ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA, ARITMETICA Y ALGEBRA
PARA
SEGUNDO AÑO
DE LAS
ESCUELAS NORMALES

Por los Profesores Diplomados en Matemáticas y Cosmografía

Ing. HÉCTOR J. MEDICI
PROFESOR DEL COLEGIO MILITAR
DE LA NACIÓN Y DE LA
ESCUELA NORMAL DE PROFESORES M. ACOSTA

Ing. EMANUEL S. CABRERA
PROFESOR DE LA ESCUELA SUPERIOR
DE COMERCIO Nº 3 Y DEL
COLEGIO NACIONAL BERNARDINO RIVADAVIA

CUARTA EDICION

BUENOS AIRES
"Librería del Colegio"
Casa Editora
ALSINA Y BOLIVAR
1938

OBRAS DE LOS AUTORES

Aritmética Práctica para 1er Año Colegios Nacionales, 3ª edición
Aritmética Práctica para 2do Año Colegios Nacionales, 1ª edición
Elementos de Aritmética,. . . . . *Segundo curso,* 10ª edición
Elementos de Aritmética y Algebra, . . . *Tercer curso,* 7ª edición
Elementos de Aritmética y Algebra, . . . *Cuarto curso,* 4ª edición
Geometría Intuitiva para 1er Año Colegios Nacionales, 3ª edición
Geometría Intuitiva para 2do Año Colegios Nacionales, 1ª edición
Elementos de Geometría,. . . . . *Segundo curso,* 10ª edición
Elementos de Geometría,. . . . . *Tercer curso,* 9ª edición
Elementos de Geometría del Espacio,. . . *Cuarto curso,* 7ª edición
Matemáticas 1er Año de las Escuelas Comerc. y Normales 8ª edición
Matemáticas para Segundo Año de las Escuelas Normales, 4ª edición
Matemáticas para Tercer Año de las Escuelas Normales, 6 edición
Elementos de Cosmografía,. . . . . 3ª edición
Aritmética Escolar para Ingreso y Sexto grado,. . . . . 1ª edición
Geometría Escolar para Ingreso y Sexto grado,. . . . . 1ª edición

Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

GEOMETRIA

CAPITULO I

CANTIDADES

PROGRAMA. — *Definición de cantidad. Cantidades homogéneas. Cantidades comparables. Comparación de cantidades. Razón de dos cantidades. Medida de una cantidad. La razón de dos cantidades es igual... Simplificación. Cantidades proporcionales. Si cuatro cantidades son proporcionales los números que expresan sus medidas también son proporcionales y recíprocamente. Propiedades de las proporciones entre cantidades. Propiedades particulares de las proporciones cuando sus términos son cantidades homogéneas y en especial cuando sus términos son segmentos.*

×**1. Definición de cantidad.** — Se llama *cantidad* a cada uno de los elementos de un conjuunto de entes entre los cuales está definida la *igualdad y la suma.*

NOTACIÓN. — Las cantidades se representan por letras mayúsculas de imprenta A, B. C...

Decir que entre los elementos de un conjunto está definida la igualdad, significa que existe entre ellos una relación, que se indica con el signo =, caracterizada por las siguientes relaciones:

I) CARÁCTER IDÉNTICO. — Es $A = A$

II) CARÁCTER RECÍPROCO. — Si $A = B$ es $B = A$

III) CARÁCTER TRANSITIVO. — Si $A = B$ y $B = C$ es $A = C$.

Decir que entre los elementos de un conjunto está definida la *suma,* significa que tiene sentido entre ellos una operación, que se indica con el signo $+$, y que está caracterizada por las propiedades siguientes:

I) Propiedad uniforme. — Si $A = A'$; $B = B'$; ... ; $N = N'$

es $$A + B + \ldots + N = A' + B' + \ldots + N'$$

II) Propiedad conmutativa. —

$$A + B + C + \ldots + N = C + N + A + \ldots + B = \ldots$$

III) Propiedad asociativa. —

$$A + B + C + \ldots + N = A + (B + C) + \ldots N = \ldots$$

IV) Existe una cantidad, representada por **0**, tal que sumada a otra cualquiera da por resultado esta última. Dicha cantidad se llama *cantidad nula* o *módulo de la suma:*

Si $$A + 0 = A \quad \text{es} \quad 0 \text{ el módulo.}$$

Ejemplos. — Son cantidades los números naturales, los enteros, los racionales, los segmentos, los ángulos, los arcos de una misma circunferencia, los sectores de un mismo círculo ... pues al estudiar esos entes hemos definido entre ellos la igualdad y la suma, y hemos demostrado que cumplen sus caracteres y propiedades, respectivamente.

Se verá más adelante, en Geometría, que las superficies y volúmenes son también cantidades.

2. Cantidades homogéneas. — Definición. — Se llaman *cantidades homogéneas* a las que pertenecen a uno de esos conjuntos entre cuyos elementos está definida la igualdad y la suma.

Ejemplo: $7, \frac{18}{3}, -14$ son cantidades homogéneas

$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{M}$ » » »

en cambio $7, \widehat{B}, \overline{AB}$ no son cantidades homogéneas

3. Cantidades comparables. — Para poder establecer la comparación entre dos cantidades se requiere, en primer término, que éstas sean homogéneas, pues no tiene sentido decir, por ejemplo, que un número es menor que un ángulo. que un ángulo es mayor que un segmento, etc.

Pero eso no basta, pues hay cantidades homogéneas que no son comparables, así por ejemplo, entre las fuerzas desarrolladas separadamente por dos caballos que actuan sobre un mismo vehículo no se puede saber cuál es la mayor de ellas, pues según la dirección y el sentido en que actúen será distinta su eficacia.

Para que dos cantidades homogéneas sean comparables deben satisfacer las condiciones que se indican en la siguiente:

DEFINICIÓN. — Se llaman *cantidades comparables* a las cantidades homogéneas entre las cuales están definidas las relaciones de *mayor* y de *menor*, y que satisfacen además los *Postulados de Arquímedes y de la Divisibilidad.*

Decir que entre cantidades homogéneas están definidas las relaciones de mayor y menor, significa que existen entre ellas dos relaciones que se indican con los signos $>$ y $<$, respectivamente, y que están caracterizadas por las propiedades siguientes:

I) Si $A > B$ y $B > C$ es $A > C$
Si $A < B$ y $B < C$ es $A < C$

II) Si $A < B$ es $B > A$

III) Dadas A y B es $A > B$ y en tal caso $A \neq B$ y $A \not< B$
o $A = B$ » » » » $A \not> B$ y $A \not< B$
o $A < B$ » » » » $A \neq B$ y $A \not> B$

Decir que cumplen el Postulado de Arquímedes, significa que: *Dadas dos cantidades* A *y* B *tales que* A *sea menor que* B, *es siempre posible, sumando cantidades iguales a* A, *obtener una suma mayor que* B, o sea:

$$\text{Si} \quad A < B \quad \text{es} \quad \overbrace{A + A + \ldots + A}^{m} > B.$$

NOTA: $\overbrace{A + A \ldots + A}^{m}$ se indica por $A \, . \, m$ y se llama *el producto de la cantidad* A *por un número natural* m.

Decir que cumplen el Postulado de la Divisibilidad significa que: *Dada una cantidad* A *y un número natural cualquiera* m, *existe y es única, la cantidad* B, *llamada emésima parte de* A *o parte alícuota de* A, *tal que la suma de* m *sumandos iguales a* B *dé por resultado a* A.

Dada A y el número m existe solo B tal que $\overbrace{B + B + \ldots + B}^{m} = A$.

La cantidad B se llama el *cociente de la cantidad* A *por el número natural* m y se iudica así: $B = \dfrac{A}{m}$

EJEMPLOS DE CANTIDADES COMPARABLES. — Son cantidades comparables los segmentos entre sí, los arcos de una misma circunferencia, los números racionales entre sí, etc., pues cumplen las condiciones que caracterizan a tales cantidades (ver *Mat.* curso I).

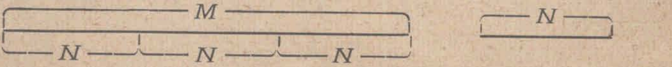
Los números enteros, en cambio, no son cantidades comparables entre sí, pues ellos no satisfacen al Postulado de la divisibilidad.

4. Comparación de dos cantidades homogéneas. — Consideremos dos cantidades homogéneas cualesquiera, por ejemplo los segmentos M y N. Si los comparamos puede sucedcr:

PRIMER CASO. — Que M contenga exactamente m veces a N, es decir que M sea igual a la suma de m sumandos iguales a N.

o sea: $$M = \overbrace{N + N + \ldots + N}^{m} = N \times m$$

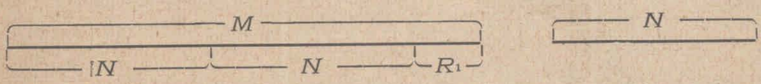
Por ejemplo: Seg. M = seg. N + seg. N + seg. N = seg. N×3



Segundo caso. — Que M no contenga exactamente a N sino que sea igual a m sumandos N más un resto, pero que contenga en cambio a una parte alícuota de B.

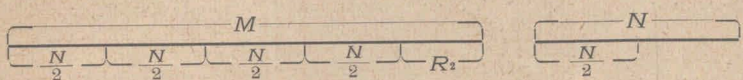
$$M = \overbrace{N + N + \ldots + N}^{m} + R \qquad \text{siendo} \qquad R < N.$$

Sea por ejemplo los segmento M y N



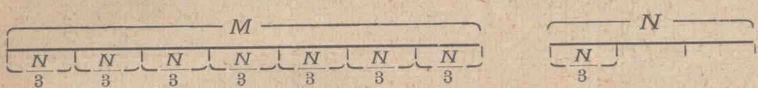
Seg. M = seg. N + seg. N + seg. R_1 siendo seg. R_1 < seg N.

Probamos entonces si M contiene a una parte alícuota de N, por ejemplo a la mitad de N y vemos que tampoco está contenida exactamente sino que



$$\text{seg. } M = \text{seg. } \frac{N}{2} + \text{seg. } \frac{N}{2} + \text{seg. } \frac{N}{2} + \text{seg. } \frac{N}{2} + R_2$$

Probamos entonces si contiene la tercera parte de N, y vemos que en efecto la contiene 7 veces, es decir que:



$$M = \frac{N}{3} + \frac{N}{3} + \frac{N}{3} + \frac{N}{3} + \frac{N}{3} + \frac{N}{3} + \frac{N}{3} = \frac{N}{3} \times 7$$

En general se tendrá que:

$$M = \underbrace{\frac{N}{n} = \frac{N}{n} + \ldots + \frac{N}{n}}_{m} = \frac{N}{n} \times m$$

que se escribe también

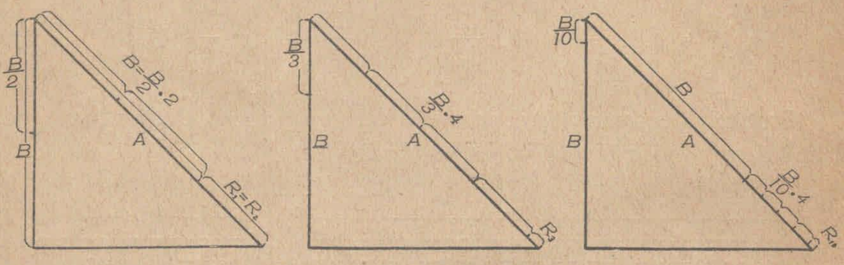
$$M = \overbrace{\frac{N}{n} + \frac{N}{n} + \ldots + \frac{N}{n}}^{m} = N \times \frac{m}{n}$$

y se llama *producto de una cantidad* B *por un número fraccionario positivo* $\frac{m}{n}$.

Tercer caso. — Puede suceder todavia que la cantidad A no contenga exactamente a la segunda B, ni a su mitad $\frac{B}{2}$, ni a su tercera parte $\frac{B}{3}$,... ni a su enésima parte $\frac{B}{n}$... es decir a ninguna parte alícuota de B, pues siempre sobra un resto es decir:

$$A = \frac{B}{n} + \frac{B}{n} + \ldots + \frac{B}{n} + R_n \quad \text{siendo} \quad R_n < \frac{B}{n}$$

Sean por ejemplo los segmentos A y B que son la hípotenusa y nn cateto del triangulo rectángulo isósceles de la figura. Vemos que



Seg. A = seg. B + seg R_1 siendo $R_1 < B$

Seg. A = seg. $\frac{B}{2}$ + seg. $\frac{B}{2}$ + seg. R_2 ; $R_2 < \frac{B}{2}$

Seg. A = seg. $\frac{B}{3}$ + seg. $\frac{B}{3}$ + seg. $\frac{B}{3}$ + seg. $\frac{B}{3}$ + seg R_3

. . . .

Seg. A = seg. $\frac{B}{10}$ + seg. $\frac{B}{10}$ + ... + seg. $\frac{B}{10}$ + seg. R_{10}

pudiéndose demostrar geométricamente que no hay ninguna parte alícuota de B que está contenida un número exacto de veces en A.

NOTA. — En este último caso se puede decir también que A es igual al producto de B por un cierto número, que estaría expresado por infinitas cifras decimales no periódicas.

A ese número, que se llama irracional, lo representaremos con la letra α.

Así, como en el caso de nuestro último ejemplo puede demostrarse que:

$$A = B + \frac{4}{10} B + \frac{1}{100} B + \frac{4}{1000} B + \ldots$$

se escribe que: $A = B \times 1{,}4142\ldots$

Este número irracional 1,4142 . . . que es el resultado de la comparación entre la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo isósceles se representa por $\sqrt{2}$ luego

$$\textit{Hipotenusa}\ A = \textit{cateto}\ B \times \sqrt{2}$$

5. **Postulado.** — La definición de producto de una cantidad por un número se completa con el siguiente

POSTULADO. — *Dadas dos cantidades homogéneas existe siempre un número* (entero, fraccionario o irracional), *y sólo uno, tal que la primera es igual al producto de dicho número por la otra y, recíprocamente.*

En símbolos: dadas A y B existe un solo número α tal que:

$$A = B \times \alpha$$

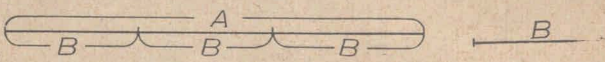
6. **Razón de dos cantidades.** — DEFINICIÓN. — Se llama *razón entre dos cantidades* A y B, al número (entero, fraccionario o irracional) que multiplicado por la segunda B sea igual a la primera A.

La primera cantidad A se llama *antecedente* y la segunda B *consecuente* de la razón.

NOTACIÓN. $\frac{A}{B}$ expresa la razón entre A y B.

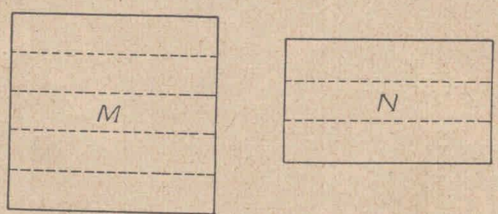
En símbolos: $\frac{A}{B} = \alpha$ si $A = B \cdot \alpha$.

EJEMPLO I. — Dados los segmentos A y B, hallar su razón.



Es $\frac{\text{seg. A}}{\text{seg. B}} = 3$ puesto que seg. A $= 3$ seg. B.

EJEMPLO II. — Dados los rectángulos M y N, hallar su razón.



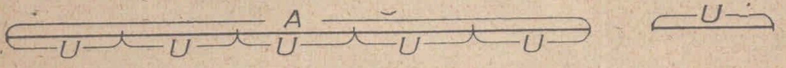
$$\frac{\text{rect. M}}{\text{rect. N}} = \frac{5}{3} \quad \text{puesto que} \quad \text{rect. M} = \frac{5}{3}\ \text{rect. N}.$$

7. **Medida de una cantidad.** — Dadas varias cantidades comparables se elige una cualquiera de ellas, que se llama *unidad,* con el objeto de hallar la razón entre cada una de las primeras y dicha unidad.

Así, por ejemplo, entre todos los segmentos se toma como unidad un segmento llamado *metro,* entre todos los ángulos se toma como unidad uno llamado *grado,* etc.

Definición. — Se llama *medida* de una cantidad A con respecto a la unidad U, a la razón $\frac{A}{U}$ entre dicha cantidad y esa unidad.

Ejemplo:



Medida de A *con respecto a* $U = \frac{A}{U} = 5.$

Observación. — *La medida de una cantidad es siempre un número.*

8. **Teorema.** *La razón entre dos cantidades es igual a la de sus medidas respecto de una misma unidad.*

Hip.) A y B cantidades. Tesis) $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$

$$med.\ A = \frac{A}{U} = a$$

$$med.\ B = \frac{B}{U} = b$$

Demost.) Siendo por hipótesis:

$\frac{A}{U} = a$ es (6) $A = a\,U$ luego $U = \frac{A}{a}$ por def. de cociente

$\frac{B}{U} = b$ es (6) $B = b\,U$ luego $U = \frac{B}{b}$ por igual razón

por lo tanto $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ por consec. carácter trans.

y por definición de cociente $A = \frac{a}{b}\,B$

luego $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ por definición de razón.

9. **Simplificación.** — Sabiendo que $A = a\,U$ y que $B = b\,U$ resulta:

$$\frac{A}{B} = \frac{a\,U}{b\,U} = \frac{a}{b}$$ donde

se observa que se ha pasado del segundo al tercer miembro suprimiendo la U, es decir, como si se hubiera «*simplificado*» por U. Siendo A, B y U cantidades cualesquiera resulta que la observación hecha se puede expresar en la siguiente:

Regla práctica. — *Para hallar la razón entre dos cantidades se reemplazan éstas por sus valores con respecto a una misma unidad y se suprime dicha unidad.*

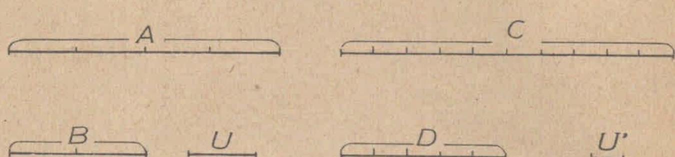
Ejemplo.—Si M = 35 cm. y N = 17 cm. es $\frac{M}{N} = \frac{35 \text{ cm.}}{17 \text{ cm.}} = \frac{35}{17}$.

10. **Cantidades proporcionales.** — Definición. — Dadas, en un cierto orden, cuatro cantidades A, B, C y D, se dice que *forman una proporción*, o que son *proporcionales*, cuando la razón entre las dos primeras es igual a la razón entre las dos últimas.

En símbolos: A, B, C y D son proporcionales si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Observación. — Para que las cantidades A, B, C y D puedan cumplir la definición anterior, deben ser A y B homogéneas y C y D también homogéneas aunque no lo sean con respecto a A y B.

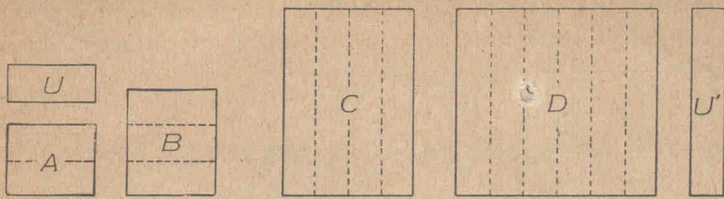
Ejemplo I.



Siendo $\frac{A}{B} = \frac{4U}{2U} = \frac{4}{2} = 2$ y $\frac{C}{D} = \frac{10U'}{5U'} = \frac{10}{5} = 2$

es $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ luego A, B, C y D son proporcionales.

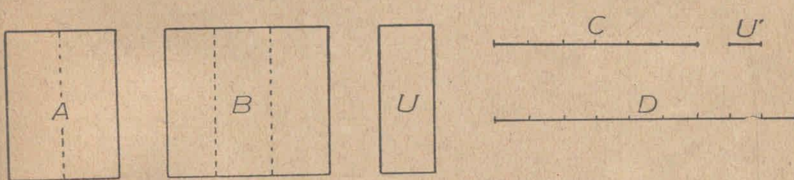
EJEMPLO II.



Siendo $\frac{A}{B} = \frac{2\,U}{3\,U} = \frac{2}{3}$ y $\frac{C}{D} = \frac{4\,U'}{6\,U'} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

es $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ luego A, B, C y D son proporcionales.

EJEMPLO III.



Siendo $\frac{A}{B} = \frac{2\,U}{3\,U} = \frac{2}{3}$ y $\frac{C}{D} = \frac{6\,U'}{9\,U'} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

es $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ luego A, B, C y D son proporcionales.

DEFINICIONES. — Las cantidades dadas A, B, C y D se llaman *términos* de la proporción, el antecedente A de la primera razón y el consecuente D de la segunda razón se llaman *extremos*, y el consecuente B de la primera razón y el antecedente C de la segunda se llaman *medios*.

DEFINICIÓN. — Se dice que una proporción es *contínua* cuando sus medios son iguales.

EJEMPLO. $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$ es una proporción contínua.

11. Teorema. — *Si cuatro cantidades son proporcionales los números que expresan sus medidas (con respecto a una unidad común para las dos primeras y a una unidad común para las dos últimas), también son proporcionales y recíprocamente.*

HIP.) $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ proporción entre cantidades.

med. A *resp.* U = *núm. a*; *med.* C *resp.* U′ = *núm. c*

med. B *resp.* U = *núm. b*: *med.* D *resp.* U′ = *núm. d*

TESIS) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ proporción numérica.

DEMOST.) Siendo $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ por el teor. ant. (8)

y $\frac{C}{D} = \frac{c}{d}$ por la misma razón

como $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ por hip., es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por consec. carác. trans.

Recíprocamente.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ [1], como $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ y $\frac{C}{D} = \frac{c}{d}$ (nº 8)

resulta por [1] $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

12. Propiedades de las proporciones entre cantidades. — Del teorema anterior se deduce el siguiente:

COROLARIO. — *A las proporciones cuyos términos son cantidades les son aplicables las propiedades de las proporciones numéricas siempre que las operaciones que se hagan con los números se puedan hacer también con las cantidades consideradas* (*).

(*) Esta última condición es necesaria puesto que en ciertas proporciones, como por ejemplo la $\frac{6\text{ m}}{5\text{ m}} = \frac{12\ \$}{10\ \$}$, no es cierto que el *producto de los medios es igual al de los extremos*, pues no tiene sentido multiplicar metros por pesos.

Si $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ es una proporción entre cantidades y llamamos

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ y } b \text{ a las medidas de A y B resp. U} \\ c \text{ y } d \text{ a las medidas de C y D resp. U}' \end{array}\right\} \text{ resulta } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

por el teorema anterior. Como esta última proporción es numérica (*) resulta que:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{de donde por el teor. anterior} \quad \frac{B}{A} = \frac{D}{C} \qquad \text{I}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \quad \text{» » » » » »} \quad \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \qquad \text{II}$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \quad \text{» » » » » »} \quad \frac{A+B}{A} = \frac{C+D}{C} \qquad \text{III}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{» » » » » »} \quad \frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D} \qquad \text{IV}$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \quad \text{» » » » » »} \quad \frac{A-B}{A} = \frac{C-D}{C} \qquad \text{V}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad \text{» » » » » »} \quad \frac{A-B}{B} = \frac{C-D}{D} \qquad \text{VI}$$

13. **Enunciado y expresión simbólica de las propiedades de las proporciones entre cantidades.** — Las propiedades demostradas en el párrafo anterior para las proporciones entre cantidades se enuncian así:

La I: *Si en una proporción entre cantidades se invierten sus razones se obtiene otra proporción.*

En símbolos: Si $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ es $\dfrac{B}{A} = \dfrac{D}{C}$

La II: *Si en una proporción entre cantidades se permutan las razones se obtiene otra proporción.*

En símbolos: Si $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ es $\dfrac{C}{D} = \dfrac{A}{B}$

(*) Ver el capítulo IV sobre *Razones y proporciones*, pág. 145 y siguientes.

La III: *En toda proporción entre cantidades, la suma de antecedente y consecuente de la primera razón, es a su antecedente, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su antecedente.*

En símbolos: Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ es $\frac{A + B}{A} = \frac{C + D}{C}$

La IV: *En toda proporción entre cantidades, la suma de antecedente y consecuente de la primera razón, es a su consecuente, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.*

En símbolos: Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ es $\frac{A + B}{B} = \frac{C + D}{D}$

La V: *En toda proporción entre cantidades, la diferencia entre antecedente y consecuente de la primera razón, es a su antecedente, como la diferencia de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su antecedente.*

En símbolos: Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ es $\frac{A - B}{A} = \frac{C - D}{C}$

La VI: *En toda proporción entre cantidades, la diferencia entre antecedente y consecuente de la primera razón, es a su consecuente, como la diferencia de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.*

En símbolos: Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ es $\frac{A - B}{B} = \frac{C - D}{D}$

14. **Propiedades particulares de las proporciones cuyos términos son todas cantidades homogéneas.** — Si los cuatro términos de una proporción son cantidades homogéneas, dicha proporción goza de todas las propiedades enunciadas anteriormente y además de las siguientes:

a) Si en una proporción entre cantidades homogéneas se permutan los extremos, se obtiene otra proporción.

En símbolos: Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ es $\frac{D}{B} = \frac{C}{A}$

En efecto: Siendo $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Teor. nº 11)

y como si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (*Arit.* nº 45, II)

se verifica también que $\frac{D}{B} = \frac{C}{A}$

b) Si en una proporción entre cantidades homogéneas se permutan los medios se obtiene otra proporción.

En símbolos: Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ es $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$

En efecto: Siendo $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Teor. nº 11)

y como si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (*Arit.* nº 45, II)

se verifica también que $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$

c) En toda proporción entre cantidades homogéneas, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como un antecedente es a su consecuente.

En símbolos: Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ es $\frac{A+C}{B+D} = \frac{A}{B}$

En efecto: Siendo $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Teor. nº 11)

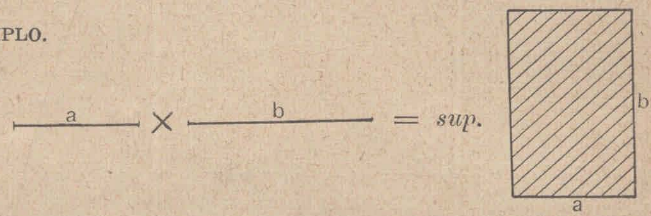
y como si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ (*Arit.* nº 48, II)

se verifica también que $\frac{A+C}{B+D} = \frac{A}{B}$

15. Propiedad particular de las proporciones cuyos términos son segmentos. — Definición. — Se llama *producto* de un segmento *a* (*multiplicando*) por otro *b* (*multiplicador*) a la superficie del rectángulo que tiene por base al segmento multiplicando *a* y por altura al segmento multiplicador *b*.

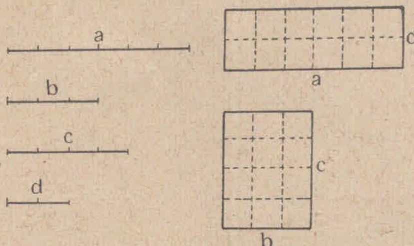
En símbolos: $seg.\ a \times seg.\ b = sup.\ rect.\ (a,\ b)$

Ejemplo.



Basándose en la definición anterior y en propiedades geométricas de los rectángulos se demuestra que: *el producto de segmentos goza de las mismas propiedades que el producto de números.*

Teorema. — *En toda proporción entre segmentos el producto de los extremos es igual al de los medios.*



Hip) $\dfrac{seg.\ a}{seg.\ b} = \dfrac{seg.\ c}{seg.\ d}$

Tesis) $seg.\ a \times seg.\ d = seg.\ b \times seg.\ c.$

Demonst.) Siendo $\dfrac{seg.\ a}{seg.\ b} = \dfrac{seg.\ c}{seg.\ d}$ por hipótesis

es (nº 11) $\dfrac{med.\ seg.\ a}{med.\ seg.\ b} = \dfrac{med.\ seg.\ c}{med.\ seg.\ d}$

y como la medida de una cantidad es un número, resulta que esta última proporción es numérica. Pero en toda proporción numéric el producto de los extremos es igual al de los medios, luego

$$med.\ seg.\ a \times med.\ seg.\ d = med.\ seg.\ b \times med.\ seg.\ c$$

Luego si el producto de las medidas de *a* y *d* es igual al de las medidas de *b* y *c* el producto de los mismos también lo será o sea

$$seg.\ a \times seg.\ d = seg.\ b \times seg.\ c \quad \text{por def. prod. seg:}$$

Nota. — Esta propiedad se interpreta geométricamente, observando que, *rect* (*a*, *d*) y *rect* (*b*, *c*) son iguales al mismo número de cuadraditos.

Siguiendo el mismo razonamiento se demuestra que: *Si el producto de dos segmentos es igual al de otros dos, existe entre ellos una relación de proporcionalidad siempre que se consideren como extremos los factores del primer producto y como medios los del otro producto.*

CAPITULO II

SEGMENTOS PROPORCIONALES

PROGRAMA. — *Si varias paralelas son cortadas por dos transversales, a segmentos iguales de una de éstas corresponden . . . Teorema de Thales. Toda paralela a un lado de un triángulo que corte a los otros dos, determina sobre éstos, segmentos proporcionales. División de un segmento en partes iguales. Construcción de un segmento que sea cuarto proporcional a otros tres segmentos dados. Construcción de un segmento que sea tercero proporcional a otros dos segmentos dados. Dividir un segmento en partes proporcionales a otros dos segmentos dados. Dividir un segmento en dos partes cuya razón sea igual a un número dado.*

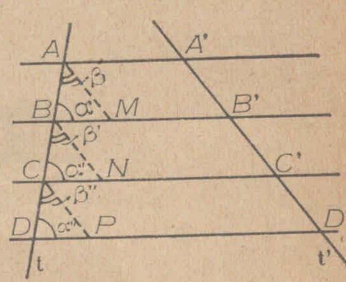
16. **Teorema.** — *Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, a segmentos iguales de una de éstas corresponden segmentos iguales en la otra.*

HIP.) $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$

t y t' transversales.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$

TESIS) $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'}$



DEMOST.) Trazando por los puntos A, B y C en que la transversal t corta a las paralelas AA′, BB′ y CC′ respectivamente, las AM, BN y CP paralelas a t', se forman los triángulos:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABM},\ \overset{\triangle}{BCN} \\ \text{y}\ \overset{\triangle}{CDP} \\ \text{que tienen} \end{array}\right\{ \begin{array}{lll} \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} & \text{por hipótesis.} & \\ \alpha\ = \alpha' = \alpha'' & \text{» cor. entre } BB' \parallel CC' \parallel DD' \text{ y sec. } t & \\ \beta\ = \beta' = \beta'' & \text{» » » } AM \parallel BN \parallel CP \text{ y sec.} & \end{array}$$

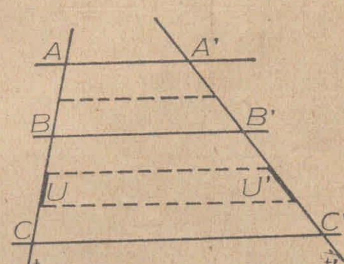
luego $\overset{\triangle}{ABM} = \overset{\triangle}{BCN} = \overset{\triangle}{CDP}$ por el segundo criterio de igualdad de triángulos.

Por lo tanto $$\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} \qquad [1]$$

pero $\overline{AM} = \overline{A'B'}$; $\overline{BN} = \overline{B'C'}$ y $\overline{CP} = \overline{C'D'}$ por lados opuestos de los paralelogramos $AA'B'M$, $BB'C'N$ y $CC'D'P$ respectivamente. Luego, sustituyendo en [1] resulta

$$\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} \quad \text{que es la tesis.}$$

17. **Teorema de Thales.**— *Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas, es igual a la razón de los segmentos correspondientes de la otra.*



Hip.) $AA' \parallel BB' \parallel CC'$

t y t' transversales.

Tesis) $$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

Demost.) Probamos si el segmento menor $\overline{AB}$ está contenido exactamente en el $\overline{BC}$. Si no lo está, probamos la mitad de $\overline{AB}$; si no lo está, probamos la tercera, cuarta, etc. de $\overline{AB}$. Podrá suceder que $\overline{BC}$ contenga exactamente un número n de veces a la emésima parte alícuota de $\overline{AB}$, o bien que $\overline{BC}$ no contenga exactamente a ninguna parte alícuota de $\overline{AB}$.

Consideremos el primer caso. Llamando U a la emésima parte de $\overline{AB}$, tendremos, de acuerdo con lo expuesto, que $\overline{AB}$ contiene a U, m

veces (en la figura $m = 2$) y $\overline{BC}$ contiene a U, n veces (en la figura $n = 3$);

o sea $\overline{AB} = m\,U$ y $\overline{BC} = n\,U$

luego $$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m\,U}{n\,U} = \frac{m}{n} \quad [1]$$ por una regla ant. (nº 9).

Como $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ contienen m y n veces respectivamente a U, dividiendo a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en m y n partes iguales y trazando por los puntos de división paralelas a las rectas paralelas dadas, queda dividido el segmento $\overline{A'B'}$ en m partes iguales y el $\overline{B'C'}$ en n partes iguales (teorema anterior).

Llamando U′ a una cualquiera de esas partes iguales, se tiene

$\overline{A'B'} = m\,.\,U'$ y $\overline{B'C'} = n\,.\,U'$ (en la fig. $m = 2$ y $n = 3$)

luego $$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m\,U'}{n\,U'} = \frac{m}{n} \quad [2]$$ por una regla ant. (n.º 9)

De [1] y [2] resulta

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$ por consecuencia carácter transitivo.

En el caso que $\overline{BC}$ no contenga exactamente a ninguna parte alícuota de $\overline{AB}$, se demuestra, en estudios superiores, que la propiedad considerada sigue siendo válida.

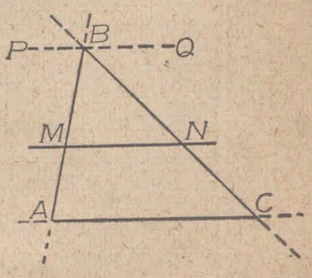
18. **Corolario.** — *Toda paralela a un lado de un triángulo que corte a los otros dos determina sobre éstos, segmentos proporcionales.*

HIP.) $\overset{\triangle}{ABC}$

MN ∥ AC

MN corta a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{BC}$ en N

TESIS) $$\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}}$$



Demost.) Trazando por B la $PQ \parallel MN$, como $MN \parallel AC$, por hip. resulta $PQ \parallel MN \parallel AC$ por el carácter transitivo del paralelismo. Considerando las rectas BA y BC como transversales, resulta que

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \quad \text{por el teorema de Thales.}$$

Observación. Considerando a los lados $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ del triángulo ABC y a los segmentos determinados sobre dichos lados por la paralela MN al tercer lado, se tiene, por el Teorema de Thales que:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BN}} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{BA}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NC}}.$$

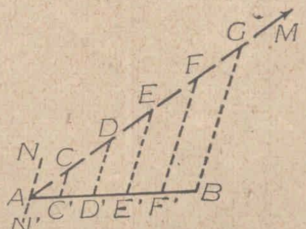
19. **Problema I.** — *Dividir un segmento en n partes iguales.*

Datos

Segmento $\overline{AB}$

$n = 5$

Construcción



Solución. Sobre una semirrecta auxiliar cualquiera de origen A, la $\overrightarrow{AM}$, por ejemplo, se construyen 5 segmentos consecutivos iguales $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG}$. Se une el punto G con el otro extremo B del segmento dado. Se trazan por los puntos C, D, E y F paralelas a GB. Estas cortan a $\overline{AB}$ en C′, D′, E′ y F′ respectivamente, con lo cual queda dividido el segmento AB dado en cinco partes iguales, es decir,

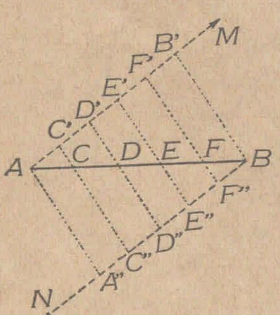
$$\overline{AC'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'B}$$

En efecto: siendo las rectas $NN' \parallel CC' \parallel DD' \parallel EE' \parallel FF' \parallel GB$ cortadas por las transversales AM y AB determinando segmentos iguales sobre la primera, pues $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG}$ por construcción, resulta por un teorema anterior (nº 16):

$$\overline{AC'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'B}$$

Nota. — Este problema es independiente de la semirrecta y del segmento auxiliar que se eligen para efectuar la construcción, pues dada una cantidad $\overline{AB}$ y un número 5, existe una cantidad $\frac{\overline{AB}}{5}$ y solamente una, cuyo producto por 5 sea igual a $\overline{AB}$ (Post. del nº 5).

Segundo método. — Por el extremo A del segmento dado, se traza una semirrecta auxiliar cualquiera $\overrightarrow{AM}$, en uno cualquiera de los semiplanos que determina AB, y por el otro extremo B la semirrecta $\overrightarrow{BN} \parallel \overrightarrow{AM}$ en el semiplano opuesto. Sobre cada una de estas semirrectas se construyen 5 segmentos consecutivos iguales



$$\overline{AC'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'B'} = \overline{BF''} =$$
$$= \overline{F''E''} = \overline{E''D''} = \overline{D''C''} = \overline{C''A''}$$

Uniendo A con A″, C′ con C″, . . . B′ con B, los segmentos $\overline{AA''}$, $\overline{C'C''}$ . . . $\overline{B'B}$ cortan al $\overline{AB}$ en los puntos A, C, D . . . B respectivamente, pues los puntos que unen pertenecen a los semiplanos opuestos respecto de AB, por construcción.

Estos puntos dividen al $\overline{AB}$ en 5 partes iguales.

En efecto: siendo $\overline{AC'} = \overline{A''C''}$ y $\overline{AC'} \parallel \overline{A''C''}$ es AC′C″A″ un paralelogramo por tener dos lados opuestos iguales y paralelos, luego AA″ ∥ C′C″ por ser lados opuestos de un paralelogramo.

Por igual razón resultan

$$C'C'' \parallel D'D''; \; D'D'' \parallel E'E'' \; . . . \; F'F'' \parallel B'B$$

luego AA″ ∥ C′C″ ∥ D′D″ ∥ E′E″ ∥ F′F″ ∥ B′B por carác. trans.

y como $\overline{AC'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'B'}$ por construcción

resulta $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ por un teorema anterior (nº 16).

Nota. — Este método presenta la ventaja de que exige trazar expresamente una sola paralela, $\overrightarrow{BN} \parallel \overrightarrow{AM}$, pues las restantes $\overline{BB'}$, $\overline{F'F''}$ . . . $\overline{AA''}$ resultan de la simple unión de los pares de puntos B y B', F' y F'' . . . A y A'' respectivamente.

Definición. — Si cuatro cantidades A, B, C y D están en proporción, se dice que la última D es *cuarta proporcional* a las otras tres.

20. **Teorema.** — *Dadas tres cantidades, en un cierto orden, existe una cantidad y sólo una que sea la cuarta proporcional a las tres primeras.*

Hip.) A, B y C cantidades

A y B homogéneas

Tesis) Existe y es única la cantidad D tal que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

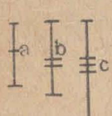
Demost.) Llamando r a la razón $\frac{A}{B}$, para que A, B, C y D estén en proporción debe ser $\frac{C}{D} = r$ por definición (nº 10).

Pero dada la cantidad C y el número r existe una cantidad D y sólo una tal que $\frac{C}{D} = r$ (Post. nº 5).

Nota. — Decir que existe una cantidad y sólo una que sea cuarta proporcional a otras tres dadas, significa que si varias cantidades cumplen esa condición, son *todas iguales*.

Problema II. — *Construir un segmento que sea cuarto proporcional a otros tres segmentos dados.*

Datos

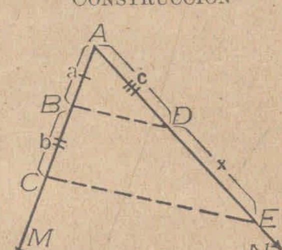


Incógnitas

Seg. x tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Construcción



Solución. — Se construye un ángulo cualquiera $\widehat{MAN}$ y sobre uno de sus lados, $\overrightarrow{AM}$ por ejemplo, los segmentos consecutivos $\overline{AB} = a$ y $\overline{BC} = b$ y sobre el otro lado, $\overrightarrow{AN}$, el segmento $\overline{AD} = c$.

Se une B con D y se traza por C la paralela a la recta BD, la cual corta a la $\overrightarrow{AN}$ en un punto E, con lo que queda determinado el segmento $\overline{DE} = x$ buscado.

Efectivamente: En el triángulo ACE, siendo BD || CE

es $$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$$ por un corolario anterior (n.º 18)

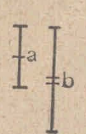
o sea $$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Nota. — La solución de este problema es independiente del ángulo que se elija para resolverlo, pues dadas tres cantidades *seg. a, seg. b* y *seg. c* existe y es único el *seg. x* cuarto proporcional a los tres segmentos dados (nº 20).

Definición. — Si tres cantidades A, B y C forman una proporción contínua se dice que la última cantidad C, es *tercera proporcional* a las otras dos.

Problema III. — *Construir un segmento que sea tercero proporcional a otros dos segmentos dados.*

Datos

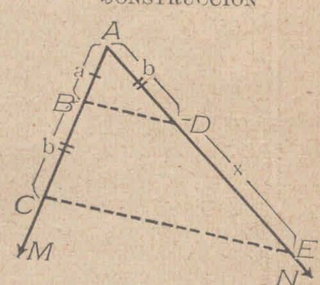


Incógnitas

Seg. x tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Construcción



Solución. — Se construye un ángulo cualquiera $\widehat{MAN}$, y sobre uno de sus lados, $\overrightarrow{AM}$, por ejemplo, los segmentos consecutivos $\overline{AB} = a$ y $\overline{BC} = b$, y sobre su otro lado $\overrightarrow{AN}$, el segmento $\overline{AD} = b$. Se une B con D y se traza por C la paralela a la recta BD, la cual corta a $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ en un punto E, con lo que queda determinado el segmento $\overline{\mathrm{DE}} = x$ buscado.

Efectivamente: En el triángulo ACE siendo BD || CE es

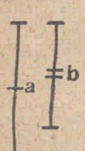
$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{DE}}} \quad \text{por un corolario anterior (nº 18)}$$

o sea
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}.$$

Definición. — Se dice que *un segmento se ha dividido* en dos segmentos *aditivos proporcionales* a otros dos dados, cuando la razón de los dos primeros es igual a la de los dos últimos y la suma de aquellos es igual a dicho segmento.

Problema IV. — *Dividir un segmento dado en partes proporcionales a otros dos segmentos dados.*

Datos



$\overline{\mathrm{AB}}$

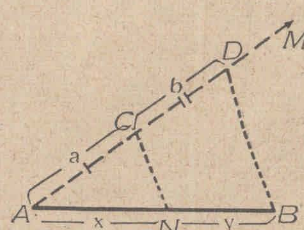
Incógnitas

Segs. x e y, tales que

$$x + y = \overline{\mathrm{AB}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Construcción



Solución. — Por el extremo A del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ dado, se traza una semirrecta auxiliar cualquiera $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, y sobre ella se construyen los segmentos consecutivos $\overline{\mathrm{AC}} = a$ y $\overline{\mathrm{CD}} = b$. Se une D con B y se traza por C la paralela a BD, la cual corta a $\overline{\mathrm{AB}}$ en un punto N, interior a $\overline{\mathrm{AB}}$, con lo que quedan determinados los segmentos $\overline{\mathrm{AN}} = x$ y $\overline{\mathrm{NB}} = y$ buscados.

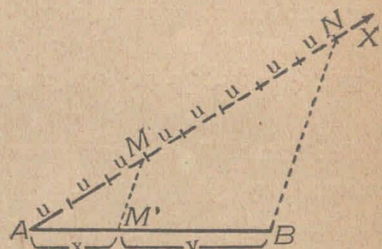
Efectivamente: $x + y = \overline{\mathrm{AN}} + \overline{\mathrm{NB}} = \overline{\mathrm{AB}}$ por definición de suma.

Además, en el $\overset{\triangle}{ABD}$, siendo CN || DB, es

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \quad \text{por el cor. teor. de Thales (nº 18)}$$

o sea
$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$

Problema V. — *Dividir un segmento en dos partes cuya razón sea igual a un número dado.*

Datos	Incógnitas	Construcción
Segmento $\overline{AB}$ $\frac{3}{5}$ = n.º dado	Segs. x e y, tales que: $x + y = \overline{AB}$ $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$	

Solución. — Por el extremo A del segmento dado $\overline{AB}$, se traza una semirrecta auxiliar cualquiera $\overrightarrow{AX}$ y sobre ella se construye el $\overline{AM}$ igual a 3 veces un segmento arbitrario u y luego un segmento $\overline{MN}$ consecutivo de $\overline{AM}$ e igual a 5 veces u. Se une el extremo N con el otro extremo B del segmento dado, y se traza por el extremo M del tercer segmento u la paralela a NB. Esta paralela corta al segmento $\overline{AB}$ en un punto interior M', con lo que quedan determinados los segmentos $\overline{AM'} = x$ y $\overline{M'B} = y$ buscados.

Efectivamente: $x + y = \overline{AM'} + \overline{M'B} = \overline{AB}$ por definición de suma. Además, en el $\overset{\triangle}{ANB}$ siendo MM' || NB es

$$\frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MN}} \quad \text{por el cor. teor. de Thales}$$

o sea
$$\frac{x}{y} = \frac{3\,u}{5\,u} = \frac{3}{5}$$

CAPÍTULO III

PUNTOS ARMONICOS

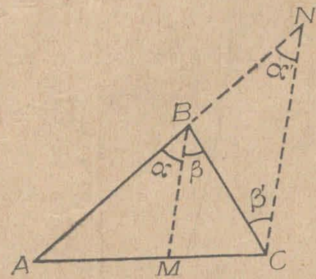
PROGRAMA. — *En todo triángulo la bisectriz de uno de sus ángulos interiores divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados. Si en un triángulo la bisectriz de uno de sus ángulos exteriores corta a la prolongación del lado opuesto ... Definición de grupo armónico de puntos. Ejemplos. Dados tres puntos de una recta, hallar el conjugado armónico de uno de ellos con respecto a los otros dos.*

22. **Teorema.**— *En todo triángulo la bisectriz de uno de sus ángulos interiores divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.*

HIP.) $\overset{\triangle}{ABC}$

$\overline{BM}$ bisectriz de $\widehat{B}$

TESIS) $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$



DEMOST.) Llamando α y β a los ángulos que determina la bisectriz $\overline{BM}$ del ángulo $\widehat{B}$, se tiene, por definición de bisectriz:

$$\alpha = \beta \qquad [1]$$

Trazando por C la paralela a BM, ella corta a la recta AB en un punto N.

En el triángulo ACN la recta BM es paralela al lado CN y corta a los otros dos en los puntos B y M, luego

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BN}} \quad [2] \quad \text{por cor. Teor. de Thales.}$$

Observando esta proporción se ve que para obtener la Tesis basta demostrar que $\overline{BN}$ es igual $\overline{BC}$.

Para ello, llamando α' al correspondiente de α, entre BM $\parallel$ CN y la secante BN, se tiene

$$\alpha = \alpha' \quad [3] \quad \text{por prop. ant. (\textit{Mat.} I, n}^{\text{o}}\text{ 39)}$$

y llamando β' al alterno interno de β entre las mismas paralelas y la secante BC, se tiene:

$$\beta = \beta' \quad [4] \quad \text{por un teor. ant. (\textit{Mat.} I, n}^{\text{o}}\text{ 40)}$$

Luego como $\alpha = \beta$ por [1], resulta de [3] y [4]

$\alpha' = \beta'$ y por lo tanto, en el $\overset{\triangle}{BCN}$

Lado opuesto a α' = *lado opuesto a* β'

es decir $\overline{BC} = \overline{BN}$.

Sustituyendo en [2] $\overline{BN}$ por su igual $\overline{BC}$, resulta la tesis

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

Definición. — Se dice que un punto M divide a un segmento $\overline{AC}$ en dos *segmentos sustractivos* proporcionales a otros dos dados, cuando el punto M pertenece a la recta AC que contiene al segmento, es el exterior al mismo, la razón de los dos primeros segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{CM}$ es igual a la de los dos últimos y la diferencia de aquéllos es igual a dicho segmento $\overline{AC}$ (fig. del nº 23).

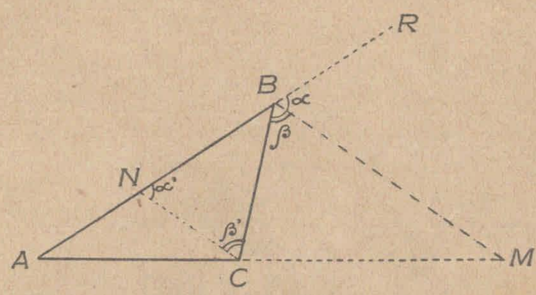
23. **Teorema.**— *Si en un triángulo la bisectriz de uno de sus ángulos exteriores corta a la prolongación del lado opuesto, lo divide en dos segmentos sustractivos proporcionales a los otros dos lados.*

HIP.) $\overset{\triangle}{ABC}$

$\overrightarrow{BM}$ bisectriz del áng. ext. adyacente a $\hat{B}$.

$\overrightarrow{BM}$ corta a AC en M

TESIS) $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{CM}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$



DEMOST.) Llamando α y β a los ángulos que determina la bisectriz $\overrightarrow{BM}$ del ángulo exterior $R\hat{B}C$ se tiene $\alpha = \beta$ [1]

Trazando por C la paralela a BM, ella corta a la recta AB en un punto N.

En el triángulo ABM, siendo CN || BM es

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{NB}}$$ [2] por el cor. Teor. de Thales.

Llamando α' al correspondiente de α entre CN || BM y sec. BN
y β' al alterno interno de β entre CN || BM y sec. BC

se tiene $\alpha = \alpha'$ [3] y $\beta = \beta'$ [4] por teor. ants. (*Mat.* I, n^{os} 39 y 40)

Luego como $\alpha = \beta$ por [1], resulta de [3] y [4]

$\alpha' = \beta'$ y por lo tanto, en el $\overset{\triangle}{BCN}$

Lado opuesto a α' = *lado opuesto a* β'

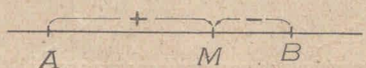
es decir $\overline{BC} = \overline{BN}$.

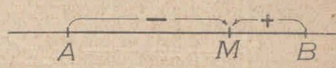
Sustituyendo en [2] $\overline{BN}$ por su igual $\overline{BC}$, resulta

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

24. Segmentos dirigidos. — Consideremos una recta y sobre ella dos puntos A y B. Sea M un punto de la misma interior al segmento $\overline{AB}$. Si imaginamos un móvil que parte de A y va hacia M y otro que parte de B y va hacia M, observamos que dichos móviles caminan en sentido contrario.

Se acostumbra a llamar *positivo* el sentido del que va de A hacia M y *negativo* al que va de B hacia M o viceversa; y en cualquiera de los dos casos se dice que los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ tienen *sentido contrario.*



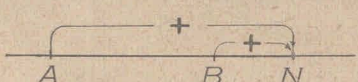


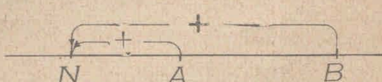
Teniendo en cuenta estas observaciones daremos la siguiente:

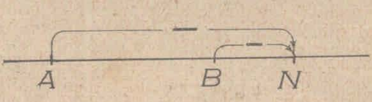
Definición. — Se dice que dos segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ tienen *sentido contrario* cuando M es interior al segmento $\overline{AB}$.

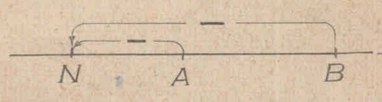
Consideremos una recta y sobre ella dos puntos A y B. Sea N un punto de la misma exterior al segmento $\overline{AB}$. Si imaginamos un móvil que parte de A y va hacia N y otro que parte de B y va hacia N, observamos que dichos móviles caminan en el mismo sentido.

Se acostumbra a llamar *positivo* el sentido del que va de A hacia N y *negativo* al que va de N hacia A o viceversa, y en cualquiera de los casos se dice que $\overline{AN}$ y $\overline{BN}$ tienen *el mismo sentido.*









Teniendo en cuenta estas observaciones daremos la siguiente:

Definición. — Se dice que dos segmentos de $\overline{AN}$ y $\overline{BN}$ tienen el *mismo sentido* cuando N pertenece a la recta AB y es exterior al segmento $\overline{AB}$.

Definición. — Se dice que la *razón entre dos segmentos es positiva* o *negativa*, según que dichos segmentos tengan el mismo sentido o sentidos contrarios, respectivamente.

25. Definición de grupo armónico de puntos. — Dados cuatro puntos, A, B, M y N de una recta, en un cierto orden, se dice que forman un *grupo armónico*, cuando la razón de los segmentos determinados por cada uno de los dos primeros con el tercero, es igual en valor absoluto y de signo contrario a la razón de los segmentos determinados por cada uno de los dos primeros con el cuarto.

En símbolos: A, B, M y N forman un grupo armónico

si los valores absolutos: $$\left|\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}\right| = \left|\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}\right| \qquad [1]$$

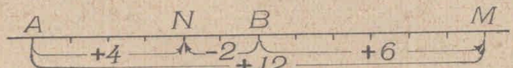
y $$\textit{signo de } \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \quad \text{contrario a} \quad \textit{signo de } \frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} \qquad [2]$$

Las condiciones [1] y [2] se pueden reunir en una sola expresión así:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = -\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}$$

Nota. — El signo — que precede a la segunda razón indica que ésta es de signo contrario al de la primera.

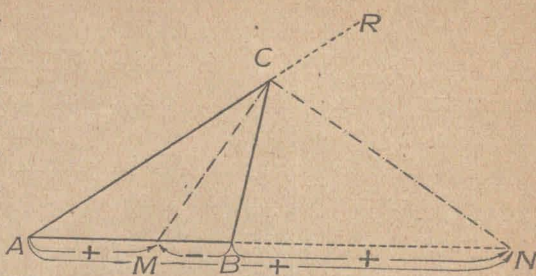
Ejemplo I:



A, B, M y N forman un grupo armónico puesto que:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{+12}{+6} = +2 \quad \text{y} \quad \frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = \frac{+4}{-2} = -2$$

es decir $$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = -\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}.$$



√Ejemplo II. — Considerando un triángulo escaleno ABC, si se traza la bisectriz de un ángulo interior C, por ejemplo, y la del ángulo exterior adyacente a él, se tiene:

$$\left|\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}\right| = \left|\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right| \quad \text{por prop. de la bisectriz del áng. interior (nº 22)}$$

$$\text{y} \quad \left|\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}\right| = \left|\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right| \quad \text{por prop. de la bisectriz del áng. exterior (nº 23)}$$

Pero siendo M interior a $\overline{AB}$; $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ tienen sentido contrario

luego la razón $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{BM}}$ es negativa

y siendo N exterior a $\overline{AB}$, $\overline{AN}$ y $\overline{BN}$ tienen el mismo sentido,

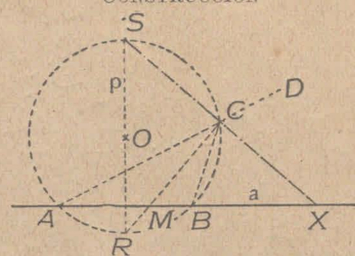
luego la razón $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{BN}}$ es positiva

por lo tanto $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = - \dfrac{\overline{AN}}{\overline{BN}}$ o sea A, B, M y N forman un grupo armónico.

✓ Luego: *Los extremos de un lado de un triángulo escaleno y los puntos en que dicho lado y su prolongación son cortados por la bisectriz del ángulo opuesto y la del ángulo exterior adyacente a él, forman un grupo armónico.*

✓ Definición. — Si cuatro puntos A, B, M y N forman un grupo armónico, se dice que N es el *conjugado armónico* de M con respecto a A y B.

26. **Problema.**— *Dados tres puntos de una recta hallar el conjugado armónico de uno de ellos con respecto a los otros dos.*

DATOS	INCÓGNITAS	CONSTRUCCIÓN
A B y M puntos de *a*	X perteneciente a *a*, tal que A, B, M y X sea un grupo armónico	

SOLUCIÓN. — Se traza la mediatriz *p* del segmento $\overline{AB}$, y con centro en un punto O cualquiera de la misma, la circunferencia $C_{(O \text{ y } \overline{OA})}$ que pasa por A y B, puesto que $\overline{OA} = \overline{OB}$ por una propiedad de la mediatriz (*Mat.* I, nº 96).

Por otra parte, llamando R y S a los puntos en que la mediatriz *p* corta a la $C_{(O \text{ y } \overline{OA})}$, y considerando por ej. el R, tendremos determinados los arcos $\overset{\frown}{AR} = \overset{\frown}{RB}$.

Trazando la recta RM ella corta a la $C_{(O)}$ en otro punto C. Uniendo C con A y B y trazando la bisectriz del ángulo $\widehat{DCB}$, exterior al triángulo $\overset{\triangle}{ACB}$ y adyacente al $\widehat{ACB}$, decimos que el punto X en que la bisectriz CX corta a la recta *a* es el conjugado armónico de M con respecto a A y B.

En efecto: En el $\overset{\triangle}{ACB}$ es $\overline{CM}$ bisectriz del ángulo interior $\widehat{C}$, pues $\widehat{ACR} = \widehat{BCR}$ por ser inscriptos en $C_{(O)}$ y abarcar arcos iguales (*Mat.* I, nº 146). Además, como CX es, por construcción bisectriz del ángulo exterior $\widehat{DCB}$ adyacente al $\widehat{C}$, resulta que A, B, M y X forman un grupo armónico por lo visto anteriormente (nº 25),

luego X es el conjugado armónico de M con respecto a A y B.

OBSERVACIÓN. — El trazado de la bisectriz CX del ángulo exterior $\widehat{DCB}$ puede obtenerse uniendo S con C, pues así resultaría el ángulo $\widehat{SCR} = 1$ R, luego CX $\perp$ CM y como la perpendicular a la bisectriz de un ángulo es bisectriz del ángulo adyacente a él, resulta CX bisectriz del $\widehat{DCB}$.

CAPÍTULO IV

TRIANGULOS SEMEJANTES

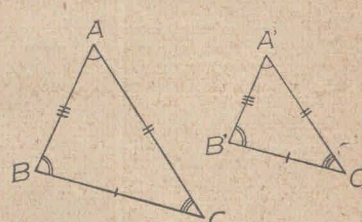
PROGRAMA. — *Definición. Dos triángulos iguales son semejantes. Caracteres de la semejanza de triángulos. Teorema fundamental: Toda paralela a un lado de un triángulo forma con los otros dos un nuevo triángulo semejante al primero. Casos de semejanza de iriángulos. Las alturas homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales a los lados correspondientes. Corolario. Las medianas homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales a los lados correspondientes. Corolario. Las bisectrices homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales a los lados correspondientes. Corolario.*

30. **Definición de triangulos semejantes.** — Se dice que un triangulo ABC es *semejante* a otro A′B′C′, cuando los ángulos del primero son respectivamente iguales a los ángulos del segundo y los lados del primero son proporcionales a sus homólogos del segundo.

NOTACIÓN. — $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ expresa que el $\overset{\triangle}{ABC}$ es semejante al A′B′C′. El signo $\sim$ reemplaza a la frase *« es semejante a »*.

En símbolos:

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \quad \text{si} \quad \left| \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \end{array} \right.$$



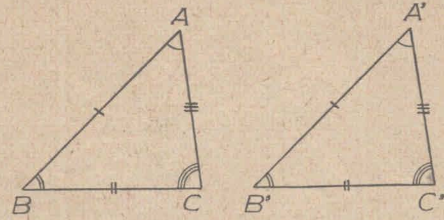
El teorema que sigue nos permite dar un ejemplo de triángulos semejantes.

todos los $\triangle$ equilát son semejantes

31. **Teorema.**— *Dos triángulos iguales son semejantes.*

Hip.) $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$

Tesis) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$



Demost.) De acuerdo con la definición de triángulos iguales se tiene que:

Igualdad de los ángulos:

Por ser $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$, por hipótesis, es [1] $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{array} \right.$

Proporcionalidad de los lados:

Por ser $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ es $\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \text{ luego [2] } \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = 1 \text{ por def. de razón} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ luego [3] } \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = 1 \text{ por def. de razón} \\ \overline{CA} = \overline{C'A'} \text{ luego [4] } \dfrac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = 1 \text{ por def. de razón} \end{array} \right.$

De [2], [3] y [4] resulta:

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ [5] por consecuencia de carácter transitivo.

Luego por [1] y [5] se tiene: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ por definición de triángulos semejantes.

32. **Caracteres de la semejanza de triángulos.** — Basándose en los caracteres de igualdad de ángulos (*Mat.* I, nº 17) y en la definición de triángulos semejantes resulta que:

Carácter idéntico. — *Todo triángulo es semejante a si mismo.*

En símbolos: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

CARÁCTER RECÍPROCO. — *Si un triángulo es semejante a otro, este lo es al primero.*

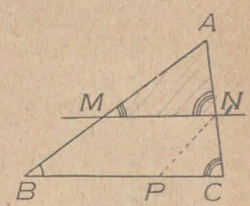
En símbolos: Si $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ es $\overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC}$.

CARÁCTER TRANSITIVO. — *Si un triángulo es semejante a otro y éste a su vez es semejante a un tercero, el primero es semejante al tercero.*

En símbolos:

$$\text{Si } \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \text{ y } \overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{A''B''C''} \text{ es } \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A''B''C''}$$

33. Teorema fundamental de la semejanza de triángulos.— *Toda paralela a un lado de un triángulo forma con las rectas a que pertenecen los otros dos un nuevo triángulo semejante al primero.*



HIP.) $\overset{\triangle}{ABC}$
$MN \parallel BC$
MN corta a las rectas AB y AC.

TESIS) $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

DEMOST.) 1er CASO. — La paralela MN corta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos M y N respectivamente.

Igualdad de los ángulos.

$\overset{\triangle}{AMN}$ y $\overset{\triangle}{ABC}$ tienen [1]
$$\left\{\begin{array}{ll} \hat{A} = \hat{A} & \text{común} \\ \hat{M} = \hat{B} & \text{por corresp. entre } MN \parallel BC \text{ y sec. } AB \\ \hat{N} = \hat{C} & \text{por corresp. entre } MN \parallel BC \text{ y sec. } AC \end{array}\right.$$

Proporcionalidad de los lados.

En el $\overset{\triangle}{ABC}$ siendo $MN \parallel BC$ y cortando a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en M y N respectivamente, se tiene:

[2] $$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} \quad \text{por el cor. del Teor. de Thales}$$

Trazando por N la $PN \parallel AB$, ella corta al lado $\overline{BC}$ en un punto P, con lo que se tiene:

$$[3] \qquad \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} \quad \text{por el cor. del Teor. de Thales}$$

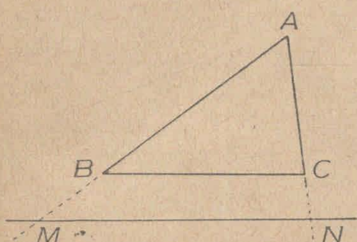
De [2] y [3] resulta $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BC}}$ [4] por el car. trans.

Pero MNPB es un paralelogramo por ser $MN \parallel BP$ y $NP \parallel BM$, luego $\overline{BP} = \overline{MN}$. Sustituyendo en [4] $\overline{BP}$ por $\overline{MN}$ queda

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}. \qquad [5]$$

De [1] y [5] resulta $\overset{\triangle}{AMN} \backsim \overset{\triangle}{ABC}$ por definición de triángulos semejantes.

2º Caso. — La paralela MN corta a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ en los puntos M y N exteriores a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.



Considerando el $\overset{\triangle}{AMN}$ se tiene, por el caso anterior

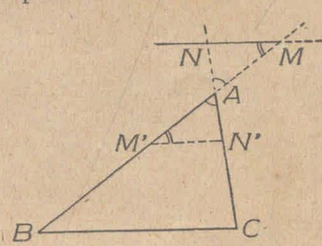
$$\overset{\triangle}{ABC} \backsim \overset{\triangle}{AMN}$$

luego $\overset{\triangle}{AMN} \backsim \overset{\triangle}{ABC}$ por el carácter recíproco de la semejanza de triángulos.

3er Caso. — La paralela MN corta a las $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CA}$ en los puntos M y N exteriores a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

Tomando sobre $\overrightarrow{AB}$ el $\overline{AM'} = \overline{AM}$ y trazando por M′ la $M'N' \parallel BC$ ésta corta a $\overline{AC}$ en N′, con lo que se obtiene:

$$\overset{\triangle}{ABC} \backsim \overset{\triangle}{AM'N'} \quad [1] \text{ por el } 1^{er} \text{ caso.}$$



Además los triángulos

$\overset{\triangle}{AM'N'} = \overset{\triangle}{AMN}$ por tener $\left\{ \begin{array}{ll} \overline{AM'} = \overline{AM} & \text{por construcción} \\ \widehat{M'AN'} = \widehat{MAN} & \text{por opuestos por el vértice} \\ \widehat{M'} = \widehat{M} & \text{por alt. int. entre } M'N' \parallel NM \text{ y sec. } MM' \end{array} \right.$

luego $\overset{\triangle}{AM'N'} \sim \overset{\triangle}{AMN}$ [2] por un teorema anterior (nº 31).

De [2] y [1] resulta $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ por carácter transitivo y recíproco de la semejanza de triángulos.

CASOS DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS.

Hemos visto que, por definición, para que dos triángulos sean semejantes deben tener sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales; pero, como veremos a continuación, dichas condiciones no son independientes y por lo tanto, basta que se cumplan algunas de ellas para que se verifiquen las restantes.

Las condiciones que deben cumplir los elementos de dos triángulos para que se pueda afirmar que ellos son semejantes, dan origen a los llamados: *Casos de semejanza de triángulos.*

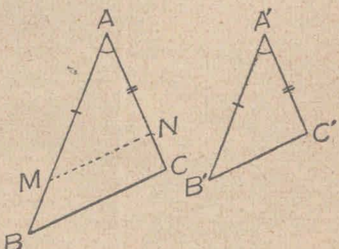
34. **Primer caso.** — Teorema. — *Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados respectivamente proporcionales, y el ángulo comprendido igual.*

Hip.) $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

$$\widehat{A} = \widehat{A'}$$

Tesis) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$



Demost.) Construyendo sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ el segmento $\overline{AM} = \overline{A'B'}$ y trazando por M la MN $\parallel$ BC, forma con AB y AC el triángulo $\overset{\triangle}{AMN} \backsim \overset{\triangle}{ABC}$ [1] por el teorema fundamental

Además $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ y $\overset{\triangle}{AMN}$ tienen
$$\left\{\begin{array}{ll} \overline{A'B'} = \overline{AM} & \text{por construcción} \\ \widehat{A'} = \widehat{A} & \text{por hipótesis} \\ \overline{A'C'} = \overline{AN} \text{ por ser 4° prop. en:} & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \text{ por hipótesis y} \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AN}} \text{ por cor. teor. Thales y ser } \overline{A'B'} = \overline{AM} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

luego $\overset{\triangle}{A'B'C'} = \overset{\triangle}{AMN}$ y por lo tanto $\overset{\triangle}{A'B'C'} \backsim \overset{\triangle}{AMN}$ [2]

De [2] y [1] resulta, por carácter transitivo ~~y recíproco~~ de la semejanza

$$\overset{\triangle}{ABC} \backsim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

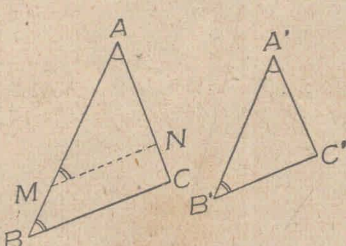
35. **Segundo caso.** — Teorema. — *Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.*

Hip.) $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$

$\widehat{A} = \widehat{A'}$

$\widehat{B} = \widehat{B'}$

Tesis) $\overset{\triangle}{ABC} \backsim \overset{\triangle}{A'B'C'}$



Demost.) Construyendo sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ el segmento $\overline{AM} = \overline{A'B'}$ y trazando por M la MN $\parallel$ BC forma con AB y AC el triángulo

$$\overset{\triangle}{AMN} \backsim \overset{\triangle}{ABC} \quad [1] \text{ por el teorema fundamental}$$

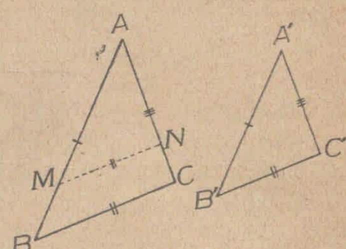
Además $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ y $\overset{\triangle}{AMN}$ tienen
$$\left\{\begin{array}{lll} \overline{A'B'} = \overline{AM} & \text{por construcción} & \\ \widehat{A'} = \widehat{A} & \text{por hipótesis} & \\ \widehat{B'} = \widehat{M} & \text{por ser} & \left\{\begin{array}{l} \widehat{M} = \widehat{B} \text{ por corresp. entre } \parallel \text{ y} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \text{ por hipótesis} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

luego $\overset{\triangle}{A'B'C'} = \overset{\triangle}{AMN}$, y por lo tanto $\overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{AMN}$ [2]

De [2] y [1] resulta, por carácter transitivo y recíproco de la semejanza,

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

36. **Tercer caso.**—TEOREMA.—*Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente proporcionales.*



HIP.) $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

TESIS) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

DEMOST.) Construyendo sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ el segmento $\overline{AM} = \overline{A'B'}$ y trazando por M la MN ∥ BC forma con AB y AC el triángulo

$$\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC} \quad [1] \text{ por teorema fundamental}$$

Luego $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} \quad \text{por def. triáng. semejant.}$$

y también 1ª $$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = 2º\ \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = 3º\ \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} \quad [2] \text{ por ser } \overline{AM} = \overline{A'B'}$$

pero 1º $$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = 2º\ \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = 3º\ \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \quad [3] \text{ por hipótesis}$$

Comparando:

las 1ª y 2ª razones de [2] y [3] resulta $\overline{MN} = \overline{B'C'}$ [4]

las 1ª y 3ª razones de [2] y [3] resulta $\overline{AN} = \overline{A'C'}$ [5]

por ser única la cuarta proporcional a tres cantidades dadas $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{BC}$ (nº 17) o $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

$$\text{Además } \overset{\triangle}{A'B'C'} \text{ y } \overset{\triangle}{AMN} \text{ tienen } \left\{ \begin{array}{ll} \overline{A'B'} = \overline{AM} & \text{por construcción} \\ \overline{B'C'} = \overline{MN} & \text{por [4]} \\ \overline{A'C'} = \overline{AN} & \text{por [5]} \end{array} \right.$$

luego $\overset{\triangle}{A'B'C'} = \overset{\triangle}{AMN}$ y por lo tanto, $\overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{AMN}$ [6]

De [6] y [1] resulta, por carácter transitivo y ~~recíproco de~~ la semejanza,

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

37. **Cuarto caso.** — Teorema. — *Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales y el ángulo opuesto al mayor de ellos igual~~es~~.*

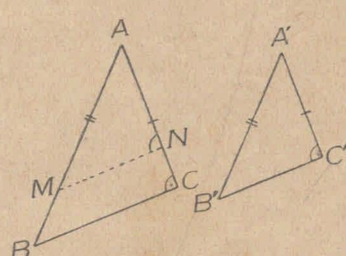
Hip.) $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}},$$

$$\overline{AB} > \overline{AC}$$

$$\overline{A'B'} > \overline{A'C'}$$

$$\hat{C} = \hat{C'}$$



Tesis) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

Demost.) Construyendo sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ el segmento $\overline{AM} = \overline{A'B'}$ y trazando por M la MN $\parallel$ BC forma con AB y AC el triángulo

$$\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC} \quad [1] \quad \text{por el teorema fundamental}$$

Además $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ y $\overset{\triangle}{AMN}$ tienen

$$\left\{\begin{array}{ll}
\overline{A'B'} = \overline{AM} & \text{por construcción} \\[2ex]
\overline{A'C'} = \overline{AN} \text{ por ser 4º prop. en:} & \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} & \text{por hipótesis} \\[2ex] \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AN}} & \text{por cor. teor. Thales y } \overline{AM} = \overline{A'B'} \end{array}\right. \\[4ex]
\widehat{C'} = \widehat{N} \quad \text{por ser} & \left\{\begin{array}{ll} \widehat{N} = \widehat{C} & \text{por corresp. entre } \parallel \\ \widehat{C} = \widehat{C'} & \text{por hipótesis} \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Luego $\overset{\triangle}{A'B'C'} = \overset{\triangle}{AMN}$ por el 4º caso de igualdad de triángulos.

Por lo tanto, $\overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{AMN}$ [2] por un teorema anterior (nº 31).

Luego, de [2] y [1] resulta, por carácter transitivo y recíproco de la semejanza,

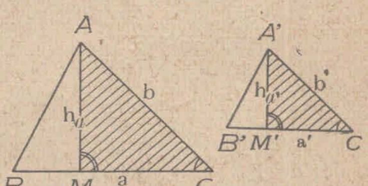
$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

38. Propiedad de las alturas homólogas de los triángulos semejantes. — Teorema. — *Las alturas homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales a los lados correspondientes.*

Hip.) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

h_a y $h_{a'}$ alt. corresp. a a y a'

Tesis) $\dfrac{h_a}{h_{a'}} = \dfrac{a}{a'}$



Demost.) Considerando los triángulos rectángulos

$$\overset{\triangle}{AMC} \text{ y } \overset{\triangle}{A'M'C'} \text{ que tienen } \left\{\begin{array}{ll} \widehat{M} = \widehat{M'} & \text{por rectos} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} & \text{por ser } \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \text{ por hip.} \end{array}\right.$$

resulta $\overset{\triangle}{AMC} \sim \overset{\triangle}{A'M'C'}$ por el 2º caso semejanza de triángulos luego $\dfrac{h_a}{h_{a'}} = \dfrac{b}{b'}$. por defin. de triángulos semejantes

y como $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ por ser $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

se tiene $\dfrac{h_a}{h_{a'}} = \dfrac{a}{a'}$.

Análogamente se demuestra que: $\dfrac{h_b}{h_{b'}} = \dfrac{b}{b'}$ y $\dfrac{h_c}{h_{c'}} = \dfrac{c}{c'}$.

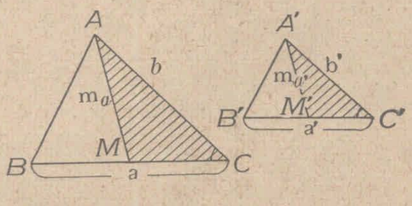
Corolario. — *Las alturas homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales.*

En símbolos: Si $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ es $\dfrac{h_a}{h_{a'}} = \dfrac{h_b}{h_{b'}} = \dfrac{h_c}{h_{c'}}$.

39. **Propiedad de las medianas homólogas de dos triángulos semejantes.** — Teorema. — *Las medianas homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales a los lados correspondientes.*

Hip.) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$
m_a y $m_{a'}$ medianas correspondientes a a y a'.

Tesis) $\dfrac{m_a}{m_{a'}} = \dfrac{a}{a'}$



Demost.) Considerando los triángulos

$\overset{\triangle}{AMC}$ y $\overset{\triangle}{A'M'C'}$ que tienen

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{b}{b'} = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{M'C'}} \text{ por ser } \left\{\begin{array}{l} \dfrac{b}{b'} = \dfrac{a}{a'} \text{ por ser } \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \text{ y} \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a'}{2}} = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{M'C'}} \text{ por prop. ant.} \end{array}\right. \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \quad \text{por ser áng. hom. en } \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \end{array}\right.$$

resulta $\overset{\triangle}{AMC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ por 2º caso semejanza de triángulos

luego $\dfrac{m_a}{m_{a'}} = \dfrac{b}{b'}$

y como $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ por ser $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

se tiene $\dfrac{m_a}{m_{a'}} = \dfrac{a}{a'}$.

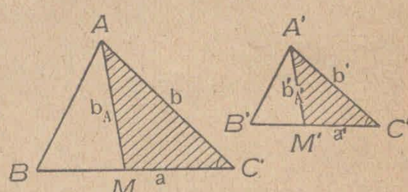
Análogamente se demuestra que $\dfrac{m_b}{m_{b'}} = \dfrac{b}{b'}$ y $\dfrac{m_c}{m_{c'}} = \dfrac{c}{c'}$.

COROLARIO. — *Las medianas homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales.*

En simbolos: Si $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ es $\dfrac{m_a}{m_{a'}} = \dfrac{m_b}{m_{b'}} = \dfrac{m_c}{m_{c'}}$.

40. Propiedad de las bisectrices homólogas de dos triángulos semejantes. — TEOREMA. — *Las bisectrices homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales a los lados correspondientes.*

HIP.) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$
b_A y $b_{A'}$ bisectrices correspondiente a a y a'.



TESIS) $\dfrac{b_A}{b_{A'}} = \dfrac{a}{a'}$

DEMOST.) Considerando los triángulos

$\overset{\triangle}{AMC}$ y $\overset{\triangle}{A'M'C'}$ que tienen

- $\hat{C} = \hat{C'}$ por ser homólogos en $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$
- $M\hat{A}C = M'\hat{A'}C'$ por ser
  - $\hat{A} = \hat{A'}$ por ángs. homólogos en $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$
  - y $M\hat{A}C = \dfrac{\hat{A}}{2}$ y $M'\hat{A'}C' = \dfrac{\hat{A'}}{2}$

resulta $\overset{\triangle}{AMC} \sim \overset{\triangle}{A'M'C'}$ por 2º caso semejanza de triángulos

luego $\dfrac{b_A}{b_{A'}} = \dfrac{b}{b'}$

y como $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{\;}{c'}$ por def. de triángulos semejantes

es $\dfrac{b_A}{b_{A'}} = \dfrac{a}{a'}$.

Análogamente se demuestra que: $\dfrac{b_B}{b_{B'}} = \dfrac{b}{b'}$ y $\dfrac{b_C}{b_{C'}} = \dfrac{c}{c'}$.

Corolario. — *Las bisectrices homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales.*

En símbolos: Si $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ es $\dfrac{b_A}{b_{A'}} = \dfrac{b_B}{b_{B'}} = \dfrac{b_C}{b_{C'}}$.

Aplicaciones. — Como una aplicación de las propiedades anteriores, demostraremos que:

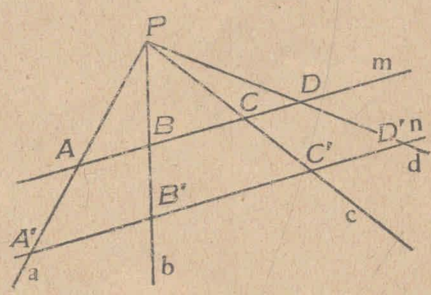
Si varias rectas concurrentes son cortadas por dos paralelas, los segmentos correspondientes determinados en éstas son proporcionales.

Hip.) a, b, c, d concurren en P

$m \parallel n$

Tesis.)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} \text{ etc.}$$



Demost.) El $\overset{\triangle}{PAB} \sim \overset{\triangle}{PA'B'}$ por ser $m \parallel n$ o sea $AB \parallel A'B'$

luego
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PB'}} \qquad [1]$$

Análogamente el $\overset{\triangle}{PBC} \sim \overset{\triangle}{PB'C'}$ por ser $m \parallel n$ o sea $BC \parallel B'C'$

luego
$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PC'}} \qquad [2]$$

y el $\overset{\triangle}{PCD} \sim \overset{\triangle}{PC'D'}$ por ser $m \parallel n$ o sea $CD \parallel C'D'$

luego
$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PC'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} \qquad [3]$$

De [1], [2] y [3] resulta:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} \qquad [4]$$ por car. transitivo

Corolario. — Si $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ como las razones [4] son iguales y tienen sus antecedentes iguales también los serán los consecuentes

o sea $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'}$ lo que se expresa:

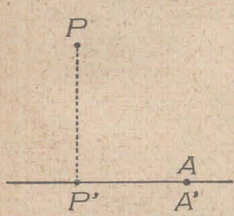
Si varias rectas concurrentes al ser cortadas por dos paralelas, determinan sobre una de las paralelas segmentos iguales, también son iguales los determinados sobre la segunda

CAPITULO V

RELACIONES METRICAS ENTRE LOS LADOS DEL TRIANGULO

Programa. — *Proyección de un punto sobre un eje. Proyección de un segmento. Relaciones que se verifican en un triángulo rectángulo cuando se traza en él la altura correspondiente a la hipotenusa. Cuadrado de un segmento. Demostración del teorema de Pitágoras. Corolarios. Cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo o a un ángulo obtuso en un triángulo. Construcción del segmento medio proporcional entre dos segmentos dados.*

42. **Proyección de un punto sobre un eje.** — Definición. — Se llama *proyección de un punto* sobre una recta, llamada *eje de proyección*, al pie de la perpendicular trazada por el punto a la recta.



Ejemplo: P′ es la proyección de P sobre *a*.

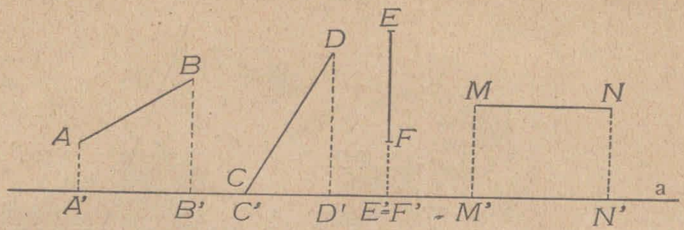
Nota. — Si un punto A pertenece al eje, su proyección sobre él, es el mismo punto A.

43 **Proyección de un segmento.** — Definición. — Se llama *proyección de un segmento sobre un eje*, al segmento determinado por las proyecciones de sus extremos sobre dicho eje.

Ejemplos: $\overline{A'B'}$ es la proyección $\overline{AB}$ sobre *a*

$\overline{C'D'}$ » » » $\overline{CD}$ » »

$\overline{M'N'}$ » » » $\overline{MN}$ » »



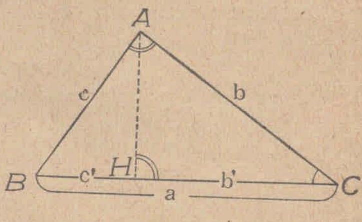
NOTA. — Si un segmento $\overline{\mathrm{EF}}$ es perpendicular al eje, su proyección sobre el mismo es el pie $E' = F'$ de la recta a que pertenece dicho segmento sobre el eje.

OBSERVACIÓN. — En los ejemplos anteriores puede verse que la proyección de un segmento sobre un eje es menor que dicho segmento, cuando éste es oblicuo al eje, es nula cuando es perpendicular y es igual cuando es paralelo al mismo eje.

44. Relaciones que se verifican en un triángulo rectángulo cuando se traza en él la altura correspondiente a la hipotenusa. —TEOREMA.—*Si en un triángulo rectángulo se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, se verifica que:* I) *Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.* II) *La altura es media proporcional entre los segmentos que determina sobre la hipotenusa.* III) *La altura es cuarta proporcional a la hipotenusa y los catetos.*

I) *Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.*

HIP.) $\overset{\triangle}{BAC}$ rectángulo
$AH \perp a$ en H
c' proy. de c sobre a
b' » » b » a



TESIS) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{b'}$; $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{c'}$

Demost.) Considerando los triángulos rectángulos

$\overset{\triangle}{BAC}$ y $\overset{\triangle}{AHC}$ que tienen $\begin{cases} \widehat{C} = \widehat{C} & \text{común} \\ \widehat{A} = \widehat{H} & \text{por rectos} \end{cases}$

resulta $\overset{\triangle}{BAC} \backsim \overset{\triangle}{AHC}$ por el 2º caso de semejanza de triángulos.

luego $\widehat{B} = H\widehat{A}C$ » def. de triángulos semejantes

y $\dfrac{a \text{ (hip. oten del } \overset{\triangle}{BAC})}{b \text{ (hip. del } \overset{\triangle}{AHC})} = \dfrac{b \text{ (cat. op. } \widehat{B} \text{ en } \overset{\triangle}{BAC})}{b' \text{ (cat. op. } H\widehat{A}C \text{ en } \overset{\triangle}{AHC})}$ por la misma razón

o sea $$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'}$$

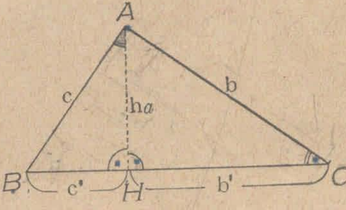
Análogamente de los triángulos BAC y BHA se obtiene

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{c'}$$

II) *La altura es media proporcional entre los segmentos que determina sobre la hipotenusa.*

Hip.) $\overset{\triangle}{BAC}$ rectángulo;

$h_a \perp BC$ en H



Tesis) $\dfrac{b'}{h_a} = \dfrac{h_a}{c'}$

Demost.) Considerando los triángulos rectángulos

$\overset{\triangle}{CHA}$ y $\overset{\triangle}{AHB}$ que tienen $\begin{cases} C\widehat{H}A = A\widehat{H}B & \text{por rectos} \\ \widehat{C} = B\widehat{A}H & \text{por ser ambos iguales a } 90^\circ - \widehat{B} \end{cases}$

de lados ⊥s y de sentido contrario

resulta $\overset{\triangle}{CHA} \sim \overset{\triangle}{AHB}$ por el 2º caso de semejanza de triángulos

luego $\widehat{HAC} = \widehat{B}$ por definición de triángulos semejantes.

y $$\frac{b' \text{ (cat. op. } \widehat{HAC} \text{ en } \overset{\triangle}{CHA})}{h_a \text{ (cat. op. } \widehat{B} \text{ en } \overset{\triangle}{AHB})} = \frac{h_a \text{ (cat. op. } \widehat{C} \text{ en } \overset{\triangle}{CHA})}{c' \text{ (cat. op. } \widehat{BAH} \text{ en } \overset{\triangle}{AHB})}$$

por la misma razón, o sea

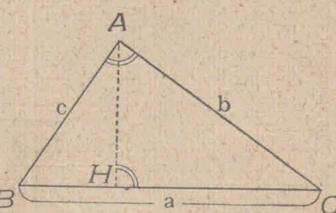
$$\frac{b'}{h_a} = \frac{h_a}{c'}$$

III) *La altura es cuarta proporcional a la hipótenusa y los catetos*

Hip.) $\overset{\triangle}{BAC}$ rectángulo

$h_a \perp a$ en H.

Tesis) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{h_a}$



Demost.) Considerando los triángulos rectángulos

$\overset{\triangle}{BAC}$ y $\overset{\triangle}{AHC}$ que tienen $\begin{cases} \widehat{C} = \widehat{C} & \text{común.} \\ \widehat{A} = \widehat{H} & \text{por rectos.} \end{cases}$

resulta $\overset{\triangle}{BAC} \sim \overset{\triangle}{AHC}$ por 2º caso de semejanza de triángulos

luego $$\frac{a \text{ (hip. del } \widehat{BAC})}{b \text{ (hip. del } \widehat{AHC})} = \frac{c \text{ (cat. op. } \widehat{C} \text{ en } \overset{\triangle}{BAC})}{h_a \text{(cat. op. } \widehat{C} \text{ en } \overset{\triangle}{AHC})}$$ por def. triáng. semej.

o sea $$\frac{a}{b} = \frac{c}{h_a}$$

45. Cuadrado de un segmento. — Definición. — Se llama *cuadrado de un segmento,* al producto de dicho segmento por sí mismo.

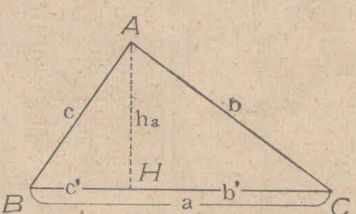
En símbolos: $(seg.\ a)^2 = seg.\ a \times seg.\ a.$

Consecuencia. — De acuerdo con la definición anterior y la de producto de segmentos resulta:

$$(seg.\ a)^2 = seg.\ a \times seg.\ a = sup.\ rect.\ (a,\ a) = sup.\ cuad.\ (a)$$

es decir: *El cuadrado de un segmento es igual a la superficie de un cuadrado que tiene por lado al segmento dado.*

46. Teorema de Pitágoras. — *El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*



Hip.) $\overset{\triangle}{BAC}$ rec. en A.

Tesis) $a^2 = b^2 + c^2$.

Demost.) Trazando la altura h_a correspondiente a la hipotenusa, y llamando b' y c' a las proyecciones de los catetos b y c, respectivamente, sobre la misma, se tiene, por la ~~segunda~~ 1ra parte del teorema anterior,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'} \text{ de donde } a\,.\,b' = b^2 \text{ por una propiedad ant. (nº 12)}$$

$$\text{y} \quad \frac{a}{c} = \frac{c}{c'} \quad » \quad » \quad a\,.\,c' = c^2 \quad » \quad » \quad » \quad » \quad \text{(nº 12)}$$

Sumando m. a m. queda $ab' + ac' = b^2 + c^2$ por prop. unif. de la suma

Sacando a factor común $a\,(b' + c') = b^2 + c^2$

pero $b' + c' = a$ luego $a \times a = b^2 + c^2$

o bien $a^2 = b^2 + c^2$ por def. de cuad. de un seg.

√47. **Raíz cuadrada.**— Definición — Se llama *raíz cuadrada de una cantidad,* a otra cantidad que elevada al cuadrado sea igual a la dada.

En símbolos: $\sqrt{A} = X \quad \text{si} \quad (X)^2 = A$

Ejemplos: $\sqrt{9} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^2 = 9$

$$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \quad \text{pues} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\sqrt{\textit{sup. cuad.}\ (a)} = \textit{seg.}\ a \quad \text{pues} \quad (\textit{seg.}\ a)^2 = \textit{seg.}\ a \times \textit{seg.}\ a = \textit{sup. cuad.}\ (a)$$

De la definición anterior se deduce el siguiente corolario:

Corolario. — *Una cantidad no altera, si se la eleva al cuadrado y al resultado se le extrae la raíz cuadrada, o si se le extrae la raíz cuadrada y se eleva al cuadrado.*

En símbolos: $\sqrt{A^2} = A \qquad (\sqrt{A})^2 = A.$

En la misma forma que se hizo en Aritmética al estudiar la radicación de números naturales (*Matematica* curso I) se puede demostrar que la extracción de raíces cuadradas de cantidades, goza de las siguientes propiedades:

Propiedad uniforme. — *Si se extraen las raíces cuadradas de ambos miembros de una igualdad entre cantidades, se obtiene otra igualdad.*

En símbolos: Si $A = B$ es $\sqrt{A} = \sqrt{B}$

Propiedad distributiva. — *La radicación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división.*

En símbolos: $\sqrt{A\,.\,B} = \sqrt{A}\,.\,\sqrt{B}\ ; \qquad \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

48. Corolarios del Teorema de Pitágoras.— Corolario I.— *En todo triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto* (figura anterior).

En símbolos: En $\overset{\triangle}{BAC}$ rectángulo, es $b^2 = a^2 - c^2$ y $c^2 = a^2 - b^2$

En efecto:

Siendo $a^2 = b^2 + c^2$ por el Teor. de Pitágoras

resulta $a^2 - c^2 = b^2$ al pasar c^2 al primer miembro

y $b^2 = a^2 - c^2$ por carác. recíproco de la igualdad.

Por las mismas razones se tiene:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Corolario II. — *La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos* (figura anterior).

En símbolos: En $\overset{\triangle}{BAC}$ rectángulo es $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

En efecto:

Siendo $a^2 = b^2 + c^2$ por el Teor. de Pitágoras

es $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$ » prop. unif. radicación

o sea $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ simplificando $\sqrt{\ }$ con cuadrado.

Corolario III. — *Un cateto de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.*

En símbolos: En $\overset{\triangle}{BAC}$ rectángulo es $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

En efecto:

Siendo $b^2 = a^2 - c^2$ y $c^2 = a^2 - b^2$ por el cor. anterior

es $\sqrt{b^2} = \sqrt{a^2 - c^2}$ y $\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$ » prop. unif. radicac.

luego $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ » cor. def. raíz cuad.

49. **Teorema.**— *El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo de un triángulo cualquiera, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre éste.*

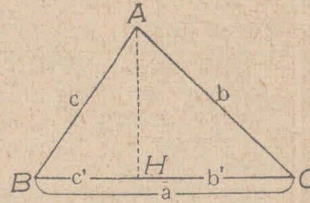
HIP.) $\overset{\triangle}{ABC}$

$\widehat{B}$ agudo.

$AH \perp BC$

b' proyec. de b sobre a

c' » » c » a



TESIS) $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac'$

DEMOST.) En el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{AHC}$ se tiene:

$b^2 = b'^2 + \overline{AH}^2$ [1] por teorema de Pitág.

pero $b' = a - c'$

luego $b'^2 = (a - c')^2$ y aplicando la definición de cuadrado

$= (a - c')(a - c') = a^2 + c'^2 - 2\,ac'$

Además, en el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{AHB}$ se tiene

$\overline{AH}^2 = c^2 - c'^2$ [3] por cor. Teor. Pitág.

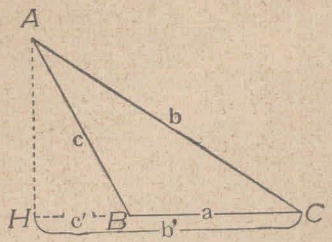
luego reemplazando en [1], $\overline{AH}^2$ y b'^2 por sus iguales de [2] y [3]

resulta $b^2 = a^2 + c'^2 - 2\,ac' + c^2 - c'^2$ y simplificando queda

$b^2 = a^2 - 2\,ac' + c^2$

o bien $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac'$

50. **Teorema.**— *En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre éste.*



Hip. $\overset{\triangle}{ABC}$

$\widehat{B}$ obtuso

$AH \perp BC$

c' proyección de c sobre a.

Tesis) $b^2 = a^2 + c^2 + 2\,ac'$.

Demost.) En el triángulo rectángulo AHC se tiene:

$b^2 = b'^2 + \overline{AH}^2$ [1] por el Teorema de Pitágoras

pero $b' = a + c'$

luego $b'^2 = (a + c')^2 = (a + c')\,(a + c')$ por defin. de cuadrado

$= a^2 + 2\,ac' + c'^2$ [2] por cuadrado de suma

Además, en el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{AHB}$ se tiene:

$\overline{AH}^2 = c^2 - c'^2$ [3] por un cor. del Teorema de Pitágoras

luego, reemplazando en [1] $\overline{AH}^2$ y b'^2 por sus iguales de [2] y [3]

resulta $b^2 = a^2 + 2\,ac' + c'^2 + c^2 - c'^2$

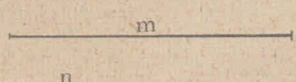
simplificando queda:

$b^2 = a^2 + 2\,ac' + c^2$

o sea $b^2 = a^2 + c^2 + 2\,ac'$

51. **Construcción de la media proporcional.** — Problema. — *Construir un segmento que sea medio proporcional entre dos segmentos dados.*

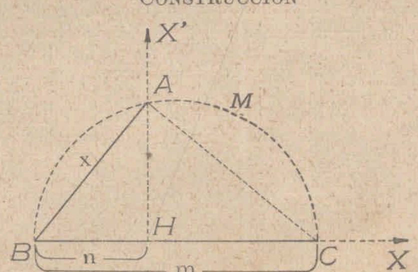
Datos



Incógnitas

seg. x tal que $\frac{m}{x} = \frac{x}{n}$

Construcción



Solución. — *Primer procedimiento*: Sobre una semirrecta cualquiera $\overrightarrow{BX}$ se construyen, a partir de B, los segmentos $\overline{BC} = m$ y $\overline{BH} = n$ (si $m > n$). Se traza $\overrightarrow{HX'} \perp BC$ en H, y con el segmento $\overline{BC}$ como diámetro la semicircunferencia $\widehat{BMC}$ en el semiplano respecto de BC que contiene a $\overrightarrow{HX'}$. Llamando A al punto en que la semicircunferencia corta a la perpendicular $\overrightarrow{HX'}$, decimos que el segmento $\overline{BA} = x$ es el medio proporcional buscado.

En efecto: Uniendo A con C se obtiene el ángulo $\widehat{BAC} = 1\,R$ por ser inscripto en una semicircunferencia.

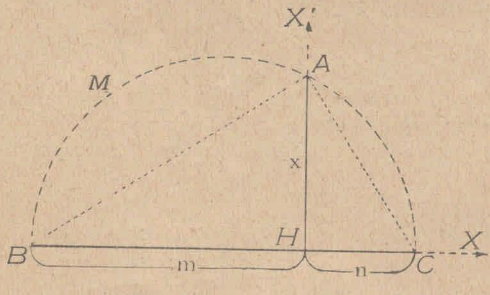
Luego en el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{BAC}$ se tiene

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BH}}$$ por la 1.ª parte de un teor. ant. (n.º 44)

o sea $$\frac{m}{x} = \frac{x}{n}$$

Segundo procedimiento. — Sobre una semirecta cualquiera $\overrightarrow{BX}$ se construyen los segmentos consecutivos $\overline{BH} = m$ y $\overline{HC} = n$.

Se traza la $\overrightarrow{HX'} \perp BC$ en H, y con el segmento $\overline{BC}$ como diámetro la semicircunferencia $\widehat{BMC}$, en el semiplano respecto de BC que contiene a la perpendicular $\overrightarrow{HX'}$. Llamando A al punto en que la semicircunferencia corta a la perpendicular $\overrightarrow{HX'}$, decimos que el segmento $\overline{AH} = x$ es el medio proporcional buscado.



En efecto: Uniendo A con B y C se obtiene el $\widehat{BAC} = 1\,R$ por ser inscripto en una semicircunferencia.

Luego en el triángulo rectángulo BAC se tiene:

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HC}}$$ por un teorema anterior nº 44 (parte II)

o sea $$\frac{m}{x} = \frac{x}{n}$$

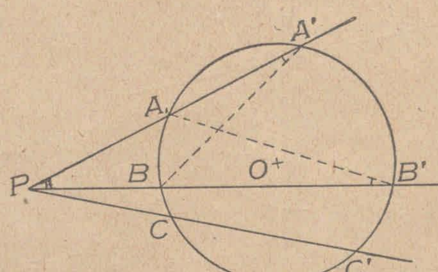
CAPITULO VI

RELACIONES METRICAS ENTRE SEGMENTOS DE SECANTES Y TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA

PROGRAMA. — *Si por un punto del plano de una circunferencia se trazan secantes a la misma, el producto de los segmentos determinados por dicho punto y los de intersección... (Distintos casos). Definición de potencia de un punto con respecto a una circunferencia. Convención referente al signo de la potencia. Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante a la misma, el segmento determinado por el punto y el de tangencia es medio proporcional... Corolario. Valor de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia en función de su distancia al centro y del radio. División de un segmento en media y extrema razón.*

56. **Teorema.**— *Si por un punto del plano de una circunferencia se trazan secantes a la misma, el producto de los segmentos determinados por dicho punto y los de intersección de cada secante con la circunferencia es constante.*

HIP.) $C_{(O)}$
P pertenece al plano de $C_{(O)}$
PA, PB y PC secantes
PA corta a $C_{(O)}$ en A y A′;
PB corta a $C_{(O)}$ en B y B′;
PC corta a $C_{(O)}$ en C y C′.



TESIS) $\overline{PA}\times\overline{PA'}=\overline{PB}\times\overline{PB'}$
$=\overline{PC}\times\overline{PC'}=\ldots=$ constante

DEMOST.)— PRIMER CASO: *El punto P es exterior a $C_{(O)}$.*

Uniendo A con B′ y B con A′, resultan los triángulos:

$\overset{\triangle}{PAB'}$ y $\overset{\triangle}{PBA'}$ que tienen $\begin{cases} \widehat{P} = \widehat{P} & \text{común} \\ \widehat{B'} = \widehat{A'} & \text{por inscriptos en } \widehat{AA'B} \end{cases}$

luego $\overset{\triangle}{PAB'} \sim \overset{\triangle}{PBA'}$ por el 2º caso de semejanza de triáng

por lo tanto $P\widehat{A}B' = P\widehat{B}A'$ y

$$\frac{\overline{PA}\left(\textit{lado op. a } \widehat{B'} \textit{ en } \overset{\triangle}{PAB'}\right)}{\overline{PB}\left(\textit{lado op. a } \widehat{A'} \textit{ en } \overset{\triangle}{PBA'}\right)} = \frac{\overline{PB'}\left(\textit{lado op. } P\widehat{A}B' \textit{ en } \overset{\triangle}{PAB'}\right)}{\overline{PA'}\left(\textit{lado op. } P\widehat{B}A' \textit{ en } \overset{\triangle}{PBA'}\right)}$$

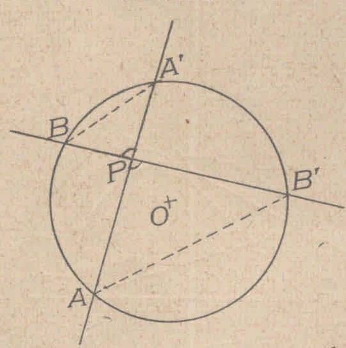
o sea $$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PA'}}$$

luego $\overline{PA} \times \overline{PA'} = \overline{PB} \times \overline{PB'}$ [1] por teor. anter. (nº 15)

Como en la misma forma se puede demostrar que

$$\overline{PB} \times \overline{PB'} = \overline{PC} \times \overline{PC'} \quad [2]$$

resulta de [1] y [2] $\overline{PA} \times \overline{PA'} = \overline{PB} \times \overline{PB'} = \overline{PC} \times \overline{PC'}$



No

SEGUNDO CASO:

El punto P *es interior a* C(O).

Uniendo A con B′ y A′ con B resultan los triángulos:

$\overset{\triangle}{PAB}$ y $\overset{\triangle}{PBA'}$ que tienen $\begin{cases} A\widehat{P}B' = A'\widehat{P}B & \text{por opuestos por vértice} \\ \widehat{A} = \widehat{B} & \text{por inscriptos en } \widehat{A'BB'} \end{cases}$

luego $\overset{\triangle}{PAB'} \sim \overset{\triangle}{PBA'}$ por el 2º caso de semejanza de triáng.

y $\widehat{B'} = \widehat{A'}$ por def. triángulos semejantes

y $$\frac{\overline{PA}\left(\textit{lado op. } \widehat{B'} \textit{ en } \overset{\triangle}{PAB'}\right)}{\overline{PB}\left(\textit{lado op. } \widehat{A'} \textit{ en } \overset{\triangle}{PBA'}\right)} = \frac{\overline{PB'}\left(\textit{lado op. } \widehat{A} \textit{ en } \overset{\triangle}{PAB'}\right)}{\overline{PA'}\left(\textit{lado op. } \widehat{B} \textit{ en } \overset{\triangle}{PBA'}\right)}$$

por la misma razón, o sea $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PA'}}$

uego [1] $\overline{PA} \times \overline{PA'} = \overline{PB} \times \overline{PB'}$ por un teor. ant. (nº 15)

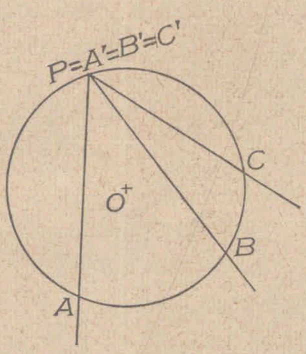
Como en la misma forma se puede demostrar que

$$\overline{PB} \times \overline{PB'} = \overline{PC} \times \overline{PC'} \quad [2]$$

resulta de [1] y [2]: $\overline{PA} \times \overline{PA'} = \overline{PB} \times \overline{PB'} = \overline{PC} \times \overline{PC'}$

TERCER CASO: *El punto P pertenece a $C_{(O)}$.*

En tal caso las secantes PA, PB y PC tienen los puntos A′, B′ y C′ coincidentes con el P y por lo tanto resulta:



$$\overline{PA'} = \overline{PB'} = \overline{PC'} = 0$$

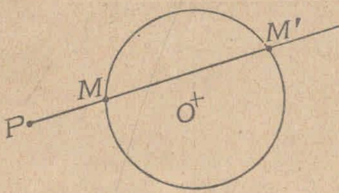
Luego, como $\overline{PA} . \overline{PA'} = \overline{PA} \times 0 = 0$

$\overline{PB} . \overline{PB'} = \overline{PB} \times 0 = 0$

y $\overline{PC} . \overline{PC'} = \overline{PC} \times 0 = 0$

resulta $\overline{PA} \times \overline{PA'} = \overline{PB} \times \overline{PB'} = \overline{PC} \times \overline{PC'}$

57. Potencia de un punto con respecto a una circunferencia. — DEFINICIÓN. — Dada una circunferencia y un punto de su plano, se llama *potencia del punto con respecto a la circunferencia* al producto de los segmentos de secantes trazadas por dicho punto, y comprendidos entre el mismo y los puntos de intersección de cada secante con la circunferencia.



NOTACIÓN. — *Pot.* $P_{(O)}$ significa potencia del punto P con respecto a la circunferencia de centro O.

EJEMPLO. —

$$Pot.\ P_{(O)} = \overline{PM} \times \overline{PM'}$$

58. Convención referente al signo de la potencia. — Teniendo en cuenta que cuando un punto es exterior a una circunferencia, los segmentos determinados por dicho punto con los de intersección de cada secante con la circunferencia, tienen el *mismo sentido* (nº 24), y que en cambio dichos segmentos tienen *sentidos contrarios* cuando el punto es interior a la circunferencia, se ha convenido, por analogía con la regla de los signos del producto de dos números enteros, en atribuir signo al producto de dichos segmentos de acuerdo con la siguiente:

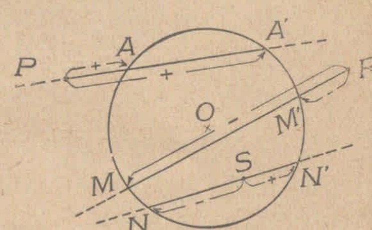
CONVENCIÓN. — *Se dice que la potencia de un punto con respecto a una circunferencia es positiva o negativa, según que los segmentos determinados por dicho punto con los de intersección de cada una de las secantes, trazadas por dicho punto, con la circunferencia tengan el mismo sentido o sentido contrario respectivamente.*

EJEMPLO. —

$$Pot\ P_{(O)} = +(\overline{PA} \times \overline{PA'})$$

$$Pot\ R_{(O)} = +(\overline{RM} \times \overline{RM'})$$

$$Pot\ S_{(O)} = -(\overline{SN} \times \overline{SN'})$$



Observación. — *La potencia de un punto con respecto a una circunferencia es positiva o negativa según que el punto sea exterior o interior a dicha circunferencia, respectivamente.*

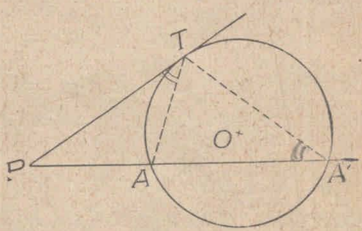
59. **Teorema.** — *Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante a la misma, el segmento determinado por el punto y el de tangencia es medio proporcional entre los segmentos determinados por el punto y cada uno de los de intersección de la secante con la circunferencia.*

Hip.) P exterior a $C_{(O)}$

PT tangente

sec. PA corta a $C_{(O)}$ en A y A'

Tesis) $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \dfrac{\overline{PT}}{\overline{PA'}}$



Demost.) Uniendo T con A y A' resultan:

$\overset{\triangle}{PAT}$ y $\overset{\triangle}{PTA'}$, que tienen $\begin{cases} \widehat{P} = \widehat{P} & \text{común} \\ P\widehat{T}A = P\widehat{A'}T & \text{por seminscripto e inscripto en } \overset{\frown}{AA'T}\text{, respectivamente} \end{cases}$

luego $\overset{\triangle}{PAT} \sim \overset{\triangle}{PTA'}$ por 2º caso semejanza de triángul.

por lo tanto $P\widehat{A}T = P\widehat{T}A'$ por def. de triángulos semejantes

y por la misma razón

$$\frac{\overline{PA}\ (\textit{lado op. } P\widehat{T}A \textit{ en } \overset{\triangle}{PAT})}{\overline{PT}\ (\textit{lado op. } P\widehat{A'}T \textit{ en } \overset{\triangle}{PTA'})} = \frac{\overline{PT}\ (\textit{lado op. } P\widehat{A}T \textit{ en } \overset{\triangle}{PAT})}{\overline{PA'}\ (\textit{lado op. } P\widehat{T}A' \textit{ en } \overset{\triangle}{PTA'})}$$

o sea $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \dfrac{\overline{PT}}{\overline{PA'}}$

60. Corolario. — *La potencia de un punto exterior a una circunferencia es igual al cuadrado del segmento determinado por él punto y el de contacto de la tangente a la circunferencia trazada por aquél.*

En símbolos: $Pot\ \mathrm{P}_{(\mathrm{O})} = \overline{\mathrm{PT}}^2$ (figura anterior).

En efecto: Siendo $\dfrac{\overline{\mathrm{PA}}}{\overline{\mathrm{PT}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{PT}}}{\overline{\mathrm{PA'}}}$ por el teorema anterior

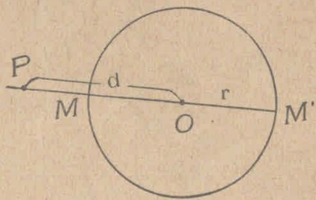
es $\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PA'}} = \overline{\mathrm{PT}} \times \overline{\mathrm{PT}}$ por un teorema anter. (nº 47)

o sea $\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PA'}} = \overline{\mathrm{PT}}^2$ por def. cuadrado de un segm.

Pero como $\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PA'}} = Pot.\ \mathrm{P}_{(\mathrm{O})}$ por definición de potencia

resulta $Pot.\ de\ \mathrm{P}_{(\mathrm{O})} = \overline{\mathrm{PT}}^2$ por consecuencia del carácter transitivo de la igualdad.

61. Valor de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia en función de su distancia al centro y del radio. — Teorema. — *La potencia de un punto con respecto a una circunferencia es igual a la diferencia entre el cuadrado de su distancia al centro y el cuadrado del radio de dicha circunferencia.*



Hip.) P punto del plano de $C_{(\mathrm{O}\ y\ r)}$

$\overline{\mathrm{PO}} = d$

Tesis) $Pot.\ de\ \mathrm{P}_{(\mathrm{O})} = d^2 - r^2$

Demost.) Primer caso: *P es exterior a* $C_{(\mathrm{O}\ y\ r)}$.

Trazando por P la $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$, ésta corta a la circunferencia en dos puntos M y M' (*Mat.* I, nº 63) siendo M interior al $\overline{\mathrm{PO}}$ y M' exterior al mismo segmento.

Por otra parte $Pot.\ \mathrm{P}_{(\mathrm{O})} = \overline{\mathrm{PM}} \times \overline{\mathrm{PM'}}$ por definición de pot.

y como $\overline{\mathrm{PM}} = \overline{\mathrm{PO}} - \overline{\mathrm{OM}}$ por def. difer. de seg.

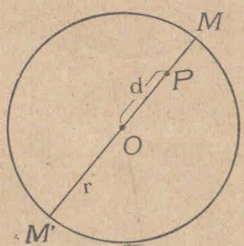
y $\overline{\mathrm{PM'}} = \overline{\mathrm{PO}} + \overline{\mathrm{OM'}}$ por def. de suma de seg.

se tiene $Pot.\ \mathrm{P}_{(\mathrm{O})} = (\overline{\mathrm{PO}} - \overline{\mathrm{OM}}) \times (\overline{\mathrm{PO}} + \overline{\mathrm{OM'}})$ [1]

Pero como $\overline{PO} = d$ y $\overline{OM} = \overline{OM'} = r$ sustituyendo en [1] resulta $Pot.\ de\ P_{(O)} = (d - r)(d + r)$

y como $(d - r)(d + r) = d^2 - r^2$ por producto de una suma por una diferencia

se tiene $Pot.\ P_{(O)} = d^2 - r^2$ por carácter transitivo de la igualdad.



Segundo caso: P *es interior a* $C_{(O\ y\ r)}$.

Trazando la recta que pasa por P y O ella corta a la circunferencia en dos puntos M y M' (*Mat.* I, nº 63), siendo exteriores a $\overline{PO}$.

Por otra parte $Pot.\ P_{(O)} = -(\overline{PM} \times \overline{PM'})$ [1] por def. de poten.

y como $\overline{PM} = \overline{OM} - \overline{OP}$ por def. de difer. de seg.

y $\overline{PM'} = \overline{M'O} + \overline{OP}$ por def. de suma de seg.

se tiene $\overline{PM} \times \overline{PM'} = (\overline{OM} - \overline{OP}) \times (\overline{M'O} + \overline{OP})$

Pero como $\overline{PO} = d$ y $\overline{OM} = \overline{OM'} = r$ sustituyen. en [1]

resulta $Pot.\ P_{(O)} = -(r - d)(r + d)$

y como $(r - d)(r + d) = r^2 - d^2$ por producto de una suma por una diferencia

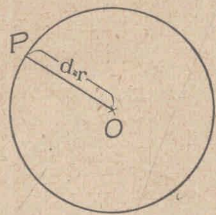
se tiene $Pot.\ P_{(O)} = -(r^2 - d^2)$

Observación. — Como con los productos de segmentos se puede operar en la misma forma que con los números enteros, resulta que

$$d^2 - r^2 = -(r^2 - d^2) \quad \text{si} \quad d^2 < r^2$$

y por lo tanto: $Pot.\ P_{(O)} = d^2 - r^2$

Lo que nos dice que la expresión que da el valor de la potencia de un punto interior a una circunferencia es la misma que la que da dicho valor cuando el punto es exterior.



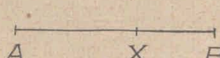
Tercer caso: *P pertenece a* $C_{(O\ y\ r)}$.

En tal caso es [1] *Pot. de* $P_{(O)} = 0$ por un teorema ant. (nº 56), y como $d = r$ por pertenecer P a $C_{(O\ y\ r)}$ es $d^2 = r^2$ y por lo tanto $d^2 - r^2 = 0$ [2]

Luego de **[1] y [2]** resulta *Pot.* $P_{(O)} = \boldsymbol{d^2 - r^2}$ por consecuencia del carácter transitivo.

62. **División de un segmento en media y extrema razón.** — Definición. — Se dice que un punto divide a un segmento en *media y extrema razón,* cuando uno de los segmentos determinados por dicho punto con los extremos del dado, es medio proporcional entre el segmento total y el restante.

Ejemplo. — El punto X divide al $\overline{AB}$ en media y extrema razón si $\overline{AX}$ es tal que



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}$$

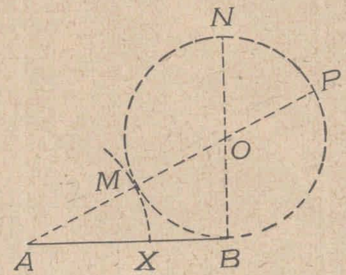
Observación. — Siendo X interior a $\overline{AB}$ es $\overline{AB} > \overline{AX}$ por definición de segmento mayor que otro,

Luego $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AX}} > 1$ y como $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \dfrac{\overline{AX}}{\overline{XB}}$ resulta $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{XB}} > 1$

y por lo tanto $\overline{AX} > \overline{XB}$ lo que nos dice que:

Al dividir un segmento en media y extrema razón, el segmento que es medio proporcional entre el dado y el otro, es mayor que este otro segmento.

63. **Problema.** — *Dividir un segmento en media y extrema razón.*



DATOS	INCÓGNITAS
Segmento $\overline{AB}$	Punto X de $\overline{AB}$ tal que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \dfrac{\overline{AX}}{\overline{XB}}$

SOLUCIÓN. — En el extremo B del segmento $\overline{AB}$ dado se traza la $\overrightarrow{BN} \perp AB$, y se construye sobre ella el $\overline{BO} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$. Se traza la circunferencia $C\left(O \text{ y } \dfrac{\overline{AB}}{2}\right)$, y la semirrecta $\overrightarrow{AO}$ la cual corta a la misma en los puntos M y P. Con centro A y radio $\overline{AM}$ se traza la $C_{(A \text{ y } \overline{AM})}$ que corta al $\overline{AB}$ en el punto X el cual divide al segmento en media y extrema razón.

En efecto: Siendo $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AM}}$ por un teor. anterior (nº 59)

resulta [1] $\dfrac{\overline{AP} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB} - \overline{AM}}{\overline{AM}}$ por prop. proporc. (nº 12 ~~V~~ VI)

Pero $\overline{AP} - \overline{AB} = \overline{AP} - \overline{MP} = \overline{AM} = \overline{AX}$ por construcción

y $\overline{AB} - \overline{AM} = \overline{AB} - \overline{AX} = \overline{XB}$ por igual razón.

Luego sustituyendo en [1] resulta:

$\dfrac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{XB}}{\overline{AX}}$ y también $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \dfrac{\overline{AX}}{\overline{XB}}$ o sea el punto X divide a $\overline{AB}$ en media y extrema razón.

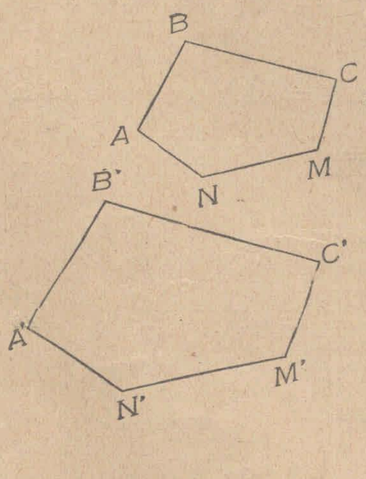
CAPITULO VII

POLIGONOS SEMEJANTES

PROGRAMA. — *Definición. Caracteres de la semejanza de polígonos. Forma. Convención referente a la ordenación de los vértices consecutivos de un polígono. Teorema fundamental. Si por dos vértices homólogos de dos polígonos semejantes se trazan en cada uno de éstos todas las diagonales posibles, etc. Razón de los perímetros de dos polígonos semejantes. Problemas relativos a la construcción de polígonos semejantes.*

65. **Definición de polígonos semejantes.** — Se dice que *un polígono es semejante a otro,* cuando los ángulos del primero son respectivamente **iguales a los ángulos del segundo y los lados del primero proporcionales a sus homólogos del segundo.**

EJEMPLO:



$$ABCMN \sim A'B'C'M'N' \quad \text{si} \quad \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \widehat{M} = \widehat{M'} \\ \widehat{N} = \widehat{N'} \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{C'M'}} = \\ \qquad = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{N'A'}} \end{cases}$$

66. Caracteres de la semejanza de polígonos. — Siendo la definición de polígono semejante a otro la misma que la de triángulo semejante a otro, los caracteres de la semejanza de triángulos seguirán siendo válidos para la semejanza de los primeros, pues sus demostraciones podrían aplicarse sin modificación alguna. Es decir, tendríamos:

Carácter idéntico. — *Todo polígono es semejante a sí mismo.*

En símbolos: $ABC \ldots M \sim ABC \ldots M$

Carácter recíproco. — *Si un polígono es semejante a otro, éste lo es al primero.*

Si $ABC \ldots M \sim A'B'C' \ldots M'$ es $A'B'C' \ldots M' \sim ABC \ldots M$.

Carácter transitivo. — *Si un polígono es semejante a otro y éste a su vez es semejante a un tercero, el primero es semejante al tercero.*

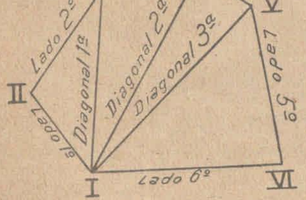
Si $ABC \ldots M \sim A'B'C' \ldots M'$ y $A'B'C' \ldots M' \sim A''B''C'' \ldots M''$

es $ABC \ldots M \sim A''B''C'' \ldots M''$

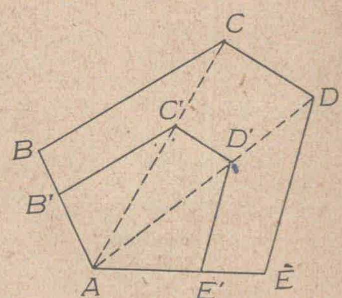
66. Forma. — Como la semejanza de polígonos es una relación que cumple los caracteres idéntico, recíproco y transitivo, resulta que los polígonos semejantes tienen *algo igual* que es lo que llamaremos *forma de los polígonos* y que definiremos así:

Definición. — Se llama *forma de un polígono* a lo que tiene igual dicho polígono con todos los que le son semejantes.

67. Convención referente a la ordenación de los vértices consecutivos de un polígono. — Convención. — Ordenados los vértices consecutivos de un polígono a partir de uno de ellos, convendremos en llamar *primer lado* al que une los vértices I y II, *segundo lado* al que une los vértices II y III, etc.; *primera diagonal* a la que une los vértices I y III, *segunda diagonal* a la que une los vértices I y IV, etc.



68. Teorema fundamental de la semejanza de polígonos. — *Si se ordenan los vértices consecutivos de un polígono a partir de uno de ellos y por un punto del primer lado se traza la paralela al segundo hasta cortar a la primera diagonal, por este punto la paralela al tercer lado hasta cortar a la segunda diagonal y así sucesivamente hasta cortar al último lado, el polígono que así se forma es semejante al dado.*



HIP.) ABCDE

B' punto de $\overline{AB}$

$\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$, C' » » $\overline{AC}$

$\overline{C'D'} \parallel \overline{CD}$, D' » » $\overline{AD}$

$\overline{D'E'} \parallel \overline{DE}$, E' » » $\overline{AE}$

TESIS) $A'B'C'D'E' \sim ABCDE$

DEMOST.) *Igualdad de los ángulos.*

Siendo $\widehat{A} = \widehat{A}$ por carác. identico

$\widehat{B'} = \widehat{B}$ por correspondientes entre $\parallel$

Como $B'\widehat{C'}A = B\widehat{C}A$ por correspondiente entre $\parallel$

y $A\widehat{C'}D' = A\widehat{C}D$ por la misma razón

es $B'\widehat{C'}A + A\widehat{C'}D' = B\widehat{C}A + A\widehat{C}D$ o sea $\widehat{C'} = \widehat{C}$

Como $C'\widehat{D'}A = C\widehat{D}A$ por correspondiente entre $\parallel$

y $A\widehat{D'}E' = A\widehat{D}E$ por la misma razón

es $C'\widehat{D'}A + A\widehat{D'}E' = C\widehat{D}A + A\widehat{D}E$ o sea $\widehat{D'} = \widehat{D}$

y $\widehat{E'} = \widehat{E}$ por correspondientes entre paralelas.

Proporcionalidad de los lados.

Siendo en el $\overset{\triangle}{ABC}$, $B'C' \parallel BC$; en el $\overset{\triangle}{ACD}$, $\overline{C'D'} \parallel \overline{CD}$ y en el $\overset{\triangle}{ADE}$, $D'E' \parallel DE$ por hipótesis, resultan, por el teorema fundamental (nº 33) de la semejanza de triángulos:

$$\overset{\triangle}{AB'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC} \text{ luego } \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \quad [1] \quad \text{por definición triáng. semej.}$$

$$\overset{\triangle}{AC'D'} \sim \overset{\triangle}{ACD} \text{ luego } \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD}} \quad [2] \quad \text{por definición triáng. semej.}$$

$$\text{y } \overset{\triangle}{AD'E'} \sim \overset{\triangle}{ADE} \text{ luego } \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AE}} \quad [3] \quad \text{por definición triáng. semej.}$$

De [1], [2] y [3] resulta, por el carácter transitivo de la igualdad que:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AE}}$$

$$\text{y en particular } \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AE}}$$

Luego por tener sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales, resulta:

$$AB'C'D'E' \sim ABCDE \quad \text{por def. políg. semej.}$$

69. **Teorema.**— *Si por dos vértices homólogos de dos polígonos semejantes se trazan en cada uno de éstos todas las diagonales posibles, ambos polígonos quedan descompuestos en igual número de triángulos ordenadamente semejantes.*

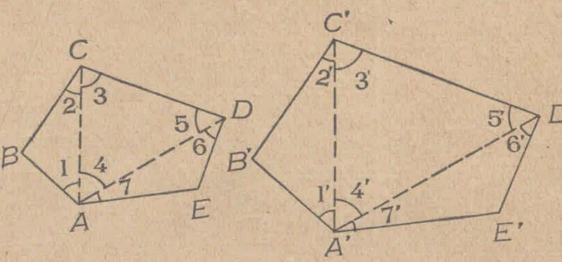
HIP.)

$ABCDE \sim A'B'C'D'E'$

A' homólogo de A,

$\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ diag. hom.

a $\overline{A'C'}$ y $\overline{A'D'}$ resp.



TESIS) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$; $\overset{\triangle}{ACD} \sim \overset{\triangle}{A'C'D'}$; $\overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{A'D'E'}$

DEMOST.) Llamando 1 y 1′, 4 y 4′, 7 y 7′ a los ángulos en que quedan divididos $\widehat{A}$ y $\widehat{A'}$ respectivamente por las diagonales trazadas; 2 y 2′, 3 y 3′ a los ángulos en que quedan divididos $\widehat{C}$ y $\widehat{C'}$ respectivamente por las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$; 5 y 5′, 6 y 6′ a los ángulos en que quedan divididos $\widehat{D}$ y $\widehat{D'}$ respectivamente por las diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{A'D'}$, se tiene:

El $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ por tener $\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array} \right\}$ por definición de poligon. semejantes

luego $\widehat{1} = \widehat{1'}$ [1], $\widehat{2} = \widehat{2'}$ [2] y $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ [3] por definición de triángulos semejantes.

Siendo $\widehat{C} = \widehat{C'}$ por def. políg. semej. y $\widehat{2} = \widehat{2'}$ por [2]

es $\widehat{C} - \widehat{2} = \widehat{C'} - \widehat{2'}$ o sea $\widehat{3} = \widehat{3'}$ [4.]

$$\text{El } \overset{\triangle}{\mathrm{ACD}} \backsim \overset{\triangle}{\mathrm{A'C'D'}} \text{ por tener} \begin{cases} \widehat{3} = \widehat{3'} \quad \text{por [4]} \\[2ex] \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{A'C'}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{C'D'}}} \quad \text{pues} \begin{cases} \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{B'C'}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{C'D'}}} & \text{por def. de políg. semejantes} \\[2ex] \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{B'C'}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{A'C'}}} & \text{por [3]} \end{cases} \end{cases}$$

luego $\widehat{4} = \widehat{4'}$ [5]; $\widehat{5} = \widehat{5'}$ [6] y $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{A'C'}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{C'D'}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{D'A'}}}$ [7] por definición de triángulos semejantes.

Siendo $\widehat{\mathrm{D}} = \widehat{\mathrm{D'}}$ por def. políg. semej. y $\widehat{5} = \widehat{5'}$ por [6]

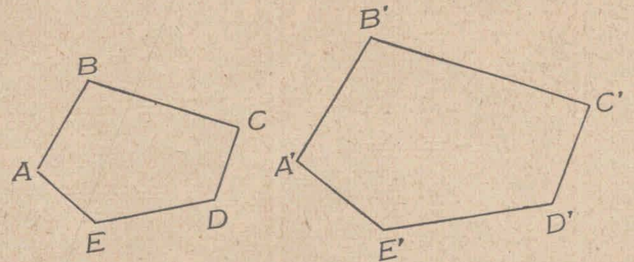
es $\widehat{\mathrm{D}} - \widehat{5} = \widehat{\mathrm{D'}} - \widehat{5'}$ o sea $\widehat{6} = \widehat{6'}$ [8]

$$\text{El } \overset{\triangle}{\mathrm{ADE}} \backsim \overset{\triangle}{\mathrm{A'D'E'}} \text{ por tener} \begin{cases} \widehat{6} = \widehat{6'} \quad \text{por [8]} \\[2ex] \dfrac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{D'A'}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\overline{\mathrm{D'E'}}} \quad \text{pues} \begin{cases} \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{C'D'}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\overline{\mathrm{D'E'}}} & \text{por definic. pol. semej.} \\[2ex] \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{C'D'}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{D'A'}}} & \text{por [7]} \end{cases} \end{cases}$$

70. **Teorema.** — *La razón de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de dos lados homólogos cualesquiera.*

Hip.) $\mathrm{ABCDE} \backsim \mathrm{A'B'C'D'E'}$

Tesis) $\dfrac{\textit{Perímetro de } \mathrm{ABCDE}}{\textit{Perímetro de } \mathrm{A'B'C'D'E'}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{A'B'}}}$



DEMOST.) Siendo $ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$ por hipótesis

es $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}}$ por def. políg. semej.

luego $\frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}}{\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'} + \overline{E'A'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ por prop. proporciones (n° 14, *c*)

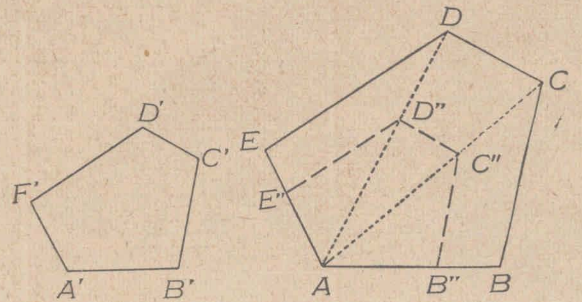
pero $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} =$ *Perímetro de* ABCDE

y $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'} + \overline{E'A'} =$ *Perímetro de* A'B'C'D'E'

luego $\frac{\textit{Perímetro de } ABCDE}{\textit{Perímetro de } A'B'C'D'E'} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

71. Problema. — *Dado un polígono y un segmento correspondiente a uno de sus lados, construir sobre este segmento como lado un polígono semejante al primero.*

DATOS	INCÓGNITAS
Políg. ABCDE,	
$\overline{A'B'}$ homólogo de $\overline{AB}$.	$A'B'C'D'E' \backsim ABCDE$



SOLUCIÓN. — Sobre $\overrightarrow{AB}$ se construye el segmento $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$, y se trazan por el vértice A todas las diagonales posibles en el polígono dado.

Trazando por B″ la paralela al lado $\overline{BC}$ hasta cortar a la primera diagonal $\overline{AC}$ en C″, y por C″ la paralela al tercer lado $\overline{CD}$ hasta cortar a la segunda diagonal $\overline{AD}$ en D″ y por D″ la paralela al cuarto lado hasta cortar al último en el punto E″ resulta:

$$AB''C''D''E'' \backsim ABCDE \quad \text{por el teor. fund. (nº 68)}$$

Construyendo sobre A′B′ el polígono igual AB″C″D″E″ resulta el polígono A′B′C′D′E′, que es el buscado.

CAPITULO VIII

POLIGONOS REGULARES

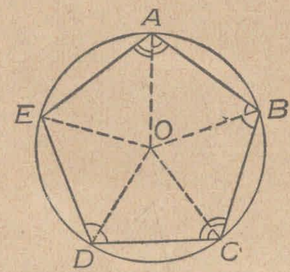
PROGRAMA. — *Definición. Si una circunferencia se divide en tres o más arcos iguales y se trazan las cuerdas determinadas por los pares de puntos consecutivos... Si una circunferencia se divide en tres o más arcos iguales y por los puntos de división se trazan tangentes a ella... Todo polígono regular es inscriptible a una circunferencia. Todo polígono regular es circunscriptible a una circunferencia. Inscripción del triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular y de cualquier polígono regular empleando el transportador. Inscripción del cuadrado con regla y compás. Cálculo del lado y de la apotema en función del radio. Inscripción del octógono. Inscripción del exágono regular con transportador. Cálculo del lado y de la apotema en función del radio. Inscripción con regla y compás. Inscripción del dodecágono. Inscripción del triángulo equilátero con regla y compás. Cálculo del valor del lado y de la apotema en función del radio. Inscripción del decágono regular con transportador. Demostración de que el lado es igual a la parte mayor del radio dividido en media y extrema razón. Inscripción con regla y compás. Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.*

73. **Definición** — Se dice que un *polígono es regular* cuando tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

EJEMPLOS. — El triángulo equilátero y el cuadrado son polígonos regulares.

Daremos ahora el procedimiento que permite obtener polígonos regulares de cualquier número de lados. Ese procedimiento se funda en el siguiente:

74. **Teorema.** — *Si una circunferencia se divide en tres o más arcos iguales y se trazan las cuerdas determinadas por los pares de puntos de división consecutivos, el polígono inscripto que se obtiene es regular.*



HIP.) $C_{(O)}$

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \ldots = \overset{\frown}{EA} = \dfrac{C_{(O)}}{n}$

$n \geqslant 3$

TESIS) ABCDE regular.

DEMOST). — IGUALDAD DE LOS ÁNGULOS. — Recordando que los ángulos inscriptos en arcos iguales son iguales, (*Mat.* I, nº 148), se tiene que:

siendo $\widehat{A}$ inscripto en el $\overset{\frown}{EAB}$

$\widehat{B}$ inscripto en el $\overset{\frown}{ABC}$

. . . .

$\widehat{E}$ inscripto en el $\overset{\frown}{DEA}$

y $\overset{\frown}{EAB} = \overset{\frown}{ABC} = \ldots = \overset{\frown}{DEA}$ por ser suma de arcos iguales

resulta $\widehat{A} = \widehat{B} = \ldots = \widehat{E}$ [1]

IGUALDAD DE LOS LADOS. — Recordando que en una misma circunferencia o en circunferencias iguales a arcos iguales corresponden cuerdas iguales (*Mat.* I, nº 136), resulta que:

Siendo $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \ldots = \overset{\frown}{EA}$ por hipótesis

es $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \ldots = \overline{EA}$ [2]

De [1] y [2] resulta que ABCDE es un polígono regular por definición.

75. **Teorema.** — *Si una circunferencia se divide en tres o más arcos iguales y por los puntos de división se trazan las tangentes a ella, se obtiene un polígono circunscripto que es regular.*

Hip.) $C_{(O)}$

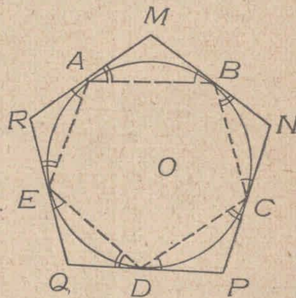
$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \ldots = \widehat{EA} = \dfrac{C_{(O)}}{n}$

$n \geqslant 3$

RM, MN, NP . . . QR tangentes en

A, B, C, . . . E respectivam.

Tesis) RMNPQ regular.



Demost.) Igualdad de los ángulos. — Uniendo A con B, B con C, C con D, D con E y E con A resulta el polígono ABCDE que es regular por el teorema anterior.

Además los triángulos

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{AMB},\ \overset{\triangle}{BNC}\\ \overset{\triangle}{CPD},\ \overset{\triangle}{DQE}\\ \text{y }\overset{\triangle}{ERA}\text{ tienen}\end{array}\right\{\begin{array}{ll}\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} & \text{por lados}\\ \text{polígono regular} & \\ \widehat{MBA} = \widehat{NCB} = \widehat{PDC} = \widehat{QED} = \widehat{RAE} & \text{por semi-}\\ \text{inscriptos que abarcan arcos iguales} & \\ \widehat{MAB} = \widehat{NBC} = \widehat{DCP} = \widehat{EDQ} = \widehat{AER} & \text{por semi-}\\ \text{inscriptos que abarcan arcos iguales} & \end{array}$$

luego $\overset{\triangle}{AMB} = \overset{\triangle}{BNC} = \overset{\triangle}{CPD} = \overset{\triangle}{DQE} = \overset{\triangle}{ERA}$ por 2º criterio igual. de triángulos

y $\widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{P} = \widehat{Q} = \widehat{R}$ [1] por def. de triángulos iguales

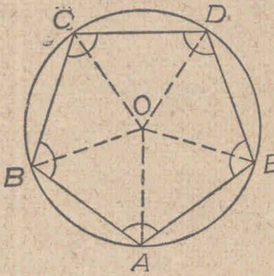
$\overline{MB} = \overline{NC} = \overline{PD} = \overline{QE} = \overline{RA}$ por la misma razón

$\overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ} = \overline{ER} = \overline{AM}$ por la misma razón

suman. $\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = QR = \overline{RM}$ [2] por prop. uniforme de suma de segmentos

De [1] y [2] resulta que el polígono MNPQR es regular.

76. Teorema.— *Todo polígono regular es inscriptible en una circunferencia.*



HIP.) ABCDE regular

TESIS) ABCDE es inscriptible

DEMOST.) Sea O el centro de la circunferencia que pasa por los vértices A, B y C (*Mat.* I, nº 143). Vamos a demostrar que ella pasa también por los otros vértices del mismo.

Uniendo O con A, B y C resultan los triángulos isósceles:

$$\overset{\triangle}{OAB} = \overset{\triangle}{OBC} \text{ por tener } \begin{cases} \overline{AB} = \overline{BC} & \text{por lados de polígono reg} \\ \overline{OB} = \overline{OB} & \text{común} \\ \overline{OA} = \overline{OC} & \text{por radios de } C_{(O)} \end{cases}$$

luego por definición de triángulos iguales, resulta:

$$A\widehat{B}O = C\widehat{B}O \quad \text{por lo tanto } \overrightarrow{BO} \text{ es bisectriz de } \widehat{B}$$

y $$O\widehat{A}B = O\widehat{C}B$$

Pero como el triángulo $\overset{\triangle}{OAB}$ es isósceles, se tiene:

$$O\widehat{A}B = A\widehat{B}O \quad \text{y como} \quad A\widehat{B}O = \frac{\widehat{B}}{2} \quad \text{resulta} \quad O\widehat{A}B = \frac{\widehat{A}}{2}$$

luego $\overrightarrow{AO}$ es bisectriz del $\widehat{A}$.

En la misma forma se prueba de $\overrightarrow{CO}$ es bisectriz del $\widehat{C}$.

Uniendo O con D, resultan:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{OCD} = \overset{\triangle}{OCB} \\ \text{por tener}\end{array}\right\{ \begin{array}{ll}\overline{OC} = \overline{OC} & \text{común} \\ \overline{CB} = \overline{CD} & \text{por lados de polígono reg.} \\ O\widehat{C}D = O\widehat{C}B & \text{por ser } \overrightarrow{CO} \text{ bisectriz de } \widehat{C}.\end{array}$$

luego $\overline{OD} = \overline{OB}$ [1] y $O\widehat{D}C = O\widehat{B}C$ por def. de triáng. igs.

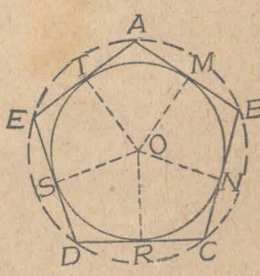
pero $O\widehat{B}C = \frac{\widehat{B}}{2}$ y como $\widehat{B} = \widehat{D}$ es $O\widehat{D}C = \frac{\widehat{D}}{2}$ luego $\overrightarrow{DO}$ es bisectriz del $\widehat{D}$.

Como $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ por ser radios de $C_{(O)}$ y $\overline{OB} = \overline{OD}$ por [1]

resulta $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$.

En la misma forma se probaría que $\overline{OE}$ es también igual a $\overline{OA}$, luego la $C_{(O \text{ y } \overline{OA})}$ pasa por A, B, C, D y E, es decir, ABCDE es inscripto a dicha circunferencia.

77. **Teorema** — *Todo polígono regular es circunscriptible a una circunferencia.*



HIP) Polígono ABCDE regular

TESIS) ABCDE es circunscriptible

DEMOST.) Sea O el centro de la circunferencia circunscripta al polígono dado (teor. ant.), y $\overline{OM}$, $\overline{ON}$, $\overline{OR}$, $\overline{OS}$ y $\overline{OT}$ las distancias de O a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$, respectivamente.

Siendo $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$ por lados de un pol. reg.

es $\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OR} = \overline{OS} = \overline{OT}$ porque las cuerdas iguales equidistan del centro (*Mat.* I, nº 146).

luego la $C_{(O\ y\ \overline{OM})}$ pasa por M, N, R, S y T y es tangente a los lados del polígonos en dichos puntos (*Mat.* I, nº 153), es decir, es circunscripta a dicho polígono.

DEFINICIÓN. — Se dice que una circunferencia es *inscripta* o *circunscripta* a un polígono cuando éste es *circunscripto* o *inscripto,* respectivamente, a dicha circunferencia.

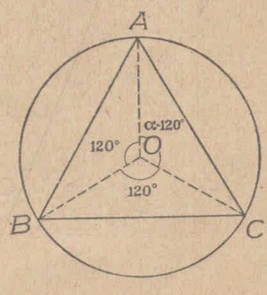
DEFINICIÓN. — Se llama *centro* de un polígono regular, al centro (común) de las circunferencias inscripta y circunscripta a dicho polígono, *radio* del mismo a la distancia del centro a uno de los vértices y *apotema* a la distancia del centro a uno cualquiera de sus lados.

EJEMPLO. — En la figura del teorema anterior: O es el centro del polígono, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ . . . sus radios y $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ . . . sus apotemas.

78. **Inscripción de polígonos regulares empleando el transportador.** — De acuerdo con un teorema anterior (nº 74) resulta que para inscribir en una circunferencia un polígono regular de n lados, basta dividir a dicha circunferencia en n partes iguales y unir los puntos de división consecutivos.

Pero si una circunferencia se divide en n arcos iguales, los ángulos centrales correspondientes a dichos arcos también son iguales (*Mat.* I, nº 134) por lo tanto el valor de cada uno de ellos es igual a $\frac{4\,R}{n}$ o sea $\frac{360°}{n}$. Teniendo en cuenta estas observaciones resolveremos los siguientes problemas:

79. **Inscripción del triángulo equilátero.** — PROBLEMA. — *Inscribir en una circunferencia un triángulo equilátero empleando el transportador.*

DATOS	INCÓGNITAS	CONSTRUCCIÓN
$C_{(O)}$	Triángulo equilátero	
$n = 3$	inscripto en $C_{(O)}$	

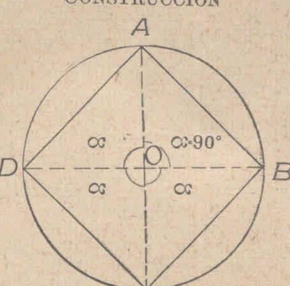
Solución. — Llamando α al ángulo central correspondiente al arco subtendido por un lado cualquiera del triángulo, resulta que como en este caso $n = 3$ es $\alpha = \frac{360°}{3} = 120°$.

Luego si se construyen los ángulos $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120°$ y se une A con B, B con C y C con A resulta el triángulo ABC buscado. En efecto:

Siendo	$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA}$	por construcción
es	$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA}$	por defin. arcos iguales
luego	$\overset{\triangle}{ABC}$	es regular por un teorema anterior (nº 74)
es decir	$\overset{\triangle}{ABC}$	es equilátero.

80. **Inscripción de cuadrado.** — Problema. — *Inscibir en una circunferencia un cuadrado empleando el transportador.*

Datos	Incógnitas	Construcción
$C_{(O)}$	Cuad. inscripto	
$n = 4$	en $C_{(O)}$	



Solución. — Siendo $n = 4$ es $\alpha = \frac{360°}{4} = 90°$. Luego construyendo los ángulos $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = 90°$ y uniendo A con B, B con C, C con D y D con A, resulta el cuadrado ABCD buscado.

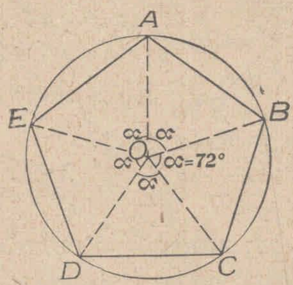
En efecto:

Siendo	$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = 90°$	por construcción
es	$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DA}$	por def. arc. iguales

luego ABCD es regular por un teorema anterior (nº 74), es decir que ABCD es un cuadrado.

81 **Inscripción del pentágono regular.** — *Inscribir en una circunferencia un pentágono regular empleando el transportador.*

Datos	Incógnitas	Construcción
$C_{(O)}$	Pentágono regular	
$n = 5$	inscripto en $C_{(O)}$	



Solución. — Siendo $n = 5$ es $\alpha = \dfrac{360°}{5} = 72°$. Luego construyendo los ángulos $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}E = E\hat{O}A = 72°$, y uniendo A con B, B con C, C con D, D con E y E con A resulta el pentágono ABCDE buscado. En efecto:

Siendo $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}E = E\hat{O}A$ por construcción

es $\overparen{AB} = \overparen{BC} = \overparen{CD} = \overparen{DE} = \overparen{EA}$ por def. arcos ig.

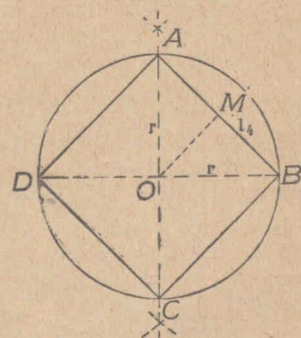
luego ABCDE es regular por un teorema anterior (nº 74).

Como en la misma forma se procedería para inscribir un polígono regular de cualquier número de lados, podemos dar la siguiente:

Regla. — *Para inscribir en una circunferencia un polígono regular de n lados, se construyen, empleando el transportador, n ángulos centrales consecutivos iguales a* $\dfrac{360°}{n}$, *y se unen los puntos consecutivos determinados por las intersecciones de los lados de dichos ángulos con la circunferencia.*

82. **Problema.** — *Inscripción del cuadrado con regla y compás Cálculo del lado y de la apotema en función del radio.*

Datos	Incógnitas	Construcción
$C_{(O\ y\ r)}$	I) Cuadr. inscripto en $C_{(O\ y\ r)}$	
	II) Valor de l_4 en función de r	
	III) Valor de a_4 en función de r	



Solución I) Trazando los diámetros perpendiculares: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ **y uniendo A y C con B y D resulta el ABCD que es el cuadrado buscado. En efecto:**

Siendo	$AC \perp BD$	por construcción
es	$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA}$	por teor. ant. (*Mat.* I, nº 23)
luego	$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DA}$	por defin. de arcos iguales

y por lo tanto el cuadrilátero ABCD es regular (nº 74), es decir, ABCD es un cuadrado.

II) ***Cálculo del lado en función del radio.***

En el triángulo rectángulo AOB se tiene:

la hip. de un △ rect. es = a

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}$ por un cor. del Teorema de Pitágoras

o sea $l_4 = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2\,r^2}$

luego $l_4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{r^2}$ por prop. dist. de la rad. respec. mult.

la raíz enés. de 1 prod. es = al prod. de las

y $\boxed{l_4 = r\sqrt{2}}$ por un corol. de la def. de raíz cuad.

III) *Cálculo de la apotema en función del radio.*

Siendo $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ por definición de apotema

es $\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2}$ por una prop. del diám. (*Mat.* I, nº 153)

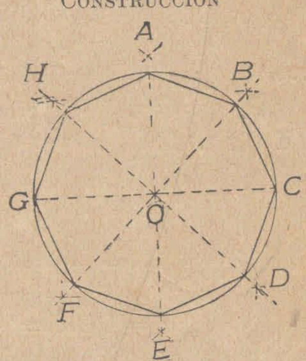
Luego el triángulo AMO es rectángulo y es también isósceles pues $\hat{A} = \hat{O} = 45°$

luego $\overline{OM} = \overline{AM} = \frac{\overline{BC}}{2}$

pero como $\overline{OM} = a_4$ y $\overline{BC} = l_4$ y $l_4 = r\sqrt{2}$, resulta

$$\boxed{a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$$

83. **Inscripción del octógono.** — PROBLEMA. — *Inscribir en una circunferencia un octógono regular con regla y compás.*

DATOS	INCÓGNITAS	CONSTRUCCIÓN
C(O y r)	Octógono regular inscripto en C(O y r)	

2 de la + de los cuad. de los catetos

SOLUCIÓN. — Trazando los diámetros perpendiculares $\overline{AE} \perp \overline{GC}$ resultan los ángulos $\widehat{AOC} = \widehat{COE} = \widehat{EOG} = \widehat{GOA}$ (*Mat.* I, nº 23) y trazando la bisectriz BF de los ángulos $\widehat{AOC}$ y $\widehat{GOE}$ y la bisectriz HD de los ángulos $\widehat{AOG}$ y $\widehat{COE}$ resultan los ángulos:

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \ldots = \widehat{HOA}$$

luego $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \ldots = \overset{\frown}{HA}$ por def. arcos iguales y por lo tanto el octógono ABCDEFGH es regular (nº 74).

84. **Inscripción del exágono regular con transportador.** — Problema. — *Inscribir en una circunferencia un exágono regular empleando el transportador. Cálculo del lado y de la apotema en función del radio.*

Datos

$C_{(O\ y\ r)}$

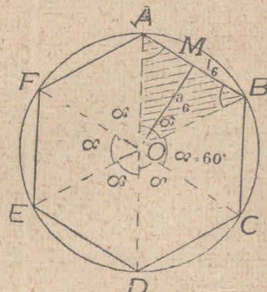
Incógnitas

I) Exágono reg. inscripto en $C_{(O)}$

II) Valor de l_6 en función de r

III) Valor de a_6 en función de r

Construcción



Solución: I) Siendo $n = 6$ es $\alpha = \dfrac{360°}{6} = 60°$. Construyendo los ángulos $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \ldots = \widehat{FOA} = 60°$ y uniendo A con B, B con C ... y F con A resulta el exágono regular ABCDEF (*Regla* nº 81).

II) *Cálculo del lado en función del radio.*

Siendo el $\overset{\triangle}{AOB}$ isósceles, y $\widehat{AOB} = 60°$

es $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \dfrac{180° - 60°}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$

luego como $\widehat{AOB} = 60°$ resulta que el $\overset{\triangle}{AOB}$ es equilátero, es decir:

$\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{AB}$. Pero $\overline{AO} = \overline{OB} = r$ y $\overline{AB} = l_6$, luego

$$\boxed{l_6 = r}$$

III) *Cálculo de la apotema.*

Siendo el $\overset{\triangle}{AOB}$ equilátero y $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ por def. de apotema, es $\overline{AM} = \frac{l_6}{2}$ por una propiedad de la altura del triángulo isósceles (*Mat.* I, nº 101).

En el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{OMA}$, se tiene:

$$\overline{OM} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AM}^2} \quad \text{por un cor. del Teor. de Pitág.}$$

Pero como $\overline{OM} = a_6$; $\overline{OA} = r$ y $\overline{AM} = \frac{l_6}{2} = \frac{r}{2}$ resulta

$$a_6 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\,r^2 - r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\,r^2}{4}}$$

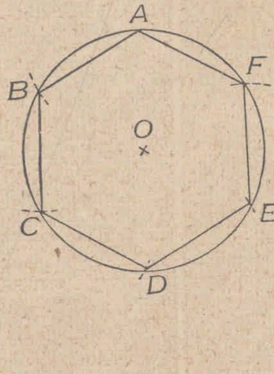
$$a_6 = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{r^2}}{\sqrt{4}} \quad \text{por prop. distrib. de la radic.}$$

o bien $\boxed{a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}}$

85. **Problema.** — *Inscribir en una circunferencia un exágono regular con regla y compás.*

Datos	Incógnitas
$C_{(O\ y\ r)}$	Exágono regular inscripto $C_{(O\ y\ r)}$

Construcción



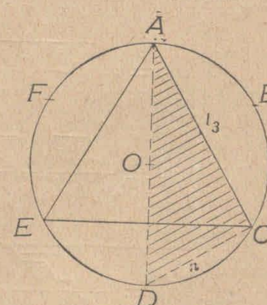
Solución. — Con radio r y a partir de un punto cualquiera A de la $C_{(O)}$ se la corta en los puntos B, C, D, E y F.

Luego $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \ldots = \overline{FA} = r$ por construcción

y $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \ldots = \overset{\frown}{FA} = \dfrac{C_{(O)}}{6}$ (*Mat.* I, 136)

por lo tanto ABCDEF es un exágono regular (nº 74).

86. **Problema.** — *Inscripción del triángulo equilátero con regla y compás. Cálculo del valor del lado y de la apotema en función del radio.*

DATOS	INCÓGNITAS	CONSTRUCCIÓN
$C_{(O\text{ y }r)}$	I) Triáng. equilátero inscr. en $C_{(O)}$	
	II) Valor de l_3 en función de r	
	III) Valor de a_3 en función de r	

SOLUCIÓN I) Como para la inscripción del exágono regular con regla y compás se determinan los puntos A, B, C, D, E y F tales que

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA} \quad [1]$$

Uniendo los puntos de división no consecutivos A, C y E resulta el triángulo ACE pedido.

En efecto: Por [1] se tiene

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{FA}$$

o sea $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{EA}$, y por lo tanto

$\overset{\triangle}{ACE}$ es regular, es decir, es equilátero (nº 74).

II) *Cálculo del lado en función del radio* (figura anterior).

Uniendo D con A y con C se obtiene el triángulo ACD que es rectángulo en C por ser el $\hat{C}$ inscripto en una semicircunferencia (*Mat.* I, nº 147).

1 cat. de 1 trián. rect. es = a la diferencia entre el cuad. de la hypot. y el cuad. del otro c

Luego $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DC}^2}$ por un Cor. del Teor. de Pit. (nº 48)

y como $\overline{AC} = l_3$, $\overline{AD} = 2r$ y $\overline{DC} = l_6 = r$

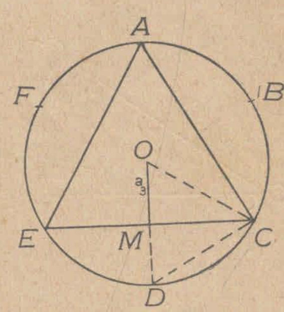
resulta $l_3 = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{r^2}$

o sea $\boxed{l_3 = r\sqrt{3}}$

Todo diametro ⊥ a cuerda divide a est los arcos que sub en partes ig

III) *Cálculo de la apotema en función del radio.*

Siendo OM ⊥ EC por definición de apotema divide al arco EC en dos arcos iguales (*Mat.* I, nº 139) y por lo tanto pasa por el punto D.



Uniendo C con O y con D se tiene el triángulo OCD que es isósceles por ser $\overline{OC} = \overline{CD} = r$, y como $\overline{CM}$ es la altura correspondiente a su base es también $\overline{CM}$ mediana (*Mat.* I, nº 101).

luego $\overline{OM} = \dfrac{\overline{OD}}{2}$

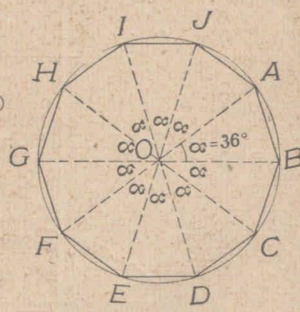
o sea $\boxed{a_3 = \dfrac{r}{2}}$

87. Inscripción del decágono regular con transportador.— PROBLEMA. — *Inscribir un decágono regular empleando el transportador. Cálculo del lado en función del radio.*

DATOS | INCÓGNITAS | CONSTRUCCIÓN.

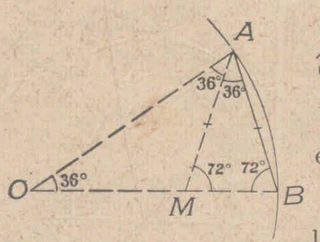
$C_{(O\ y\ r)}$ I) Decágono reg. inscripto en $C_{(O)}$

II) Valor de l_{10} en fun. del radio



SOLUCIÓN. I) Siendo $n = 10$ es $\alpha = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Construyendo $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \ldots = \widehat{JOA} = 36^\circ$, y uniendo A con B, B con C, . . . y J con A, resulta el decágono regular ABCDEFGHIJ (nº 74).

II) *Cálculo del lado en función del radio.*



Siendo el triángulo AOB isósceles y $\widehat{O} = 36^\circ$,

es $\widehat{A} = \widehat{B} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$

luego trazando la bisectriz $\overline{AM}$ del ángulo $\widehat{A}$

resulta $\widehat{OAM} = \widehat{MAB} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$, y por lo tanto el $\overset{\triangle}{OMA}$ es isósceles, luego $\overline{OM} = \overline{AM}$ [1].

En el $\overset{\triangle}{MAB}$ como $\widehat{MAB} = 36^\circ$ y $\widehat{B} = 72^\circ$ es

$\widehat{BMA} = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$

luego el $\overset{\triangle}{MAB}$ es isósceles y por lo tanto $\overline{AB} = \overline{AM}$

y como por [1] es $\overline{OM} = \overline{AM}$

resulta $\overline{AB} = \overline{OM} = l_{10}$.

Por otra parte siendo $\overline{AM}$ bisectriz del $\hat{A}$ en el $\overset{\triangle}{OAB}$

es $$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{MB}} \quad [2]$$ por un teor. ant. (nº 22)

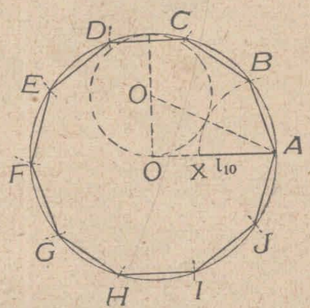
pero como $\overline{OA} = r$; $\overline{AB} = \overline{OM} = l_{10}$ y $\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} = r - l_{10}$

sustituyendo en [2] resulta

$$\boxed{\frac{r}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{r - l_{10}}}$$ lo que nos dice que:

El lado del decágono regular inscripto en una circunferencia es igual a la parte mayor del radio dividido en media y extrema razón.

88. **Problema**. — *Inscribir en una circunferencia un decágono regular con regla y compás.*

DATOS.	INCÓGNITAS.	CONSTRUCCIÓN.
$C_{(O\ y\ r)}$	Decágono regular inscripto en $C_{(O)}$	

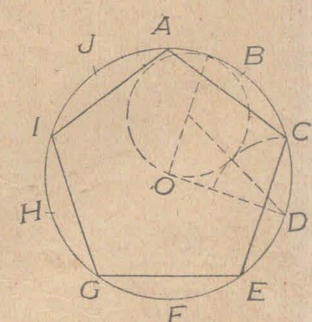
SOLUCIÓN. — Dividiendo al segmento $\overline{OA} = r$ en media y extrema razón (nº 63) resulta el segmento $\overline{AX} = l_{10}$ de acuerdo con la conclusión del problema anterior. Con radio l_{10} y a partir de un punto A cualquiera de la $C_{(O)}$ se la corta en los puntos B, C, D, . . . J.

luego $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \ldots = \overline{JA} = l_{10}$

y $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \ldots = \widehat{JA} = \frac{C_{(O)}}{10}$ (*Mat.* I, nº 136)

por lo tanto ABCDEFGHIJ es un decágono regular (nº 74).

89. **Inscripción del pentágono regular con regla y compás.** — Problema. — *Inscribir en una circunferencia un pentágono regular con regla y compás.*

Datos.	Incógnitas.	Construcción.
$C_{(O\ y\ r)}$	Pentágono regular inscripto en $C_{(O)}$	

Solución. — Como para la inscripción del decágono regular con regla y compás se determinan los puntos A, B, C, D ... J tales que

$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \ldots = \widehat{IJ} = \widehat{JA} \qquad [1]$$

Uniendo los puntos de división no consecutivos A, C, E, G, I, resulta el pentágono ACEGI pedido.

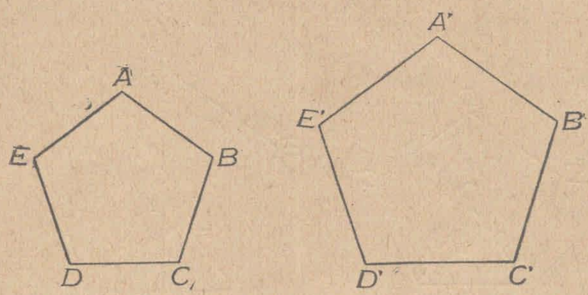
En efecto: Por [1] se tiene

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{DE} = \ldots = \widehat{IJ} + \widehat{JA}$$

o sea $\widehat{AC} = \widehat{CE} = \widehat{EG} = \widehat{GI} = \widehat{IA}$, y por lo tanto

ACEGI es un pentágono regular (nº 74).

90. **Teorema.** — *Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.*



HIP.) ABCDE y A′B′C′D′E′ pol. regs. de *n* lados.

TESIS) ABCDE $\sim$ A′B′C′D′E′.

DEMOST.) *Igualdad de los ángulos.*

Por ser ABCDE y A′B′C′D′E′ polígonos regulares es $\left\{\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \ldots, \ldots \\ \widehat{E} = \widehat{E'} \end{array}\right\}$ por ser iguales a $\dfrac{2\,R\,(n-2)}{n}$ (*Mat.* I, nº 110)

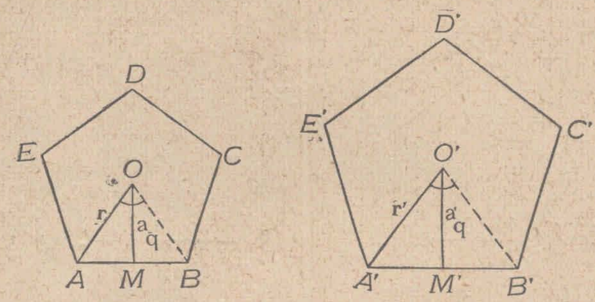
Proporcionalidad de los lados.

Por ser ABCDE y A′B′C′D′E′ polígonos regulares es $\left\{\begin{array}{ll} \overline{AB} = \overline{BC} = \ldots = \overline{EA} & \text{por def. pol. reg.} \\ \overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \ldots = \overline{E'A'} & \text{por def. pol. reg.} \end{array}\right.$

y por lo tanto $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \ldots = \dfrac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}}$ por def. de razón

luego ABCDE $\sim$ A′B′C′D′E′ por definición de polígonos semejantes.

92. **Teorema.** — *La razón de los perímetros de dos polígonos regulares de igual número de lados es igual a la de los radios o apotemas respectivos.*



HIP.) ABCDE y A'B'C'D'E' polígonos regulares de n lados

r y r' radios

a_p y a'_p apotemas

TESIS) $\dfrac{\textit{Perímetro de ABCDE}}{\textit{Perímetro de A'B'C'D'E'}} = \dfrac{r}{r'} = \dfrac{a_p}{a'_p}$

DEMOST.) Siendo ABCDE ∾ A'B'C'D'E' por el teor. ant.

es $\dfrac{\textit{Perímetro de ABCDE}}{\textit{Perímetro de A'B'C'D'E'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ [1] por un teor. ant. (nº 70)

Pero $\overset{\triangle}{ABO} \backsim \overset{\triangle}{A'B'O'}$ por tener $\begin{cases} \widehat{O} = \widehat{O'} = \dfrac{360°}{n} \text{ y} \\ \dfrac{\overline{OA}}{\overline{O'A'}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{O'B'}} \text{ por ser } \begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} = r \\ \overline{O'A'} = \overline{O'B'} = r' \end{cases} \end{cases}$

luego $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{O'A'}}$ o sea $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{r}{r'}$ [2]

De [1] y [2] resulta $\dfrac{\textit{Perímetro de ABCDE}}{\textit{Perímetro de A'B'C'D'E'}} = \dfrac{r}{r'}$ [3]

Además por ser a_p y a'_p alturas de los triángulos semejantes $\overset{\triangle}{OAB}$ y $\overset{\triangle}{O'A'B'}$ respectivamente, se tiene:

$$\frac{a_p}{a'_p} = \frac{r}{r'} \text{ [4] por un teorema anterior (nº 37)}$$

luego de [3] y [4] resulta $\dfrac{\textit{Perímetro de } \mathrm{A\,B\,C\,D\,E}}{\textit{Perímetro de } \mathrm{A'\,B'\,C'\,D'\,E'}} = \dfrac{r}{r'} = \dfrac{a_p}{a_p'}$.

93. **Corolario.** — *La razón del perímetro de un polígono regular al diámetro de la circunferencia inscripta o circunscripta, es constante para todos los polígonos regulares de igual número de lados.*

En símbolos: Si ABCDE y A′B′C′D′E′ son pol. regs. *n* lados

es $\dfrac{\textit{Perímetro de } \mathrm{ABCDE}}{2\,r} = \dfrac{\textit{Perímetro de } \mathrm{A'B'C'D'E'}}{2\,r'} = \ldots = \textit{constante}$

y $\dfrac{\textit{Perímetro de } \mathrm{ABCDE}}{2\,a_p} = \dfrac{\textit{Perímetro de } \mathrm{A'B'C'D'E'}}{2\,a'_p} = \ldots = \textit{constante}$

En efecto: Siendo $\dfrac{\textit{Perímetro de } \mathrm{ABCDE}}{\textit{Perímetro de } \mathrm{A'B'C'D'E'}} = \dfrac{r}{r'}$ por el teor. ant.

es $\dfrac{\textit{Perímetro de } \mathrm{ABCDE}}{\textit{Perímetro de } \mathrm{A'B'C'D'E'}} = \dfrac{2\,r}{2\,r'}$

y como los términos de esta proporción son todas cantidades homogéneas, se tiene

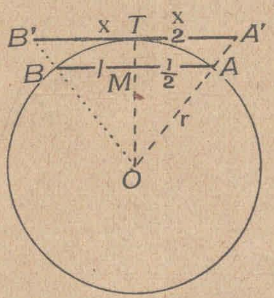
$$\frac{\textit{Perímetro de } \mathrm{ABCDE}}{2r} = \frac{\textit{Perímetro de } \mathrm{A'B'C'D'E'}}{2\,r'} \qquad \text{(nº 13)}$$

En la misma forma se demuestra que:

$$\frac{\textit{Perímetro de } \mathrm{ABCDE}}{2\,a_p} = \frac{\textit{Perímetro de } \mathrm{A'B'C'D'E'}}{2\,a'_p}$$

Aplicaciones. — Resolveremos dos problemas sobre polígonos regulare mo aplicaciones de las propiedades anteriores.

Problema I. — *Dado el lado de un polígono regular inscripto, calcular do de un polígono regular circunscripto jante.*



Si $\overline{AB} = l$ es el lado del polígono lar inscripto, trazamos

$$OM \perp AB$$

que encuentra $C_{(O)}$ en T.

Trazamos $A'B' \perp OT$ en T y prol mos los radios OA y OB hasta cortar tangente en A′ y B′.

El segmento $\overline{A'B'} = x$ es el lado del polígono circunscripto que a calcular.

El $\qquad \overset{\triangle}{OMA} \sim \overset{\triangle}{OTA'}$ por teor. fund. semejanza pues AM |

luego $$\frac{\overline{AM}}{\overline{A'T}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$$

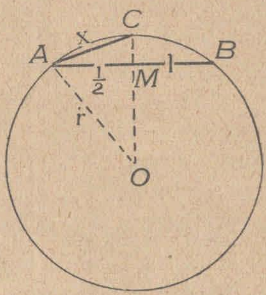
reemplazando valores en las dos primeras razones, se tiene:

$$\frac{\frac{l}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\overline{OM}}{r} \quad \text{o sea} \quad \frac{l}{x} = \frac{\overline{OM}}{r}$$

pero en $\overset{\triangle}{OMA}$ rect. es $\overline{OM} = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}$

luego $$\frac{l}{x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}}{r} \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{2rl}{\sqrt{4r^2 - l^2}}}$$

Problema II. — *Dado el lado de un polígono regular inscripto, calcular el lado del polígono regular inscripto de doble número de lados.*



Si $\overline{AB} = l$ es el lado del polígono regular inscripto de n lados, trazamos

$$OM \perp AB$$

que encuentra a $C_{(O)}$ en C.

Uniendo A con C el segmento $\overline{AC} = x$ es el lado del polígono regular de $2\,n$ lados que vamos a calcular.

En $\overset{\triangle}{AMC}$ rectángulo es $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2$ por teor. de Pitágoras

y reemplazando valores $\quad x^2 = \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + \overline{CM}^2 = \dfrac{l^2}{4} + \overline{CM}^2 \qquad [1]$

pero $\quad \overline{CM} = r - \overline{MO} \quad \therefore \quad \overline{CM}^2 = r^2 + \overline{MO}^2 - 2\,r\,.\,\overline{MO} \qquad [2]$

En $\overset{\triangle}{OMA}$ rect. es $\quad \overline{MO}^2 = r^2 - \dfrac{l^2}{4} \quad [3] \quad$ y $\quad \overline{MO} = \sqrt{r^2 - \dfrac{l^2}{4}}$

reemplazando en [2]

$$\overline{CM}^2 = r^2 + \left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right) - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} = 2\,r^2 - \frac{l^2}{4} - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$$

y reemplazando en [1]

$$x^2 = \frac{l^2}{4} + 2\,r^2 - \frac{l^2}{4} - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$$

$$x^2 = 2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} = 2\,r^2 - r\sqrt{4\,r^2 - l^2}$$

luego $\quad \boxed{x = \sqrt{2\,r^2 - r\sqrt{4\,r^2 - l^2}}}$

ARITMETICA

CAPITULO I

NUMERACION DECIMAL

PROGRAMA. — *Objeto de la numeración. Numeración decimal. Todo número puede escribirse en forma de polinomio. Numeración oral. Numeración escrita. Escritura de un número en forma oral. Lectura de un número dado en forma escrita. Descomposición polinómica de un número.*

1. **Objeto de la numeración.** — Habíamos visto, en primer año, que la sucesión fundamental de números naturales era un conjunto infinito. Luego no se podrá dar a cada uno un nombre particular *arbirario,* ni representar cada número con un símbolo *arbitrario* diferente, pues resulta imposible imaginar y recordar infinitas palabras e infinitos signos.

Es necesario, pues, someter la obtención de estos nombres y de estos símbolos, a reglas fijas que permitan construir uno cualquiera de ellos cuando se conozcan algunos otros.

El conjunto de tales reglas, forma lo que se llama un *Sistema de Numeración, cuyo objeto es nombrar a todos los números naturales, mediante el empleo de pocas palabras y representarlos gráficamente por medio de pocos signos, combinados entre sí de tal manera que a cada número le corresponda una sola combinación de dichos signos.*

El número de signos diferentes que se usan en cada sistema de numeración, se llama *base del sistema,* y puede ser un número cualquiera mayor que uno.

2. **Numeración decimal.** — Se llama *Sistema Decimal de Numeración,* al que tiene por base al número diez, es decir, al sistema

que permite representar cualquier número natural mediante el empleo de sólo diez signos.

Estos signos son, según sabemos, las cifras 0, 1. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, llamados también *guarismos* o *cifras significativas* excepto 0 que se llama cifra *insignificativa*.

Los números que ellos representan se llaman *dígitos*, en contraposición a los *polidígitos* que son los representados por varias cifras,

El estudio de un sistema de numeración comprende dos partes que se llaman *Numeración oral* y *Numeración escrita* según que den el método para *nombrar* o para *escribir* cualquier número.

3. **Numeración oral.** — Para obtener el primer método en el Sistema de Numeración Decimal es necesario: 1º) dar nombre a los diez primeros números; 2º) formar las unidades de los diversos órdenes y 3º) descomponer los números en forma polinómica.

1º NOMBRE DE LOS DIEZ PRIMEROS NÚMEROS. — Se da a cada uno de los números menores que la base diez, un nombre distinto.

Esos nombres son, según dijimos anteriormente,

cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve,

2º UNIDADES DE DIVERSOS ÓRDENES. — Se forman las unidades de diversos órdenes de la manera siguiente:

Al número *uno* se le llama *unidad simple* y como un número natural cualquiera $n > 1$ es igual a la suma de n sumandos iguales a 1, se podrá decir ahora que: *un número cualquiera mayor que uno, es suma de unidades simples*, así:

$$1 = \textit{una unidad simple}$$

$$2 = 1 + 1 = \textit{dos unidades simples}$$

$$3 = 1 + 1 + 1 = \textit{tres unidades simples, etc.}$$

La suma de diez unidades simples, se llama *decena* o *unidad de primer orden;* la suma de diez decenas se llama *centena* o *unidad de segundo orden;* la suma de diez centenas se llama *unidad de mi-*

llar o *millar* o *unidad de tercer orden;* y análogamente se llama, *decena de millar* o *unidad de cuarto orden, centena de millar* o *unidad de quinto orden, unidad de millón* o *millón* o *unidad de sexto orden, etc.* . . . respectivamente, a la suma de diez unidades del orden inmediato anterior.

Luego:

Una *unidad simple* $= 1 = 10^0$

» *decena* $= \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{10} = 1 . 10 = 10 = 10^1$

» *centena* $= \overbrace{10 + 10 + \ldots + 10}^{10} = 10 \,.\, 10 = 10^2$

» *unidad de millar* $= \overbrace{10^2 + 10^2 + \ldots + 10^2}^{10} = 10^2 .\ 10 = 10^3$

» *decena de millar* $= \overbrace{10^3 + 10^3 + \ldots + 10^3}^{10} = 10^3 .\ 10 = 10^4$

» *centena de millar* $= \overbrace{10^4 + 10^4 + \ldots + 10^4}^{10} = 10^4 .\ 10 = 10^5$

» *unidad de millón* $= \overbrace{10^5 + 10^5 + \ldots + 10^5}^{10} = 10^5 .\ 10 = 10^6$

» *decena de millón* $= \overbrace{10^6 + 10^6 + \ldots + 10^6}^{10} = 10^6 .\ 10 = 10^7$

» *centena de millón* $= \overbrace{10^7 + 10^7 + \ldots + 10^7}^{10} = 10^7 .\ 10 = 10^8$

» *unidad de millar de millón* $= \overbrace{10^8 + 10^8 + \ldots + 10^8}^{10} = 10^8 .\ 10 = 10^9$

. . . .

3º ESCRITURA POLINÓMICA DE LOS NÚMEROS. — Tratemos de expresar el número n de los alumnos de un Colegio con los 10 primeros números. Para ello formamos grupos de 10 alumnos o *decenas* y supongamos que quede un grupo que solo tenga 7 alumnos o *unidades.* Si los grupos de decenas son más de 9 formaremos a su vez grupos de 10 decenas de alumnos o sea de *centenas* y supongamos que se hayan formado 4 grupos de centenas y haya quedado un grupo que solo tiene 9 decenas. Luego el número n se puede escribir:

$$n = 4 \text{ centenas} + 9 \text{ decenas} + 7 \text{ unidades}$$

o sea $\quad n = 4.10^2 + 9.10 + 7$ y en general

por ejem.: $\quad n = d.10^3 + c.10 + b.10 + a \qquad [1]$

siendo $\quad a, b, c$ y d números menores que 10

De la observación de este ejemplo y la consideración de que procediendo de manera análoga se podría, en cualquier caso, expresar el número de elementos de un conjunto por un polinomio análogo al [1], resulta la siguiente.

Propiedad. — *Todo número mayor que uno, puede escribirse en forma de un polinomio ordenado respecto a las potencias de 10, siendo los coeficientes de sus términos números menores que 10.*

Hip.) $n > 1$

Tesis) $n = l \,.\, 10^m + \ldots + d \,.\, 10^3 + c \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + a$

siendo $l, \ldots d, c, b$ y a menores que 10.

Demost.) Siendo n un número natural se puede escribir

$$n = \overbrace{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1}^{n}$$

Asociemos los sumandos 1 en grupos de diez y supongamos que de ese modo, se forme un cierto número de grupos de 10 sumandos 1 y un último grupo que no alcance a contar 10 sumandos, sino sólo a.

o sea $\quad n = \overbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}^{10} + \overbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}^{10} + \ldots$

$$\ldots + \overbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}^{10} + \overbrace{(1 + \ldots\ldots + 1)}^{a}$$

Pero la suma de 10 sumandos 1 es el número 10 y la suma de a sumandos 1 es a.

luego $\quad n = 10 + 10 + \ldots\ldots + 10 + a$

Asociemos los sumandos 10 en grupo de diez y supongamos que de ese modo se forme un cierto número de grupos de 10 sumandos y un último grupo que no alcance a contar 10 sumandos, sino sólo b.

o sea $n = (\overbrace{10 + 10 + \ldots + 10}^{10}) + (\overbrace{10 + 10 + \ldots + 10}^{10}) + \ldots$

$\ldots + (\overbrace{10 + 10 + \ldots + 10}^{10}) + (\overbrace{10 + \ldots + 10}^{b}) + a$

Pero $\overbrace{10 + 10 + \ldots + 10}^{10} = 10.10 = 10^2$ por def. de producto y de potencia.

y $\overbrace{10 + \ldots + 10}^{b} = 10.b = b.10$ por def. de producto y propiedad conmutativa.

luego $n = 10^2 + 10^2 + \ldots\ldots + 10^2 + b.10 + a$

En la misma forma asociemos los sumandos 10^2, en grupos de diez y supongámonos que se hayan formado un cierto número de grupos de 10 sumandos 10^2 y un último grupo que no alcance a contar 10 sumandos, sino sólo c.

o sea $n = (\overbrace{10^2 + \ldots + 10^2}^{10}) + (\overbrace{10^2 + \ldots + 10^2}^{10}) + \ldots$

$+ (\overbrace{10^2 + \ldots + 10^2}^{10}) + (\overbrace{10^2 + \ldots + 10^2}^{c}) + b.10 + a$

Pero $\overbrace{10^2 + \ldots + 10^2}^{10} = 10^2 . 10 = 10^3$ por def. de producto y de potencia

y $\overbrace{10^2 + \ldots + 10^2}^{c} = 10^2.c = c.10^2$ por def. de producto y propiedad conmutativa.

luego $n = 10^3 + 10^3 + \ldots\ldots + 10^3 + c.10^2 + b.10 + a$

Supongamos por último que los sumandos 10^3 no alcancen a contar 10, sino sólo d.

o sea $n = (\overbrace{10^3 + 10^3 + \ldots + 10^3}^{d}) + c.10^2 + b.10 + a$

Pero $\overbrace{10^3 + 10^3 + \ldots + 10^3}^{d} = 10^3.d = d.10^3$ por def. de producto y propiedad conmutativa.

Luego $n = d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a$ y el teorema estaría demostrado.

Si por el contrario el número de sumandos 10^3 fuera mayor que 10 los hubiéramos análogamente asociado en grupos de 10 obteniendo por ejemplo:

$$n = 10^5 + \ldots + 10^5 + e.10^4 \quad d.10^3 + c\,10^3 + b.10 + a$$

y así se continuaría asociando sumandos en grupos de 10 hasta llegar a una suma de sumandos 10^m cuyo número l fuera menor que 10

o sea $n = (\overbrace{10^m + \ldots + 10^m}^{l}) + \ldots + e.10^4 + d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a$

Luego $n = l.10^m + \ldots + e.10^4 + d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a.$

La propiedad que acabamos de ver nos permite nombrar un número tal como el

$$n = 5.10^3 + 8.10^2 + 3.10 + 6 \qquad \text{diciendo}$$

«*cinco unidades de millar, más ocho centenas, más tres decenas, más seis unidades simples*»
o «*cinco unidades de tercer orden, más ocho unidades de segundo orden, más tres unidades de primer orden, más seis unidades simples*»

pero como estos nombres resultan demasiado largos se adoptan, con el objeto de simplificarlos, los siguientes convenios.

	El número	$10 + 1$	se llama	*once*
	» »	$10 + 2$	» »	*doce*
	» »	$10 + 3$	» »	*trece*
	» »	$10 + 4$	» »	*catorce*
y	» »	$10 + 5$	» »	*quince*

y en los restantes hasta $10 + 9$ inclusive se reemplaza la palabra *más* por la letra *y*, es decir:

El número	$10 + 6$	se llama	*diez y seis*
» »	$10 + 7$	» »	*diez y siete*
» »	$10 + 8$	» »	*diez y ocho*
» »	$10 + 9$	» »	*diez y nueve*

* * *

El nº	$10 + 10 = 2.10$	se llama	*veinte*	en lugar de dos decenas
» »	3.10	» »	*treinta*	» » » tres »
» »	4.10	» »	*cuarenta*	» » » cuatro »
» »	5.10	» »	*cincuenta*	» » » cinco »
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
» »	9.10	» »	*noventa*	» » » nueve »

Para nombrar los números comprendidos entre veinte y treinta se nombra primero el prefijo *veinti* seguido del nombre de las unidades simples es decir

El número	$2.10 + a$	se llama	*veinti-a*
Ejm.:	$2.10 + 4$	» »	*veinticuatro*

Análogamente se procede para nombrar los números, comprendidos entre treinta y cuarenta, cuarenta y cincuenta, . . . , noventa y cien, y se tiene:

El número	$3.10 + a$	se llama	*treinta y a*
» »	$4.10 + a$	» »	*cuarenta y a*
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
» »	$9.10 + a$	» »	*noventa y a*
Ejm.:	$3.10 + 8$	» »	*treinta y ocho*
	$9.10 + 9$	» »	*noventa y nueve*
y en general	$b.10 + a$	» »	*b-enta y a*

* * *

El número	10^2	se llama	*ciento*	en lugar de una centena
	2.10^2	» »	*dos cientos*	» » » dos centenas
y en general	$c.10^2$	» »	*c-cientos*	» » » c centenas
Se exceptúan	5.10^2	que se llama	*quinientos*	en lugar de cinco cientos
	7.10^2	» » »	*setecientos*	» » » siete cientos
	9.10^2	» » »	*novecientos*	» » » nueve cientos

Para nombrar los números compuestos de centenas, decenas y unidades, se nombra el número de centenas seguido del nombre del número formado por las decenas y unidades.

El número	$c.10^2 + b.10 + a$	se llama	*c-cientos b-enta y a*
Ejms.:	$8.10^2 + 4.10 + 2$	» »	*ochocientos cuarenta y dos*
	$9.10^2 + 9.10 + 9$	» »	*novecientos noventa y nueve*

* * *

El número	10^3	se llama *mil*	en lugar de	millar
	2.10^3	» » *dos mil*	» » »	dos millares
	3.10^3	» » *tres mil*	» » »	tres millares
y en general	$d.10^3$	» » *d-mil*	» » »	*d* millares

Para nombrar los números compuestos de millares, centenas, decenas y unidades, se nombra el número de sus millares seguido del nombre del número formado por las centenas, decenas y unidades. Es decir: el número

$d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a$ se llama
d-mil c-cientos b-enta y a

Ejms.: $2.10^3 + 4.10^2 + 8.10 + 7$ se llama
dos mil cuatrocientos ochenta y siete

$9.10^3 + 9.10^2 + 9.10 + 9$ se llama
nueve mil novecientos noventa y nueve

El número $c.10^4 = (c.10)\,10^3$ se llama
c-enta mil en lugar de *c-decenas de millar*

$f.10^5 = (f.10^2)10^3$ se llama
f-ciento mil en lugar de *f-centenas de millar*

Ejms.: $7.10^4 = (7.10)\,10^3$ se llama
setenta mil en lugar de *siete decenas de millar*

$6.10^5 = (6.10^2)10^3$ se llama
seiscientos mil en lugar de *seis centenas de millar*

Para nombrar los números comprendidos entre *mil* (10^3) y un *millón* (10^6) se agrupan sus sumandos de tres en tres a partir de la derecha y se saca 10^3 factor común en el grupo de la izquierda. Se nombra el número contenido en el paréntesis de la izquierda, seguido de la palabra mil y a continuación se nombra el número contenido en el segundo paréntesis, es decir:

EJM.: $8.10^5 + 3.10^4 + 9.10^3 + 2.10^2 + 7.10 + 1 =$
$= (8.10^2 + 3.10 + 9)10^3 + (2.10^2 + 7.10 + 1)$

se llàma *ocho cientos treinta y nueve mil, doscientos setenta y uno*

EJM.: $9.10^5 + 9.10^4 + 9.10^3 + 9.10^2 + 9.10 + 9 =$
$= (9.10^2 + 9.10 + 9)10^3 + (9.10^2 + 9.10 + 9)$

se llama *novecientos noventa y nueve mil, novecientos noventa y nueve*

En general: $f.10^5 + e.10^4 + d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a =$
$= (f.10^2 + e.10 + d)10^3 + (c.10^2 + b.10 + a$

se llama *f-ciento e-enta y d-mil, c-cientos b-enta y a*

Para nombrar los números comprendidos entre un *millón* (10^6) y un *billón* (10^{12}) se agrupan sus sumandos de seis en seis a partir de la derecha y se saca 10^6 factor común en el grupo de la izquierda.

Se nombra el número contenido en el paréntesis de la izquierda seguido de la palabra *millones* y a continuación se nombra el número contenido en el segundo paréntesis. Es decir: el número

EJM.: $7.10^{10} + 3.10^9 + 2.10^8 + 5.10^7 + 1.10^6 +$
$+ 9.10^5 + 6.10^4 + 2.10^3 + 1.10^2 + 7.10 + 9 =$

$= (7.10^4 + 3.10^3 + 2.10^2 + 5.10 + 1)10^6 +$
$+ (9.10^5 + 6.10^4 + 2.10^3 + 1.10^2 + 7.10 + 9) =$

$= [(7.10 + 3)10^3 + (2.10^2 + 5.10 + 1)] 10^6 +$
$+ [(9.10^2 + 6.10 + 2)10^3 + (1.10^2 + 7.10 + 9)]$

se le nombra

setenta y tres mil, doscientos cincuenta y un millones, novecientos sesenta y dos mil ciento setenta y nueve.

Análogamente, se nombrarán los números comprendidos entre un *billón* y un *trillón*, entre un *trillón* y un *cuatrillón*... asociando los sumandos en grupos de seis a partir de la derecha, sacando luego 10^6 factor común del segundo paréntesis, 10^{12} del tercero, 10^{18} del cuarto, etc., contando a partir de la derecha.

Se nombrará el número del último paréntesis seguido del nombre de la unidad que se ha sacado factor común; a continuación se nombraría el número del paréntesis siguiente..., hasta nombrar el número del primer paréntesis.

Cuando algunos de los términos del polinomio que representa a un número tiene por coeficiente el número cero, se conviene, al enunciar el número, en omitir el nombre de dicho término.

Así, por ejemplo, el número

$$6.10^3 + 0.10^2 + 1.10 + 9$$

se leerá *seis mil diez y nueve* en lugar de *seis mil cero - cientos diez y nueve*

y el $$2.10^3 + 0.10^2 + 0.10 + 7$$

se leerá *dos mil siete* en lugar de dos mil cero cientos cero-enta y siete.

Nota. Después de las convenciones anteriores que tienen por objeto abreviar el nombre de los números

el $n = 5.10^3 + 8.10^2 + 3.10 + 6$ que se nombraba

«cinco unidades de millar, más ocho centenas, más tres decenas, más seis unidades simples»

se llama ahora *«cinco mil ochocientos treinta y seis»*

4. **Numeración escrita.** — Es el método que permite representar a cualquier número, mediante el empleo de pocos signos oportunamente combinados.

Por el teorema anterior, dado un número cualquiera $n > 1$ se lo podrá representar por

$$n = l \,.\, 10^m + \ldots + d \,.\, 10^3 + c \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + a \qquad [1]$$

o sea este número estará determinado cuando se conozcan los números a, b, c, $d \ldots l$ que como sabemos son menores que 10.

Luego con los diez primeros números naturales se puede escribir un número cualquiera.

Pero la escritura de un número en la forma anterior [1] resulta demasiado larga, por cuyo motivo trataremos de simplificarla aceptando las convenciones siguientes:

Convenciones. — Cuando un número cualquiera n está descompuesto en sus unidades de diversos órdenes se podrá representarlo conviniendo:

I) *En escribir las cifras que representan el número de unidades de cada orden de derecha a izquierda de manera que el 1ᵉʳ lugar lo ocupen las unidades simples, el 2º las decenas, el 3º las centenas, el 4º ... etc.*

II) *Que si un número carece de unidades de un determinado orden se escribirá en el lugar correspondiente la cifra 0.*

Luego el número n se podrá escribir

$n = \underline{l} \ldots \underline{d}\,\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a}$ en lugar de

$$n = l \,.\, 10^m + \ldots + d \,.\, 10^3 + c \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + a$$

Ejm.: $7.10^3 + 6.10^2 + 5.10 + 1 = 7\,6\,5\,1$

» $2.10^4 + 0.10^3 + 3.10^2 + 0.10 + 7 = 2\,0\,3\,0\,7$

Como se nota en esta nueva representación las cifras literales van con una rayita para evitar que se confunda con su producto.

Consecuencia 1ª — Cada cifra significativa de un número, tiene dos valores; el llamado *valor absoluto* que es el número natural que ella representa y el valor *relativo* que es el número de unidades del orden que representa según el lugar que ocupe en la escritura del número.

Así en el número 7651 la cifra 6

tiene como valor absoluto $6 =$ *seis*

y » » relativo $6.10^2 =$ *seis cientos*

Consecuencia 2ª — Cada cifra situada a la izquierda de otra representa unidades de orden inmediato superior al de esta otra.

5. **Escritura de un número dado en forma oral.** — Ejemplo: Escribir el número *ochocientos siete mil quinientos cuatro.*

Por numèración oral este número es igual

$$n = 8.10^5 \qquad\qquad + 7.10^3 + 5.10^2 + \qquad 4$$

o también $n = 8.10^5 + 0.10^4 + 7.10^3 + 5.10^2 + 0.10 + 4$

luego $n = 807\,504$ por numeración escrita.

En general: escribir el número

f - cientos e - enta y d mil, c - cientos b - enta y *a*.

Este número por la numeración oral es igual a

$$(f\,.\,10^2 + e\,.\,10 + d)\ 10^3 + (c\,.\,10^2 + b\,.\,10 + a) =$$

$= f\,.\,10^5 + e\,.\,10^4 + d\,.\,10^3 + c\,.\,10^2 + b\,.\,10 + a = \underline{f\,e\,d\,c\,b\,a}$ por numeración escrita.

De aquí la siguiente

Regla. — *Para representar un número se escriben sucesivamente el número total de las unidades de cada orden que se va nombrando de izquierda a la derecha, hasta escribir las cifras de las unidades simples.*

6. **Lectura de un número dado en forma escrita.** — Ejemplo: Leer el número 340 274.

Por numeración escrita este número es igual a

$$340\,724 = 3.10^5 + 4.10^4 + 0.10^3 + 7.10^2 + 2.10 + 4 =$$
$$= (3.10^2 + 4.10 + 0)10^3 + (7.10^2 + 2.10 + 4)$$

que se lee *tres cientos cuarenta mil, setecientos veinticuatro*

En general el número representado por

$$\underline{f\,e\,d\,c\,b\,a} = f\,.\,10^5 + e\,.\,10^4 + d\,.\,10^3 + c\,.\,10^2 + b\,.\,10 + a =$$
$$= (f\,.\,10^2 + e\,.\,10 + d)\,.\,10^3 + (c\,.\,10^2 + b\,.\,10 + a)$$

se lee *f - cientos e - enta* y *d - mil, c - cientos b - enta* y *a*.

De aquí la siguiente:

Regla. — *Para leer un número se le supone dividido de derecha a izquierda, en períodos de tres cifras y se lo lee comenzando por la izquierda, enunciando el número de unidades de cada período, seguido del nombre del orden de las unidades de la última cifra de cada período.*

7. Descomposición polinómica de un número cualquiera de dos o más cifras. — Después de lo convenido anteriormente resulta que un número cualquiera mayor que 10 puede representarse de dos maneras distintas, a saber:

Escribiendo las cifras de sus unidades de diversos órdenes, unas a continuación de otras, comenzando por las de orden superior y terminando por la de las unidades simples; o bien como suma de las unidades de sus diversos órdenes.

Así, por ejemplo, el número *cuatro mil trescientos ochenta y nueve* se puede escribir:

así 4389 o $4.10^3 + 3.10^2 + 8.10 + 9$

y en general *d - mil c - cientos b - enta* y *a* se puede escribir

así $\underline{dcba}$ o $d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a$

Cuando se representa un número como suma de sus unidades de diversos órdenes se dice que está escrito en su *forma polinómica.*

Regla. — *Todo número natural de dos o más cifras puede descomponerse en un polinomio cuyos términos son los productos de cada una de sus cifras por las potencias de diez, de exponentes iguales al número que indica el orden de las unidades que representan dichas cifras respectivamente.*

Nota. — Por las consideraciones anteriores los números 10^2, 10^3, 10^4... etc. se escriben ahora 100, 1000, 10 000... etc., y por lo tanto:

$$\underline{dcba} = d.1000 + c.100 + b.10 + a.$$

CAPITULO II

MECANISMO DE LAS OPERACIONES ARITMETICAS FUNDAMENTALES (*)

PROGRAMA. — *Suma de números dígitos, de un polidígito y un dígito y de dos o más polidígitos. Resta de números dígitos, de un polidígito y un dígito y de dos polidígitos. Multiplicación de números dígitos, de un polidígito por un dígito. Multiplicación de polidigitos, multiplicación por la unidad seguida de ceros, por una cifra significativa seguida de ceros y caso general. División de un número dígito o polidígito, siendo dígito el cociente. División de polidígitos siendo dígito el cociente. Lema. Regla. División de polidígitos (caso general). Lemas. Regla. Raíz cuadrada entera de los números mayores que cien. Lemas. Regla.*

MECANISMO DE LA ADICION

10. **1.^{er} Caso. — Suma de dos números digitos.** — Sea hallar la suma de $6+3$

Como $\quad 3=1+1+1$ por una consecuencia de def. de suma

es $\quad 6+3=6+1+1+1$

luego $\quad 6+3=[(6+1)+1]+1=[7+1]+1=8+1=9$

es decir que:

Para sumar dos dígitos basta sumar sucesivamente al primero las unidades del segundo.

(*) Este capítulo tiene por objeto dar al futuro maestro los fundamentos del mecanismo de las operaciones que enseñará a sus alumnos y por lo tanto se supondrán conocidos solamente los números naturales y las operaciones con polinomios cuyas letras y coeficientes representen esa clase de números.

11. 2.^{do} Caso. — Suma de un polidígito con un digito. —

Sea, por ejemplo, hallar la suma $764 + 5$

Siendo	$764 = 7.10^2 + 6.10 + 4$	por descom, polinómica (nº 7)
y	$5 = \quad\quad 5$	por carácter idéntico de la igualdad
es	$764 + 5 = 7.10^2 + 6.10 + (4 + 5)$	por prop. unif. y asoc. de la suma
	$764 + 5 = 7.10^2 + 6.10 + 9$	por el 1er caso
luego	$764 + 5 = 769$	por regla numeración escrita.

Ejemplo II. — Sea hallar la suma $184 + 9$

Siendo	$184 = 1.10^2 + 8.10 + 4$	por descomp. polinóm.
y	$9 = \quad\quad 9$	por carácter idéntico de la igualdad.
es	$184 + 9 = 1.10^2 + 8.10 + (4 + 9)$	por unif. y asoc. suma

y como $4 + 9 = 13 = 1.10 + 3$

resulta $184 + 9 = 1.10^2 + (8.10 + 1.10) + 3 = 1.10^2 + 9.10 + 3$

luego $184 + 9 = 193$ por la regla de la numeración escrita.

Observando que en todos los casos se ha sumado el número dígito a la cifra de las unidades del polidígito y teniendo en cuenta que en la misma forma se puede proceder cualesquiera que sean los números dados, podemos enunciar la siguiente:

Regla. — *Para sumar a un polidígito un dígito se le suma éste a la cifra de las unidades; si la suma es un número de una cifra se escribe ésta conservando todas las demás, en caso contrario, se escribe solamente la cifra de las unidades de dicha suma parcial y se suma 1 a la cifra siguiente y para esta suma se aplica el mismo criterio.*

Observación. — Para sumar tres o más dígitos basta aplicar la propiedad asociativa de la adición y las reglas dadas en los casos anteriores. Sea, por ejemplo, sumar: $4 + 5 + 8 + 6$

$$4 + 5 + 8 + 6 = [(4 + 5) + 8] + 6 = [9 + 8] + 6 = 17 + 6 = 23$$

por definición de suma algebraica.

12. 3.^{er} Caso. — **Suma de dos o más polidígitos.** — Sea, por ejemplo, sumar $645 + 74 + 3028$

$$\begin{aligned} \text{Siendo} \quad 645 &= 6.10^2 + 4.10 + 5 \\ 74 &= 7.10 + 4 \\ 3028 &= 3.10^3 + 0.10^2 + 2.10 + 8 \quad \text{es} \end{aligned}$$

$$645 + 74 + 3028 = 3.10^3 + (6 + 0)10^2 + (4 + 7 + 2)10 + (5 + 4 + 8)$$

por propiedad uniforme de la adición y la regla de sumar polinomios.

Obsérvese que la suma contenida en el primer paréntesis de la derecha es la de las unidades de los números dados, la contenida en el segundo la de las decenas, etc., y como cada una de dichas sumas está incluída en uno de los casos anteriores, efectuándolas tendríamos:

$$645 + 74 + 3028 = 3.10^3 + 6.10^2 + 13.10 + 17$$

y como $13.10 = (10 + 3).10 = 10^2 + 3.10$ y $17 = 10 + 7$

resulta $645 + 74 + 3028 = 3.10^3 + 6.10^2 + 10^2 + 3.10 + 10 + 7$

$$= 3.10^3 + 7.10^2 + 4.10 + 7$$

luego $645 + 74 + 3028 = 3747$

Puede observarse que cuando una de las sumas parciales consta de dos cifras, se escribe solamente la de las unidades y se suma la de las decenas a la cifra de orden inmediato superior. Teniendo en cuenta lo anterior y lo dicho más arriba podríamos haber obtenido el mismo resultado disponiendo los números uno debajo del otro y sumando en columna las cifras del mismo orden

$$\begin{array}{r} 645 \\ +\ 74 \\ 3028 \\ \hline 3747 \end{array}$$

REGLA. — *Para sumar varios polidígitos se suman las unidades de un mismo orden, comenzando por las unidades simples, de cada suma parcial se escribe solamente la cifra de las unidades, sumando la cifra de las decenas de dicha suma parcial con las unidades de orden inmediato superior.*

MECANISMO DE LA SUSTRACCION

13. **1.er Caso. — Resta de números dígitos.** — Sea, por ejemplo, hallar la diferencia entre 9 y 4. Por definición de diferencia se tiene

$$9 - 4 = x \quad \text{si } x \text{ es tal que} \quad x + 4 = 9$$

Luego estas operaciones se hacen mentalmente empleando la tabla de sumar.

REGLA. — *Para restar dígitos se halla mentalmente el número que sumado al sustraendo dé el minuendo.*

14. **2.do Caso. — Restar de un polidígito un dígito.** — Sea, por ejemplo, restar de 436 el número 4.

Siendo $\quad 436 = 4.10^2 + 3.10 + 6$

y $\quad 4 = \qquad\qquad 4$ $\quad$ por car. idént. de la ig.

es $\quad 436 - 4 = 4.10^2 + 3.10 + (6 - 4)$ por propiedad uniforme de la substracción y regla de resta de polinomios.

Siendo $\quad 6 > 4$, de 6 puede restarse 4 y da 2

luego $\quad 436 - 4 = 4.10^2 + 3.10 + 2 = 432$

Ejemplo II. — Restar de 1063 el número 8

Siendo $1063 = 1.10^3 + 0.10^2 + 6.10 + 3$

y $8 = 8$ por car. idént. igualdad

es $1063 - 8 = 1.10^3 + 0.10^2 + 6.10 + 3 - 8$ por propiedad uniforme de la substracción.

Pero siendo $3 < 8$ de 3 no puede restar 8. No obstante podremos efectuar la operación propuesta valiéndonos de un artificio conocido por los alumnos desde la Escuela Elemental.

Dicho artificio consiste en sumarle 10 a la cifra de las unidades del polidígito, para hacer posible la resta entre dicha unidad y el dígito, y en restarle 1 a la cifra de las decenas del polidígito dado. Esta forma de proceder está justificada pues siendo:

$$6.10 = [(6-1)+1]10 = (6-1)10 + 10$$

resulta, sustituyendo en la igualdad anterior

$$1063 - 8 = 1.10^3 + 0.10^2 + (6-1)10 + 10 + 3 - 8$$

$$= 1.10^3 + 0.10^2 + (6-1)10 + 13 - 8 \quad \text{por prop. asoc.}$$

$$1063 - 8 = 1.10^3 + 0.10^2 + 5.10 + 5 = 1055$$

Nota. — Si la cifra de las decenas fuese cero para poderle restar la unidad hubiésemos recurrido al mismo artificio que para hacer posible la resta $3 - 8$.

En la práctica las operaciones anteriores se disponen así:

$$\begin{array}{r} 436 \\ -\ \ 4 \\ \hline 432 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1063 \\ -\ \ \ 8 \\ \hline 1055 \end{array}$$

De lo visto se deduce la siguiente

Regla. — *Para restar de un polidígito un dígito se resta éste de la cifra de las unidades de aquél. Si esa resta es posible se escribe su* *resultado y se conservan las demás cifras del polidígito. Si la cifra de las unidades del polidígito es menor que el dígito se le suma diez a dicha cifra, para hacer posible la substracción y se le resta uno a la cifra de orden inmediato superior y se aplica a esa diferencia el criterio anterior.*

14. 3.er **Caso. — Restar dos polidígitos.** — EJEMPLO. — Restar de 9324 el número 563.

Procediendo como en el ejemplo anterior, se tendría

$$\begin{array}{rl} 9324 = 9.10^3 + 3.10^2 & + 2.10 \quad + 4 \\ 563 = \qquad\quad 5.10^2 & + 6.10 \quad + 3 \\ \hline 9324 - 563 = 9.10^3 + (3-5)10^2 & + (2-6)10 + (4-3) \end{array}$$

Para poder efectuar las diferencias (3—5) y (2—6) aplicamos el artificio explicado en el número anterior, es decir: le sumamos 10 a 2 con lo que el minuendo de la segunda diferencia da 12 > 6; le restamos 1 a 3 y le sumamos 10, que le quitamos a la cifra anterior, con lo que el minuendo de la segunda diferencia da 12 > 5 es decir tendríamos:

$$\begin{array}{rl} 9324 = 8.10^3 + 12.10^2 & + 12.10 \quad + 4 \\ 563 = \qquad\quad 5.10^2 & + \ 6.10 \quad + 3 \\ \hline \text{luego } 9324 - 563 = 8.10^3 + (12-5)10^2 & + (12-6)10 + 4 - 3 \\ \text{o bien } 9324 - 563 = 8.10^3 + \quad 7.10^2 & + 6.10 \quad + 1 = 8761 \end{array}$$

En la práctica la operación se dispone así

$$\begin{array}{r} 9324 \\ -\ 563 \\ \hline 8761 \end{array}$$

De lo visto se deduce la siguiente:

REGLA. — *Para restar de un número polidígito otro polidígito menor, se resta cada cifra de éste, de las que representan unidades del* *mismo orden que el minuendo, comenzando por las de orden inferior. Cuando una cifra del minuendo es menor que su correspondiente en el sustraendo, se le suma diez para hacer posible la sustracción cuidando de restar la unidad a la cifra de orden inmediato superior y de aplicar a esta resta el mismo criterio si fuese necesario.*

MECANISMO DE LA MULTIPLICACION

15. **1er Caso. — Producto de dos dígitos.** — Sea, por ejemplo, multiplicar 7 por 3.

Esta operación puede hacerse aplicando la definición de producto así:

$$7 \times 3 = 7 + 7 + 7 = 21$$

pero en la práctica se hace mentalmente recordando la tabla de multiplicar o *Tabla Pitagórica.*

OBSERVACIÓN. — *El producto de dos números dígitos tiene una o dos cifras.* En efecto, siendo a y b dígitos es por definición $a < 10$ y $b < 10$

luego $a.b < 10.10 = 100$ que es el menor número natural de tres cifras.

16. **2.do Caso. — Multiplicar un polidígito por un dígito.** — Sea, por ejemplo, multiplicar 5841 por 5.

$$\begin{array}{ll} \text{siendo} & 5841 = 5.10^3 + 8.10^2 + 4.10 + 1 \\ \text{y} & \times\, 5 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 5 \\ \hline \text{es} & 5841 \times 5 = 5.5.10^3 + 8.5.10^2 + 4.5.10 + 1.5 \end{array}$$

Los productos de cada una de las cifras del polidígito por el dígito 5×5, 8×5, 4×5 y 1×5 pueden constar de una o de dos cifras. En el primer caso la escribimos, en el segundo escribiremos solamente la cifra de las unidades y sumamos la de las decenas al producto del dígito dado por la cifra del polidígito de orden inmediato superior a la considerada. Luego tendríamos:

$$5841 \times 5 = 25.10^3 + 40.10^2 + 20.10 + 5$$

$$5841 \times 5 = 2.10^4 + 9.10^3 + 2.10^2 + 0.10 + 5 = 29205$$

En la práctica la operación se dispone así:

$$\begin{array}{r} 5\,841 \\ \times \quad 5 \\ \hline 29\,205 \end{array}$$

y se efectúan mental y simultáneamente los productos de cada cifra del multiplicando por el multiplicador y las sumas de esos productos con la cifra de las decenas del anterior, siempre que sea necesario hacerlo.

REGLA. — *Para multiplicar un polidígito por un dígito se multiplica el dígito por cada cifra del primero comenzando por la de las unidades si el producto es un número de una cifra se escribe ésta, si es de dos cifras se escribe sólo la de las unidades y se suma la de las decenas al producto siguiente.*

OBSERVACIÓN. — Para multiplicar tres o más dígitos se aplica la propiedad asociativa de la multiplicación y las reglas de los casos anteriores. Así, por ejemplo:

$$3 \times 4 \times 8 \times 2 = (3 \times 4) \times 8 \times 2 = 12 \times 8 \times 2 =$$
$$= (12 \times 8) \times 2 = 96 \times 2 = 192$$

17. **Multiplicación por la unidad seguida de ceros.** — TEOREMA. — *El producto de un número por la unidad seguida de n ceros está formado por las mismas cifras del primero seguida de n ceros.*

HIP.) 385 ; 1000 TESIS) $385 \times 1000 = 385\,000$

DEMOST.) Siendo

$$385 = 3.10^2 + 8.10 + 5$$

y $1000 = 10^3$

es $385 \times 1000 = (3.10^2 + 8.10 + 5)10^3$ por prop. unif. de mult.

$= 3.10^5 + 8.10^4 + 5.10^3$ por prop. dist. de mult.

o bien $385 \times 1000 = 3.10^5 + 8.10^4 + 5.10^3 + 0.10^2 + 0.10 + 0 = 385\,000$

18. Multiplicación por una cifra significativa seguida de ceros. — Teorema. — *El producto de un número por una cifra significativa seguida de n ceros está formado por las mismas cifras que el producto de dicha cifra por el número dado seguido de n ceros.*

Hip.) 385 ; 50 000 Tesis) $385 \times 50\,000 = 19\,250\,000$

$385 \times 5 = 1925$

Demost.) Siendo

$$50\,000 = 5 \times 10\,000 \qquad \text{por el teorema anterior}$$

es $385 \times 50\,000 = 385 \times 5 \times 10\,000$

y $385 \times 50\,000 = (385 \times 5) \times 10\,000$ por prop. asoc. mult.

luego $385 \times 50\,000 = 1925 \times 10\,000$

o bien $385 \times 50\,000 = 19\,250\,000$ por el teorema anterior

19. 3.er Caso (caso general). — Multiplicación de polidígitos. — Sea multiplicar 4237 por 325.

Siendo $4237 \times 325 = 4237(300 + 20 + 5)$

es $4237 \times 325 = 4237 \times 300 + 4237 \times 20 + 4237 \times 5$

Pero
$$\begin{array}{r} 4\,237 \\ \times\ 300 \\ \hline 1\,271\,100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,237 \\ \times\ 20 \\ \hline 84\,740 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,237 \\ \times\ 5 \\ \hline 21\,185 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{r} 21\,185 \\ +\ 84\,740 \\ 1\,271\,100 \\ \hline \end{array}$$

$$4\,327 \times 325 = 1\,377\,025$$

En la práctica no se escriben los ceros sino que debajo del primer producto parcial se escribe el segundo corrido un lugar a la izquierda, debajo el tercero corrido dos lugares, etc. Es decir se adopta la siguiente disposición:

$$\begin{array}{r} 4\,237 \\ 325 \\ \hline 21\,185 \\ 84\,74 \\ 1\,271\,1 \\ \hline 1\,377\,025 \end{array}$$

Regla. — *Para multiplicar dos polidígitos se multiplica el multiplicando por la cifra de las unidades del multiplicador; se escriben debajo los productos del multiplicando por la segunda, tercera, etc., cifra del multiplicador corridas unos, dos, tres, etc., lugares respectivamente, a la izquierda y se suman estos productos parciales.*

MECANISMO DE LA DIVISION

Para que el cociente entre dos números sea dígito, es decir menor que 10, debe ser el dividendo menor que el producto del divisor d por 10.

Si $\quad D < d.10 \quad$ es $\quad (D) : d < 10$

y como $d.10$ se obtiene agregando a la derecha de las cifras del divisor un cero, podemos decir:

La condición para que el cociente sea dígito es que el dividendo sea menor que el número que resulta de agregar un cero a la derecha del divisor.

20. 1.^{er} Caso. — División de un dígito o polidígito por un dígito, siendo dígito el cociente.

Ejem. 1°) Determinar el cociente de dividir 63 por 7.

El cociente será dígito pues $63 < 70$.

Si $\quad (63) : 7 = x$ debe ser $x.7 \leq 63 < (x+1).7$ y como por la tabla de multiplicar $9 \times 7 = 63$ es 9 el cociente buscado

o sea $\quad (63) : 7 = 9$

Ejem. 2°) Determinar el cociente de 51 por 6.

Si $\quad (51) : 6 = x$ debe ser $x.6 \leq 51 < (x+1).6$ y como por la tabla $8 \times 6 < 51$ y $9 \times 6 > 51$ es 8 el cociente buscado

o sea $\quad (51) : 6 = 8$ y resto $51 - 8 \times 6 = 3$

21. **2.^{do} Caso. — División de polidígitos, siendo dígito el cociente.** — Determinar el cociente de 9845 por 2124. El cociente es dígito puesto que $9845 < 21240$.

Para resolver este caso demostraremos el siguiente

LEMA. — *Si se suprimen de la derecha del dividendo y divisor tantas cifras como tiene el divisor menos una, y se dividen los números que resultan, el cociente que se obtiene es igual o mayor que el de los números dados.*

HIP.) $9'845 \; ; \; 2'124$ TESIS) $(9) : 2 \geqq (9845) : 2124$

DEMOST.)

Como $(9) : 2 = 4$ es $4 . 2 < 9 < 5 . 2$ por def. coc. entero

y en particular $9 < 5 . 2$

multip. por 1000 $9000 < 5 . 2000$ por ley mon. mult.

Sumándole 845 a 9000 el signo de la desigualdad se conserva, pues por ser ambos miembros múltiplos de 1000 difieren por lo menos de 1000 y sólo se le ha sumado al primero 845 que no alcanza a 1000.

luego $9845 < 5 . 2000$

y con mayor razón $9845 < 5 . 2124$

Como el $(9845) : 2124$ debe ser tal que multiplicado por 2124 dé un número < 9845 no podrá ser 5 ni mayor que 5 ya que

$$5 . 2124 > 9845$$

Luego $(9845) : 2124$, será por lo tanto, 4 o un número menor que 4

o sea $(9845) : 2124 \leqq 4$ o $4 \geqq (9845) : 2124$

y como $(9) : 2 = 4$

resulta que $(9) : 2 \geqq (9845) : 2124$.

Aplicaciones. — Ejemplo I. Aplicando el lema en el ejemplo (9845) : 2124 vimos que el cociente podía ser 4 o menor que 4.

Si fuera $(9845) : 2124 = 4$ debiera ser $4 \times 2124 < 9845$

y como $4 \times 2124 = 8496 < 9845$ es 4 el cociente buscado.

Ejemplo II. — Obtener el (7239) : 985.

El cociente es dígito pues $7239 < 9850$.

Separamos de la derecha del dividendo y divisor tantas cifras como tiene el divisor menos una, o sea dos, y nos queda 72′39 y 9′85, y dividimos los números 72 y 9 así obtenidos.

Pero $(72) : 9 = 8$, luego el cociente de los números dados será, por el lema anterior, 8 o menor que 8.

Si fuera $(7239) : 985 = 8$ debiera ser $8 \times 985 < 7239$

pero $8 \times 985 = 7880 > 7239$ luego 8 no es el cociente

luego tendría que ser 7, ó 6, ó 5, etc.

Si fuera $(7239) : 985 = 7$ debiera ser $7 \times 985 < 7239$

y como $7 \times 985 = 6895 < 7239$ es 7 el cociente buscado

y su resto es $7239 - 6895 = 344$

En la práctica la operación se dispone así:

$$\begin{array}{r|l} 72'39 & 9'85 \\ \cline{2-2} 3\,44 & 7 \end{array}$$

y se efectúa simultánea y mentalmente la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente.

Lo dicho anteriormente nos permite enunciar la siguiente

Regla. — *Para dividir un polidígito por otro, siendo dígito el cociente, se separan de la derecha del dividendo y divisor tantas cifras* *como tiene el divisor menos una y se dividen los números que así se obtienen; el cociente de éstos se multiplica por el divisor y si el producto es menor que el dividendo, dicho cociente es el de los números dados, en caso contrario se toma el número anterior a ese cociente y se ensaya con dicho número como en el caso anterior y así se continúa hasta obtener una cifra cuyo producto por el divisor sea menor que el dividendo. Se resta ese producto del dividendo, y el resultado de esta sustracción es el resto de la división.*

22. **3.er Caso. — División de polidígitos.** — Para encontrar el cociente de dos polidígitos cualesquiera, se emplean los lemas que demostramos a continuación, en los cuales se designará con d el número total de decenas de un número dado y con u el de las unidades simples.

Lema I. — *El cociente de dividir el número de decenas del dividendo por el divisor, es igual al número de decenas del cociente.*

Hip.) $\begin{array}{r|l} 1589 & 26 \\ \hline r & d.10+u \end{array}$ Tesis) $\begin{array}{r|l} 158 & 26 \\ \hline r_1 & d \end{array}$

Dem.) Siendo el $(158) : 26 = 6$ por el 2º caso, pues $158 < 260$,

es $6 \times 26 \leq 158 < 7 \times 26$ por def. coc. entero

Multi. por 10 da $60 \times 26 \leq 1580 < 70 \times 26$

Sumándole 9 a 1580 el signo $=$ entre 60×26 y 1580 desaparece. El signo $<$ entre 1580 y 70×26 se conserva, pues por ser ambos múltiplos de 10 difieren por lo menos en 10 y sólo se le ha sumado al primero 9 que no alcanza a 10

luego $60 \times 26 < 1589 < 70 \times 26$

Como el $(1589) : 26$ debe ser tal que multiplicado por 26 dé un número < 1589, estará comprendido entre 60 y 70 y podrá, por lo tanto, valer a lo sumo 69.

Y como el número de decenas de 69 es 6 resulta que

$(\textit{decenas } 1589) : 26 = 6$ y como $(158) : 26 = d = 6$

es $(\textit{decenas } 1589) : 26 = d$

Lema II. — *Si se resta del dividendo el producto del número de decenas del cociente por el divisor seguido de un cero, y se divide la diferencia por el divisor, el cociente y el resto que se obtienen, son respectivamente, la cifra de las unidades del cociente de los números dados y el resto de la división de los mismos.*

Hip.) $\begin{array}{r|l} 1589 & 26 \\ \hline r & d.10+u \end{array}$ Tesis) $(1589 - d.260):26 = u$

Dem.) Siendo $(1589):26 = d.10 + u$ y r resto por hipótesis

es $1589 = 26(d.10+u)+r$ y $r<26$ por teor. ant.

desarrollando $1589 = 26.d.10+26.u+r$ por prop. distrib. mult.

y también $1589 = d.260 + 26\,u + r$ por prop. conm. y asociat.

Restando $d.260$ a ambos miembros y simplificando

resulta $1589 - d.260 = 26\,u + r$ y $r < 26$.

Considerando al primer miembro como un solo número y a los tres números restantes 26, u y r, y observando que los dos últimos cumplen las condiciones de cociente y de resto respectivamente

resulta $(1589 - d.260) : 26 = u$ y resto r.

Los lemas anteriores nos permitirán hallar el cociente de dos números polidígitos cualesquiera.

Aplicaciones. — Ejemplo. — Sea dividir 1589 por 26.

Siendo $1589 > 260$ el cociente de $1589 : 26$ es polidígito luego estará compuesto por decenas y unidades.

Para determinar la totalidad de esas decenas debemos aplicar el lema 1º, con lo que tendríamos

$$[1] \qquad \begin{array}{r|l} 158 & 26 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

de acuerdo con la regla anterior del 2º caso, pues $158 < 260$.

El número 6 obtenido dividiendo el número 158, que resulta de separar de la izquierda del dividendo tantas cifras como sea necesario para obtener un número mayor que el divisor, pero menor que el producto de éste por diez, es la primera cifra del cociente buscado.

Para hallar dicho cociente nos falta calcular la cifra de las unidades. Procediendo como lo indica el lema 2º, tendríamos:

$$1589 - 6 \times 260 = 29$$

luego la cifra de las unidades del cociente buscado es

[2] $(29) : 26 = 1$ y el resto 3

o bien

$$\begin{array}{r|l} 1589 & 26 \\ \cline{2-2} 29 & 61 \\ 3 & \end{array}$$

Conviene hacer notar que para obtener el número 29 basta agregar al primer resto 2 la primera cifra 9 no separada del dividendo.

Nota. — Los dividendos de las divisiones [1] y [2] se llaman respectivamente primer y segundo *dividendos parciales.*

Lo dicho anteriormente nos permite enunciar la siguiente

Regla. — *Para dividir dos polidígitos cuyo cociente sea también polidígito, se separan de la izquierda del dividendo tantas cifras como sea necesario para formar un número mayor que el divisor y menor que el mismo seguido de un cero.*

Dicho número se divide por el divisor, aplicando la regla del segundo caso. El cociente obtenido es la primera cifra del cociente buscado. Se multiplica ese cociente por el divisor y se resta el producto del número formado por las cifras separadas en el dividendo. A la derecha del resto se coloca la primera de las cifras no separadas, y el número formado se divide por el divisor, obteniéndose así la segunda cifra del cociente. Con la nueva cifra se procede como con la primera y se continúa hasta haber operado con la última de las cifras separadas. El resultado de la última resta es el resto de la división.

MECANISMO DE LA POTENCIACION

La práctica de esta operación se reduce a la de efectuar multiplicaciones sucesivas, para lo cual se procede en la forma que hemos indicado en los párrafos números 15 a 19.

MECANISMO DE LA RADICACION (*)

23. 1.er Caso. — **Raíz cuadrada entera de un número menor que cien.** — Ejemplo. 1.º) Determinar la raíz cuadrada de 81.

Si $\sqrt{(81)} = x$ debe ser $x^2 \leqq 81 < (x+1)^2$ y como

por la tabla de multiplicar es $9^2 = 81$ resulta 9 la raíz buscada

o sea $\sqrt{(81)} = 9.$

Ejemplo 2º) Determinar la raíz cuadrada de 67.

Si $\sqrt{(67)} = x$ debe ser $x^2 \leqq 67 < (x+1)^2$

y como por la tabla es $8^2 = 64 < 67$ y $9^2 = 81 > 67$ resulta 8 la raíz buscada.

o sea $\sqrt{(67)} = 8$ y resto $r = 67 - 8^2 = 3$

En la práctica estas operaciones se hacen mentalmente.

Regla. — *Para hallar la raíz cuadrada entera de un número menor que cien, se halla mentalmente el mayor número que elevado al cuadrado sea menor o igual que el dado.*

24. 2.do Caso. — **Raíz cuadrada entera de números mayores de cien.** — Para encontrar la raíz cuadrada de un polidígito cual-

(*) Conviene insistir en el mecanismo de esta operación porque es en el que menos se han ejercitados los alumnos en la Escuela Primaria.

quiera se emplean los lemas que damos a continuación, en los cuales se designará con d el número total de decenas y con u el de unidades.

Así por ej.: $\sqrt{1843} = d \,.\, 10 + u$

Lema I.— *La raíz cuadrada entera del número de centenas de un número dado, es igual al número de decenas de la raíz cuadrada entera de dicho número dado.*

HIP.) $\sqrt{(18'43)} = d \cdot 10 + u$ TESIS) $\sqrt{(18)} = d$

DEMOST.) Siendo la $\sqrt{(18)} = 4$ [1] por primer caso es por definición de raiz entera $4^2 \leqq 18 < 5^2$ y multiplicando por 100 da $4^2.100 \leqq 1800 < 5^2.100$

Sumándole 43 a 1800 el signo = entre $4^2.100$ y 1800 desaparece. El signo < entre 1800 y $5^2.100$ se conserva pues por ser ambos múltiplos de 100 difieren por lo menos en 100 y sólo se le ha sumado al primero 43 que no alcanza a 100.

Luego $4^2.100 < 1843 < 5^2.100$

pero $4^2.100 = 4^2.10^2 = (4.10)^2$ y $5^2.100 = 5^2.10^2 = 50^2$ por prop. de pot.

sustituyendo queda $40^2 < 1843 < 50^2$

Como la $\sqrt{(1843)}$ debe ser el mayor número cuyo cuadrado sea < 1843, estará comprendida entre 40 y 50, es decir, tendrá que valer, por lo menos 40 y a lo sumo 49, siendo sus decenas = 4 o sea

decenas de $\sqrt{(1843)} = 4$, como $\sqrt{(18)} = 4 = d$

resulta $\sqrt{(18)} = d$ que son las decenas de la raíz de 1843.

Lema II.— *Si del radicando se resta el cuadrado del número de decenas de la raíz, seguido de dos ceros, y se divide el número de decenas del resto por el duplo del número de decenas de la raíz, el cociente es igual o mayor que la cifra de las unidades de la raíz.*

HIP. $\sqrt{(1843)} = d \,.\, 10 + u$

TESIS) $\left(\textit{decenas de } [1843 - d^2.100]\right) : 2\,d \geqq u$

DEMOST.) Siendo $\sqrt{(1843)} = d.10 + u$ y r el resto

es $1843 = (d.10 + u)^2 + r$ por un teor. anterior

desarrollando $1843 = d^2100 + 2\,d.10.u + (u^2 + r)$ por teoremas anteriores

restando $d^2.100$ a ambos miembros y simplificando da:

$$1843 - d^2100 = 2\,d.u.10 + (u^2 + r)$$

luego $dec.\ (1843 - d^2100) = dec.\ (2\,d.u.10) + dec.\ (u^2 + r)$

o sea $dec.\ (1843 - d^2100) = 2\,d.u + dec.\ (u^2 + r)$

Como puede haber o no decenas en $(u^2 + r)$ se tiene

$$decenas\ (1843 - d^2100) \geqq 2\,d.u$$

Como el cociente de *dec.* $(1843 - d^2100)$ por $2\,d$ debe ser el mayor número que multiplicado por $2\,d$ dé un número $<$ que el dividendo resulta que ese cociente es u o un número mayor.

es decir $(decenas\ de\ [1843 - d^2100]) : 2\,d \geqq u$

Los lemas anteriores nos van a permitir hallar la raíz cuadrada de cualquier número mayor que cien.

APLICACIONES. — EJEMPLO. — Sea hallar la $\sqrt{(854\,931)}$

Siendo $854\,931 > 100$ su raíz será un número polidígito luego constará de decenas y unidades.

Para determinar la totalidad de esas decenas debemos, por el lema I, extraer la raíz cuadrada de

[1] $$\sqrt{(8549)}$$

y, a su vez, para obtener las decenas de esta raíz debemos volver a aplicar el mencionado lema, con lo que tendríamos

[2] $$\sqrt{(85)} = 9 \text{ y resto } 4$$

El número 9, obtenido hallando la raíz cuadrada del número 85 que resulta de separar del radicando tantos períodos de dos cifras, a partir de la derecha, hasta llegar a un último período tal que sea < 100, es la primera cifra de la raíz buscada.

Para hallar la raíz [1] nos falta calcular la cifra de las unidades. Procediendo como lo indica el lema II, tendríamos

$$8549 - 9^2.100 = 8549 - 8100 = 449$$

luego la cifra de las unidades de la raíz [2] es mayor o igual que

$$(\textit{decenas de } 449) : 9 \times 2 = (44) : 18 = 2 \text{ y resto } 8$$

o bien

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{85'49} & 92 \\ 81 & \\ \hline 449 & 9.2 = 18 \quad ; \quad (45) : 18 = 2 \end{array}$$

Conviene observar que para obtener el número 449 basta agregar al primer resto 4, el primer período no separado del radicando.

Para comprobar si 2 es la verdadera cifra que buscamos, elevamos 92 al cuadrado y si el resultado es menor o igual que el radicando es 2 la cifra buscada.

Pero siendo $92 = 90 + 2$

es $92^2 = (90 + 2)^2 = 90^2 + 2 \times 90 \times 2 + 2^2$ por ser el cuadrado de la suma de dos números.

Pero como ya hemos restado 90^2 a 8549, lo que nos dió 449, tenemos que restar a 449 la suma

$$2 \times 90 \times 2 + 2^2 = 2(90 \times 2 + 2) = (180 + 2)2 = 182 \times 2$$

es decir el producto por 2 del duplo de 9 seguido por la misma cifra 2.

El producto de $2 \times 182 = 364$ es menor que 449 luego 2 es la cifra buscada. Y como $449 - 364 = 85$ resulta:

$$\sqrt{(8549)} = 92 \text{ y el resto es } 85.$$

El número 92, es por lo que dijimos, la totalidad de las decenas de la raíz buscada. Para determinar el número de unidades, volvemos a aplicar el lema segundo pero recordando que si 85 es el resto de $\sqrt{(8549)}$ se tiene, por definición

$$8549 - 92^2 = 85$$

y por lo tanto $854931 - 9^2.100 = 8531$ por lo que se acaba de observar, es decir, que para hallar la diferencia entre el radicando y el cuadrado de la raíz hallada multiplicada por 100, basta agregar al segundo resto el otro período no separado del radicando. La cifra de las unidades buscada sería mayor o igual que

$$(\textit{decenas de } 8531) : 92 \times 2 = (853) : 184 = 4$$

y comprobando como en el caso anterior tendríamos que, siendo $8531 < 1844 \times 4$, es 4 la cifra buscada.

Luego $$\sqrt{(854\,931)} = 924.$$

En la práctica la operación se dispone así:

$\sqrt{85'4\,9\,3\,1}$	924				
81					
4 4'9	$9 \times 2 = 18$	;	$(44) : 18 = 2$	;	$182 \times 2 = 364$
3 6 4					
8 5 3'1	$92 \times 2 = 184$	;	$(853) : 184 = 4$	;	$1844 \times 4 = 7376$
7 3 7 6					
1 1 5 5					

Los razonamientos anteriores permiten dar la siguiente:

Regla. — *Para extraer la raíz cuadrada de un número mayor que cien se lo divide en grupos de dos cifras a partir de la derecha, pudiendo resultar que el último tenga sólo una cifra. Se extrae la raíz cuadrada del último grupo, con lo que se obtiene la primera cifra de la raíz buscada. Después se resta del primer grupo, el cuadrado de la cifra encontrada y a la derecha de este resultado se escribe el grupo siguiente, separando la primera cifra de la derecha del número* *formado, con una como en lo alto, y se divide el número restante por el duplo de la raíz. El cociente de esa división podrá ser la segunda cifra de la raíz. Para comprobar si lo es, se la escribe a la derecha del divisor anterior y se multiplica el número así formado por la misma cifra. Si el producto puede restarse del número que resulta agregando al dividendo anterior, la cifra separada, es esta la segunda cifra de la raíz.*

En caso contrario se considera la cifra inmediata inferior y se la comprueba en la misma forma, y así se continuará hasta obtener la cifra buscada.

Se efectúa la resta anterior, y a la derecha del resultado se escribe el grupo siguiente separando la primera cifra de la derecha, y dividiendo el número restante por el duplo del número formado por las dos primeras cifras de la raíz. El cociente que se obtiene podrá ser la tercera cifra de la raíz.

Se la comprueba como el caso anterior y se continúa en la misma forma hasta haber considerado el primer grupo.

Aplicaciones. — Ejemplo I. ¿Cuántas unidades de millar, cuántas centenas y cuántas decenas hay en los números 223 184; 7 236; 526?

Ejemplo II ¿Qué diferencia existe, en cada uno de los números anteriores, entre el número de centenas y la cifra de las centenas?

Ejemplo III. Escribir en la forma más simple los números: cinco billones, un millón, cien mil millones. (Téngase presente que 1 billón $= 10^{12}$ . . ?

Ejemplo IV. Hallar los valores que deberán tener las letras para que se verifiquen las igualdades:

$$x^2 = 162\,409\,; \qquad \sqrt{9\,000\,000} = c\,; \qquad 64\,160\,100 = y^2.$$

Ejemplo V. ¿Cuál es el menor número que hay que restarle a 567 para obtener un cuadrado perfecto?

CAPITULO III

SISTEMA METRICO DECIMAL

PROGRAMA. — *Historia. Ventajas del sistema métrico decimal sobre los demás sistemas. Medidas de longitud, superficie, volumen, capacidad y peso. Correspondencia entre las unidades de volumen y peso. Peso específico. Ejercicios y problemas.*

27. **Historia del sistema métrico decimal.** — Hasta fines del siglo XVIII, todos los países, sin excepción, empleaban para sus mediciones, sistemas particulares distintos y en los cuales sus unidades no guardaban relaciones determinadas.

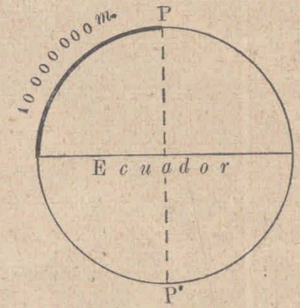
Así, por ejemplo, para medir las longitudes se empleaba en Inglaterra la *yarda*, en España la *vara*, y en Francia la *toesa*.

Esta diversidad de unidades, que aun dentro de un mismo país, variaba de una provincia o ciudad a otra, traía como consecuencia errores y fraudes y hacía además complicado el cálculo a que daban lugar ciertas operaciones comerciales.

Con el propósito de uniformar y facilitar las mediciones, la Asamblea Constituyente reunida en París a principios del año 1790 decretó la supresión de las viejas unidades de medida y la creación de un nuevo sistema, misión esta última que confió a la Academia de Ciencias, quien a su vez designó a los sabios Berthollet, Borda. Lagrange, Delambre, Laplace, Mechain y Prony, para tal objeto.

Esta comisión resolvió que la unidad de longitud del nuevo sistema, fuera sacada de las dimensiones del globo terrestre, para lo cual dos de los mencionados sabios, Delambre y Mechain, midieron en toesas el arco de meridiano comprendido entre Dunkerque y Barcelona. Esta medición, con otras ya efectuadas anteriormente, permitió calcular la longitud del cuarto de meridiano terrestre, supuesta esférica la Tierra. Este cálculo dió por resultado 5 130 740 *toesas* de París.

Las diez millonésima parte de la longitud del cuarto de meridiano, o sea 0,5130740 toesas (poco más de media toesa), fué adoptada como unidad de longitud del nuevo sistema y designada con el nombre de *metro*.



Para poder reproducir la unidad y utilizarla en los diversos países, se construyó una barra de platino iridiado, que a la temperatura del hielo en fusión, tenía la longitud de un metro. Dicha barra fué depositada en los Archivos Nacionales de Francia en el año 1790 y se conoce con el nombre de *metro patrón.*

NOTA. — Mediciones más precisas han probado que el metro no es exactamente la diez milonésima parte del cuarto de meridiano terrestre sino algo menor; de manera que actualmente *el metro se define diciendo que es la longitud del metro patrón.*

28. **Ventajas del sistema métrico decimal sobre los demás sistemas.** — Se llama *Sistema métrico decimal* al que tiene por *unidad fundamental* al *metro* que es la unidad principal de *longitud*. Dicho sistema comprende además las unidades de *superficie, volumen, capacidad* y *peso,* todas las cuales están relacionadas con la unidad principal de longitud. Así: la unidad principal de superficie es el *metro cuadrado* que es la superficie de un cuadrado cuyo lado tiene un metro de longitud; la unidad principal de volumen es el *metro cúbico* que es el volumen de un cubo cuya arista tiene un metro de longitud.

La unidad principal de capacidad es el *litro,* que es el volumen de un cubo cuya arista tiene una longitud igual a la décima parte del metro. Además de las unidades principales que acabamos de definir, se consideran dentro de cada magnitud, otras unidades, llamadas *secundarias*, que son múltiplos o submúltiplos de las primeras, según potencias del número 10.

Para designar a estas unidades, basta anteponer al nombre de la unidad principal los prefijos:

Múltiplos			Submúltiplos		
Deca	que significa	10	*deci*	que significa	0,1
Hectó	» »	100	*centi*	» »	0,01
Kilo	» »	1000	*mili*	» »	0,001
Miria	» »	10000			

Así, por ejemplo, el metro lineal que se representa por m, se divide en 10 partes iguales, cada una de las cuales se llama *decí*metro y se representa por dm; el decímetro se divide en 10 partes iguales, cada una de las cuales se llama *centí*metro y se representa por cm., y éste se divide en 10 partes iguales, cada una de las cuales se llama *milí*metro, y se representa por mm.

Por otra parte la suma de 10 metros se llama *Decá*metro y se representa por Dm; la suma de diez Decámetros se llama *Hectó*metro y se representa por Hm; la suma de 10 Hectómetros se llama *Kiló*metro y se representa por Km.

En la práctica suele darse preferencia, en ciertas mediciones, a determinadas unidades secundarias. Así, por ejemplo, para medir la distancia entre dos ciudades se emplea el Kilómetro, en cambio se emplea el centímetro para medir un segmento.

El empleo de las diversas unidades secundarias, para medir las cantidades de una misma magnitud, nos conduce al problema de expresar o *reducir* unidades de un orden a las de otro.

Ejemplo I. — Sea, por ejemplo, reducir a centímetros 3 Dm.

Siendo $1 \text{ Dm} = 10 \text{ m}$ $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$ y $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$

es $1 \text{ Dm} = 10.10.10 \text{ cm} = 1000 \text{ cm}$ luego $3 \text{ Dm} = 3000 \text{ cm}$.

Ejemplo II. — Hallar cuantos metros hay en 7 dm.

Siendo $1 \text{ dm} = 0{,}1 \text{ m}$ es $7 \text{ dm} = 0{,}1 \text{ m} \times 7 = 0{,}7 \text{ m}$

En resumen; el Sistema métrico decimal presenta sobre los demás sistemas las siguientes ventajes:

1º) *Siendo casi universalmente adoptado, elimina la diversidad de unidades existentes en los distintos países.*

2º) *Las relaciones entre las diversas unidades principales son, por definición, muy sencilas, lo que facilita su control.*

3º) *La sencillez de los cálculos con las mediciones efectuadas en dicho sistema, pues son aplicables a ella las reglas de cálculo estudiadas para los números decimales.*

29. **Medidas de longitud.** — Hemos visto que la unidad principal de longitud es el *metro* (m). Las unidades secundarias son

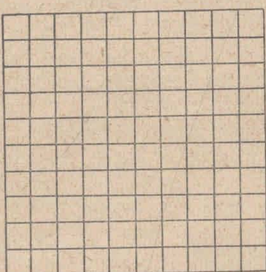
Múltiplos	*Decámetro*	(Dm) =	= 10 m
	Hectómetro	(Hm) = 10 Dm	= 100 m
	Kilómetro	(Km) = 10 Hm	= 1000 m
	Miriámetro	(Mm) = 10 Km	= 10 000 m
Submúltiplos	*decímetro*	(dm) =	= 0,1 m
	centímetro	(cm) = 0,1 dm	= 0,01 m
	milímetro	(mm) = 0,1 cm	= 0,001 m

Se emplea además para mediciones de gran precisión el *micrón* = 0,000 001 m y que se representa por la letra griega μ que se lee «mu».

Definición. — Se llaman *unidades reales o efectivas,* aquellas unidades de medida que se construyen materialmente, para efectuar prácticamente las mediciones.

Las *medidas efectivas de longitud* son el doble decímetro y el doble decámetro (cadena).

30. **Medidas de superficie.** — La unidad principal es el *metro cuadrado* (m^2). Las unidades secundarias son las superficies de cuadrados que tienen por lados los múltiplos y submúltiplos del metro. Así por ejemplo el ***Decámetro cuadrado*** es la superficie de un cuadrado de 10 m de lado, y que se compone de 100 cuadrados de 1 m de lado; por lo tanto 1 $Dm^2 = 100\ m^2$.



Análogamente el ***Hectómetro cuadrado*** es igual a 100 Dm^2 y en general, cada unidad es igual a cien unidades del orden inmediato inferior:

Múltiplos	*Decámetro cuadrado*	(Dm^2)	$=(10\ m\ )^2 = 100\ m^2$
	Hectómetro cuadrado	(Hm^2)	$=(10\ Dm)^2 = 10\,000\ m^2$
	Kilómetro cuadrado	(Km^2)	$=(10\ Hm)^2 = 1\,000\,000\ m^2$
	Miriámetro cuadrado	(Mm^2)	$=(10\ Km)^2 = 100\,000\,000\ m^2$
Submúlt.	*decímetro cuadrado*	(dm^2)	$=(0{,}1\ m\ )^2 = 0{,}01\ m^2$
	centímetro cuadrado	(cm^2)	$=(0{,}1\ dm)^2 = 0{,}0001\ m^2$
	milímetro cuadrado	(mm^2)	$=(0{,}1\ cm)^2 = 0{,}000001\ m^2$

Observación. — Las expresiones de la forma $(5\ m)^2$; $(10\ cm)^2$; $(0{,}02\ Dm)^2$; etc., se tratan en el cálculo como potencias de monomios. Así:

$$(5\ m)^2 = 25\ m^2\ ;\ (10\ cm)^2 = 100\ cm^2\ ;\ (0{,}02\ Dm)^2 = 0{,}0004\ Dm^2.$$

Igualmente productos de la forma $8\ m \times 3\ m$; $9\ cm \times 0{,}2\ cm$; etc. se efectúan como productos de monomios. Así:

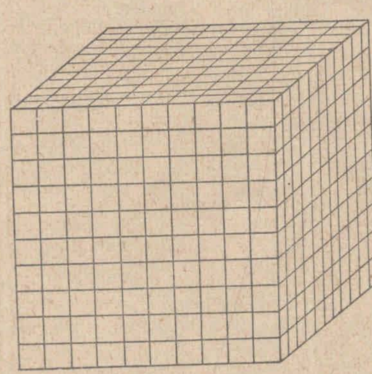
$$8\ m \times 3\ m = 24\ m^2;\ 9\ cm \times 0{,}2\ cm = 1{,}8\ cm^2.$$

Es corriente expresar la superficie de los campos, utilizando como unidades al Hm^2, al Dm^2 y m^2 con los nombres *Hectárea, Area* y *Centiárea* respectivamente. Es decir:

$$\begin{cases} \textit{Hectárea} \ (\text{Ha}) = \text{Hm}^2 \\ \textit{Area} \quad\ (\text{a}) = \text{Dm}^2 \\ \textit{Centiárea} \ (\text{ca}) = \text{m}^2 \end{cases}$$

Observación. — No se construyen medidas efectivas de superficie pues éstas no se miden directamente. Así, por ejemplo, la superficie de un rectángulo se determina conociendo las longitudes de la base y de la altura, y en general la superficie de una figura cualquiera, se halla midiendo las longitudes de ciertas líneas que pertenecen a ella, y procediendo como indica en cada caso la Geometría.

31. **Medidas de volumen.** — La unidad principal es el *metro cúbico* (m^3). Las unidades secundarias son los volúmenes de cubos que tienen por lados los múltiplos y submúltiplos del metro. Así por ejemplo, el *Decámetro cúbico* es el volumen de un cubo de 10 m lado, y que se compone de 1000 cubos de 1 m lado; por lo tanto 1 Dm^3 = 1000 m^3.



Análogamente el *Hectómetro cúbico* es igual a 1000 Dm^3, y en general cada unidad es igual a 1000 unidades del orden inmediato inferior.

$$\textit{Múltiplos} \begin{cases} \textit{Decámetro cúbico} \ (\text{Dm}^3) = (10\ \text{m}\ )^3 = 1000\ \text{m}^3 \\ \textit{Hectómetro cúbico} \ (\text{Hm}^3) = (10\ \text{Dm})^3 = 1000\,000\ \text{m}^3 \\ \textit{Kilómetro cúbico} \ (\text{Km}^3) = (10\ \text{Hm})^3 = 1000.000.000\ \text{m}^3 \\ \textit{Miriámetro cúbico} \ (\text{Mm}^3) = (10\ \text{Km})^3 = 1000.000.000.000\ \text{m}^3 \end{cases}$$

Sub-múlt.	*decímetro cúbico*	(dm^3)	$=(0{,}1\ m)^3 = 0{,}001\ m^3$
	centímetro cúbico	(cm^3)	$=(0{,}1\ dm)^3 = 0{,}000\ 001\ m^3$
	milímetro cúbico	(mm^3)	$=(0{,}1\ cm)^3 = 0{,}000\ 000\ 001\ m^3$

OBSERVACIÓN. — Las expresiones de la forma $(3\ m)^3$; $(10\ cm)^3$; $(1{,}2\ Km)^3$; etc. se tratan en el cálculo como potencias de monomios. Así:

$$(3\ m)^3 = 27\ m^3;\quad (10\ cm)^3 = 1000\ cm^3;\quad (1{,}2\ Km)^3 = 1{,}728\ Km^3$$

Igualmente productos de la forma $2\ m \times 0{,}5\ m \times 6\ m$; $2\ m^2 \times 0.8\ m$; etc., se efectúan como productos de monomios. Así:

$$2\ m \times 0{,}5\ m \times 6\ m = 6\ m^3 \quad ; \quad 2\ m^2 \times 0{,}8\ m = 1{,}6\ m^3$$

La única medida efectiva de volumen, es el m^3 que con el nombre de *estereo* se usa para medir la leña.

32. **Medidas de capacidad.** — La unidad principal de capacidad es el *litro* (1), que es igual a un decímetro cúbico. Las unidades secundarias son:

Múltiplos	*Decálitro*	(Dl) =	= 10 l
	Hectólitro	(Hl) = 10 Dl	= 100 l
	Kilólitro	(Kl) = 10 Hl	= 1000 l
	Miriálitro	(Ml) = 10 Kl	= 10 000 l
Submúltiplos	*decílitro*	(dl) =	= 0,1 l
	centílitro	(cl) = 0,1 dl	= 0,01 l
	mililitro	(ml) = 0,1 cl	= 0,001 l

Estas unidades se construyen de metal o de vidrio para los líquidos y de madera para los áridos.

33. **Unidades de peso.** — La unidad principal es el *gramo* (gr), que es el peso, en el vacío y en un lugar determinado, de 1 cm^3 de agua destilada y a la temperatura de 4°. Las unidades secundarias son:

Múltiplos.	*Decágramo*	(Dg) =		= 10 gr	
	Hectógramo	(Hg) =	10 Dg	= 100 gr	
	Kilógramo	(Kg) =	10 Hg	= 1000 gr	= 1 Kg
	Miriágramo	(Mg) =	10 Kg	= 10 000 gr	= 10 Kg
	Quintal	(q) =	10 Mg	= 100 000 gr	= 100 Kg
	Tonelada	(t) =	10 q	= 1000 000 gr	= 1000 Kg

Submúltip.	*decígramo*	(dg) =		= 0,1 gr
	centígramo	(cg) =	0,1 dg	= 0,01 gr
	milígramo	(mg) =	0,1 cg	= 0,001 gr

Siendo el gramo una unidad pequeña, en la práctica se toma como unidad el Kilogramo y se agregan además dos múltiplos: el *quintal métrico* (q) y la *tonelada métrica* (t), como puede verse en el cuadro de los múltiplos.

Medidas efectivas. — Se emplean en la práctica, medidas efectivas iguales a los múltiplos y submúltiplos del kilogramo, a su duplo y a su mitad. Los pesos efectivos más grandes se construyen de hierro fundido, los otros de bronce y los más pequeños de plata o de platino.

34. **Correspondencia entre las unidades de volumen y peso.** — Al definir las unidades de volumen y de peso vimos que *un gramo* era el peso de un *centímetro cúbico* de agua destilada a 4°C de temperatura. Por esa razón las unidades *gramo* y *centímetro cúbico* y sus múltiplos se llaman *unidades correspondientes.*

A continuación damos un cuadro en el que se consignan las unidades correspondientes más usadas:

Unidades de peso	gr	Kg	t
Unidades de Volumen	cm^3	dm^3	m^3

35. **Peso específico.** — Definicion. — Se llama *peso específico* de una substancia, en un lugar determinado, al cociente de la medida del peso de un cierto volumen de la misma, en ese lugar, por la medida de dicho volumen tomada con respecto a unidades correspondientes.

Indicando con P el peso de un volumen V de un cuerpo, y suponiendo que peso y volumen han sido medidos con unidades correspondientes, se tiene:

$$p.\,e. = \frac{med.\ \mathrm{P}}{med.\ \mathrm{V}} \quad [1] \quad \text{donde } p.\,e. \text{ se lee peso específico.}$$

Tratemos de hallar, por ejemplo, el peso específico del aluminio. Tomando un volumen $V = 4\ cm^3$, su peso expresado en gr, que es la unidad correspondiente al cm^3, es $P = 10{,}4$ gr, luego:

$$p.\,e. = \frac{med.\ 10{,}4\ \mathrm{gr}}{med.\ 4\ \mathrm{cm}^3} = \frac{10{,}4}{4} = 2{,}6$$

Ejemplo II) *Hallar el peso específico del agua destilada.*

Siendo por definición 1 gr el peso de 1 cm^3 de agua destilada a 4°C resulta

$$p.\,e. = \frac{med.\ 1\ \mathrm{gr}}{med.\ 1\ \mathrm{cm}^3} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{es decir}$$

El peso específico del agua es igual a 1.

Observación. — De los ejemplos anteriores resulta que:

Decir que el peso específico de un cuerpo, por ejemplo el aluminio, es p. ej. = 2,6 significa que un determinado volumen de esa substancia pesa 2,6 veces más que el mismo volumen de agua.

Así, por ejemplo, si el peso específico del mercurio es *p. ej.* = 13,6, eso significa que 1 cm^3 de mercurio pesa 13,6 veces más que 1 cm^3 de agua, es decir 13,6 gr.

Análogamente, si el peso específico del corcho es 0,24 eso significa que 1 cm^3 de corcho pesa 0,24 de lo que pesa 1 cm^3 de agua, es decir 0,24 gr puesto que 1 cm^3 de agua pesa 1 gr.

De la fórmula [1] que da el peso específico, resulta:

$$med.\ \mathrm{P} = p.\ e. \times med.\ \mathrm{V} \quad [2] \quad \text{y} \quad med.\ \mathrm{V} = \frac{med.\ \mathrm{P}}{p.\ e.} \quad [3]$$

que expresan respectivamente:

El peso de un cuerpo tiene por medida al producto de su peso específico por la medida de su volumen tomados con unidades correspondientes.

El volumen de un cuerpo tiene por medida al cociente de la medida de su peso, tomado con la unidad correspondiente a la del volumen, por su peso específico.

Aplicaciones. — *¿Cuál será el peso de 4 m^3 de acero si su peso específico es 7,5?*

Sabemos que: $med.\ \mathrm{P} = p.\ e. \times med.\ \mathrm{V}$

luego en nuestro caso es $med.\ \mathrm{P} = 7{,}5 \times med.\ 4\ \mathrm{m}^3$.

Adoptando como unidad de medida para el volumen 4 m^3 el m^3, y su unidad correspondiente la tonelada t para el peso P, tendremos:

$$med.\ \mathrm{P} = \frac{\mathrm{P}}{t} \quad \text{y} \quad med.\ 4\ \mathrm{m}^3 = \frac{4\ \mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^3} = 4$$

y por lo tanto $$\frac{\mathrm{P}}{t} = 7{,}5 \times 4$$

de donde $\mathrm{P} = 7{,}5 \times 4\ \mathrm{t} = 30\ \mathrm{t}$ es el peso de los 4 m^3 de acero.

EJEMPLO II) *¿Cuál es el volumen de una barra de bronce cuyo peso es de 110 Kg si el peso específico del bronce es 8,8?*

Sabemos que: $$med.\ V = \frac{med.\ P}{p.\ e.}$$

luego en nuestro caso es $$med.\ V = \frac{med.\ 110\ Kg.}{8,8}.$$

Adoptando como unidad de medida para el peso 110 Kg el Kg, y su unidad correspondiente el decímetro cúbico para el volumen V, tendremos

$$med.\ V = \frac{V}{dm^3} \quad y \quad med.\ 110\ Kg. = \frac{110\ Kg}{Kg} = 110$$

y por lo tanto $$\frac{V}{dm^3} = \frac{110}{8,8}.$$

de donde $$V = \frac{110\ dm^3}{8,8} = 12,5\ dm^3$$ es el volumen de los 110 Kg de bronce.

Aplicaciones. — EJEMPLO I. Expresar en milímetros un decámetro, en centímetros un hectómetro y en decímetros un kilómetro.

EJEMPLO II. ¿Qué parte del hectómetro es el decímetro? ¿qué fracción del miriámetro es el decámetro?

EJEMPLO III. Expresar en decámetros cuadrados las superficies siguientes:

$6\ m^2\ 12\ dm^2\ 18\ cm^2$; $630\ m^2\ 5401\ mm^2$; $54\ mm^2$.

EJEMPLO IV. Escribir en forma de fracciones decimales, tomando al metro cúbico como unidad, los volúmenes siguientes:

$12\ m^3\ 428\ dm^3\ 40\ cm^3$; $18\ dm^3$; $12\,847\,348\ dm^3$; $8\ mm^3$.

EJEMPLO V. Escribir, tomando al kilogramo por unidad, los pesos siguientes: 20 gr. 3 cgr; 5 dgr 30 mgr; 98 t; 498 dgr.

EJEMPLO VI. ¿Cuál es el peso total de un barril de aceite de 225 litros de capacidad si pesa vacío 63,5 Kg y el peso específico del aceite es 0,92?

CAPITULO IV

RAZONES Y PROPORCIONES NUMERICAS

PROGRAMA. — *Definiciones. Proporción contínua. Teorema fundamental de las proporciones. Recíproco. Caso particular en que la proporción es contínua. Cálculo de un extremo o de un medio desconocido en una proporción ordinaria o continua. Las siete nuevas proporciones deducidas de una dada. Nuevas proporciones deducidas de una dada por adición o sustracción de sus términos. Series de razones iguales. Propiedad fundamental.*

38. **Definición I.** — Se llama *razón* entre dos números reales distintos de cero, dados en un cierto orden, al cociente exacto del primero por el segundo. El primero se llama *antecedente* y el segundo *consecuente.*

En símbolos: la razón entre a y b es $\frac{a}{b} = a : b$ siendo a y b números reales.

EJEMPLOS:

La razón entre 8 y -4 es $\frac{8}{-4} = -2$

» » » 0,3 y 6 es $\frac{0{,}3}{6} = 0{,}05$

» » » $\sqrt{8}$ y $\sqrt{2}$ es $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2.$

Definición II. — Dados en un cierto orden cuatro números reales distintos de cero, se dice que forman una *proporción*, cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos últimos.

En símbolos: Dados a, b, c, y d si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a, b, c y d forman una proporción y se lee « a es a b como c es a d ».

Ejemplos:

$\frac{-1}{0{,}5} = \frac{-8}{4}$ es una proporción pues $\frac{-1}{0{,}5} = -2$ y $\frac{-8}{4} = -2$

$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{9}}$ » » » » $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{9}{10}$ y $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{10}$.

Definición III. — Los números dados se llaman *términos* de la proporción, el antecedente de la primera y el consecuente de la segunda razón se llaman *extremos* y el consecuente de la primera razón y el antecedente de la segunda se llaman *medios*.

Así en $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ a y d son *extremos* y b y c *medios*.

Nota. — Estas denominaciones provienen de la forma en que se acostumbra también a escribir las proporciones.

$$a : b : : c : d \qquad [1]$$

Observación. — La definición de proporción puede enunciarse brevemente diciendo: *proporción es la igualdad de dos razones.*

39. **Proporción contínua.**— Definición. — Se dice que una proporción es *continua* cuando sus medios son iguales.

En símbolos: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ es una proporción contínua.

Ejm.: $\frac{7}{11} = \frac{11}{17\frac{2}{7}}$ y $\frac{5}{0{,}8} = \frac{0{,}8}{0{,}128}$ son prop. contínuas.

En cada proporción contínua se dice que el medio b es *medio proporcional* entre los extremos a y c, y que el extremo c es *tercero proporcional* al medio b y al otro extremo a.

40. **Teorema fundamental.**— Consideremos la proporción entre números enteros $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$.

Como cada razón es un número racional y además son éstos iguales, los productos cruzados de sus términos también lo son, es decir, $3.12 = 4.9$ de acuerdo con la definición de números racionales iguales. Pero como los factores del primer producto son los extremos de la proporción, y los factores del segundo los medios de la misma, se tendrá que en la proporción considerada: *el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

El teorema que sigue prueba que esta propiedad es válida, cuando los términos de la proporción son enteros, fraccionarios o irracionales, es decir, números reales cualesquiera.

Teorema fundamental de las proporciones. — *En toda proporción el producto de los extremos es igual al de los medios.*

Hip.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Tesis) $a.d = c.b.$

Demost.) Puesto que en la igualdad de la Tesis, no hay divisores, para llegar a ella partiendo de la Hipótesis procuremos hacerlos desaparecer en ésta. Para que desaparezca el divisor b en la primera razón, basta multiplicarla por b, y a fin de que subsista la igualdad, habrá que multiplicar a la segunda razón por b; para que desaparezca el divisor d en la segunda razón, basta multiplicarla por d y a fin de que subsista la igualdad habrá que multiplicar la primera razón por d. Por lo tanto para que desaparezcan los dos divisores de la igualdad de la Hipótesis basta multiplicar ambos miembros por $b . d$ y simplificar.

Tenemos pues que

siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por hipótesis

y $bd = bd$ por carácter idéntico.

Múltipl. m. a m. $\frac{a}{b} . bd = \frac{c}{d} . bd$ por prop. unif. de multiplic.

simplificando queda $a . d = c . b$ con lo que el teorema resulta demostrado.

41. **Teorema recíproco.** — *Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos* (siendo uno de ellos distintos de cero) *se puede formar con ellos una proporción siendo extremos los factores de un producto y medios los del otro.*

Hip.) $a.d = c.b$ Tesis) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

a, b, c y d distintos de cero.

Demost.) Siendo, por hip., $a . d = c . b$ y además

distinto de cero el producto $bd = bd$

Dividiendo m. a m. da $\frac{a\cancel{d}}{b\cancel{d}} = \frac{c\cancel{b}}{\cancel{b}d}$ por prop. unif. división.

Simplificando queda $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

42. Teorema fundamental de las proporciones contínuas. — *En toda proporción contínua el producto de los extremos es igual al cuadrado del medio.*

HIP.) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ TÉSIS) $a \cdot c = b^2$

DEMOST.) Aplicando el teerema fundamental a la proporción de la hipótesis, se tiene:

$$a.c = b.b$$

o sea $a.c = b^2$ con lo que el teorema queda demostrado.

TEOREMA RECÍPROCO. — *Si el producto de dos números es igual al cuadrado de un tercero, se puede formar con ellos una proporción continua siendo extremos los factores del primer producto y medios el tercer número.*

HIP.) $a\,c = b^2$ TESIS) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

DEMOST.) Siendo, por hip., $ac = b^2$

y $bc = bc$ por carácter idéntico

Dividiendo m. a m. da $\frac{ac}{bc} = \frac{b^2}{bc}$

Simplificando, queda $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

43. Cálculo de un extremo desconocido en una proporción ordinaria o contínua. — PROBLEMA I. — *Calcular el extremo desconocido en la proporción* $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Siendo en la proporción ant. $a \cdot x = c \cdot b$ por teorema fundam.

pasando a al 2º miembro da: $x = \frac{c \cdot b}{a}$ lo que nos dice que:

Un extremo desconocido es igual al producto de los medios dividido por el extremo conocido.

Aplicaciones. — Calcular x en la proporción $\dfrac{6}{3} = \dfrac{8}{x}$

$$x = \frac{8 \,.\, 3}{6} = \frac{24}{6} = 4.$$

Calcular x en la proporción $\dfrac{\frac{3}{4}}{0{,}5} = \dfrac{8}{x}$

$$x = \frac{8 \,.\, 0{,}5}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = \frac{4 \,.\, 4}{3} = \frac{16}{3}.$$

Problema II. — *Calcular el extremo desconocido en la proporción contínua* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{x}$.

Siendo en la proporción dada $a \,.\, x = b^2$ por el teorema fundamental de las proporciones contínuas

pasando a al 2º miembro da $x = \dfrac{b^2}{a}$ lo que nos dice que:

Un extremo desconocido en una proporción contínua es igual al cuadrado del medio dividido por el extremo conocido.

Aplicaciones. — Calcular x en la proporción $\dfrac{-4}{8} = \dfrac{8}{x}$ = 16

$$x = \frac{8^2}{-4} = \frac{64}{-4} = -16$$

Calcular x en la proporción $\dfrac{0{,}3}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{x}$

$$x = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{0{,}3} = \frac{\frac{1}{4}}{0{,}3} = \frac{1}{1{,}2}.$$

44. Cálculo de un medio desconocido en una proporción ordinaria o contínua.— PROBLEMA III. — *Calcular el medio desconocido en la proporción* $\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$.

Siendo en la proporción dada $a \cdot d = c \cdot x$

pasando c al 1er miembro da $x = \frac{a \cdot d}{c}$ lo que nos dice que

Un medio desconocido es igual al producto de los extremos dividido por el medio conocido.

APLICACIONES. — Calcular x en la proporción $\frac{12}{x} = \frac{6}{-5}$

$$x = \frac{12 \cdot (-5)}{6} = \frac{-60}{6} = -10.$$

Calcular x en la proporción $\frac{0{,}8}{-4} = \frac{x}{0{,}5}$

$$x = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}5}{-4} = \frac{0{,}4}{-4} = \frac{0{,}1}{-1} = -0{,}1.$$

PROBLEMA IV. — *Calcular el medio desconocido en la proporción contínua* $\frac{a}{x} = \frac{x}{c}$.

Siendo en la proporción dada $a \cdot c = x^2$

extrayendo la raíz cuadrada $x = \sqrt{a \cdot c}$ lo que nos dice que:

El medio desconocido en una proporción contínua es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

APLICACIONES. — Calcular x en la proporción $\frac{3}{x} = \frac{x}{27}$

$$x = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9.$$

Calcular x en la proporción $\frac{8}{x} = \frac{x}{\frac{2}{9}}$

$$x = \sqrt{8 \cdot \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

45. Las siete nuevas proporciones deducidas de una dada. — Corolario I. — *Si en una proporción se invierten sus razones, se obtiene otra proporción.*

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

En efecto: Siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por hip. es $a . d = c . b$ por teor. fund.

o bien $b . c = d . a$ por. car. recíp. y prop. conm. mult.

luego $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ por el teor. recíproco del fundam.

Corolario II. — *Si en una proporción se permutan los extremos, se obtiene otra proporción.*

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

En efecto: Siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por hip. es $a . d = c . b$ por teor. fund.

o bien $d . a = c . b$ por prop. conmutativa de multipl.

luego $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. por el teor. recíproco del fundam.

Corolario III. — *Si en una proporción se permutan los medios, se obtiene otra proporción.*

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

En efecto: Siendo $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ por hip. es $a \, . \, d=c \, . \, b$ por teor. fund.

o bien $a \, . \, d=b \, . \, c$ por prop. conmutativa de multipl.

luego $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ por teorema recíproco del fundam.

Corolario IV. — *Si en una proporción, se permutan las razones, se obtiene otra proporción.*

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ es $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$.

En efecto: Es cierto por el carácter recíproco de la igualdad de números reales.

Las ocho formas de escribir una proporción. — Los cuatro corolarios anteriores nos permiten deducir de una proporción dada otras siete proporciones:

1ª) Así de: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ resultan las siguientes:

2ª) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ que se obtiene invirtiendo las razones en la 1ª

3ª) $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ que se obtiene permutando los extremos en la 1ª

4ª) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ que se obtiene permutando los medios en la 1ª

Permutando las razones de las proporciones 1ª, 2ª, 3ª y 4ª se obtienen respectivamente

5ª) $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ permutando las razones en la 1ª

6ª) $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ » » » » » 2ª

7ª) $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ » » » » » 3ª

8ª) $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$ » » » » » 4ª

46. Nuevas proporciones deducidas de una dada por adición o sustracción de sus términos. — TEOREMA I. — *En toda proporción la suma de antecedente y consecuente de la primera razón, es a su consecuente, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.*

HIP.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ TESIS) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

DEMOST.) Siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por hipótesis, sumando 1 a ambos miembros da $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ por prop. unifor. de la suma

o sea $\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$

luego $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ por la recíproca de la propiedad distributiva de la división con respecto a la adición.

TEOREMA II. — *En toda proporción la diferencia de antecedente y consecuente de la primera razón, es a su consecuente, como la diferencia entre antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.*

HIP.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ TESIS) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

DEMOST.) Siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por hip., rest. 1 a ambos miembros resulta $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$

o sea $\frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{d} - \frac{d}{d}$

luego $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ por la recíproca de la propiedad distributiva de la división con respecto a la resta.

47. **Serie de razones iguales.** — DEFINICIÓN. — Se llama *serie de razones iguales*, a la igualdad de dos o más razones.

En símbolos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots = \frac{m}{n}$ es una serie de razones iguales,

EJEMPLOS: $\frac{8}{4} = \frac{2}{1}$; $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{5}{15}$.

OBSERVACIÓN. — Como puede verse en el primer ejemplo, una proporción es un caso particular de una serie de razones iguales.

48. **Propiedad fundamental de la serie de razones iguales.** — TEOREMA. — *En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes, es a la suma de los consecuentes, como un antecedente es a su consecuente.*

HIP.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots = \frac{m}{n}$

TESIS) $\frac{a + c + e + \ldots + m}{b + d + f + \ldots + n} = \frac{a}{b}$.

DEMOST.) Representando el valor de la razón $\frac{a}{b}$ por q, como las razones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \ldots, \frac{m}{n}$ son iguales por hipótesis, son también

$$\frac{c}{d} = q \quad , \quad \frac{e}{f} = q \,, \ldots \,, \quad \frac{m}{n} = q.$$

Siendo $\frac{a}{b} = q$ es $a = b.q$ por def. de razón y de cociente

» $\frac{c}{d} = q$ » $c = d.q$ » » » » » » »

» $\frac{e}{f} = q$ » $e = f.q$ » » » » » » »

. . . .

» $\frac{m}{n} = q$ » $m = n.q$ » » » » » » »

Sumando m. a m. y sacando factor común q en el 2º miembro

se tiene $a + c + e + \ldots + m = (b + d + f + \ldots + n)\,q$

luego $\dfrac{a + c + e + \ldots + m}{b + d + f + \ldots + n} = q$

y reemplazando a q por su igual $\dfrac{a}{b}$ resulta

$$\frac{a + c + e + \ldots + m}{b + d + f + \ldots + n} = \frac{a}{b}.$$

Nota. — Aplicando este teorema a la proporción

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ resulta $\dfrac{a + c}{b + d} = \dfrac{a}{b}$ lo que nos

dice que: *En toda proporción la suma de los antecedentes es a la de los consecuentes como un antecedente es a su respectivo consecuente.*

Ejemplos: En $\dfrac{8}{4} = \dfrac{2}{1}$ es $\dfrac{8 + 2}{4 + 1} = \dfrac{10}{5} = \dfrac{2}{1}$

En $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{5}{15}$ es $\dfrac{1 + 2 + 3 + 5}{3 + 6 + 9 + 15} = \dfrac{11}{33} = \dfrac{1}{3}$

Aplicaciones. — Ejemplo I. Hallar la cuarta proporcional entre a, ab y c; Idem entre a^2, $2\,ab$ y $3\,b^2$.

Ejemplo II. Hallar la tercera proporcional entre a^2b y ab y la media proporcional entre $2\,x^3$ y $8\,x$.

Ejemplo III. Hallar la razón entre $x + y$ e $y - x$ sabiendo que $\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{7}$.

Ejemplo IV. Hallar dos números sabiendo que la razón del primero al segundo es $\dfrac{1}{2}$ y la suma de ellos es igual a 9.

CAPITULO V

MAGNITUDES

PROGRAMA. — *Definición de magnitud. Propiedades de las razones entre cantidades. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Magnitud proporcional a varias otras.*

50. Habíamos visto en el capítulo I de *Geometría* de este curso que: *Se llama cantidad a cada uno de los elementos de un conjunto de entes entre los cuales está definida la igualdad y la suma* y que la primera relación entre esos elementos cumplía los *caracteres idéntico, recíproco y transitivo.*

Esto equivale a decir que las *cantidades homogéneas* tienen *algo igual* o, como también se dice, una *cualidad común.*

Así, por ejemplo, la cualidad común que tienen todos los segmentos iguales se llama *longitud.*

La cualidad común que tienen los ángulos iguales se llama *amplitud o abertura.*

La cualidad común que tienen las figuras equivalentes se llama *superficie.*

La cualidad común que tienen los cuerpos equivalentes se llama *volumen.*

La *longitud,* la *amplitud,* la *superficie,* el *volumen,* etc., se llaman en general *magnitudes.* Estas últimas pueden definirse así:

51. **Definición de magnitud.** — Se llama *magnitud* a la cualidad abstracta con respecto a la cual las cantidades homogéneas se pueden considerar como iguales o desiguales.

Recordemos también la relación que había entre las *cantidades* y sus *medidas* que se expresaba diciendo: *La razón entre dos cantidades, es igual a la de sus medidas respecto de una misma unidad.*

Así, por ejemplo:

Si *seg.* M $= 34$ cm y *seg.* N $= 17$ cm es $\dfrac{seg.\ \mathrm{M}}{seg.\ \mathrm{N}} = \dfrac{34}{17} = 2$

Vamos a demostrar ahora otra propiedad que necesitaremos en lo que sigue y que dice así:

52. **Teorema.** — *El producto de la razón de una cantidad a otra por la razón de esta última a una tercera es igual a la razón de la primera a la tercera.*

Hip.) A, B y C cantidades. Tesis) $\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{B}{C} = \dfrac{A}{C}$.

Demost.) Sea U una cantidad que se elige como unidad, y a, b y c las medidas correspondientes a A, B y C respecto de U. Se tendría entonces

$$A = a.U \quad [1] \qquad B = b.U \quad [2] \qquad \text{y} \qquad C = c.U \qquad [3].$$

De [1] y [2] se tiene $\dfrac{A}{B} = \dfrac{a\,U}{b\,U} = \dfrac{a}{b}$ por la regla ant.

De [2] y [3] se tiene $\dfrac{B}{C} = \dfrac{b\,U}{c\,U} = \dfrac{b}{c}$ por la regla ant.

Mult. m. a m. da $\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{B}{C} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{c}$ [4]

Por otra parte, de [1] y [3] resulta:

[5] $\dfrac{A}{C} = \dfrac{a\,U}{c\,U} = \dfrac{a}{c}$ por la regla ant.

luego de [4] y [5] $\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{B}{C} = \dfrac{A}{C}$ por conse. II caräc. trans.

Observación. — Considerando la tesis del teorema anterior

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{C} \qquad \text{se observa}$$

que se ha pasado del primer miembro al segundo suprimiendo las B, o como suele decirse «*simplificando la* B *que multiplica con la* B *que divide*».

53. Definición de magnitudes directamente proporcionales.— Se dice que *dos magnitudes son directamente proporcionales,* cuando entre sus cantidades existe una correspondencia tal que a cada cantidad de una de ellas le corresponde una cantidad, y sola una, de la otra y en forma tal que si una cantidad es dos, tres, . . . n veces mayor o menor que otra, la cantidad correspondiente de la primera magnitud es 2, 3, . . . n veces mayor o menor, respectivamente, que la correspondiente de la 2ª cantidad.

Si A_1, A_2, A_3, A_n son cantidades de una cierta magnitud que representaremos por (A)

y B_1, B_2, B_3, B_n son las cantidades correspondientes de la magnitud (B)

Indicaremos que la magnitud (A) es proporcional a la (B) escribiendo

$$(A) \overline{\overline{\wedge}} (B) \quad (*)$$

Ejemplo. — La Física enseña que, *los volúmenes de un cuerpo homogéneo son proporcionales a sus pesos.*

Es decir: (*Volumen*) $\overline{\overline{\wedge}}$ (*Peso*)

así, por ejemplo:

2	dm^3	de	azúcar	pesan	3	Kg.
4	»	»	»	»	6	»
10	»	»	»	»	15	»
5	»	»	»	»	7,5	»
6	»	»	»	»	9	»

(*) El signo $\overline{\overline{\wedge}}$ se lee «es proporcional a» y no debe confundirse con el signo $\overline{\wedge}$ de coordinabilidad.

En el ejemplo anterior, puede observarse que siendo 6 dm^3 el producto de 2 $dm^3 \times 3$ es también su peso correspondiente 9 Kg el producto del correspondiente de 2 dm^3 por 3 es decir $3 \cdot$ Kg $\times 3$; que siendo 5 dm^3 el cociente de 10 dm^3 : 2, su peso correspondiente 7,5 Kg, es también el cociente de 15 Kg : 2.

Como la misma observación, puede hacerse con las cantidades de dos magnitudes proporcionales cualesquiera, se deduce que:

Si dos magnitudes son proporcionales, al producto o cociente de una cantidad de una de ellas por un número le corresponde el producto o cociente, respectivamente, de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número.

54. Definición de magnitudes inversamente proporcionales.— Se dice que *dos magnitudes son inversamente proporcionales,* cuando entre sus cantidades existe una correspondencia tal, que a cada cantidad de una de ellas, le corresponda una cantidad, y solo una, de la otra, y en forma tal que si una cantidad es dos, tres, ... *n* veces mayor o menor, la cantidad correspondiente de la primera magnitud es de 2, 3, ... *n* veces menor o mayor, respectivamente, que la correspondiente de la segunda magnitud.

Notación. (A) $\underline{\vee}$ (B) significa que (A) y (B) son inversamente proporcionales. El signo $\underline{\vee}$ se lee «*es inversamente proporcional a*».

Ejemplo. — Para medir el trabajo manual producido por obreros en una determinada obra, se toma como unidad, el trabajo que un obrero ideal produciría en cierto intervalo de tiempo, por ejemplo un día, trabajando de manera que en tiempos iguales produciese trabajos iguales. Esto equivale a convenir que *el trabajo producido por varios obreros es proporcional al número de éstos.*

Si en cambio relacionamos el número de obreros, con el tiempo necesario para efectuar un trabajo, y observamos que si empleamos el doble de obreros el tiempo se reduce a la mitad, que si empleamos el triple, el tiempo se reduce a la tercera parte, etc., podemos aceptar, como se hace en la práctica, que *el tiempo empleado en realizar una obra es inversamente proporcional al número de obreros empleados.*

Es decir (*Trabajo*) $\underline{\vee}$ (*Tiempo*)

Así por ejemplo, para realizar una cierta obra

2	obreros	emplean	30 días
3	»	»	20 »
4	»	»	15 »
5	»	»	12 »
6	»	»	10 »
10	»	»	6 »

. . . .

En el ejemplo anterior, puede observarse que, siendo 4 obreros el producto de 2 obreros $\times$ 2, el tiempo correspondiente de 4 obreros, que es 15 días, es el cociente por 2, del correspondiente a 2 obreros que es 30 días y que recíprocamente, siendo 3 obreros el cociente de (6 obreros: 2) el tiempo correspondiente de 3 obreros, que es 20 días, es el producto por 2 del correspondiente de 6 obreros, que es 10 días. Como la misma observación puede hacerse con las cantidades de dos magnitudes inversamente proporcionales cualesquiera, se deduce que:

Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, al producto de una cantidad de una de ellas por un número, le corresponde, el cociente de la correspondiente de dicha cantidad por dicho número y recíprocamente.

55. **Magnitud proporcional a varias otras.**— Definición. — Se dice que una magnitud (A) *es proporcional a varias otras* (B), (C), (D) si es directa o inversamente proporcional a cada una de ellas cuando las cantidades de las demás permanecen constantes.

$\overline{\wedge}$

En símbolos: (A) (B) (C) (D) expresa

$\underline{\vee}$

que la magnitud (A) es $\overline{\wedge}$ a la (B) y a (D) y que (A) es $\underline{\vee}$ a la (C).

Ejemplo. — Se ha convenido en que el tiempo empleado para hacer una excavación, es directamente proporcional al volumen de tierra extraída e inversamente proporcional al trabajo de los hombres empleados, es decir

$$\underbrace{\overbrace{(\text{Tiempo})\qquad(\text{Volumen})}^{\overline{\overline{\wedge}}}\qquad(\text{Hombres})}_{\underline{\underline{\vee}}}$$

Esto puede verse observando las cantidades que siguen:

9 días	300 m^3	15 hombres
45 »	300 »	3 »
3 »	300 »	45 »
1 »	100 »	45 »
4 »	400 »	45 »
15 »	700 »	21 »

. . . .

. . . .

En efecto: observando la primera, segunda y tercera fila vemos que siendo constantes las cantidades de la magnitud (Volumen) las magnitudes (Tiempo) y (Hombres) son inversamente proporcionales. Análogamente observando las filas tercera, cuarta y quinta vemos que mientras las cantidades de la magnitud (Hombres) son constantes, las magnitudes (Tiempo) y (Volumen) son directamente proporcionales, etc.

Aplicaciones. — Ejemplo I. Hallar la razón entre las cantidades A y B sabiendo que $A = 2\,C$ y $C = 4\,B$.

Ejemplo II. Hallar la razón entre las cantidades M y N sabiendo que $M = \frac{2}{3}P$ y $N = \frac{1}{3}P$.

CAPITULO VI

REGLA DE TRES SIMPLE Y COMPUESTA

PROGRAMA. — *Regla de tres simple: su objeto. Resolución de problemas de regla de tres simple con números enteros, fraccionarios o decimales, por el método de reducción a la unidad y por proporciones. Regla de tres compuesta: su objeto. Regla de tres compuesta directa, inversa o mixta. Resolución de problemas con números enteros, fraccionarios o decimales, por el método de reducción a la unidad y por proporciones.*

57. **Regla de tres simple: su objeto.** — Se llama *Regla de tres simple*, al procedimiento de cálculo mediante el cual se resuelven problemas del tipo siguiente:

Sabiendo que una magnitud es directa o inversamente proporcional a otra, y conociendo una cantidad de la primera, correspondiente a una cantidad de la segunda, hallar la cantidad de la segunda que corresponde a otra cantidad dada de la primera.

58. **Resolución de problemas de regla de tres simple por el método de reducción a la unidad.** — Este método consiste, en calcular la cantidad de la segunda magnitud, correspondiente a la unidad de la primera, y en base a ella la cantidad de la segunda magnitud correspondiente a la segunda cantidad de la primera.

PROBLEMA I. — *El precio de una tela es proporcional a su longitud. Si 30 m. de esa tela cuestan 180 $; ¿cuál será el precio de 55 m. de la misma?*

(Precio) $\overline{\wedge}$ *(Longitud)*

PLANTEO: 30 m ———— 180 \$

55 m ———— x \$

SOLUCIÓN: Si 30 m ———— 180 \$

1 m ———— $\frac{180}{30}$ \$ por ser magnitudes directamente proporcionales (nº 53)

y 55 m ———— $\frac{180 \cdot 55}{30}$ \$ $=$ 330 \$

luego $x\,\$ = 330\,\$$

PROBLEMA II. — *Siendo los espacios recorridos por un móvil animado de movimiento uniforme, proporcionales a los tiempos empleados en recorrerlos, si un automóvil recorre 125 Km. en 1 hora y* $\frac{3}{4}$ *¿cuánto tiempo tardará en recorrer 200* $\frac{7}{5}$ *Km.?*

(Espacio) $\overline{\wedge}$ *(Tiempo)*

PLANTEO: 125 Km ———— $1 + \frac{3}{4}\text{ h} = \frac{7}{4}\text{ h}$

$200 + \frac{7}{5} = \frac{1007}{5}$ Km ———— x h

SOLUCIÓN:

Si 125 Km ———— $\frac{7}{4}$ h

1 » ———— $\frac{\frac{7}{4}}{125}$

$\frac{1007}{5}$ » ———— $\frac{7 \cdot \frac{1007}{5}}{500} = \frac{7 \times 1007}{500 \cdot 5} = \frac{7049}{2500}$ h

$= 2$ h 49 min 10 seg. 55

PROBLEMA III. — *El tiempo empleado en construir una obra es inversamente proporcional al número de obreros utilizados. Si 28 obreros tardan 90 días para hacer una casa ¿cuánto tiempo tardarán en hacerla 7 obreros?*

$$(\textit{Tiempo}) \mathrel{\underline{\vee}} (\textit{Trabajo})$$

PLANTEO:

$$\begin{array}{lcl} 28 \text{ ob.} & \text{———} & 90 \text{ días} \\ 7 \text{ »} & \text{———} & x \text{ »} \end{array}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{array}{lcll} 28 \text{ ob.} & \text{———} & 90 \text{ días} & \\ 1 \text{ »} & \text{———} & 90 \times 28 & \text{por inv. prop. (nº 54)} \\ 7 \text{ »} & \text{———} & \dfrac{90 \times 28}{7} \text{ días} = 360 \text{ días} & \end{array}$$

luego $x \text{ días} = 360 \text{ días} = 1 \text{ año}$

PROBLEMA IV. — *El tiempo que tarda un móvil en recorrer cierta distancia es inversamente proporcional a su velocidad. Si un aeroplano, que marcha a 180 Km. por hora, ha tardado 5 horas en recorrer cierta distancia, ¿con qué velocidad marchará otro aeroplano que recorre la misma distancia en 3 $\frac{1}{2}$ horas?*

$$(\textit{Tiempo}) \mathrel{\underline{\vee}} (\textit{Velocidad})$$

PLANTEO:

$$\begin{array}{rcl} 5 \text{ h} & \text{———} & 180 \text{ Km/h} \\ 3 + \dfrac{1}{2} \text{ h} & \text{———} & x \text{ Km/h} \end{array}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{array}{rcl} 5 \text{ h} & \text{———} & 180 \text{ Km/h} \\ 1 \text{ h} & \text{———} & 180.5 \text{ Km/h} \\ 3 + \dfrac{1}{2} \text{ h} = \dfrac{7}{2} \text{ h} & \text{———} & \dfrac{180.5}{\frac{7}{2}} \text{ Km/h} = \dfrac{180.5.2}{7} = \dfrac{1800}{7} \end{array}$$

luego $x \text{ Km/h} = 257{,}14 \text{ Km/h}$

59. Resolución de problemas de regla de tres simple por el método de las proporciones. — Este método consiste en obtener una proporción en la que la incógnita es uno de sus términos y luego despejarla.

PROBLEMA. — *El tiempo empleado en excavar una zanja es inversamente proporcional al número de obreros utilizados. Si 3 obreros excavan la zanja necesaria para colocar el tubo de aspiración de una bomba, en 5 días, ¿cuántos obreros se tendrán que emplear para terminar el mismo trabajo en* $1\frac{1}{2}$ *días?*

$$(Tiempo)\ \underline{\vee}\ (Trabajo)$$

PLANTEO: 5 días ———— 3 obreros

$$1 + \frac{1}{2}\text{ días} = \frac{3}{2}\text{ días} \text{ ———— } x \text{ obreros}$$

$$\text{SOLUCIÓN: } \frac{\frac{3}{2}\text{ días}}{5\text{ días}} = \frac{3\text{ obreros}}{x\text{ obreros}} \quad \text{de donde} \quad \frac{\frac{3}{2}}{5} = \frac{3}{x}$$

y
$$x = \frac{5.3}{\frac{3}{2}} = \frac{15}{\frac{3}{2}} = \frac{30}{3} = 10$$

luego x obreros ———— 10 obreros.

60. Regla de tres compuesta: su objeto. — Se llama *Regla de tres compuesta directa* al procedimiento de cálculo mediante el cual se resuelven problemas del tipo siguiente:

Sabiendo que una magnitud es *directamente* o *inversamente proporcional* a varias otras y conociendo una cantidad de la primera correspondiente a cantidades dadas de esas otras, hallar la cantidad de la primera, que corresponde a cantidades, también dadas, de las otras.

Se llama *Regla de tres compuesta mixta* al procedimiento de cálculo mediante el cual se resuelven problemas del tipo siguiente:

Sabiendo que una magnitud es *directamente proporcional* a algunas magnitudes e *inversamente proporcional* a otras, y conociendo una cantidad de la primera correspondiente a cantidades dadas de esas otras, hallar la cantidad de la primera que corresponde a cantidades, también dadas, de las otras.

61. **Resolución de problemas de Regla de tres compuesta por el método de reducción a la unidad.**—Este método consiste en descomponer el problema de Regla de tres compuesta, en problemas de Regla de tres simple, y resolver a éstos por el método de reducción a la unidad, en la forma como se indica a continuación.

PROBLEMA. — *La longitud de una pieza de tela es directamente proporcional al peso de hilo empleado para tejerla e inversamente proporcional al ancho de la misma. Si para tejer una pieza de 35 m. de largo y 0,95 m. de ancho, se emplearon 17,900 Kg. de hilo, ¿qué longitud tendrá una tela de 0,65 m. de ancho si se tejió con 14,5 Kg del mismo hilo?*

$$\overset{\overline{\wedge}}{\overbrace{(Longitud)\quad(Peso)}}\quad \underset{\underline{\vee}}{\underbrace{\quad\quad\quad(Ancho)}}$$

PLANTEO:

$$\begin{array}{llll}
17{,}9 \text{ Kg} & \text{———} \; 0{,}95 \text{ m} & \text{———} & 35 \text{ m} \\
14{,}5 \text{ Kg} & \text{———} \; 0{,}65 \text{ m} & \text{———} & x \text{ m}
\end{array}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{array}{llll}
17{,}9 \text{ Kg} & \text{———} \; 0{,}95 \text{ m} & \text{———} & 35 \text{ m} \\
1 \text{ Kg} & \text{———} \; 0{,}95 \text{ m} & \text{———} & \dfrac{35}{17{,}9} \text{ m} \\
14{,}5 \text{ Kg} & \text{———} \; 0{,}95 \text{ m} & \text{———} & \dfrac{35 \cdot 14{,}5}{17{,}9} \text{ m} \\
14{,}5 \text{ Kg} & \text{———} \; 1 \text{ m} & \text{———} & \dfrac{35 \cdot 14{,}5 \cdot 0{,}95}{17{,}9} \text{ m} \\
14{,}5 \text{ Kg} & \text{———} \; 0{,}65 \text{ m} & \text{———} & \dfrac{35 \cdot 14{,}5 \cdot 0{,}95}{17{,}9 \cdot 0{,}65} \text{ m} = 41{,}43 \text{ m}
\end{array}$$

luego $\quad x \text{ m} = 41{,}43 \text{ m.}$

62. Resolución de problemas de Regla de tres compuesta por el método de las proporciones.— Este método consiste en descomponer el problema de Regla de tres compuesta, en problemas de Regla de tres simple, y resolver a éstos por el método de las proporciones, en la forma como se indica a continuación.

PROBLEMA. — *Para construir un canal de 200 m. de largo, 120 obreros trabajando 8 h. por día han precisado 20 días. ¿Cuántos días emplearán para construir un canal de 140 m. de largo, 80 obreros trabajando 7 horas diarias?*

PLANTEO:

200 m ———— 120 ob ———— 8 h ———— 20 días
140 m ———— 80 ob ———— 7 h ———— x días

SOLUCIÓN:

1° $\begin{cases} 200 \text{ m} \text{ ———— } 20 \text{ días} \\ 140 \text{ m} \text{ ———— } y \text{ días} \end{cases}$

de donde $\dfrac{200 \text{ m}}{140 \text{ m}} = \dfrac{20 \text{ días}}{y \text{ días}}$ y $\dfrac{200}{140} = \dfrac{20}{y}$ [1]

2° $\begin{cases} 120 \text{ ob.} \text{ ———— } y \text{ días} \\ 80 \text{ ob.} \text{ ———— } z \text{ días} \end{cases}$

de donde $\dfrac{80 \text{ ob.}}{120 \text{ ob.}} = \dfrac{y \text{ días}}{z \text{ días}}$ y $\dfrac{80}{120} = \dfrac{y}{z}$ [2]

3° $\begin{cases} 8 \text{ h} \text{ ———— } z \text{ días} \\ 7 \text{ h} \text{ ———— } x \text{ días} \end{cases}$

de donde $\dfrac{7 \text{ h}}{8 \text{ h}} = \dfrac{z \text{ días}}{x \text{ días}}$ y $\dfrac{7}{8} = \dfrac{z}{x}$ [3]

Multip. m. a m. [1], [2] y [3] da $\dfrac{200}{140} \cdot \dfrac{80}{120} \cdot \dfrac{7}{8} = \dfrac{20}{y} \cdot \dfrac{y}{z} \cdot \dfrac{z}{x}$.

Efec. las operaciones y simp. queda $\dfrac{200 \,.\, 80 \,.\, 7}{140 \,.\, 120 \,.\, 8} = \dfrac{20}{x}$ (nº 52)

luego $x \text{ días} = \dfrac{140 \,.\, 120 \,.\, 8 \,.\, 20}{200 \,.\, 80 \,.\, 7} \text{ días} = 24 \text{ días}$

Aplicaciones. — Resolver los problemas siguientes:

1°) Un fabricante ha empleado 436 toneladas de remolacha para extraer 32 294 kilogramos de azúcar ¿qué cantidad de azúcar podrá extraer de 100 kilogramos de remolacha?

2°) Si 27 obreros hacen un trabajo en 8 días ¿cuántos obreros serán necesarios para hacer el mismo trabajo en 18 días?

3°) Si 324 obreros trabajando 5 horas por día tardaron 40 días en embaldozar un patio rectangular de 225 m de largo por 150 m de ancho ¿cuántos obreros será necesario emplear para embaldozar en 18 días, trabajando 12 horas por día, otro patio rectangular de 195 m de largo por 120 de ancho?

4°) Para suministrar a 400 hombres durante 144 días, 800 gramos de pan por hombre y por día se necesitan 387 bolsas de harina de 100 kilogramos cada una ¿cuántas bolsas de harina de 125 kilogramos cada una se necesitarán para suministrar a 500 hombres durante 300 días 900 gramos de pan por hombre y por día?

5°) Un tren que marcha con una velocidad de 42 Km por hora debe recorrer cierta distancia en 9 horas. Después de recorrer 126 Km se detiene 3/4 de hora ¿con qué velocidad debe continuar la marcha para llegar a la hora fijada?

6°) Dos caballos, cuyos valores han sido apreciados directamente proporcional a sus fuerzas e inversamente proporcional a sus edades, tienen: el primero 5 años, 8 meses y el segundo 7 años 3 meses; la fuerza del primero es a la del segundo como 3 es 4 1/2 ¿cuál será el precio del primero, si el segundo se ha vendido por 540 pesos?

7°) En 8 días, 36 obreros han levanado una pared de 32 m de largo, 6 de alto y 0,75 m de espesor; 12 obreros ¿cuántos días emplearán para hacer otra pared de 21,60 m de largo 5 de alto y 0,60 de espesor, sabiendo que la fuerza de los primeros obreros es a la de los segundos como 5 es a 4 y que la dificultad del trabajo para la primera pared es a la del trabajo para la segunda como 3 es a 2?

CAPITULO VII

CUESTIONES DE ARITMETICA COMERCIAL

Programa. — *Interés simple: deducción de las fórmulas y aplicación de las mismas. Descuento comercial: fórmulas y aplicaciones. Repartición proporcional. Regla de compañía. Regla de aligación: Problemas directo e inverso.*

65. **Interés simple: deducción de las fórmulas y aplicación de las mismas.** — Definicion. — El *préstamo a interés* es una operación comercial que consiste en *prestar* una cantidad de dinero llamada *capital*, por un cierto tiempo, con la condición de que el *deudor* pague al *prestador*, al cabo de dicho tiempo, una cierta cantidad llamada *interés del capital*.

Este *interés*, es fijado por la ganancia de 100 pesos en la unidad de tiempo, por lo cual se llama *tanto por ciento* y se indica con el signo $^0/_0$. Comunmente se toma como unidad de tiempo el año y el *tanto por ciento* se llama *anual*, en cambio se llama *mensual* cuando la unidad es el mes.

Definición. — Se llama *interés simple* a la ganancia producida por un capital constante, e *interés compuesto* a la producida por un capital que aumenta por la acumulación de las ganancias en cada unidad de tiempo.

Solo nos ocuparemos del interés simple, dejando para cursos superiores el estudio del compuesto, razón por la cual, cuando se hable de interés se sobreentenderá que se trata de interés simple.

En las operaciones de préstamo a interés son tres las magnitudes que intervienen: *Capital, Tiempo* e *Interés*. Se considera justo que un capital doble, triple, etc., de otro, produzca un interés doble, triple, etc. del que produce este último, respectivamente, así como también que siendo doble, triple, etc., el tiempo que ha permanecido el primer capital sea doble, triple, etc., respectivamente, el interés que produce. Es por eso que se acepta la siguiente

CONVENCIÓN. — *El Interés es directamente proporcional al Capital y al Tiempo, o sea:*

$$\textit{(Capital)} \qquad \textit{(Tiempo)} \;\; \overline{\wedge} \;\; \textit{(Interés)}$$

Los problemas a que da lugar el préstamo a interés son, pues, problemas de regla de tres compuesta.

Damos a continuación el esquema de esos problemas.

PROBLEMA. — *Si 100 \$ en 1 año producen r \$, ¿cuál será el interés i \$ correspondiente a c \$ en t años?*

PLANTEO: 100 \$ ———— 1 año ———— r \$

c \$ ———— t años ———— i \$

SOLUCIÓN: PRIMER MÉTODO. — *Por reducción a la unidad.*

100 \$ ———— 1 año ———— r \$

1 \$ ———— 1 año ———— $\dfrac{r}{100}$ \$

c \$ ———— 1 año ———— $\dfrac{r \cdot c}{100}$ \$

c \$ ———— t años ———— $\dfrac{r \cdot c \cdot t}{100}$ \$

luego $$i \,\$ = \frac{c \cdot t \cdot r}{100} \,\$$$

o bien $$\boxed{i = \frac{c \cdot t \cdot r}{100}} \qquad [I]$$

SEGUNDO MÉTODO. — *Por proporciones.*

I) **Para 1 año** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{100\ \$ \text{———————} r\ \$} \\ \mathbf{c\ \$ \text{———————} x\ \$} \end{array} \right.$

de donde $$\frac{100\ \$}{c\ \$} = \frac{r\ \$}{x\ \$} \quad \text{y} \quad \frac{100}{c} = \frac{r}{x}$$

II) **Para c \$** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1\ \text{año} \text{———————} x\ \$} \\ \mathbf{t\ \text{años} \text{———————} i\ \$} \end{array} \right.$

de donde $$\frac{1\ \text{año}}{t\ \text{años}} = \frac{x\ \$}{i\ \$} \quad \text{y} \quad \frac{1}{t} = \frac{x}{i}$$

Multiplicando m. a m. queda $$\frac{100}{c} \cdot \frac{1}{t} = \frac{r}{x} \cdot \frac{x}{i}$$

Efectuando las operaciones y simp. da: $$\frac{100}{c \cdot t} = \frac{r}{i}.$$

Despejando el extremo i, se tiene:

$$\boxed{i = \frac{c \cdot t \cdot r}{100}} \qquad [I]$$

Como se ve, por uno u otro método se llega a la fórmula [I], la que nos dice que: *la medida del interés, que producen c \$ en t años al r % anual, es igual producto de la medida del capital, por la medida del tiempo, por la medida del tanto por ciento, dividido por 100.*

En la práctica se sobreentiende la palabra *medida* y se expresa la fórmula I diciendo:

El interés es igual, al capital, por el tanto por ciento, por el tiempo sobre 100.

Conviene saber de memoria la fórmula que da el valor del interés, o la regla que la traduce en palabras, para evitar de hacer su deducción en las aplicaciones.

Puede suceder que la incógnita sea el capital, o el tanto por ciento, o el tiempo y que se conozcan las restantes cantidades. En tales casos, la fórmula [I] nos permitirá, encontrar la medida de dichas cantidades, así:

Pasando 100 al primer miembro de la igualdad [I], se tiene:

$$i.100 = c.t.r$$

o también $c.t.r = i.100$ por carácter recíproco

luego:

$$\boxed{c = \frac{100 . i}{r . t}} \quad [II] \; ; \quad \boxed{r = \frac{100 . i}{c . t}} \quad [III] \text{ y } \boxed{t = \frac{100 . i}{c . r}} \quad [IV]$$

fórmulas estas que (con omisión de la palabra medida), se expresan así:

El capital es igual a cien por interés sobre tanto por ciento por tiempo.

El tanto por ciento es igual a cien por interés sobre capital por tiempo.

El tiempo es igual a cien por interés sobre el capital por el tanto por ciento.

Se observa en las tres últimas fórmulas que el numerador es siempre $100.i$ y el denominador el producto de los dos datos restantes.

Problema. — *¿Cuál será el interés producido por 4700 $ colocado al 7 % anual durante 3 años y ½?*

Solución:

$c\ \$ = 4700\ \$$

$r\ \% = 7\ \%$

t años $= 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ años

$i\ \$ = x\ \$$

Fórmula: $i = \dfrac{c \cdot t \cdot r}{100}$

$$= \frac{4700 \cdot \frac{7}{2} \cdot 7}{100} = \frac{\frac{4700 \cdot 7 \cdot 7}{2}}{100}$$

$$= \frac{4700 \cdot 7 \cdot 7}{100 \cdot 2} = \frac{47 \cdot 7 \cdot 7}{2} = 1151{,}50$$

luego $i\ \$ = 1151{,}50\ \$.$

Problema. — *¿Cuál será el tiempo durante el cual un capital de 120 $ colocado al 8 y ¹/₃ % anual produzca 6,25 $ de interés?*

Solución:

$c\ \$ = 120\ \$$

$i\ \$ = 6{,}25\ \$$

$r\ \% = 8 + \frac{1}{3} = \frac{25}{3}\ \%$

t años $= x$ años

Fórmula: $t = \dfrac{100 \cdot i}{c \cdot r}$

$$t = \frac{100 \cdot 6{,}25}{120 \cdot \frac{25}{3}} = \frac{625 \cdot 3}{120 \cdot 25}$$

$$= \frac{25 \cdot 3}{120 \cdot 1} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

luego t años $= \frac{5}{8}$ años $= 7$ meses y $\frac{1}{2}$

En el problema general que se acaba de resolver, el tiempo está dado en años lo mismo que el tanto por ciento, pero pasa frecuentemente que aunque el tanto por ciento sea anual el tiempo está dado en meses o en días.

Supongamos que el capital haya permanecido un tiempo $t = t'$ meses. Como t' meses son iguales a $\frac{t'}{12}$ años, las fórmulas serán ahora las siguientes, que se deducen reemplazando a t por su igual $\frac{t'}{12}$ en las fórmulas I, II, III y IV. Así se obtienen:

de la [I] $$i = \frac{c \,.\, \frac{t'}{12} \,.\, r}{100} = \frac{\frac{c \,.\, t' \,.\, r}{12}}{100} = \frac{c \,.\, t' \,.\, r}{100 \times 12}$$

luego $$\boxed{i = \frac{c \,.\, t' \,.\, r}{1200}} \qquad [I']$$

de la [II] $$c = \frac{100 \,.\, i}{r \,.\, \frac{t'}{12}} = \frac{100 \,.\, i}{\frac{r \,.\, t'}{12}} = \frac{100 \,.\, i \,.\, 12}{r \,.\, t'}$$

luego $$\boxed{c = \frac{1200 \,.\, i}{r \,.\, t'}} \qquad [II']$$

de la [III] $$r = \frac{100 \,.\, i}{c \,.\, \frac{t'}{12}} = \frac{100 \,.\, i}{\frac{c \,.\, t'}{12}} = \frac{100 \,.\, i \,.\, 12}{c \,.\, t'}$$

luego $$\boxed{r = \frac{1200 \,.\, i}{c \,.\, t'}} \qquad [III']$$

de la [IV] $$\frac{t'}{12} = \frac{100\, i}{c \,.\, r}$$

luego $$\boxed{t' = \frac{1200\, i}{c \,.\, r}} \qquad [IV']$$

Donde puede observarse que *cuando el tiempo está dado en meses* *y el tanto por ciento es anual, basta sustituir en las fórmulas generales a 100 por 1200.*

PROBLEMA. — *¿Cuál será el capital que colocado al 5 % anual produjo al cabo de 6 meses 135,40 $ de interés?*

SOLUCIÓN:

$i\ \$ = 135{,}40\ \$$

$r\ \% = 5\ \%$

t' meses $= 6$ meses

$c\ \$ = x\ \$$

Fórmula: $c = \dfrac{1200\, i}{t'\, r}$

$$c = \frac{1200 \,.\, 135{,}40}{6 \,.\, 5} = \frac{200 \,.\, 135{,}40}{1 \,.\, 5}$$

$$= \frac{40 \,.\, 135{,}40}{1 \,.\, 1} = 5416{,}00$$

$$c\,\$ = 5416{,}00\ \$.$$

* * *

Supongamos que el capital haya permanecido un tiempo $t = t''$ *días*. Como t'' días son iguales a $\dfrac{t''}{360}$ años, (*) las fórmulas serán ahora las siguientes, que se obtienen reemplazando a t por su igual $\dfrac{t''}{360}$ en las fórmulas I, II, III y IV. Así se obtienen

de la [I] $$i = \frac{c \,.\, \dfrac{t''}{360} \,.\, r}{100} = \frac{\dfrac{c \,.\, t'' \,.\, r}{360}}{100} = \frac{c \,.\, t'' \,.\, r}{100 \,.\, 360}$$

luego $$\boxed{i = \frac{c \,.\, t'' \,.\, r}{36\,000}} \qquad [\mathrm{I}'']$$

(*) El año comercial se considera de 360 días.

de la [II] $$c = \frac{100 \,.\, i}{r \,.\, \frac{t''}{360}} = \frac{100 \,.\, i}{\frac{r \,.\, t''}{360}} = \frac{100 \,.\, i \,.\, 360}{r \,.\, t''}$$

luego $$\boxed{c = \frac{36\,000 \,.\, i}{r \,.\, t''}} \qquad [\mathrm{II}'']$$

de la [III] $$r = \frac{100 \,.\, i}{c \,.\, \frac{t''}{360}} = \frac{100 \,.\, i}{\frac{c \,.\, t''}{360}} = \frac{100 \,.\, i \,.\, 360}{c \,.\, t''}$$

luego $$\boxed{r = \frac{36\,000 \,.\, i}{c \,.\, t''}} \qquad [\mathrm{III}'']$$

de la [IV] $$\frac{t''}{360} = \frac{100 \,.\, i}{c \,.\, r}$$ de donde $$t'' = \frac{100 \,.\, i \,.\, 360}{c \,.\, r}$$

luego $$\boxed{t'' = \frac{36\,000 \,.\, i}{c \,.\, r}} \qquad [\mathrm{IV}'']$$

Donde puede observarse, que *cuando el tiempo está dado en días y el tanto por ciento es anual, basta sustituir, en las fórmulas generales, a 100 por 36 000.*

PROBLEMA. — *¿Cuál será el tanto por ciento a que ha sido colocado un capital de 12 680 $ que al cabo de 45 días produjo 126,80 $ de interés?*

SOLUCIÓN:

c $ = 12 680 $

i $ = 126,80 $

t'' días = 45 días.

r % = x %

Fórmula: $$r = \frac{36000 \,.\, i}{c \,.\, t''}$$

$$r = \frac{36\,000 \,.\, 126{,}80}{12\,680 \,.\, 45} = \frac{36\,000 \,.\, 1}{100 \,.\, 45}$$

$$r = \frac{360}{45} = 8$$

$$r\ \% = 8\ \%.$$

Si el tiempo t estuviese expresado en años, meses y días, se reduce todo a días y se aplican las fórmulas últimamente obtenidas.

PROBLEMA. — *¿Cuál será el interés producido por 10 600 $ colocados al 4,5 % anual en 8 meses 20 días?*

SOLUCIÓN:

$c\ \$ = 10\,600\ \$$

$r\ \% = 4{,}5\ \%$

t'' días $= 8$ meses 20 días

$= 260$ días

$i\ \$ = x\ \$$

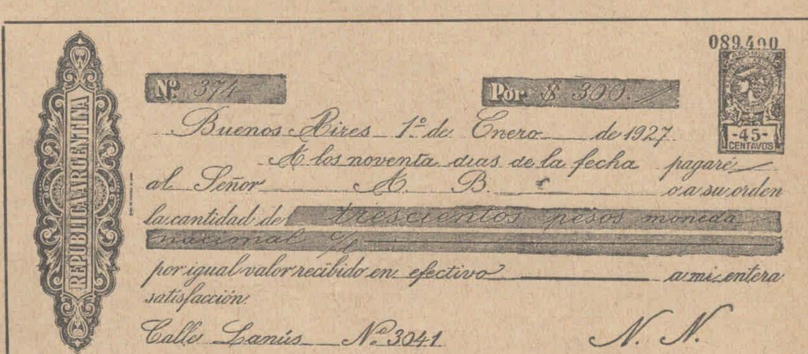
$$\text{Fórmula} \quad i = \frac{c\,.\,t''\,.\,r}{36\,000}$$

$$i = \frac{10\,600\,.\,260\,.\,4{,}5}{36000} = \frac{106\,.\,26\,.\,4{,}5}{36}$$

$$= \frac{53\,.\,13\,.\,4{,}5}{9} = 53\,.\,13\,.\,0{,}5 = 344{,}50$$

$$\$ = 344{,}50\ \$\,.$$

66. **Descuento comercial: fórmulas y aplicaciones.** — En el comercio los *préstamos* de dinero se hacen mediante *documentos*, que estipulan las condiciones en que éstos se realizan, como son el plazo acordado y la suma a devolver. Entre estos documentos el más común es el llamado *pagaré* del cual damos el modelo que sigue:


REPUBLICA ARGENTINA

089.400

-45- CENTAVOS

Nº 374 Por $ 300.

Buenos Aires 1º de Enero de 1927

A los noventa dias de la fecha pagaré al Señor A. B. o a su orden la cantidad de trescientos pesos moneda nacional por igual valor recibido en efectivo a mi entera satisfacción.

Calle Lanús Nº 3041 N. N.

El día en que el deudor N. N. debe pagar, se llama *vencimiento del documento,* en nuestro caso es el 1º de Abril de 1927, y la cantidad de dinero a pagar, que es la que se indica en el documento se llama *valor nominal* del mismo. Aun cuando el deudor se compromete a abonar el valor nominal, en realidad no ha recibido esa cantidad, sino la que resulta después de restarle el interés que se cobra por anticipado. Así por ejemplo, si el tanto por ciento convenido, es el 6 %, en el caso considerado el interés es, según la fórmula [I], 4,5 $ y el firmante del pagaré habrá recibido en realidad 300 $ — 4,5 $ = 295,5 $, no obstante lo cual se compromete a pagar *a los noventa días* 300 $.

Puede suceder que el deudor N. N. desee pagar antes del vencimiento, por ejemplo el 1º de Marzo, es decir, 30 días antes del mismo. En este caso el deudor deberá abonar menos de los 300 $; pues durante los 30 días que se ha anticipado, el capital producirá intereses que ya se han cobrado. Este nuevo valor del documento, que depende del número de días que faltan para el vencimiento, se llama *valor efectivo* o *actual del documento* y se obtiene restando al *valor nominal* una cantidad que se llama *descuento.*

Representando al *valor nominal* por n $, al *valor efectivo* por e $ y por d $ al *descuento,* se tiene:

$$n\,\$ - d\,\$ = e\,\$ \quad \text{y por lo tanto} \quad n - d = e$$

Convención. — En el Comercio se ha convenido que: *El descuento que debe hacerse a un documento, sea igual al interés simple del valor nominal del mismo producido en el tiempo que falte para pagar el vencimiento, y tomando un tanto por ciento convenido que se llama tanto por ciento de descuento.*

Luego de acuerdo con esta convención, de las fórmulas que se acaban de estudiar se podrán obtener las de descuento sustituyendo en las primeras el

capital	c	por *valor nominal*	n
interés	i	» *descuento*	d

con lo cual se obtienen las siguientes fórmulas:

de $i = \dfrac{c \cdot r \cdot t}{100}$ la $d = \dfrac{n \cdot r \cdot t}{100}$ [I]

de $c = \dfrac{100 \cdot i}{r \cdot t}$ la $n = \dfrac{100 \cdot d}{r \cdot t}$ [II]

de $r = \dfrac{100 \cdot i}{c \cdot t}$ la $r = \dfrac{100 \cdot d}{n \cdot t}$ [III]

de $t = \dfrac{100 \cdot i}{c \cdot r}$ la $t = \dfrac{100 \cdot d}{n \cdot r}$ [IV]

que con la fórmula ya establecida $e = n - d$ [V]

constituyen las fórmulas fundamentales del descuento. En las aplicaciones suelen emplearse una de las cuatro primeras y la [V].

Como se hizo al estudiar el Interés, se pueden obtener las fórmulas que resuelven las cuestiones relativas al descuento, cuando el tiempo está expresado en meses o en días, reemplazando en las fórmulas [1], [II], [III] y [IV] a 100 por 1200 ó 36 000, respectivamente.

Problema. — *¿Cuál será el descuento que sufrirá un pagaré de 4750 $ que es descontado al 5 %, 45 días antes de su vencimiento?*

Solución:

$r\,\% = 5\%$

$n\,\$ = 4750\,\$$

t'' días $= 45$ días

$d\,\$ = x\,\$$

Fórmula: $d = \dfrac{n \cdot t'' \cdot r}{36\,000}$

$$d = \frac{4750 \cdot 45 \cdot 5}{36\,000}$$

$$= \frac{475 \cdot 45 \cdot 5}{3600} = \frac{475 \cdot 1 \cdot 5}{80}$$

$$= \frac{475 \cdot 1 \cdot 1}{16} = \frac{475}{16} = 29{,}68$$

$d\,\$ = 29{,}68\,\$.$

PROBLEMA. — *¿Cuál será el valor efectivo de un pagaré que, descontado al 6 y ½ %, 12 días antes de su vencimiento, sufrió un descuento de 1,52 $?*

SOLUCIÓN:

$d\ \$ = 1{,}52\ \$$

$r\ \% = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}\ \$$

t'' días $= 12$ días.

$e\ \$ = x\ \$$

Fórmulas: $n = \frac{36\,000 \cdot d}{t'' \cdot r}$; $e = n - d$

$$n = \frac{36\,000 \cdot 1{,}52}{12 \cdot \frac{13}{2}} = \frac{36\,000 \cdot 1{,}52 \cdot 2}{12 \cdot 13}$$

$$= \frac{3\,000 \cdot 1{,}52 \cdot 2}{1 \cdot 13} = \frac{9120}{13} = 701{,}54$$

$$n\ \$ = 701{,}54\ \$$$

$$e = 701{,}54 - 1{,}52 = 700{,}02$$

luego $e\$ = 700{,}02\ \$$.

PROBLEMA. — *¿Cuánto tiempo antes de su vencimiento fué descontado un pagaré de 2342 $ al 5 %, que sufrió un descuento de 42 $?*

SOLUCIÓN:

$n\ \$ = 2342\ \$$

$d\ \$ = 42\ \$$

$r\ \% = 5\ \%$

t'' días $= x$ días

Fórmula: $t'' = \frac{36\,000 \cdot d}{n \cdot r}$

$$= \frac{36\,000 \cdot 42}{2342 \cdot 5} = \frac{7\,200 \cdot 42}{2\,342 \cdot 1}$$

$$= \frac{3600 \cdot 42}{1171} = 129 \text{ días.}$$

t'' días $= 129$ días $= 4$ meses 9 días.

67. **Repartición proporcional**. — Definición. — *Repartir un número n en partes proporcionales a otros números dados a, b, c, ... h*, es descomponerlo en sumandos x, y, z,... w, tales que las razones formadas por cada uno de éstos y los números dados sean iguales.

En símbolos: Repartir n en partes proporcionales a

a, b, c ... h es hallar los números x, y, z ... w

tales que $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\ldots=\frac{w}{h}$$

siendo $$x+y+z+\ldots+w=n.$$

Damos a continuación el esquema general de un problema de repartición proporcional.

Problema. — *Repartir el número n en partes proporcionales a los números a, b, c ... h.*

Planteo:

$$n\begin{cases} a \;\text{———}\; x \\ b \;\text{———}\; y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n \;\text{———}\; w \end{cases} \qquad x+y+\ldots+w=n$$

Solución. — Siendo $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\ldots=\frac{w}{h}$ por definición, aplicando la propiedad fundamental de la serie de razones iguales (nº 48) resulta

$$\frac{x+y+z+\ldots+w}{a+b+c+\ldots+h}=\frac{x}{a} \qquad [1]$$

$$\frac{x+y+z+\ldots+w}{a+b+c+\ldots+h}=\frac{y}{b} \qquad [2]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x+y+z+\ldots+w}{a+b+c+\ldots+h}=\frac{w}{h} \qquad [m]$$

Pero como $x + y + z + \ldots + w = n$ por definición, sustituyendo a los antecedentes de la primera razón de las igualdades [1], [2]... [m], por su igual n, y teniendo en cuenta que un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio, resulta:

$$\frac{n}{a+b+c+\ldots+h} = \frac{x}{a} \text{ y también } x = \frac{n \cdot a}{a+b+c+\ldots+h}$$

$$\frac{n}{a+b+c+\ldots+h} = \frac{y}{b} \text{ y también } y = \frac{n \cdot b}{a+b+c+\ldots+h}$$

. . . .

$$\frac{n}{a+b+c+\ldots+h} = \frac{w}{h} \text{ y también } w = \frac{n \cdot h}{a+b+c+\ldots+h}$$

Observando las expresiones que nos dan los valores de los números buscados $x, y, z, \ldots, w$ resulta la siguiente:

Regla. — *Para dividir un número en partes proporcionales a varios otros, se multiplica dicho número por cada uno de los números a los cuales deben ser proporcionales los buscados, y se divide el producto por la suma de los números dados.*

Problema. — *Repartir el número 840 en partes proporcionales a 8, 10 y 12.*

Solución:

$$840\begin{cases} 8 \text{———} x \\ 10 \text{———} y \\ 12 \text{———} z \end{cases}$$

$$x + y + z = 840$$

$$x = \frac{840 \cdot 8}{8+10+12} = \frac{840 \cdot 8}{30} = 224$$

$$y = \frac{840 \cdot 10}{8+10+12} = \frac{840 \cdot 10}{30} = 280$$

$$z = \frac{840 \cdot 12}{8+10+12} = \frac{840 \cdot 12}{30} = 336$$

Definición. — *Repartir una cantidad N, en partes proporcionales a otras cantidades dadas* $A_1, A_2, \ldots A_n$, es descomponerla en sumandos $X_1, X_2, \ldots X_n$, tales que sus medidas $x_1, x_2 \ldots, x_n$ sean los números que resultan de descomponer la medida n de N, en partes proporcionales a las medidas $a_1, a_2, \ldots a_n$ de las cantidades dadas $A_1, A_2 \ldots, A_n$.

Ejemplo. — Repartir 5000 \$ en partes proporcionales a 8 años, 5 años y 7 años significa encontrar las cantidades x \$, y \$ y z \$ tales que sus medidas x, y y z sean los números que resultan de repartir el número 5000, en partes proporcionales a los números 8, 5 y 7, o sea

$$5000 \begin{cases} 8 \text{———————} x \\ 5 \text{———————} y \\ 7 \text{———————} z \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{5000 \, . \, 8}{8+5+7} = \frac{5000 \, . \, 8}{20} = 2000 \\ y &= \frac{5000 \, . \, 5}{8+5+7} = \frac{5000 \, . \, 5}{20} = 1250 \\ z &= \frac{5000 \, . \, 7}{8+5+7} = \frac{5000 \, . \, 7}{20} = 1750 \end{aligned}$$

Luego $x \$ = 2000 \$$, $y \$ = 1250 \$$ y $z \$ = 1750 \$$ son las cantidades que resultan de dividir a 5000 \$ en partes proporcionales a 8 años, 5 años y 7 años.

68. **Regla de compañía.** — En el Comercio es frecuente, que el capital invertido en un negocio cualquiera, pertenezca a varias personas que forman lo que se llama una *Compañía* o *Sociedad.* Esta compañía suele, con el tiempo, reforzarse con nuevos *asociados* cuyos capitales van a aumentar el capital común. Supongamos que los asociados en un negocio formado en esas condiciones, quieran liquidar las ganancias o conocer las pérdidas correspondientes a cada uno de ellos. Esto da lugar a un problema que se resuelve por la aplicación de la *Regla de Compañía* de la cual daremos la siguiente

Definición. — Se llama *Regla de Compañía,* al procedimiento de cálculo mediante el cual se obtienen las ganancias o las pérdidas correspondientes a cada uno de los miembros de una sociedad que han colocado sus capitales, durante cierto tiempo.

Para la resolución de los distintos problemas, se consideran tres casos, según que:

1º *Los tiempos que han permanecido los capitales en la sociedad, sean iguales.*

2º *Los capitales sean iguales.*

3º *Los capitales sean distintos, así como también los tiempos durante los cuales han sido colocados.*

Primer caso. — Se considera justo que si un capital, ha sido colocado en una sociedad y produce una cierta ganancia o una pérdida al cabo de cierto tiempo, otro capital doble, triple, etc. del primero, produce, en el mismo tiempo, una ganancia o pérdida doble, triple, etc. respectivamente. Por esta razón se acepta la siguiente

Convención. — *Las ganancias o las pérdidas de varios capitales, que han estado el mismo tiempo en una sociedad, son proporcionales a dichos capitales.*

Problema. — *A, B y C formaron una compañía. A puso 5000 \$, B puso 6000 \$ y C puso 4000 \$ dejando dichos capitales durante el mismo tiempo. Habiéndose obtenido al cabo de ese tiempo una ganancia de 1500 \$, ¿cuánto le corresponde a cada uno?*

Planteo:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{A puso} & c'\,\$ = 5000\,\$ \text{ ———— } & g'\,\$ = x\,\$ \\ \text{B puso} & c''\,\$ = 6000\,\$ \text{ ———— } & g''\,\$ = y\,\$ \\ \text{C puso} & c'''\,\$ = 4000\,\$ \text{ ———— } & g'''\,\$ = z\,\$ \end{array}\right\} \; g = 1500\,\$$$

Solución. — De acuerdo con el convenio anterior el problema se reduce a repartir la ganancia g y en partes proporcionales a los capitales c' c'' y c'''.

Aplicando la regla de repartición proporcional resulta:

$$g'\;\$ = \frac{1500 \,.\, 5000}{5000 + 6000 + 4000} = \frac{7\,500\,000}{15\,000} = \frac{7500}{15} = 500\;\$$$

$$g''\;\$ = \frac{1500 \,.\, 6000}{5000 + 6000 + 4000} = \frac{9\,000\,000}{15\,000} = \frac{9000}{15} = 600\;\$$$

$$g'''\;\$ = \frac{1500 \,.\, 4000}{5000 + 6000 + 4000} = \frac{6\,000\,000}{15\,000} = \frac{6000}{15} = 400\;\$$$

Luego a A le corresponden 500 \$, a B 600 \$ y a C 400 \$.

SEGUNDO CASO. — Se considera justo que si un capital ha sido colocado en una sociedad y produce una ganancia o una pérdida al cabo de cierto tiempo, otro capital igual al primero en un tiempo doble, triple, etc. que el primero, produce una ganancia o pérdida doble, triple, etc. respectivamente. Por esta razón se acepta la siguiente

CONVENCIÓN. — *Las ganancias o las pérdidas de varios capitales iguales que han estado distintos tiempos en una sociedad, son proporcionales a dichos tiempos.*

PROBLEMA. — *A y B formaron una compañía colocando capitales iguales. A lo dejó 3 y ½ años y B 2 y ⅓ años. Habiéndose obtenido una ganancia de 5400 \$, ¿cuánto le corresponde a cada uno?*

PLANTEO:

$$\left.\begin{array}{l} \text{A dejó su capital } t' \text{ años} = 3 + \frac{1}{2} \text{ años} = \frac{7}{2} \text{ años} \\[2ex] \text{B » » » } t'' \text{ años} = 2 + \frac{1}{3} \text{ años} = \frac{7}{3} \text{ años} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{ganancia} \\ g\,\$ = 5400\,\$ \end{array}$$

SOLUCIÓN. — De acuerdo con el convenio anterior el problema se reduce a repartir la ganancia g en partes proporcionales a los tiempos t' y t''.

Aplicando la regla de repartición proporcional resulta:

$$g'\,\$ = \frac{5400 \cdot \frac{7}{2}}{\frac{7}{2} + \frac{7}{3}} = \frac{\frac{5400 \cdot 7}{2}}{\frac{21 + 14}{6}} = \frac{5400 \cdot 7 \cdot 6}{35 \cdot 2} = 3240\,\$$$

$$g''\,\$ = \frac{5400 \cdot \frac{7}{3}}{\frac{7}{2} + \frac{7}{3}} = \frac{\frac{5400 \cdot 7}{3}}{\frac{35}{6}} = \frac{5400 \cdot 7 \cdot 6}{35 \cdot 3} = 2160\,\$$$

Luego a A le corresponden 3240 \$ y a B 2160 \$.

Tercer caso. — Se considera justo que si un capital de 2000 $ ha estado colocado 5 años en una sociedad y otro de 3500 $ ha estado 2 años, las ganancias obtenidas por dichos capitales son las mismas que las producidas, en 1 año, por un capital de 2000 $ × 5 y de 3500 $ × 3 respectivamente, es decir, que:

2000 $ en 5 años producen tanto como $ 2000 × 5 en 1 año

3500 $ » 2 años » » » $ 3500 × 2 » » »

Por esta razón se acepta la siguiente:

Convención. — *Las ganancias o pérdidas de varios capitales distintos que han estado diferentes tiempos en una sociedad, son proporcionales a los productos de dichos capitales por el número de años, meses o días que han estado colocado esos capitales.*

Problema. — *A, B, C y D forman una compañía. A puso 500 $ por 6 años, B puso 3000 $ por 5 años, C puso 1200 $ por 3 años y D puso 4000 $ por 2 años. Habiéndose obtenido una pérdida de 2500 $, ¿cuánto perdió cada uno?*

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{A puso} & c' = 500\ \$ \text{ ———— } & t' & = 6 \text{ años} \\
\text{B } » & c'' = 3000\ \$ \text{ ———— } & t'' & = 5 \text{ años} \\
\text{C } » & c''' = 1200\ \$ \text{ ———— } & t''' & = 3 \text{ años} \\
\text{D } » & c'''' = 4000\ \$ \text{ ———— } & t'''' & = 2 \text{ años}
\end{array}\right\} \text{pérdida} = \$\ 2500$$

Solución. — De acuerdo con el convenio anterior el problema se reduce a repartir la ganancia g en partes proporcionales a los productos de los capitales por el número de años $c' \times t'$, $c'' \times t''$, $c''' \times t'''$ y $c'''' \times t''''$.

Aplicando la regla de repartición proporcional resulta:

$$g'\ \$ = \frac{2500 \,.\, 500 \,.\, 6}{500 \,.\, 6 + 3000 \,.\, 5 + 1200 \,.\, 3 + 4000 \,.\, 2} =$$

$$= \frac{2500 \,.\, 500 \,.\, 6}{29\,600} \cong \$\ 253{,}37$$

$$g'' = \frac{2500 \,.\, 3000 \,.\, 5}{3000 + 15000 + 3600 + 8000} = $$

$$= \frac{2500 \,.\, 3000 \,.\, 5}{29\,600} \cong \$ \; 1266{,}89$$

$$g''' = \frac{2500 \,.\, 1200 \,.\, 3}{3000 + 15000 + 3600 + 8000} = $$

$$= \frac{2500 \,.\, 1200 \,.\, 3}{29600} \cong \$ \; 304{,}05$$

$$g'''' = \frac{2500 \,.\, 4000 \,.\, 2}{3000 + 15000 + 3600 + 8000} = $$

$$= \frac{2500 \,.\, 4000 \,.\, 2}{29600} \cong \$ \; 675{,}67$$

Luego a A le corresponde $ 253,37, a B $ 1266,89, a C $ 304,05 y a D $ 675,67 de pérdida.

69. **Regla de aligación. — Problema directo.** — Otro de los problemas que se presentan en el Comercio, es el que se refiere a la determinación del precio de una mezcla de una misma o de varias substancias de calidades diferentes, conociendo el precio y las cantidades de cada uno de los componentes. Este problema se resuelve por la aplicación de la llamada *Regla de aligación directa,* de la cual daremos la siguiente:

Definición. — Se llama *Regla de aligación directa* al procedimiento de cálculo, mediante el cual se obtiene el precio unitario (*) de una mezcla, cuando se conocen los precios unitarios de las sustancias mezcladas y los valores de las cantidades componentes respecto de las unidades a que se refieren los precios.

Damos a continuación el esquema general de un problema de aligación directa:

Problema. — *Se han mezclado s_1 Kg. de una sustancia de p_1 $ el Kg., con s_2 Kg de p_2 $ el Kg. y con s_3 Kg. de p_3 $ el Kg. ¿Cuánto vale el Kg. de la mezcla?*

(*) Por precio unitario de una sustancia se entiende el precio de cada unidad de la misma, por ejemplo de cada Kg. o de cada litro. etc.

Planteo:

Se han mezclado s_1 Kg ———— p_1 \$ el Kg

s_2 Kg ———— p_2 \$ » »

s_3 Kg ———— p_3 \$ » »

$(s_1 + s_2 + s_3)$ Kg ———— x \$ » »

Solución:

Si 1 Kg de la 1.ª sust. cuesta p_1 \$, s_1 Kg cuestan ———— $p_1 s_1$ \$

» » » » 2.ª » » p_2 \$, s_2 Kg » ———— $p_2 s_2$ \$

» » » » 3.ª » » p_3 \$, s_3 Kg » ———— $p_3 s_3$ \$

Luego s_1 Kg $+ s_2$ Kg $+ s_3$ Kg cuestan $p_1 s_1 \$ + p_2 s_2 \$ + p_3 s_3 \$$

es decir $(s_1 + s_2 + s_3)$ Kg » $(p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3)$ \$

y por lo tanto 1 Kg cuesta $\dfrac{(p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3)\ \$}{s_1 + s_2 + s_3}$

luego 1 Kg de la mezcla cuesta $x \$ = \dfrac{p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3}{s_1 + s_2 + s_3} \$$

Observando el numerador y el denominador del segundo miembro de la última igualdad, se deduce la siguiente:

Regla. — *Para hallar el precio de una mezcla se suman los productos de las medidas de las cantidades de las sustancias mezcladas, por sus precios unitarios, y se divide este resultado por la suma de las medidas de dichas cantidades.*

Problema. — *Se han mezclado 20 Kg. de yerba de \$ 1,60 el Kg., con 30 Kg. de \$ 1,30, con 35 Kg. de \$ 0,90 el Kg. y con 50 Kg. de \$ 1,10 el Kg. ¿Cuánto vale el Kilo de la mezcla?*

SOLUCIÓN:

$s_1 = 20$; $p_1 = 1{,}60$

$s_2 = 30$; $p_2 = 1{,}30$

$s_3 = 35$; $p_3 = 0{,}90$

$s_4 = 50$; $p_4 = 1{,}10$

$p = x$

$$\text{Fórmula: } p = \frac{p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 + p_4 s_4}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}$$

$$p = \frac{1{,}60.20 + 1{,}30.30 + 0{,}90.35 + 1{,}10.50}{20 + 30 + 35 + 50}$$

$$p = \frac{32 + 39 + 31{,}5 + 55}{135} = 1{,}166\,,\,.\,. \cong 1{,}17$$

Luego el Kg de la mezcla vale \$ 1,17.

70. **Problema inverso.** — Recíprocamente: cuando se conocen los cios de una misma o de varias sustancias de distintas calidades, se fija el precio unitario de la mezcla y se trata de encontrar las cantidades de cada una de estas sustancias, se obtiene un problema llamado de *Regla de aligación inversa*, de la cual daremos la siguiente:

DEFINICIÓN. — Se llama *Regla de aligación inversa*, al procedimiento de cálculo mediante el cual se obtienen las cantidades de las diversas sustancias, que deben emplearse para obtener una mezcla de precio dado, conociendo el precio unitario de cada una de ellas.

Nos ocuparemos primero de resolver problemas en los que se refieran a mezclas de dos sustancias. El esquema general de uno de esos problemas es el siguiente:

PROBLEMA. — *Se desea mezclar una sustancia de* p_1 *\$ el Kg. con otra de* p_2 *\$ el Kg. de modo que el precio del Kg. de mezcla resulte a* p *\$, ¿cuántos Kg. de cada una de las sustancias deben mezclarse?*

PLANTEO:

Se han mezclado x Kg ———— p_1 \$ el Kg

y Kg ———— p_2 \$ » »

$(x + y)$ Kg ———— p \$ » »

Solución. — Supongamos que el precio unitario de la primera sustancia p_1 sea mayor que p_2. El precio p de la mezcla debe estar comprendido entre los precios de las sustancias mezcladas, es decir

$$p_1 > p > p_2$$

Al vender la mezcla a p \$ el Kg, por cada Kg

de la 1ª sustancia se pierde $(p_1 - p)$ \$ y por x Kg, $(p_1 - p)\, x$ \$

» » 2ª » » gana $(p - p_2)$ \$ » » y Kg, $(p - p_2)\, y$ \$

y como las ganancias deben compensarse con las pérdidas, debemos tener

$$(p - p_2)\, y\ \$ = (p_1 - p)\, x\, \$$$

luego $$(p - p_2)\, y = (p_1 - p)\, x$$

por lo tanto $$\frac{y}{x} = \frac{p_1 - p}{p - p_2}$$

Esta igualdad nos indica que una solución del problema sería

$$y = p_1 - p \quad \text{y} \quad x = p - p_2$$

puesto que la razón entre y y x debe ser igual a la razón entre $(p_1 - p)$ y $(p - p_2)$, luego

$$x \text{ Kg} = (p - p_2) \text{ Kg} \quad ; \quad y \text{ Kg} = (p_1 - p) \text{ Kg}.$$

Pero si tomamos $x = m\,(p - p_2)$, e $y = m\,(p_1 - p)$, siendo m un número racional positivo, como en este caso es también

$$\frac{y}{x} = \frac{m\,(p_1 - p)}{m\,(p - p_2)} = \frac{p_1 - p}{p - p_2}$$ resulta

que estos valores de x e y son también soluciones del problema, es decir,

$$x \text{ Kg} = m(p_1 - p) \text{ Kg} \quad ; \quad y \text{ Kg} = m(p_2 - p) \text{ Kg}$$

Observando los valores obtenidos para x e y se deduce la siguiente

Regla. — *Para hallar las cantidades de una mezcla de dos sustancias de precios conocidos y fijado el precio de la mezcla, basta tomar tantas unidades de cada sustancia como indique la diferencia entre el precio unitario de la mezcla y el precio de la otra sustancia, en el único sentido posible o un múltiplo o submúltiplo de dichas cantidades.*

En la práctica el problema se resuelve directamente así:

$$p\,\$ \begin{cases} p_1\,\$ & \left| \; p_1 - p \right| \\ p_2\,\$ & \left| \; p - p_2 \right| \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \text{ Kg} = (p - p_2) \text{ Kg} \quad \text{o} \quad m\,(p - p_2) \text{ Kg} \\ y \text{ Kg} = (p_1 - p) \text{ Kg} \quad \text{o} \quad m\,(p_1 - p) \text{ Kg} \end{array}$$

Problema. — *Un almacenero desea mezclar vino de \$ 0,90 el litro con otro de clase inferior de \$ 0,55 el litro, de modo que el precio de la mezcla resulte de \$ 0,70 el litro. ¿Cuántos litros de cada una de las clases de vino deben mezclarse?*

Planteo:

$$\left.\begin{array}{l} \text{De } \$\ 0{,}90 \text{ ———————— } x.l \\ \text{» } \$\ 0{,}55 \text{ ———————— } y.l \end{array}\right\} (x+y)\ \text{l} \text{ ———————— } \$\ 0{,}70 \text{ el litro}$$

Solución:

$$\$\ 0{,}70 \begin{cases} \$\ 0{,}90 & \left| \; 0{,}90 - 0{,}70 = 0{,}20 \;\right| \; x\,l = 0{,}15.l \text{ ó } 15.l \text{ ó } 30.l\ldots \\ \$\ 0{,}55 & \left| \; 0{,}70 - 0{,}55 = 0{,}15 \;\right| \; y\,l = 0{,}20.l \text{ ó } 20.l \text{ ó } 40.l\ldots \end{cases}$$

Luego pueden mezclarse $15.l$ de \$ 0.90 con $20.l$ de \$ 0.55 el litro.

Consideremos ahora el caso de más de dos sustancias. Haciendo mezclas parciales de dos sustancias tales que el precio de una de ellas sea mayor que el precio fijado y el de la otra menor, en la forma indicada en el caso anterior, hasta que figuren todas las sustancias componentes y reuniendo todas esas mezclas parciales que han resultado todas al precio dado, la nueva mezcla será de este mismo precio. Con este criterio resolveremos el siguiente problema:

PROBLEMA. — *Se desea mezclar café de 1,40 \$, 2,00 \$, 3,20 \$ y 2,50 \$ el Kilogramo de modo que el precio de la mezcla resulte de a 2,40 \$ el Kg. ¿Cuántos Kilogramos de cada una de las sustancias deben mezclarse?*

PLANTEO:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{De } 1{,}40\ \$ & \text{———————} & x \text{ Kg} \\ \text{» } 2{,}00\ \$ & \text{———————} & y \text{ Kg} \\ \text{» } 3{,}20\ \$ & \text{———————} & z \text{ Kg} \\ \text{» } 2{,}50\ \$ & \text{———————} & w \text{ Kg} \end{array}\right\} (x+y+z+w) \text{ Kg} — 2{,}40 \text{ el Kg}$$

SOLUCIÓN: *Primer problema parcial.* — Mezclando el de \$ 1,40 con el de \$ 3,20 el Kg, se tiene:

$$\$\ 2{,}40 \left\{\begin{array}{l|l|} \$\ 1{,}40 & 2{,}40 - 1{,}40 = 1{,}00 \\ \$\ 3{,}20 & 3{,}20 - 2{,}40 = 0{,}80 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} x \text{ Kg} = 0{,}80 \text{ Kg} \\ z \text{ Kg} = 1{,}00 \text{ Kg} \end{array}$$

Segundo problema parcial. — Mezclando el de \$ 2,50 con el de \$ 2,00 el Kg, se tiene:

$$\$\ 2{,}40 \left\{\begin{array}{l|l|} \$\ 2{,}00 & 2{,}40 - 2{,}00 = 0{,}40 \\ \$\ 2{,}50 & 2{,}50 - 2{,}40 = 0{,}10 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} y \text{ Kg} = 0{,}10 \text{ Kg} \\ w \text{ Kg} = 0{,}40 \text{ Kg} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Luego} \\ \text{deben} \\ \text{mezclar-} \\ \text{se} \end{array} \left\{\begin{array}{llllll} \text{de } \$\ 1{,}40 & \text{————} 0{,}80 \text{ Kg} & \text{o} & 8 \text{ Kg} & \text{o} & 80 \text{ Kg}\ldots \\ \text{» } \$\ 2{,}00 & \text{————} 0{,}10 \text{ Kg} & \text{o} & 1 \text{ Kg} & \text{o} & 10 \text{ Kg}\ldots \\ \text{» } \$\ 3{,}20 & \text{————} 1{,}00 \text{ Kg} & \text{o} & 10 \text{ Kg} & \text{o} & 100 \text{ Kg}\ldots \\ \text{» } \$\ 2{,}50 & \text{————} 0{,}40 \text{ Kg} & \text{o} & 4 \text{ Kg} & \text{o} & 40 \text{ Kg}\ldots \end{array}\right.$$

Aplicaciones. — Problema I. — *Se ha mezclado café de 2 \$ el Kg con otros de \$ 3 y de \$ 3.60. Si se quiere vender la mezcla a \$ 2,75 el Kg. ¿Cuántos Kg de cada precio entrarán para formar 520 Kg. de mezcla?.*

Planteo:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{De } \$\,2 & \text{———} & x \text{ Kg} \\ \text{» } \$\,3 & \text{———} & y \text{ Kg} \\ \text{» } \$\,3{,}60 & \text{———} & z \text{ Kg} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (x+y+z) \text{ Kg} \text{ ——— } \$\,2{,}75 \text{ el Kg} \\ x+y+z = 520 \end{array}$$

Solución. — Mezclaremos café de 2 \$ con c/u de las otras clases.

$$\$\,2{,}75 \begin{cases} \$\,2 \\ \$\,3 \end{cases} \left|\begin{array}{l} 2{,}75 - 2 = 0{,}75 \\ 3 - 2{,}75 = 0{,}25 \end{array}\right| \begin{array}{l} x \text{ Kg} = 0{,}25 \text{ Kg o } 25 \text{ Kg} \\ y \text{ Kg} = 0{,}75 \text{ Kg o } 75 \text{ Kg} \end{array}$$

$$\$\,2{,}75 \begin{cases} \$\,2 \\ \$\,3{,}60 \end{cases} \left|\begin{array}{l} 2{,}75 - 2 = 0{,}75 \\ 3{,}60 - 2{,}75 = 0{,}85 \end{array}\right| \begin{array}{l} x' \text{ Kg} = 0{,}45 \text{ Kg o } 85 \text{ Kg} \\ z \text{ Kg} = 0{,}75 \text{ Kg o } 75 \text{ Kg} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Luego las cantida-} \\ \text{des a mezclar deben} \\ \text{ser proporcionales} \end{array} \begin{cases} \text{De } \$\,2 \text{ ——— } 25 \text{ Kg} + 85 \text{ Kg} = 110 \text{ Kg} \\ \text{» } \$\,3 \text{ ——————— } 75 \text{ Kg} \\ \text{» } \$\,3{,}60 \text{ ——————— } 75 \text{ Kg} \end{cases}$$

Como se deben obtener 520 Kg de la mezcla, repartiremos 520 proporcionales a 110, 75 y 75.

$$520 \begin{cases} 110 \text{ ——— } x \\ 75 \text{ ——— } y \\ 75 \text{ ——— } z \end{cases} \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{520.110}{110+75+75} = \dfrac{520.110}{260} = 220 \\ y = z = \dfrac{520.75}{260} = 150 \end{array}\right.$$

Luego se deben mezclar 220 Kg de café de \$ 2 el Kg, con 150 de \$ 3 y con 150 Kg de \$ 3,60 el Kg para obtener una mezcla de 520 Kg a \$ 2,75 el Kg.

Problema II. — *Un comerciante quiere mezclar vinos de \$ 35, \$ 40 y \$ 45 el Hl ganando 15 % sobre un precio de venta de \$ 42 el Hl. ¿Cuántos Hl de cada precio debe mezclar?.*

Solución. — Si el precio de venta al público es de \$ 42 con una ganancia de 15 % el precio de la venta será de

$$\$\,42 - \$\,42 \times 0{,}15 = \$\,42 - \$\,6{,}30 = \$\,35{,}70 \text{ el Hl}$$

Luego queda reducido a un problema de regla de mezcla inverso análogo al que planteamos:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{De} & \$\,35 \text{ ———— } & x \text{ Hl} \\ \text{»} & \$\,40 \text{ ———— } & y \text{ Hl} \\ \text{»} & \$\,45 \text{ ———— } & z \text{ Hl} \end{array}\right\} (x + y + z) \text{ Hl ———— } \$\,35{,}70.$$

Problema III. — *Mezclar vinos de $ 0,75, $ 0,70, $ 0,65, $ 0,50 y $ 0,40 el litro hasta alcanzar a 539 l a un precio de $ 0,60 el litro. ¿Cuántos litros de cada precio se necesitan, si del primero se toman 60 litros?*

$$\left.\begin{array}{lll} \text{De} & \$\,0{,}75 \text{ ———— } & 60 \text{ l} \\ \text{»} & \$\,0{,}70 \text{ ———— } & x \text{ l} \\ \text{»} & \$\,0{,}65 \text{ ———— } & y \text{ l} \\ \text{»} & \$\,0{,}50 \text{ ———— } & z \text{ l} \\ \text{»} & \$\,0{,}40 \text{ ———— } & w \text{ l} \end{array}\right\} \begin{array}{c} (60 + x + y + z + w) \text{ l ———— } \$\,0{,}60 \text{ el l} \\ \\ 60 + x + y + z + w = 539 \end{array}$$

Para facilitar la solución haremos entrar en un solo problema el vino de $ 0,75

$$\$\,0{,}60 \left\{\begin{array}{l} \$\,0{,}75 \\ \$\,0{,}40 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 0{,}75 - 0{,}60 = 0{,}15 \\ 0{,}60 - 0{,}40 = 0{,}20 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{del } 1^{\circ} = 0{,}20 \text{ l o } 20 \text{ l} \\ w \text{ l} = 0{,}15 \text{ l o } 15 \text{ l} \end{array} \quad [1[$$

$$\$\,0{,}60 \left\{\begin{array}{l} \$\,0{,}70 \\ \$\,0{,}50 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 0{,}70 - 0{,}60 = 0{,}10 \\ 0{,}60 - 0{,}50 = 0{,}10 \end{array}\right| \begin{array}{l} x \text{ l} = 0{,}10 \text{ l o } 10 \text{ l} \\ z \text{ l} = 0{,}10 \text{ l o } 10 \text{ l} \end{array}$$

$$\$\,0{,}60 \left\{\begin{array}{l} \$\,0{,}65 \\ \$\,0{,}50 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 0{,}65 - 0{,}60 = 0{,}05 \\ 0{,}60 - 0{,}50 = 0{,}10 \end{array}\right| \begin{array}{l} y \text{ l} = 0{,}10 \text{ l o } 10 \text{ l} \\ z' \text{ l} = 0{,}05 \text{ l o } 5 \text{ l} \end{array}$$

Por el primer problema parcial [1] deben mezclarse 20 l de 0,75 el litro con 15 l de 0,40 o multiplos de estas cantidades. Como de acuerdo con los datos del problema deben mezclarse 60 l de $ 0,75, bastará triplicar esas cantidades, o sea.

$$\begin{array}{l} \text{Para mezcla} \\ \text{de } 0{,}60 \text{ el l} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \text{de } \$\,0{,}75 \text{ ———— } 60 \text{ l} \\ \text{» } \$\,0{,}40 \text{ ———— } 45 \text{ l} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{total ya se han mezclado} \\ 60 \text{ l} + 45 \text{ l} = 105 \text{ l} \end{array}$$

Por otra parte como la mezcla total debía ser de 539 l y del primero y último se han tomado 105 l, solo quedan para las restantes clases

$$539 \text{ l} - 105 \text{ l} = 434 \text{ l}$$

El problema ha quedado reducido a repartir 434 l en partes proporcionales a los números de litros de x, y, z, obtenido en los problemas parciales 2° y 3°

$$\text{Repartir } 434 \text{ l} \left\{ \begin{array}{lr} x \text{ ———————— } & 10 \\ y \text{ ———————— } & 10 \\ z \text{ ——— } & 10 + 5 = 15 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x = y = \dfrac{434.10}{10 + 10 + 15} = 124 \\ z = \dfrac{434.15}{35} = 186 \end{array} \right.$$

Luego deben mezclarse	De $ 0,75 ———	60 l	que dan un total de 539 l a $ 0,60 el l
	» $ 0,70 ———	124 l	
	» $ 0,65 ———	124 l	
	» $ 0,50 ———	186 l	
	» $ 0,40 ———	45 l	

Aplicaciones. — Resolver los problemas siguientes:

1°) ¿Qué conviene más: comprar por $ 15 800 una propiedad que produce $ 835 por año o colocar la primera suma al 4,75 % de interés?

2°) Si se compra por $ 53 600 una propiedad que produce $ 3000 por año, ¿a qué tanto por ciento se ha colocado la suma invertida?

3°) ¿Al cabo de cuánto tiempo un capital colocado al 5 %, se duplica?

4°) ¿Qué descuento sufrirá un pagaré de $ 3 170 a 90 días al 5 % de interés?

5°) ¿Qué valor efectivo tiene el 7 de Mayo un pagaré de $ 375 que vence el 31 de Agosto, si se descuenta al 5 %?

6°) Tres obreros recibieron $ 120 por un trabajo hecho en común. El primero trabajó 12 días el segundo 15 y el tercero 10 ¿cuánto debe recibir cada uno?

7°) Tres asociados han obtenido en sus negocios un beneficio de $ 18 000 ¿cuánto le toca a cada uno de ellos si el primero puso $ 15 000 durante 2 años el segundo $ 21 000 durante 18 meses y el último $ 25 000 durante 15 meses?

8°) ¿En qué proporción tendrán que mezclarse vino de $ 0,45 el litro con otro de $ 0,37 el litro para que la mezcla resulte a $ 0,40 el litro?

CAPITULO VIII

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

PROGRAMA. — *Igualdades: Identidades y ecuaciones. Ecuaciones enteras fraccionarias. Ecuaciones equivalentes. Si a ambos miembros de una ecuación se les suma un mismo número o una misma expresión entera, se obtiene una ecuación equivalente. Trasposición de términos. Si ambos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un mismo número distinto cero, se obtiene una ecuación equivalente: pasaje de factores o divisores numéricos de un miembro a otro. Ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita. Resolución de las mismas. Ecuaciones fraccionarias: Supresión de denominadores. Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por una expresión entera, se obtiene una ecuación con las mismas raíces que las dadas, pero que puede admitir, además, nuevas raíces. Ecuaciones fraccionarias de primer grado: resolución de las mismas.*

72. **Igualdades: identidades y ecuaciones.** — DEFINICIÓN. — Se llama *igualdad algebraica* a la expresión formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual, y que se reduce a una igualdad numérica al menos para algún sistema de valores atribuidos a las letras que en ella figuran.

NOTA. — Los sistemas de valores que convierten a una igualdad algebraica en una numérica se dice que *satisfacen* o *verifican* la igualdad.

EJEMPLO: La expresión $\frac{5\,ab}{6} + \frac{4\,ac}{5} - \frac{2\,cx}{3} = 2\,ab - 19$ es una igualdad algebraica, pues se satisface al menos para el sistema de valores $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $x = 6$, puesto que

Valor numérico

del 1.er miemb. $= \frac{5.2.3}{6} + \frac{4.2.5}{5} - \frac{2.5.6}{3} = 5 + 8 - 20 = -7$

Valor numérico

del 2.o miemb. $= 2.2.3 - 19 = 12 - 19 = -7.$

Consideremos las igualdades algebraicas:

$$(3 + a)m = 3\,m + am, \qquad \text{y} \qquad x^2 - 3\,x = 10,$$

y veamos lo que ocurre al asignarles valores cualesquiera a las letras que en ellas figuran.

En la primera igualdad $(3 + a)m = 3\,m + am$ se tiene:

$$\begin{array}{l} \text{para } a = 0 \\ \text{y } \quad m = 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} 1.^{\text{er}} \text{ miemb.} & (3 + a)\,m = & (3 + 0)\,1 = 3.1 = 3 \\ 2.^{\text{o}} \quad » & 3\,m + a\,m & = 3.1 + 0.1 = 3.1 = 3 \end{array} \right\} la$$

igualdad se verifica

$$\begin{array}{l} \text{para } a = -2 \\ \text{y } \quad m = \frac{1}{2} \end{array} \left| \begin{array}{ll} 1.^{\text{er}} \text{ miemb.} & (3 + a)\,m = [3 + (-2)]\,\frac{1}{2} = 1.\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ 2.^{\text{o}} \quad » & 3\,m + a\,m = 3.\,\frac{1}{2} + (-2)\,\frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \end{array} \right| la$$

igualdad se verifica

$$\begin{array}{l} \text{para } a = 0{,}02 \\ \text{y } \quad m = \sqrt{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} 1.^{\text{er}} \text{ miemb.} & (3 + a)m = (3 + 0{,}02)\,.\sqrt{2} = 3{,}02\,.\sqrt{2} \\ 2.^{\text{o}} \quad » & 3\,m + a\,m = 3.\sqrt{2} + 0{,}02\sqrt{2} = (3 + 0{,}02)\sqrt{2} \end{array} \right\} la$$

igualdad se verifica

Si continuáramos asignando valores cualesquiera a a y a m comprobaríamos siempre que la igualdad considerada se verifica, puesto que de acuerdo con la propiedad distributiva de la multiplicación lo indicado en ella es válido para cualquier valor de a y de m.

En la segunda igualdad $x^2 - 3x = 10$ se tiene

para $x = 0$ $\quad x^2 - 3x = 0^2 - 3.0 = 0 \neq 10$

» $x = 1$ $\quad x^2 - 3x = 1^2 - 3.1 = -2 \neq 10$

» $x = \mathbf{5}$ $\quad x^2 - 3x = 5^2 - 3.5 = 25 - 15 = 10$ *la igualdad se verifica*

$x = -1$ $\quad x^2 - 3x = (-1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4 \neq 10$

» $x = \mathbf{-2}$ $\quad x^2 - 3x = (-2)^2 - 3.(-2) = 4 + 6 = 10$ *la igualdad se verifica.*

Si continuáramos asignando valores cualesquiera a x veríamos que la igualdad considerada no se verifica. Puede demostrarse (los alumnos lo verán en 3er año) que los únicos valores de x para los cuales se verifica la igualdad considerada son $x = 5$ y $x = -2$.

Los ejemplos tratados nos muestran que las igualdades se pueden clasificar en dos clases, que se distinguen de acuerdo con las siguientes definiciones:

Definición I) Se llaman *identidades* a las igualdades que se verifican para todos los valores asignados a las letras que en ellas figuran.

Ejemplo. $\quad (3 + a)m = 3m + am$ es una identidad.

Definición II) Se llaman *ecuaciones* a las igualdades que sólo se verifican para determinados valores de algunas de sus letras, llamadas *incógnitas.*

Las incógnitas de una ecuación se representan por las últimas letras del alfabeto: x, y, z, etc.

Ejemplo. $3x - 2 = 4$ es una ecuación, pues puede demostrarse que sólo se verifica para el valor de la incógnita $x = 2$,

Definición. — Se llaman *raíces de una ecuación,* a los valores de las incógnitas que satisfacen a la misma.

Ejemplo. $\quad$ 2 es la raíz de la ecuación $3x - 2 = 4$.

73. Clasificación de las ecuaciones.— DEFINICIÓN I. — Se dice que una *ecuación es entera* cuando las incógnitas no figuran en ella como denominador o con exponente negativo.

EJEMPLO: $0{,}2\,x + 5\,y = 53 - \frac{1}{4}x$ es una ecuación entera

DEFINICIÓN II) Se dice que una *ecuación es fraccionaria* cuando las incógnitas figuran en alguno de sus términos como denominador o con exponente negativo.

EJEMPLO: $3\,x + \frac{1}{y} - 2\,x\,y^{-3} = \frac{2}{x+1}$ es una ecuac. fraccion.

DEFINICIÓN III) Se dice que una *ecuación es irracional* cuando las incógnitas figuran en alguno de sus términos bajo el signo radical.

EJEMPLO: $2\,x + \sqrt{4\,x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}$ es una ecuac. irracion.

74. Ecuaciones equivalentes.— DEFINICIÓN. — Se dice que *dos ecuaciones son equivalentes* cuando tienen las mismas raíces.

EJEMPLO I.— Formemos una ecuación cuya raíz sea $x = 4$ escribiendo el primer miembro arbitrariamente y el segundo de modo que tome el valor numérico de ese primer miembro para $x = 4$.

Así, por ejemplo, tedríamos:

$$3\,x - 5 = 7 \qquad \text{cuya raíz es} \quad x = 4$$

Formemos del mismo modo una nueva ecuación que tenga la misma raíz $x = 4$, por ejemplo la

$$x - 5 = -7\,x + 27 \qquad \text{cuya raíz es} \quad x = 4$$

luego $3\,x - 5 = 7$ y $x - 5 = -7\,x + 27$ tienen la raíz $x = 4$ común, y como puede demostrarse que es la única raíz de ambas ecuaciones resulta que ellas son equivalentes.

Ejemplo II) $3x + 4 = 10$ tiene por raíz $x = 2$

$x^2 + 8 = 12$ tiene por raíces $\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

luego $3x + 4 = 10$ y $x^2 + 8 = 12$ no son equivalentes

Observación. — La definición de ecuaciones equivalentes que se acaba de dar se puede expresar también así: *Dos ecuaciones son equivalentes cuando* 1º) *toda raíz de la primera es raíz de la segunda* y 2º) *cuando toda raíz de la segunda es raíz de la primera.*

PROPIEDADES DE LAS ECUACIONES EQUIVALENTES

75. **Teorema I.** — *Si a ambos miembros de una ecuación se les suma un mismo número, se obtiene una ecuación equivalente.*

Hip.) $3x - 4 = x + 6$ [I]

$9 =$ número cualquiera

Tesis) $3x - 4 + 9 = x + 6 + 9$ [II] equivalente a la I.

Demost.) Para que sean equivalentes la ecuación de la Hipótesis y la de la Tesis debemos probar que:

I) *Toda raíz de la I es raíz de la II.*

Si $3x - 4 = x + 6$ tiene por raíz a $x = 5$

es $3.5 - 4 = 5 + 6$ por definición de raíz

y como $9 = 9$ por carácter idéntico igualdad

resulta $3.5 - 4 + 9 = 5 + 6 + 9$ por prop. uniforme de la adición

lo que nos dice que $x = 5$ es raíz de $3x - 4 + 9 = x + 6 + 9$ por def.

II) *Toda raíz de la II debe ser raíz de la I.*

Si $3x - 4 + 9 = x + 6 + 9$ tiene por raíz a $x = 5$

es	$3.5 - 4 + 9 = 5 + 6 + 9$	por def. de raíz
y como	$9 = 9$	por car. idé. de iguald.
Rest. m. a m. da	$3.5 - 4 = 5 + 6$	por prop. unif. sust.

lo que nos dice que $x = 5$ es raíz de $3x - 4 = x + 6$ por def.

76. **Teorema II.** — *Si a ambos miembros de una ecuación se le suma una misma expresión entera se obtiene una ecuación equivalente.*

Hip.) $3x - 4 = x + 6$ [I]
$2x$ expresión entera en x.

Tesis) $3x - 4 + 2x = x + 6 + 2x$ [II] equivalente a la I.

Demost.) Para que sean equivalentes las ecuaciones de la Tesis debemos probar que:

I) *Toda raíz de la I es raíz de la II.*

Si $3x - 4 = x + 6$ tiene por raíz a $x = 5$

es	$3.5 - 4 = 5 + 6$	por defin. de raíz
Sust. en $2x$, x por 5 da	$2.5 = 2.5$	por carác. idén. ig.
Sumando m. a m.	$3.5 - 4 + 2.5 = 5 + 6 + 2.5$	por prop. unif. adic.

lo que nos dice que $x = 5$ es raíz de II.

II) *Toda raíz de II es raíz de I.*

Si $3x - 4 + 2x = x + 6 + 2x$ tiene por raíz a $x = 5$

es	$3.5 - 4 + 2.5 = 5 + 6 + 2.5$	por defin. de raíz
Sust en $2x$, x por 5 da	$2.5 = 2.5$	por carác. idéntico
Restando m. a m. resulta	$3.5 - 4 = 5 + 6$	por prop. un. sust.

lo que nos dice que $x = 5$ es raíz de $3.x - 4 = x + 6$

77. **Trasposición de términos.**— COROLARIO.— *Si en una ecuación se pasa un término de un miembro a otro con signo contrario, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.*

Efectivamente: Si un número o una expresión entera es término de una ecuación y se suman a ambos miembros de la misma, dicho número o expresión con signo contrario, al simplificar, este término desaparece del miembro en el cual figuraba y aparece en el otro con signo contrario, obteniéndose una ecuación equivalente a la dada (teors. 75 y 76, respectivamente).

EJEMPLO I) Sea la ecuación $3x - 2 = 5x - 4$ cuya única raíz es $x = 1$.

Para pasar el término -2 del 1[er] miembro al 2º, se suma a ambos miembros de la ecuación el contrario de dicho número que es $+2$, y se tiene:

$$3x - 2 + 2 = 5x - 4 + 2$$

y simplif. queda $\quad 3x = 5x - 4 + 2$ cuya raíz es $x = 1$ (teor. 75)

EJEMPLO II) Sea la ecuación de $5x - 7 = x - 19$ cuya única raíz es $x = -3$.

Para pasar el término x del 2º miembro al 1º, se suma a ambos miembros de la ecuación el contrario de dicho término que es $-x$, y se tiene:

$$5x - 7 + (-x) = x - 19 + (-x)$$

simp. queda $\quad 5x - 7 - x = -19$ cuya raíz es $x = -3$ (teor. 76)

78. **Teorema III.** — *Si ambos miembros de una ecuación se multiplican por un mismo número distinto de cero se obtiene una ecuación equivalente.*

HIP.) $\quad 3x^2 - 4 = x + 6 \quad$ [I] $\quad$ raíz $x = a;\quad 2 =$ número $\neq 0$

TESIS) $\quad (3x^2 - 4)2 = (x + 6)2 \quad$ [II] equivalente a la I.

DEMOST.) Para que sean equivalentes la ecuación de la Hipótesis y la de la Tesis debemos probar que:

I) *Toda raíz de la I es raíz de la II.*

Si $3x^2 - 4 = x + 6$ tiene por raíz $x = a$

es	$3 . a^2 - 4 = a + 6$	por definición de raíz
y como	$2 = 2$	por car. idént. de igualdad
Mult. m. a m. da	$(3 . a^2 - 4)2 = (a + 6)2$	por prop. unif. de la mult.

lo que nos dice que $x = a$ es raíz de $(3x^2 - 4)2 = (x + 6)2$ por def.

II) *Toda raíz de la II es raíz de la I.*

Si $(3x^2 - 4)2 = (x + 6)2$ tiene por raíz $x = b$

es	$(3 . b^2 - 4)2 = (b + 6)2$	por definición de raíz
y como	$2 = 2$	por carácter idéntico
Divid. m. a m. da	$3 . b^2 - 4 = b + 6$	por prop. unif. de división

lo que nos dice que $x = b$ es raíz de $3 . x^2 - 4 = x + 6$ por def.

78′. **Teorema IV.**— *Si ambos miembros de una ecuación se dividen por un mismo número distinto de cero se obtiene una ecuación equivalente.*

HIP.) $3x^2 - 4 = x + 6$ [I] ecuación de raíz $x = a$

2 núm. $\neq 0$

TESIS) $\dfrac{3x^2 - 4}{2} = \dfrac{x + 6}{2}$ [II] equivalente a la I.

DEMOST.) Multiplicando a ambos miembros de $3x^2 - 4 = x + 6$ por el inverso del número dado 2 se tiene:

$$(3x^2 - 4)\frac{1}{2} = (x + 6)\frac{1}{2}$$

o sea $$\frac{3x^2 + 4}{2} = \frac{x + 6}{2}$$

que es equivalente a $3x^2 - 4 = x + 2$ por el teorema anterior.

79. **Pasaje de factores o divisores numéricos de un miembro a otro.** — COROLARIO. — *Si en una ecuación se pasa un factor o divisor distinto de cero de un miembro a otro como divisor o factor respectivamente, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.*

Efectivamente: Si un número es factor de todo un miembro de una ecuación, y se dividen ambos miembros de la misma por dicho factor, al simplificar éste desaparece del miembro en el cual figuraba y aparece en el otro como divisor, obteniéndose una ecuación equivalente a la dada (teor. 78′).

EJEMPLO.—Sea la ecuación $2(3x - 5) = 7x - 13$ cuya raíz $x = 3$.

Para pasar el factor 2, del 1er miembro al 2º, se dividen ambos miembros de la ecuación por dicho factor; y se tiene:

$$\frac{2(3x - 5)}{2} = \frac{7x - 13}{2}$$

y simp. queda $3x - 5 = \frac{7x - 13}{2}$ cuya raíz es $x = 3$ (teor. 78′)

Por otra parte: Si un número es divisor de todo un miembro de una ecuación, y se multiplican ambos miembros de la misma por dicho divisor, al simplificar éste desaparece del miembro en el cual figuraba y aparece en el otro como factor, obteniéndose una ecuación equivalente a la dada (teor. 78).

EJEMPLO. — Sea la ecuación $4x + 5 = \frac{7x - 10}{3}$ cuya única raíz es $x = -5$.

Para pasar el divisor 3 del 2º miembro al 1º se multiplican ambos miembros de la ecuación por dicho divisor y se tiene:

$$(4x + 5) \,.\, 3 = \frac{7x - 10}{3} \,.\, 3$$

simp. queda $(4x + 5) \,.\, 3 = 7x - 10$ cuya raíz es $x = -5$ (teor. 78)

80. Ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita.— Definición. — Se llama *grado de una ecuación entera con una incógnita,* al grado dado por el mayor exponente con que figura la incógnita en dicha ecuación.

Ejemplo: $3x^3 + 2x = \frac{8}{5} - 3x^2$ es una ecuación de 3er grado

$\frac{1}{2}x + 3 = 9 - x$ es una ecuación de 1er grado

Si consideramos una ecuación de primer grado con una incógnita por ejemplo la $x + \frac{3}{2}x + 9 = \frac{2}{3}x + 4 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{5}$, y reducimos en ambos miembros los términos semejantes tenemos:

$$\frac{5}{2}x + 9 = \frac{3}{2}x + \frac{19}{5}$$

En general, dada una ecuación de primer grado con una incógnita se podrá, reduciendo los términos semejantes en ambos miembros, reducirla a una expresión del tipo

$$ax + b = cx + d \qquad \text{siendo, } a, b, c \text{ y } d$$

números reales conocidos.

Los términos b y d en los cuales no figura la incógnita se llaman *términos independientes.*

81. **Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.** -- Definición.— *Resolver* una ecuación significa hallar sus raíces.

El procedimiento que se sigue para obtenerlas, consiste en reemplazar sucesivamente la ecuación dada por otras equivalentes, hasta llegar a una de la forma $x = m$, cuya raíz es m. Siendo esta ecuación equivalente a la propuesta resulta que m es raíz de dicha ecuación.

Observación. — Como la ecuación $x = m$ tiene por raíz solamente a m, porque si un número es distinto de m no puede ser igual a x, y además la ecuación $x = m$ es equivalente a la dada resulta que ésta tiene a m como única raíz. En general: *Toda ecuación de primer grado con una incógnita tiene una sola raíz.*

Tratemos de resolver la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$ax + b = cx + d$$

Observando que los términos que contienen la incógnita son semejantes, y que los términos independientes son números conocidos, parece conveniente agrupar a los primeros en un miembro y a los segundos en el otro para poder reducirlos.

En nuestro caso pasando el término cx al primer miembro y el término independiente b al segundo, tendríamos:

$$ax - cx = d - b \qquad \text{ecuación}$$

que es equivalente a la dada por teoremas anteriores (75 y 76).

Reduciendo los términos semejantes se tiene

$$(a - c)x = d - b$$

Dividiendo ambos miembros por el coeficiente $(a - c)$ de la incógnita resulta la ecuación

$$x = \frac{d - b}{a - c} \qquad \text{que es equivalente a la dada (78')}$$

Pero $\dfrac{d-b}{a-c}$ es la raíz de esta ecuación, pues si se reemplaza en ella x por $\dfrac{d-b}{a-c}$ se obtiene la identidad $\dfrac{d-b}{a-c} = \dfrac{d-b}{a-c}$, luego $\dfrac{d-b}{a-c}$ es también raíz de la ecuación dada.

El procedimiento seguido, que es general, nos permite dar la siguiente:

Regla. — *Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita:*

1°) *Se trasponen todos los términos que contengan la incógnita a un miembro y los independientes al otro.*

2°) *Se efectúan las operaciones indicadas en ambos miembros.*

3°) *Si la incógnita queda afectada por un coeficiente, se pasa éste al otro miembro como divisor.*

Aplicaciones: Ejemplo I) Resolver la ecuación $7x - 3 = 21x - 9$.

1°) $$7x - 21x = -9 + 3$$

2°) $$-14x = -6$$

3°) $$x = \frac{-6}{-14} = \frac{3}{7}$$

Ejemplo II) Resolver la ecuación $\dfrac{2}{5}x - 1 = \dfrac{1}{4}x + 2$

1°) $$\frac{2}{5}x - \frac{1}{4}x = 2 + 1$$

2°) $$\frac{3}{20}x = 3$$

3°) $$x = \frac{3}{\frac{3}{20}} = \frac{3 \cdot 20}{3} = 20$$

EJEMPLO III) Resolver la ecuación $x - 3 = -3(4 - 2x)$

1º) $$x - 3 = -12 + 6x$$

$$x - 6x = -12 + 3$$

2º) $$-5x = -9$$

3º) $$x = \frac{-9}{-5} = \frac{9}{5}$$

EJEMPLO IV) Resolver la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} = x - 1$

1º) $$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} - x = -1$$

2º) $$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - 1\right)x = -1$$

$$\frac{8 + 4 + 2 + 1 - 16}{16}x = -1$$

$$\frac{-1}{16}x = -1$$

3º) $$x = \frac{-1}{\frac{-1}{16}} = \frac{-1.16}{-1} = 16$$

EJEM. V) Resolver la ecuación $\frac{x}{6} - \frac{x - \frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3}\right) = 0$

Como esta ecuación no está reducida al tipo $ax + b = cx + d$, efectuamos las operaciones indicadas y reducimos los términos semejantes para transformarla en una de esa forma.

$$\frac{x}{6} - \frac{\frac{2x - 1}{2}}{3} - \frac{2}{15} + \frac{x}{9} = 0$$

$$\frac{x}{6} - \frac{2x - 1}{6} - \frac{2}{15} + \frac{x}{9} = 0$$

$$\frac{x}{6} - \frac{x}{3} + \frac{1}{6} - \frac{2}{15} + \frac{x}{9} = 0$$

1°) $$\frac{x}{6} - \frac{x}{3} + \frac{x}{9} = -\frac{1}{6} + \frac{2}{15}$$

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)x = \frac{-5+4}{30}$$

$$\frac{3-6+2}{18}\,x = \frac{-1}{30}$$

2°) $$\frac{-1}{18}\,x = \frac{-1}{30}$$

3°) $$x = \frac{\dfrac{-1}{30}}{\dfrac{-1}{18}} = \frac{(-1)\,.\,18}{(-1)\,.\,30} = \frac{3}{5}$$

82. Ecuaciones fraccionarias: S[illegible]esión de denominadores.— Sea por ejemplo la ecuación fraccionaria $8 - \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{4}{x^2-1} + \dfrac{3}{5}$.

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación dada, por un múltiplo de los denominadores en que figura la incógnita y simplificamos, desaparecen dichos denominadores. En la práctica se toma como múltiplo de los denominadores su M. C. M.

Para nuestro caso tendríamos que:

Siendo M. C. M. $\left\{\begin{array}{l} x-1 = x-1 \\ x^2-1 = (x+1)(x-1) \end{array}\right\} = x^2-1$ resulta

$$8\,(x^2-1) - \frac{x\,(x^2-1)}{x-1} = \frac{4\,(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{3\,(x^2-1)}{5}$$

y simplificando queda:

$$8\,(x^2-1) - x\,(x+1) = 4 + \frac{3\,(x^2-1)}{5}$$ que es una ecuación entera.

La observación de este ejemplo y la consideración de que en cualquier otro caso puede procederse de la misma manera, nos conducen a dar la siguiente:

Regla. — *Para suprimir los denominadores que contienen a la incógnita en una ecuación fraccionaria:*

1º) *Se halla el M. C. M. de dichos denominadores.*

2º) *Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el M. C. M. hallado.*

3º) *Se hacen todas las simplificaciones posibles.*

Aplicación. — Suprimir los denominadores en la ecuación

$$\frac{7}{5} - \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{2x^2 - 2x}$$

1º) Siendo M. C. M. $\left\{ \begin{array}{c} x^2 = x^2 \\ 2x^2 - 2x = 2x(x-1) \end{array} \right\} = x^2(x-1)$

2º) $$\frac{7}{5} x^2 (x-1) - \frac{1}{x^2} x^2 (x-1) = \frac{x+1}{2x^2 - 2x} x^2 (x-1)$$

3º) $$\frac{7}{5} x^2 (x-1) - (x-1) = \frac{(x+1)\,x}{2}$$

Observación. — Suprimir los denominadores en que figura la incógnita de una ecuación fraccionaria, equivale a transformarla en una ecuación entera. Conviene, sin embargo, advertir que aún no sabemos si la ecuación que resulta es equivalente a la dada.

Habíamos visto (nº 78) que si se multiplican ambos miembros de de una ecuación por un mismo número, se obtiene una ecuación equivalente a la dada. Veamos ahora qué sucede cuando se multiplican ambos miembros de una ecuación por una misma expresión entera.

83. **Teorema V.** — *Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por una expresión entera, se obtiene una ecuación con las mismas raíces que la dada pero que puede admitir, además, nuevas raíces.*

Hip.) $3x^2 - 4 = x + 6$ [I] ; $2x$ expresión entera.

Tesis) $(3x^2 - 4)2x = (x+6)2x$ [II] tiene las mismas raíces que la I, pero puede tener raíces además otras raíces.

DEMOST.) PRIMERA PARTE. — *Toda raíz de la I es raíz de la II.*

Si $3x^2 - 4 = x + 6$ tiene por raíz $x = a$

es $3.a^2 - 4 = a + 6$ por defin. de raíz

Sust. en $2x$, x por a da $2.a = 2.a$ por car. idén. igual.

Mult. m. a m. queda $(3.a^2 - 4)2.a = (a+6)2a$ por prop. un. mult.

lo que nos dice que $x = a$ es raíz de $(3x^2 - 4)2x = (x + 6)2x$.

Como $x = a$ es una raíz cualquiera de la I, resulta que *toda raíz de la I es raíz de la II.*

SEGUNDA PARTE. — *La ecuación II puede tener raíces que no son las de la I.*

Si $x = 0$ es tal que $2x = 0$ la ecuación $(3x^2 - 4)2x = (x + 6)2x$ se satisface para ese valor de x,

pues $(3.0 - 4)0 = (0 + 6)0 = 0$ luego $x = 0$ es raíz de la II aun cuando no lo sea de la I, lo que nos dice que $x = 0$ puede ser raíz de la II sin serlo de la I.

EJEMPLO. — Sea por ejemplo la ecuación

$3x - 4 = 5$ [I] cuya raíz es $x = 3$

y $(3x - 4)(x + 2) = 5(x + 2)$ [II] la ecuación que se obtiene multiplicando ambos miembros por $x + 2$. Las raíces de esta ecuación son $x = 3$ y $x = -2$. Puede observarse que efectivamente el valor $x = -2$ es el que anula a la expresión entera por la que se ha multiplicado, puesto que $x + 2$ para $x = -2$ es igual a $-2 + 2 = 0$ y que para ese mismo valor de x es

$$3x - 4 = 3(-2) - 4 = -10 \neq 5,$$

luego $x = -2$ es raíz de la [II] pero no de la [I].

84. **Ecuaciones fraccionarias de primer grado.** — Habiamos definido las ecuaciones enteras de primer grado (nº 80), veremos ahora que se entiende por ecuación fraccionaria de primer grado.

Definición. — Se dice que una *ecuación fraccionaria es de primer grado* cuando quitados sus denominadores y reducidos sus términos semejantes, se obtiene una ecuación entera de primer grado equivalente a la dada.

85. **Resolución de ecuaciones fraccionarias de primer grado.** — Sea por ejemplo la ecuación

$$\frac{1}{7x} + \frac{3}{x} - \frac{5}{2x} = \frac{9}{28}$$

Siendo M. C. M. $(7x, x, 2x) = x$, multiplicando ambos miembros de la ecuación por x para suprimir los denominadores queda

$$\frac{1}{7x} . x + \frac{3}{x} . x - \frac{5}{2x} . x = \frac{9}{28} . x$$

y simplificando $\quad \frac{1}{7} + 3 - \frac{5}{2} = \frac{9}{28} x$

y como esta ecuación es entera y de primer grado, se resuelve de acuerdo con la regla correspondiente (nº 81), lo que nos da:

$$-\frac{9}{28} x = -\frac{1}{7} - 3 + \frac{5}{2}$$

$$-\frac{9}{28} x = \frac{-2 - 42 + 35}{14} = \frac{-9}{14}$$

$$x = \frac{-\frac{9}{14}}{-\frac{9}{28}} = \frac{9 . 28}{14 . 9} = 2$$

Como al multiplicar por x ambos miembros de la ecuación dada, puede suceder que la ecuación que resulta tenga raíces que no lo sean de la propuesta, vamos a verificar si es $x = 2$ la raíz buscada.

Reemplazando en la ecuación $\frac{1}{7x}+\frac{3}{x}-\frac{5}{2x}=\frac{9}{28}$ a la incógnita x por 2, se tiene:

1.er miembro

$$\frac{1}{7.2}+\frac{3}{2}-\frac{5}{2.2}=\frac{1}{14}+\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{2+42-35}{28}=\frac{9}{28}$$

que es igual al segundo miembro, luego $x=2$ es raíz de la ecuación dada.

Observando que el procedimiento seguido en este ejemplo es general se deduce la siguiente:

REGLA. — *Para resolver una ecuación fraccionaria:*

1º) *Se suprimen los denominadores, para lo cual se multiplican ambos miembros de la misma por el mínimo común múltiplo de los denominadores en que figure la incógnita y se hacen todas las simplificaciones posibles.*

2º) *Si la ecuación entera obtenida es de primer grado se la resuelve (Regla nº 81).*

3º) *Se verifica la raíz obtenida desechándola si no satisface a la ecuación dada.*

APLICACIONES: EJEMPLO I) Resolver la ecuación $\frac{15-x}{x-18}=\frac{7-x}{x-8}$

Siendo M. C. M $(x-18,\ x-8)=(x-18)(x-8)$

1º) Quitando denominadores se tiene:

$$(15-x)(x-8)=(7-x)(x-18)$$

$$15x-120-x^2+8x=7x-126-x^2+18x$$

$$-x^2+x^2+15x+8x-7x-18x=-126+120$$

o sea $$-2x=-6$$

$$x=\frac{-6}{-2}=3$$

3º) Verificación: *Primer miembro* $\frac{15-3}{3-18}=\frac{12}{-15}=\frac{4}{-5}$

Segundo miembro $\frac{7-3}{3-8}=\frac{4}{-5}$

Ejemplo II) Resolver la ecuación $\frac{1}{2x-3}-\frac{3}{2x^2-3x}=\frac{5}{x}$

Siendo M. C. M. $\left\{\begin{array}{c} x=x \\ 2x-3=2x-3 \\ 2x^2-3x=(2x-3)x \end{array}\right\}=(2x-3)x$

1º) Quitando denominadores se tiene

$$\frac{(2x-3)x}{2x-3}-\frac{3(2x-3)x}{(2x-3)x}=\frac{5}{x}(2x-3)x$$

$$x-3=5(2x-3)$$

2º)

$$x-3=10x-15$$

$$-9x=-12$$

$$x=\frac{-12}{-9}=\frac{4}{3}$$

3º) Verificación. — *Primer miembro*

$$\frac{1}{2\cdot\frac{4}{3}-3}-\frac{3}{2\left(\frac{4}{3}\right)^2-3\,\frac{4}{3}}=\frac{1}{\frac{8}{3}-3}-\frac{3}{2\cdot\frac{16}{9}-4}=$$

$$=\frac{1}{\frac{8-9}{3}}-\frac{3}{\frac{32-36}{9}}=\frac{1}{\frac{-1}{3}}-\frac{3}{\frac{-4}{9}}=$$

$$=-3+\frac{27}{4}=\frac{-12+27}{4}=\frac{15}{4}$$

Segundo miembro $\frac{5}{\frac{4}{3}}=\frac{5\cdot 3}{4}=\frac{15}{4}$ que el igual al primer miembro, luego $x=\frac{4}{3}$ es la raíz de la ecuación.

Aplicaciones. — Resolver las ecuaciones siguientes:

1°) $\frac{5x}{7} = 10$ raíz $x = 14$

2°) $\frac{3x-5}{2} = 0$ » $x = \frac{5}{3}$

3°) $\frac{x-1}{3} = 1$ » $x = 4$

4°) $\frac{2x}{5} = \frac{x}{7} + 9$ » $x = 35$

5°) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 14$ raíz $x = 20$

6°) $0{,}3\,x - \frac{5x}{7} = 0{,}8$ » $x = -\frac{56}{29}$

7°) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 9 - \frac{x}{4}$ » $x = 21{,}6$

8°) $\frac{x+4}{2} - \frac{x-3}{5} = 5$ » $x = 8$

9°) $\frac{3x+1}{4} + \frac{5x-1}{6} = 8$ » $x = 5$

10°) $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{3} = \frac{19}{3} - \frac{x+4}{2} + 10\,x$ » $x = -\frac{5}{14}$

11°) $\frac{4y}{5} + 6(3y+1) = \frac{y}{3} + 41 + \frac{14}{15}$ » $y = 2$

12°) $\frac{x}{2} - 2\left(\frac{4x}{5} - 3\right) = 4 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ » $x = 10$

13°) $4 - \frac{5x-15}{4} + \frac{2(x+2)}{3} = \frac{5(x-1)}{6}$ » $x = 7$

14°) $\frac{x}{n} + \frac{x}{a} = a + n$ » $x = an$

15°) $\frac{2cx}{n} - n^2 + 4c^2 = \frac{nx}{2c}$ » $x = -2\,cn$

16°) $\frac{x}{n} + 1 = -\frac{x+2a}{a} + \frac{a}{n}$ » $x = -a$

17°) $\frac{x+3}{x+1} = 2$ » $x = 1$

CAPITULO IX

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

PROGRAMA. — *Planteo, resolución de la ecuación obtenida e interpretación o discusión del resultado. Ejercicios. Problema de las edades. Discusión del resultado.*

88. **Problemas de primer grado con una incógnita.**— Ciertas cuestiones o *problemas* que se presentan en la práctica, pueden ser resueltos por medio de ecuaciones.

Cuando el problema a resolver tiene por objeto la determinación de un solo número, que cumpla ciertas condiciones que permitan ser expresadas por una igualdad, dicho problema puede resolverse mediante una ecuación en la cual la incógnita es el número buscado.

En este capítulo nos ocuparemos solamente de los problemas que conducen a *ecuaciones de primer grado con una incógnita.*

Todo problema consta de tres partes:

I) *El planteo,* que consiste en precisar bien que es lo que se busca, en representar al ente buscado por una letra, y en escribir la ecuación que traduzca las condiciones que dicho ente debe cumplir.

II) *Resolución* de la ecuación obtenida, es decir, calcular su raíz.

III) *Discusión* del resultado, es decir, interpretación concreta del mismo para ver si tiene sentido.

Sea por ejemplo resolver el siguiente:

PROBLEMA. — *Encontrar un número tal que su triplo más su mitad, sea igual al cuádruplo del mismo menos dos.*

PLANTEO. — Llamando x al número buscado, resulta que $3x$ es su triplo, $\frac{x}{2}$ su mitad y $4x$ su cuádruplo, luego por las condiciones del problema tendremos

$$3x + \frac{x}{2} = 4x - 2$$

RESOLUCIÓN:

$$3x + \frac{x}{2} - 4x = -2$$

$$\frac{6x + x - 8x}{2} = -2$$

$$\frac{-x}{2} = -2$$

$$x = \frac{-2}{\frac{-1}{2}} = 4$$

DISCUSIÓN. — Es $x = 4$ el número buscado puesto que

$$\left.\begin{array}{ll}\text{su triplo} & \text{es } = 12 \\ \text{su mitad} & \text{es } = 2\end{array}\right\} \text{el triplo} + \text{la mitad} = 12 + 2 = 14$$

$$\text{su cuádruplo es} = 16 \;\} \quad \text{el cuádruplo} - 2 = 16 - 2 = 14$$

La observación del procedimiento seguido en la resolución del problema anterior nos conduce a dar la siguiente:

REGLA. — *Para resolver un problema de primer grado con una incógnita:*

1º) *Se representa la incógnita por una letra* (generalmente por la x).

2º) *Se someten dicha letra y los demás datos que intervienen en el problema, a las operaciones indicadas por el enunciado, tal co-*

mo se haría la verificación en el caso en que se conociera el valor de la incógnita. Se obtiene así una igualdad que es la ecuación del problema.

3º) *Se resuelve la ecuación así obtenida.*

4º) *Se discute la solución hallada, es decir, se averigua si la solución de la ecuación, satisface también al problema concreto propuesto.*

89. **Aplicaciones.** — Damos a continuación ejemplos de algunos de los problemas que se presentan con más frecuencia en la práctica:

Problema I) *Si a la suma de dinero que tiene Juan, se le agregan 10 $, se obtiene lo mismo que si del triplo de dicha suma se sacan 22 $. ¿Cuántos pesos tiene Juan?*

Planteo. — Llamando x al número de pesos que tiene Juan; como $x + 10$ debe ser lo mismo que $3\,x - 22$, la ecuación del problema es:

$$x + 10 = 3\,x - 22$$

Resolución.

$$x - 3\,x = -22 - 10$$

$$-2\,x = -32$$

$$x = \frac{-32}{-2} = 16$$

Discusión. — Es $x = 16$ \$ el dinero que tiene Juan puesto que

$$16\,\$ + 10\,\$ = 26\,\$ \quad \text{y} \quad 3.16\,\$ - 22\,\$ = 48\,\$ - 22\,\$ = 26\,\$$$

Problema II) *Repartir 100 $ entre tres personas A, B y C, de manera que la segunda reciba 10 $ más que la primera, y la tercera 5 $ más que la segunda. ¿Cuánto corresponde a cada persona?*

Planteo. — Llamando x a la parte correspondiente a A, se tiene que

a A le corresponden x \$

a B » » $(x+10)$ \$

a C » » $[(x+10)+5]\,\$=(x+15)\,\$$

y como la suma de lo que le corresponde a A, B y C es igual a 100 \$ resulta:

$$x+x+10+x+15=100\,\$$$

Resolución.

$$x+x+x=100-10-15$$

$$3\,x=75$$

$$x=\frac{75}{3}=25$$

Discusión. — Es $x\,\$=25\,\$$ lo que le corresponde a A, porque en tal caso a B le corresponden $(x+10)\,\$=25\,\$+10\,\$=35\,\$$, a C $(x+15)\,\$=25\,\$+15\,\$=40\,\$$ y $25\,\$+35\,\$+40\,\$=100\,\$$.

Problema III) *La suma de dos números es igual 6 y el triplo de la diferencia de los mismos es 9. ¿Cuáles son esos números?*

Planteo. — Llamando x al 1.er número buscado
es $6-x$ el 2º » puesto que la suma de ambos es 6.

Por otra parte: $x-(6-x)$ es la diferencia de los mismos; luego por las condiciones del problema resulta:

$$3\left[x-(6-x)\right]=9$$

Resolución.

$$3\,x-3(6-x)=9$$

$$3\,x-18+3\,x=9$$

$$3\,x+3\,x=9+18$$

$$6\,x=27$$

$$x=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

Siendo $x = \frac{9}{2}$ el primer número, el segundo es $6 - x = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$.

Discusión. — Es $\frac{9}{2}$ el primer número y $\frac{3}{2}$ el segundo puesto que

$$\frac{9}{2} + \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

y

$$3\left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\right) = 3 \, . \, \frac{6}{2} = 9$$

Problema IV. — *Una persona ha colocado la mitad de su capital al 5 % de interés, la tercera parte del mismo al 6 % y el resto al 9 % obteniendo anualmente un producto de 3000 $. ¿Qué capital tiene?*

Planteo.—Llamando x al número de pesos que tiene esa persona:

la mitad del capital $\frac{x}{2}$ produce $\$ \ \frac{x}{2} \times 0{,}05$ en 1 año

a tercera parte » » $\frac{x}{3}$ » $\$ \ \frac{x}{3} \times 0{,}06$ » » »

el resto $x - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) = x - \frac{5x}{6} = \frac{x}{6}$ prod. $\frac{x}{6} \times 0{,}09$ » » »

y como la suma de las ganancias es igual a 3000 $, se tiene:

$$\frac{x}{2} \, . \, 0{,}05 + \frac{x}{3} \, . \, 0{,}06 + \frac{x}{6} \, . \, 0{,}09 = 3000$$

Resolución. — Efectuando la operación del primer miembro dá:

$$0{,}025\,x + 0{,}02\,x + 0{,}015\,x = 3000$$

o sea

$$0{,}06\,x = 3000$$

$$x = \frac{3000}{0{,}06} = 50000$$

Discusión. — Es $\$ x = 50\,000$ \$ el capital pues:

$$\text{Interés de la mitad} \ldots\ldots = 25000\ \$ \times 0{,}05 = 1250\ \$$$

$$\text{» » » tercera parte} = \frac{\$\ 50000 \cdot 0{,}06}{3} = 1000\ \$$$

$$\text{» del resto} \ldots\ldots\ldots = \frac{\$\ 50000 \cdot 0{,}09}{6} = 750\ \$$$

$$\text{Total} \quad 3000\ \$$$

90. **Problema de las edades: discusión.** — *Un padre tiene p años de edad y su hijo h años; ¿al cabo de cuantos años la edad del padre será igual a m veces la del hijo?*

Planteo. — Llamando x al número de años que deben transcurrir para que se verifique lo preguntado en el problema, resulta que al cabo de dicho tiempo tendríamos:

$$\textit{Edad del padre} = p + x \textit{ años.} \quad ;$$

$$m \textit{ veces la edad del hijo} = m\ (h + x) \textit{ años}$$

luego $$p + x = m\,(h + x)$$

Resolución: $$p + x = mh + mx$$

$$mx - x = p - mh$$

$$(m - 1)\,x = p - mh$$

$$x = \frac{p - mh}{m - 1}$$

Discusión. — Como m es un entero número positivo y mayor que 1 el denominador

$$m - 1 > 0.$$

Como en el numerador figura una diferencia consideramos los casos en que *el minuendo* $p \gtreqless$ *sustraendo* mh.

1er Caso. — *Cuando* $p > mh$.

Si $p > mh$ es $p - mh > 0$ y como el denominador $m - 1 > 0$ r ta $x > 0$ (es decir positivo) lo que nos dice que la edad de padre será m veces la del hijo x años *después* del instante en que se consideró el problema.

Ejemplo numérico: si $p = 45$ años, $h = 15$ años y $m = 2$ es

$$x = \frac{p - mh}{m - 1} = \frac{45 - 30}{2 - 1} = 15 \text{ años}$$

2o Caso. — *Cuando* $p = mh$.

Si $p = mh$ es $p - mh = 0$ y como $m - 1 \neq 0$

es

$$x = \frac{0}{m - 1} = 0$$

es decir la edad del padre es m veces la del hijo *en el instante* de considerar el problema.

Ejemplo numérico: Si $p = 60$ años, $h = 20$ años y $m = 3$ es

$$x = \frac{p - mh}{m - 1} = \frac{60 - 20.3}{3 - 1} = \frac{0}{2} = 0 \text{ años.}$$

3er Caso. — *Cuando* $p < mh$.

Si $p < mh$ es $p - mh < 0$ y como $m - 1 > 0$

resulta $x < 0$ (es decir negativo) lo que nos dice que la edad del padre ha sido m veces la del hijo x *años antes* del instante en que se consideró el problema.

Ejemplo numérico: Si $p = 32$ años, $h = 12$ años y $m = 3$ es

$$x = \frac{p - mh}{m - 1} = \frac{32 - 3.12}{3 - 1} = \frac{32 - 36}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ años;}$$

Aplicaciones.— Resolver los problemas siguientes:

1°) Dividir el número 224 en dos partes tales que su cociente exacto sea igual a 7. Respuesta: 196 y 28.

2°) Dividir el número 149 en dos partes tales que el cociente entero de la primera por la segunda sea 4 y el resto 4. Respuesta: 120 y 29.

3°) La edad de un niño es, actualmente, igual a los $\frac{3}{5}$ de la que tendrá dentro de 8 años. ¿Qué edad tiene? Respuesta: 12 años.

4°) La altura de un rectángulo es el cuadruplo de su base. Si su altura fuese 8 cm más corta y su base 3 cm más larga su superficie sería 104 cm^2 mayor. ¿Qué longitudes tienen la base y la altura?
Respuesta: altura 128 cm, base 32 cm.

5°) ¿A qué hora entre las 4 y las 5 las manecillas de un reloj estarán juntas?

— Llamando x al número de minutos que deben transcurrir para que se verifique la coincidencia de las manecillas, y teniendo presente que el minutero se mueve 12 veces más rápido que el horario, resulta que durante ese tiempo el minutero ha recorrido x divisiones del reloj y el horario $\frac{x}{12}$ divisiones, y como a las 4 h la ventaja del horario sobre el minutero es de 20 divisiones se tiene:

$$x - \frac{x}{12} = 20$$

que es la ecuación del problema.

6°) ¿En qué instante entre las 7 h y las 8 h la manecilla del minutero estará 10 minutos de espacio delante del horario?

7°) ¿Cuántos litros de agua deben ser agregados a un litro de alcohol de 90 % de pureza para obtener una solución al 3 %?

8°) Un jugador comienza a jugar y pierde $\frac{2}{3}$ de lo que tenía. Luego gana 90 $; y pierde $\frac{4}{9}$ de lo que poseía después de esta ganancia; luego gana 60 $, y por último perdiendo $\frac{4}{7}$ de los que nuevamente tenía se encuentra con 360 $. ¿Cuánto ha ganado o perdido en total?

CAPITULO X

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCOGNITAS

PROGRAMA. — *Una ecuación de primer grado con dos incógnitas admite infinitas raíces. Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Métodos de sustitución, igualación y reducción. Resolución de un sistema de dos ecuaciones literales de primer grado con dos incógnitas: Fórmulas. Determinantes de segundo orden. Expresión de las fórmulas anteriores por medio de determinantes. Resolución de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por determinantes.*

93. **Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.**—DEFINICIÓN — Se dice que una *ecuación con dos incógnitas es de primer grado,* cuando éstas no figuran en un mismo término y su mayor exponente es la unidad.

EJEMPLO. $\frac{2}{3}x - 4y + 2 = y - 4$ es una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

DEFINICIÓN. — Se llama *raíz de una ecuación de primer grado con dos incógnitas,* al *par de valores* que asignados a las incógnitas satisfacen a la ecuación.

Sea, por ejemplo, la ecuación $2x - y = 5$.

Tratemos de encontrar los pares de valores de x e y que la satisfacen. Para eso demos valores arbitrarios a x y calculemos los correspondientes de y.

Para $x = 0$ es $\left\{\begin{array}{r} 2.0 - y = 5 \\ -y = 5 \\ y = -5 \end{array}\right\} y = -5$

El par $x = 0$; $y = -5$ es raíz de la ecuación puesto que

$$2.0 - (-5) = 5$$

Para $x = 1$ es $\left\{\begin{array}{r} 2.1 - y = 5 \\ 2 - y = 5 \\ -y = 5 - 2 = 3 \\ y = -3 \end{array}\right\} y = -3$

El par $x = 1$; $y = -3$ es raíz de la ecuación puesto que

$$2.1 - (-3) = 5$$

Para $x = -3$ es $\left\{\begin{array}{r} 2.(-3) - y = 5 \\ -6 - y = 5 \\ -y = 5 + 6 = 11 \\ y = -11 \end{array}\right\} y = -11$

El par $x = -3$, $y = -11$ es raíz de la ecuación puesto que

$$2(-3) - (-11) = 5.$$

Dando valores arbitrarios a y y calculando en forma análoga los correspondientes de x se obtiene para cada valor de y un valor de x, siendo ese par de valores *raíz de la ecuación.*

Así, por ejemplo,

$$\text{para} \quad y = \frac{1}{2} \quad \text{es} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - \frac{1}{2} = 5 \\ 2x = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \\ x = \frac{11}{4} \end{array} \right\} \; x = \frac{11}{4}$$

El par $x = \frac{11}{4}$; $y = \frac{1}{2}$ es raíz de la ecuación puesto que

$$2 \cdot \frac{11}{4} - \frac{1}{2} = 5$$

Observación. — Dada una ecuación de primer grado con dos incógnitas, como cada una de dichas incógnitas puede tomar infinitos valores, y para cada uno de ellos corresponde un solo valor de la otra, resultando además el par de valores correspondientes raíz de la ecuación dada, se deduce que:

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas admite infinitas raíces.

Nota. — En la práctica se escriben las raíces de una ecuación de primer grado con dos incógnitas en la siguiente forma: En una columna los valores de x atribuídos arbitrariamente, en otra los valores correspondientes de y dados por la ecuación que resulta de sustituir x por el valor asignado, y cuidando que queden en la misma línea los valores de las incógnitas que constituyen cada raíz. La determinación del valor de y se hace mentalmente.

Para el ejemplo anterior tendríamos la siguiente *tabla de raíces*:

x	y
0	-5
1	-3
-3	-11
$\frac{11}{4}$	$\frac{1}{2}$
. . .	. . . . .
. . .	. . . . .

94. Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. — Dadas dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, como cada una de ellas admite infinitas raíces, cabe preguntarse si entre las infinitas raíces de la primera y las infinitas raíces de la segunda existen algunas comunes. Hagamos la investigación en un caso particular, por ejemplo, en el siguiente par de ecuaciones:

$$2x - 6y = -10 \qquad\qquad 4x + 3y = 25$$

x	y
0	$\frac{5}{3}$
1	2
2	$\frac{7}{3}$
3	$\frac{8}{3}$
4	**3**
-1	$\frac{4}{3}$
-2	1
. . . .	. . . .

x	y
0	$\frac{25}{3}$
1	7
2	$\frac{17}{3}$
3	$\frac{13}{3}$
4	**3**
-1	$\frac{29}{3}$
-2	11
. . . .	. . . .

Las tablas de raíces, nos muestran que las ecuaciones dadas tienen la raíz común $x = 4$, $y = 3$.

Las ecuaciones que como las dadas tienen raíces comunes, constituyen lo que se llama un *sistema de ecuaciones* que se define así:

Definición. — Se llama *sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas* a todo par de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que tengan raíces comunes.

Ejemplo. — Las ecuaciones $2x - 6y = -10$; $4x + 3y = 25$, del ejemplo anterior, forman un sistema, pues tienen la raíz común $x = 4$, $y = 3$.

Notación. — Se indica que dos ecuaciones forman un sistema escribiéndolas una debajo de otra y poniendo a la izquierda de las mismas una llave.

Así para indicar que las ecuaciones del ejemplo anterior forman un sistema se escribe:

$$\begin{cases} 2x - 6y = -10 \\ 4x + 3y = 25 \end{cases}$$

Definiciones.— Si un sistema de ecuaciónes con dos incógnitas sólo admite una raíz común, se llama *determinado* y si admite infinitas raíces comunes, se llama *indeterminado.*

Ejemplo I) El sistema $\begin{cases} 2x - 6y = -10 \\ 4x + 3y = 25 \end{cases}$

es *determinado,* pues sólo admite la raíz común $x = 4$, $y = 3$.

Ejemplo II) El sistema $\begin{cases} 2x + \quad y = 8 & [1] \\ 2.5x + 5.y = 8.5 & [2] \end{cases}$

es *indeterminado,* pues cada una de las infinitas raíces de la primera transforma a dicha ecuación en una identidad, la que multiplicada por 5 da otra identidad que será la misma que se obtendría sustituyendo la raíz considerada en la segunda.

Así, por ejemplo, el par $x = 1$, $y = 6$ es raíz de la ecuación [1] puesto que

$$2.1 + 6 = 8$$

y es también raíz de la [2] puesto que

$$2.5.1 + 5.6 = 8.5$$

Análogamente se comprobaría que los pares de valores

$x = 2\ ,\ y = 4;\qquad x = 3\ ,\ y = 2;\qquad x = -\frac{1}{2}\ ,\ y = 9; \ldots$ son

raíces del sistema.

Observación. — Puede por último suceder que dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas no tengan raíces comunes, en cuyo caso no se podría decir que forman un sistema. Sin embargo con el objeto de no hacer exepciones, diremos que tales pares de ecuaciones forman un *sistema imposible.*

Así $\left\{\begin{array}{l} x + y = 8 \\ 4x + 4y = 8.5 \end{array}\right.$ es *un sistema imposible* pues cada

una de las infinitas raíces de la primera transforma a dicha ecuación en una identidad, luego si multiplicamos al primer miembro de esa identidad por un número, 4, y al segundo por otro número, 5, no se obtiene otra identidad; que es lo que sucede si se sustituyen a x y a y por sus valores en la segunda ecuación.

Definición de sistemas equivalentes. — Se dice que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas raíces.

Ejemplo. — Formemos un sistema de ecuaciones cuya raíz sea $x = 5$, $y = 2$ escribiendo los primeros miembros arbitrariamente y los segundos de modo que tomen los valores que tengan aquellos primeros miembros para $x = 5$ e $y = 2$. Así, por ejemplo, tendríamos:

$\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 2y = 29 \end{array}\right.$ que tiene por raíz $x = 5$, $y = 2$.

Formemos del mismo modo un nuevo sistema que tenga la misma raíz $x = 5$, $y = 2$, por ejemplo el

$\left\{\begin{array}{l} 6x - 15y = 0 \\ x - y = 3 \end{array}\right.$ cuya raíz es $x = 5$, $y = 2$.

Luego los sistemas así formados son equivalentes.

Definición. — *Resolver* un sistema significa hallar sus raíces comunes.

Por lo tanto para resolver un sistema se puede formar una tabla de raíces de cada una de las ecuaciones que lo forman, y ver cuáles son las raíces comunes, como se hizo en el párrafo número 94. En la práctica no se emplea este procedimiento, pues podría resultar excesivamente largo e inseguro y se prefiere reemplazar el sistema dado por otros equivalentes hasta llegar a uno que tenga una de las ecuaciones con una sola incógnita.

Hay distintos mètodos de resolución de sistemas, que trataremos a continuación:

95. **Método de sustitución.** — Tratemos de resolver el sistema ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - 6y = -10 & [1] \\ 4x + 3y = 25 & [2] \end{cases}$$

Suponiendo conocido el valor de x en la ecuación [1] y resolviéndola con respecto a y se tiene:

$$-6y = -10 - 2x$$

Luego $$y = \frac{-10 - 2x}{-6} \qquad [3]$$

Sustituyendo en [2] este valor de y, resulta

$$4x + 3\,\frac{-10 - 2x}{-6} = 25$$ que es una ecuación de primer grado con una sola incógnita. Resolviéndola se tiene:

$$-24x + 3(-10 - 2x) = 25 . (-6)$$

$$-24x - 30 - 6x = -150$$

$$-24x - 6x = -150 + 30$$

$$-30x = -120$$

$$x = \frac{-120}{-30} \quad \text{luego} \quad \boxed{x = 4}$$

Procediendo de la misma manera, podría calcularse el valor de la otra incógnita, pero en la práctica se procede así.

Se sustituye el valor hallado de la incógnita x en una de las ecuaciones, la [2] por ejemplo y se tiene

$$4.4 + 3\,y = 25 \qquad \text{ecuac. de } 1^{\text{er}} \text{ grado en } y$$

resolviéndola $$3\,y = 25 - 16$$

luego $$y = \frac{25 - 16}{3} = \frac{9}{3} \quad \text{o sea} \quad \boxed{y = 3}$$

Veamos si el par $x = 4,\ \ y = 3$ es raíz del sistema.

Sustituyendo en las ecuaciones [1] y [2] estos valores se tiene:

1ª ecuación: $2.4 - 6.3 = -10$ la ecuación [1] se satisface

2ª » $4.4 + 3.3 = \ \ 25$ » » [2] » »

luego el par $x = 4,\ \ y = 3$ es raíz del sistema dado.

El procedimiento seguido, que es general, nos permite dar la siguiente:

Regla. — *Para hallar la raíz de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, por el* Método de Sustitución.

1º) *Se halla el valor de una de las incógnitas en una cualquiera de las ecuaciones de dicho sistema, suponiendo conocido el de la otra incógnita.*

2º) *Se sustituye el valor hallado en la otra ecuación del sistema, obteniéndose así una ecuación de primer grado con una sola incógnita.*

3º) *Se resuelve la ecuación así obtenida, con lo que queda determinado el valor de la incógnita que se supuso conocer.*

4º) *Se sustituye el valor hallado en una de las ecuaciones del sistema, obteniéndose así una ecuación de primer grado con una incógnita. Resolviéndola queda determinado el valor de la otra incógnita del sistema.*

5º) *Se verifica si el par de valores hallados es raíz del sistema dado.*

APLICACIONES. — EJEMPLO I) Resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 1 & [1] \\ 2y - x = 8 & [2] \end{cases}$$

1º) Suponiendo conocido el valor de x en la ecuación [1] y resolviéndola con respecto a y se tiene:

$$-y = 1 - 3x$$

luego $$y = -1 + 3x = 3x - 1$$

2º) Sustituyendo en [2] este valor de y, resulta:

$$2(3x - 1) - x = 8$$

o sea $$6x - 2 - x = 8$$ que es una ecuación de primer grado con una sola incógnita.

3º) Resolviéndola resulta:

$$6x - x = 8 + 2$$

$$5x = 10$$

$$x = \frac{10}{5} = 2$$

4º) Sustituyendo este valor de x en la ecuación [1] da:

$$3.2 - y = 1$$

luego $$y = 3.2 - 1 = 5$$

5º) Verificación del par $x = 2$, $y = 5$ en $\begin{cases} 3x - y = 1 & [1] \\ 2y - x = 8 & [2] \end{cases}$

1ª ecuación	$3.2 - 5 = 1$	la ecuación [1] se satisface
2ª ecuación	$2.5 - 2 = 8$	» » [2] » »

EJEMPLO II)

Resolver el sistema
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{4}{3} \\ x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

1º) Despejando x en la segunda ecuación (*) se tiene:

$$x = 0 + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y \qquad [1]$$

2º) Sustituyendo este valor de x en la primera ecuación, da

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y = \frac{4}{3}$$

o sea $\frac{1}{6}y + \frac{1}{2}y = \frac{4}{3}$ ecuac de 1er gr. con una incógn.

3º) Resolviéndola da $\frac{4}{6}y = \frac{4}{3}$

luego
$$y = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{6}} = \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 4} = 2$$

4º) Sustituyendo este valor de y en la ecuación [1] da:

$$x = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

5º) Verificación del par $x = 1$, $y = 2$ en el sistema

1ª ecuación $\frac{1}{3} + \frac{2}{2} = \frac{4}{3}$ la ecuación [1] se satisface

2ª ecuación $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ la ecuación [2] se satisface

(*) La práctica enseña en cada caso cual es la incógnita que más conviene despear. En nuestro caso despejamos x en la segunda ecuación porque en ella tiene el coeficiente igual a 1.

96. Método de igualación. — Tratemos de resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 6y = -10 & [1] \\ 4x + 3y = 25 & [2] \end{cases}$$

Suponiendo conocido el valor de x en ambas ecuaciones y despejando el valor de y se tiene:

De [1] $\quad -6y = -10 - 2x \quad$ luego $\quad y = \dfrac{-10 - 2x}{-6}$

De [2] $\quad 3y = 25 - 4x \quad$ luego $\quad y = \dfrac{25 - 4x}{3}$

igualando los segundos miembros resulta:

$$\frac{-10 - 2x}{-6} = \frac{25 - 4x}{3}$$ que es una ecuación de primer grado en x. Resolviéndola se tiene:

$$3(-10 - 2x) = -6(25 - 4x)$$

$$-30 - 6x = -150 + 24x$$

$$-6x - 24x = -150 + 30$$

$$-30x = -120$$

luego $$x = \frac{-120}{-30} = 4$$

Procediendo de la misma manera podría calcularse el valor de la otra incógnita, pero en la práctica se procede así:

Se sustituye este valor de x en una de las ecuaciones, la [2] por ejemplo, se tiene:

$$4.4 + 3y = 25$$ ecuac. de 1er grado en y

resolviéndola $$3y = 25 - 16$$

luego $$y = \frac{25 - 16}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Sustituyendo en las ecuaciones [1] y [2] los valores de x e y hallados, se tiene:

1ª ecuación	$2 . 4 - 6 . 3 = - 10$	la ecuación [1] se satisface
2ª »	$4 . 4 + 3 . 3 = \quad 25$	» » [2] » »

lo que nos dice que el par $x = 4$, $y = 3$ es raíz del sistema dado.

El procedimiento seguido, que es general, nos permite enunciar la siguiente:

Regla. — *Para hallar la raíz de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, por el* Método de igualación:

1º) *Se halla el valor de una de las incógnitas en cada una de las ecuaciones del sistema, suponiendo conocido el valor de la otra incógnita.*

2º) *Se igualan los segundos miembros de las expresiones obtenidas, con lo que resulta una ecuación de primer grado con una incógnita.*

3º) *Se resuelve la ecuación así obtenida, con lo que queda determinado el valor de la incógnita que se supuso conocida.*

4º) *Se sustituye el valor hallado en una de las ecuaciones del sistema, obteniéndose así una ecuación de primer grado con una incógnita. Resolviéndola queda determinado el valor de la otra incógnita del sistema.*

5º) *Se verifica si el par de valores hallados para las incógnitas es raíz del sistema.*

Aplicaciones. — Ejemplo I) Resolver el sistema

$$\begin{cases} x - 3\,y = 1 & [1] \\ 0{,}75\,x - y = 2 & [2] \end{cases}$$

1º) Suponiendo conocido el valor de x en ambas ecuaciones y despejando el valor de y se tiene:

De [1] $\qquad -3\,y = 1 - x$

$$y = \frac{1 - x}{-3} \qquad [3]$$

De [2] $\qquad -y = 2 - 0{,}75\,x$

$$y = 0{,}75\,x - 2 \qquad [4]$$

2º) Igualando los segundos miembros de [3] y [4], resulta:

$$\frac{1-x}{-3} = 0{,}75\,x - 2 \qquad \text{ecuac. } 1^{\text{er}} \text{ grado en } x,$$

3º) $$1 - x = -3(0{,}75\,x - 2)$$

$$1 - x = -2{,}25\,x + 6$$

$$2{,}25\,x - x = 6 - 1$$

$$1{,}25\,x = 5 \quad \text{luego} \quad x = \frac{5}{1{,}25} = 4$$

4º) Sustituyendo este valor de x en la ecuación [2] da

$$0{,}75 . 4 - y = 2$$

luego $$y = 0{,}75 . 4 - 2 = 3 - 2 = 1$$

5º) Sustituyendo en las ecuaciones [1] y [2] los valores de x e y hallados, se tiene:

1ª ecuación $\quad 4 - 3 . 1 = 1 \quad$ la ecuación [1] se satisface

2ª » $\quad 0{,}75 . 4 - \ \ 1 = 2 \quad$ » » [2] » »

lo que nos dice que el par $x = 4$, $y = 1$ es raíz del sistema dado.

97. **Método de reducción.** — Sea, por ejemplo, resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2\,x - 6\,y = -10 & [1] \\ 4\,x + 3\,y = \ \ 25 & [2]. \end{cases}$$

Tratemos de igualar el valor absoluto de los coeficientes de los términos que contienen a la incógnita x. Para ello se multiplica

la [1] por 4 y se tiene $\quad 8\,x - 24\,y = -40$

» [2] » 2 » » » $\quad 8\,x + \ 6\,y = \ \ 50$

Restando m. a m. da $\quad -30\,y = -90 \quad$ que es una

ecuación de primer grado con una sola incógnita. Resolviéndola resulta

$$y = \frac{-90}{-30}$$

luego $$y = 3$$

Sustituyendo este valor de y en una de las ecuaciones, la [2] por ejemplo, se tiene:

$$4x + 3.3 = 25 \quad \text{ecuac. de } 1^{\text{er}} \text{ grado en } x$$

resolviéndola

$$4x = 25 - 9$$

$$x = \frac{16}{4} = 4$$

Sustituyendo en las ecuaciones [1] y [2] los valores de x e y hallados, se tiene:

1ª ecuación	$2.4 - 6.3 = -10$	la ecuación [1] se satisface
2ª ecuación	$4.4 + 3.3 = 25$	» » [2] » »

lo que nos dice que el par $x = 4$, $y = 3$ es raíz del sistema dado.

El procedimiento seguido, que es general, nos permite enunciar la siguiente:

Regla. — *Para hallar la raíz de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por el* Método de reducción:

1º) *Se iguala el valor absoluto de los términos que contienen a una misma incógnita en las dos ecuaciones; para lo cual se multiplican ambas por factores convenientes.*

2º) *Se suman o restan miembro a miembro las ecuaciones así obtenidas, según que los coeficientes tengan distinto o igual signo, respectivamente, obteniéndose así una ecuación de primer grado con una sola incógnita.*

3º) *Se resuelve esta ecuación, con lo cual queda determinado el valor de una de las incógnitas.*

4º) *Se sustituye el valor hallado en una de las ecuaciones del sistema, obteniéndose así una ecuación de primer grado con una incógnita. Resolviéndola queda determinado el valor de la otra incógnita del sistema.*

5º) *Se verifica si el par de valores hallado para las incógnitas es raíz del sistema.*

Aplicaciones. — Ejemplo I). Resolver el sistema

$$\begin{cases} 6x + 5y = 16 & [1] \\ 5x - 12y = -19 & [2] \end{cases}$$

1º) Mult. a la ecuac. [1] por 12 da		$72\,x + 60\,y = \quad 192$
» » » » [2] » 5 »		$25\,x - 60\,y = - \; 95$
2º) Sumando m. a m. se tiene		$97\,x \qquad = \quad 97$
3º) luego		$x = \dfrac{97}{97} = 1$

4º) Sustituyendo este valor de x en la ecuación [1]

$$6.1 + 5\,y = 16$$

$$5\,y = 16 - 6$$

$$y = 2$$

5º) Sustituyendo los valores de x e y hallados en las ecuaciones [1] y [2] resulta:

1ª ecuación	$6.1 + \;5.2 = \quad 16$	la ecuación [1] se satisface.
2ª »	$5.1 - 12.2 = -19$	» » [2] » »

lo que nos dice que el par $x = 1,\ y = 2$ es raíz del sistema dado.

* * *

Observación I) *Cuando en un sistema son iguales los coeficientes de una de las incógnitas, se halla el valor de la otra incógnita sumando o restando, directamente, las ecuaciones dadas y resolviendo la que resulta de tal operación.*

Ejemplo Resolver el sistema $\begin{cases} x + y = 20 & [1] \\ 2\,x - y = 22 & [2] \end{cases}$

1º) Observando que los coeficientes de y son iguales en valor absoluto y de distintos signos, sumando las ecuaciones.

$$x + y = 20$$

$$2\,x - y = 22$$

se tiene $\quad 3\,x \quad = 42 \quad$ ecuac. de 1.er grado en x

2º) Resolviéndola da $\qquad x = \frac{42}{3} = 14 \qquad [3]$

y se procede luego como en el caso general.

Observación II) *Cuando en un sistema el coeficiente de una de las incógnitas de una de las ecuaciones es múltiplo del coeficiente que tiene dicha incógnita en la otra, se igualan los coeficientes respecto de dicha incógnita multiplicando la segunda ecuación por el cociente de dividir el coeficiente múltiplo por el otro.*

Ejemplo. — Resolver el sistema $\begin{cases} 6x + 24y = 0 & [1] \\ -3x + 8y = 10 & [2] \end{cases}$

1º) Observando los coeficientes de x se tiene que, como 6 es múltiplo de 3 bastará, para igualar sus coeficientes, multiplicar a la 2ª ecuación por el cociente de dividir, el coeficiente múltiplo por el otro, es decir por $6:3 = 2$.

luego como la [1] es $\qquad 6x + 24y = 0$

multi. [2] por 2 se tiene $\quad -6x + 16y = 20$

Sumando m. a m. $\qquad 40y = 20$ ecuac. 1er grado en y

2º) Resolviéndola $\qquad y = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

y se procede luego como en el caso general.

Observación III) *Cuando en un sistema, los coeficientes de una de sus incógnitas no son primos entre sí, se igualan los coeficientes respecto de dicha incógnita, multiplicando cada ecuación por el cociente de dividir el mínimo común múltiplo de dichos coeficientes por el coeficiente respectivo.*

Ejemplo. — Resolver el sistema $\begin{cases} -7x + 8y = \frac{5}{3} & [1] \\ 11x - 6y = \frac{2}{3} & [2] \end{cases}$

Observando que los coeficientes de y no son primos entre sí, pues tienen el factor común 2, y que el M. C. M. (8 y 6) = 24, multiplicando cada ecuación por el cociente de dividir el M. C. M. por el coeficiente de y que tiene en las mismas, resulta:

1º) Multiplicando la [1] por $24:8=3$ da

$$-7.3x+8.3y=\frac{5}{3}.3 \quad \text{o sea} \qquad -21x+24y=5$$

Multiplicando la [2] por $24:6=4$ da

$$11.4x-6.4y=\frac{2}{3}.4 \quad \text{o sea} \qquad 44x-24y=\frac{8}{3}$$

2º) Sumando m. a m. da $\qquad 23x = \frac{23}{3}$ ecuación de 1er grado en x

3º) Resolviéndola $\qquad x=\frac{\frac{23}{3}}{23}=\frac{23}{23\times 3}$

luego $\qquad x=\frac{1}{3}$

y se procede luego como en el caso general.

99. **Resolución de un sistema de dos ecuaciones literales de primer grado con dos incógnitas.**— Si en una ecuación de primer grado con dos incógnitas, se efectúan las operaciones indicadas, se trasponen los términos que contienen las incógnitas a un miembro, los términos independientes al otro y se reducen los términos semejantes, la ecuación dada queda reducida a una expresión de la forma:

$$ax+by=c.$$

Luego la expresión general de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es la siguiente:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & [1] \\ a_2x+b_2y=c_2 & [2] \end{cases}$$

Resolviendo este sistema por el método de reducción tendríamos:

Multiplicando la [1] por b_2
(a la derecha) da $$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2$$
Multiplicando la [2] por b_1
(a la derecha) da $$a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1$$

Restando m. a m. y simp. da $$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

luego $$\boxed{x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}} \quad [3]$$

Multiplicando la [1] por a_2
(a la izquierda) da $$a_2 a_1 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1$$
Multiplicando la [2] por a_1
(a la izquierda) da $$a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2$$

Restando m. a m. y simp. da $$(a_2 b_1 - a_1 b_2) y = a_2 c_1 - a_1 c_2$$

luego $$y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \quad [4]$$

Observando que el denominador de la expresión [4], que da el valor de y, sólo difiere del denominador de la [3] en los signos de sus términos, se pueden igualar dichos denominadores multiplicando ambos términos de [4] por (-1), con lo que se tiene:

$$y = \frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2)(-1)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)(-1)} = \frac{-a_2 c_1 + a_1 c_2}{-a_2 b_1 + a_1 b_2} = \boxed{\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = y} \quad [5]$$

Sustitugendo en las ecuaciones [1] y [2] valores de x e y dados por [3] y [5] resulta:

1ª ecuación $$a_1 \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + b_1 \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_1$$

sumando $$\frac{a_1 (c_1 b_2 - c_2 b_1) + b_1 (a_1 c_2 - a_2 c_1)}{a_1 b_2 - a_2 c_1} = c_1$$

operando $$\frac{a_1 b_2 c_1 - a_1 b_1 c_2 + a_1 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_1$$

reduciendo $$\frac{a_1 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_1$$

Sacando factor común $\dfrac{c_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_1.$

Simplificando por $a_1 b_1 - a_2 b_1$, resulta

$c_1 = c_1$ identidad de números

luego la ecuación [1] se satisface.

2ª *ecuación* $a_2 \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + b_2 \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_2$

sumando $\dfrac{a_2 (c_1 b_2 - c_2 b_1) + b_2 (a_1 c_2 - a_2 c_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_2$

operando $\dfrac{a_2 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_2 - a_2 b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_2$

reduciendo $\dfrac{a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_2$

Sacando factor común $\dfrac{c_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_2$

Simplificando por $a_1 b_2 - a_2 b_1$, resulta:

$c_2 = c_2$ identidad de números

luego la ecuación [2] se satisface.

Por lo tanto el par

$\boxed{x = \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}}$ e $\boxed{y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}}$ es raíz

del sistema $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$

100. Fórmulas de resolución de los sistemas de ecuaciones de primér grado con dos incógnitas.—Siendo las ecuaciones del sistema resuelto del tipo más general posible, las fórmulas que nos dan los valores de x e y nos permitirán hallar la raíz de cualquier sistema de ese tipo, con solo reemplazar los coeficientes literales y los términos independientes que en ellas figuran, por los valores numéricos particulares que toman en el ejemplo que se quiere resolver.

PROBLEMA. — *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} 10x + 4y = 3 \\ -5x + 20y = 4 \end{cases} \quad \textit{aplicando las fórmulas}$$

Siendo $\quad a_1 = 10 \;, \quad b_1 = 4 \;, \quad c_1 = 3$

y $\quad a_2 = -5 \;, \quad b_2 = 20 \;, \quad c_2 = 4$

resulta

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{3 . 20 - 4 . 4}{10 . 20 - (-5) . 4} = \frac{60 - 16}{200 + 20} = \frac{44}{220} = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{10 . 4 - (-5) . 3}{10 . 20 \quad (-5) . 4} = \frac{40 + 15}{200 + 20} = \frac{+55}{+220} = \frac{1}{4}$$

VERIFICACIÓN:

1ª ecuación: $\quad 10 . \frac{1}{5} + 4 . \frac{1}{4} = 3 \quad$ la ecuación se verifica

2ª ecuación: $\quad -5 . \frac{1}{5} + 20 . \frac{1}{4} = 4 \quad$ la ecuación se verifica

Luego el par $\quad x = \frac{1}{5} \;, \quad y = \frac{1}{4} \quad$ es la raíz del sistema.

101. Determinantes de segundo orden. — Las fórmulas obtenidas en el párrafo anterior, que permitían resolver cualquier sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se recuerdan fácilmente representando las diferencias de dos productos, compuestos cada uno de dos factores, por medio de un símbolo especial. Así:

$5 \times 2 - 4 \times 8$ se representa por el símbolo $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ que se llama *determinante de segundo orden.*

Los números 5 y 4 forman la primera columna y los números 8 y 2 la segunda.

En general para representar simbólicamente la diferencia de dos productos, compuestos cada uno de dos factores haremos el siguiente:

Convenio. — El símbolo $\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}$ llamado *determinante de segundo orden,* representa a la diferencia entre el producto del primer número de la primera columna por el segundo de la otra y el producto del segundo número de la primera columna por el primero de la segunda.

Es decir $\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} = mq - np$

Nota. — Los productos antes mencionados se llaman *productos cruzados* de los elementos del determinante.

102. **Expresión de las fórmulas de resolución de sistemas por medio de determinantes.** — De acuerdo con el convenio anterior resulta

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad ; \quad a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

y por lo tanto, los valores de las incógnitas x e y dados por las fórmulas

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad ; \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$ se representan

por $\boxed{x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}}$; $\boxed{y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}}$. respectivamente

las que expresadas en palabras nos permiten dar la siguiente:

Regla. — *Para hallar el valor de cada una de las incógnitas de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se forma una fracción que tenga por denominador al determinante formado por los coeficientes de las mismas, de modo que queden en columna los coeficientes de cada incógnita, y por numerador el determinante que resulta de reemplazar en el anterior, la columna de los coeficientes de la incógnita que se quiere hallar, por la de los términos independientes. Se verifica si el par de valores hallados es raíz de la ecuación.*

Aplicaciones.—Ejemplo I) Resolver el sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 25 \\ 2x - 6y = -10 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 3 \\ -10 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{25.(-6) - (-10).3}{4.(-6) - 2.3}$$

$$= \frac{-150 + 30}{-24 - 6} = \frac{-120}{-30} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 25 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{4.(-10) - 2.25}{4.(-6) - 2.3}$$

$$= \frac{-40 - 50}{-24 - 6} = \frac{-90}{-30} = 3$$

VERIFICACIÓN.

1ª ecuación: $4.4 + 3.3 = 25$ la ecuac. [1] se satisface.

2ª » $2.4 - 6.3 = -10$ » » [2] » »

Luego el par $x = 4$, $y = 3$ es raíz del sistema.

EJEMPLO II) Resolver el sistema $\begin{cases} x - 3y = 1 & [1] \\ \frac{3}{4}x - y = 2 & [2] \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \frac{3}{4} & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1.(-1) - 2(-3)}{1.(-1) - \frac{3}{4}(-3)} = \frac{-1 + 6}{-1 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{\frac{5}{4}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{4} & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \frac{3}{4} & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1.2 - \frac{3}{4}.1}{1.(-1) - \frac{3}{4}(-3)} = \frac{2 - \frac{3}{4}}{-1 + \frac{9}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = 1$$

VERIFICACIÓN.

1ª ecuación: $4 - 3.1 = 1$ la ecuac. [1] se satisface

2ª » $\frac{3}{4}.4 - 1 = 2$ » » [2] » »

Luego el par $x = 4$, $y = 1$ es raíz del sistema.

EJEMPLO III) Resolver el sistema $\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}y = 1 & [1] \\ \frac{5}{6}x - \frac{3}{4}y = 2 & [2] \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{6} \\ 2 & -\frac{3}{4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & -\frac{3}{4} \end{vmatrix}} = \frac{1.\left(-\frac{3}{4}\right) - 2\left(-\frac{5}{6}\right)}{\frac{3}{4}.\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{5}{6}\left(-\frac{5}{6}\right)} = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{5}{3}}{-\frac{9}{16} + \frac{25}{36}}$$

$$= \frac{\frac{-9+20}{12}}{\frac{-81+100}{144}} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{19}{144}} = \frac{132}{19}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{5}{6} & 2 \end{vmatrix}}{\frac{19}{144}} = \frac{\frac{3}{4}.2 - \frac{5}{6}.1}{\frac{19}{144}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{5}{6}}{\frac{19}{144}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{19}{144}} = \frac{96}{19}$$

1ª ecuación: $\frac{3}{4} \cdot \frac{132}{19} - \frac{5}{6} \cdot \frac{96}{19} = 1$ la ecuac. [1] se satisface

2ª ecuación: $\frac{5}{6} \cdot \frac{132}{19} - \frac{3}{4} \cdot \frac{96}{19} = 2$ la ecuac. [2] se satisface

Luego el par $x = \frac{132}{19}$, $y = \frac{96}{19}$ es raíz del sistema dado.

Aplicaciones. — Resolver los siguientes sistemas por el método de adición y sustracción:

1°) $\begin{cases} x + y - 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

2°) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 5 \end{cases}$

3°) $\begin{cases} 2y + x = -3 \\ x + y = -1 \end{cases}$

4°) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{4}{5} \end{cases}$

Por cualquier método:

5°) $\begin{cases} \dfrac{2x}{5} + \dfrac{3y}{5} = \dfrac{34}{5} \\[2ex] \dfrac{x}{y} + \dfrac{3y}{7} = \dfrac{50}{21} \end{cases}$

6°) $\begin{cases} 2x + \dfrac{3y}{2} = \dfrac{39}{2} \\[2ex] x - \dfrac{y}{2} = \dfrac{27}{2} \end{cases}$

7°) $\begin{cases} \dfrac{3x}{7} - 2y = -\dfrac{47}{7} \\[2ex] \dfrac{5y}{4} + \dfrac{3x}{2} = \dfrac{19}{2} \end{cases}$

8°) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{7} + \dfrac{x-y}{5} = \dfrac{18}{35} \\[2ex] \dfrac{x+y}{3} - \dfrac{x-y}{4} = \dfrac{23}{12} \end{cases}$

9°) $\begin{cases} \dfrac{m+2n}{5} - \dfrac{2n}{3} = \dfrac{11}{15} \\[2ex] \dfrac{4m-n}{2} + m = 4 \end{cases}$

10°) $\begin{cases} 0{,}8\,x + 0{,}2\,y = 0{,}7 \\ 0{,}4\,x - 2\,y = 10{,}15 \end{cases}$

11°) $\begin{cases} \dfrac{0{,}2}{x} - \dfrac{0{,}5}{y} = 2 \\[2ex] \dfrac{0{,}3}{x} + \dfrac{0{,}1}{y} = 4{,}7 \end{cases}$

12°) $\begin{cases} ax + y = a \\[2ex] \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{a} = 0 \end{cases}$

13°) $\begin{cases} \dfrac{a}{y} + \dfrac{b}{x} = d \\[2ex] \dfrac{a}{y} - \dfrac{b}{x} = c \end{cases}$

14°) $\begin{cases} 3x - \dfrac{4}{5}(y-3) = 4\dfrac{2}{5} \\[2ex] 2y + \dfrac{2}{3}(x-4) = 8\dfrac{2}{3} \end{cases}$

15°) $\begin{cases} \dfrac{3(2x-5y)}{5x-2y} = -24 \\[2ex] \dfrac{4(5x+2y)}{3\left(\dfrac{1}{3} + 5y\right)} = 1 \end{cases}$

16°) $\begin{cases} cm + dn = d + c \\ dn - cm = d - c \end{cases}$

CAPITULO XI

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

PROGRAMA. — *Problemas de interés, descuento, repartición proporcional, regla de compañía y mezclas, resueltos por ecuaciones. Descuento matemático. Problema de los móviles. Discusión.*

103. **Problema de primer grado con dos o más incógnitas.**—Trataremos, ahora, de la resolución de problemas que tienen por objeto la determinación de dos o más números, que cumplan ciertas condiciones que permitan ser expresadas por igualdades. Estos problemas se resuelven mediante un sistema de ecuaciones, en el cual las incógnitas son los números buscados.

En este capítulo nos ocuparemos solamente de los problemas que conducen a un *sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.*

Sea, por ejemplo, resolver el siguiente:

PROBLEMA. — *Dividir 8600 $ entre dos personas, de manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como 2 es a 3.*

PLANTEO. — Llamando x al número de pesos que le corresponden a la primera persona, y al que le corresponde a la segunda, resulta, por las condiciones del problema,

$$\text{el sistema} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ x + y = 8600 \end{array} \right. \text{ que es primer grado en } x \text{ e } y.$$

Quitando denominadores y trasponiendo términos, se tiene:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 8600 \end{cases}$$

Resolución. — Resolviéndolo por determinantes, resulta:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8600 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 8600 \times 2}{3 + 2} = \frac{17200}{5} = 3440$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 8600 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3 \,.\, 8600 - 0}{3 + 2} = \frac{25800}{5} = 5160$$

Discusión. — Es $x\,\$ = 3440\,\$$ lo que le corresponde al primero

y $y\,\$ = 5160\,\$$ » » » » » segundo

puesto que

$$\frac{3440\,\$}{5160\,\$} = \frac{2}{3} \;;\; \text{y} \quad 3440\,\$ + 5160\,\$ = 8600\,\$.$$

Problema II. — *Herón de Siracusa hizo hacer una corona de oro que pesaba 7465 g. Para conocer si el orfebre había reemplazado el oro por plata, Arquímedes sumergió la corona en el agua, donde ella perdió 467 g. de su peso. Se sabe que el oro pierde en el agua 0,052 de su peso, y la plata 0,095. ¿Cuánto de oro y cuánto de plata tenía la corona?*

Planteo. — **Llamando x la cantidad de oro que tenía la corona e y la de plata, se tiene por las condiciones del problema, el sistema:**

$$\begin{cases} x + y = 7465 \\ 0{,}052\,x + 0{,}095\,y = 467 \end{cases}$$ **que es de 1er grado en x e y.**

Resolución. — Resolviéndolo por determinantes da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7465 & 1 \\ 467 & 0{,}095 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}052 & 0{,}095 \end{vmatrix}} = \frac{709{,}175 - 467}{0{,}095 - 0{,}052} = \frac{242{,}175}{0{,}043} = 5631{,}97$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7465 \\ 0{,}052 & 467 \end{vmatrix}}{0{,}043} = \frac{467 - 388{,}180}{0{,}043} = \frac{78{,}820}{0{,}043} = 1833{,}03$$

Discusión. — La corona tenía 5631,97 gr. de oro y 1833,03 gr. de plata, puesto que:

$$5631{,}97 \text{ gr.} + 1833{,}03 \text{ gr.} = 7465 \text{ gr.}$$

y $$5631{,}97 \times 0{,}052 \text{ gr.} + 1833{,}03 \times 0{,}095 \text{ gr.} = 467 \text{ gr.}$$

104. Problemas de Aritmética Comercial resueltos por ecuaciones.—Algunos problemas sobre *Cuestiones de Aritmética Comercial*, resueltos anteriormente en el Capítulo VII, pueden, como veremos en seguida, tratarse mediante sistemas de ecuaciones.

Sea, por ejemplo, resolver el siguiente:

105. Problema de interés.— *Un capital ha sido colocado al 6 % anual durante 3 años y 5 meses. Sabiendo que la suma del capital y de los intereses asciende, al cabo de ese tiempo, a $ 4506,70, averiguar cuál es el capital y cuál es el interés.*

Datos	Incógnitas
$t' = 3$ años 5 mes. $= 41$ mes.	capital $c = x$
$r\,\% = 6\,\%$	
$c + i = 4506{,}70$ $ [1]	interés $i = y$.

Planteo. — De la condición $i + c = 4506{,}70$ del problema, y de la fórmula $i = \dfrac{c \,.\, t' \,.\, r}{1200}$ que da el interés cuando el tiempo está expresado en meses, se obtiene, sustituyendo a t' y r por los datos correspondientes, a c por x y a i por y, el sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x \,.\, 41 \,.\, 6}{1200} \\ x + y = 4506{,}70 \end{cases}$$

Resolución. — Transformándolo en otro del tipo general, resulta:

$$\begin{cases} 246\,x - 1200\,y = 0 \\ x + \,y = 4506{,}70 \end{cases}$$ que es de 1er grado en x e y.

Resolviéndolo por determinantes, se tiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1200 \\ 4506{,}70 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 246 & -1200 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 5408040}{246 + 1200} = \frac{5\,408|040}{1446} = 3740$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 246 & 0 \\ 1 & 4506{,}70 \end{vmatrix}}{1446} = \frac{1\,108\,648{,}2}{1446} = 766{,}70$$

Discusión. — Es $c\,\$ = 3740\,\$$ el capital e $i\,\$ = 766{,}70\,\$$ el interés buscado, puesto que

$$(c + i)\$ = 3740\,\$ + 766{,}70\,\$ = 4506{,}70\,\$$$

y además $$i = 766{,}70 = \frac{3740 \,.\, 41 \,.\, 6}{1200}$$

106. **Problema de descuento.**—*Un pagaré fué descontado al 5 %, 45 días antes de su vencimiento. Sabiendo que se recibieron por dicho documento $ 4720,32, averiguar cuál era su valor nominal y cuál fué el descuento sufrido.*

Datos	Incógnitas
$r\,\% = 5\,\%\,\$$	valor nominal $n = x$
$t'' = 45$ días	
$n - d = 4720{,}32\,\$$	descuento $d = y$.

Planteo. — De la condición, $n - d = 4720{,}32$, del problema y de la fórmula $d = \frac{n \, . \, t'' \, . \, r}{36\,000}$ que da el descuento cuando el tiempo está expresado en días, se obtiene, sustituyendo a r y t'' por los datos correspondientes, a n por x y a d por y, el sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x \, . \, 45 \, . \, 5}{36000} \\ x - y = 4720{,}32 \end{cases}$$

Resolución. — Transformándolo en otro del tipo general, se tiene:

$$\begin{cases} 225\,x - 36000\,y = 0 \\ \quad\;\; x - \qquad\;\; y = 4720{,}32 \end{cases}$$

Resolviéndolo por determinantes, resulta:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -36\,000 \\ 4720{,}32 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 225 & -36\,000 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 169\,931\,520}{-225 + 36\,000} = \frac{169\,931\,520}{35\,775} = 4750$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 225 & 0 \\ 1 & 4720{,}32 \end{vmatrix}}{35\,775} = \frac{1\,062\,072 - 0}{35\,775} = \frac{1\,062\,072}{35\,775} = 29{,}68$$

Discusión. — Es $n\,\$ = 4750\,\$$ el valor nominal del documento, y $d\,\$ = 29{,}68$ el descuento, puesto que

$$(n - d)\,\$ = (4750 - 29{,}68)\,\$ = 4720{,}32\,\$$$

y además $d = 29{,}68 = \frac{4750 \, . \, 45 \, . \, 5}{36\,000}$

107. Descuento matemático. — Habíamos visto (*Arit.* nº 66) que el *descuento que debe hacerse a un documento, es igual al interés simple del valor nominal del mismo producido en el tiempo que falte para pagar el vencimiento.*

Este descuento, llamado *comercial,* no es sin embargo equitativo, pues toma como capital el valor nominal del documento en lugar de tomar el valor efectivo del mismo en el momento que se quiere descontar. Es por esta razón que existe otro descuento, llamado *racional o matemático* que se define así:

DEFINICIÓN. — Se llama *descuento matemático* de un documento al interés simple del valor efectivo del mismo, producido en el tiempo que falte para pagar el vencimiento.

Luego llamando d_m al descuento matemático de un documento cuyo valor efectivo es e, resulta:

$$d_m = \frac{e \, . \, t \, . \, r}{100}$$

Como no se conoce el valor efectivo de un documento, sino su valor escrito o nominal, trataremos de calcular el descuento matemático del mismo y su valor efectivo en función del valor nominal, para lo cual resolveremos el siguiente:

PROBLEMA. — *¿Cuál es el descuento matemático y cuál es el valor efectivo de un pagaré de n $ que ha sido descontado t años antes de su vencimiento, al r % anual?*

DATOS	INCÓGNITAS
$n, \quad r$	$d_m = x$
	$e \;\; = y.$

PLANTEO. — Como el valor efectivo es la diferencia entre el valor nominal y el descuento, es decir,

$$e = n - d_m$$

y el descuento $d_m = \dfrac{e \, . \, t \, . \, r}{100}$, sustituyendo d_m por x y e por y resulta el sistema:

$$\begin{cases} y = n - x & [1] \\ x = \dfrac{y \, . \, t \, . \, r}{100} & [2] \end{cases}$$ que es de 1^er^ grado en x e y.

Resolviéndolo por el método de sustitución, se tiene sustituyendo el valor de x de [2] en la [1]

$$y = n - \frac{y \,.\, t \,.\, r}{100}$$

$$100\, y = 100\, n - y \,.\, t \,.\, r$$

$$(100 + t\, r)\, y = 100\, n$$

luego $$y = \frac{100\, n}{100 + t \,.\, r}$$

Sustituyendo el valor de y hallado en [1], da:

$$\frac{100\, n}{100 + t \,.\, r} = n - x$$

o sea $$x = n - \frac{100\, n}{100 + t \,.\, r}$$

$$x = \frac{100\, n + n\, t\, r - 100\, n}{100 + t \,.\, r}$$

luego $$x = \frac{n\, t\, r}{100 + t \,.\, r}$$

Discusión. — Son $d_m = \dfrac{n\, t\, r}{100 + t \,.\, r}$ y $e = \dfrac{100\, n}{100 + t \,.\, r}$ el descuento matemático y el valor efectivo buscados, respectivamente, puesto que:

$$\frac{n\, t\, r}{100 + t \,.\, r} = \frac{\dfrac{100\, n}{100 + t \,.\, r} \,.\, t \,.\, r}{100}$$ luego se cumple la condición $$d_m = \frac{e \,.\, t \,.\, r}{100}$$

$$\frac{100\, n}{100 + t \,.\, r} = n - \frac{n\, t\, r}{100 + t \,.\, r}$$ luego se cumple la condición $$e = n - d_m$$

En resumen, el descuento matemático y el valor efectivo de un documento están dados, respectivamente, por las fórmulas

$$\boxed{d_m = \frac{n \,.\, t \,.\, r}{100 + t \,.\, r}} \quad [I] \qquad \boxed{e = \frac{100\, n}{100 + t \,.\, r}} \quad [II]$$ para el caso en que el tiempo t esté expresado en años.

Teniendo en cuenta que $e = n - d_m$ [III], resulta de [I] y [III]

$$\boxed{r = \frac{100\, d_m}{e\,.\,t}} \quad [IV] \quad y \quad \boxed{t = \frac{100\, d_m}{e\,.\,r}} \quad [V]$$

Como se hizo al esrudiar el Interés (*Arit.* nº 65), se pueden obtener las fórmulas que resuelven las cuestiones relativas al descuento, cuando el tiempo está expresado en meses o en días, reemplazando en las fórmulas [I], [II], [IV] y [V] a 100 por 1200 ó 36000, respectivamente.

PROBLEMA II. — *¿Cuál será el descuento matemático que sufrirá un pagaré de 4750 $ y cuál su valor efectivo si es descontado al 5 %, 45 días antes de su vencimiento?*

SOLUCIÓN

$n = 4750$
$r\,\% = 5\,\%$
$t'' = 45$ días
$d_m = x\,\$$

Fórmulas: $d_m = \dfrac{n\,.\,t''\,.\,r}{36\,000 + t''\,r}$; $e = n - d_m$

$$d_m = \frac{4750\,.\,45\,.\,5}{36\,000 + 45\,.\,5} = \frac{1\,068\,750}{36\,225}$$

luego el descuento es $d_m\,\$ = 29{,}55\,\$$

$$e = 4750 - 29{,}55 = 4720{,}45$$

luego el valor efectivo del pagaré es $e\,\$ = 4720{,}45\,\$$

PROBLEMA III. — *¿Cuánto tiempo antes de su vencimiento fué descontado un pagaré de 2342 $ al 5 % que sufrió un descuento matemático de 42 $?*

SOLUCIÓN

$n = 2342$
$d_m = 42\,\$$
$r\,\% = 5\,\%$
$t'' = x$ días

Fórmulas: $t'' = \dfrac{36\,000\, d_m}{e\,.\,r}$; $e = n - d_m$

$$e = 2342 - 42 = 2300$$

$$t'' = \frac{36\,000\,.\,42}{2\,300\,.\,5} = 131{,}47$$

Cuando ocurre, como en el presente caso, que la fórmula conduce a un cierto número de días y fracción de días, se acostumbra en la práctica de los negocios considerar tan sólo la parte entera.

El resultado del problema anterior sería entonces

$$t''\text{ días} = 131\text{ días} = 4\text{ meses } 11\text{ días}.$$

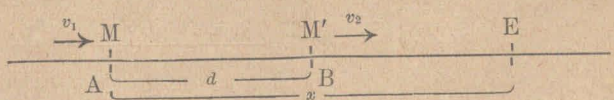
107. **Problema de los móviles.**—*Dos móviles M y M' animados con movimiento uniforme recorren en el mismo sentido la recta c. En un cierto instante, M pasa por el punto A con velocidad v_1 y M' pasa por el punto B con velocidad v_2. Calcular a qué distancia del punto A y al cabo de cuánto tiempo se encuentran los móviles sabiendo que la distancia entre A y B es de d metros?*

Datos

Velocid. M $= v_1$ m por unid. de tiempo
Velocid. M' $= v_2$ m » » » »

Incógnitas

Distancia de A al punto de encuentro $= x$.
Tiempo transcurrido desde que los móviles pasan por A y B hasta su encuentro $= y$.



Planteo. — Llamando x a la distancia del punto A al de encuentros E de los móviles, se tiene que $x - d$ es la distancia de dicho punto a B. Llamando y al tiempo transcurrido desde el paso de los móviles por A y B hasta el instante del encuentro y teniendo en cuenta que los espacios recorridos por un móvil animado de movimiento uniforme, son proporcionales a los tiempos empleados en recorrerlos, resulta que:

Si . recorre en 1 unidad de tiempo v_1 m
» » y unidades » » $v_1 y$ m $= x$ m [1]
Si M' » » 1 unidad » » v_2 m
» » y unidades » » $v_2 y$ m $=(x - d)$ m [2]

De [1] y [2] resulta el sistema

$$\begin{cases} v_1 y = x \\ v_2 y = x - d \end{cases}$$ que es de 1er grado en x e y.

RESOLUCIÓN. — Transformándolo en otro del tipo general, se tiene:

$$\begin{cases} x - v_1 y = 0 \\ x - v_2 y = d \end{cases}$$

Resolviéndolo por determinantes da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -v_1 \\ d & -v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ 1 & -v_2 \end{vmatrix}} = \frac{0 - (-v_1 d)}{-v_2 - (-v_1)} = \frac{v_1 d}{v_1 - v_2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ 1 & -v_2 \end{vmatrix}} = \frac{d}{v_1 - v_2}$$

luego $$x = \frac{v_1 d}{v_1 - v_2} \quad [1] \qquad y = \frac{d}{v_1 - v_2} \quad [2]$$

DISCUSIÓN. — Pudiendo tomar v_1 y v_2 valores cualesquiera puede resultar la $v_1 \gtreqless v_2$.

CASO *a) Cuando v_1 es mayor que v_2.*

Si $v_1 > v_2$ es $v_1 - v_2 > 0$ y como $v_1 > 0$ y $d > 0$, resulta: por [1] $x > 0$ y por [2] $y > 0$ (es decir positivos) lo que nos dice que los móviles se encuentran sobre la semirecta AB y *después* de haber transcurrido y unidades de tiempo desde el instante de sus pasos por A y B.

CASO *b) Cuando v_1 es igual a v_2.*

Si $v_1 = v_2$ es $v_1 - v_2 = 0$ y como $v_1 \neq 0$ y $d \neq 0$, resulta:

por [1] $x = \dfrac{v_1 d}{0}$ y por [2] $y = \dfrac{d}{0}$ expresiones que carecen de sentido, lo que hace suponer que el problema es imposible.

Efectivamente: marchando los móviles con igual velocidad, se conservan siempre separados de la distancia d, es decir, *nunca* se encontrarán, o lo que es lo mismo, es *imposible* que se encuentren.

Caso c) *Cuando v_1 es menor que v_2.*

Si $v_1 < v_2$ es $v_1 - v_2 < 0$ y como $v_1 > 0$ y $d_1 > 0$, resulta: por [1] $x < 0$ y por [2] $y < 0$ (es decir negativos) lo que nos dice que los móviles se encontraron sobre la semirrecta de origen A que no contiene B, y unidades de tiempo *antes* de sus pasos por A y B.

Las mismas consideraciones pueden hacerse cuando los móviles se mueven en sentido opuesto al indicado en la figura.

Los resultados anteriores pueden resumirse en el siguiente cuadro:

$v_1 > v_2$	$v_1 - v_2 > 0$ y como $v_1 > 0$ y $d > 0$ resulta: $$x = \frac{v_1 d}{v_1 - v_2} > 0 \quad , \quad y = \frac{d}{v_1 - v_2} > 0$$ luego los móviles se encuentran sobre la $\overrightarrow{AB}$ y unidades de tiempo *después* de pasar M por A y M' por B.
$v_1 = v_2$	$v_1 - v_2 = 0$ y como $x = \frac{v_1 d}{0}$ e $y = \frac{d}{0}$ carecen de sentido resulta que los móviles *nunca* se encuentran.
$v_1 < v_2$	$v_1 - v_2 < 0$ y como $v_1 > 0$ y $d > 0$ resulta: $$x = \frac{v_1 d}{v_1 - v_2} < 0 \quad , \quad y = \frac{d}{v_1 - v_2} < 0$$ luego los móviles se han encontrado en la semirrecta de origen A que no contiene al punto B, y unidades de tiempo *antes* de pasar M por A y M' por B.

Aplicaciones. — A continuación damos otros problemas de aritmética comercial, que creemos pueden interesar a los alumnos.

Problema I. — Tres séptimos de un capital han sido colocados al 4,50 % y el resto al 5 %. ¿Cuál es el capital si al cabo de 7 meses ha producido 540 $.

Datos		Incógnitas
$\frac{3}{7}c$	colocado al $r = 4{,}50\ \%$ produce i	$c = x$
$c - \frac{3}{7}c = \frac{4}{7}c$	» » $r' = 5\ \%$ » i'	

$$i + i' = 540$$

Planteo. — De la condición $i + i' = 540$ y de fórmula $i = \frac{c.r.t'}{1200}$ se obtiene de acuerdo al enunciado:

$$\frac{\frac{3}{7}c.r.t'}{1200} + \frac{\frac{4}{7}c.r'.t'}{1200} = 540$$

y sustituyendo r, r' y t' por los datos del problema y a c por x resulta la ecuación de 1er grado en x:

$$\frac{\frac{3}{7}x.4{,}5.7}{1200} + \frac{\frac{4}{7}x.5.7}{1200} = 540$$

o sea

$$13{,}5\,x + 20\,x = 540 \times 1200$$

$$33{,}5\,x = 648\,000$$

$$x = \frac{648\,000}{33{,}5} = 19343{,}28 \quad \text{luego} \quad c\ \$ = \$\ 19343{,}28$$

Problema II. — *Dos capitales cuya suma es igual a 8400 $ han dado en un año un interés de 384 $. El primero fué colocado al 5 % anual y el segundo al* $4\frac{1}{4}$*, ¿cuáles son estos capitales?*

Datos	Incógnitas
$c\ \$ + c'\ \$ = 8400\ \$$	$c = x$
c colocado al $r = 5\ \%$ produce i	$c' = y$
c' » » $r' = 4\dfrac{1}{4}\ \%$ » i'	
$i\ \$ + i'\ \$ = 384\ \$$	

Planteo. — De las condiciones $c + c' = 8400$; $i + i' = 384$ y t años $= 1$ año del problema y de la fórmula $i = \dfrac{c.r.t}{100}$ sustituyendo a r y r' por los datos, a c y c' por x e y y suprimiendo al factor t por ser igual a 1 se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x \times 5}{100} + \dfrac{y \times 4{,}25}{100} = 384 & \text{pues es la suma de los intereses} \\ x + y = 8400 & \text{» » » » » » capitales} \end{cases}$$

Multiplicando la 1ª ecuación por 20 para igualar los coeficientes de x en ambas ecuaciones, resulta:

$$\begin{cases} x + 0{,}85\, y = 7680 & [1] \\ x + y = 8400 & [2] \end{cases}$$

Restando [2] y [1] da $\qquad 0{,}15\, y = 720 \quad \therefore$

$$y = \frac{720}{0{,}15} = 4800 \qquad \text{luego} \quad c\ \$ = 4800\ \$$$

y $\qquad x = 8400 - y = 8400 - 4800 = 3600 \qquad$ » $\quad c'\ \$ = 3600\ \$$

Problema III. — *Repartir* 5400 $ *entre* 3 *personas* A, B y C *de manera que* $\dfrac{A}{B} = \dfrac{2}{5}$ *y que* $\dfrac{B}{C} = \dfrac{1}{4}$.

Planteo. — Llamando x al número de pesos de A, y al de B y z al de C' procediendo como en el problema I del nº 103, resulta:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{1}{4} \\ x + y + z = 5400 \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} 5x - 2y = 0 & [1] \\ 4y - z = 0 & [2] \\ x + y + z = 5400 & [3] \end{cases}$$

Multiplicando a la [1] por 2 y sumándole la [2] da $\begin{cases} 10x - z = 0 & [4] \\ 4x + 5z = 21\,600 & [5] \end{cases}$

» » » [3] » 4 y restándole » [2] »

Multiplicando la [4] por 5 y sumándole la [5] da:

$$54x = 21\,600 \quad \therefore \quad x = \frac{21\,600}{54} = 400$$

luego $A = x\ \$ = 400\ \$$

De [1] $\quad y = \dfrac{5x}{2} = \dfrac{5 \times 400}{2} = 1000 \quad$ » $\quad B = y\ \$ = 1000\ \$$

De [2] $\quad z = 4y = 4 \times 1000 = 4000 \quad$ » $\quad C = z\ \$ = 4000\ \$$

Problema IV. — *Repartir* 5800 $ *entre* A, B, C *y* D *tal que:*

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}} \quad ; \quad \frac{B}{C} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}}.$$

Procediendo en forma análoga al problema anterior se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5}x - \dfrac{1}{2}y = 0 \\ \dfrac{1}{8}y - \dfrac{3}{4}z = 0 \\ x + y + z = 5800 \end{cases} \quad \text{cuyas soluciones son} \quad \begin{cases} x = 3000 \\ y = 2400 \\ z = 400 \end{cases}$$

Aplicaciones. — Resolver los problemas siguientes:

1°) Ha lar dos números sabiendo que su suma es 7 y su diferencia — 3.

2°) Hallar dos números sabiendo que su suma es 98 y su cociente $\frac{10}{11}$.

3°) Hallar la fracción que es igual a $\frac{2}{3}$ cuando a cada uno de sus términos se le resta 1, e igual a $\frac{3}{4}$ cuando la se le suma 1 a cada uno de esos términos.

4°) Un obrero trabajó 7 días con su hijo y 5 días solo y recibió $ 74. Otra vez recibió $ 50 por 8 días de trabajo durante los cuales trabajó 5 días con su hijo ¿cuánto ganaba por día el obrero y cuánto su hijo?

5°) Dos personas deben juntas $ 180, la primera podría pagar esa suma si le agregara a la que tiene los $\frac{2}{5}$ de lo que posee la otra; y ésta podría pagar si tuviera $\frac{1}{4}$ de lo que tiene la primera ¿cuánto tiene cada persona?

6°) Un contratista hace trabajar un cierto número de obreros; si les da a cada uno $ 3 por día, el gana $ 15 por día; si le da $ 3,60 por día pierde 6 $. Se pregunta ¿cuántos obreros emplea y qué suma retira por día del producido?

7°) Un cambio se puede recorrer en 5 horas, con una cierta velocidad por hora, y se puede recorrer en una hora menos aumentando en un kilómetro la velocidad ¿cuál es la longitud del camino?

8°) Al dividir un número de dos cifras por el que resulta invirtiendo el orden de éstas se tiene 2 por cociente y 7 de resto, y al dividir el número invertido por la cifra de sus unidades, resulta, 4 por cociente, 6 de resto ¿cuál es el número?

9°) El cuadrado de la suma de las dos cifras que componen un número es 121. Si de este cuadrado se resta el cuadrado de la primera cifra y el doble del produco de las dos, se obtiene 81 ¿cuál es el número?

CAPITULO XII

REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES

PROGRAMA. — *Variables. Función y argumento. Variación de la función* $y = \frac{a}{x}$ *Coordenadas cartesianas ortogonales. Abscisa y ordenada. Signos. Dado un punto del plano hallar sus coordenadas y recíprocamente. Representación gráfica de la función* $y = \frac{a}{x}$. *Representación gráfica de la función lineal. Representación gráfica de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Otras aplicaciones de la representación gráfica. Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.*

108. **Variables.**— DEFINICIÓN. —En una expresión algebraica se llaman *variables* las letras a las cuales se les pueden atribuir infinitos valores.

EJEMPLO. — En la ecuación $2x - y = 5$; las letras x e y son variables, pues como se vió en el párrafo número 93 se le pueden atribuir a cada una de ellas infinitos valores, resultando para la otra también infinitos valores.

109. **Función y argumento.**— DEFINICIÓN.— Se dice que una variable y es *función* de otra variable x, llamada *argumento*, cuando a cada valor de la segunda x corresponden uno o varios valores de la primera y.

EJEMPLOS. — Representando por y el valor de un polinomio en x, en el que se supone que x es la única variable, resulta y función de x, pues para cada valor de x toma y un determinado valor. Así

$$y = 2x + 1$$
$$y = 3x^2 - 4x + 10$$
$$y = 5x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x - 8$$

Las funciones de este tipo se representan abreviadamente por el símbolo $y = f(x)$ que se lee *y es igual a «efe» de x.*

En el ejemplo primero $f(x)$ representa a $2x + 1$
» » » segundo $f(x)$ » » $3x^2 - 4x + 10$
» » » tercero $f(x)$ » » $5x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x - 8$

110. **Variaciones de la función** $y = \frac{a}{x}$. Sea el ejemplo $y = \frac{2}{x}$ en el que $a = 2$. Formemos una tabla de valores, tomando a x como argumento y hallando los valores correspondientes de y. Luego tendríamos:

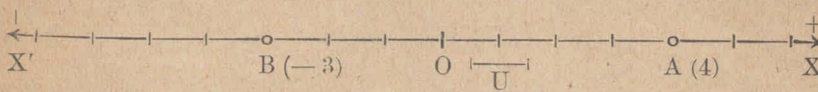
x	... -5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5 ... *crece*
y	... $-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	no existe	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$ ... *decrece*

donde puede observarse que a medida que x crece y decrece y viceversa, que a valores positivos de x corresponden valores positivos de y, y que a valores negativos de x corresponden valores negativos de y.

La forma en que varía una función con respecto a las variaciones de su argumento, se puede apreciar más fácilmente, y de un solo golpe de vista, mediante una figura en que están representadas esas variaciones. En dibujar esas figuras consiste la *representación gráfica de las funciones*, que pasamos a estudiar.

Definiciones. — Dada una recta X′X, llamada *eje*, un punto cualquiera O de la misma, llamado *arigen*, y un segmento arbitrario U como *unidad*, se llama *abscisa* de un punto cualquiera A del *eje* XX′ a la medida, con respecto a la unidad U, del segmento OA determinado por dicho punto A con el origen O, y cuyo signo es positivo o negativo, según pertenezca a una o a otra de las semirrectas determinadas por O.

Ejemplo:



$$\textit{Abscisa de } A = \frac{\overline{OA}}{U} = 4 \quad ; \quad \textit{Abscisa de } B = \frac{\overline{OB}}{U} = -3$$

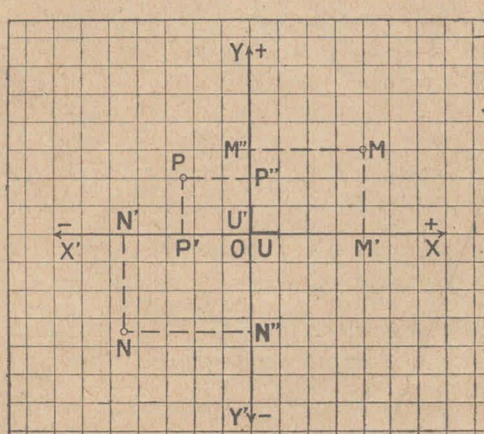
Observación. — *Las abscisas de los puntos de un eje son números.*

De la definición de abscisa resulta que: *A cada punto de un eje le corresponde un número y solo uno, su abscisa.*

Recíprocamente: *A cada número le corresponde sobre un eje un punto, y solo uno, que lo tiene por abscisa.*

En efecto: Dado un segmento U y un número real α existe un segmento y sólo uno cuya medida con respecto U es igual a α.

111. **Coordenadas cartesianas ortogonales.**—Definición.—Considerando dos ejes XX′ e YY′ que tengan el origen común O y sean perpendiculares, se llaman *coordenadas cartesianas ortogonales* de un punto cualquiera M del plano de esos ejes, a las abscisas de las proyecciones de dicho punto sobre cada uno de los ejes.



EJEMPLOS.— Coordenadas de M $\begin{cases} \text{abscisa de } M' = 4 \\ \text{abscisa de } M'' = 3 \end{cases}$

Coordenadas de P $\begin{cases} \text{abscisa de } P' = -\dfrac{7}{3} \\ \text{abscisa de } P'' = 2 \end{cases}$

DEFINICIONES. — Al eje XX′ se le llama *eje de las «equis»* o *de las abscisas* y se lo toma horizontal, y al YY′ se le llama *eje de las «íes»* o *de las ordenadas.*

A la abscisa de un punto sobre el eje de las x se le llama simplemente *abscisa* de dicho punto y se la representa por la letra x, y a su abscisa sobre el eje de las y se le llama *ordenada* del mismo y se la representa por la letra y.

NOTACIÓN. M (x/y) significa el punto M tiene por abscisa x y por ordenada a y.

Así para el punto M de la figura anterior se tiene M (4/3).

112. **Signos de las coordenadas.** — Las semirrectas determinadas sobre cada uno de los ejes por el origen de los mismos, se llaman *semi-ejes* y convendremos en que

$\overrightarrow{OX}$ sea el *semi-eje positivo de las abscisas*

$\overrightarrow{OX'}$ » » *semi-eje negativo de las abscisas*

$\overrightarrow{OY}$ » » *semi-eje positivo de las ordenadas*

$\overrightarrow{OY'}$ » » *semi-eje negativo de las ordenadas*

El plano de dos ejes coordenados queda dividido por éstos en cuatro ángulos que se llaman *cuadrantes.* El ángulo que tiene por lados los semi-ejes positivos $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ se llama *primer cuadrante,* los puntos del mismo tienen *abscisas y ordenada positivas.* El ángulo que tiene por lados a los semi-ejes $\overrightarrow{OY}$ y $\overrightarrow{OX'}$ se llama *segundo cuadrante* y sus puntos tienen *abscisa negativa* y *ordenada positiva.* El ángulo que tiene por lados a los semi-ejes $\overrightarrow{OX'}$ y $\overrightarrow{OY'}$ se llama *tercer cuadrante* y sus puntos tienen *abscisa y ordenada negativas.* El *cuarto cuadrante* es el ángulo que tiene por lados a los semi-ejes $\overrightarrow{OY'}$ y $\overrightarrow{OX}$, los puntos del mismo tienen *abscisa positiva* y *ordenada negativa.*

De acuerdo con la definición de abscisas y ordenadas resulta: *Que a todo punto del plano de dos ejes coordenados le corresponde un par de números reales, sus coordenadas.*

Recíprocamente: *Dados, en un cierto orden, un par de números reales le corresponde en el plano de dos ejes coordenados un solo punto, que tiene a dichos números por coordenadas.*

En efecto: Determinando sobre el eje de las x el punto que tenga por abscisa al primer número y sobre el eje de las y el punto que tenga por ordenada al segundo, trazando por ellos las perpendiculares a los ejes a que pertenecen, el punto de intersección de dichas perpendiculares es el punto que tiene por coordenadas al par de números dados, por definición.

Se puede evitar el trazado de esas perpendiculares utilizando el papel cuadriculado, y en particular, el llamado *papel milimetrado,* cuyas cuadrículas tienen 1 mm de lado. Además están marcadas en él, con trazos más gruesos, las líneas separadas de 5 mm., y 1 cm. y 5 cm. como se ve en la figura del párrafo número 113.

Conviene, para representar sobre este papel, tomar como ejes coordenados dos de las líneas perpendiculares más gruesas.

Ejercicio. — Representar los puntos que tengan por coordenadas

A de coord. $(3/2)$

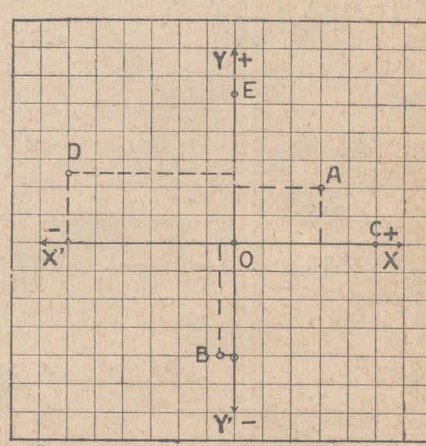
B » » $\left(-\frac{1}{2}/-4\right)$

C » » $(5/0)$

D » » $\left(-6/\frac{5}{2}\right)$

E « « $\left(\frac{16}{3}/0\right)$

O » » $(0/0)$



En la práctica se usan frecuentemente y en forma inadvertida las coordenadas cartesianas. Así, si queremos indicar a una persona el punto de una pared en el que debe colocar un clavo, es necesario darle la altura de dicho punto con respecto al piso y además su distancia a una de las aristas de esa pared.

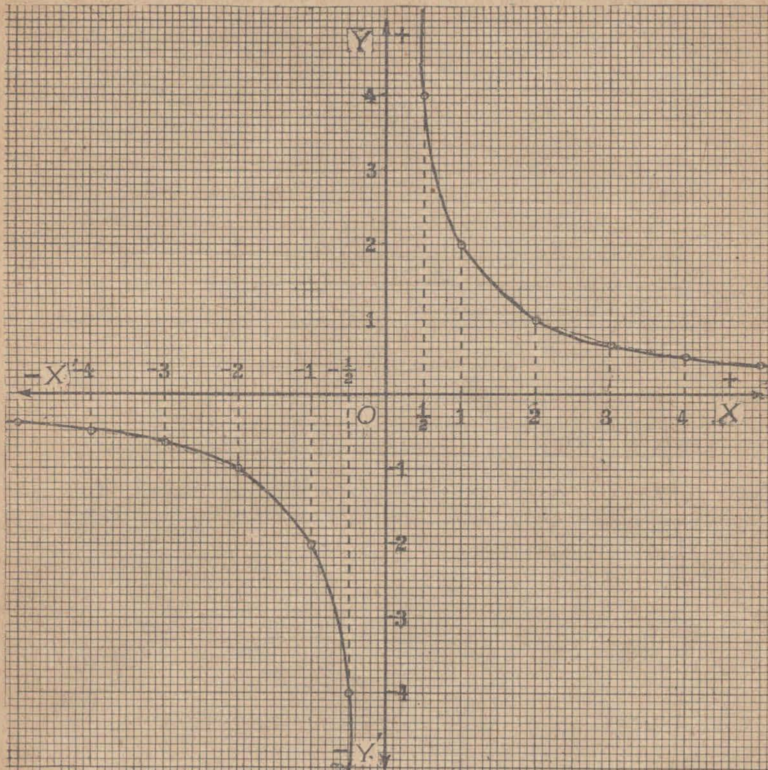
En la ciudad de Buenos Aires, la ubicación de una casa queda determinada por el nombre de la calle, que da su distancia a la ribera, y por el número, que indica sobre esa calle su distancia a la calle Rivadavia. Queda también determinado si pertenece dicha casa a la zona norte o sud de la ciudad con respecto a Rivadavia, pues los nombres de las calles perpendiculares a esta última tienen nombres distintos según se encuentren en una o en otra zona.

113. Répresentación gráfica de la función $y = \frac{a}{x}$. — Habíamos visto (nº 110) que fijado un valor para a, p. ej. $a = 2$, cuales eran los valores correspondientes de x e y. Tomando los valores de x como abscisas y los correspondientes de y como ordenadas, en un sistema de ejes coordenados ortogonales, quedan determinados puntos cuyo conjunto constituyen lo que se llama la *gráfica de la función* $y = \frac{a}{x}$.

Siendo infinitos los pares de valores correspondientes que se pueden obtener de una función tal como la dada, en la práctica solo se representan algunos de los puntos de su gráfica y se los une por un trazo continuo.

Teniendo en cuenta la tabla de valores que damos a continuación, resulta la gráfica de la figura:

x	$\ldots -5$	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	$5 \ldots$
y	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	no existe	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5} \ldots$

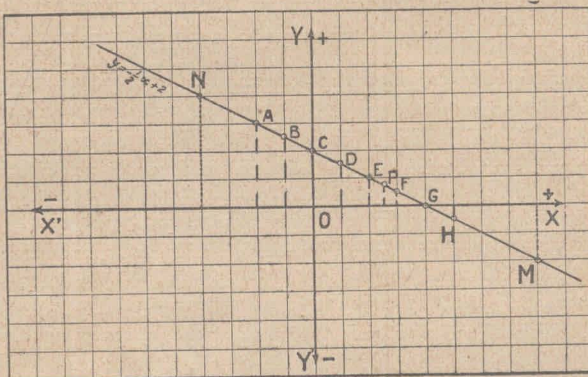


114. Representación gráfica de la función lineal.—Sea, por ejemplo, representar la función $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Dando valores al argumento x, y hallando los correspondientes de y se obtiene el siguiente cuadro de valores:

x	... -2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	... 3	$2\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	...

el cual, tomando como unidad al lado de una de las cuadrículas, nos permiten obtener los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, ... Uniendo estos puntos con trazo contínuo se obtiene la gráfica de la función dada.



OBSERVACIONES. — En la figura anterior puede notarse que la gráfica de la función $y = -\frac{1}{2}x + 2$, que es una ecuación de primer grado con dos incógnitas, es una línea recta, es decir que: *los puntos que tienen por coordenadas pares de valores correspondientes en esa función pertenecen a una misma recta.*

Recíprocamente sean M, N y P los puntos cualesquiera de la gráfica obtenida. Hallando las coordenadas de estos puntos tendríamos:

$$M(8/-2) \;\; ; N(-4/4) \;\; ; \;\; P\left(2\frac{1}{2}\Big/\frac{3}{4}\right).$$

Veamos si estos pares de valores son raíces de la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Para

$x = 8$; $y = -2$ da $-2 = -\frac{1}{2}.8 + 2$ la ecuac. se satisf.

$x = -4$; $y = 4$ da $4 = -\frac{1}{2}.(-4) + 2$ la ecuac. se satisf.

$x = 2\frac{1}{2}$; $y = \frac{3}{4}$ da $\frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.2\frac{1}{2} + 2$ la ecuac. se satisf.

luego: *los puntos de la gráfica de la función considerada tienen por coordenadas pares de números que son raíces de la ecuación.*

Como para cualquier ecuación de primer grado con dos incógnitas, podrían hacerse estas mismas observaciones resulta que:

La gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas es una recta (*)

Es por esta razón que las funciones del tipo

$y = ax + b$ se llaman *funciones lineales.*

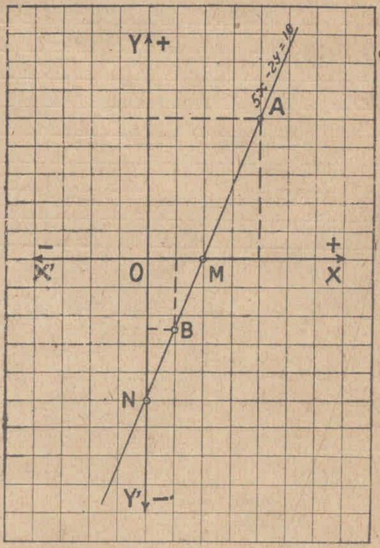
115. **Representación gráfica de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.** — Ejemplo I) Sea, por ejemplo, representar la ecuación $5x - 2y = 10$.

Si se despeja el valor de y resulta:

$y = \frac{5}{2}x - 5$ que es una función

lineal, luego su gráfica es una recta.

Por lo tanto bastará encontrados puntos de la misma para poderla representar.



Así, para $x = 1$

es $y = \frac{5}{2} . 1 - 5 = -2\frac{1}{2}$

y para $x = 4$

es $y = \frac{5}{2} . 4 - 5 = 5$

luego los puntos, A $\left(1 / -2\frac{1}{2}\right)$ y B (4/5) determinan la recta AB que es la gráfica de la ecuación dada.

Observación. — La gráfica anterior corta a los ejes en los puntos M y N cuyas coordenadas son:

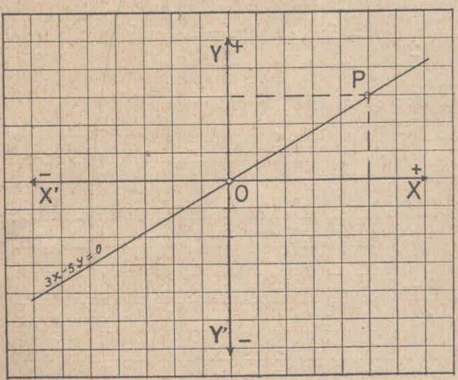
(*) Se reserva para cursos superiores la demostración de esta propiedad.

para M $x = 2 \quad y = 0$, y para N $x = 0 \quad y = -5$.

Puede observarse que las coordenadas del punto M, en que la recta corta al eje de las x, se obtienen haciendo $y = 0$ y calculando el valor de x correspondiente, y que las del punto N, en que la recta corta al eje de las y, se obtienen haciendo $x = 0$ y calculando el valor de y correspondiente.

Ejemplo II. — Sea representar la ecuación $3x - 5y = 0$.

Como esta ecuación es de primer grado con dos incógnitas su gráfica es una recta (ejemplo I), luego para representarla basta determinar dos de sus puntos.



Así para $x = 0$ es $3.0 - 5y = 0$ luego $y = 0$ es decir la recta $3x - 5y = 0$ pasa por el origen 0.

Como para $y = 0$ resultaría $x = 0$ es decir el mismo punto O, es necesario determinar otro punto.

Para $x = 5$ es $3.5 - 5y = 0$

luego $y = \frac{3.5}{5} = 3$.

Los puntos O (0/0) y P(5/3) determinan la gráfica buscada.

Nota. — *Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que,* como la dada, *carecen de término independiente, tienen por gráfica una recta que pasa por el origen de los ejes.*

Luego para representar una ecuación cuyo término independiente es 0, basta encontrar un punto distinto del origen y unirlo con éste.

Ya se ha visto que la representación gráfica sirve para poner en evidencia las variaciones de una función, ahora la emplearemos en las diversas cuestiones que se tratan a continuación.

116. Resolución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. — Sea, por ejemplo, resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 6y = -10 \\ 4x + 3y = 25. \end{cases}$$

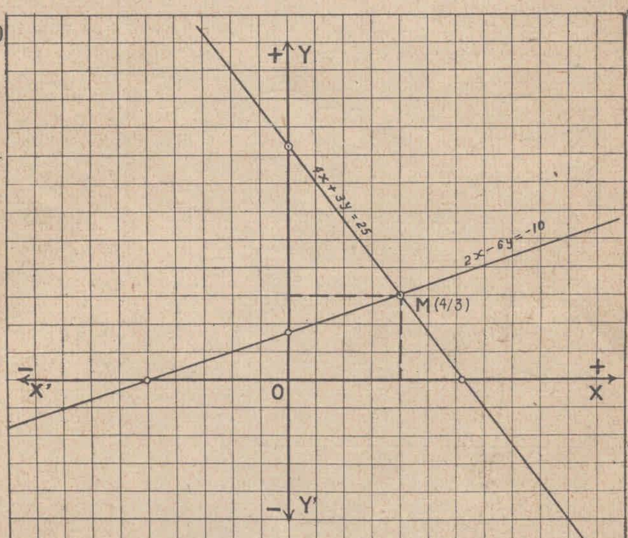
Representando sobre un mismo par de ejes cartesianos a las ecuaciones dadas, utilizando los cuadros de valores correspondientes,

$2x - 6y = -10$

x	0	-5
y	$\frac{5}{3}$	0

$4x + 3y = 25$

x	0	$\frac{25}{4}$
y	$\frac{25}{3}$	0



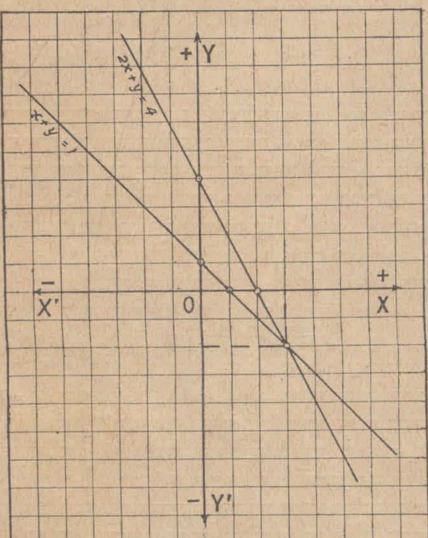
se observa que las gráficas de dichas ecuaciones se cortan en el punto M(4/3). El par de valores $x = 4$ $y = 3$ es raíz del sistema dado. En efecto: por pertenecer el punto M a la gráfica de la ecuación $2x - 6y = -10$, sus coordenadas satisfacen a la ecuación [1] (nº 114) considerada. Pero M pertenece también a la gráfica de la ecuación $4x + 3y = 25$, luego sus coordenadas satisfacen a dicha ecuación (nº 114).

La observación del ejemplo anterior que es general nos permite enunciar la siguiente:

Regla. — *Para resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:*

1º) *Se construyen, sobre un mismo par de ejes coordenados cartesianos, las gráficas de las ecuaciones dadas.*

2º) *Se hallan las coordenadas del punto de intersección.*



Aplicaciones. — Resolver el sistema

$$\begin{cases} x+y=1 & [1] \\ 2x+y=4 & [2] \end{cases}$$

1º)

x	0	1
y	1	0

2º)

x	0	2
y	4	0

luego la raíz del sistema es $x=3$, $y=-2$ pues el punto de intersección es el $(3/-2)$.

Aplicaciones. — Ejemplo I. Representar gráficamente los puntos $(3/0)$ $(0/6)$; $(3/-8)$; $(-2/6)$; $(-2/0)$; $(-2/-2)$.

Ejemplo II. Representar los puntos $(4/0)$; $(0/4)$: $(-4/0)$; $(0/-4)$ y hallar el número de cuadrados de lado igual al segmento unidad contenidos en la figura que tiene por vértice a esos puntos.

Ejemplo III. Representar gráficamente las funciones $y=2x$; $y+x=0$; $y-6=0$; $y+3x=3$; $y=x^2$.

Ejemplo IV. Resolver gréficamente los sistemas

$$\begin{cases} y=2x+3 \\ y+\ x=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=3x \\ 2x+y=18 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-\ y=\ 3 \\ 3x-5y=15 \end{cases}$$

PROGRAMA-INDICE DE GEOMETRIA

SEGUNDO AÑO DE LAS ESCUELAS NORMALES

PROGRAMA INDICE DE ARITMETICA Y ALGEBRA

SEGUNDO AÑO DE LAS ESCUELAS NORMALES

Se terminó de imprimir el 5 de Abril de 1938
en los Talleres Gráficos "TOMÁS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Bs. As.