \quad x = \frac{4550}{35} \times 6 = 780;$$

$$y = \frac{4550}{35} \times 9 = 1170; \quad z = \frac{4550}{35} \times 15 = 1950;$$

Para el método de la unidad se analiza como en el caso 1º.

896. Caso IV. — Para dividir una cantidad en partes proporcionales á números entre los cuales algunos se hallan representados por dos cantidades que expresan distintas razones de unos con otros,

Regla. *Se les da á los números proporcionales una razón común, representando cada uno por una sola cantidad, para lo cual se multiplican respectivamente por los números que expresan la diversidad de las razones.*

EJEMPLO. — Repártanse S 20500 entre 3 personas, de modo que la parte de la 1ª sea á la de la 2ª como 2 es á 3, y que la parte de la 2ª sea á la de la 3ª como 4 es á 7.

Análisis. Ya que la 2ª parte está representada por dos números, sin alterar las razones, podemos modificarlas, de modo que la 2ª parte vaya representada por un solo número, como sigue :

1ª parte	2ª parte	3ª parte
2	$\times 3$ Los dos números de la 2ª razón	
Los dos números de la 1ª razón $\times 4$		7
8	12	21 = 41 su

Porque, cuando la 2ª parte es 3, la 1ª es 2; si la 2ª es 4 veces mayor, ó $3 \times 4 = 12$, la 1ª también debe ser 4 veces mayor, ó $2 \times 4 = 8$. Cuando la 2ª parte es 4, la 3ª es 7; si la 2ª es 3 veces mayor, ó $4 \times 3 = 12$, la 3ª también debe ser 3 veces mayor, ó $7 \times 3 = 21$. Bastará pues repartir los S 20500 proporcionalmente á los números 8, 12, 21, procediendo como en el 1er caso, y tendremos :

$$1^\text{a} \text{ parte } \frac{20500}{41} \times 8 = S 4000; \quad 2^\text{a} \text{ parte } \frac{20500}{41} \times 12 = S 6000;$$

$$3^\text{a} \text{ parte } \frac{20500}{41} \times 21 = S 10500$$

897. Caso V. — Para repartir una cantidad, cuando no están determinados los números proporcionales,

Regla. *Se determinan éstos por medio del análisis del problema, y se procede en seguida como en el caso 1º.*

EJEMPLO. — Leandro deja S 14884 al morir, y dispone en el testamento que dicha suma se reparta entre su madre, 3 hermanos, 2 hermanas y 4 sobrinos, del modo siguiente : á los 4 sobrinos partes iguales; á cada hermana, lo que á 1 sobrino más la $\frac{1}{4}$ parte de lo mismo; á cada hermano,

lo que á una hermana más la $\frac{1}{2}$ de lo mismo, y á su madre, lo que á cada hermana más lo que á cada hermano; se pregunta cuánto le corresponde á cada heredero.

Sea 1 la parte de cada sobrino; la de los 4 será $1 \times 4 = 4 = \frac{32}{8}$

La de 1 hermana será $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; la de las 2, $\frac{5}{4} \times 2 = \frac{10}{4} = \frac{20}{8}$

La de 1 hermano, $\frac{5}{4} + \frac{5 \times 1}{4 \times 2} = \frac{15}{8}$; la de los 3, $\frac{15}{8} \times 3 = \frac{45}{8}$

La de la madre, $\frac{5}{4}$ ó $\frac{10}{8} + \frac{15}{8} = \dots\dots\dots \frac{25}{8}$

Suprimiendo los denominadores, como en el caso 2º, los números proporcionales son los numeradores

$$32 + 20 + 45 + 25 = 122$$

Y efectuando la repartición, como en el caso 1º, tendremos :

Para los 4 sobrinos, $\frac{14884}{122} \times 32 = S 3904$; cada uno, $\frac{3904}{4} = S 976$

Para las 2 hermanas, $\frac{14884}{122} \times 20 = S 2440$; cada una, $\frac{2440}{2} = S 1220$

Para los 3 hermanos, $\frac{14884}{122} \times 45 = S 5490$; cada uno, $\frac{5490}{3} = S 1830$

Para la madre, $\frac{14884}{122} \times 25 = S 3050$, ó $1220 + 1830 = 3050$

Prueba S 14884

§ II. Repartimientos proporcionales compuestos.

898. EJEMPLO. — Cuatro obreros han empleado 6 días de 10 horas en cierto trabajo; otros tres han empleado 5 días de 11 horas en el mismo trabajo; ¿qué suma recibirá cada grupo de obreros, si el trabajo se estima en 180 sucres?

SOLUCIÓN

1º grupo $10 \times 6 \times 4 = 240$ horas

2º — $11 \times 5 \times 3 = 165$ —

Total 405 —

Análisis. Es evidente que el producto de los días por las horas será el número de horas de trabajo; y el problema se

reduce á una regla de repartimientos proporcionales simples, repartiendo los \$ 180 entre los dos grupos, según las horas de trabajo.

Llamemos x y y las dos partes, y tendremos :

$$\frac{x}{10 \times 6 \times 4} = \frac{y}{11 \times 5 \times 3} = \frac{180}{405}$$

de donde :

$$x = \frac{180}{405} \times 240 = 106 \frac{2}{3}; y = \frac{180}{405} \times 165 = 73 \frac{1}{3}$$

PROBLEMAS SOBRE LOS REPARTIMIENTOS PROPORCIONALES

835. Dividáanse \$ 810 en partes proporcionales á 3, 6 y 9.

836. Habiéndose reunido 3 jardineros para cultivar un jardín, han ganado juntos \$ 65 : el 1º ha trabajado durante 15 días; el 2º, durante 12 días, y el 3º, durante 25 días; preguntase qué parte de la ganancia le toca á cada uno en proporción del tiempo de su trabajo.

837. Queriendo gratificar un príncipe á 3 oficiales veteranos, les destina anualmente la suma de \$ 8 000; ¿á cómo le cabrá á cada uno, sabiendo que deben recibir á proporción de su edad, y que el 1º cuenta 65 años; el 2º, 70 y el 3º, 75?

838. Divídase el número 176 en tres partes, de modo que la 1ª sea á la 2ª = 5 : 4, y la 1ª á la 3ª = 7 : 3.

839. Una persona da \$ 12 á 5 pobres, repartíendoselos proporcionalmente á los números siguientes: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$; ¿qué suma le cabe á cada uno?

840. Repártanse \$ 21 500 entre tres personas de modo que la parte de la 1ª sea á la de la 2ª = 4 : 5, y la de la 2ª á la de la 3ª = 7 : 8.

841. Divídase el número 858 proporcionalmente á los quebrados : $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$.

842. Divídase la suma de \$ 72 entre dos personas, de modo que la segunda tenga los $\frac{4}{5}$ de lo que tenga la primera.

843. Se trata de repartir \$ 360 entre tres personas, de modo que la 3ª tenga el triple de la 1ª, y la 3ª, la mitad de lo que tengan juntas la 1ª y la 2ª; ¿á cómo le cabe á cada una?

844. Eovaldo muere dejando en su testamento una herencia de \$ 84 000 á un hermano que se halla en un país lejano, y del cual no ha tenido noticias mucho tiempo há. El tenor del testamento es el siguiente : « Si mi hermano tiene una hija, dejo para ella los $\frac{2}{3}$ de la herencia, y $\frac{1}{3}$ para el padre; pero si tiene un hijo, á éste le tocará el $\frac{1}{3}$ de la herencia, y los $\frac{2}{3}$ para el padre. » Sucede que el hermano de Eovaldo tiene un hijo y una hija; ¿ como deberá hacerse la repartición?

845. Repártanse \$ 494 entre tres personas de modo que la parte de la 1ª sea á la de la 2ª como $\frac{2}{3}$ es á $\frac{1}{2}$, y la parte de la 2ª sea á la de la 3ª como $\frac{5}{6}$ es á $\frac{4}{5}$.

846. Un hacendado tiene en su corral 126 aves, de las cuales hay 2 veces más gallinas que patos, y 2 veces más patos que gansos; ¿cuántas aves hay de cada una de las tres especies?

847. En la puerta de una iglesia se encuentran habitualmente dos mendigos, á saber: una pobre mujer todos los días, y alternativamente un ciego y un cojo. Una señora caritativa envía á su hijo con 52 centavos, y le dice: « Si encuentras á la pobre mujer y al ciego, le darás á éste los $\frac{3}{4}$ de la suma, y á la mujer $\frac{1}{4}$; pero si está allí el cojo, no le darás á él más que $\frac{1}{4}$ de la suma, y los $\frac{3}{4}$ á la mujer. » Sucede extraordinariamente que aquel día todos tres mendigos se hallan á la puerta de la iglesia; ¿qué limosna recibirá cada uno?

848. Tres obreros empleados en un taller han ganado \$ 124: el 1º ha trabajado durante 10 días de 8 horas de trabajo; el 2º, durante 9 días de 12 horas, y el 3º, durante 6 días de 10 horas; ¿cuál será la parte de cada uno en proporción de su trabajo?

849. Dos maestros carpinteros han emprendido la construcción del entablado de una sala: el 1º ha empleado 8 oficiales durante 15 días, y el 2º, 10 durante 14 días; preguntase qué parte le toca á cada uno, en proporción de su gasto, sobre \$ 7 500 destinados á esta obra.

850. Dos hacendados arriendan una dehesa en \$ 650; el 1º pone en ella 150 bueyes durante 180 días y 10 horas por día; y el 2º, 80 durante 280 días y 8 horas por día; ¿cuánto debe pagar cada uno?

851. Valerio al morir deja su fortuna á 6 parientes, 3 de los cuales son del 4º grado, 2 del 5º y 1 del 6º, con la condición de que el repartimiento se hará en razón inversa del grado de parentesco. Siendo de \$ 395 000 la suma que debe dividirse, ¿á cómo le cabe á cada uno?

852. Con \$ 750 se han comprado dos caballos que han sido pagados en razón directa de su fuerza, la cual es proporcional á los números 121 y 144, y en razón inversa de la edad que tienen, y que es proporcional á los números $5\frac{4}{9}$ y $6\frac{1}{4}$; ¿cuál es el precio de cada caballo?

853. Dos obreros quieren dividirse la suma de \$ 364 que han ganado; preguntase cuál será la parte de cada uno, sabiendo que el primero ha trabajado 10 horas por día durante 18 días, y el segundo 11 horas diarias durante 25 días.

854. Doscientos noventa hectol. 25 lit. de vino deben ser divididos en tres partes, siendo la menor y la mediana respectivamente los $\frac{7}{8}$ y los $\frac{15}{16}$ de la mayor. Calcúlese en litros cada una de ellas.

855. Un profesor quiere repartir 75 buenas notas á 4 alumnos por una oposición de ortografía; el 1º tiene un punto; el 2º, dos; el 3º, tres, y el 4º, cuatro; ¿cuántas notas le corresponden á cada uno en proporción de su mérito?

856. Un testador deja \$ 11 100 á 2 sobrinos, 3 sobrinas y 5 primos, advirtiéndole que la parte de cada primo es los $\frac{3}{4}$ de la de una sobrina, y que la de cada sobrina no es más que los $\frac{4}{5}$ de la de un sobrino; ¿cuánto le cabe á cada uno de los partícipes?

857. Divídase 156 en tres partes tales que la 1ª sea á la 2ª como 5 es á 4, y la 1ª á la 3ª como 7 es á 3.

858. En una fábrica se emplean hombres, mujeres y niños; se han pagado \$ 132 por 25 jornales de hombre, 21 de mujer y 26 de niño. Los precios son tales que 9 jornales de mujer cuestan lo mismo que 16 de niño, y 8 jornales de hombre tanto como 15 de mujer; ¿cuál es el jornal de cada hombre, mujer y niño?

859. Un rentista divide su capital en dos partes que son entre sí como 3 es á 4; la 1ª impuesta al 5 $\frac{0}{100}$ y la 2ª, al 4,50 $\frac{0}{100}$; el rédito anual es de \$ 1 650, ¿cuál es el capital?

860. Teodomiro divide su capital en tres partes, que son entre sí como los números 2, 5 y 8; la 1ª impuesta al 6 $\frac{0}{100}$; la 2ª, al 5 $\frac{0}{100}$, y la 3ª, al 4 $\frac{0}{100}$; esta última le produce anualmente \$ 2 400; ¿cuál es el capital?

861. Un banquero impone los $\frac{2}{5}$ de un capital al 5 $\frac{0}{100}$ y los deja durante 18 meses; impone lo demás al 4,50 $\frac{0}{100}$ y lo deja durante 20 meses, ambas partes le producen \$ 2 250; ¿cuál es el capital total, y cuáles las partes?

LECCIÓN XII

REGLA DE COMPAÑÍA

899. **Regla de compañía** es una operación que tiene por objeto dividir entre varios socios la ganancia ó pérdida que resulta de sus negocios.

Nota. — Esta regla es la misma que la de los repartimientos proporcionales, aplicada á un caso particular.

900. La regla de compañía es de dos clases: *simple y compuesta*.

901. La regla de compañía es **simple** cuando los caudales de los socios han sido impuestos durante un mismo tiempo.

902. La regla de compañía es **compuesta** cuando todos los caudales de los socios no han sido impuestos durante un mismo tiempo.

903. Las ganancias ó pérdidas deben repartirse proporcionalmente á los capitales y al tiempo durante el cual han estado impuestos en el negocio.

904. La cantidad repartible entre los socios se llama **dividendo**; y la suma de las imposiciones, **capital social**.

§ I. Regla de compañía simple.

905. **EJEMPLO.** — *Tres socios han ganado en sus negocios 18 000 sucres; ¿qué parte le toca á cada uno, sabiendo que la imposición del primero fue de \$ 20 000; la del segundo de 30 000, y la del tercero de 36 000?*

Representemos las ganancias por x , y , z , y tendremos :

$$\frac{x}{20\,000} = \frac{y}{30\,000} = \frac{z}{36\,000}$$

ó simplificando $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{18} = \frac{18\,000}{43}$

de donde :

$$x = \frac{18\,000}{43} \times 10 = 4\,186 \frac{2}{43}; \quad y = \frac{18\,000}{43} \times 15 = 6\,279 \frac{3}{43}$$

$$z = \frac{18\,000}{43} \times 18 = 7\,543 \frac{38}{43}$$

Las proporciones pueden también escribirse como sigue :

$$\left. \begin{array}{l} 20\,000 \\ + 30\,000 \\ + 36\,000 \end{array} \right\} : 18\,000 = \left\{ \begin{array}{l} 20\,000 : x \\ 30\,000 : y \\ 36\,000 : z \end{array} \right.$$

MÉTODO DE LA UNIDAD

Análisis. La suma de los caudales impuestos es

$$20\,000 + 30\,000 + 36\,000 = S\,86\,000$$

Con $S\,86\,000$ impuestos, los socios han ganado $18\,000$, con 1 habrían ganado $86\,000$ veces menos, esto es, $\frac{18\,000}{86\,000}$, y el 1° que impuso $20\,000$ sucres, ganará una suma $20\,000$ veces mayor, á saber, $\frac{18\,000 \times 20\,000}{86\,000} = S\,4\,186 \frac{2}{43}$.

Del propio modo encontraremos la ganancia de los otros dos.

La fórmula de las proporciones se expresa del modo siguiente : *La suma de las cantidades impuestas es á la ganancia (ó á la pérdida) como la imposición de cada socio es á la parte que le toca.*

§ II. Regla de compañía compuesta.

906. EJEMPLO. — *Dos negociantes tratan de repartirse una ganancia de $S\,3\,450$; se desea saber á cómo le toca á cada uno, habiendo impuesto el 1° $S\,3\,000$ durante 15 meses, y $S\,1\,200$ el 2° , durante 20 meses.*

Como el 1º impuso \$ 3 000 durante 15 meses, debe gozar del mismo beneficio que si hubiera impuesto

$$3\,000 \times 15 = \$ 45\,000 \text{ durante 1 mes}$$

y el 2º, $1\,200 \times 20 = 24\,000$ —————

Por consiguiente :

$$\frac{x}{45\,000} = \frac{y}{24\,000} = \frac{3\,450}{69\,000}$$

ó simplificando, $\frac{x}{45} = \frac{y}{24} = \frac{3\,450}{69}$

de donde : $x = \frac{3\,450}{69} \times 45 = 2\,250$

$$y = \frac{3\,450}{69} \times 24 = 1\,200$$

PROBLEMAS SOBRE LA REGLA DE COMPAÑÍA

862. Habiéndose asociado cuatro comerciantes han formado un capital de \$ 45 000, para el cual han contribuido de igual modo; al disolverse la sociedad se encuentran con una ganancia de \$ 26 877. Al 1º le tocan 13 partes; al 2º, 11; al 3º, 8, y al 4º, 7; ¿qué suma recibirá cada comerciante, tanto por su imposición como por la ganancia?

863. Cinco hacendados se han concertado para un negocio; el 1º ha puesto \$ 800; el 2º, \$ 100 más que el primero; el 3º, \$ 100 más que el 2º, y así sucesivamente, aumentando siempre \$ 100; habiendo ganado entre todos \$ 1 800; ¿á cómo le sale á cada uno?

864. Tres negociantes han formado un capital de \$ 4 928, que les ha producido \$ 616 : al 1º, le han cabido \$ 160; al 2º, \$ 206, y al 3º, \$ 260; ¿qué suma impuso cada uno?

865. Dos especuladores embarcaron 6 000 toneles de trigo para Cuba; en el trayecto un huracán obligó á echar 650 al mar, y resultaron 250 dañados; pregúntase cuántos toneles perdió cada uno de ellos, sabiendo que el 1º había embarcado 3 500.

866. Habiendo hecho bancarrota Fabio, resulta deudor de \$ 21 000 á Geroncio, á Heraclio y á Basilio; el crédito del 1º y del 2º es como 2 es á 3, el del 2º y del 3º, como 4 es á 5; ¿qué suma le corresponde á cada acreedor?

867. Una compañía de 4 personas ha ganado, en 6 años, \$ 25 000 sobre un capital de \$ 54 980; la suma impuesta por la 1ª es á la de la 2ª como 3 es á 4; la de la 2ª á la de la 3ª como 6 es á 7; por último la de la 3ª á la de la 4ª como 5 es á 6. Pregúntase cuál es la suma impuesta por cada persona, y cuál su ganancia.

868. Tres empresarios se han concertado para un negocio; el 1º ha impuesto \$ 4 000 por 3 años; el 2º, \$ 7 000 por 2 años, y el 3º \$ 4 500 por 4 años; si han realizado un beneficio de \$ 3 600, ¿á cómo le cabe á cada uno?

869. Dos personas se han asociado para un negocio : la 1ª ha puesto \$ 2 300 por 2 años ; y la 2ª, \$ 1 500 por 18 meses ; dígase qué parte de la ganancia de \$ 1 400 le corresponde á cada una de ellas.

870. La suma de las imposiciones de dos socios es de \$ 24 600, y la del 1º excede á la del 2º en \$ 2 400 ; ¿ qué parte le toca á cada uno, sobre un beneficio de \$ 8 610 ?

871. Fabricio y Valentín han realizado un beneficio igual al 4 ⁰/₁₀ del fondo social ; la parte del beneficio del 1º es de \$ 2 600, la del 2º, de \$ 1 840 ; calcúlese la suma impuesta por cada uno de ellos.

872. Marcelino ha puesto en un negocio \$ 1 260 ; Norberto, \$ 1 840, y Basilio, \$ 2 520 ; han realizado un beneficio de \$ 0,80 por sucre ; ¿ qué parte del beneficio le toca á cada uno ?

873. Tres personas han realizado un beneficio de \$ 600 ; la 3ª ha recibido por su parte \$ 150 ; la 1ª y la 2ª han recibido tanto por la suma que impusieron como por los beneficios \$ 540 y \$ 810 ; ¿ cuál fue la suma impuesta y la ganancia de cada persona ?

874. Tres sobrinos de un avaro se reparten una herencia : el 1º toma los ⁵/₉ de ella ; el 2º, los ²/₇, y el resto se divide en tres partes iguales. Después de la división han puesto sus capitales en sociedad, y en 4 años han realizado \$ 18 144 de beneficios. Sabiendo que al 2º le tocaron \$ 19 200 por su parte de la herencia, se pregunta : 1º cuál fue la parte del 1º y 3º sobrino ; 2º la ganancia de cada uno, y 3º á qué tanto ⁰/₁₀ han impuesto su dinero.

875. Una empresa iniciada por tres personas ha producido \$ 915 de beneficio neto. Una de ellas recibió por su parte de la ganancia \$ 345 ; las otras dos recibieron tanto por su imposición como por su parte de la ganancia, respectivamente \$ 2 365 y \$ 3 905 ; ¿ cuál fue la imposición de cada una ?

876. Cuatro personas formaron una compañía para 3 años : la 1ª impuso al principio \$ 350, y 5 meses después \$ 2 400 ; la 2ª impuso al principio \$ 8 000, y al cabo de 20 meses sacó la mitad, y 5 meses después \$ 2 400 ; la 3ª impuso \$ 1 500 al principio, y \$ 5 000 al cabo de 2 años ; la 4ª impuso al principio \$ 600, y cada 6 meses aumentaba su imposición de igual suma. Dígase á cómo le cabe á cada una sobre la ganancia que es de \$ 80 000.

LECCIÓN XIII

DERECHOS DE ADUANA

907. Por **derechos de aduana** se entiende el tanto que se paga, con arreglo á arancel ó tarifa oficial, por la introducción de mercaderías.

908. En cada puerto de entrada los gobiernos tienen una oficina pública, llamada **Aduana**, destinada para registrar los géneros y mercaderías, y cobrar los derechos que adeudan.

909. Para el cobro de derechos de aduana, se atiende generalmente al peso de las mercaderías, por kilogramo, comprendido el del embalaje y de los fardos ó cajones en que se transportan, y el del envase para los líquidos.

910. Sobre los derechos de aduana suele hacerse, en el Ecuador, un recargo del 20 % para los partícipes, como colegios, casas de beneficencia, etc., más el 10 % para el pago de la deuda externa.

911. Llámase **peso bruto** el de las mercaderías antes que se haya hecho la rebaja de la tara ni otra deducción.

912. **Peso neto** es el peso real de las mercaderías después de hechas todas las rebajas ó deducciones.

913. Llámase **tara** la parte de peso que se rebaja en los géneros ó mercaderías por razón de la caja, saco ó cosa semejante en que vienen incluidos ó cerrados.

914. Dase el nombre de **aforo** al reconocimiento y valuación de los géneros de comercio para el pago de derechos.

915. EJEMPLO. — *¿A cuánto ascenderá una liquidación de Aduana, por 5 barriles de vino, de 45 kgs. de peso bruto cada uno, y 8 cajas de coñac de 25 kgs. cada una, si el vino paga S 0,10 por kg. y el coñac 0,25, con los recargos del 20 % y del 10 %; pagando además los brls. á razón de 5 cents. cada uno por los derechos de piso, y las cajas á 3 cents?*

SOLUCIÓN

	Peso	Aforo	Derechos
5 brls. de vino, de 45 kg. c/u = 225 kg.;	225 k.	$\times 0,10$	= 22,50
8 c/ de coñac, de 25 kg. c/u = 200	200 k.	$\times 0,25$	= 50,00
			72,50
El 20 % (de partícipes) = tomar la $\frac{1}{5}$ parte =			14,50
El 10 % (para la deuda) = $\frac{1}{2}$ de 14,50			= 7,25
			S 94,25
Piso de 5 brls. á 0,05			0,25
— — 8 c/ á 0,03			0,24
			Total de la liquidación S 94,74

PROBLEMAS SOBRE LOS DERECHOS DE ADUANA

(Para los demás Estados que se sirvan de esta Aritmética, deben buscar los profesores problemas relativos á las leyes y usos del país.)

Nota. — En cada uno de los problemas siguientes debe recargarse el 20 % para los partícipes, y el 10 % para el pago de la deuda externa.

877. ¿Qué derechos deben pagarse por las mercaderías siguientes : 3 cajones de libros, de 10 kg. de peso $\frac{1}{2}$, á 2 cent. de aforo por kg.; — 2 cajas de floreros de losa, de 45 kg. $\frac{1}{2}$, á 5 cent.; — 2 cajas de instrumentos de física, de 27 kg. $\frac{1}{2}$, á 10 cent. — Piso de 3 cajones, á 5 cent. — de 4 cajas, á 3 cent.?

878. Un comerciante de Riobamba recibe de Londres : 10 piezas de merino, de 30 kg. $\frac{1}{2}$, á 50 cent.; — 6 doc. de pañuelos de lino, de 4 kg. doc., á 25 cent.; — 6 doc. de sombreros de fieltro, de 16 kg. doc., á \$ 1; — 10 doc. de medias de lana, de 5 kg. doc., á 50 cent.; pregúntase á cuánto ascenderán los derechos, según los aforos indicados, si se paga el piso de 6 bultos, á 5 cents.

879. Liquidese la cuenta siguiente, calculando los derechos que por ella deben pagarse : 4 botes de aceite para máquinas, de 2,50 kg. $\frac{1}{2}$, á 0,05 de aforo; — 2 doc. de cajitas de betún, de 3 kg. doc., á 0,25; — 6 botes de tinta de imprenta, de 1 kg. $\frac{1}{2}$, á 0,02. — Piso de 4 B/ á 0,05; y de 2 B/ á 0,03.

880. Ubaldo recibe las mercaderías siguientes, que le importan \$ 200 : 1 cajón de pizarras para escribir, de 25 kg. de peso, á 0,02 el kg.; — 10 kg. de lápices de pizarra, á 0,02 kg.; — 1 fardo de papel de escribir, de 30 kg. á 0,10; — 2 500 sobres de cartas, de $\frac{1}{2}$ kg., á 0,10 kg.; — 6 gruesas de lápices de plomo, de $\frac{1}{2}$ kg. la gruesa, á \$ 1; — 190 cajas de plumas de acero, de 50 kg. de peso, á 10 cents. ¿A cuánto ascenderá el valor total de ellas, después de pagados los derechos, si quiere el dueño ganar el 25 % sobre el precio de compra, y si paga además por piso de 3 cajones y 1 fardo á 0,05 $\frac{1}{2}$, y por 2 cajas, á 0,03?

881. Venancio Escobar ha importado de París : 5 relojes de pared, de 9 $\frac{1}{2}$ kg. de peso $\frac{1}{2}$, á 0,25; — 20 id. de bolsillo, de $\frac{1}{2}$ kg. $\frac{1}{2}$, á \$ 1; — 400 tinteros de plomo, de 92 kg. en todo, á 0,05; — 1 armonio de 77 kg., á 0,05. — Piso de 3 B/ á 0,10; id. de 2 B/ á 0,03. — Búsquese el monto de los derechos que adeuda.

882. ¿Cuánto debe pagar Teófilo á su corresponsal de Guayaquil, por los derechos de las siguientes mercancías, que saca por su cuenta de la aduana? : 3 doc. de navajas de barba, de 2 kg. doc., á 0,50 de aforo; — 3 kg. de agujas y alfileres, á 0,10 kg.; — 6 doc. de cortaplumas, de 1,50 kg., á 0,50; 6 escopetas, de 3 kg. $\frac{1}{2}$, á \$ 1. — Piso de 1 B/, 0,10.

883. ¿Cuál será el monto de una letra sobre Guayaquil, al 3 % de premio, á la orden de Orrantía y Cia., por los derechos que ellos pagan en lugar de S. Gómez de Quito, por las mercancías siguientes? : 12 cajas de cerveza, de 25 kg. $\frac{1}{2}$, á 0,05; — 6 id. de mistelas, de 25 kg. $\frac{1}{2}$, á 0,25; — 10 brs. de vino, de 45 kg. $\frac{1}{2}$, á 0,10. — Piso de 18 cajas á 0,05; id. de 10 brs. á 0,05.

884. ¿Qué liquidación tendrá que formar el Interventor de la aduana, por los derechos que causan las mercancías siguientes? : 10 doc. de carteras, de 3 kg. doc., á \$ 1,50 de aforo; — 10 gruesas de cañutos para

plumas, de 1 kg. la gr. á 0,50; — 3 000 cuadernos en blanco, de 32 kg. el mil, á 0,10. — Piso de 4 cajones á 0,05; — id. de 2 cajas á 0,03.

885. Tres comerciantes reciben una remesa de : 36 pares de botas, de 1,50 kg. el par, á 0,50 de derechos; — 36 pantalones de paño, de 1 kg. $\frac{1}{4}$, á 0,50; — 3 cajones de frazadas de algodón, de 55 kg. cajón, á 0,25; — 6 doc. de medias de algodón, de 2 kg. doc., á 0,25. — Piso de 3 B/ á 0,05; id. de 3 cajas, á 0,03. — ¿ Cuánto le corresponde pagar á cada uno por los derechos?

886. ¿ Qué suma queda debiendo C. Vivar de Cuenca por los derechos que causan las mercancías siguientes? : 4 doc. de cajas de sardinas, de 2,50 kg. doc., á 0,25; — 4 kg. de nueces, á 0,05; 6 kg. de fideos, á 0,05; — 12 cajas de pasas, de $\frac{1}{2}$ kg. $\frac{1}{4}$, á 0,05; — 3 kg. de almendras, á 0,05. — Piso de 2 cajones, á 0,05; id. de 2 cajas, á 0,03.

887. Líquidese la cuenta siguiente, calculando los derechos que por ella se deben : 2 cajas de perfumería, de 2 kg. $\frac{1}{4}$, á 1,50 de aforo; — 4 doc. de peines, de 1 kg. en todo, á 0,25; — 1 doc. de paraguas de seda, de 4 kg. en todo, á 0,50. — Piso de 1 B/ 0,10.

LECCIÓN XIV

CUENTAS DE ALMACENAJE

916. Almacenaje es el derecho que se paga por conservar las mercaderías en un depósito ó almacén.

917. Las cuentas de almacenaje contienen el número de artículos recibidos y entregados, con la fecha de cada transacción ó ajuste.

918. El amacenaje se calcula ordinariamente por meses de 30 días, y á cierto precio por barril, fardo, cajón, etc.

El número de artículos sometidos al almenaje durante un mes ú otro tiempo convenido, se determina generalmente á un término medio.

919. Para encontrar el término medio de almacenaje durante un mes ó cualquier otro tiempo, se observarán las siguientes :

Regla I. *Escribir separadamente el número de artículos recibidos y el de los entregados, con sus respectivas fechas ;*

II. *Multiplicar el número de artículos recibidos ó entregados por los días transcurridos desde la fecha de cada recibo ó entrega, hasta la fecha de la última entrega ;*

III. Del total de los productos de los recibos se resta el de los productos de las entregas, y la diferencia se divide por 30, ó por el número de días convenido; el cuociente dará el número de los artículos por los cuales debe pagarse el almacenaje durante el tiempo indicado.

920. EJEMPLO. — Cuánto costará el almacenaje de harinas, á 6 cents. barril, que se han recibido y entregado como sigue : Recibido el 1º de Mayo de 1889, 1 000 bbls.; en Mayo 26, 1 000 bbls. Entregado en Mayo 16, 500 bbls.; en Junio 1º 1 000 bbls.; en Junio 12, 1 100, y en Julio 2, 400?

OPERACIÓN

			bbls.	días	prod.	
1889						
Mayo	1º	Recibido	1 000	$\times 62$	$= 62\ 000$	} $= 136\ 000$
—	26	—	2 000	$\times 37$	$= 74\ 000$	
—	16	Entregado	500	$\times 47$	$= 33\ 500$	
Junio	1º	—	1 000	$\times 31$	$= 31\ 000$	} $= 76\ 500$
—	12	—	1 100	$\times 20$	$= 22\ 000$	
Julio	2	—	400	$\times 0$	$= 0$	
Diferencia						59 500

$59\ 500 : 30 = 1\ 983$ bbls. 34 que se deben pagar por 1 mes;
 $1\ 983,34 \times 0,06 = S\ 119$, importe del almacenaje.

Análisis. El almacenaje que debiera pagarse por los 3 000 bbls. recibidos hasta la última fecha, equivale al que se pagaría por 136 000 en 1 día, si todos hubieran quedado depositados en el almacén durante todo el tiempo; pero como han sido entregados en distintas fechas, no debe pagarse sino por el tiempo medio que han permanecido en depósito, lo cual se conoce dividiendo por 30 días la diferencia que hay entre las sumas de los productos de los barriles recibidos y las de los entregados.

Nota. — Cuando el número de artículos puestos en almacenaje contiene un quebrado menor que un medio, se suele en la práctica no hacer caso del quebrado; pero si éste es mayor que un medio, se lo considera como un artículo completo.

PROBLEMAS SOBRE EL ALMACENAJE

888. ¿Cuánto se pagará por el almacenaje de sal, á 2 cents. carga, recibida y entregada como sigue : en junio 6 de 1888, 120 cargas; en junio 16, 140; en junio 26, 600; en julio, 5,300; en julio 16, 180; en julio 20, 160; todas las cuales han sido entregadas el 1º de agosto?

889. ¿Cuál será el almacenaje de cascarilla, á 8 cents. fardo, por mes, recibida y remitida como sigue : Recibido en julio 1º de 1887, 400 fardos, en julio, 15, 350; en julio 26, 450. Remitido en julio 12, 200 fardos; en julio 20, 400; en agosto 1º, 200, y en agosto 8, 400?

890. Recibido y remitido á cuenta de Indalecio, varios bultos de algodón como sigue : Recibido en enero 1º de 1889, 1848 bultos; en enero 16, 96; en febrero 1º, 240. Remitido en febrero 12, 800; en marzo 1º, 480; en abril 3,320; en abril 10, 250. Búsquese cuántos bultos quedan en el almacén el 1º de mayo, y el importe del almacenaje hasta dicho día, á razón de 6 cents. por bulto y por mes.

891. Recibido en almacenaje el 3 de julio de 1888, 256 bbis de vino, y el 15 de julio siguiente, 381 bbis más; el 18 de julio, remitido 261 bbis, y el 26, 312; el 30 de julio, recibido 321 bbis, y el 8 de agosto, 163; el 16 de agosto, remitido 208 bbis, el 18, 103, y el 19, 115 bbis; el 1º de 7bre., recibido 320 bbis; el 2, 206, y el 7, 342; el 12 de 7bre., remitido 250 bbis; el 18, 321; el 21, 133, y el resto el 27; ¿cuál ha sido el importe del almacenaje, á 6 cents. mensuales por barril?

LECCIÓN XV

REGLA DEL TÉRMINO MEDIO

921. **Regla del término medio** es la operación por la cual se busca un número medio entre varios otros números dados.

922. Llámase **número medio** entre otros el que es menor que unos de ellos y mayor que los demás.

923. **EJEMPLO.** — *Un obrero que ha trabajado durante 4 días, ha ganado el 1º día \$0,90; el 2º \$ 1,50; el 3º \$ 2,75, y el 4º \$ 3,25, ¿cuál es el término medio de su ganancia diaria?*

Análisis. En los 4 días el obrero ha ganado

$$\$0,90 + 1,50 + 2,75 + 3,25 = 8,40$$

en 1 día ganará 4 veces menos, ú $8,40 : 4 = R. \$2,10$

924. Para buscar la cantidad media, ó media proporcional aritmética, entre varias ótras,

Regla. Sumar las cantidades dadas, y dividir el total por el número de ellas.

PROBLEMAS SOBRE LA REGLA DEL TÉRMINO MEDIO

892. Un regimiento ha caminado durante 6 días como sigue : el 1^{er} día 24 millas; el 2^o, 29; el 3^o, 26; el 4^o, 30; el 5^o, 22; el 6^o, 25; ¿cuál es el término medio de su marcha diaria?

893. Para probar un cañón de artillería se han tirado 25 tiros; 10 de ellos han alcanzado á 560 metros; 5 á 590 met.; 6 á 600 met., y 4 á 550 met.; ¿cuál es el alcance medio de dicho cañón?

894. Ocho obreros durante 5 meses se han empleado en tres obras distintas : la 1^a era de 40 met.; la 2^a, de 50, y la 3^a, de 80; por la 1^a obra recibieron \$ 240; por la 2^a, \$ 200; por la 3^a, \$ 240. Se les propone otra obra de 350 met., al precio medio de las tres primeras; ¿cuál será el precio de estos 350 met., y la parte de cada uno?

895. Teodosio hace desmontar 4 hectareas de terreno; como éste no ofrece en todas partes una misma dificultad, el precio ha sido distinto; por la 1^a se pagan \$ 250; por la 2^a, \$ 175; por la 3^a, \$ 163,75, y por la 4^a, \$ 158,25; ¿cuál es el precio medio, y cuánto se ha gastado por todo?

896. Ciriaco compra 850 met. de paño á \$ 3,19; ha vendido 350 á \$ 3,56, 220 á \$ 3,70, y los demás á \$ 3,80; ¿cuánto ha ganado por met., uno con otro?

897. Acisclo recibe \$ 136,40 por semana para pagar á 18 obreros que tiene á sus órdenes; ¿cuánto le quedará para él, al fin del año, si á 5 de los obreros les da á \$ 1,60 por día; á 4 obreros, á \$ 1,20; á 6 de ellos, á \$ 0,60, y á los 3 restantes, á \$ 0,40?

898. Abdón compra té de dos calidades : paga la menor parte á \$ 0,90 la libra, y lo demás á \$ 0,63; ¿cuál es el precio medio de la libra, sabiendo que la diferencia entre la cantidad de á \$ 0,90 y la de á \$ 0,63 es de 306 lbs., y que el cuociente de ellas es 26?

LECCIÓN XVI

REGLA DE MEZCLA Ó ALIGACIÓN

925. *Regla de mezcla ó aligación* es una operación que tiene por objeto resolver los problemas referentes á la combinación ó mixtura de varias sustancias.

926. Ocurren dos casos distintos en la regla de mezcla :

1^o Buscar el precio medio de una mezcla, cuando se co-

nocen las cantidades y los precios respectivos de las sustancias que la componen.

2º Determinar qué cantidad debe tomarse de cada una de las sustancias que componen la mezcla, cuando se conoce el valor de cada una de ellas y el precio medio de la mezcla.

Caso primero.

927. Para encontrar el precio medio de una mezcla,

Regla I. Si el número de las sustancias está expresado por la unidad de medida, se *suman los diferentes precios y se divide el total por la suma de los efectos*;

II. Si hay varias medidas de cada sustancia, se *multiplica el precio de cada una por el número de medidas; se suman los diversos productos, y se divide el total por el número de medidas*;

III. Si se trata de tomar una cantidad en razón doble, triple, etc., se *toman dos, tres veces, etc. el precio y las unidades de dicho objeto*.

928. EJEMPLO 1º. — *Un comerciante tiene vino á S 1, á S 2, á S 5 y á S 6 botella; ¿á cuánto le sale cada una?*

SOLUCIÓN. $1 + 2 + 5 + 6 = S 14$; $14 : 4 = R. S 3,50$ la botella.

929. EJEMPLO 2º. — *Se han mezclado 80 litros de aceite á S 1,80, 95 lit. á S 2,10 y 120 lit. á S 1,90; ¿cuál es el precio medio del litro de esta mezcla?*

DISPOSICIÓN DE LA OPERACIÓN

80 lit. á S 1,80	importan	$80 \times 1,80 = S 144$
95 — 2,10	—	$95 \times 2,10 = 199,50$
120 — 1,90	—	$120 \times 1,90 = 228$
295 —	—	S 571,50

Ya que 295 lit. importan S 571,50, uno solo importará 295 veces menos, ó $\frac{571,50}{295} = R. S 1,937...$

930. EJEMPLO 3º. — *¿Cuánta agua debe añadirse á 46 litros de aguardiente de á 44 cents. cada uno, para que sólo importe 40 cents.?*

Análisis. Los 46 lit. á S 0,44 dan S 20,24; ahora bien, es

menester que vendiendo el litro sólo en 40 cents. también se saquen $S\ 20,24$ de todos ellos. Si dividimos $S\ 20,24$ por $S\ 0,40$, encontraremos el número de litros que deben venderse, esto es, $S\ 20,24 : 0,40 = 50$ lit. 60; para saber los litros de agua que deben añadirse á los de aguardiente, bastará restar el número de éstos de 50 lit. 60, así: 50 lit. 60 — $46 = 4$ lit. 60 de agua.

Caso segundo.

931. Para determinar qué cantidad debe tomarse de cada una de las sustancias que componen una mezcla, para que haya compensación entre sus precios respectivos, siendo los unos superiores, é inferiores los otros al precio medio, se debe notar que se pierde sobre las sustancias, cuyo precio es mayor que el medio, y que se gana sobre aquéllas cuyo precio es inferior, y la operación consiste en igualar la ganancia á la pérdida.

Por ejemplo, si se quiere que un vino de á 40 cent., y de á 60 cent. litro, salga á 45 cent., claro está que tomando igual cantidad de cada precio, se perderá; porque, sobre el vino de á 40 cent., no se ganan más que 5, mientras que se pierden 15 sobre el de á 60.

932. Para resolver el 2º caso de la regla de mezcla,

Regla I. Se escriben unas debajo de otras, por orden de valor, todas las cantidades que representan el precio de los objetos, y también el precio medio, teniendo cuidado de poner éste más á la derecha, para distinguirlo de los demás;

II. Se escribe, en seguida, en frente de cada precio, su diferencia con el precio medio;

III. Se suman las diferencias de los precios inferiores al precio medio, y el total representa la cantidad que debe tomarse de cada unidad de los precios superiores; y vice versa, el total de las diferencias de los precios superiores representa lo que debe tomarse de cada unidad de los precios inferiores; el total de ambas sumas representa el total de los objetos.

933. EJEMPLO 1º. — Un especiero tiene té á 55 y á 80 cents.

la libra; ¿cuánto debe tomar de cada calidad para poder vender la libra al precio medio de 70 cents.?

OPERACIÓN

55	15 ganancia.
70	
80	10 pérdida.
25	

Análisis. Después de haber escrito los precios de los objetos mezclados en una columna vertical, y el precio medio un poco á la derecha, entre el precio superior y el inferior, digo: La diferencia de 55 á 70 es 15, número que escribo en frente de 55; después, la diferencia de 80 á 70 es 10, número que escribo en frente de 80, y resulta que debo tomar 10 lbs. de á 55 cents. y 15 de á 80; la suma 25 representa que habrá en todo 25 libras.

La siguiente explicación dará á comprender la exactitud de este método. Al vender en 70 cents. una libra que no cuesta más que 55 cents., se ganan 15 cents.; sobre 10 lbs. se ganan $10 \times 15 = 150$ cents.; al vender en 70 cents. una libra que importa 80, se pierden 10 cents.; y sobre 15 lbs. se pierden $15 \times 10 = 150$ cents. De este modo la ganancia es igual á la pérdida, y se puede formar la cantidad pedida tomando 10 lbs. de á 55 cents., y 15 lbs. de á 80 cents.

934. EJEMPLO 2º. — ¿Qué cantidad debe mezclarse de un licor de á 24 cents. el litro con 100 lit. de licor de á 20 cent., para que pueda venderse el litro de mezcla en 26 cent. sin perder ni ganar?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

24	2 ganancia
26	
30	4 pérdida.

Análisis. Vendiendo en 26 cent. lo que importa 24, se ganan 2 cent., y vendiendo en 26 cent. lo que importa 30, se pierden 4 cent. Cuando se toman 2 lit.

de á 30 cent., para que la ganancia compense á la pérdida, se deben tomar 4 lit. de á 24 cent.; si sólo se tomara 1 lit. de á 30 cent., debería tomarse una cantidad 2 veces menor de á 24 cent., esto es, $\frac{4}{2}$; y como se toman 100 lit. de á

30 cent. deberá tomarse una cantidad 100 veces mayor de á 24 cent., á saber $\frac{4 \times 100}{2} = 200$ lit.

Nota. — Cuando se trata de mezclar más de dos sustancias, sucede ordinariamente que el problema es *indeterminado*; esto quiere decir que admite varias soluciones, como en algunos de los problemas siguientes.

935. EJEMPLO 3º. — *Baldomero tiene trigo de á S 18, S 19, S 20,50, S 21,50 y de á S 23 el hectolitro; quiere vender 650 hectolitros al precio medio de S 20, de modo que ni pierda ni gane; ¿cuántos debe vender de cada especie?*

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

Precios.	Diferencias.	
$\left\{ \begin{array}{l} 18 \\ 19 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right.$	$\} = 3 \text{ ganancia. } 3 \times 3 = 9$
20		
$\left\{ \begin{array}{l} 20,50 \\ 21,50 \\ 23 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 \\ 1,5 \\ 3 \end{array} \right.$	$\} = 5 \text{ pérdida. } 5 \times 2 = 10$
		$\underline{19}$

Análisis. Como al tomar un hectol. de cada especie, el beneficio total en los precios inferiores es 3, y la pérdida total en los precios superiores es 5, si se toman cinco medidas de cada uno de los precios inferiores, y tres de cada uno de los precios superiores, el beneficio será igual á la pérdida; porque vendiendo al precio medio 3 medidas de cada uno de los precios superiores, se pierden :

$$(3 \times 0,5) + (3 \times 1,5) + (3 \times 3) = 15$$

y vendiendo 5 medidas de cada uno de los precios inferiores, se ganan : $(5 \times 2) + (5 \times 1) = 15$, y hay compensación entre la ganancia y la pérdida; por consiguiente, si, sobre 19 medidas de mezcla, se necesitan 3 de cada uno de los precios superiores, sobre 1 medida de mezcla se necesitará una cantidad 19 veces menor, ó $\frac{3}{19}$; y sobre 650, se

necesitarán 650 veces más, esto es, $\frac{3 \times 650}{19} = 102 \frac{12}{19}$.

Del mismo modo, sobre 19 medidas de mezcla se necesitan 5 de cada uno de los precios inferiores; sobre 1 medida de mezcla, se necesitarán $\frac{5}{19}$, y sobre 650 se necesi-

tarán $\frac{5 \times 650}{19} = 171 \frac{1}{19}$.

PROPORCIONES

$$19:650 = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{array} \right\} : x; \quad x = \left\{ \begin{array}{c} 102 \frac{12}{19} \\ 102 \frac{12}{19} \\ 102 \frac{12}{19} \\ 171 \frac{1}{19} \\ 171 \frac{1}{19} \end{array} \right\}$$

PRUEBA

$$\begin{array}{rclcl} 102 \frac{12}{19} \times 20,50 & = & \frac{1950}{19} \times 20,50 & = & S \ 2103 \frac{18}{19} \\ 102 \frac{12}{19} \times 21,50 & = & \frac{1950}{19} \times 21,50 & = & 2206 \frac{11}{19} \\ 102 \frac{12}{19} \times 23 & = & \frac{1950}{19} \times 23 & = & 2360 \frac{10}{19} \\ 171 \frac{1}{19} \times 18 & = & \frac{3250}{19} \times 18 & = & 3078 \frac{18}{19} \\ 171 \frac{1}{19} \times 19 & = & \frac{3250}{19} \times 19 & = & 3250 \\ & & \text{Total} & & S \ 13000 \end{array}$$

y 650 hectol., al precio medio de S 20, dan $650 \times 20 = S \ 13000$.

936. EJEMPLO 4º. — *Simplicio ha vendido 4 mets. de terciopelo y 7 de paño en S 104; otra vez ha vendido 5 mets. del mismo terciopelo y 3 del mismo paño en S 84; ¿cuánto importa el met. de cada uno de estos dos géneros?*

DISPOSICIÓN DE LA OPERACIÓN

4 mets. de terciop.	+	7 mets. de paño	=	S 104
5 —	—	+ 3 —	—	= 84
20 —	—	+ 35 —	—	= 520
20 —	—	+ 12 —	—	= 336
Diferencia	+	23 —	—	= 184

Análisis. Para resolver este problema, debe igualarse en ambas ventas, sea el número de mets. de terciopelo, sea el de los de paño. Iguaemos pues el número de mets. de ter-

ciopelo. Para esto, multipliquemos toda la 1ª venta por 5, que representa el número de mets. de terciopelo de la 2ª, y toda la 2ª venta por 4, que representa el número de mets. de terciopelo de la 1ª. De este modo tendremos 20 mets. de terciopelo en cada venta; pero resultarán 35 de paño en la 1ª, y 12 en la 2ª; el valor de la primera venta será de \$ 520, y el de la segunda, de \$ 336. Por consiguiente, los \$ 184 que la primera venta habrá producido más que la segunda, son el precio de los 23 mets. más de paño vendidos en la primera que en la segunda vez; luego, el metro de paño sale á $\frac{184}{23} = \$ 8$. Vemos en el problema que 4 mets. de terciopelo y 7 de paño han sido vendidos en \$ 104; pero los 7 mets. de paño importan $8 \times 7 = \$ 56$; los 4 de terciopelo valen entonces $\$ 104 - 56 = \$ 84$, y uno solo, $\frac{84}{4} = \$ 12$.

PROBLEMAS SOBRE LA REGLA DE MEZCLA

899. Narciso tiene dos bbls. de vino, el uno á \$ 0,35 botella, y el otro á \$ 0,45; ¿cuál es el precio medio de la botella?

900. Cornello tiene 80 hectol. de trigo á \$ 17 hectol., y 40 otros á \$ 21; ¿á qué precio medio podrá ceder el hectol.?

901. Heduvigis tiene 60 hectol. de granos á \$ 8; 70 hectol. á \$ 9; 80 hectol. á \$ 10, y 90 hectol. á \$ 11; ¿á qué precio medio debe vender el hectolitro para ganar en todo \$ 160?

902. Un posadero tiene 140 btl. de aguardiente á \$ 0,30, y 250 á \$ 0,40; quisiera ganar 5 cent. en cada una; ¿á cuánto debe venderla en término medio?

903. Prisciliano tiene 3 barriles de vino: el 1º contiene 230 lit. á \$ 0,35 el lit.; el 2º 280 lit., é importa \$ 96, y el 3º, 195 lit. á \$ 0,50 el lit.; si mezcla estos vinos, añadiendo 45 lit. de agua, ¿á cómo le sale el litro de mezcla?

904. Habiendo vaciado dâmaso, los $\frac{3}{4}$ de un tonel de 240 litros, lo llena con vino de á \$ 0,35; ¿á cuánto le sale el litro de mezcla, sabiendo que el primero era de \$ 0,60 el litro?

905. Eleuterio emplea 5 obreros en construir una obra de 202 met.; el 1º hace 9 met. $\frac{2}{3}$ por día; el 2º, $8 \frac{4}{5}$; el 3º, $7 \frac{3}{4}$; el 4º, $5 \frac{1}{3}$, y el 5º, $5 \frac{1}{12}$; ¿cuánto tiempo pondrán para esta obra, si trabajan 12 horas por día?

906. Gabino me debía 408 reales, y me paga con piezas unas de á 5 rs. y otras de á 2 rs.; ¿qué número igual de piezas me dará tanto de la una como de la otra especie?

907. ¿Qué cantidad de agua se debe añadir á 25 lit. de vino de á \$ 0,60 el lit. para que no valga más que \$ 0,50 cada uno?

908. Un mercader tiene diversas especies de maíz á \$ 1,20, \$ 1,60, \$ 2,40, \$ 3, \$ 3,60; quiere vender 650 hectol. á \$ 2, de modo que ni pierda al gane; ¿cuántos debe vender de cada especie?

909. Un consumidor pregunta qué cantidad de agua debe añadir á una botella de vino de á 75 cents. para que le salga sólo á 60.

910. Mauricio quiere comprar café á 48 cents., á 50 y á 60 la libra; ¿cuántas debe tomar de cada precio para completar 850 lbs. al precio medio de 58 cents. cada una?

911. ¿En qué proporción debe comprarse un líquido de á \$ 25 y \$ 19 el hectol. para que salga al precio medio de \$ 21 cada uno?

912. Hermenegildo ha comprado 2 barriles de trementina en \$ 45,60; el 1º cuesta \$ 7,20 más que el 2º, y cada uno de ellos tiene 48 galones; le quieren comprar 70 galones al precio medio de \$ 0,45, ¿cuántos debe vender de cada barril?

913. Espiridión ha comprado 48 lbs. de té, que sale al precio medio de \$ 0,60 la lb.; resulta que 30 de ellas importan á \$ 0,75; ¿cuál era el precio de cada una de las demás?

914. Crescencia quiere comprar 646 lbs. de cuatro especies distintas de queso: la 1ª importa \$ 0,13; la 2ª, \$ 0,23; la 3ª, \$ 0,25, y la 4ª, \$ 0,29; ¿cuántas debe tomar de cada calidad para que la libra le salga á \$ 0,19?

915. Aniceto tiene tabacos de á \$ 50, \$ 36, \$ 30 y \$ 28 el ql.; ¿qué cantidad debe tomar de cada especie para formar 20 qq. á \$ 32 cada uno?

916. Anastasio ha vendido 7 kilog. de azúcar y 2 kilog. de café en 24 fr. 50; en otra ocasión, vendió 5 kilog. del mismo azúcar y 8 kilog. del mismo café en 40 fr. 50; ¿cuánto importa el kilog. de cada uno de estos artículos?

917. Las sustancias que entran en la composición del vidrio son las siguientes, según sus proporciones: 1º arena, 100 partes; 2º sulfato de soda, 44; 3º carbón en polvo, 5; 4º cal apagada, 6; 5º pedazos de vidrios, 20; ¿qué peso de cada sustancia será menester para 832 kilog. de arena?

918. ¿Cuánto aceite á \$ 2,40 el kilog. debe mezclarse con 100 kilog. á \$ 3, para poder vender el kilog. á \$ 2,65 sin perder ni ganar?

919. El mismo problema, si se quiere ganar \$ 0,10 por kilog.

920. Un comerciante tiene vinos á \$ 27, á \$ 32 y á \$ 36 el hectolitro; ¿cuántos hectol. deben tomarse de cada precio para formar una mezcla de 350 hectol. que puedan venderse á \$ 34,50 cada uno, ganando el 15 %?

921. Romualdo tiene vinagre á \$ 0,72, \$ 0,67, \$ 0,65, \$ 0,50 y \$ 0,45 el litro; quiere formar una mezcla de 480 litros, de modo que pueda venderlos á \$ 0,60 sin perder ni ganar; ¿cuántos debe tomar de cada calidad, sabiendo que deben entrar sólo 50 lit. á \$ 0,72 en esta mezcla?

922. Sinforiano ha comprado 80 hectol. de trigo á \$ 24, y 49 hectol. á \$ 21; si mezcla ambas especies, ¿cuál será el precio medio del hectol., y cuál la ganancia del mercader si revende su trigo á \$ 4,90 el doble decalitro?

923. Timoleón saca los $\frac{4}{5}$ de un barril de vino que contiene 228 litros, y vuelve á llenarlo con vino de á \$ 0,45. ¿A cómo sale un litro del vino mezclado, sabiendo que el primero era de á \$ 0,60?

924. Ursicino compra 3 barriles de vino para su uso: el 1º contiene 250 litros á \$ 0,35 $\frac{c}{u}$; el 2º 228 lit. y cuesta \$ 90, y el 3º 195 lit. á \$ 0,45 $\frac{c}{u}$. Si mezcla estos vinos y agrega 40 lit. de agua, ¿á cómo le saldrá el litro de mezcla?

925. A 215 lit. de un vino que importa á \$ 0,40 $\frac{c}{u}$, se añaden 5 lit. de alcohol, á \$ 2,50 el litro; ¿en cuánto debe venderse el litro de mezcla para ganar el 20 % sobre el precio de compra?

926. ¿En qué proporción deben comprarse líquidos á S 25 y á S 19 el hectol. para que salgan á S 23 el hectol.?

927. Valentín tiene 150 hectol. de trigo á S 21 y 140 á S 26; ¿cuántos deben tomarse de cada precio para formar 250 hectol. al precio medio de S 23?

928. Un especiero tiene aceite á S 0,95, á S 0,85, á S 0,75 y á S 0,65 el litro; quisiera ganar en término medio S 0,10 por litro. ¿Cuántos litros debe tomar de cada especie para formar una mezcla de 240 lit. al precio medio de S 0,80?

929. Zacarías tiene coñac á S 0,70, á S 0,80, á S 0,90 y á S 1,10 el litro; quiere formar una mezcla que pueda vender á S 1 el litro y quiere ganar S 0,14 por litro; ¿cuánto tomará de cada calidad para 1 litro de mezcla?

930. Alberto ha comprado 350 lit. de aguardiente á S 0,27 $\frac{1}{u}$; ¿cuánta agua puede añadir para vender el litro á S 0,35 y ganar el 30 $\frac{0}{0}$?

931. Sobre una mezcla de 250 lit. de vino á S 0,45 $\frac{1}{u}$, y de 180 lit. á S 0,48, se quiere ganar 5 cent. por litro; ¿cuál será el precio de éste?

932. Una botella contiene $\frac{3}{4}$ de litro de vino y $\frac{1}{4}$ de agua; ¿cuánta agua debe añadirse para que el vino sea $\frac{1}{3}$ de la mezcla?

LECCIÓN XVII

REGLA DE LIGACIÓN¹

937. Regla de ligación es la misma regla de mezcla aplicada á la combinación de metales fundidos entre sí.

938. La mezcla toma el nombre de *amalgama* cuando entra en ella el mercurio ó azogue.

939. Dase el nombre de *liga* á la porción pequeña de cobre que se echa al oro ó la plata, cuando se bate moneda, para darle más consistencia.

Véanse los n^{os} 664, 665 y 666 sobre lo que es *ley* de una ligación, sobre el modo de obtener el *peso del metal precioso*, y el *peso total* de la ligación,

940. EJEMPLO 1^o. — *Se derriten juntamente 560 gramos de oro de 0,950 de ley, y 450 gramos de 0,580 de ley; ¿cuál es la ley de la nueva barra?*

Ya que la ley de una ligación (664) es el cuociente del

¹ En conformidad con el Diccionario de la Real Academia Española distinguimos las voces *atigación* y *ligación*; pues la primera significa, en general, "mezcla, unión ó incorporación de una cosa con otra", y la segunda, como que expresa la acción y efecto de *ligar*, denota la "mezcla de cierta porción de otro metal con el oro ó con la plata cuando se bate moneda ó se fabrica alguna otra pieza".

peso del metal precioso por el peso total, se obtiene el peso del metal precioso multiplicando el peso total de la ligación por la ley.

Los 560 gr. de la 1ª barra contienen pues

$$560 \times 0,950 = 532 \text{ gr. de oro puro,}$$

y los 450 gr. de la 2ª contienen

$$450 \times 0,580 = 261 \text{ gr. de oro puro.}$$

Así, sobre $560 + 450$, ó 1010 gr. de ligación, hay $532 + 261$, ó 793 gr. de oro puro; la ley de la nueva barra es pues de $\frac{793}{1010}$, ó 0,785 por defecto.

941. EJEMPLO 2º. — *Una barra de plata de 0,835 de ley pesa 1250 gramos. ¿Qué peso de otra barra de 0,950 de ley se le debe añadir para que resulte una barra de 0,900 de ley?*

Se pueden mezclar 50 gr. de 0,835 de ley con 65 gr. de 0,950 de ley. En efecto, al tomar 50 gr. de la ley de 0,835, resultan 50 veces 0 gram. 065 de plata menos que lo que indica la ley de 0,900; y al tomar 65 gr. de la ley de 0,950, resultan 65 veces 0 gr. 050 de plata más que lo que indica la ley de 0,900; luego hay compensación.

Si 50 gr. de 0,835 de ley exigen 65 gr. de 0,950 de ley, un gramo exigirá $\frac{65}{50}$, y 1250 gr. exigirán

$$\frac{65 \times 1250}{50} = R. 1625 \text{ gramos.}$$

942. EJEMPLO 3º. — *Un platero tiene 5 barras de oro, cuya ley es: 1º 0,675; 2º 0,750; 3º 0,805; 4º 0,885, y 5º 0,915; ¿qué cantidad debe tomar de cada una para formar otra barra que pese 758 gramos, y sea de 0,840 de ley?*

DISPOSICIÓN DE LA OPERACIÓN

Tomando los milésimos por unidad, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{l} 675 \\ 750 \\ 805 \end{array} & \begin{array}{l} 165 \\ 90 \\ 35 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} 675 \\ 750 \\ 805 \end{array}} \right\} = 290; 29 \times 2 = 58; \frac{12 \times 758}{94} = 96 \text{ gr. } 766 \\ & 840 & \\ \begin{array}{l} 885 \\ 915 \end{array} & \begin{array}{l} 45 \\ 75 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} 885 \\ 915 \end{array}} \right\} = 120; 12 \times 3 = 36; \frac{29 \times 758}{94} = 233 \text{ gr. } 851 \\ & & \underline{\hspace{1cm}} \\ & & 94 \end{array}$$

Análisis. Tomando 1 gramo de cada una de las barras de

ley inferior, tenemos que sus diferencias con la ley media dan $165 + 90 + 35 = 290$ milés. Tomando 1 gramo de cada una de las otras barras, tenemos un total de $45 + 75 = 120$ milés., de sus diferencias con la ley media. Busquemos cuánto debe tomarse de cada una de las leyes superiores cuando se toma 1 gr. de cada una de las inferiores. Como la suma de las diferencias de las leyes inferiores es, en este caso, de 290 milés., la suma de las diferencias de las superiores debe también ser de 290; por tanto :

Para tener una diferencia de 120 milés. de las leyes superiores, debe tomarse 1 gramo de cada una de estas leyes; para tener 1 milés., deberán tomarse 120 veces menos, ó $\frac{1}{120}$ de gr., y para tener 290 milés., se deberán tomar 290 veces más $5 \frac{1 \times 290}{120} = \frac{29}{12}$. Así pues, cuando se toma 1 gr. de cada una de las leyes inferiores, deben tomarse $\frac{290}{120}$ ó $\frac{29}{12}$ de gramo de cada una de las superiores. Multiplicando 1 y el quebrado $\frac{290}{120}$ por 120, vemos que cuando se toman 120 gr. de cada una de las leyes inferiores, se deben tomar 290 gr. de cada una de las superiores. Para abreviar, dividamos 120 y 290 por 10, lo que da 12 y 29.

Cuando se toman 29 gr. de cada una de las barras de a 0,885 y 0,915, se deben tomar 12 de cada una de las otras tres; y se toman por consiguiente $12 \times 3 = 36$ gr. de las leyes inferiores, y $29 \times 2 = 58$ de las superiores, formando así $36 + 58 = 94$ gr. de ligación de 0,840 de ley.

Para obtener 94 gr. de liga, se toman 12 gr. de cada una de las leyes inferiores; para obtener 1 gr. de liga, se necesitará una cantidad 94 veces menor, ó $\frac{12}{94}$, y para obtener 758 gr. de liga, será menester una cantidad 758 veces mayor, ó $\frac{12 \times 758}{94} = 96$ gr 766; del propio modo encontraremos que de cada una de las leyes superiores deberán tomarse 233 gr. 851.

943. EJEMPLO 4º. — *Una barra de plata pesa 3500 gr. y tiene 0,815 de ley; ¿qué cantidad de plata pura se le debe añadir para darle la ley de 0,835?*

Como la cantidad de cobre no varia, el que está contenido

en la barra dada es los $\frac{185}{1000}$ del peso total, y pesa por consiguiente $\frac{3500 \times 185}{1000} = 647$ gr. 50.

En la nueva barra que se pide, el cobre debe representar los $\frac{165}{1000}$ del peso total; luego los $\frac{165}{1000}$ igualan á 647 gr. 50;

$\frac{1}{1000}$ será $\frac{647,50}{165}$, y los $\frac{1000}{1000}$ serán

$$\frac{647,50 \times 1000}{165} = R. 3924,24, \text{ peso total.}$$

Por consiguiente, $3924,24 - 3500 = 424$ gr. 24, cantidad de plata que debe añadirse.

PROBLEMAS SOBRE LA REGLA DE LIGACIÓN

933. Tiene un platero dos barras de plata: la una de 0,920 de ley, y la otra de 0,840; si liga un peso igual de cada una de las barras, ¿cuál será la ley de la nueva aleación?

934. Si se ligan dos barras de plata, la una de 27^{ks} 50 de peso y 0,940 de ley, y la otra de 8^{ks} 75 de peso y 0,870 de ley; ¿qué ley tiene la nueva barra?

935. Si se ligan 3^{ks} 200 de plata pura y 5 kilog. de una aleación que tiene 0,650 de ley; ¿qué ley tiene la nueva liga?

936. Se derriten tres barras de plata, de 0,750, 0,840 y 0,950 de ley respectivamente, que pesan la 1^a 5 kilog., la 2^a 3^{ks} 800, y la 3^a 3^{ks} 500; ¿cuál es la ley de la aleación que resulta?

937. Una barra de plata pesa 1 kilog. y tiene 0,875 de ley; ¿qué debe hacerse para que tenga: 1^o 0,900, y 2^o 0,835 de ley?

938. Un platero tiene dos barras de oro de 95 decagramos cada una, la 1^a de 0,920 y la 2^a de 0,750 de ley; ¿cuántos gramos de la 2^a deben añadirse á la 1^a para reducirla á la ley de 0,840?

939. ¿Qué cantidad de cobre debe añadirse á una barra de plata que pesa 635 gr. y tiene 0,920 de ley para que resulte una aleación de 0,835 de ley?

940. ¿Qué cantidad de oro puro debe añadirse á una barra de oro de 548 gr. y de 0,840 de ley, para que resulte una barra de 0,900 de ley?

941. ¿Qué cantidad debe alearse de dos barras de plata de 0,800 y de 0,950 de ley respectivamente, para acuñar 225 piezas de 1 suere?

942. ¿Qué cantidad de plata de 0,920, 0,850, 0,740 y de 0,720 de ley es menester para formar 4 kg. 65 de aleación de 0,800 de ley?

943. Una barra de plata de 0,875 de ley pesa 2 340 gr.; preguntase qué cantidad de cobre se le debe añadir para reducirla á la ley de 0,835.

944. Con los mismos datos, se pregunta qué cantidad de plata debería quitarse de la barra, para reducirla también á 0,835 de ley.

945. Con tres barras de 0,720, 0,840 y 0,950 de ley se trata de formar una aleación de 0,900 de ley que pese 5 100 gr.; ¿qué cantidad debe tomarse de cada barra?

LECCIÓN XVIII

REGLA DEL TIEMPO PARA LOS PAGOS

Ó DE VENCIMIENTO MEDIO Ó COMÚN

944. La regla del tiempo para los pagos es una operación que tiene por objeto averiguar en qué tiempo deben verificarse los pagos, según el convenio de los deudores y acreedores.

945. Ocurren dos casos en la regla del tiempo para los pagos.

Caso primero.

946. En el 1^{er} caso de la regla del tiempo para los pagos se busca en qué época debe hacerse un solo pago en lugar de hacer varios en distintos tiempos, para que haya compensación en los intereses recíprocos.

947. Para resolver el 1^{er} caso de la regla del tiempo para los pagos,

Regla. Se multiplica cada pago por el tiempo de su crédito, y se divide la suma de los productos por la suma de los pagos; el cuociente dará el tiempo pedido.

948. EJEMPLO 1^o. — Un obrero debe S 24 pagaderos como sigue: S 4 al cabo de 2 meses, S 8 al cabo de 5 meses, y S 12 al cabo de 8 meses. Se conviene con su acreedor en hacerle un solo pago; ¿en qué tiempo debe efectuarlo para que haya compensación?

OPERACIÓN

$$\begin{array}{r}
 S \quad 4 \times 2 = S \quad 8 \\
 \quad 8 \times 5 = \quad 40 \\
 \quad 12 \times 8 = \quad 96 \\
 \hline
 \quad 24 \qquad 144 \\
 S \ 144 : 24 = 6 \text{ meses.}
 \end{array}$$

Análisis. La razón de esta operación es que se supone que el dinero aprovecha en manos del poseedor en proporción del tiempo que lo tiene á su disposición. Así es que se gana, por ejemplo tanto con S 2 en 3 meses, como con S 6 en 1 mes. Por esto, en este ejemplo, multiplico 4 por 2, y me da S 8, que, por la misma razón, producirán durante

1 mes tanto como los S 4 durante 2 meses. Del propio modo multiplico las demás sumas por su tiempo respectivo, y encuentro por total de los productos S 144, que producirían tanto durante un mes como las sumas particulares durante el tiempo expresado en el problema: y como la suma de los productos se forma de la multiplicación de todas las sumas por los distintos tiempos, es evidente que al dividirla por la suma debida, debe encontrarse el tiempo medio del pago.

949. EJEMPLO 2º. — *¿Cuál es el vencimiento medio de los 4 pagarés siguientes: el 1º de S 3000 el 15 de Marzo; el 2º de S 2500 el 18 de Abril; el 3º de S 5000 el 1º de Mayo, y el 4º de S 3400 el 25 de Junio?*

OPERACIÓN

S 3000 el 15 de Marzo	0 días	
2500 al 18 de Abril	× 34 días	85 000
5000 al 1º de Mayo	× 47 días	235 000
3400 al 25 de Junio	× 102 días	346 800
13900		666 800

$$666800 : 13900 = 47 \frac{135}{139}, \text{ sea 48 días.}$$

Análisis. El vencimiento buscado debe ser tal que un solo pagaré de S 13900 en este vencimiento dé el mismo descuento que los 4 pagarés reunidos, si fueran negociados en un mismo día.

Multiplicando cada suma por el tiempo de su crédito y sumando los productos, tenemos 666800, cantidad que, dividida por la suma de los pagarés, S 13900, da por cociente $47 \frac{135}{139}$, sea 48 días; el vencimiento medio caerá pues 48 días después del 15 de Marzo, esto es, el 2 de Mayo.

Caso segundo.

950. En el 2º caso de la regla del tiempo para los pagos se busca cuánto debe diferirse un pago, para compensar los adelantos que se han hecho.

951. Para resolver el caso 2º de la regla del tiempo para los pagos,

Regla 1. *Se multiplica la suma debida por el tiempo de su crédito;*

II. Se multiplican igualmente las sumas adelantadas por el tiempo que el deudor las ha guardado en su poder;

III. Se suman los productos, y el total de ellos se resta de la deuda total multiplicada por el tiempo del crédito;

IV. Se parte la diferencia por lo que falta que pagar; el cuociente será el tiempo en que debe pagarse el resto de la deuda.

952. EJEMPLO 1º. — He comprado S 180 de mercaderías á 8 meses plazo; al cabo de 4 meses he pagado S 30, y 2 meses después, S 40; ¿cuánto tiempo debo guardar lo demás para compensar los adelantos que he hecho?

OPERACIÓN

Sumas adelantadas.

$30 \times 4 = 120$	Suma debida	$180 \times 8 = 1440$
$40 \times 6 = 240$	Suma adelantada	70 360
70	360	Diferencia 110 1080
$1080 : 110 = 9 \frac{9}{11}$ meses.		

Análisis. S 180 en 8 meses producirán al deudor como S 1440 en 1 mes, y, puesto que guarda consigo S 30 durante 4 meses, y S 40 durante 6 meses, ha debido sacar de estas dos sumas un interés igual al que le produjeran S 360 en 1 mes. Ahora bien, el deudor debe conservar las distintas partes 30, 40, 110 de su deuda, ó S 180, de modo que la suma de los intereses diversos sea igual á los que S 1440 le producirían en 1 mes; y puesto que las dos primeras partes S 30 y S 40, mientras que las tiene á su disposición, le producen tanto como S 360 en 1 mes; de los S 110 que no ha pagado todavía es de donde ha de sacar los intereses restantes, los cuales evidentemente son iguales á los que producirán en 1 mes los S 1080, que son la diferencia de 1440 á 360; y como el cuociente de la división de 1080 por 110 es $9 \frac{9}{11}$, claro está que sólo al cabo de 9 meses $\frac{9}{11}$ de mes, serán iguales los intereses de S 110 á los que producen S 1080 en 1 mes; luego el deudor debe guardar los S 110 durante $9 \frac{9}{11}$ meses, y no hacer este tercer pago sino 3 meses $\frac{9}{11}$ después del segundo.

953. EJEMPLO 2º. — Sobre una suma de S 2800 paga-

deros el 20 de Mayo, se han dado á buena cuenta \$ 1800 el 15 de Abril; se pregunta en qué época deberán pagarse los \$ 1000 restantes para que haya compensación en los intereses.

Análisis. El interés perdido por el deudor sobre los \$ 1800 pagados el 15 de Abril, esto es, 35 días antes del vencimiento, se halla representado por $1800 \times 35 = \$ 63000$; y como los \$ 1000 restantes deben producir al deudor un interés igual, encontraremos el número de días necesarios para esto, partiendo 63000 por 1000, esto es, 63 días; luego, los \$ 1000 serán pagaderos 63 días después del 20 de Mayo, á saber, el 22 de Julio.

Si en vez de un solo pago efectuado el 15 de Abril, hubiera dado el deudor \$ 1000 el 15 de Abril, y \$ 800 el 30 del mismo mes, habríamos tenido por intereses de los pagos anticipados:

$$\begin{array}{rcl}
 \$ 1000 \text{ el 15 de Abril} & \times 35 \text{ días} & 35000 \\
 800 \text{ el 30 de } & - \times 20 \text{ días} & 16000 \\
 \hline
 \$ 1800 & & 51000
 \end{array}$$

y por vencimiento del último pago, 51000 : 1000 que están por pagarse, = 51 días, esto es, 51 días después del 20 de Mayo, sea el 10 de Julio.

PROBLEMAS SOBRE LA REGLA DEL TIEMPO

PARA LOS PAGOS

946. Bonifacio ha comprado \$ 4750 en paños y otros mercaderías, debiendo pagar cada mes $\frac{1}{5}$ de la deuda; ¿de cuánto será cada pago?

947. Prudencio debe \$ 15960 pagaderos del modo siguiente: $\frac{1}{4}$ al contado, los $\frac{2}{5}$ al cabo de 6 meses, y el resto al cabo de 1 año; ¿de cuánto será cada pago?

948. La suma de \$ 1710 debe ser pagada en dos dividendos, la mitad al cabo de 6 meses, y lo demás dentro de 10; si se quiere hacer un solo pago, ¿cuándo deberá verificarse?

949. Veinticinco toneles de vino han costado \$ 1125 pagaderos en dos plazos, á saber: \$ 525 dentro de 6 meses, y lo demás 3 meses después; el comprador desea hacer un solo pago; ¿cuándo deberá efectuarlo?

950. El 1° de enero de 1888 dió un mercader tres libranzas: la 1ª de \$ 500, pagaderos al cabo de 30 días; la 2ª de \$ 400, pagaderos al cabo de 60 días, y la 3ª de \$ 600, pagaderos dentro de 90 días; ¿cuál ha sido el tiempo medio del pago?

951. Feliciano ha hecho el 15 de mayo de 1887 una compra de varios artículos por \$ 8000, cuya $\frac{1}{5}$ parte debería pagar al cabo de 6 meses, otro $\frac{1}{5}$ dentro de 8 meses, y lo demás al cabo de 10 meses; pero como desea hacer un solo pago, pregunta cuándo debe verificarlo.

952. Silverio debe \$ 1 895,20 por 2 368 galones de coñac, pagaderos dentro de 12 meses; pero como ha pagado 633 gals. al cabo de 10 meses, se pregunta cuándo deberá pagar el resto.

953. He comprado á Celestino \$ 432 de mercancías, á 6 meses plazo. Al cabo de 1 mes le he dado \$ 75, y 5 meses después, \$ 200; ¿cuánto tiempo después de la expiración de los 6 meses, deberá pagar el resto?

954. Eulogio compra \$ 2 829,75 de café, y desea pagarlos en tres dividendos: el 1º es al 2º como 4 es á 5, y el 3º es igual á la mitad del 2º; el 1º debe satisfacerse al cabo de 4 meses; el 2º, al cabo de 7 meses, y el 3º dentro de 1 año. Si paga \$ 975 al cabo de 6 meses, ¿durante cuánto tiempo puede guardar lo demás?

955. Un empresario ha construido una casa por \$ 24 140 pagaderos al cabo de 15 meses; pero como necesita fondos, el propietario le adelanta \$ 11 388 de 8 meses; ¿cuánto tiempo debe guardar el resto para compensar el adelanto que ha hecho?

956. Anselmo ha vendido \$ 8 400 de mercancías á 12 meses plazo, y ha recibido $\frac{1}{3}$ de esta suma al cabo de 5 meses; ¿en qué tiempo recibió los $\frac{2}{3}$ de la misma?

957. Eusebio debía \$ 150 pagaderos al cabo de 13 meses; ha pagado los $\frac{2}{3}$ antes del vencimiento, de modo que puede guardar el resto 2 años sin perjudicar á su acreedor; ¿cuándo pagó los $\frac{2}{3}$?

958. Un negociante debe 3 pagarés de igual valor, y vencibles, el 1º al cabo de 5 meses, el 2º al cabo de 9 meses y el 3º al cabo de 1 año 3 meses. Los paga dando al contado \$ 1 780, y firmando un pagaré de \$ 865 vencible al cabo de 3 meses; ¿cuál era el valor de los 3 pagarés, si el tanto del descuento es el 6 $\frac{0}{10}$?

959. Julián compra mercancías en \$ 3 600 pagaderos al cabo de 15 meses; pero habiendo pagado \$ 2 400 antes del vencimiento, guarda los \$ 1 200 restantes durante 3 años 9 meses; ¿en qué época hizo el primer pago?

960. ¿Cuál es el vencimiento medio de las cuatro letras siguientes: la 1ª de \$ 500 pagaderos el 1º de abril; la 2ª de \$ 640, el 4 de junio; la 3ª de \$ 860, el 1º de agosto; la 4ª de \$ 900, el 5 de setiembre?

961. Una deuda de \$ 6 127,50 debe ser satisfecha por quintas partes: la 1ª al contado, la 2ª al cabo de 4 meses, la 3ª al cabo de 8 meses, la 4ª al cabo de 12 meses, y la 5ª al cabo de 15 meses; si el deudor quiere hacer un solo pago, ¿en qué época debe verificarlo?

LECCIÓN XIX

REGLA CONJUNTA

954. La regla conjunta es una proporción compuesta que tiene por objeto determinar la relación de igualdad ó equivalencia que hay entre una cantidad dada y otra cantidad unida á la primera por una serie de relaciones conocidas.

955. La regla conjunta se emplea principalmente para determinar la relación que existe entre dos medidas, pesas ó monedas cualesquiera, por medio de la relación que éstas tienen con otras medidas, pesas ó monedas intermedias.

956. Para resolver por las proporciones la regla conjunta, se observarán las siguientes :

Regla I. Colocar las igualdades frente á frentes, en dos columnas, tomando el 1^{er} término como antecedente, y su igual por consecuente, y así en adelante;

II. Si la respuesta debe ser de la misma especie que el primer término, se coloca el término impar debajo de los antecedentes; si no, se lo pone debajo de los consecuentes, escribiendo una *x* en el término desconocido;

III. Suprimir los factores comunes, y dividir el producto por el término correspondiente á *x*, el cuociente será la respuesta.

957. EJEMPLO. — Si 20 lbs. de los Estados Unidos equivalen á 12 lbs. de España; y 15 lbs. de España, á 20 lbs. de Dinamarca; y 40 lbs. de Dinamarca, á 60 lbs. de Rusia; ¿cuántas lbs. de Rusia equivalen á 100 lbs. de los Estados Unidos?

OPERACIÓN

20 lbs. de los EE. UU.	=	12 lbs. de España
15 lbs. de España	=	20 lbs. de Dinamarca
40 lbs. de Dinamarca	=	60 lbs. de Rusia
<i>x</i> lbs. de Rusia	=	100 lbs. de los EE. UU.

Análisis. Colocamos los números dados frente á frente en dos columnas; el primer término es antecedente, y su igual consecuente; ahora bien, como se pregunta qué cantidad será menester de la última especie para igualar á un número dado (100 lbs.) de la primera, escribimos el término impar en el consecuente, y tenemos :

$$20 \times 15 \times 40 : 12 \times 20 \times 60 = 100 : x$$

$$\text{De donde } x = \frac{12 \times 20 \times 60 \times 100}{20 \times 15 \times 40} = 12 \times 10 = 120 \text{ lbs.}$$

MÉTODO DE LA UNIDAD

Análisis. Empezando por la última igualdad en que no está la incógnita, digo : Si 40 lbs. de Dinamarca valen 60 de Rusia, 1 de Dinamarca valdrá 40 veces menos, ó $\frac{60}{40}$,

y las 20 lbs. de Dinamarca mismo valdrán 20 veces más, esto es, $\frac{60 \times 20}{40}$; pero 15 lbs. de España valen como 20 de Dinamarca, luego, 1 lb. de España valdrá 15 veces menos, ó $\frac{60 \times 20}{40 \times 15}$, y las 12 lbs. de España valdrán 12 veces más, á saber, $\frac{60 \times 20 \times 12}{40 \times 15}$; y como 20 lbs. de los EE. UU. valen lo mismo que las 12 de España, 1 lb. de los EE. UU. valdrá 20 veces menos, ó $\frac{60 \times 20 \times 12}{40 \times 15 \times 20}$, y las 100 lbs. de los EE. UU. valdrán 100 veces más, esto es,

$$\frac{60 \times 20 \times 12 \times 100}{40 \times 15 \times 20} = 120 \text{ lbs.}$$

luego á las 100 lbs. de los EE. UU. corresponden 120 lbs. de Rusia.

PROBLEMAS SOBRE LA REGLA CONJUNTA

962. Cuando 100 lbs. de los EE. UU. valen 95 de Italia, y 19 lbs. de Italia equivalen á 25 de Persia; ¿cuántas lbs. de los EE. UU. son menester para igualar á 50 lbs. de Persia?

963. ¿Cuánto costarán 150 gruesas de plumas, suponiendo que 12 gruesas de plumas valen tanto como 6 litros de vino; 9 litros de vino valen lo mismo que 4 kilog. de café; 15 kilog. de café, lo mismo que 5 pañuelos; y 8 pañuelos importan 40 francos?

964. Expresar en francos el valor de 60 pesos de España, sabiendo que 10 pesos de España importan 47 chelines de Inglaterra; que 65 chelines de Inglaterra valen 33 florines de Holanda; y 40 florines de Holanda, lo mismo que 21 rublos de Rusia; y 156 rublos de Rusia, lo mismo que 30 federicos de Prusia, y que 5 federicos de Prusia equivalen á 104 francos?

965. Como 10 libras esterlinas de Inglaterra valen 102,15 florines de Viena, y 50 florines valen 100 marcos de Alemania, y 81 marcos importan 100 fr., se pregunta á cuántos francos equivalen 200 libras esterlinas.

966. Si 11 metros igualan á 12 yardas, y con 314 francos se compran 58 met. de paño, y 32 francos valen 25 chelines; ¿cuántas yardas se podrán comprar con 55 chelines?

967. ¿Cuánto costarán 16 vars. de tela, sabiendo que 6 vars. equivalen á 5 met., que 8 met. importan 27 fr., y que 1 fr. vale \$ 0,20?

968. Si con \$ 37 se compran 87 cánt., y si \$ 16 valen 15 dolares americanos, y 24 dolares igualan á 5 libras esterlinas; ¿cuántos galones americanos podrán comprarse con 35 lbs. esterlinas, sabiendo que 81 galones equivalen á 19 cántaras?

969. ¿Qué suma necesitaría el Gobierno para pagar el sueldo de 7 generales, suponiendo que el de 4 generales es igual al de 9 coroneles, el de 5 coroneles al de 8 comandantes, el de 6 comandantes al de 10 capitanes, el de 12 capitanes al de 16 oficiales, el de 10 oficiales al de 15 sargentos, el de 3 sargentos al de 4 cabos, el de 2 cabos al de 3 soldados, si el de 1 soldado es de \$ 12?

LECCIÓN XX

CAMBIO

958. Por **cambio**, en el comercio, se entiende la operación de recibir ó pagar una suma de dinero en un lugar, equivalente á la que se paga ó recibe en ótro, por medio de *libranzas ó letras de cambio*.

959. Se distinguen cuatro especies de cambios, á saber : *interior, exterior, directo é indirecto*.

960. Cambio **interior** ó **nacional** es el que se hace entre plazas de una misma nación; como entre Quito y Guayaquil.

961. Cambio **exterior** ó **extranjero** es el que se efectúa entre plazas de distintos países; como entre Guayaquil y Londres.

962. Cambio **directo** es el que se hace entre dos plazas que directamente tienen cambio abierto ó convenido, sin intermedio de una tercera, como el que tenemos con Londres, París, Burdeos, Hamburgo, Brema, Nueva York, San Francisco, Panamá, Lima y Valparaíso.

963. Cambio **indirecto** es el que se hace entre dos plazas que no tienen directamente cambio abierto ó conocido, por lo cual es indispensable valerse de otra tercera plaza, que tenga cambio abierto conocido con las dos primeras; así, para mandar del Ecuador una cantidad á Roma, hay que emitir letras sobre Londres, París, etc.

964. Al interés que se paga ó cobra en el cambio se llama *prima de cambio ó corriente del precio de cambio*.

965. El cambio, tocante á la prima ó corriente de su precio, puede estar *á la par, sobre par ó en alza, y bajo de par ó en baja*.

966. Precio **corriente** del cambio es el valor que se paga en una plaza por una letra ó libranza, según la suma girada sobre otra plaza.

967. Según la abundancia ó escasez del dinero ó del papel,

hay beneficio ó daño en el cambio para las respectivas partes contratantes.

968. Cuando el cambio se hace sin premio, se dice que está **á la par**, porque entonces el tomador de la letra entrega al tenedor un valor equivalente al que está expresado en la misma; como cuando se dan S 100 por 500 francos, ó 20 libras esterlinas (L).

969. Se dice que el cambio **no está á la par** cuando el tomador de la letra debe entregar al tenedor un valor mayor ó menor que el expresado en la misma.

970. Llámase **alza** el aumento de precio que toma la moneda en los contratos de cambio, y entonces se dice que el cambio está **en alza ó sobre par**, ó **premio**.

971. Por **baja** se entiende la disminución del precio de la moneda, en los contratos de cambio, y se dice entonces que el cambio está **en baja ó bajo de par**, ó **descuento**.

972. Por lo general, en el Ecuador hay cambio exterior con Inglaterra, Francia, Norte América, y con algunos de los Estados de la América del Sur.

973. Con Inglaterra el cambio se calcula en libras esterlinas, y tiene premio.

La libra esterlina se divide en 20 chelines, y el chelín en 12 peniques. — La libra est. = S5; el chelín = 25 cent.; el penique = 2 cent.

974. Con Francia se calcula el cambio en francos, también con premio.

El franco se divide en 10 décimos, y el décimo en 10 céntimos. — El franco = 20 centavos de sucre; el décimo = 2 centavos.

975. Con los demás Estados con quienes comercia el Ecuador, se calcula el cambio en sucres; con Norte América, siempre con premio; con los demás Estados, unas veces con premio y ótras con descuento.

976. El cambio de Europa con el Ecuador es siempre con descuento.

977. El premio del cambio se calcula en el Ecuador, así como en varios otros países, á un tanto %, que es muy variable.

978. Regla de cambio es la operación por medio de la cual se determina la suma que se abona por el interés de una letra que debe recibirse ó pagarse en lugar distinto de aquél en que se gira.

979. La regla de cambio presenta tres casos :

1º Dada la suma que se entrega al librador de la letra, y conociendo el tanto $\%$, determinar el valor de la letra en la plaza adonde se remite;

2º Determinar lo que debe entregarse al librador de la letra para que éste pague en otra plaza una suma determinada, conociendo el tanto $\%$.

3º Conocido el valor nominal de la letra y la suma por ella pagada, buscar á qué tanto $\%$ se ha tomado la letra.

980. El primer caso acontece cuando la remesa se hace por cuenta de la persona que debe recibirla; y entonces el valor de la letra será igual á la suma entregada más el cambio, si hay premio, ó menos el cambio, si hay pérdida.

981. El segundo caso ocurre cuando se hace la remesa por cuenta del que la envía, pagando éste el cambio de su bolsillo para que la cantidad sea entregada íntegra; y entonces, la suma que debe entregarse es igual á la suma determinada menos el cambio, si hay premio, ó más el cambio, si hay pérdida.

982. El tercer caso puede presentarse con cualquiera de los dos anteriores.

983. Nota. — Como la ley prescribe ya en el Ecuador sólo el uso de la moneda decimal en las operaciones mercantiles, el cambio se calcula simplemente como el descuento, sea buscando el valor nominal ó el efectivo de la letra, según los casos, y no presenta ninguna dificultad.

984. Pueden abreviarse los cálculos, en la regla de cambio, tomando por base que $S100 = 20$ libras esterlinas $= 500$ francos $= 400$ marcos alemanes.

985. EJEMPLO 1º. — *¿Cuántos sucres importan 210 L. Es. al 36 $\%$ de cambio?*

Análisis. Como al 36 $\%$ cada 20 L. Es. cuestan S 136, y en 210 L. E. hay $10 \frac{1}{2}$ veces 20 L. Es., basta multiplicar 136 por $10 \frac{1}{2}$ mentalmente :

$$\left. \begin{array}{l} 136 \times 10 = 1360 \\ 136 \times \frac{1}{2} = 68 \end{array} \right\} = S 1428$$

PRUEBA :
$$x = \frac{136 \times 210}{20} = S 1428$$

986. EJEMPLO 2º. — *¿Cuántos sucres se pagarán por una letra de 2250 francos al 40 % de cambio?*

Análisis. En 2250 frs. hay $4\frac{1}{2}$ veces 500 frs., y como los S 100 al 40 % valen 140, multiplico mentalmente 140 por $4\frac{1}{2}$, así :

$$\left. \begin{array}{l} 100 \times 4 = 400 \\ 40 \times 4 = 160 \\ 140 \times \frac{1}{2} = 70 \end{array} \right\} = S 630$$

PRUEBA : $x = \frac{140 \times 2250}{500} = \frac{14 \times 225}{5} = S 630$

987. EJEMPLO 3º. — *¿Cuántos sucres importan 4100 marcos al 36 % de cambio?*

Análisis. En 4100 marcos hay $10\frac{1}{4}$ veces 400 marcos, que equivalen á S 100; y como el cambio es al 36 %, multiplico mentalmente $136 \times 10\frac{1}{4}$, así :

$$\left. \begin{array}{l} 136 \times 10 = 1360 \\ 136 \times \frac{1}{4} = 34 \end{array} \right\} = S 1394$$

PRUEBA : $x = \frac{136 \times 4100}{400} = \frac{136 \times 41}{4} = S 1394.$

988. EJEMPLO 4º. — *Luis debe remitir S 2500 chilenos á Valparaíso; ¿cuánto importará la letra que compre en Guayaquil, al 35 % de descuento?*

Análisis. Como aquí se trata de descuento, S100 chilenos importan $100 - 35 = S 65$.

Para pagar S 100 en Valparaíso, deben darse S 65 en Guayaquil

$$\begin{array}{l} \text{_____ } 1 \text{ _____ } \text{deberán} \text{ --- } 100 \text{ veces menos, } \text{ó } \frac{65}{100} \\ \text{_____ } 2500 \text{ _____ } 2500 \text{ --- } \text{más, } \text{ó } \frac{65 \times 2500}{100} = \\ \hspace{15em} = S 1625 \end{array}$$

ó simplificando, $65 \times 25 = S 1625$

(En los demás Estados en que se adopte este libro, los profesores dictarán los problemas relativos á las leyes y usos del país.)

PROBLEMAS SOBRE LA REGLA DE CAMBIO

970. ¿De cuántas libras esterlinas, chelines y peniques será una letra sobre Londres, que al 40 % importa en Guayaquil S 286,40?

971. ¿Cuántos francos importarán en Francia S 448 librados desde Quito, al 45 % de premio?

972. ¿Cuántos sucres deberán entregarse en Guayaquil para que, al 40 % de cambio, se reciban en Londres, 40 L, 18 chelines, 6 peniques?

973. ¿Cuántos suces debo pagar en Quito, para recibir en París 1 600 fr., estando el cambio al 40 $\frac{0}{0}$?

974. ¿Cuánto debo pagar de premio por una letra sobre Cuenca, valor de S 850, sabiendo que el cambio está al 3 $\frac{0}{0}$ de premio?

975. ¿Cuántas libras, chelines y peniques importan en Liverpool S 691 remitidos desde Guayaquil, al cambio del 36 $\frac{0}{0}$?

976. ¿Cuántos francos importarán en París S 1 518 librados desde Loja al 50 $\frac{0}{0}$ de cambio?

977. ¿Cuántos suces deberán entregarse en Riobamba para que, al cambio del 35 $\frac{0}{0}$, se reciban en Inglaterra 129 L, 11 chelines, 3 peniques?

978. ¿Qué cantidad debe entregarse en suces para que en Francia importe 6 952,44 francos una letra girada desde Guayaquil, al 39 $\frac{0}{0}$ de cambio?

979. Un comerciante de Esmeraldas entrega 140 arr. de tabaco, á S 5 cada una, por una letra contra Johnson, de Londres, al 40 $\frac{0}{0}$; ¿cuántas L valdrá esta letra?

980. ¿Cuánto debe darse en el Ecuador, por una letra de 3 000 fr. girada contra Garnier, de París, al 44 $\frac{0}{0}$?

981. Ambrosio desea remitir la suma de S 1 500 á un hijo suyo que se educa en Nueva York; ¿cuál será el valor de la letra en dolares americanos, estando el cambio al 44 $\frac{0}{0}$?

982. ¿Cuánto vale en el Ecuador una letra de cambio sobre Londres, de 390 L, 10 chel., á 50 $\frac{0}{0}$ de premio?

983. ¿Cuál será en Inglaterra el valor nominal de una letra por la cual se dan S 7 125,50, estando el cambio al 36 $\frac{0}{0}$?

984. ¿Cuántos francos me costará en París una letra de cambio de S 975,60, al 38 $\frac{0}{0}$ de descuento?

985. Una letra de cambio de 44 064 francos, sobre París, cuesta S 11 456,64; ¿cuál es la prima del cambio?

986. Se han pagado en Guayaquil S 20 700 por una letra de cambio de 3 000 L sobre Inglaterra; ¿á qué tanto $\frac{0}{0}$ ha sido comprada dicha letra?

987. ¿Cuánto debo pagar en Quito por una letra contra Regnault, de Burdeos, de 5 000 fr., si está el cambio al 40 $\frac{0}{0}$?

988. He tomado una letra de 2 500 fr. sobre París, contra Hachette, y he pagado S 700; ¿cuánto he perdido $\frac{0}{0}$?

989. Con S 700 he comprado una letra sobre Londres; ¿de cuántas libras esterlinas será ésta, estando el cambio al 40 $\frac{0}{0}$?

990. ¿A cuánto $\frac{0}{0}$ sale una letra de 200 libras esterlinas, por la que se han pagado S 1 400?

991. ¿Cuántas arr. de cacao pueden comprarse con 80 libras esterlinas, si el cambio se halla al 45 $\frac{0}{0}$, y cada arr. importa S 5?

992. Pregúntase cuánto importará en Guayaquil una letra de 240 L, 15 chelines, 11 peniques, contra Brown, de Londres, estando el cambio entre ambas plazas al 35 $\frac{0}{0}$.

993. Un comerciante de Londres gira á favor de otro de Quito una letra de 124 L, 16 chelines y 5 peniques; ¿qué suma debe entregar en Quito el aceptante, si el cambio se halla al 50 $\frac{0}{0}$?

Algunas monedas extranjeras.

PAÍSES	METALES	NOMBRES	Peso en gramos	Ley	Valor en francos	Valor en sucres
ALEMANIA	Oro	Federico de oro	6,182	0,903	20,78	4,156
		19 florines		»	25	5
	Plata	Thaler, 30 groschen		0,900	3,75	0,75
		$\frac{1}{3}$ de thaler	18,519	0,520	1,25	0,25
		$\frac{1}{6}$ de thaler	9,354	»	0,625	0,125
		Pfenning	4,677		0,01	0,002
AUSTRIA	Oro	Corona	11,111	0,900	34,44	6,888
		Souverain	5,556	0,926	17,74	3,548
		Ducado de Ungría	3,941	0,990	11,90	2,380
	Plata	Florín (100 kreutzers)	12,345	0,900	2,45	0,49
		$\frac{1}{4}$ de florín	5,341	0,520	0,61	0,122
ESPAÑA	Oro	Doblón, ó 100 reales vellón	8,336	0,900	25,84	5,083
		Peso duro, ó 20 »	26,290	»	5,30	1,06
	Plata	$\frac{1}{2}$ duro, ó 10 »	13,145	»	2,65	0,53
		Peseta, ó 4 »	5,258	»	1,06	0,212
		$\frac{1}{2}$ peseta, ó 2 »	2,629	»	0,52	0,104
		Real, ó 34 maravedises	1,314	»	0,26	0,052
EE. UNIDOS de AMÉRICA	Oro	Águila (10 dolares)	16,718	0,900	51,82	10,264
		$\frac{1}{2}$ águila (5 dolares)	8,359	»	25,91	5,132
		Dolar	1,672	»	5,18	1,036
	Plata	Dolar (100 cents.)	26,729	»	5,30	1,06
		$\frac{1}{2}$ dolar (50 cents.)	12,442	»	2,67	0,534
		1 dime (10 cents.)	2,672	»	0,53	0,106
INGLATERRA	Oro	Libra esterlina (de cuenta)			25,21	5,042
		Soberano (20 chelines)	7,258	0,916	25,21	5,042
		Corona (5 chelines)	24,36	0,925	5,60	1,12
	Plata	Florín (2 chelines)		»	2,21	0,462
		Chelín (12 peniques)	5,046	»	1,16	0,232
MÉJICO	Oro	Onza desde 1786-1848	27,067	0,875	81,43	16,286
COLOMBIA		» » 1849	25,806	0,900	80	16
PERÚ		Cóndor, de 10 soles, desde 1857	14,203	»	44,03	8,806
CHILE		» de 10 ps. desde 1851	15,252	»	47,17	9,434

Nota. — Las de Francia quedan explicadas atrás; Bélgica, Suiza é Italia tienen las mismas monedas de Francia.

En la correspondencia de los sucres, se han tomado éstos exactamente iguales á 5 francos.

LECCIÓN XXI

MÉTODO DE FALSA POSICIÓN

989. **Método de falsa posición**, ó mejor dicho de *falsa suposición*, es el procedimiento por medio del cual se determina la incógnita de un problema por medio de uno ó más números supuestos.

990. El método de falsa posición es de dos especies: *simple* y *compuesto* ó *doble*.

991. La falsa posición es *simple* cuando se supone un solo número para encontrar el verdadero, y *doble* cuando son dos los números supuestos.

992. Para resolver la falsa posición simple,

Regla I. *Se supone un número cualquiera en lugar de la incógnita;*

II. *Se hacen con el número supuesto todas las operaciones indicadas en el problema;*

III. *Con el número que así resulte y los demás datos conocidos fórmúlese la proporción siguiente :*

El resultado obtenido es al resultado que se busca como el número supuesto es al incógnito.

993. **EJEMPLO.** — Una persona ha vendido $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ de una pieza de paño, y le sobran todavía 6 metros; ¿cuál era la longitud de dicha pieza?

OPERACIÓN

Número supuesto, 12

$$\frac{1}{3} = 4$$

$$\frac{1}{4} = 3$$

$$\frac{1}{6} = 2$$

9

$$12 - 9 = 3; 3 : 6 = 12 : x$$

Análisis. Para resolver este problema, supongo que la longitud de la pieza era de 12 mets., número con el cual puedo ejecutar las operaciones indicadas; sumando las partes tomadas de 12, resultan 9; ahora bien, restando 9 de 12 encuentro 3 en lugar de 6 que dice el problema; pero como entre la diferencia 3 y el número supuesto 12 debe haber la misma

relación que entre los 6 metros que quedan y el número verdadero, saco la proporción $3 : 6 = 12 : x = R. 24$ metros.

Nota. — También puede resolverse este problema y muchísimos otros sin la falsa posición, conforme á los que van analizados en las lecciones referentes á los números quebrados.

994. Para resolver la falsa posición doble,

Regla I. Se supone primero un número, con el cual se observan todas las condiciones expresadas en el problema; si el resultado da el número que se busca, la operación queda terminada;

II. Si el resultado no fuere el pedido, se busca la diferencia que hay entre los encontrados;

III. Se supone otro número con el cual se hacen las mismas operaciones indicadas, y se busca también la diferencia que hay entre los resultados; las diferencias en ambas suposiciones se llaman errores;

IV. En seguida se restan los dos errores, y por último, se plantea la proporción siguiente :

La diferencia de las suposiciones es á la diferencia de los errores como x (ó el número que se debe aumentar ó disminuir á la 1ª suposición) es al primer error.

995. EJEMPLO I. — Un profesor de matemáticas quiere distribuir á algunos de sus alumnos cierto número de naranjas, pero con la condición que ellos mismos encuentren cuántos alumnos deben ser recompensados así, y cuántas naranjas les destina. Diceles, pues, que si les da 7 á cada uno, le sobrarán 9; y si les da 10 á cada uno, le faltarán 6; ¿cuántos serán los alumnos recompensados, y cuántas las naranjas que les destinó el profesor?

Primera suposición, 12 alumnos.

$$\left. \begin{array}{l} 7 \times 12 = 84; \quad 84 + 9 = 93 \\ 10 \times 12 = 120; \quad 120 - 6 = 114 \end{array} \right\} \text{Error 21.}$$

Segunda suposición, 10 alumnos.

$$\left. \begin{array}{l} 7 \times 10 = 70; \quad 70 + 9 = 79 \\ 10 \times 10 = 100; \quad 100 - 6 = 94 \end{array} \right\} \text{Error 15.}$$

Diferencia de los errores : $21 - 15 = 6$.

Diferencia de las suposiciones : $12 - 10 = 2$.

$$\text{Proporción : } 2 : 6 = x : 21; \quad x = \frac{21 \times 2}{6} = 7$$

Debe restarse 7 de 12, 1ª suposición; $12 - 7 = \text{R. 5 alum.}$

PRUEBA

$$\begin{array}{l} 7 \times 5 = 35; \quad 35 + 9 = 44 \text{ naranjas.} \\ 10 \times 5 = 50; \quad 50 - 6 = 44 \quad - \end{array}$$

Es evidente que cada número supuesto da una diferencia tanto mayor cuanto más dista este número del verdadero. También es evidente que la diferencia que hay entre los dos errores no proviene sino de la diferencia de los dos números supuestos, y que esta diferencia de los errores es tanto mayor, cuanto más distan entre sí los dos números supuestos : hay, pues, la misma relación entre la diferencia de los errores y la de los números supuestos, que entre la que ha producido uno de los números, y la diferencia que hay de este mismo número al verdadero.

996. EJEMPLO II. — *Queriendo recompensar un capitán á algunos de sus soldados que se habian distinguido en una acción, les destinó cierto número de sucres; de modo que en la repartición, cuando cada uno tomaba 8, sobraban 45, y cuando tomaba cada uno 11, faltaban 27; preguntase cuál era el número de los soldados y qué suma les repartió el capitán.*

Primera suposición, 14 soldados.

$$\begin{array}{l} 8 \times 14 = 112; 112 + 45 = 157 \\ 11 \times 14 = 154; 154 - 27 = 127 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 8 \times 14 = 112; 112 + 45 = 157 \\ 11 \times 14 = 154; 154 - 27 = 127 \end{array}} \right\} \text{Error 30.}$$

Segunda suposición, 18 soldados.

$$\begin{array}{l} 8 \times 18 = 144; 144 + 45 = 189 \\ 11 \times 18 = 198; 198 - 27 = 171 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 8 \times 18 = 144; 144 + 45 = 189 \\ 11 \times 18 = 198; 198 - 27 = 171 \end{array}} \right\} \text{Error 18.}$$

Diferencia de los errores : $30 - 18 = 12$.

Diferencia de las suposiciones : $18 - 14 = 4$.

Proporción : $4 : 12 = x : 30$; $x = \frac{4 \times 30}{12} = 10$

Debe añadirse 10 á la 1ª suposición, lo que da

$$14 + 10 = R. 24 \text{ soldados.}$$

PRUEBA

$$\begin{array}{l} 8 \times 24 = 192; 192 + 45 = S 237 \text{ repartidos.} \\ 11 \times 24 = 264; 264 - 27 = S 237 \quad - \end{array}$$

PROBLEMAS SOBRE LA FALSA POSICIÓN

994. Se trata de dividir el número 721 en tres partes, de modo que la mayor pase á la 2ª con 80, y ésta á la menor con 40; ¿cuáles son estas partes?

995. ¿Cuál es el número que, aumentado de su $\frac{1}{2}$ y de su $\frac{1}{4}$ parte, más 1, iguala á 100?

996. Hablando perdido un jugador la mitad de su dinero, volvió al juego, y perdió $\frac{1}{2}$ de lo que le quedaba; repitió lo mismo por tercera y cuarta vez, hasta que no le quedaron más que S 6; ¿cuánto dinero tenía al principiár el juego?

X 997. La suma de dos números es 499, y su diferencia 89; ¿cuáles son estos números?

998. Tres personas tienen juntas 150 años : la 3ª tiene el duplo de la edad de la 2ª, y la 2ª tiene el triple de la de la 1ª; ¿cuál es la edad de cada una?

999. Dos números cuya suma es 70 se hallan en cierta relación, la cual resulta inversa si se añade 14 al primero y si se quita 14 al segundo; ¿cuáles son estos números?

1000. La relación de la edad de un padre con la de su hijo es de 9 á 5; ¿qué edad tienen ambos, si el padre cuenta 28 años más que su hijo?

1001. Un holgazán pasó su vida del modo siguiente, desde los 18 años : los $\frac{3}{8}$ de ella, durmiendo; $\frac{1}{16}$ comiendo y bebiendo; $\frac{1}{4}$ paseándose; los $\frac{3}{16}$ jugando; $\frac{1}{16}$ en su silla poltrona, y el resto, que son 2 años, trabajó; ¿qué edad tuvo al morir?

1002. Eustaquio se conviene con un peón en darle 12 cents. por cada día que trabaje, con tal que él le dé 15 por cada día que no trabaje, á causa del perjuicio que le ocasiona; sucede que al cabo de 62 días no le queda nada por recibir al peón, pero tampoco tiene nada que dar á su patrón; se pregunta cuántos días ha trabajado.

1003. Un niño que tenía cierto número de manzanas las distribuye del modo siguiente : da á uno de sus condiscípulos la $\frac{1}{4}$ parte del número total, más una manzana y $\frac{1}{2}$; á otro los $\frac{2}{7}$ del número total, más $\frac{6}{7}$ de manzana; por último, á otro la $\frac{1}{8}$ parte del número total, más $\frac{3}{4}$ de manzana, y le quedan 3 para él; ¿cuántas manzanas tenía el niño, y cuántas dio á cada uno de sus condiscípulos?

1004. Un maestro propone 16 problemas á su alumno, y le promete 5 buenas notas por cada problema bien resuelto; pero debiendo devolverle 3 el alumno por cada problema errado; resulta por fin que el maestro y el alumno no se deben nada; ¿cuántos fueron los problemas bien resueltos?

1005. Luis dice á Antonio : « Dame 5 de tus chinas, y tendremos ambos el mismo número; » Antonio le responde : « Dame tú 10 de las tuyas, y tendré el duplo de las que te queden; » ¿cuántas chinas tiene cada uno?

1006. Baco y Selén estaban bebiendo de apuesta : el 1º había tomado ya 6 vasos cuando empezó el 2º, y además podía tomar aquél 5 vasos cuando éste tomaba 3. Tenían ambos bastante resistencia, pero la de Baco era doble de la de Selén; al fin y al cabo no podían más; ¿cuánto había pues bebido cada uno?

1007. Una liebre perseguida por un perro lleva ya adelantados 90 saltos, y da 5 saltos mientras el perro da 4; y como 7 saltos de la liebre igualan á 5 del perro, ¿cuántos tendrá que dar éste para alcanzarla?

1008. Un borriquito y su madre iban cargados por un camino; habiéndose quejado la madre por el cansancio, le dijo el borriquito : Mamá, ¿por qué te quejas como una chiqueta? dame una libra de lo que llevas, y tendré doble carga de la que te queda; pero si tú tomas 1 libra mía, tendremos carga igual. ¿Cuál era la carga de cada uno?

1009. La suma de dos números es 47, su cociente 5, y el residuo también 5; ¿cuáles son estos números?

1010. Una familia constaba de varios niños y niñas; algúen les preguntó cuántos eran, y la niña mayor respondió que tenía tantas hermanas como hermanos; pero el niño mayor dijo que tenía dos veces más hermanas que hermanos. ¿Cuántos niños y niñas había?

1011. Repartía un padre 40 nueces á sus dos hijos, dando alternativamente 2 al mayor y 2 al menor; pero mientras el padre daba las dos á éste, el mayor se tomaba 4 sin que su padre lo advirtiera; se pregunta con cuántas nueces salió cada uno.

APÉNDICE

LECCIÓN PRIMERA

BREVES NOCIONES DE ÁLGEBRA

§ I. Preliminares.

997. **Álgebra** es la parte de las Matemáticas que tiene por objeto generalizar todas las operaciones que pueden proponerse sobre las cantidades.

998. En **Álgebra** se representan las cantidades por medio de letras. Las primeras letras del alfabeto, como $a, b, c, \dots$, representan las cantidades conocidas, y las últimas, como x, y, z , las incógnitas ó desconocidas.

999. Los signos para las operaciones algebraicas son los mismos que en Aritmética. Sólo se subentiende el signo $\times$ en la multiplicación, cuando los factores están representados por letras; así, $a \times b \times c$ se escribe : abc .

1000. Llámase **coeficiente** el número ó letra puesto á la izquierda de una cantidad, y que indica cuantas veces debe ser repetida dicha cantidad.

Así, en $3a, 5x$, los coeficientes 3 y 5 indican que a debe repetirse 3 veces, y x 5 veces; del mismo modo, en ny n es el coeficiente de y .

Como se ve, el coeficiente es un multiplicador. El coeficiente 1 se subentiende siempre.

1001. Llámase **exponente** el número ó letra que se pone á la derecha y en la parte superior de una cantidad, é indica cuantas veces se toma dicha cantidad como factor (189).

Así, x^3 quiere decir $x \times x \times x$, y $(a + b)^2$ (que se lee a más b al cuadrado), quiere decir $(a + b)(a + b)$. El exponente 1 se subentiende siempre.

1002. Por **expresión algebraica** se entiende la indicación de ciertas operaciones que deben ejecutarse.

Así, $6a^2b$, $a + b$, $\sqrt{5ab}$, $\frac{(p+d)n}{2}$ son expresiones algebraicas.

1003. Se llama **término** cualquier expresión algebraica cuyas partes no están separadas por los signos $+$ ó $-$.

$4xy$, $8a^2b$ y $\frac{3ax}{4}$ son términos.

1004. Los términos precedidos del signo $+$ se llaman *positivos*, y los que van precedidos del signo $-$ se llaman *negativos*. El signo $+$ se subentiende delante de un término positivo que va solo ó al principio de una expresión algebraica de varios términos.

1005. **Monomio** es la expresión algebraica que consta de un solo término; v. g. : $5x^2$.

1006. **Binomio** es la expresión que tiene dos términos, como $12x - 5y$; y **trinomio**, la que tiene tres, como $a^2 + 2ba + b^2$.

1007. En general, se llama **polinomio** la expresión que tiene dos ó más términos.

1008. **Términos semejantes** son los que tienen unas mismas letras con iguales exponentes en cada una, aunque tengan distintos coeficientes y signos. Así, $2xy^2 - xy^2 + 8xy^2$ son términos semejantes.

1009. Los términos semejantes pueden reducirse á uno solo, sumando separadamente los coeficientes de todos los términos positivos y los de los términos negativos; la diferencia de las dos sumas con el signo de la mayor es el coeficiente del término solo que reemplaza á los demás.

Así, $2xy^2 - xy^2 + 8xy^2 = 9xy^2$, lo mismo que
2 met. $-$ 1 met. $+$ 8 met. $=$ 9 metros

y $-15a^2b + 9a^2b - a^2b = 7a^2b$.

§ II. Operaciones algebraicas.

1010. Adición. Para sumar varias cantidades algebraicas, basta escribirlas unas después de otras, con sus propios signos, y reducir los términos semejantes.

Así, para sumar $5x + 6$ con $3x - 17$, se escribe

$$5x + 6 + 3x - 17$$

y reduciendo los términos semejantes, resulta $8x - 11$.

Para sumar $-3x$ con $8x + 2$, se debe escribir, según la regla enunciada, $8x + 2 - 3x = 5x + 2$.

Como se ve, añadir una cantidad negativa á cualquier otra es en realidad disminuir ésta del valor de aquélla.

1011 Substracción. Para restar una cantidad algebraica de otra, se escribe el substraendo después del minuendo cambiando todos los signos de aquél, y en seguida se reducen los términos semejantes.

Así, para restar $15 - 2x$ de $7x - 8$, se escribe

$$7x - 8 - 15 + 2x$$

reduciendo los términos semejantes, queda $9x - 23$.

1012. Para indicar una substracción se escribe primero el minuendo, y luego el substraendo, dentro de un paréntesis precedido del signo $-$.

Si de $45 + x$ se quiere restar $12 - x$, se escribe

$$45 + x - (12 - x)$$

por consiguiente, cuando un paréntesis va precedido del signo $-$, deben cambiarse los signos de todos los términos encerrados dentro de él para poder destruir el paréntesis.

1013. Multiplicación. La regla de los signos es como sigue :

$+$ multiplicado por $+$ da $+$ en el producto.

$-$ » $+$ » $-$ »

$+$ » $-$ » $-$ »

$-$ » $-$ » $+$ »

1014. Para multiplicar un monomio por otro, se multiplican los coeficientes, y se escriben las distintas letras con la suma de sus exponentes.

Así, $3a^2 \times 5a^3 = 15a^5$, y $5x^2y \times ay = 5ax^2y^2$.

1015. Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica cada término del polinomio por el monomio, y se escriben los resultados únos al lado de los otros.

Para multiplicar $3x^2 - xy + 5y^2$ por $5x$, tendremos :

$$\begin{array}{r} 3x^2 - xy + 5y^2 \\ 5x \\ \hline 15x^3 - 5x^2y + 25xy^2 \end{array}$$

1016. Para multiplicar un polinomio por otro, se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, poniendo los términos semejantes únos debajo de otros; en seguida se suman los productos parciales.

Así, para multiplicar $2a^3 - 5b^3$ por $3a - 2b$ tendremos :

$$\begin{array}{r} 2a^3 - 5b^3 \\ 3a - 2b \\ \hline 6a^4 - 15ab^3 - 4a^3b + 10b^4 \end{array}$$

1017. Es muy importante tener presente el producto de las multiplicaciones siguientes :

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 a + b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 + ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2 \\
 \\
 a + b \\
 a - b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 - ab - b^2 \\
 \hline
 a^2 - b^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 a - b \\
 a - b \\
 \hline
 a^2 - ab \\
 - ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 - 2ab + b^2 \\
 \\
 a^2 + 2ab + b^2 \\
 a + b \\
 \hline
 a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 \hline
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{array}$$

1018. Estos resultados se indican como sigue :

$$1^{\circ} \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (533)$$

$$2^{\circ} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3^{\circ} \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$4^{\circ} \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (582)$$

1019. **División.** La regla de los signos es como en la multiplicación, á saber :

+	dividido por	+	da	+	en el cuociente.
-	»	+	»	-	»
+	»	-	»	-	»
-	»	-	»	+	»

1020. *Para dividir un monomio por otro :*

1^o Se aplica la regla de los signos;

2^o Se divide el coeficiente del dividendo por el del divisor;

3^o Se escribe cada letra del dividendo, dándole un exponente igual á la diferencia de los exponentes de ambos términos.

La letra que se encuentra sólo en el dividendo, se escribe en el divisor con su propio exponente, y la que tiene igual exponente en ambos términos no se escribe en el divisor.

Así, $16a^3b^2$ dividido por $-8ab^2$, da $-2a^2$.

Cuando el dividendo no contiene exactamente al divisor, se indica la división escribiendo ambos términos en forma de quebrado.

Así, el cuociente de $12x$ por $8y$ es $\frac{12x}{8y}$ ó $\frac{3x}{2y}$, y el de $11x + 5y$ por $3x - y$ es $\frac{11x + 5y}{3x - y}$.

1021. Para dividir un polinomio por un monomio, se divide separadamente cada término del dividendo por el divisor, uniendo los cuocientes con los signos correspondientes.

Así, el cuociente de $6a^4 - 8a^3 + 4a^2$ por $2a^2$, es $3a^2 - 4a + 2$.

1022. Para dividir un polinomio por otro :

1º Se ordenan el dividendo y el divisor según la potencia decreciente de una misma letra;

2º Se divide el 1º término del dividendo por el 1º término del divisor, y se escribe el resultado en el cuociente;

3º Se multiplican todos los términos del divisor por el cuociente encontrado, y el producto se resta del dividendo;

4º Se ordena el dividendo parcial que resulta, y se continúa del mismo modo la operación;

5º Si queda residuo, se lo escribe al lado del cuociente, en forma de quebrado.

Para dividir $15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4$ por $5a^2 + ab - 3b^2$, tendremos :

$$\begin{array}{r} \text{Dividendo } 15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4 \quad \left| \begin{array}{l} 5a^2 + ab - 3b^2 \\ \hline 3a^2 - 2ab + b^2 \end{array} \right. \\ \underline{-15a^4 - 3a^3b + 9a^2b^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{1º Residuo } 0 - 10a^3b + 3a^2b^2 + 7ab^3 \\ \quad \quad \quad + 10a^3b + 2a^2b^2 - 6ab^3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{2º Residuo } \quad \quad \quad 0 + 5a^2b^2 + ab^3 - 3b^4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad - 5a^2b^2 - ab^3 + 3b^4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{3º Residuo } \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

1023. Cuando dos ó más términos contienen un mismo factor, es útil sacarlo como *factor común*. Para esto se dividen por dicho factor todos los términos que lo contienen, se escribe el cuociente dentro de un paréntesis, y se indica la multiplicación del paréntesis por el factor común.

Así, el trinomio $12x - 8y + 16$, cuyos términos encierran al factor 4, puede escribirse :

$$4(3x - 2y + 4)$$

Del propio modo el binomio $3x^2 - x$ se reduce á $x(3x - 1)$.

Por fin la expresión $(1+r)^n x + a(1+r)^n$, sacando $(1+r)^n$ en factor común, se escribe $(1+r)^n \times (x + a)$.

§ III. Ecuaciones de 1^{er} grado.

1024. *Ecuación* es una igualdad en que entran una ó más letras que representan cantidades incógnitas; v. g. :

$$5x + 12 = 40 - 2x$$

1025. *Primer miembro* de una ecuación se llama la cantidad que está antes del signo =, y *segundo*, la que está después.

1026. *Resolver* una ecuación es buscar el valor de la incógnita.

En la ecuación anterior, el valor de la incógnita es 4, el cual se llama *raíz* de la ecuación.

1027. En la resolución de las ecuaciones con una incógnita pueden ocurrir las operaciones siguientes :

1^o *Quitar* los denominadores y los paréntesis, ejecutando las operaciones indicadas;

2^o *Transponer*, esto es, escribir en un miembro los términos incógnitos y en otro los conocidos;

3^o *Dividir* ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita, para *despejar* ésta.

1028. Para poner un problema en ecuación se supone encontrada la respuesta, y se indican por medio de los signos algebraicos las operaciones que deben ejecutarse para comprobar la exactitud de esta respuesta.

1029. Problema I. — *Búsquense tres números cuya suma sea 84, sabiendo que el 2^o es el triple del 1^o, y que el 3^o es igual á la mitad de la suma de los dos primeros.*

Representemos el 1^o por x ;

El segundo será $3x$;

El tercero igualará á la mitad de $4x$, suma de los dos primeros, y tendremos la ecuación :

$$x + 3x + 2x = 84$$

$$6x = 84$$

$$x = \frac{84}{6} = 14$$

El 1^{er} número es pues 14

El 2^o el triple de 14, ó 42

El 3^o la mitad de $14 + 42 = 56$, ó 28

Prueba... 84

1030. Problema II. — Divídanse \$ 72 entre tres personas de modo que la 2^a tenga \$ 3 más que la 1^a, y la 3^a el triple de la 2^a.

Representemos la parte de la 1^a por x

La 2^a será $x + 3$

Y la 3^a $3(x + 3)$

Tendremos pues la ecuación :

$$x + x + 3 + 3(x + 3) = 72$$

Ejecutemos la multiplicación indicada por el paréntesis (1015) :

$$x + x + 3 + 3x + 9 = 72$$

$$\text{ó} \quad 5x + 12 = 72$$

quitamos 12 de ambos miembros; para esto basta suprimirlo en el 1^{er} miembro, y escribir — 12 después de 72, en el 2^o.

$$5x = 72 - 12 \quad \text{ó} \quad 60$$

$$x = \frac{60}{5} = 12$$

La 1^a tendrá pues \$ 12

La 2^a, $12 + 3$, ó 15

Y la 3^a, 3×15 , ó 45

Prueba... \$ 72

1031. Observación. En esta ecuación vemos que se puede pasar cualquier término de un miembro de la ecuación al ótro; basta para esto suprimirlo en el miembro en que se encuentra, y escribirlo en el ótro con signo contrario.

1032. Problema III. — Una persona compra los $\frac{2}{3}$ de una pieza de tela, menos 15 metros; ótra compra la $\frac{1}{4}$ parte de la misma pieza más 4 met., y recibe 21 met. menos que la 1^a; ¿cuál es la longitud de la pieza?

Sea x la longitud de la pieza.

La 1^a persona ha comprado $\frac{2x}{3} - 15$

y la 2^a $\frac{x}{4} + 4$

Si restamos la compra de la 2^a de la compra de la 1^a (1011), tendremos 21 por diferencia; de donde resulta la ecuación :

$$\frac{2x}{3} - 15 - \left(\frac{x}{4} + 4 \right) = 21$$

Quitemos el paréntesis; para esto, ejecutemos la resta indicada (1012).

$$\frac{2x}{3} - 15 - \frac{x}{4} - 4 = 21$$

Para quitar los denominadores, se multiplican todos los términos por 3×4 ó 12, producto de los denominadores :

$$8x - 180 - 3x - 48 = 252$$

Transponiendo los términos incógnitos al primer miembro y los conocidos al 2º, tenemos :

$$8x - 3x = 252 + 180 + 48$$

$$5x = 480$$

$$x = \frac{480}{5} = 96$$

R. La pieza tiene 96 metros.

1033. Problema IV. — *Una campesina tenía una canasta de huevos, y vende los $\frac{2}{9}$ de ella menos 5 huevos; si agregara 37 huevos á los que le quedan, la cantidad primitiva quedaría aumentada de $\frac{1}{6}$; ¿cuántos huevos había en la canasta?*

Sea x el número de huevos de la canasta. Habiendo vendido la campesina los $\frac{2}{9}x - 5$ huevos, le quedan pues los $\frac{7}{9}x + 5$ huevos, ó $\frac{7x}{9} + 5$; por tanto $\frac{7x}{9} + 5 + 37$ debe igualar al contenido x de la canasta, más $\frac{x}{6}$, ó $\frac{7x}{6}$; de donde tenemos la ecuación :

$$\frac{7x}{9} + 5 + 37 = \frac{7x}{6}$$

Para quitar los denominadores, multipliquemos todos los términos por 9×6 , ó mejor, por 18, que es el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$14x + 90 + 666 = 21x$$

$$14x - 21x = -666 - 90$$

$$-7x = -756$$

Cambiando los signos de ambos miembros, no se altera la ecuación, porque equivale á multiplicarlos por -1 , y tenemos :

$$7x = 756$$

$$x = \frac{756}{7} = \text{R. } 108 \text{ huevos.}$$

1034. Llámase **sistema de ecuaciones** la reunión de dos ó más ecuaciones, en las que las mismas incógnitas tienen unos mismos valores.

1035. Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se debe *eliminar* una de ellas, esto es, hacerla desaparecer.

1036. Hay tres principales métodos de eliminación, á saber: 1^o por sustitución; 2^o por comparación; 3^o por reducción á un mismo coeficiente.

1037. El método de eliminación por **sustitución** consiste:

1^o *En buscar el valor de una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones dadas;*

2^o *En poner este valor en lugar de la misma incógnita en la otra ecuación; v. g. :*

1038. Problema V. — *Búsquese un quebrado tal que, si se agrega 1 á cada uno de sus términos, vale entonces $\frac{4}{5}$, y si se resta 3 de cada uno de ellos se reduce á $\frac{2}{3}$.*

Sea $\frac{x}{y}$ el quebrado.

La primera ecuación será: $\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$

y la segunda: $\frac{x-3}{y-3} = \frac{2}{3}$

Quitemos los denominadores de estas ecuaciones, haciendo el producto de los extremos igual al de los medios:

$$5x + 5 = 4y + 4$$

$$3x - 9 = 2y - 6$$

Transponiendo los términos, tenemos:

$$5x - 4y = -1 \quad (1)$$

$$3x - 2y = 3 \quad (2)$$

Busquemos el valor de x en la 1^a ecuación:

$$x = \frac{-1 + 4y}{5} \quad (3)$$

Poniendo este valor en la 2^a, tenemos:

$$\frac{3(-1 + 4y)}{5} - 2y = 3$$

Quitemos el denominador

$$3(-1 + 4y) - 10y = 15$$

Quitemos también el paréntesis

$$-3 + 12y - 10y = 15$$

Reduciendo y transponiendo,

$$2y = 15 + 3 = 18$$

$$y = 9$$

Este valor de y puesto en una de las ecuaciones 1), (2) ó (3), dará el valor de x . La ecuación (3) se vuelve entonces :

$$x = \frac{-1 + 36}{5} = 7$$

R. Luego el quebrado pedido es $\frac{7}{9}$, como fácilmente puede comprobarse.

1039. El método de eliminación por **comparación** consiste :

1º *En buscar el valor de una misma incógnita en cada una de las ecuaciones dadas;*

2º *En formar una ecuación con los valores encontrados; v. g. :*

1040. Problema VI. — *Un caballero compra 6 pares de botas y 4 de zapatos, en \$ 44; luego después, 3 pares de botas y 7 de zapatos, en \$ 32; ¿ á cómo le sale cada par de este calzado?*

Sea x un par de botas, y y uno de zapatos. La 1ª compra será pues $6x + 4y = 44$, y la 2ª, $3x + 7y = 32$.

Tenemos por consiguiente las dos ecuaciones :

$$6x + 4y = 44$$

$$3x + 7y = 32$$

Busquemos el valor de x en ambas ecuaciones, considerando la y como cantidad conocida.

De la 1ª sacamos :

$$x = \frac{44 - 4y}{6} \quad (1)$$

de la 2ª :

$$x = \frac{32 - 7y}{3} \quad (2)$$

Siendo iguales estos dos valores de x (porque dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí), formamos con estos dos valores la ecuación final :

$$\frac{44 - 4y}{6} = \frac{32 - 7y}{3}$$

Quitemos los denominadores, y como tenemos dos razones iguales, basta escribir el producto de los extremos igual al de los medios;

$$132 - 12y = 192 - 42y$$

Transponiendo, $-12y + 42y = 192 - 132$

Reduciendo, $30y = 60$

$$y = \frac{60}{30} = 2$$

Para encontrar el valor de x , es menester reemplazar y por 2 en una de las ecuaciones (1) ó (2). La ecuación (1)

nos da :

$$x = \frac{44 - 8}{6} = 6$$

R. El par de botas cuesta \$ 6, y el de zapatos, \$ 2.

1041. El método de eliminación por **reducción** á un mismo coeficiente consiste :

1^o En igualar los coeficientes de una misma incógnita en las dos ecuaciones;

2^o Si estos coeficientes igualados tienen signos contrarios, se suman las ecuaciones miembro por miembro; si los signos son semejantes, se resta la una ecuación de la otra.

1042. Para igualar los coeficientes de una misma incógnita en ambas ecuaciones, se pueden multiplicar todos los términos de cada ecuación por el coeficiente de dicha incógnita en la otra ecuación; v. g. :

1043. Problema VII. — En un corral en que hay gallipavos y conejos, se cuentan 35 cabezas y 94 patas; ¿ cuántos animales hay de cada especie ?

Llamemos x los gallipavos, y y los conejos, y tendremos las ecuaciones :

$$x + y = 35 \text{ cabezas} \quad (1)$$

$$2x + 4y = 94 \text{ patas} \quad (2)$$

Para resolver estas ecuaciones, podemos igualar los coeficientes de x multiplicando por 2 todos los términos de la ecuación (1), así :

$$2x + 2y = 70 \quad (3)$$

Como el coeficiente de x es uno mismo en las ecuaciones (1) y (3), y como ambos tienen signo semejante, resta la 2^a ecuación de la 1^a, cambiando los signos del substraendo, y resulta : $+2x$ y $-2x$ se destruyen ; $+2y - 4y = -2y$; $+70 - 94 = -24$.

$$-2y = -24$$

$$y = \frac{24}{2} = 12$$

Reemplazando y por 12 en una de las dos primeras ecuaciones, encontramos : $x = 35 - 12 = 23$ en la (1).

R. En el corral hay 23 gallipavos y 12 conejos.

1044. Problema VIII. — *Búsquense dos números cuya suma sea s y la diferencia d .*

Sean x y y estos números, y tendremos :

$$x + y = s \quad (1)$$

$$x - y = d \quad (2)$$

Sumando miembro por miembro estas ecuaciones, resulta :

$$2x = s + d$$

$$\text{de donde,} \quad x = \frac{s + d}{2} \quad (A)$$

Restemos la 2ª ecuación de la 1ª :

$$2y = s - d$$

$$\text{de donde,} \quad y = \frac{s - d}{2} \quad (B)$$

Se ve por las fórmulas A y B que, cuando se conoce la suma de dos números y su diferencia, el mayor es igual á la mitad de la *suma*, más la mitad de la *diferencia*, y el menor es igual á la mitad de la *suma*, menos la mitad de la *diferencia*.

Aplicación. La suma de dos números es 84, y su diferencia 55; ¿cuáles son estos números?

$$x = \frac{84 + 55}{2} = 69,50$$

$$y = \frac{84 - 55}{2} = 14,50$$

§ IV. Ecuaciones de 2º grado.

1045. Ecuación de **segundo grado** es aquélla en que el mayor exponente de la incógnita es 2.

1046. Las ecuaciones de segundo grado se dividen en dos clases : *incompletas* y *completas*.

1047. Ecuación **incompleta** es la que contiene sólo la segunda potencia de la incógnita; v. g. : $3x^2 = 75$, ó la que carece de término conocido ó general; v. g. : $ax^2 + bx = 0$.

1048. Ecuación **completa** es la que contiene la segunda y primera potencia de la incógnita con un término conocido ó general; v. g. : $x^2 + 3x = 10$.

1049. Toda ecuación **incompleta** de segundo grado puede reducirse á la forma de $x^2 = a$.

Después de reducida á esta forma la ecuación, se extrae la raíz cuadrada de ambos miembros.

1050. **Problema IX.** — *La superficie de un rectángulo es de 1 232 met. cuad.; búsquense sus dos dimensiones, sabiendo que el ancho no es más que los $\frac{7}{11}$ del largo.*

Sea x el largo; el ancho será $\frac{7x}{11}$, y tendremos la ecuación :

$$\begin{aligned} x \times \frac{7x}{11} &= 1\,232 \\ 7x^2 &= 11 \times 1\,232 \\ x^2 &= \frac{11 \times 1\,232}{7} = 11 \times 176 \end{aligned}$$

$$x = \pm \sqrt{11 \times 176} = 44 \text{ metros.}$$

R. El largo es de 44 met., y por consiguiente el

$$\text{ancho} = \frac{7}{11} \times 44 = 28 \text{ metros.}$$

1051. Toda ecuación incompleta tiene dos raíces, de igual valor numérico, pero con signos contrarios.

1052. **Observación.** La raíz cuadrada de 4 es $+2$ ó -2 , porque el cuadrado de -2 es $+4$, lo mismo que el de $+2$. Del propio modo, la raíz cuadrada de 9 es $+3$ ó -3 ; la de 16 es $+4$ ó -4 , etc.

1053. Un número positivo tiene pues dos raíces iguales y con signos contrarios. Cuando se indica la raíz cuadrada de un número, se pone ordinariamente antes del radical el doble signo $\pm$ que se lee *más ó menos*. Así, la raíz cuadrada de 5 se indica $\pm \sqrt{5}$.

1054. Un número negativo no tiene raíz cuadrada, porque cualquier número, positivo ó negativo, multiplicado por sí mismo, nunca da un producto negativo.

1055. Toda ecuación **completa** de segundo grado puede reducirse á la forma de $x^2 + 2ax = b$ en la cual $2a$ y b , son cantidades positivas ó negativas, enteras ó fraccionarias.

1056. La ecuación completa contiene pues siempre tres términos, á saber : uno en que entra la 2ª potencia de la incógnita, otro en que entra la 1ª potencia de la misma, y por fin un término conocido ó general, como en $x^2 + 10x = 24$.

1057. Para resolver la ecuación completa de 2º grado, téngase presente que el primer miembro debe ser cuadrado

perfecto de un binomio, y contener por tanto tres términos (534); luego, para completar el trinomio, ó formar el tercer término, debe añadirse al primer miembro el cuadrado de la mitad del coeficiente de x ; y para que no se altere la ecuación, debe añadirse lo mismo al 2º miembro.

Así la ecuación anterior se resolverá como sigue, añadiendo á ambos miembros el cuadrado de 5 ó 25.

$$x^2 + 10x + 25 = 24 + 25$$

El 1º miembro es ahora el cuadrado de $x + 5$, y la ecuación puede escribirse :

$$(x + 5)^2 = 49$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros :

$$x + 5 = \pm \sqrt{49}$$

luego

$$x = -5 \pm \sqrt{49}$$

Llamemos x' y x'' las dos raíces de la ecuación (1026), y ejecutemos las operaciones :

$$x' = -5 + \sqrt{49}, \quad \text{ó} \quad x' = -5 + 7 = 2$$

$$x'' = -5 - \sqrt{49}, \quad \text{ó} \quad x'' = -5 - 7 = -12$$

Las dos raíces son pues : 2 y -12.

1053. Así, las raíces de la ecuación completa de segundo grado pueden buscarse directamente, como sigue :

Se toma la mitad del coeficiente de x , con signo contrario, más ó menos la raíz cuadrada del término general sumada con el cuadrado de la mitad de dicho coeficiente.

De modo que, las raíces de la ecuación $x^2 + 2x = 15$,

son :
$$x = -1 \pm \sqrt{15 + 1}$$

de donde
$$x' = 3 \quad \text{y} \quad x'' = -5$$

Las raíces de la ecuación $x^2 - 12x = -35$,

son :
$$x = 6 \pm \sqrt{-35 + 36}$$

luego
$$x' = 7 \quad \text{y} \quad x'' = 5$$

Las de la ecuación $x^2 - 7x = 60$,

son :
$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{60 + \frac{49}{4}} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{240 + 49}{4}}$$

$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{17}{2},$$

luego
$$x' = 12 \quad \text{y} \quad x'' = -5$$

1059. Problema X. — *Una suma de S 360 debía repartirse entre cierto número de personas; pero en el momento de la repartición llegan tres personas inesperadas, que también deben tomar parte en ella, por lo que á cada*

una de las primeras se les disminuyen S 4; ¿cuántas personas había al principio?

Sea x el número de personas.

La parte de cada una habría sido $\frac{360}{x}$.

Después de la llegada de las tres personas, la parte de cada una es de $\frac{360}{x+3}$, y esta 2ª parte tiene S 4 menos que la 1ª. Tenemos pues la ecuación:

$$\frac{360}{x} - \frac{360}{x+3} = 4$$

Quitamos los denominadores, multiplicando todos los términos por $x(x+3)$:

$$360(x+3) - 360x = 4x(x+3)$$

$$360x + 1080 - 360x = 4x^2 + 12x$$

$$4x^2 + 12x = 1080$$

$$x^2 + 3x = 270$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{270 + \frac{9}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1089}{4}}$$

$$x' = 15 \quad \text{y} \quad x'' = -18$$

La raíz negativa no es admisible por el sentido del problema.

R. Había 15 personas.

1060. Problema XI. — Búsquense dos números tales que su suma sea 17 y su producto 60.

Sean x y y estos dos números. Las ecuaciones del problema son:

$$x + y = 17 \quad (1)$$

$$xy = 60 \quad (2)$$

De la 1ª sacamos:

$$x = 17 - y$$

Este valor, puesto en lugar de x en la 2ª, da:

$$y(17 - y) = 60$$

$$17y - y^2 = 60$$

$$y^2 - 17y = -60$$

$$y = \frac{17}{2} \pm \sqrt{-60 + \frac{289}{4}}$$

$$y = \frac{17 \pm 7}{2}$$

Luego, $y' = 12$, y $y'' = 5$

Estos valores, puestos en lugar de y en la ecuación (3), dan $x' = 5$, y $x'' = 12$.

R. Los números pedidos son 5 y 12.

EJERCICIOS

$$\begin{aligned} 1012. \quad 3x + 8 &= 7x - 8 \\ 1013. \quad 8x - 11 &= 3x + 14 \\ 1014. \quad 41 - 3x &= 3x - 1 \\ 1015. \quad 100 - 9x &= 5x - 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1016. \quad 9x + 1 &= 15x - 65 \\ 1017. \quad 8x + 15 &= 10x + 14 \\ 1018. \quad 6x - 11 &= 33 - 2x \\ 1019. \quad 3x + 47 &= 99x + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1020. \quad \frac{x}{5} + \frac{2x}{9} + x &= 64 \\ 1021. \quad 2x + \frac{3x}{4} &= \frac{x}{7} + 73 \\ 1022. \quad 43 - 2x &= \frac{5x}{6} + \frac{3x}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1023. \quad \frac{x}{3} - x &= -12 - \frac{2x}{9} \\ 1024. \quad \frac{2x}{3} + \frac{5x}{12} &= \frac{3x}{4} + 16 \\ 1025. \quad \frac{x}{4} + \frac{5x}{6} + \frac{x}{2} &= 84 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1026. \quad x + \frac{10x}{9} &= \frac{7x - 6}{3} \\ 1027. \quad \frac{3}{4} = \frac{x}{4} - \left(\frac{3x + 19}{19} \right) \\ 1028. \quad 5 \left(\frac{2x - 1}{2} \right) &= 4x + \frac{15}{2} \\ 1029. \quad \frac{13x}{12} + 11 &= \frac{3(x + 4)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1030. \quad 7 - \frac{2}{3}(3 - x) &= \frac{3x}{2} \\ 1031. \quad \frac{1}{6} \left(\frac{7x}{4} + x \right) &= x - \frac{13}{2} \\ 1032. \quad \frac{x}{12} - x \left(\frac{3}{5} + \frac{11}{12} \right) &= 86 \\ 1033. \quad 8 - \left(\frac{4x}{9} - \frac{3x}{7} \right) &= \frac{x}{8} - 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1034. \quad x + y &= 8 \\ 5x - 2y &= 5 \\ 1035. \quad y - x &= 2 \\ 12x + y &= 87 \\ 1036. \quad 4x - 5 &= 3y + 6 \\ 5y + 6 &= 4x + 1 \\ 1037. \quad 3x - 40 &= y - 1 \\ 15y + 1 &= 4x - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1038. \quad 3x + 2y &= 7 \\ 5y - 9x &= 9 + y \\ 1039. \quad 5x - 12y &= -7 \\ 15x + 4y &= 90x - 27 \\ 1040. \quad x - (y - 9) &= 89 \\ 40x + 19y &= 250 \\ 1041. \quad x + 2y &= 14 \\ 2y - (3x - 2) &= 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1042. \quad 3x + 4y &= 6 \\ 3y - \frac{x}{4} &= 2 \\ 1043. \quad 5x - 6y &= 0 \\ \frac{x}{3} + y &= 7 \\ 1044. \quad 15x - 16y &= 1820 \\ \frac{x}{10} + \frac{5y}{4} &= -15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1045. \quad \frac{5x}{12} - 1 &= \frac{y}{9} + 18 \\ \frac{7x}{9} + 6 &= 12y - 74 \\ 1046. \quad \frac{x}{5} - \frac{y}{10} &= 2 \\ \frac{7y}{5} + 9 &= -x \\ 1047. \quad x - 12 &= \frac{3y}{4} - \frac{3}{4} \\ \frac{3x}{5} + \frac{4}{5} &= 5y + 3 \end{aligned}$$

1048. $x + y - z = 14$

$x + z - y = 6$

$y + z - x = -4$

1049. $x + y - 2z = 20$

$x - y - z = 5$

$2y + 2z - x = 10$

1050. $x + y + z = 18$

$2x - y + z = 9$

$5x - 2y + z = 12$

1051. $4x + 5y + z = 12$

$y - 8x + 6z = 19$

$20x + 4y - 5z = -1$

1052. $5x + 10y - z = 2$

$20y - x + 2z = 9$

$3x - 100y + 5z = 13$

1053. $x + 2y - z = 4$

$2x - 4y + z = 1$

$8y - 2x - 5z = 5$

1054. $x^2 - 16 = 20$

1055. $(3x^2 - 14)2 = 2x^2 + 8$

1056. $\frac{3x^2}{8} + 8 = x^2 - 2$

1057. $x^2 + 1 = \frac{x^2}{4} + 4$

1058. $\frac{x(9 + 2x)}{15} = \frac{3x + 6}{5}$

1059. $3x^2 - 29 = \frac{x^2}{4} + 510$

1060. $\sqrt{x^2 - 5} = \frac{2x}{3}$

1061. $\sqrt{\frac{20x^2 - 9}{4x}} = \sqrt{x}$

1062. $18 - \sqrt{x^2 - 44} = 8$

1063. $\frac{x + 4}{x - 4} + \frac{x - 4}{x + 4} = \frac{10}{3}$

1064. $x^2 + 4x = 96$

1065. $x^2 - 4x = 45$

1066. $x^2 - 7x = 8$

1067. $x^2 + 2x = 15$

1068. $x^2 + 12x = 28$

1069. $x^2 + 6x = 16$

1070. $x^2 - 15x = -54$

1071. $x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{133}{3}$

1072. $x^2 - \frac{5}{6}x = \frac{1}{6}$

1073. $3x^2 - 25x = -72 + 5x$

1074. $2x^2 + 100 = 32x - 10$

1075. $6x - 300 = 204 - 3x^2$

1076. $5x^2 + 80 = -505 - 110x$

1077. $2x^2 - 9x = -4$

1078. $1 - \frac{x}{2} = 5 - \frac{36}{x + 2}$

1079. $\frac{x^2}{4} - 30 + x = 2x - 22$

1080. $\frac{x}{x + 8} = \frac{x + 3}{2x + 1}$

1081. $x - 1 + \frac{2}{x - 4} = 0$

1082. $(x + 6)(x - 6) = 9 - 4x$

1083. $24x^2 + 5x = 3x + 1$

1084. $x + y = 14$

$xy = 45$

1085. $x - y = 5$

$xy = 300$

1086. $2x + y = 11$

$x^2 + y^2 = 26$

1087. $3x - y = 5$

$x^2 + y^2 = 5$

PROBLEMAS

1088. Divídanse \$ 158 entre tres personas de modo que la 2ª tenga \$ 14 más que la 1ª, y la 3ª, \$ 4 más que la 2ª.

1089. Una madre y sus dos hijos tienen juntos 60 años. Búsquense las tres edades respectivas, sabiendo que el hijo mayor tiene el duplo de la edad del menor, y que la edad de la madre es el cuádruplo de la suma de la edad de sus hijos.

1090. ¿Cuál es el número cuyos $\frac{2}{3}$ disminuidos de 8 igualan a su $\frac{1}{4}$ parte aumentada de 7?

1091. Búsquense 2 números que sean entre sí como 3 es á 4, y cuya suma sea 98.

1092. Una placera vende los $\frac{5}{19}$ de un canasto de manzanas, más 25 manzanas; si añadiera 69 á las que le quedan, el contenido primitivo del canasto se aumentaría de $\frac{1}{5}$; ¿cuántas manzanas había en el canasto?

1093. Búsquense tres números impares consecutivos cuya suma dé 459.

1094. Si á un número se añade 153, resulta una cantidad 10 veces mayor que dicho número; ¿cuál es este número?

1095. La $\frac{1}{4}$ parte de un número, más $\frac{1}{3}$ del mismo, más 10, dan el número mismo; ¿cuál es este número?

1096. Repártanse S 140 entre dos personas, de modo que la parte de la 1ª sea $\frac{1}{3}$ más que la de la 2ª.

1097. La edad de un padre es el triple de la de su hijo, y la diferencia de ambas es de 24 años; ¿cuál es la edad da cada uno?

1098. Antonio compra un caballo con silla y arneses en S 230. La silla cuesta el triple de los arneses, y el caballo S 20 más que la silla; ¿cuánto importa cada objeto?

1099. Si Luis da á Manuel S 5 de su bolsillo, Manuel tendrá el duplo de lo que le queda á Luis; pero si Manuel da á Luis S 5 de los suyos, éste tendrá el triple de lo que le queda á aquél; ¿cuánto dinero tiene cada uno?

1100. Búsquense dos números tales, que el duplo del 1º más cinco veces el 2º dé 101, y cuatro veces el 1º más el triple del 2º iguale á 111.

1101. Federico tiene una silla de S 150 y dos caballos. Cuando pone la silla al 1º caballo, la silla y el caballo valen juntos el duplo del otro caballo; pero si pone la silla al 2º caballo, éste con la silla valen el triple del 1º; ¿cuánto importa cada caballo?

— 1102. Búsquense dos números cuya diferencia sea 10 y que sean entre sí como 8 es á 9.

1103. Un padre tiene 45 años, y su hijo 17; ¿dentro de cuántos años será la edad del hijo la mitad de la de su padre?

1104. Un padre tiene 28 años, y su hijo 3; ¿al cabo de cuánto tiempo será la edad del padre sólo el quintuplo de la del hijo?

1105. Un oficial deja en un cuerpo de guardia la mitad de su gente más la mitad de un hombre; en otro cuerpo deja la mitad de los que le quedan más la mitad de un hombre, y se encuentra sólo con 7 hombres; ¿cuántos tenía al principio?

1106. Un maestro propone 18 problemas á un alumno, y le promete 10 notas por cada problema bueno, con tal que el discípulo le vuelva 6 notas por cada uno de los que no saque bien; resulta que el maestro debe 68 notas al discípulo; ¿cuántos problemas le salieron bien á éste?

1107. Un cepo no contiene más que los $\frac{4}{5}$ del dinero que hay en una bolsa; se ponen S 10 en el cepo, y se sacan S 20 de la bolsa; entonces el cepo contiene los $\frac{9}{8}$ de lo que hay en la bolsa; ¿cuánto dinero había en el cepo?

1108. ¿Cuál es el quebrado que vale $\frac{3}{4}$ cuando se añade 3 á cada uno de sus términos, y se reduce á $\frac{2}{3}$ al quitar 4 de cada uno de ellos?

1109. La suma de tres números es 59; la diferencia entre la mitad del 1º y la del 2º es igual á 5, y la diferencia entre la mitad del 1º y la del 3º es 9; ¿cuáles son estos números?

1110. Búsquense tres números tales que el 1º más la mitad de la suma del 2º y del 3º dé 120; el 2º más $\frac{1}{5}$ de la suma del 3º y del 1º iguale á 90, y la suma de los tres sea 190.

1111. La diferencia de los cuadrados de dos números es 100, y la suma de dichos números es 50; ¿cuáles son estos números?
1112. La diferencia de los cuadrados de dos números es 621, y la diferencia de dichos números es 9; ¿cuáles son estos números?
1113. ¿Cuál es el número que, multiplicado por sus $\frac{3}{4}$, da 3 072?
1114. ¿Cuál es el número cuyos $\frac{2}{3}$ multiplicados por sus $\frac{3}{7}$ dan 840?
1115. Búsquense las dos dimensiones de un rectángulo, sabiendo que su superficie es de 211 932 met. cuad., y que su altura no es más que los $\frac{7}{9}$ de la base.
1116. ¿Cuál es el lado de un cuadrado, sabiendo que si se añaden 2 met. á la base y 3 á la altura, el rectángulo que resulta mide 366 met. cuad. más que el cuadrado?
1117. ¿Cuál es el número cuyo cuadrado, disminuído de 36, es igual á 16 veces el mismo número?
1118. ¿Cuál es el número cuyo cuadrado, duplo y triple hacen 66?
1119. ¿Cuál es el número cuyo cuadrado, mitad y duplo hacen 231?
1120. Búsquense dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 650.
1121. La suma de dos números es 17, y su producto 72; ¿cuáles son estos números?
1122. La diferencia de dos números es 8, y su producto 105; ¿cuáles son estos números?
1123. ¿Cuál es el número que pasa con 72 á su raíz cuadrada?
1124. Encuéntrense dos números cuya diferencia es 16, y la suma de sus cuadrados 328.
1125. ¿Cuáles son las dos dimensiones de un rectángulo cuya superficie es de 8 100 met. cuad., sabiendo que su perímetro mide 362 met.?
1126. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo que tiene 2 646 met. cuad. de superficie, si una de ellas tiene 21 met. más que la otra?
1127. La superficie de un triángulo es de 3 724 met. cuad.; ¿cuáles son su base y altura, sabiendo que la 1ª tiene 22 met. menos que la 2ª?
1128. Se trata de repartir \$ 540 entre cierto número de personas; pero, en el momento de la repartición, se retiran dos, de modo que cada una de las restantes recibe \$ 3 más de los que le hubieran tocado; ¿cuántas eran las personas partícipes?

NOTA. Resuélvanse también por ecuaciones los problemas de falsa posición, que quedan atrás, n.ºs 994-1011.

LECCIÓN II

PROGRESIONES

1061. Llámase **progresión** una serie de números ó cantidades tales que la relación de dos términos consecutivos es constantemente igual.

1062. Así como hay dos clases de razones, hay también dos clases de progresiones : 1º las *progresiones aritméticas*, y 2º las *progresiones geométricas*.

1063. Los números que forman una serie se llaman *términos*, de los cuales el primero y último toman el nombre de *extremos*, y los demás, *medios*.

Se da el nombre de *término general* de una progresión al último de todos, el cual puede por sí solo representar á cualquiera de los ótros.

§ I. Progresiones aritméticas.

1064. Llámase *progresión aritmética* ó *por diferencia* una serie de números tales que cada uno de ellos es igual al anterior aumentado de una cantidad fija llamada *razón* ó *diferencia* de la progresión.

Así, las dos series de los números siguientes : 2, 5, 8, 11, 14..., y 28, 24, 20, 16, 12..., forman dos progresiones por diferencia : la 1ª se llama *ascendente* ó *creciente*, porque los términos van aumentado, y la razón es positiva; la 2ª se llama *descendente* ó *decreciente*, porque los términos van disminuyendo, y la razón es negativa.

1065. La progresión aritmética se escribe anteponiendo al 1er término el signo ($\div$), que se lee *como*, y separando los demás con un punto, que se lee *es á*; así la progresión anterior se escribe $\div 2.5.8.11.14$, y se lee : como 2 es á 5, 5 es á 8, 8 es á 11, etc., etc.

1066. En las progresiones por diferencia deben considerarse cinco partes ó elementos, á saber :

- | | | |
|--|------------------|----|
| 1º El primer término, | representado por | a. |
| 2º El último término (ó térm. general) | » | l. |
| 3º La diferencia común, ó razón, | » | d. |
| 4º El número de términos, | » | n. |
| 5º La suma de los términos | » | s. |

Estas cantidades guardan entre sí tal relación, que basta conocer tres de ellas para encontrar fácilmente las ótras dos.

1067. **Teorema.** *Cualquier término de una progresión aritmética es igual al 1º, más tantas veces la razón como términos hay antes de él.*

Sea la progresión : $\div 1.5.9.13.17.21 \dots$

Por definición, el 2º término 5 es igual al 1º más la razón ó diferencia que aquí es 4, sea :

$$5 = 1 + 4$$

Por definición también, el 3er término 9 es igual al 2º 5, más la razón 4, sea :

$$9 = 5 + 4; \text{ pero } 5 = 1 + 4$$

luego :

$$9 = 1 + 4 + 4$$

esto es al 1º más 2 veces la razón.

1068. Algebraicamente: $a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \dots l$.

De donde, para encontrar el último término, tenemos la fórmula :

$$l = a + (n - 1) d \quad (A)$$

en la que d es positiva ó negativa.

1069. EJEMPLO I. — *Búsquese el 18º término de la progresión $\div 3.11.19. \dots$, cuya diferencia es 8.*

Tenemos: 18º término ó $l = 3 + (17 \times 8) = 139$

II. *¿Cuál es 21º término de la progresión $\div 80, 75, 70. \dots$, cuya diferencia es -5 ?*

Tenemos: 21º térm. ó $l = 80 - (5 \times 20) = -20$

De la fórmula $l = a + (n - 1) d$

se sacan las siguientes :

$$a = l - (n - 1) d \quad (1)$$

$$n = \frac{l - a}{d} + 1 \quad (2)$$

$$d = \frac{l - a}{n - 1} \quad (3)$$

1070. Teorema. *En una progresión aritmética, la suma de dos términos equidistantes de los extremos es constantemente igual á la suma de los extremos.*

Sea la progresión :

$$\div 2.5.8.11.14.17.20.23.26.29.32$$

Consideremos los términos 8 y 26 equidistantes de los extremos.

Hay dos térm. antes del 8, luego : $8 = 2 + (2 \times 3)$

Hay dos térm. después de 26, luego : $26 = 32 - (2 \times 3)$

Sumando ambas igualdades tenemos: $8 + 26 = 2 + 32 + 2 \times 3$ y $- 2 \times 3$ se destruyen.

1071. Algebraicamente. Si t denota un término de la progresión que tiene r términos antes de él, y t' un término

que tiene r términos después; entonces los términos t y t' serán equidistantes de los extremos, y tenemos las dos igualdades:

$$t = a + rd \quad (1)$$

$$t' = l - rd \quad (2)$$

Sumándolas, da
$$t + t' = a + l$$

1072. Nota. — Cuando el número de términos de la progresión es impar, como el del medio es equidistante de los extremos, iguala á la semisuma de ellos.

1073. Teorema. *La suma de los términos de una progresión aritmética es igual á la semisuma de los extremos, multiplicada por el número de términos.*

Sea la progresión $\div 3.6.9.12.15.18$, compuesta de seis términos; llamemos s la suma de sus términos, y tendremos:

$$S = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18$$

del propio modo: $S = 18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3$

Sumemos:
$$2S = 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21$$

Así, dos veces la suma iguala á 6 veces 21, esto es, tantas veces 21 como términos tiene la progresión; pero $21 = 3 + 18$, ó la suma de los extremos; luego:

$$2S = (3 + 18) 6$$

$$S = \frac{(3 + 18) 6}{2}$$

1074. Algebraicamente. Indicando la suma de los términos de la progresión creciente, tenemos:

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + l \quad (1)$$

lo mismo de la progresión decreciente:

$$S = l + (l - d) + (l - 2d) + \dots + a \quad (2)$$

Sumando ambas, resulta:

$$2S = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \dots + (a + l) \quad (3)$$

porque $+d$ y $-d$, $+2d$ y $-2d$, etc. se destruyen.

Ahora la ecuación (3) expresa la suma de n términos, cada uno de los cuales es igual á $(a + l)$; luego:

$$2S = n(a + l)$$

y dividiendo por 2, tenemos la fórmula:

$$S = \frac{n}{2} (a + l) = \frac{(a + l)n}{2} \quad (B)$$

1075. EJEMPLO I. — ¿Cuál es la suma de los 100 primeros números : 1. 2. 3. 4. . . . 100?

La serie de los números forma una progresión aritmética cuya razón es 1; tendremos pues :

$$S = \frac{(1 + 100)100}{2} = 5050$$

II. Encuéntrese la suma de los términos de la progresión $\div 1. 6. 11. 16 \dots$, compuesta de 51 términos.

$$\text{El } 51^{\circ} \text{ término.} = 1 + (50 \times 5) = 251$$

la suma :
$$S = \frac{(1 + 251) 51}{2} = 6426$$

1076. Llámense *medios aritméticos* ó *diferenciales*, los números que forman, con dos números dados, una progresión aritmética cuyos extremos son estos mismos números.

Así, los números 5, 7, 9, que forman con 3 y 11 una progresión aritmética, cuyos extremos son 3 y 11, son medios aritméticos.

1077. Problema. Intercálense entre 2 y 26 cinco medios aritméticos.

Si conociéramos la razón ó diferencia de la progresión, al añadirla al primer término 2 tendríamos el primer medio; al añadirla á éste, tendríamos el segundo, etc.; debemos pues buscar la diferencia.

La progresión tendrá 7 términos, á saber : los 5 medios pedidos y los 2 extremos.

Entonces el último término :

$$26 = 2 + 6d \quad (1067)$$

$$26 - 2 = 6d$$

$$d = \frac{26 - 2}{6} = 4$$

Los medios pedidos son : 6. 10. 14. 18 y 22.

1078. Algebraicamente. Si m denota el número de medios que deben intercalarse, el número de términos de la progresión será $m + 2$, á saber los m medios, más los 2 términos dados, y tendremos : $n = m + 2$

Este valor de n sustituido en la fórmula (A) (1068),

da :
$$l = a + (m + 1) d$$

luego,
$$d = \frac{l - a}{m + 1} \quad (C)$$

1079. Observación. Si entre los términos consecutivos de una progresión aritmética se intercala un mismo número de medios, las progresiones parciales que así resultan forman una sola y misma progresión.

En efecto, la razón de estas progresiones es una misma, puesto que ésta se encuentra, para cada una de ellas, dividiendo la diferencia *constante* de dos términos consecutivos por el número de medios que deben intercalarse, más uno. Además, el último término de la 1ª progresión es el 1º de la 2ª; el último de la 2ª es el 1º de la 3ª, y así en adelante. Luego, todas estas progresiones parciales forman una sola y misma progresión.

1080. EJEMPLO. — *Intercálense tres medios aritméticos entre los términos consecutivos de la progresión.*

$$\div 2.14.26.38$$

La razón de las progresiones parciales será: $\frac{14-2}{4}$,
 $\frac{26-14}{4}$, $\frac{38-26}{4}$, esto es, $\frac{12}{4}$, ó 3.

Tendremos pues sucesivamente:

$$\div 2.5.8.11.14$$

$$\div 14.17.20.23.26$$

$$\div 26.29.32.35.38$$

Que puede escribirse:

$$\div 2.5.8.11.14.17.20.23.26.29.32.35.38$$

con lo que resulta una sola y misma progresión.

EJERCICIOS SOBRE LAS PROGRESIONES ARITMÉTICAS

1129. ¿Cuál es 18º término de una progresión aritmética, si el primero es 4 y la razón 5?

1130. Si el 18º término de una progresión aritmética es 89, y la razón 5, ¿cuál es el primero?

1131. Un particular ha satisfecho una deuda en varios dividendos; el 1º fue de \$ 4, y el último de \$ 89; cada dividendo excede en \$ 5 al anterior; ¿cuántos fueron los distintos dividendos?

1132. Una señora caritativa ha dado limosna á un pobre todos los días del año; el 1º día le dio 10 cents.; el 2º, 25, aumentando así 15 centavos; ¿cuánto le dio el último día?

1133. ¿Qué suma resulta de la adición de los diez primeros guarismos contados desde el cero?

1134. Encontrar el 85º término de la progresión $\div 3.7.11.15.19...$

1135. Conociendo el 1º término 3 de una progresión aritmética, la razón 2, y el número de términos 13, encontrar el último término y la suma de los términos de la progresión.

1136. Encontrar el valor de los 3 ángulos de un triángulo rectángulo, sabiendo que estos ángulos están en progresión aritmética.
1137. ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión $\div 80.75.70.65...$ compuesta de 33 términos?
1138. Conociendo el 1^{er} término 95, el último 5 y el número de los términos, que es 19, en una progresión aritmética, encontrar la razón y la suma de los términos.
1139. Un coronel que tiene 3 003 soldados á su mando, quiere formarlos en triángulo, de modo que en la 1^a fila haya 1 soldado, 2 en la 2^a, 3 en la 3^a, y así sucesivamente; ¿cuántas filas formará con sus soldados?
1140. Búsquense los tres lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que forman una progresión aritmética, cuya razón es 16.
1141. Tengo tal número de nueces que puedo formar con ellas un triángulo equilátero. Luégo después gano en el juego ótras tantas, y quiero hacer un cuadrado de modo que en cada lado haya tantas nueces cuantas tenía antes el lado del triángulo, y así me sobran 20; ¿cuántas tenía al principio?
1142. Para cavar un pozo artesiano de 500 met. de profundidad se pagan 27 reales por el primer metro, y aumentando progresivamente, $\frac{1}{2}$ real por cada uno de los ótros; ¿cuánto se pagará por el último metro, y cuánto por todo el pozo?
1143. Se distribuye una suma de dinero entre 28 soldados, estableciendo cierta diferencia entre el 1^o y el 2^o, y así sucesivamente. El 5^o y el 12^o reciben juntos \$ 10; el 7^o y el 16^o juntos tienen \$ 9; ¿á cómo le cabe á cada uno de éstos, y cuánto reciben todos juntos?
1144. ¿Cuál es el 54^o término de la progresión $\div 5.7.9.11...?$
1145. ¿Cuál es el 51^o térm. de la prog. $\div 200.196.192...?$
1146. ¿Cuál es el 118^o térm. de la prog. $\div 5.5\frac{1}{3}.5\frac{2}{3}.6...?$
1147. Intercálense entre 5 y 20 cinco medios diferenciales, y escríbase la progresión.
1148. Intercálense 4 medios diferenciales entre 91 y 5, y escríbase la progresión.
1149. ¿Cuál es la suma de los térm. de la progresión $\div 1.5.9...$, compuesta de 41 términos?
1150. ¿Cuál es la suma de los térm. de la progresión $\div 3.2\frac{2}{3}.2\frac{1}{3}...$, compuesta de 24 términos?
1151. Búsquense 5 números que formen progresión, siendo 115 la suma de ellos, y 39 el último término.
1152. ¿Cuál es la suma de los 1 000 primeros números?
1153. El término de la mitad de una progresión es 18; ¿de cuántos términos consta ésta, si la suma de todos ellos es 126?
1154. Una progresión se compone de 9 términos, el de la mitad es 27; búsquese la suma de todos.
1155. Tres números en progresión por diferencia dan 7 500 de producto; si el menor es 15, ¿cuáles son los ótros dos?
1156. Búsquese el 30^o número impar.
1157. Intercálense entre 2 y 24 diez medios aritméticos.
1158. Intercálense 3 medios aritméticos entre los términos consecutivos de la progresión $\div 5.13.21.29.37.$

§ II. Progresiones geométricas.

1081. Llámase **progresión geométrica** ó **por cuociente** una serie de términos tales que cada uno de ellos es igual al que le precede multiplicado por un número fijo, llamado **razón** de la progresión.

1082. La progresión geométrica es **creciente** cuando la razón es mayor que la unidad, y es **decreciente** cuando la razón es un quebrado.

Así, las series de los números: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64... y 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$... forman dos progresiones, la primera de las cuales es creciente, porque la razón es 2, y la segunda decreciente, porque la razón es $\frac{1}{3}$.

1083. Las progresiones geométricas se escriben anteponiendo al primer término el signo ($\div$) que se lee: *como*, y separando los demás con el signo ($:$) que se lee: *es á*; así las progresiones anteriores se escriben

$$\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 \dots$$

y

$$\div 81 : 27 : 9 : 3 : 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} \dots$$

y se leen: como 1 es á 2, 2 es á 4, etc., como 81 es á 27, 27 es á 9, etc.

1084. En las progresiones geométricas deben considerarse cinco partes ó elementos, á saber:

1º El primer término,	representado por	a.
2º El último término,	»	l.
3º El número de términos,	»	n.
4º La razón,	»	r.
5º La suma de todos los términos.	»	s.

1085. Teorema. *Cualquier término de una progresión geométrica es igual al primero multiplicado por la razón elevada á la potencia que indica el número de términos que le preceden.*

Sea la progresión:

$$\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96$$

Por definición, el 2º término 6 es igual al 1º 3, multiplicado por la razón que aquí es 2, sea $6 = 3 \times 2$.

Por definición también, el 3^{er} término 12 es igual al 2^o 6, multiplicado por la razón 2; pero $6 = 3 \times 2$, luego :

$12 = 3 \times 2^2$, esto es, al 1^o $\times$ la razón al cuadrado.

1086. Algebraicamente : $a, ar, ar^2, ar^3 \dots l$.

Según se ve, en cada término el exponente de r es igual al número de términos que le preceden.

De donde, para encontrar el último término, tenemos la fórmula :

$$l = ar^{n-1} \quad (A)$$

1087. EJEMPLO I. — *Búsquese el 7^o término de la progresión $\div 5 : 10 : 20 \dots$*

Tenemos : 7^o término. $= 5 \times 2^6 = 5 \times 64 = 320$

II. *¿Cuál es el 9^o término de la progresión $\div 729 : 243 : 81 \dots$?*

Tenemos : 9^o término. $= 729 \times \left(\frac{1}{3}\right)^8$

La 8^a potencia de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{3^8}$, ó $\frac{1}{6561}$, luego,

$$\text{el 9^o término.} = 729 \times \frac{1}{6561} = \frac{1}{9}$$

De la fórmula $l = ar^{n-1}$

se sacan las siguientes :

$$a = \frac{l}{r^{n-1}} \quad (1)$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} \quad (2)$$

1088. Teorema. *En una progresión geométrica el producto de dos términos equidistantes de los extremos es constante é igual al producto de los extremos.*

Sea la progresión :

$\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458 : 4374$

Consideremos los términos 18 y 486 equidistantes de los extremos.

Hay 2 término. antes de 18, luego : $18 = 2 \times 3^2$

Hay 2 término. después de 486, luego : $486 = 4374 : 3^2$

Multiplicando ambas igualdades : $18 \times 486 = 2 \times 4374$

3^2 del multiplicando se simplifica con 3^2 del divisor ó denominador.

1089. Algebraicamente. Si t denota un término de la progresión que tiene r términos antes de él, y t' un término que tiene r términos después; entonces los términos t y t' serán equidistantes de los extremos; y tenemos las dos igualdades:

$$\text{Según el nº 1086,} \quad t = ar^2 \quad (1)$$

$$\text{También } l = t'r^2, \text{ luego } t' = \frac{l}{r^2} \quad (2)$$

$$\text{Multiplicándolas, da } tt' = \frac{ar^2 l}{r^2} = al$$

1090. Nota. — Cuando es impar el número de términos de la progresión, *el de la mitad es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos.*

1091. Teorema. *El producto de los términos de una progresión geométrica es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos, elevado á la potencia que indica el número de términos.*

Sea la progr. $\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486$, compuesta de 6 térm.; llamemos P el producto de sus términos, y tendremos la progresión creciente:

$$P = 2 \times 6 \times 18 \times 54 \times 162 \times 486$$

Del propio modo la progresión decreciente:

$$P = 486 \times 162 \times 54 \times 18 \times 6 \times 2$$

Multiplicando miembro por miembro ambas igualdades, resulta: $P^2 = 972 \times 972 \times 972 \times 972 \times 972 \times 972$

Así, el cuadrado del producto es igual á 972 multiplicado seis veces por sí mismo, esto es, 972 elevado á la potencia que indica el número de términos que tiene la progresión; pero $972 = 2 \times 486$, ó al producto de los extremos.

$$\text{Luego,} \quad P^2 = 972^6$$

$$P = \sqrt{972^6}$$

1092. Algebraicamente. Indicando el producto de los térm. de la progresión creciente, tenemos:

$$P = a. ar. ar^2. ar^3 \dots l \quad (1)$$

y de la decreciente:

$$P = l. ar^3. ar^2. ar \dots a \quad (2)$$

Multiplicándolas miembro por miembro:

$$P^2 = al \times a^2 r^4 \times a^2 r^4 \times a^2 r^4 \dots al \quad (3)$$

pero (1089) $al = a^2 r^4$, y tenemos n términos en el 2º miembro; luego:

$$P^2 = (al)^n = a^n l^n$$

$$P = \sqrt{a^n l^n} \quad (B)$$

1093. Teorema. *La suma de los términos de una progresión geométrica es igual al último, multiplicado por la razón, menos el 1º, y dividida la diferencia por la razón disminuida de 1.*

Sea la progresión $\div 1:3:9:27:81$, cuya razón es 3; llamemos S la suma de sus términos, y tendremos:

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 \quad (1)$$

Multiplicando ambos miembros por la razón 3, resulta:

$$3S = 3 + 9 + 27 + 81 + 81 \times 3 \quad (2)$$

Restemos miembro por miembro la ecuación (1) de la ecuación (2):

$$3S - S = 3 + 9 + 27 + 81 + 81 \times 3 - 1 - 3 - 9 - 27 - 81$$

$$\text{ó simplificando: } 2S = 81 \times 3 - 1$$

$$S = \frac{81 \times 3 - 1}{2} = \frac{81 \times 3 - 1}{3 - 1}$$

1094. Algebraicamente: Indicando la suma de los términos de la progresión creciente, tenemos:

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 \dots + ar^{n-1} \quad (1)$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por la razón r , resulta:

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad (2)$$

Restemos la igualdad (1) de (2), cambiando los signos del substraendo:

$$Sr - S = ar^n - a \quad (3); \text{ pero } ar^n = rl$$

$$\text{luego } Sr - S = rl - a \text{ ó } S(r - 1) = rl - a$$

$$\text{y } S = \frac{rl - a}{r - 1} \quad (C) \text{ ó } S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad (D)$$

1095. Así, para encontrar la suma de los términos de una progresión geométrica, se eleva la razón á la potencia indicada por el número de términos de la progresión, se quita 1 del resultado, se multiplica la diferencia por el 1º término, y el producto se divide por la razón disminuida de 1.

1096. Cuando la progresión geométrica es decreciente, para evitar el empleo de las cantidades negativas, se pueden cambiar los signos de las fórmulas (C) y (D), y escribirlas:

$$S = \frac{a - rl}{1 - r} \quad (C') \text{ ó } S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad (D')$$

1097. EJEMPLO I. — ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión $\div 1:5:25:125\dots$, compuesta de 10 términos?

La fórmula (D) nos da :

$$S = \frac{1(5^{10} - 1)}{5 - 1} \quad \text{ó} \quad \frac{5^{10} - 1}{4}$$

como $5^{10} = 9765625$, $S = \frac{9765625}{4} = 2441406$

II. — ¿Cuánto suman los términos de la progresión $\div 128:64:32\dots$, compuesta de 12 términos?

La fórmula (D') nos da :

$$S = \frac{128 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{12} \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{128 \left[1 - \frac{1}{2^{12}} \right]}{\frac{1}{2}}$$

pero

$$2^{12} = 4096$$

luego, $S = \frac{128 \left[1 - \left(\frac{1}{4096} \right) \right]}{\frac{1}{2}} = 256 \times \frac{4095}{4096} = 255 + \frac{15}{16}$

1098. Llámense *medios geométricos* ó *proporcionales* los números que forman con dos números dados una progresión geométrica, cuyos extremos son estos mismos números.

Así, los números 8, 16, 32, 64, que forman una progresión geométrica con 4 y 128, son medios geométricos que tienen por extremos á estos dos números.

1099. Problema. Intercálense entre 2 y 128 cinco medios geométricos.

Si conociéramos la razón de la progresión, al multiplicarla por el 1^{er} término 2, tendríamos el 1^{er} medio; al multiplicarla por el 1^{er} medio, tendríamos el 2^o, etc. Busquemos pues la razón.

La progresión tendrá 7 términos, á saber: los 5 medios pedidos y los 2 extremos. Entonces el último término

$$128 = 2 \times r^6 \quad (1085)$$

$$r^6 = \frac{128}{2}$$

Para encontrar el valor de r hay que extraer la raíz 6^a de ambos miembros de la ecuación; luego,

$$r = \sqrt[6]{\frac{128}{2}}$$

1100. Se encuentra pues la razón, dividiendo el último término por el 1^o, y extrayendo del cociente la raíz que

indica el número de medios que deben intercalarse más 1, ó lo que es lo mismo, el número de términos de la progresión, menos 1*.

Siendo la razón 2, los medios pedidos serán :

4, 8, 16, 32 y 64

1101. Algebraicamente. Si m denota el número de medios que deben intercalarse, el número de términos de la progresión será $m+2$, á saber : los m medios, más los 2 términos dados, y tendremos :

$$l = ar^{m+1} \quad (1086)$$

$$\text{de donde,} \quad r = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}} \quad (E)$$

1102. Observación. Si entre los términos consecutivos de una progresión geométrica se intercala un mismo número de medios, las progresiones parciales que resultan forman una sola y misma progresión.

En efecto, la razón de estas progresiones es una misma, puesto que cada una de ellas se encuentra *extrayendo del cociente constante* de dos términos consecutivos *una raíz indicada por el número de medios que deben intercalarse, más 1*. Además, el último término de la 1ª progresión es el 1º de la 2ª, el último de la 2ª es el 1º de la 3ª, y así sucesivamente. Luego todas estas progresiones parciales formarán una sola y misma progresión.

1103. EJEMPLO. — *Intercálense tres medios geométricos entre los términos consecutivos de la progresión*

$$\div 2 : 32 : 512 : 8192$$

La razón de las progresiones parciales será :

$$\sqrt[4]{\frac{32}{2}}, \sqrt[4]{\frac{512}{32}}, \sqrt[4]{\frac{8192}{512}}, \text{ esto es, } \sqrt[4]{16}$$

Extrayendo la raíz 4ª resulta que la razón es 2, y tendremos sucesivamente :

$$\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32$$

$$\div 32 : 64 : 128 : 256 : 512$$

$$\div 512 : 1024 : 2048 : 4096 : 8192$$

Que puede escribirse :

$$\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048 : 4096 : 8192$$

y resulta una sola y misma progresión.

* La raíz 6ª de un número se encuentra extrayendo 1ª su raíz cuadrada, y en seguida la raíz cúbica del resultado, porque $2 \times 3 = 6$. Así también, la raíz 12ª se encuentra extrayendo sucesivamente dos veces la raíz cuadrada y luego la cúbica, porque $2 \times 2 \times 3 = 12$.

EJERCICIOS SOBRE LAS PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

1159. ¿Cuál es el 8° término de una progresión geométrica si el primero es 4 y la razón 3?

1160. Se desea saber cuál es el primer término de una progresión geométrica cuya razón es 3 y el quinto y último término 324.

1161. El último término de una progresión geométrica es 324, el primero 4, y el número de términos 5; ¿cuál es la razón?

1162. El primer término de una progresión geométrica es 4, la razón 3, y el último término 324; ¿cuál es la suma de todos los términos?

1163. Un particular empezó su fortuna con 4 cents.; el décimo año es de \$ 787,32; ¿en qué razón geométrica se ha aumentado cada año?

1164. Habiendo perdido 5 cents. un jugador en la primera mano, qui so jugar ótras cuatro, que perdió también, triplicando la apuesta en cada una; ¿cuánto perdió en la quinta mano?

1165. ¿Cuál es el 11° término de la progresión $\div 3 : 6 : 12 : 24 \dots$?

1166. ¿Cuál es el 17° término de la progresión
 $\div 4096 : 2048 : 1024 : 512 \dots$?

1167. Buscar los cuatro ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que dichos ángulos están en progresión geométrica, y que el último es igual á 9 veces el segundo.

1168. Un rey de la India llamado Shehram, queriendo premiar á Sessa-Ebn-Daher, inventor del ajedrez, le propuso que él mismo escogiese su premio. Éste le pidió la cantidad de granos de trigo que resultara poniendo en el primer cuadrado del tablero un grano, dos en el 2°, cuatro en el 3°, y así sucesivamente, duplicando siempre el número de granos para cada uno de los 64 cuadrados del tablero; preguntase qué número de granos resulta de este cálculo.

1169. Si un escandaloso pervierte durante 20 años á un solo hombre por año, á causa de sus malos ejemplos, y que cada uno de ellos siga haciendo lo mismo; ¿cuántos hombres tendrán al primero por padre y origen de su maldición?

1170. El 8° término de una progresión geométrica es 15309, el 3°, 63; búsqense todos los demás hasta el 8°.

1171. Suponiendo que una suma impuesta á intereses compuestos se duplica cada 15 años, se pregunta cuál fue en 1875 el valor de \$ 1 impuesto en el año 1500.

1172. Búsqese la suma de los diez primeros términos de la progresión
 $\div 2 : 4 : 8 : 16 \dots$

1173. ¿Cuál es la suma de los ocho primeros términos de la progresión
 $\div 27 : 9 : 3 \dots$?

1174. Intercálense tres medios geométricos entre 2 y 162.

1175. Intercálense dos medios geométricos entre 1024 y 16.

1176. Intercálense tres medios geomét. entre los términos consecutivos, de la progresión $\div 2 : 32 : 512 : 8192 : 131072$.

1177. ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión $\div 3 : 12 : 48 \dots$ compuesta de 15 términos?

1178. Búsqese la suma de los términos de la progresión $\div 27 : 9 : 3 \dots$ compuesta de 12 términos.

1179. ¿Cuál es la razón de la progresión cuyo último término es 1280, el 1º 5 y el número de términos 9?

1180. Una progresión geométrica tiene 10 términos, la razón es igual al $\frac{1}{3}$ del 1º término, y la suma de los dos primeros es 18; ¿cuáles son estos diez términos?

1181. Una progresión geométrica tiene 6 términos, la razón es los $\frac{2}{3}$ del primero, y la diferencia de los dos primeros es 45; ¿cuáles son estos seis términos?

1182. ¿Cuál es el producto de los términos de la progresión $\div 3 : 6 : 12 \dots$, compuesta de 6 términos?

LECCIÓN III

LOGARITMOS

1104. El **logaritmo** de una cantidad es el exponente de la potencia á que debe elevarse un número fijo para igualar á la cantidad propuesta. El número fijo se llama *base* del sistema.

Por ejemplo, si a denota un número positivo, excepto la unidad, y si $a^b = c$ (ó $4^3 = 64$), se ve que la cantidad c (ó 64) se encuentra por la elevación á potencias, multiplicando a (ó 4) tantas veces como lo indica el exponente b (ó 3); la cantidad a (ó 4) se encontraría por la extracción de raíces, puesto que $a = \sqrt[b]{c}$ (ó $4 = \sqrt[3]{64}$); para encontrar la tercera

cantidad b (ó 3), necesitamos de los logaritmos, de modo que $b = {}^a \log c$, que se lee : $b =$ logaritmo de c para la base a (ó $3 = {}^4 \log 64$; $3 =$ logaritmo de 64 para la base 4).

Por b se representa cualquier número, y ha de haber siempre para cualquier base fija, un exponente tal, que por esta potencia se representen todos los números sucesivamente. Esta serie de exponentes se encuentra en las tablas logarítmicas al lado de la serie natural de los números, para una base ya escogida.

1105. *De otro modo*: Llámense **logaritmos** los números que forman parte de una progresión aritmética que empieza por cero, y que corresponden término por término á otros números pertenecientes á una progresión geométrica que empieza por la unidad. Cada término de la progresión aritmética es el logaritmo del término correspondiente en la progresión geométrica.

Si tenemos, por ejemplo, las progresiones siguientes :

$$\div 1:2:4:8:16:32:64.. = \div 1:2 : 2^2 : 2^3 : 2^4 : 2^5 : 2^6$$

$$\div 0.3.6.9.12.15.18.. = \div 0.1 \times 3.2 \times 3.3 \times 3.4 \times 3.5 \times 3.6 \times 3$$

Se ve : 1º Que cada término de la serie inferior es el *logaritmo* del término que ocupa el mismo lugar en la superior;

2º Que la progresión geométrica encierra *todas las potencias de la razón*;

3º Que la progresión aritmética contiene *todos los múltiplos de la razón*;

4º Que el número que *sirve de exponente* á cualquier término de la progresión geométrica, *sirve de coeficiente* al que le corresponde en la progresión aritmética.

§ I. Propiedades de los logaritmos.

1106. 1ª Propiedad. *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores de este producto.*

Sean las progresiones :

$$\div 1:2:4:8:16:32:64:128:256:512 \quad (A)$$

$$\div 0.3.6.9.12.15.18.21.24.27 \quad (B)$$

Averigüemos, por ejemplo, el producto de los números 8 y 64.

Para esto tomemos sus logaritmos 9 y 18 en la progresión (B); sumándolos, resulta 27; busquemos ahora á qué número corresponde 27, y como es á 512, éste será el producto pedido.

Porque, suponiendo que $m = a^x$, $n = a^z$
entonces $x = \log. m$, $z = \log. n$

Pero por la multiplicación tenemos :

$$mn = a^{x+z}$$

luego, $\log. mn = x + z = \log. m + \log. n$

1107. 2ª Propiedad. *El logaritmo de un cuociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Sea, v. g., de dividir 512 por 32.

Tomaremos en la progresión (B) los logaritmos 27 y 15 de ambos números, y restando 15 de 27, tenemos 12, y bus-

cando el número que corresponde á 12, hallamos 16, que será el cuociente pedido.

Porque, si $m = a^x$, $n = a^z$
 entonces $x = \log. m$, $z = \log. n$

Por la división, tenemos: $\frac{m}{n} = a^{x-z}$

por consiguiente, $\log. \left(\frac{m}{n} \right) = x - z = \log. m. - \log. n$

1108. 3ª Propiedad. *El logaritmo de cualquier potencia de un número es igual al logaritmo de este número multiplicado por el exponente de la potencia.*

Si se trata de elevar 8, por ejemplo, á la 3ª potencia.

Vemos que el logaritmo de 8 es 9; el producto de 9 por 3 es 27, y como el número correspondiente á 27 es 512, este núm. será la 3ª potencia de 8.

Porque, si $m = a^x$; entonces $x = \log. m$

Por la elevación á potencias, $m^r = a^{rx}$
 por consiguiente, $\log (m^r) = rx = r \log. m$

1109. 4ª Propiedad. *El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical, dividido por el índice de la raíz.*

Si queremos saber cuál es la raíz bicuadrada de 256.

Vemos que el logaritmo de 256 es 24, que dividido por 4 da 6 en el cuociente, número que corresponde á 4; luego 4 es la raíz bicuadrada ó cuarta de 256.

Porque, si $m = a^x$; entonces $x = \log. m$

Por la extracción de raíces, $\sqrt[r]{m} = a^{\frac{x}{r}}$

luego, $\log. \sqrt[r]{m} = \frac{x}{r} = \frac{\log. m}{r}$

1110. Por estas cuatro propiedades se ve inmediatamente que:

- 1º La multiplicación se convierte en adición;
- 2º La división en substracción;
- 3º La elevación á potencias en multiplicación, y
- 4º La extracción de raíces en división.

1111. La principal ventaja de los logaritmos es el facilitar los cálculos aritméticos, por medios de las cuatro propiedades que acabamos de explicar.

Con este objeto es necesario tener una *Tabla de logaritmos*, construída de modo que se encuentre prontamente el

logaritmo de cualquier número dentro de cierto límite, ó el número que corresponde á cualquier logaritmo hasta cierto grado de aproximación. Las tablas comunes dan los logaritmos de los números desde 1 hasta 10000, con 5 ó 6 decimales.

Con una tabla de esta especie, tenemos para los cálculos las siguientes sencillísimas

REGLAS

1112. I. Para multiplicar un número por otro: *Búsquense los logaritmos de ambos números; súmense estos logaritmos, y averígüese qué número de la tabla corresponde á esta suma; el número encontrado será el producto que se pide (1106);*

1113. II. Para dividir un número por otro: *Búsquense los logaritmos de ambos números; réstese el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo; y averígüese qué número de la tabla corresponde á la diferencia; dicho número será el cuociente pedido (1107);*

1114. III. Para elevar un número á cualquier potencia: *Búsquese el logaritmo del número dado, y multiplíquese por el exponente de la potencia pedida: averígüese en seguida qué número de la tabla corresponde á este producto, y ése será la potencia que se busca (1108);*

1115. IV. Para extraer cualquier raíz de un número: *Búsquese el logaritmo del número dado, y dividaselo por el índice de la raíz que se pide; averígüese en seguida el número que en la tabla corresponde al cuociente encontrado, y ése será la raíz pedida (1109).*

§ II. De los logaritmos vulgares.

1116. De la definición de los logaritmos (1105), resulta que hay una infinidad de sistemas de logaritmos, y que en todos ellos el logaritmo de 1 es 0.

1117. Llámase *base* de un sistema de logaritmos el número que en dicho sistema tiene 1 por logaritmo.

1118. El inventor de los logaritmos fue el barón escocés Néper ó Nápier. La base de su sistema es un número incommensurable, designado por la letra *e*, y cuyos primeros guarismos son 2,718281828...

1119. Los *logaritmos vulgares* ó de Briggs, más cómodos

para los cálculos prácticos que los de Néper, tienen por *base* el número 10, y se hallan definidos por la progresión décupla (A) y la serie natural de los números (B).

$$\dots \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 \dots (A)$$

$$\dots -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots (B)$$

ó lo que es lo mismo :

$10^3 = 1000;$	luego, $\log 1000 = 3$
$10^2 = 100$	$\log 100 = 2$
$10^1 = 10$	$\log 10 = 1$
$10^0 = 1$	$\log 1 = 0$
$10^{-1} = 0,1$	$\log 0,1 = -1$
$10^{-2} = 0,01$	$\log 0,01 = -2$
$10^{-3} = 0,001$	$\log 0,001 = -3$

De esto se infiere :

1º Que todos los números que son mayores que 1 tienen logaritmos positivos, y los que son menores que 1, ó los quebrados propios tienen logaritmos negativos;

2º Que todo logaritmo comprendido entre 1 y 10, tiene su logaritmo mayor que cero, y menor que 1; que todo número comprendido entre 10 y 100, tiene su logaritmo mayor que 1, y menor que 2; que todo número comprendido entre 100 y 1000, tiene su logaritmo mayor que 2 y menor que 3, y así sucesivamente.

Ó en resumen : Las potencias de 10, con exponentes enteros, tienen por logaritmos números enteros. Todos los demás números, enteros y quebrados, propios y mixtos, tienen por logaritmos *números incommensurables*.

1120. Todo *logaritmo positivo* que no es entero, está compuesto de dos partes, una de las cuales es cero ó un *entero*, y la otra un *quebrado decimal propio*.

1121. Los enteros de un logaritmo se llaman su *índice* ó *característica*, porque caracterizan é indican las decenas, centenas ó miles, y el quebrado decimal propio que está á continuación de los enteros, ha sido llamado *mantisa* por los alemanes.

Así el $\log$ de $271 = 2,43297$, luego 2 es su *característica*, y los decimales que siguen, su *mantisa*.

1122. La *característica* contiene tantas unidades cuantas cifras tiene el número en su parte entera, menos uno.

1123. Tratándose de quebrados, la característica será negativa; así, — 1 si hay decenas, — 2 si hay sólo centenas y ninguna decena; pero la parte decimal es positiva. Siendo la característica negativa, ésta se pone después de la mantisa, y delante se escribe un cero. Así,

$$\log 56 = 1,74819$$

$$\log 5600 = 3,74819$$

$$\log 0,056 = 0,74819 - 2$$

1124. También puede escribirse la característica negativa, con el signo *menos* encima de ella, antes de la mantisa: v. g.: $\bar{2},74819$.

1125. En el cuadro del nº 1119 vemos también que la *característica negativa* del logaritmo de un número menor que 1 tiene tantas unidades *cuantos ceros hay antes de la primera cifra decimal significativa, contando también el que precede á la coma*.

1126. El logaritmo de un número 10, 100, 1000 veces, etc. mayor ó menor que otro, tiene la misma mantisa que el logaritmo de este otro, y sólo se diferencia en la característica.

Por ejemplo, si $\log 2864 = 3,45697$
 tendremos $\log 28640 = 3,45697 + 1 = 4,45697$
 $\log 286400 = 3,45697 + 2 = 5,45697$
 $\log 2864000 = 3,45697 + 3 = 6,45697$

§ III. De las tablas de logaritmos.

1127. Existen diferentes tablas de logaritmos; unas, llamadas grandes tablas, dan los logaritmos de los 100000 ó 108000 primeros números con 7 decimales; otras, llamadas pequeñas tablas, contienen los logaritmos de los 10000 primeros números con 5 decimales.

Algunas tablas contienen en columnas especiales las diferencias que existen entre los logaritmos de dos números consecutivos. También hay otras que no dan las características; pero eso no es más que una simplificación, porque basta ver un número para conocer la parte entera de su logaritmo.

1128. Para servirse ventajosamente de una tabla de logaritmos, es preciso saber resolver las dos operaciones siguientes:

1ª Encontrar el logaritmo de un número dado;

2ª Encontrar el número que corresponde á un logaritmo dado.

Encontrar el logaritmo de un número dado.

1129. Caso 1º. *El número tiene 3 cifras :* Se busca directamente el número en la tabla, en la columna *n*; se escribe su característica, que debe ser 2 (**1122**), seguida de una coma, y á la derecha los dos guarismos que están frente á frente, ó un poco más arriba, en la columna *Log*, y se añaden los tres guarismos de la columna 0, que están en frente del número dado. Así tenemos, por ejemplo :

$$\log 489 = 2,68931$$

$$\log 727 = 2,86273$$

Nota. — En algunas tablas, como en las pequeñas de Lalande, por ejemplo, la característica y la mantisa se encuentran de una vez frente á frente del número cuyo logaritmo se busca.

1130. Caso 2º. *El número tiene 4 cifras :* Las tres primeras cifras se buscan, como en el caso anterior, en la columna *n*; se escribe la característica, que debe ser 3; en seguida las dos primeras cifras correspondientes de la mantisa, como están en la columna *Log*, y en la columna que tiene el mismo número que el cuarto guarismo de la cantidad dada, se encontrarán las otras tres cifras, en la línea horizontal del número cuyo logaritmo se busca.

Si quiero buscar, v. g., el logaritmo de 6843; sé de antemano que su característica es 3; tomo pues las tres primeras cifras 684, número que busco en la columna *N*, y encuentro que las dos primeras cifras de la mantisa, en la columna *Log*, son 83; y como el cuarto guarismo es 3, veo que en la columna vertical correspondiente al 3, y en la línea horizontal que está en frente de 684, se halla el número 525, tengo que este número es la segunda parte de la mantisa; luego, $\log 6843 = 3,83525$. En las tablas de Lalande encuentro de una vez este logaritmo, en frente de 6843.

Si las tres últimas cifras que corresponden á la mantisa van señaladas con un asterisco (*), entonces no deben tomarse para las dos primeras de la columna *Log* que están más arriba del número que se busca, sino las que están en la línea inferior inmediata; así el log de $3237 = 3,51014$, que se encuentra íntegro en la tabla de Lalande.

1131. Caso 3º. *El número tiene 5 cifras :* Se busca el logaritmo para las cuatro primeras cifras, como en el caso anterior, teniendo antes cuidado de escribir la caracteris-

tica, que debe ser 4; el quinto guarismo que queda á la derecha se considera como décimos, y se multiplica por la diferencia tabular del logaritmo encontrado, la cual está indicada en la columna D de la tabla; se desprecia la parte decimal del producto, y se suman los enteros con la mantisa; el total será el logaritmo pedido.

Para encontrar el logaritmo de 24647, por ejemplo, escribo primero su característica 4, busco en seguida el logaritmo que corresponde á las cuatro primeras cifras, como en el caso anterior, hecho lo cual resulta $\log 2464 = 4,39164$; el último guarismo 7 lo considero como 0,7, y multiplicándolo por la diferencia tabular 18, tengo 12,6.

$$\begin{array}{r} \text{Luego, } \log 24647 = 4,39164 \\ \quad \quad \quad + 12,6 \\ \hline = 4,39176 \end{array}$$

1132. Caso 4º. *El número tiene 6 ó más cifras :* Se busca el logaritmo para las 4 primeras, como en el caso 2º; los demás guarismos que quedan á la derecha se consideran como decimales del cuarto, y se multiplican por la diferencia del logaritmo encontrado, procediendo para todo lo demás como en el caso anterior.

$$\begin{array}{r} \text{Así, } \log. 854584 = 5,93171 \quad 0,84 \times \text{la dif. } 5 = 4,20 \\ \quad \quad \quad + 4,20 \\ \hline = 5,93175 \end{array}$$

Encontrar el número que corresponde á un logaritmo dado.

1133. Caso 1º. *La mantisa del número se encuentra en las tablas :* Se buscan las dos primeras cifras de la mantisa en la columna *Log*, y después de encontradas se buscan las ótras tres en una de las columnas encabezadas por los números 0, 1, 2, etc. Si se ha dado con estas tres últimas cifras, el número buscado será el que se halla frente á frente en la columna N, añadiendo á su derecha el guarismo que está en lo alto de la columna que dio la mantisa. La característica sirve para indicar los enteros de que se compone el número; y por consiguiente, si éstos faltaren, se agregarán á la derecha los ceros necesarios; si por el contrario sobraren, se separarán con una coma los que estén demás.

Para averiguar á qué número corresponde el $\log. 4,65552$,

hago abstracción de la característica, y busco en la columna *Log* el número 65, primera parte de la mantisa, luego en la columna 0, la línea que empieza por 5, primero de los tres guarismos que quedan, y sigo la misma línea para ver si encuentro toda la mantisa. En efecto, la encuentro en la columna encabezada por el 4. Los tres primeros guarismos del número que busco serán por consiguiente los que se encuentran frente á frente, en la columna N, esto es, 452, y el último, el 4 que está encima de la columna que dio la mantisa. El número completo sería 4524; pero como según la característica debe haber cinco guarismos, añado un cero, y tengo el número definitivo 45240.

1134. Caso 2º. *Los tres últimos guarismos de la mantisa no se hallan exactamente en ninguna columna de las tablas:* Entonces deben encontrarse entre dos mantisas consecutivas, en cuyo caso se toma la menor, y se ve el número que le corresponde, como ya queda indicado.

Después se toma la diferencia que hay entre el logaritmo menor y el logaritmo dado, la cual se multiplica por 10. Este producto se divide por la diferencia tabular que hay entre el logaritmo menor y aquél que sigue inmediatamente, poniendo el resultado como quinta cifra. Continuando la división, seguirá la sexta cifra, etc.

EJEMPLO. — ¿Qué número corresponde al log 0,51764?

Siendo 51 las dos primeras cifras de la mantisa, busco en qué columna se encuentran las otras tres 764, ó el número que más se le aproxime; 764 no aparece en la tabla como segunda parte de esta mantisa; pero sí 759 número menor, al que corresponde en la columna N, el número 329; á éste le agrego, por cuarta cifra, el 3 que encabeza la columna que dio la mantisa, lo que da 3293, y escribo aparte el logaritmo 0,51759, menor que el dado; veo la diferencia de entrambos, así $0,51764 - 0,51759 = 5$; además, la diferencia tabular entre los dos logaritmos inmediatos es 13. Multiplicando 5 por 10, y dividiendo por 13, resulta $50 : 13 = 3$, quinta cifra del número buscado, esto es, 32933; continuando la división, sale 8 por sexta cifra, así 329338; y como la característica del logaritmo es 0, esto me indica que debe haber un solo guarismo en los enteros del número, siendo decimales los demás; luego 0,51764 es el log. de 3,29338.

EJERCICIOS SOBRE LOS LOGARITMOS

1183. Búsquese en las tablas el log. de cada uno de los números siguientes: 1° 520; 2° 146; 3° 1450; 4° 1,59; 5° 2 034; 6° 16 995; 7° 10 724; 8° 3 244; 9° 258,70; 10° 567 521; 11° 5 784; 12° 1,296; 13° 6 843; 14° 24 647.

1184. ¿A qué número de las tablas corresponden los logaritmos siguientes: 1° 0,30103; 2° 4,60206; 3° 4,10175; 4° 0,49150; 5° 2,59461; 6° 5,69329; 7° 0,08849; 8° 2,54240; 9° 5,44556; 10° 2,51033; 11° 3,68596; 12° 4,55575; 13° 2,88395?

1185. Ejecútense las operaciones siguientes por medio de los logaritmos:

- 1° Sumar el log. 3,87245 con el log. — 2,95419;
- 2° Restar del log. 0,93676 el log. 3,11190;
- 3° Restar del log. de 1, que es 0,00000, el log. — 3,39192;
- 4° Multiplicar por 3 el log. — 4,90200;
- 5° Dividir por 2 el log. — 1,42846;
- 6° Dividir por 4 el log. — 5,62829;
- 7° Calcular el log. de la expresión

$$x = \frac{64 \times 0,0826 \times 16,57}{13,48 \times 0,0017 \times 9,467}$$

Ejecutar por medio de los logaritmos las operaciones siguientes:

1186. Multiplicar:

1°)	976 por 27	4°)	48 966 por 7 649
2°)	697 por 34	5°)	96 824 por 4 696
3°)	8 386 por 57	6°)	76 496 por 87 969

1187. Dividir:

1°)	6 375 por 5	4°)	11 440 por 572
2°)	173 469 por 38	5°)	28 968 por 213
3°)	8 760 por 365	6°)	6 536 por 8

1188. Elevar los números siguientes á la potencia indicada:

1°)	1 868 ²	4°)	2 158 ⁵
2°)	43 805 ³	5°)	1 528 ⁶
3°)	1 238 ⁴	6°)	6 769 ⁶

1189. Extraer de los números siguientes la raíz indicada:

1°)	R. cuad. de 108 241	4°)	R. quinta 759 375
2°)	R. cub. de 571 787	5°)	R. sexta 117 649
3°)	R. cuarta de 614 656	6°)	R. octava 65 536

LECCIÓN IV.

INTERÉS COMPUESTO

1135. **Interés compuesto** es el que proviene del capital sumado con los intereses del mismo capital.

1136. **Capitalizar** es agregar al capital el importe de los intereses ya adquiridos con él, y formar de ambas canti-

dades un nuevo y mayor capital, que irá ganando, por consiguiente, mayor cantidad de intereses.

1137. Para encontrar el interés compuesto y el monto de cualquier suma, cuando se conoce el capital, el tanto y el tiempo,

Regla I. *Buscar, según el modo ordinario, el interés de \$ 1 en un año; multiplicar este interés por el capital dado, y sumar el producto con el primer capital, para formar el capital del 2º año;*

II. *Buscar el interés para el 2º año, y sumarlo con su capital respectivo, para formar el capital del 3º año, y así en adelante;*

III. *Del último capital encontrado se resta el capital líquido, y la diferencia será el interés compuesto.*

1138. EJEMPLO. — ¿Cuál es interés compuesto de \$320 en 4 años, al 5 %?

OPERACIÓN		
	\$ 320	Capital para el 1º año.
$320 \times 0,05 =$	16	
	336	» » 2º »
$336 \times 0,05 =$	16,80	
	352,80	» » 3º »
$352,80 \times 0,05 =$	17,64	
	370,44	» » 4º »
$370,44 \times 0,05 =$	18,522	
	388,962	Monto » 4 años.
	320	Capital dado.
	\$ 68,962	Interés compuesto.

Análisis. Como el interés de \$ 1 al 5 %, en un año, es de \$ 0,05, multiplico por \$ 0,05 el capital primitivo, y resultan \$ 16 de interés que, sumados con dicho capital, hacen \$ 336, capital para el 2º año, que también se multiplica por \$ 0,05, y así sucesivamente.

1139. Nota I. Cuando el interés es pagadero por semestres ó trimestres, se procede del mismo modo capitalizando en cada periodo de tiempo, como en este último ejemplo.

II. Cuando el tiempo dado contiene años, meses y días, no ha de calcularse el interés compuesto sino para el

número entero de años, debiendo considerarse el capital que resulta al fin del último año como impuesto á interés simple para los meses y días indicados; el interés que así se obtenga, debe añadirse al último capital, antes de hacer la resta.

1140. Este modo de calcular es larguísimo, y se hace impracticable cuando el capital queda impuesto durante mucho tiempo. Pero es fácil establecer fórmulas que ayuden á la pronta resolución de las cuestiones de interés compuesto.

Búsquese, p. ej., el monto de un capital de \$10000 impuesto al 5 % y á interés compuesto durante 15 años.

\$100 dan 5 de int., y valen al cabo de un año \$105, \$1 valdrá 100 veces menos ó 1,05, y los \$10000 valdrán 10000 veces más que un sucre, ó $10000 \times 1,05$.

Así, multiplicando un capital por 1,05 se encuentra lo que vale al cabo de un año, al 5 %.

$10000 \times 1,05$ es el capital que debe ganar intereses durante el segundo año; este capital valdrá pues al fin de este año :

$$10000 \times 1,05 \times 1,05 \quad \text{ó} \quad 10000 \times 1,05^2$$

Del propio modo, como $10000 \times 1,05^2$ es el capital que debe ganar intereses durante el 3^{er} año, este capital valdrá al fin de este año :

$$10000 \times 1,05^2 \times 1,05, \quad \text{ó} \quad 10000 \times 1,05^3$$

y así en adelante, siendo igual el exponente de 1,05 al número de años durante los cuales ha quedado impuesto el capital.

Luego, después de 15 años de imposición, el valor del capital aumentado de sus intereses será :

$$10000 \times 1,05^{15}$$

1141. Si representamos por c el capital impuesto, por i el interés anual de un sucre, ó $\frac{1}{100}$ del tanto, por n el tiempo, ó número de años, y por M el capital aumentado de sus intereses compuestos, ó monto,

1 sucre vale al fin de un año..... $1 + i$

c sucses valdrán c veces más, ó..... $c(1 + i)$

Al fin del 2^o año valdrán..... $c(1 + i)^2$

Al fin del 3^o..... $c(1 + i)^3$

y así en adelante.

1142. Luego, después de n años, el valor M del capital aumentado de sus intereses compuestos será :

$$M = c(1+i)^n \quad (A)$$

Tal es la fórmula general de los intereses compuestos; contiene cuatro cantidades variables : M , c , n , i , conocidas tres de las cuales, se puede buscar la cuarta.

1143. Para despejar la c , hay que dividir ambos miembros por $(1+i)^n$, y resulta :

$$c = \frac{M}{(1+i)^n} \quad (B)$$

1144. Para despejar la i , se dividen por c ambos miembros de la ecuación (A), y se extrae la raíz n^{ma} del cociente; lo que da sucesivamente :

$$(1+i)^n = \frac{M}{c}$$

$$1+i = \sqrt[n]{\frac{M}{c}}$$

$$\text{de donde,} \quad i = \sqrt[n]{\frac{M}{c}} - 1 \quad (C)$$

1145. Por fin, para despejar la n , se toma la fórmula (A), y se emplean los logaritmos : como M es un producto de dos factores, uno de los cuales, á saber $(1+i)^n$, se halla elevado á la n^{ma} potencia, tenemos (1106 y 1108) :

$$\log. M = \log. c + n \log. (1+i)$$

Cambiando los signos y transponiendo,

$$n \log. (1+i) = \log. M - \log. c$$

de donde

$$n = \frac{\log. M - \log. c}{\log. (1+i)} \quad (D)$$

1146. Todas estas fórmulas son calculables por logaritmos. Cuando el logaritmo de $(1+i)$ debe ser repetido n veces (comprendiéndose ordinariamente n entre 1 y 100), conviene tomarlo con 8 ó 9 decimales; porque como en las tablas la última cifra decimal *no es más que aproximativa*, el producto del logaritmo por n podría dar un error considerable; entonces, después de haber multiplicado por n el logaritmo de $(1+i)$, no se conservan en el producto más que 5 ó 7 cifras decimales, según las tablas de que uno se ha servido, teniendo cuidado de aumentar por exceso el último guarismo, si el siguiente es mayor que 4.

1147. Observación. Sucede á menudo que el interés se capitaliza cada seis meses; entonces, en las fórmulas, $2n$ representa el número de semestres transcurridos, é $\frac{i}{2}$ la centésima parte del tanto en 6 meses. Las fórmulas toman en este caso las formas siguientes :

$$M = c \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2n}$$

$$c = \frac{M}{\left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2n}}$$

$$\frac{i}{2} = \sqrt[2n]{\frac{M}{c}} - 1$$

$$2n = \frac{\log. M - \log. c}{\log. \left(1 + \frac{i}{2}\right)}$$

Así, un capital de \$ 4000 impuesto á interés compuesto durante 15 años, al 4 %, capitalizándose los intereses cada 6 meses, valdrá :

$$M = 4000 \times (1,02)^{30} = \$7245,50$$

1148. EJEMPLO I. — *Cuánto vale una suma de \$ 20000, impresa á intereses compuestos durante 12 años al 4 %?*

La fórmula (A) nos da :

$$M = 20000 \times (1,04)^{12}$$

$$\text{Log. } 20000 = 4,30103$$

$$12 \text{ veces log. } 1,04 = 0,20440$$

$$\text{Log. } M = 4,50543, \text{ de donde } M = \$32020,7$$

1149. Nota. — Como la tabla de la pág. 380 da el valor de $(1+i)^n$, esto es de 1 sucre colocado á interés compuesto, según los distintos tantos usuales, durante un tiempo comprendido entre 1 y $\frac{1}{40}$ años, habríamos encontrado inmediatamente el valor de M multiplicando 20000 por 1,601032, valor de \$1, colocado á interés compuesto durante 12 años al 4 %.

Tendremos entonces :

$$M = 20000 \times 1,601032 = \$32020,64$$

1150. EJEMPLO II. — ¿Cuál es el capital que, colocado á interés compuesto y al 5 % durante 10 años, vale S 12 640?

La fórmula (B) nos da : $c = \frac{12\,640}{(1,05)^{10}}$

Log. 12640 = 4,101 75

10 log. 1,05 = 0,211 89

Log. $c = 3,889\,86$, de donde $c = S\,7\,760$

Se habría encontrado la respuesta dividiendo 12640 por 1,628885, valor de S 1 al cabo de 10 años y al 5 %. (Véase la tabla.)

1151. EJEMPLO III. — Una suma de S 40000, colocada á interés compuesto, vale S 48 620,25 al cabo de 4 años; ¿á qué tanto fue impuesta?

La fórmula (C) da : $i = \sqrt[4]{\frac{48\,620,25}{40\,000}} - 1$

Log. 48 620,25 = 4,686 81

Log. 40 000 = 4,602 06

Diferencia : 0,084 75

La $\frac{1}{4}$ parte = 0,021 19, correspondiente á 1,05; de donde $i = 0,05$, y por consiguiente el tanto es el 5 %.

1152. EJEMPLO IV. — Una suma de S 20000, colocada á intereses compuestos, al 4 %, llega á valer S 32 020; ¿durante cuánto tiempo ha quedado impuesta?

La fórmula (D) da :

$$n = \frac{\log. 32\,020 - \log. 20\,000}{\log. 1,04}$$

Log. 32 020 = 4,505 42

Log. 20 000 = 4,301 03

Diferencia : 0,204 39

que debe dividirse por 0,017 03, log. de 1,04; lo que da 12 por cuociente.

R. El tiempo pedido es 12 años.

1153. EJEMPLO V. — ¿Cuánto tiempo es menester para que una suma colocada á interés compuesto y al 5 % se duplique, triplique, etc.?

En la fórmula (A) se reemplaza M por $2c$, y resulta :

$$2c = c(1+i)^n$$

ó dividiendo por c : $2 = (1+i)^n$

$$\text{Log. } 2 = n \log. (1+i)$$

de donde,
$$n = \frac{\log. 2}{\log. (1+i)} = \frac{\log. 2}{\log. 1,05}$$

Se ve pues que debe dividirse el log. de 2 por el de 1,05.

Para que se triplique, cuadruple, etc., bastaría dividir los logaritmos de 3, de 4, etc., por el de 1,05.

Si el tanto es cualquier ótro, bastaría dividir los logaritmos de 2, de 3, de 4, etc., por el logaritmo de $1+i$, siendo i el centésimo del tanto.

Como el log. de 2 es 0,30103, al dividir este número por 0,02119, log. de 1,05, resulta 14,2 sea 14 años $\frac{1}{5}$.

PROBLEMAS SOBRE EL INTERÉS COMPUESTO

1190. ¿Cuál es el interés compuesto de \$ 8 000 durante 4 años, al 6 % anual?

1191. ¿Cuánto valdrán \$ 24 000 impuestos á intereses compuestos durante 3 años, al 5 %?

1192. Búsquese el monto y el interés compuesto de \$ 790,83 en 2 años 11 meses, al 7 %.

1193. ¿Cuál es el interés compuesto de \$ 8 000 impuestos durante 4 años 4 meses, al 6 % anual?

1194. ¿Cuánto importan \$ 1 000 al cabo de 3 años, impuestos al 5 % de intereses compuestos?

1195. ¿Cuánto valdrán \$ 9 500 impuestos durante 2 años 7 meses, al 6 % de intereses compuestos por año?

1196. ¿Cuánto importan \$ 720 en 10 años 9 meses 4 días, al 6 % de interés compuesto?

1197. ¿Cuál es el interés compuesto de \$ 236 en 4 años 7 meses 6 días : 1° al 6 %; 2° al 7 %, 3° al 5 %?

1198. ¿Cuánto importarán \$ 1 840 al 8 % de intereses capitalizados cada seis meses : 1° al cabo de 4 años $\frac{1}{2}$; 2° al cabo de 7 años 10 meses 20 días?

1199. ¿Cuál es el interés compuesto de \$ 1 400 en 10 años 3 meses, al 8 % anual, pagaderos : 1° por trimestre; 2° por semestre?

1200. ¿Cuál es el capital que, impuesto al 5 % de interés compuesto, valdrá \$ 1 183,77 en 5 años?

1201. ¿Cuál es el capital que, impuesto al 5 % de interés compuesto, durante 3 años ha llegado á valer \$ 18 522?

1202. ¿Qué capital debe imponerse á interés compuesto, á razón del 6 % por semestre, para que produzca \$ 857,25 en 15 $\frac{1}{2}$ años, junto con los intereses?

1203. ¿Cuál es el capital que en 4 años, al 6 % de interés compuesto, dará un monto de \$ 8 644,62?
1204. Al cabo de 10 años 5 meses un capital, impuesto al 6 % de interés compuesto, importa \$ 26 772,96; ¿cuál es dicho capital?
1205. ¿A qué tanto % habrán de imponerse \$ 1 500 á intereses compuestos, para que valgan \$ 2 110,65 al cabo de 7 años?
1206. ¿A qué tanto % de interés compuesto será menester imponer \$ 800 para que valgan: 1° \$ 1 280,81 en 12 años; 2° 1 560 en 17 $\frac{1}{2}$ años?
1207. ¿A qué tanto % será menester imponer á interés compuesto \$ 12 500 para que den un monto: 1° de \$ 39 485,18 en 17 años; 2° de \$ 39 652,115 en 15 años?
1208. ¿Dentro de cuánto tiempo valdrá \$ 25 299,67 la suma de \$ 5 428 impuesta al 8 % de interés compuesto?
1209. ¿Al cabo de cuántos años importará \$ 2 560,82 la suma de \$ 1 600 impuesta al 4 % de interés compuesto?
1210. ¿Al cabo de qué tiempo se triplicará cualquier suma: 1° al 4 %, y 2° al 7 % de interés compuesto?
1211. ¿Durante cuánto tiempo deberá quedar impuesta la suma de \$ 2 865 para producir un monto compuesto de \$ 5 956,13: 1° al 5 %; 2° al 6 %; 3° al 7 %?
1212. Suponiendo que la población de una ciudad es de 10 000 habitantes; y si se aumenta de un 10 % anualmente; ¿á qué número llegará: 1° al cabo de 10 años; 2° de 18 años; 3° de 20 años?
1213. ¿Cuál es el valor actual de \$ 62 500, debidos dentro de 16 años, al 9 % de interés compuesto pagadero anualmente?
1214. Para saldar una cuenta de \$ 8 160, da un negociante una letra de cambio de \$ 10 285,31, pagaderos dentro de 5 años, con los intereses compuestos al 6 %; ¿cuánto debe todavía al contado?
1215. Dentro de 3 años deben pagarse \$ 450 por 75 metros de raso de $\frac{4}{5}$ de metro de ancho; ¿cuánto se debería pagar al cabo de 5 años por 60 metros de raso de la misma calidad, pero de $\frac{5}{6}$ de metro de ancho, calculándose el interés compuesto al 6 %?
1216. ¿Qué tiempo será menester para que una suma impuesta á intereses compuestos al 4, 5 y 6 % reciba un aumento de la mitad de su valor?
1217. ¿Cuál es el capital que, colocado á intereses compuestos, durante 10 años al 5 %, llega á valer \$ 12 640?
1218. Un capital de \$ 40 000, colocado al 4,5 % de intereses compuestos, importa \$ 67 835,70; ¿durante cuántos años ha quedado impuesto?
1219. ¿A qué tanto ha sido impuesta una suma de \$ 10 000, si después de 15 años de imposición ha llegado á importar \$ 20 360?
1220. Se impone al 4 % de interés compuesto, durante 25 años, la suma de \$ 5 000. ¿Durante cuánto tiempo debería imponerse la misma suma, al 5 % de interés simple, para que reciba el mismo aumento que en el 1° caso?
-

TABLA que indica el valor de \$ 1, ó de 1 fr., ó de 1 L, impuestos á interés compuesto al 2 $\frac{1}{2}$ %, 3, 3 $\frac{1}{2}$ %, 4, 5, 6, 7 y 8 $\frac{0}{0}$, desde 1 año hasta 40.

ANOS	2 $\frac{1}{2}$ 0/0	3 0/0	3 $\frac{1}{2}$ 0/0	4 0/0	5 0/0	6 0/0	7 0/0	8 0/0
1	1,025000	1,030000	1,035000	1,040000	1,050000	1,060000	1,070000	1,080000
2	1,050625	1,060900	1,071225	1,081600	1,102500	1,123600	1,144900	1,166400
3	1,076891	1,092727	1,108718	1,124864	1,157625	1,191016	1,225043	1,259712
4	1,103813	1,125509	1,147523	1,169859	1,215506	1,262477	1,310796	1,360489
5	1,031408	1,159274	1,187686	1,216653	1,276282	1,338226	1,402552	1,469328
6	1,159693	1,194052	1,229255	1,265319	1,340096	1,418519	1,500730	1,586874
7	1,188686	1,229874	1,272279	1,315932	1,407100	1,503630	1,605782	1,713824
8	1,218403	1,266770	1,316809	1,368569	1,477455	1,593848	1,718186	1,850930
9	1,248863	1,304773	1,362897	1,423312	1,551328	1,689479	1,838459	1,999005
10	1,280085	1,343916	1,410599	1,480244	1,628885	1,790848	1,967151	2,158925
11	1,312087	1,384234	1,459970	1,539454	1,710339	1,898299	2,104852	2,331639
12	1,344889	1,425761	1,511069	1,601032	1,795856	2,012197	2,252192	2,518170
13	1,378511	1,468534	1,563956	1,665074	1,885649	2,132928	2,409845	2,719624
14	1,412974	1,512590	1,618695	1,731676	1,979932	2,260904	2,578534	2,937194
15	1,448298	1,557967	1,675349	1,800944	2,078928	2,396558	2,759032	3,172169
16	1,484506	1,604706	1,733986	1,872981	2,182875	2,540352	2,952164	3,425943
17	1,521618	1,652848	1,794676	1,947901	2,292018	2,692773	3,158815	3,700018
18	1,559659	1,702433	1,857489	2,025817	2,406619	2,854339	3,379932	3,996020
19	1,598650	1,753506	1,922501	2,106849	2,526950	3,025600	3,616528	4,315701
20	1,638616	1,806111	1,989789	2,191123	2,653298	3,207136	3,869685	4,660957
21	1,679582	1,860295	2,059431	2,278768	2,785963	3,399564	4,140562	5,033834
22	1,721571	1,916103	2,131512	2,369919	2,925261	3,603537	4,430402	5,436540
23	1,764611	1,973587	2,206114	2,464716	3,071524	3,819750	4,740530	5,871464
24	1,808726	2,032794	2,283328	2,563304	3,225100	4,048935	5,072367	6,341181
25	1,853944	2,093778	2,363245	2,665836	3,386355	4,291871	5,427433	6,848475
26	1,900293	2,156591	2,445959	2,772470	3,555673	4,549383	5,807353	7,396353
27	1,947800	2,221289	2,531567	2,883369	3,733456	4,822346	6,213868	7,988062
28	1,996495	2,287928	2,620172	2,998703	3,920129	5,111687	6,648838	8,627106
29	2,046407	2,356566	2,711878	3,118651	4,116136	5,418388	7,114257	9,317275
30	2,097568	2,427262	2,806794	3,243398	4,321942	5,743491	7,612255	10,062657
31	2,150007	2,500080	2,905031	3,373133	4,538040	6,088101	8,145113	10,867669
32	2,203757	2,575083	3,006708	3,508059	4,764942	6,453387	8,715271	11,737083
33	2,258851	2,652335	3,111942	3,648381	5,003189	6,840590	9,325340	12,676050
34	2,315322	2,731905	3,220860	3,794316	5,253348	7,251025	9,978114	13,690134
35	2,373205	2,813862	3,333590	3,946089	5,516015	7,686087	10,676582	14,785344
36	2,432535	2,898278	3,450266	4,103933	5,791816	8,147252	11,423942	15,968172
37	2,493349	2,985227	3,571025	4,268090	6,081407	8,638087	12,223618	17,245626
38	2,555682	3,074783	3,696011	4,438813	6,385477	9,154252	13,079271	18,625276
39	2,619574	3,167027	3,825372	4,616366	6,704751	9,703508	13,994820	20,115298
40	2,685064	3,262038	3,959260	4,801021	7,039989	10,285718	14,974458	21,724522

Nota I. — De una vez se puede buscar en la tabla el monto de \$ 1 en el tiempo y al tanto dados, cuyo valor se multiplica por el capital señalado. El producto será el MONTO pedido. Réstese de este último el capital dado, y la diferencia será el INTERÉS COMPUESTO.

II. — Restando una unidad de cada número de la tabla, la diferencia indicará al interés compuesto de \$ 1, ó de 1 fr., ó de 1 L, en lugar del monto.

TABLA

Que indica el número de días que hay desde cualquier fecha de un mes, hasta la mi-ma fecha de cualquier otro mes del mismo año.

DESDE UN DÍA CUALQUIERA DEL MES DE	HASTA EL MISMO DÍA DEL MES DE											
	Enero.	Febrero.	Marzo.	Abril.	Mayo.	Junio.	Julio.	Agosto.	Setiembre.	Octubre.	Noviemb.	Diciembre.
Enero	365	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
Febrero	334	365	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
Marzo	306	337	365	31	61	92	122	153	184	214	245	275
Abril	275	306	334	365	30	61	91	122	153	183	214	244
Mayo	245	276	304	335	365	31	61	92	123	153	184	214
Junio	214	245	273	304	334	365	30	61	92	122	153	183
Julio	184	215	243	274	304	335	365	31	62	92	123	153
Agosto	153	184	212	243	273	304	334	365	31	61	92	122
Setiembre	122	153	181	212	242	273	303	334	365	30	61	91
Octubre	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365	31	61
Noviembre	61	92	120	151	181	212	242	273	304	334	365	30
Diciembre	31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

Nota. — Para encontrar, por ejemplo, cuántos días hay desde el 15 de Marzo hasta el 15 de Octubre, busco el mes de Marzo en la hilera vertical de la izquierda, y el de Octubre en la fila horizontal de encima, y en el cajón en que se encuentran las dos, leo 214, que es el número buscado. — Del propio modo para buscar cuántos días hay desde el 10 de Junio hasta el 16 de Noviembre, debo averiguar primero la diferencia que hay entre el 10 de Junio y el 10 de Noviembre, como ya queda indicado; practicado lo cual, encuentro 153 días, á los que debo añadir los 6 que faltan del 10 al 16 de Noviembre; luego, la diferencia exacta es de 159 días.

En los años bisiestos debe añadirse 1 día más al mes de Febrero.

Cuando el tiempo pedido pasa de 1 año, se deberán añadir 365 días más por cada año de aumento.

Densidad de algunos cuerpos.

CUERPOS	DENSIDAD	CUERPOS	DENSIDAD
Agua	1	Aluminio	2,56
Mercurio	13,596	Vidrio	2,527
Alcohol	0,792	Cristal	3,33
Agua de mar	1,026	Azufre	2,086
Leche	1,03	Granito*.	2,70
Aceite de olivas	0,915	Basalto*.	2,60
Vino	0,99	Mármol*.	2,705
Hielo á 0°.	0,916	Porcelana	2,242
Oro fundido	19,26	Piedra de const.*.	1,80
Plata fundida	10,47	Pórfido	2,71
Platina	21,53	Diamante*.	3,515
Plomo fundido	11,35	Acero	7,765
Cobre	8,85	Latón	8,427
Hierro	7,788	Bronce*.	8,836
Zinc	7,19	Fundición	7,200
Estafío	7,291	Aire	0,001293
Antimonio	6,72	Petróleo	0,847

Véanse los nos 654 á 657.

Las densidades precedidas del signo * son densidades medias.

Logaritmos útiles en el cálculo de intereses compuestos.

NÚMEROS	LOGARITMOS	NÚMEROS	LOGARITMOS
1,02	0,008 600 172	1,06	0,025 305 865
1,025	0,010 723 865	1,065	0,027 349 608
1,03	0,012 837 225	1,07	0,029 383 778
1,035	0,014 940 350	1,075	0,031 408 464
1,04	0,017 033 339	1,08	0,033 423 756
1,045	0,019 116 290	1,09	0,037 426 498
1,05	0,021 189 299	1,10	0,041 392 686
1,055	0,023 252 460	1,12	0,049 218 022

Logaritmos de algunos números usuales.

$\frac{1}{3}$	0,333 33	$\bar{1},522\ 88$
$\frac{2}{3}$	0,666 67	$\bar{1},823\ 91$
$\sqrt{2}$	1,414 21	0,150 51
$\sqrt{3}$	1,732 05	0,238 56
$\sqrt{5}$	2,236 07	0,349 49
$\sqrt{10}$	3,162 28	0,500 00
π	3,141 59	0,497 15
2π	6,283 19	0,798 18
$\frac{1}{\pi}$	0,318 31	$\bar{1},502\ 85$
$\frac{\pi}{6}$	0,523 60	$\bar{1},719\ 00$
$\frac{4}{3}\pi$	4,188 79	0,622 09

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
------------------------	---

LIBRO PRIMERO

Números enteros.

LECCIÓN PRIMERA. — Definiciones preliminares	3
LECCIÓN II. — Numeración	5
§ I. — <i>Numeración verbal.</i>	5
§ II. — <i>Numeración escrita.</i>	8
LECCIÓN III. — Operaciones de la Aritmética en general.	11
LECCIÓN IV. — Adición.	13
LECCIÓN V. — Substracción.	18
LECCIÓN VI. — Multiplicación.	24
§ I. — <i>Definiciones</i>	24
§ II. — <i>Teoremas preliminares</i>	27
§ III. — <i>Diversos casos de la multiplicación.</i>	28
§ IV. — <i>Usos de la multiplicación.</i>	30
§ V. — <i>Teoremas relativos á la multiplicación</i>	31
§ VI. — <i>Nociones sobre las potencias</i>	35
LECCIÓN VII. — División	39
§ I. — <i>Definiciones</i>	39
§ II. — <i>Diversos casos de la división</i>	40
§ III. — <i>Usos de la división</i>	44
§ IV. — <i>Teoremas relativos á la división.</i>	45

LIBRO II

Propiedades de los Números.

LECCIÓN PRIMERA. — Divisibilidad	56
§ I. — <i>Definiciones y teoremas preliminares</i>	56
§ II. — <i>Caracteres de divisibilidad.</i>	59
§ III. — <i>Pruebas por 9</i>	66
LECCIÓN II. — Del máximo divisor común.	68
LECCIÓN III. — De los números primos.	73
§ I. — <i>Propiedades</i>	73
§ II. — <i>Descomposición de un número en factores primos</i>	79
LECCIÓN IV. — Aplicación de la teoría de los números primos	81
§ I. — <i>Divisores de un número</i>	81
§ II. — <i>Máximo divisor común de varios números</i>	83
§ III. — <i>Mínimo común múltiplo.</i>	84

LIBRO III

Números quebrados.

LECCIÓN PRIMERA. — De los quebrados comunes.	88
§ I. — <i>Definiciones</i>	88
§ II. — <i>Principales propiedades de los quebrados</i>	91
LECCIÓN II. — Reducciones de los quebrados.	95
LECCIÓN III. — Operaciones que se ejecutan con los quebrados	106
§ I. — <i>Adición</i>	106
§ II. — <i>Substracción</i>	110
§ III. — <i>Multiplicación</i>	114
§ IV. — <i>Quebrados compuestos ó quebrados de quebrados</i>	118
§ V. — <i>Teoremas relativos á la multiplicación de quebrados</i>	119
§ VI. — <i>División</i>	121
§ VII. — <i>Método de la unidad.</i>	125
LECCIÓN IV. — Quebrados decimales	139

LECCIÓN V. — Aplicación de los principios de la numeración de enteros y decimales.	144
LECCIÓN VI. — Operaciones que se ejecutan con los quebrados decimales	147
§ I. — <i>Adición</i>	147
§ II. — <i>Substracción</i>	147
§ III. — <i>Multipliación</i>	148
§ IV. — <i>División</i>	149
LECCIÓN VII. — Quebrados periódicos	151

LIBRO IV

Potencias y Raíces.

LECCIÓN PRIMERA. — Cuadrados y raíces cuadradas.	163
§ I. — <i>Definiciones y teoremas</i>	163
§ II. — <i>Raíz cuadrada de un número entero, con aproximación de una unidad</i>	169
§ III. — <i>Raíz cuadrada de los quebrados comunes</i>	175
§ IV. — <i>Cuadrado y raíz cuadrada de los números decimales</i>	177
§ V. — <i>Raíz cuadrada por aproximación</i>	178
§ VI. — <i>Raíces cuadradas incommensurables</i>	178
LECCIÓN II. — Cubos y raíces cúbicas.	181
§ I. — <i>Definiciones y teoremas</i>	181
§ II. — <i>Raíz cúbica de un número entero con aproximación de una unidad</i>	184
§ III. — <i>Raíz cúbica de los quebrados comunes</i>	190
§ IV. — <i>Cubo y raíz cúbica de los números decimales</i>	192

LIBRO V

De las Medidas.

LECCIÓN PRIMERA. — Sistema métrico decimal.	194
§ I. — <i>Medidas lineales ó de longitud</i>	195
§ II. — <i>Medidas de superficie</i>	196
§ III. — <i>Medidas cúbicas ó de volumen</i>	197
§ IV. — <i>Medidas de capacidad</i>	197
§ V. — <i>Medidas ponderales ó de peso</i>	198
§ VI. — <i>Medidas monetarias</i>	199

LECCIÓN II. — Números complejos	204
§ I. — <i>Reducción de los números complejos</i>	205
§ II. — <i>Operaciones que se ejecutan con los números complejos</i>	206
LECCIÓN III. — Correspondencia de las medidas métricas con las antiguas medidas castellanas, y vice versa . .	211
§ I. — <i>Medidas de longitud castellanas</i>	211
§ II. — <i>Medidas agrarias y de superficie</i>	212
§ III. — <i>Medidas de volumen</i>	213
§ IV. — <i>Medidas de capacidad (áridos)</i>	213
§ V. — <i>Medidas de peso (ordinarias)</i>	213

LIBRO VI

De las Razones y proporciones.

LECCIÓN PRIMERA. — Razones.	215
LECCIÓN II. — Proporciones	216
§ I. — <i>Definiciones</i>	216
§ II. — <i>Principales propiedades de las proporciones aritméticas</i>	218
§ III. — <i>Principales propiedades de las proporciones geométricas</i>	219
LECCIÓN III. — Aplicaciones de las proporciones geométricas.	229
LECCIÓN IV. — Regla de tres.	231
§ I. — <i>Regla de tres simple</i>	232
§ II. — <i>Regla de tres compuesta</i>	235
LECCIÓN V. — Tanto por ciento.	241
LECCIÓN VI. — Regla de interés.	246
§ I. — <i>Definiciones</i>	246
§ II. — <i>Casos principales</i>	247
§ III. — <i>Casos particulares</i>	251
§ IV. — <i>Modo de abreviar el cálculo de los intereses</i>	255
LECCIÓN VII. — Comisión y corretaje	264

LECCIÓN VIII. — Aseguración.	267
LECCIÓN IX. — Descuento	270
§ I. — <i>Descuento externo</i>	271
§ II. — <i>Descuento interno</i>	274
§ III. — <i>Comparación del descuento externo con el interno</i>	276
LECCIÓN X. — Ganancias y pérdidas.	281
LECCIÓN XI. — Repartimientos proporcionales.	285
§ I. — <i>Repartimientos proporcionales simples</i>	285
§ II. — <i>Repartimientos proporcionales compuestos</i>	290
LECCIÓN XII. — Regla de compañía.	293
§ I. — <i>Regla de compañía simple</i>	293
§ II. — <i>Regla de compañía compuesta</i>	294
LECCIÓN XIII. — Derechos de aduana.	296
LECCIÓN XIV. — Cuentas de almacenaje.	299
LECCIÓN XV. — Regla del término medio	301
LECCIÓN XVI. — Regla de mezcla ó aligación	302
LECCIÓN XVII. — Regla de ligación.	310
LECCIÓN XVIII. — Regla del tiempo para los pagos	314
LECCIÓN XIX. — Regla conjunta	318
LECCIÓN XX. — Cambio	321
LECCIÓN XXI. — Método de falsa posición.	327

APÉNDICE

LECCIÓN PRIMERA. — Breves nociones de Álgebra	331
§ I. — <i>Preliminares</i>	331
§ II. — <i>Operaciones algebraicas</i>	332
§ III. — <i>Ecuaciones de 1^{er} grado</i>	336
§ IV. — <i>Ecuaciones de 2^o grado</i>	342
LECCIÓN II. — Progresiones	349
§ I. — <i>Progresiones aritméticas</i>	350
§ II. — <i>Progresiones geometricas</i>	356

LECCIÓN III. — Logaritmos.	363
§ I. — <i>Propiedades de los logaritmos</i>	364
§ II. — <i>De los logaritmos vulgares.</i>	366
§ III. — <i>De las tablas de logaritmos.</i>	368
LECCIÓN IV. — Interés compuesto	372
<i>Tabla de interés compuesto</i>	380
<i>Tabla de fechas.</i>	381
<i>Densidad de algunos cuerpos</i>	381
<i>Logaritmos útiles en el cálculo de intereses compuestos.</i>	382

Extracto del Catálogo

Libros elementales para la enseñanza de las Matemáticas

Nº 467. **Cálculo mental y abreviado.** — In-12º, de 160 páginas. La obrita está dividida en dos partes desiguales : la primera (115 páginas) trata del cálculo mental y señala muchas aplicaciones al sistema métrico y a la regla de interés ; la segunda explica el modo de abreviar los cálculos, sobre todo tratándose de interés y descuento.

Nº 468. **Aritmética, curso elemental.** — In-12º, de 192 páginas, con buen número de grabados.

En esta obrita se aplica el método intuitivo para explicar las cuatro operaciones, los números decimales, los quebrados, etc. Por la variedad de los caracteres tipográficos y la belleza de los grabados este libro es muy atractivo para los niños.

Nº 468 b. **El Mismo, Maestro.**

Nº 473. **Aritmética, curso medio.** — In-12º, de 312 páginas. Este tratado se divide en 4 partes : Iª, Números enteros y operaciones fundamentales. IIª, Números quebrados y Raíz cuadrada. IIIª, Sistema métrico decimal. IVª, Reglas de tres, de interés, descuento, repartimientos, mezcla, etc. Cada parte teórica va seguida de numerosos problemas.

Nº 473 b. **El mismo, Maestro.**

Nº 475. **Aritmética, curso superior.** — In-12º de 416 páginas. Esta obra comprende la misma materia que el curso medio con más completo desarrollo y mayor número de ejercicios de aplicación. Contiene además unas *Nociones de Comercio*, que forman una introducción útil a las clases de esta asignatura.

Nº 475 b. **El mismo, Maestro.**

Nº 478. **Álgebra y Trigonometría.** — In-12º, de 296 páginas. Las *Nociones de Álgebra* van divididas en cuatro partes : Iª, Cálculos algebraicos. IIª, Ecuaciones de primer grado. IIIª, Ecuaciones de segundo grado. IVª, Progresiones, Logaritmos, Interés compuesto, Anualidades.

Unas 60 páginas tratan de las nociones de Trigonometría.

Nº 478 b. **El mismo, Maestro.**

Nº 479. **Geometría, curso superior.** — In-12º, de 392 páginas. La obra está dividida en 3 partes : Iª, Geometría plana, los 4 primeros libros, con numerosas aplicaciones. IIª, Geometría del espacio, en cuatro libros, el último explicando las curvas usuales. IIIª, *Nociones de Agrimensura y Nivelación*, con gran número de grabados explicativos.

Nº 479 b. **El mismo, Maestro.**