MIGUEL M. NAVARRO SANTA ANA
FELIPE ANGUITA

ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

Corresponde a los programas de 2.° Año de las

ESCUELAS SUPERIORES DE COMERCIO DE LA NACION

TOMO II

MOLY & LASSERRE
EDITORES
CALLAO 575 - BUENOS AIRES

ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

ESCUELAS DE COMERCIO

ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

Corresponde a los programas de 2º Año de las
ESCUELAS SUPERIORES DE COMERCIO DE LA NACION

POR LOS PROFESORES DE MATEMATICAS

Miguel M. Navarro Santa Ana
Catedrático de la Escuela Superior
de Comercio N.º 1, de Buenos Aires.

Felipe Anguita
Catedrático de los Colegios Nacionales
"Mariano Moreno" y "Bartolomé Mitre"

TOMO II

M. Queralt

BUENOS AIRES
MOLY & LASSERRE
EDITORES
Librería "José Moly" Callao 575

PRÓLOGO

Al presentar a nuestros colegas y estudiantes de las Escuelas de Comercio el presente volumen, creemos satisfacer una necesidad de la enseñanza de dichas Escuelas. Y no solamente los estudiantes de comercio tendrán un manual que les ayude a comprender las explicaciones de sus profesores, siguiendo fielmente el desarrollo del programa correspondiente, sino que aspiramos, también, a que pueda ser útil a todas las personas que deseen adquirir los conocimientos teóricos y prácticos de las Matemáticas Comerciales, de las que existen tan pocos trabajos en nuestro país. Dentro de ese propósito, los empleados de comercio y bancarios encontrarán un precioso auxiliar en nuestro curso, que les ha de permitir afrontar con seguridad las múltiples cuestiones prácticas que a diario se les presentan.

Numerosos problemas de carácter real y práctico resueltos en el texto aclaran los desarrollos rigurosos y sirven de guía para su estudio y aplicación.

Al final de cada capítulo hemos puesto una buena cantidad de ejercicios y problemas cuyos datos son, en la medida de lo posible, conformes a la realidad de los hechos, y que han de constituir un utilísimo material para el desarrollo de las clases.

La tarea que nos hemos impuesto es vasta y pesada: dotar de libros-guía para la enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas de Comercio. A nuestros colegas les toca decir si la hemos emprendido acertadamente.

LOS AUTORES.

Buenos Aires, Abril de 1936.

CAPITULO I

Fracciones decimales.

1. Definición. — Se llama *fracción decimal* a la fracción cuyo denominador es una potencia de 10, es decir, está compuesto por la unidad seguida de ceros.

Así, $\frac{7}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{32}{1.000}$ son fracciones decimales.

Una fracción decimal se lee nombrando el numerador y luego el denominador con la terminación *ésimos.*

Las fracciones decimales, por ser fracciones ordinarias, gozan de todas las propiedades de éstas. Sin embargo, son más prácticas para los cálculos, pues se las puede escribir sin denominador y las operaciones con ellas son tan simples y rápidas como con los números enteros.

2. Relaciones entre las unidades decimales. — Las unidades decimales son:

$$\frac{1}{10}\,,\quad \frac{1}{100}\,,\quad \frac{1}{1.000}\,,\quad \frac{1}{10.000}\,,\ .....$$

un décimo, un centésimo, un milésimo, un diezmilésimo,...

Por lo estudiado anteriormente sabemos que:

$$1=\frac{1}{1}=\frac{10}{10}=\frac{100}{100}=\frac{1.000}{1.000}=\ .....$$

$$\frac{1}{10}=\frac{10}{100}=\frac{100}{1.000}=\frac{1.000}{10.000}=\ .....$$

$$\frac{1}{100}=\frac{10}{1.000}=\frac{100}{10.000}=\frac{1.000}{100.000}=\ .....$$

....

....

expresiones que nos dicen que:

una unidad equivale a 10 décimos, o 100 centésimos, o 1.000 milésimos,. . . . ;

un décimo equivale a 10 centésimos, o 100 milésimos, o 1.000 diezmilésimos, ... ;

un centésimo equivale a 10 milésimos, o 100 diezmilésimos, o 1.000 cienmilésimos, ...

De manera, pues, que cada unidad decimal representa unidades diez veces mayor que la unidad que le sigue, quedando ordenadas las distintas unidades decimales así:

$$1 > \frac{1}{10} > \frac{1}{100} > \frac{1}{1.000} > \frac{1}{10.000} > \dots$$

Cada una es diez veces mayor que la que le sigue, y diez veces menor que la que le precede.

3. Descomposición de fracciones. — Sea la fracción decimal $\frac{72.354}{1.000}$. Sabemos que el numerador se puede descomponer en la suma de sus distintas unidades así:

$$\frac{72.354}{1.000} = \frac{70.000 + 2.000 + 300 + 50 + 4}{1.000}$$

y según la regla práctica para sumar fracciones:

$$= \frac{70.000}{1.000} + \frac{2.000}{1.000} + \frac{300}{1.000} + \frac{50}{1.000} + \frac{4}{1.000}$$

y después de sumar y simplificar, queda:

$$\frac{72.354}{1.000} = 72 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1.000}$$

expresión que nos dice que: *toda fracción decimal es igual a la suma de un número entero, que se obtiene al separar a la derecha del numerador tantas cifras como ceros haya en el denominador, y varias fracciones decimales cuyos numeradores son cada una de las cifras separadas, y cuyos denominadores son 10, 100, 1.000,* . . . . .

4. OBSERVACIONES. — I. Si el numerador tiene tantas cifras como ceros el denominador, la parte entera es nula.

Ejemplo: $\frac{473}{1.000} = 0 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1.000}$

5. II. — Si el numerador tiene menos cifras que ceros el denominador, la parte entera y los numeradores de las primeras fracciones sucesivas son nulos.

Ejemplo: $\frac{38}{1.000} = 0 + \frac{0}{10} + \frac{3}{100} + \frac{8}{1.000}$

6. Expresión de las fracciones decimales en forma entera. — Se acaba de ver que toda fracción decimal es la suma de un número entero de décimos, centésimos, milésimos, diezmilésimos...., todos menores que diez. Pero como una unidad vale 10 décimos, un décimo vale 10 centésimos, etc. (**2**), por analogía con los principios de la numeración decimal, podemos llamar a los décimos unidades de *1er. orden decimal;* a los centésimos, de *2º orden decimal;* a los milésimos, de *3er orden decimal,* etc., cumpliéndose siempre el principio de que cada unidad de un orden equivale a 10 unidades del orden siguiente.

Si tenemos la fracción $\frac{38.475}{1.000}$, sabemos que es:

$$\frac{38.475}{1.000} = 38 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1.000}$$

o sea: igual a 38 unidades, 4 unidades de 1er. orden decimal, 7 unidades de 2º orden decimal y 5 unidades de 3er orden decimal.

De manera que la fracción dada la podemos considerar como compuesta de una parte entera, obtenida separando con una coma a la derecha del numerador tantas cifras como ceros haya en el denominador, representando las cifras separadas las distintas unidades decimales:

$$\frac{38.475}{1.000} = 38{,}475$$

Si al separar con una coma en el numerador no hubiera bastantes cifras, se agregan a la izquierda los ceros necesarios.

Ejemplos: $\frac{472}{1.000} = 0{,}472$; $\frac{25}{10.000} = 0{,}0025$

7. Número decimal. — Se llama *número decimal* a la fracción decimal escrita sin denominador bajo la forma entera. Así, son números decimales: 38,475; 0,472; 0,0025.

8. Escritura de un número decimal en forma fraccionaria. — Sabemos que $\frac{345}{100} = 3{,}45$, luego es $3{,}45 = \frac{345}{100}$, expresión que nos dice que: *para escribir un número decimal en forma fraccionaria, se escribe el número dado como numerador, y como denominador el número 1 y tantos ceros como cifras decimales haya después de la coma decimal.*

9. Multiplicación y división de un número decimal por la unidad seguida de ceros. — Sea 4,586 el número que se quiere multiplicar por 100. Tenemos:

$$4{,}586 \times 100 = \frac{4.586}{1.000} \times 100$$

y efectuando la multiplicación:

$$= \frac{4.586 \times 100}{1.000}$$

y simplificando, queda:

$$= \frac{4.586}{10}$$

convirtiendo la fracción obtenida en número decimal, resulta:

$$4{,}586 \times 100 = 458{,}6$$

Como se ve, se ha obtenido el mismo resultado que si la coma decimal la hubiéramos corrido dos lugares a la derecha, y como lo mismo haríamos en casos análogos, tenemos que: *para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr a la derecha la coma decimal tantos lugares como ceros acompañen a la unidad.*

10. Recíprocamente, el número 4,586 es el cociente de 458,6 y 100, puesto que $4{,}586 \times 100 = 458{,}6$, luego: *para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr a la izquierda la coma decimal tantos lugares como ceros acompañen a la unidad.*

Ejemplos:

$$0{,}48 : 1.000 = 0{,}00048; \quad 6{,}42 : 10 = 0{,}642; \quad 2489 : 100 = 24{,}89$$

11. TEOREMA. — *Un número decimal no altera si se agregan ceros a la derecha de su última cifra decimal.*

Es decir, que es: $3,25 = 3,250000$.

En efecto, esos dos números son iguales por estar compuestos por igual número de unidades, de décimos y centésimos.

OPERACIONES CON LOS NUMEROS DECIMALES

12. Suma. — Sea la suma $8,3 + 0,056 + 2,75$.

Sabemos que es:

$$8,3 + 0,056 + 2,75 = \frac{83}{10} + \frac{56}{1.000} + \frac{275}{100}$$

y reduciendo a común denominador:

$$= \frac{8.300}{1.000} + \frac{56}{1.000} + \frac{2.750}{1.000}$$

sumando las fracciones:

$$= \frac{8.300 + 56 + 2.750}{1.000}$$

y sumando los números enteros:

$$= \frac{11.106}{1.000}$$

o bien: $8,3 + 0,056 + 2,75 = 11,106$

Como este resultado proviene de sumar los milésimos, los centésimos, los décimos, etc., podemos decir que: *para sumar números decimales se suman las unidades de cada orden, comenzando por las unidades inferiores, operando como si fuesen números naturales. En el resultado se separan tantos decimales como tenga el sumando de mayor número de cifras decimales.*

Ejemplo: Sea efectuar la suma:

$25,048 + 314,56 + 18,253 + 0,4682$

La operación se dispone como se indica al costado.

$$\begin{array}{r} 25,048 \\ 314,56 \\ +\ 18,253 \\ 0,4682 \\ \hline 358,3292 \end{array}$$

13. Resta. — Sea la resta $85,36 - 24,014$. Sabemos que es:

$$85,36 - 24,014 = \frac{8.536}{100} - \frac{24.014}{1.000}$$

y reduciendo a común denominador:

$$= \frac{85.360}{1.000} - \frac{24.014}{1.000}$$

$$= \frac{85.360 - 24.014}{1.000}$$

$$= \frac{61.346}{1.000}$$

o bien: $85{,}36 - 24{,}014 = 61{,}346.$

Como este resultado proviene de restar milésimos de milésimos, centésimos de centésimos, etc., podemos decir que: *para restar números decimales se restan las unidades de cada orden, comenzando por los inferiores. En el resultado se separan tantos decimales como tenga el número de mayor número de cifras decimales.*

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 35 \\ -\ 16{,}42 \\ \hline 18{,}58 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}8 \\ -\ 0{,}346 \\ \hline 5{,}454 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}0432 \\ -\ 0{,}017 \\ \hline 0{,}0262 \end{array}$$

14. Multiplicación. — Sea la multiplicación $4{,}32 \times 5{,}8$. Sabemos que es:

$$4{,}32 \times 5{,}8 = \frac{432}{100} \times \frac{58}{10}$$

$$= \frac{432 \times 58}{100 \times 10}$$

$$= \frac{25.056}{1.000}$$

o bien: $4{,}32 \times 5{,}8 = 25{,}056.$

Como este resultado es el mismo que si hubiéramos multiplicado los dos números como si fuesen enteros y luego separado tres decimales al resultado, diremos que: *para multiplicar los números decimales se multiplican como si fuesen enteros, y luego se separan en el resultado tantos decimales como decimales haya en los dos factores.*

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 4{,}185 \\ \times\ 0{,}24 \\ \hline 16740 \\ 8370 \\ \hline 1{,}00440 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}018 \\ \times\ 0{,}015 \\ \hline 90 \\ 18 \\ \hline 0{,}000270 \end{array}$$

15. Cociente de dos números enteros con menor error que un décimo, un centésimo, etc. — La división de los números 4 y 3 no da por cociente un número entero, pues su cociente está comprendido entre 1 y 2, pero se puede hallar una fracción decimal cuya diferencia con 4:3 sea menor que un décimo o centésimo, etc.

Sea $\frac{a}{10}$ la fracción decimal buscada, cuya aproximación es de 0,1. Se debe tener, pues, a 4 : 3 comprendida entre los cocientes $\frac{a}{10}$ y $\frac{a+1}{10}$, es decir:

$$\frac{a}{10} < \frac{4}{3} < \frac{a+1}{10} \qquad (1)$$

Multiplicando por 10, resulta:

$$a < \frac{40}{3} < a + 1$$

y como es $\frac{40}{3} = 13 + \frac{1}{3}$, podemos escribir:

$$a < 13 + \frac{1}{3} < a + 1$$

de donde deducimos que es:

$$a < 13 + \frac{1}{3}$$

De estas últimas expresiones se deduce que es $a = 13$, y sustituyendo este valor en (1), resulta:

$$\frac{13}{10} < \frac{4}{3} < \frac{14}{10}$$

y escribiendo como números decimales, resulta:

$$1{,}3 < \frac{4}{3} < 1{,}4$$

lo que nos dice que 1,3 es el cociente por defecto de 4 y 3 con un error menor que un décimo.

De igual manera se procedería para obtener el cociente con error menor que un centésimo, luego: *para hallar el cociente de dos números con un error menor que 0,1, o 0,01,..., se multiplica el dividendo por 10, 100,..., se halla el cociente entero de la nueva división y el cociente obtenido se divide por 10, 100,...*

Ejemplos:

1º Calcular 8 : 7 con aproximación de 0,1.

$$8:7=\frac{8\times 10}{7}:10=1{,}1$$

2º Calcular 3 : 8 con aproximación de 0,01.

$$3:8=\frac{3\times 100}{8}:100=0{,}37$$

3º Calcular 12 : 7 con aproximación de 0,001.

$$12:7=\frac{12\times 1.000}{7}:1.000=1{,}714$$

16. División de dos números decimales. — Sea la división 5,38 : 1,4. Se tiene:

$$5{,}38:1{,}4=\frac{5{,}38}{1{,}4}$$

y multiplicando ambos términos por 100:

$$=\frac{538}{140}$$

El cociente de 538 y 140 se puede calcular con la aproximación que se desee, luego: *para dividir dos números decimales se multiplican dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya en el número que tenga más cifras decimales. Luego se calcula el cociente con la aproximación que se desee.*

Ejemplos:

$$4{,}5:2{,}38=450:238=1{,}89 \qquad \varepsilon<0{,}01$$

$$0{,}0864:3{,}6=864:36000=0{,}024 \qquad \varepsilon<0{,}001$$

$$3{,}18:0{,}0042=31800:42=757{,}1 \qquad \varepsilon<0{,}1$$

EJERCICIOS

Descomponer las siguientes fracciones decimales en suma de fracciones decimales cuyos denominadores sean las potencias consecutivas de 10:

1) $\frac{1436}{1000}$ 4) $\frac{652}{100.000}$ 7) $\frac{53.748}{10.000}$

2) $\frac{12.489}{10.000}$ 5) $\frac{73}{10.000}$ 8) $\frac{348.452}{100.000}$

3) $\frac{35.406}{1.000}$ 6) $\frac{2}{10.000}$ 9) $\frac{7.124.896}{1.000.000}$

Escribir bajo la forma de número decimal las siguientes fracciones decimales:

10) $\frac{100}{3}$ 13) $\frac{836}{1.000.000}$ 16) $\frac{5}{10^3}$

11) $\frac{246}{10}$ 14) $\frac{42.534}{1.000}$ 17) $\frac{254}{100^2}$

12) $\frac{5}{10.000}$ 15) $\frac{32}{10^2}$ 18) $\frac{4}{100^3}$

Escribir bajo la forma de fracción decimal los siguientes números decimales:

19) 2,56 **22)** 72,06 **25)** 0,0075

20) 0,008 **23)** 4,005 **26)** 635,02

21) 0,406 **24)** 3,1416 **27)** 0,000014

Multiplicar por 10, por 100 y luego por 1.000 cada uno de los siguientes números decimales:

28) 5,34 **31)** 16,034 **34)** 142,34

29) 2,4675 **32)** 0,0000043 **35)** 6,358

30) 0,656 **33)** 58,2 **36)** 0,00006

Dividir por 10, por 100 y luego por 1.000 cada uno de los siguientes números decimales:

37) 2,5 **40)** 0,000007 **43)** 3,0004

38) 34,82 **41)** 0,00834 **44)** 15,678

39) 0,0056 **42)** 248,956 **45)** 0,3

Sumar los siguientes números decimales:

46) 4,32 + 2,0836 + 0,346 + 54,8 + 46,0864

47) 24,375 + 18,28 + 0,00569 + 2,8 + 35,134

48) 58,372 + 583,72 + 5,8372 + 5837,2 + 0,58372

49) 378,25 + 436,085 + 476,92 + 17,8754 + 4,978

50) 0,0534 + 0,2864 + 0,75 + 0,954 + 0,37562

Restar los siguientes números decimales:

51) 836,456 — 67,879

52) 4,0538 — 0,684

53) 0,6783 — 0,08764

54) 2,0095 — 0,896

55) 535,15 — 379,847

Multiplicar los siguientes números decimales:

56) 34,82 × 16,35

57) 0,573 × 0,0458

58) 745,36 × 0,0475

59) 0,00869 × 3,784

60) 18,74 × 0,876

Hallar el cociente con menor error que 1, 0,1 y 0,001 de los siguientes números:

61)	14 : 6	63)	283 : 135
62)	351 : 17	64)	72 : 68

Hallar el cociente con menor error que 0,01 y 0,0001 de los siguientes números:

65)	4,25 : 2,6	68)	0,00856 : 0,384
66)	38,179 : 450,2	69)	2,5 : 0,000437
67)	58 : 3,247	70)	0,258 : 84

CAPITULO II

Transformación de fracciones ordinarias en decimales y viceversa.

17. Definición. — Convertir una fracción ordinaria irreducible en un número decimal, es encontrar otra cuyo denominador sea una potencia de 10. Constituye pues, un caso particular de reducción de una fracción ordinaria a otra cuyo denominador se da.

Los factores primos de las potencias de 10, denominadores de las fracciones decimales, son únicamente 2 y 5. Por lo tanto, el denominador de la fracción dada, debe contener únicamente los factores 2 y 5, o por lo menos uno de éstos.

18. TEOREMA. — *La condición necesaria y suficiente para que una fracción ordinaria irreducible sea igual a una fracción decimal, es que el denominador no contenga más factores primos que el 2 y el 5, o uno de ellos.*

Condición necesaria

H) $\frac{a}{b}$ = frac. irred.; $\frac{a}{b} = \frac{N}{10^k}$; *N* y *k, núm. nat.*

T) $b = 2^m \times 5^n$.

Demostración. — Por hipótesis tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{N}{10^k}$$

y por definición de igualdad de números racionales, resulta:

$$a.10^k = b.N$$

pero:

$$b.N = \dot{b}$$

$$\therefore \quad a.10^k = \dot{b}$$

Siendo a y b, primos entre sí, por ser $\frac{a}{b}$ fracción irreducible por hipótesis, será:

$$10^k = \dot{b}$$

o sea:

$$(2 \times 5)^k = \dot{b}$$

Por la propiedad distributiva de la potenciación, resulta:

$$2^k \times 5^k = \dot{b}$$

Luego, su expresión general es:

$$2^m \times 5^n = b$$

Condición suficiente

$$H) \quad \frac{a}{b} = \text{frac. irreduc.};\ b = 2^m \times 5^n$$

$$T) \quad \frac{a}{b} = \frac{N}{10^k}$$

Demostración. — Considerando la fracción de la hipótesis y sustituyendo b por su igual, tendremos la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \times 5^n}$$

Si se supone que es $m > n$, debe ser, por definición de un número mayor que otro:

$$m - n = d$$

y multiplicando ambos términos de la fracción del segundo miembro por 5^d, se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times 5^d}{2^m .\ 5^n .\ 5^d} = \frac{a \times 5^d}{2^m .\ 5^{n+d}}$$

Pero tenemos que es $m = n+d$, luego:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times 5^d}{2^m \times 5^m} = \frac{a \times 5^d}{(2 \times 5)^m} = \frac{a \times 5^d}{10^m}$$

Generalizando, resulta:

$$\frac{a}{b} = \frac{N}{10^k}$$

Ejemplos: Transformar en decimal exacto las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{20};\ \frac{7}{8};\ \frac{13}{25};\ \frac{9}{80};\ \frac{11}{4}$$

Multipliquemos los dos términos de cada fracción por un número de manera que convierta al denominador en una potencia de 10.

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \times 5} = \frac{3 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{15}{100} = 0{,}15$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2^3} = \frac{7 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{875}{1000} = 0{,}875$$

$$\frac{13}{25} = \frac{13}{5^2} = \frac{2^2 \times 13}{2^2 \times 5^2} = \frac{52}{100} = 0{,}52$$

$$\frac{9}{80} = \frac{9}{2^4 \times 5} = \frac{9 .\ 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{1125}{10^4} = 0{,}1125$$

$$\frac{11}{4} = \frac{11}{2^2} = \frac{11 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{275}{100} = 2{,}75$$

De los ejemplos expuestos se deduce que: *para convertir una fracción ordinaria cuyo denominador contiene únicamente los factores 2 y 5 basta multiplicar los dos términos de la fracción por una potencia de 2 o de 5, de manera que el denominador sea la unidad seguida de ceros. El número decimal equivalente a la fracción ordinaria irreducible, contiene un número de cifras igual al número de unidades, del mayor de los exponentes de los factores 2 y 5, del denominador.*

Siendo la fracción una de las formas de expresar la división entre dos números, puede obtenerse el número decimal equivalente, efectuando directamente la división entre el numerador y denominador.

19. Concepto de límite. — Consideremos ahora una fracción ordinaria irreducible cuyo denominador no sea divisible por 2 y 5. En este caso ninguna potencia de 10 podrá ser múltiplo de su denominador, dando así origen a una *fracción decimal inexacta.* Es decir, que la división del numerador y el denominador no podrá dar nunca un resto cero, pudiéndose en cambio obtener un cociente con la mayor aproximación posible.

Sea la fracción ordinaria $\frac{5}{7}$; el denominador no es divisible por 2 ni por 5, luego no se cumple la condición necesaria y suficiente, por lo tanto, el cociente de 5 y 7 no es exacto, por más cifras decimales que se obtengan.

$$\frac{5}{7} = 0{,}71428\ldots\ldots$$

Si obtenemos los cocientes aproximados de 5 y 7, por defecto y exceso en menos de: 0,1; 0.01; 0,001; 0,0001..., dará lugar a las siguientes sucesiones:

$$0{,}7 < 0{,}71 < 0{,}714 < 0{,}7142 < \ldots\ldots\ldots$$

$$0{,}8 > 0{,}72 > 0{,}715 > 0{,}7143 > \ldots\ldots\ldots$$

Concretándonos a la última aproximación en cada sucesión, podemos anotar que:

$$0{,}7142 < \frac{5}{7} < 0{,}7143$$

además:

$$0{,}7142 - 0{,}7142 = 0{,}0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4}$$

Según esto, la diferencia entre los cocientes aproximados de 5 y 7, es de 0,0001. Es decir, que la fracción ordinaria irreducible $\frac{5}{7}$., difiere en menos de $\frac{1}{10^4}$ de 0,7142 y en más de $\frac{1}{10^4}$ de 0,7143.

En forma general diremos que se tendrá una mayor aproximación de $\frac{1}{10^n}$ cuando n tiende al infinito. En este caso se dice que la fracción $\frac{5}{7}$, es el límite al cual tienden las fracciones decimales 0,7142... y 0,7143... cuando el exponente n crece al infinito.

20. Expresión numérica con infinitas cifras decimales. — Sea la fracción ordinaria $\frac{9}{13}$. Como en el denominador no figuran los factores 2 y 5, podemos afirmar que no será posible obtener un cociente exacto:

$$\frac{9}{13} = 0{,}692307692307\ldots\ldots$$

Al efectuar la división indicada con el fin de obtener la aproximación decimal deseada, observamos que al partir de cierto número de divisiones sucesivas, llega a repetirse un resto, originando en el cociente, la sucesión de un grupo de cifras decimales. El cociente así obtenido 0,692307..., constituye un número decimal compuesto de un número infinito de cifras decimales, no siendo por consiguiente una fracción decimal. Esta expresión numérica con infinitas cifras decimales, ha dado lugar a la siguiente:

21. CONVENCIÓN. — *Una expresión numérica con infinitas cifras decimales no representa una fracción decimal, pero convendremos en llamarla fracción decimal inexacta.*

22. Fracciones decimales inexactas periódicas, puras y mixtas. Definiciones. — La fracción decimal inexacta, se denomina también *fracción decimal periódica,* porque a partir de una de sus cifras, se repiten en el mismo orden e indefinidamente las cifras que la componen.

El grupo de cifras que se repite se llama *período.*

0,9292...; 5,666...; 7,283131...; 0,144...

Las fracciones decimales inexactas, comprenden dos clases: *fracción periódica pura* y *fracción periódica mixta.*

Se llama fracción decimal *periódica pura,* a aquella cuyo período comienza en los décimos.

Ejemplos: 0,666.....; 0,2323.....; 3,5454.....

Sea la fracción ordinaria irreducible $\frac{3}{11}$. Su denominador no contiene a los factores 2 y 5.

$$\begin{array}{l|l}
30 & 11 \\ \hline
\;\,80 & 0{,}272727\ldots\ldots \\
\;\;\,30 & \\
\;\;\;\,80 & \\
\;\;\;\;\,30 & \\
\;\;\;\;\;\,80 & \\
\;\;\;\;\;\;\,3 & \\
\;\;\;\;\;\;\ldots\ldots &
\end{array}$$

Como vemos, y de acuerdo a la definición, la expresión numérica del cociente es una fracción decimal inexacta periódica pura; luego: *toda fracción ordinaria irreducible, cuyo denominador no contiene a los factores primos 2 y 5, tiene por equivalente a una fracción decimal periódica pura.*

Se llama fracción decimal *periódica mixta,* a aquella cuyo período no comienza inmediatamente después de la coma decimal:

0,1333....; 9,473232....; 0,4958787.....

La parte decimal que antecede al período se denomina *parte no periódica.* Así, en 0,437272.... la parte no periódica es 43, y 72 el período que se repite.

Sea la fracción ordinaria irreducible $\frac{11}{12}$. Su denominador contiene además de uno de los factores necesarios 2, el factor distinto 3.

En efecto:

$$\frac{11}{12} = \frac{11}{2^2 \times 3} = 0{,}91666.....$$

La expresión numérica del cociente es, por definición, una fracción decimal periódica mixta. Observando vemos también que la parte no periódica se compone de tantas cifras como unidades tiene el exponente del factor primo 2; luego: *toda fracción ordinaria irreducible cuyo denominador contiene además de los factores primos 2 y 5, o ambos a la vez, otro u otros factores distintos, tiene por decimal equivalente a una fracción decimal periódica mixta, constando la parte no periódica de tantas cifras como unidades tenga el mayor de los exponentes de 2 y 5.*

Según esto, la expresión general de la fracción ordinaria generatriz de la periódica mixta, es:

$$\frac{a}{e \times 2^m \times 5^n}$$

en la que e, es el factor distinto y siendo $m > n$.

23. Notación. — Para simplificar la notación de las fracciones decimales periódicas, es de práctica escribir solamente un período señalado con un arco. Así:

$$0{,}2727.... = 0{,}\overset{\frown}{27}; \quad 0{,}395454.... = 0{,}39\overset{\frown}{54}$$

Esta notación la emplearemos en lo sucesivo.

24. Reducción de una fracción ordinaria a decimal. — Hemos visto ya que toda fracción ordinaria expresa en forma especial un cociente indicado, una división por efectuar, o un número racional.

Según esto y teniendo presente los principios anteriores, una fracción ordinaria se transforma en decimal, efectuando la división indicada; luego: *para reducir una fracción ordinaria a decimal, se divide el numerador por el denominador, obteniéndose así en el cociente una fracción decimal con parte entera o sin ella y con la aproximación deseada. El cociente podrá ser una fracción decimal exacta o decimal periódica, según los factores que contenga el denominador de la fracción ordinaria.*

Ejemplos. — Transformar en decimal las fracciones ordinarias siguientes:

$$\frac{7}{4};\ \frac{9}{11};\ \frac{7}{15}$$

1) $$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 30 & 1,75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array} \qquad \therefore \qquad \frac{7}{4} = 1,75$$

La fracción decimal equivalente es una fracción decimal exacta, por contener el denominador 4, el factor único 2, de las potencias de 10.

2) $$\begin{array}{r|l} 90 & 11 \\ \cline{2-2} 20 & 0,8181\ldots. \\ 90 & \\ 20 & \\ 9 & \\ \ldots. & \end{array} \qquad \therefore \qquad \frac{9}{11} = 0,\widehat{81}$$

La fracción decimal equivalente es, por definición, una fracción periódica pura, pues 11 no contiene a 2 y 5.

3) $$\begin{array}{r|l} 70 & 15 \\ \cline{2-2} 100 & 0,4666\ldots. \\ 100 & \\ 100 & \\ 10 & \\ \ldots\ldots & \end{array} \qquad \therefore \qquad \frac{7}{15} = 0,4\widehat{6}$$

La fracción decimal equivalente, es una fracción periódica mixta, puesto que el denominador 15, contiene además del factor 5, el factor distinto 3.

25. Reducción de una fracción decimal exacta a ordinaria. — Sea la fracción decimal 0,92.

Por lo visto en (8), podemos escribir:

$$0{,}92 = \frac{92}{100}$$

y simplificando se obtiene:

$$= \frac{23}{25}$$

y como se procedería de igual manera con otro ejemplo, diremos:

Para reducir una fracción decimal exacta a ordinaria, se pone como numerador la fracción decimal y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal; luego se simplifica el resultado.

Ejemplos: Determinar la generatriz de las siguientes fracciones decimales exactas: 0,375; 3,96.

1) $$0{,}375 = \frac{375}{1000} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

2) $$3{,}96 = \frac{396}{100} = \frac{99}{25}$$

26. Reducción de una fracción decimal periódica pura a ordinaria. — Sea la fracción $0{,}\overset{\frown}{27}$, de parte entera nula.

Designemos por f a su fracción ordinaria generatriz, de manera que:

$$f = 0{,}\overset{\frown}{27}$$

Multiplicando la igualdad que resulta por la potencia de 10, correspondiente al número de cifras del período, a fin de que el primer período ocupe el lugar de los enteros, se tiene:

$$100\,f = 27{,}\overset{\frown}{27}$$

pero:

$$f = 0{,}\overset{\frown}{27}$$

y por la propiedad uniforme de la sustracción, resulta:

$$100\,f - f = 27,\widehat{27} - 0,\widehat{27}$$

$$99\,f = 27$$

de donde,

$$f = \frac{27}{99}$$

y como es:

$$f = 0,\widehat{27}$$

por el carácter transitivo de la igualdad, se tiene:

$$0,\widehat{27} = \frac{27}{99}$$

de donde se deduce que: *la generatriz de una fracción decimal periódica pura, cuya parte entera es nula, es una fracción ordinaria que tiene por numerador el período y por denominador el número formado por tantos nueves como cifras tiene el período.*

Ejemplos: Determinar la generatriz de las fracciones periódicas puras: $0,\widehat{75}$; $0,\widehat{6}$; $0,\widehat{573}$; $0,\widehat{07}$; $0,\widehat{3087}$

1) $$0,\widehat{75} = \frac{75}{99} = \frac{25}{33}$$

2) $$0,\widehat{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

3) $$0,\widehat{573} = \frac{573}{999} = \frac{191}{333}$$

4) $$0,\widehat{07} = \frac{7}{99}$$

5) $$0,\widehat{3087} = \frac{3087}{9999} = \frac{1029}{3333} = \frac{343}{1111}$$

Supongamos ahora que la fracción decimal periódica pura, tenga parte entera, tal como $7,\widehat{32}$.

De la misma manera tenemos que:

$$f = 7,\widehat{32} = 7 + 0,\widehat{32}$$

pero, por la demostración anterior, es:

$$0,\widehat{32} = \frac{32}{99}$$

y sustituyendo en la anterior tenemos:

$$f = 7 + \frac{32}{99}$$

o sea:

$$f = 7 \frac{32}{99}$$

luego: *la fracción ordinaria equivalente de la decimal periódica pura con parte entera, se obtiene agregando a la parte entera la generatriz correspondiente de la parte decimal.*

27. Reducción de una fracción decimal periódica mixta a ordinaria. — Sea la fracción $0{,}7\overset{\frown}{48}$ de parte entera nula. — Designemos por f a su fracción ordinaria generatriz de manera que:

$$f = 0{,}7\overset{\frown}{48}$$

Multiplicando ambos miembros por 1000 y después por 10, es decir por la potencia de 10 correspondiente al número de cifras que tiene el período más la parte no periódica, a fin de que el primer período ocupe el lugar de los enteros y por la potencia de 10, como cifras tiene el anteperíodo, se tiene:

$$1000\ f = 748{,}\overset{\frown}{48}$$
$$10\ f = 7{,}\overset{\frown}{48}$$

Con el propósito de eliminar la parte decimal que se repite, restemos ordenadamente estas igualdades:

$$1000 f - 10 f = 748{,}\overset{\frown}{48} - 7{,}\overset{\frown}{48}$$
$$990 f = 748 - 7$$

de donde:

$$f = \frac{748 - 7}{990}$$

y como es:

$$f = 0{,}7\overset{\frown}{48}$$

por el carácter transitivo de la igualdad, se tiene:

$$0{,}7\overset{\frown}{48} = \frac{748 - 7}{990}$$

de aquí se deduce que: *la generatriz de una decimal periódica mixta, cuya parte entera es nula, es una fracción ordinaria que tiene por* *numerador la parte no periódica seguida del período menos la parte no periódica, y como denominador el número formado por tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.*

Ejemplos. — Determinar la generatriz de las fracciones decimales periódicas mixtas: $0{,}7\overset{\frown}{3}$; $0{,}93\overset{\frown}{57}$; $0{,}68\overset{\frown}{924}$.

1) $$0{,}7\overset{\frown}{3} = \frac{73-7}{90} = \frac{66}{90} = \frac{11}{15}$$

2) $$0{,}93\overset{\frown}{57} = \frac{9357-93}{9900} = \frac{9264}{9900} = \frac{772}{825}$$

3) $$0{,}68\overset{\frown}{924} = \frac{68924-68}{99900} = \frac{68856}{99900} = \frac{5738}{8325}$$

Si la fracción decimal periódica mixta. tiene parte entera, se suma a ésta la generatriz correspondiente de la parte decimal.

Ejemplo:

$$f = 6{,}4\overset{\frown}{72} = 6 + 0{,}4\overset{\frown}{72} = 6 + \frac{472-4}{990} = 6\ \frac{26}{55}$$

28. Significado de las fracciones decimales periódicas puras o mixtas cuyo período es nueve. — Cuando en las fracciones decimales periódicas, el período se halla integrado por nueves, constituye un caso excepcional, en las cuales no pueden aplicarse las reglas ya establecidas para determinar la fracción ordinaria generatriz, lo que podemos verificar en los ejemplos siguientes:

1) $$0{,}\overset{\frown}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

2) $$0{,}85\overset{\frown}{9} = \frac{859-85}{900} = \frac{774}{900} = \frac{86}{100} = 0{,}86$$

Como podemos ver, al aplicar la regla correspondiente en cada uno de estos ejemplos, nos da un cociente exacto.

Pero:

$$0{,}\overset{\frown}{9} \neq 1 \text{ y } 0{,}85\overset{\frown}{9} \neq 0{,}86$$

Luego: *Las fracciones decimales periódicas cuyo período esté formado por nueves, no tienen generatriz, pero de acuerdo al concepto de límite, ellas tienden a la unidad de orden superior.*

En efecto:

$$0{,}9 < 0{,}99 < 0{,}999 < 0{,}9999 < \ldots < 1$$

el límite de la sucesión es 1.

$$0{,}859 < 0{,}8599 < 0{,}85999 < \ldots < 0{,}86$$

el límite de la sucesión es 0,86.

De aquí la siguiente:

29. CONVENCIÓN. — *La fracción decimal periódica pura cuyo período es 9, se sustituye por la unidad y si la fracción decimal periódica es mixta, se aumenta en una unidad la parte no periódica.*

GENERALIDADES SOBRE LOS NUMEROS IRRACIONALES

30. Raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto, con menor error que un décimo, un centésimo, un milésimo, etc. — Se ha visto ya, que la raíz cuadrada de un número entero que no es cuadrado perfecto, si no es un número natural, tampoco puede ser fraccionario y que la raíz cuadrada exacta sólo es posible cuando el radicando es un cuadrado perfecto. En consecuencia, nuestro problema constituye un caso particular de la determinación de la raíz cuadrada aproximada de un número con error menor de un *enésimo,* pudiendo ser entonces *n,* igual a 10, 10^2, 10^3... etc. La raíz buscada estaría comprendida entre dos cuadrados perfectos consecutivos, es decir por defecto y exceso de una unidad decimal tan pequeña como se desee.

Sea por ejemplo, extraer la raíz cuadrada de 3, con menor error que 0,1.

Se debe tener:

$$\left(\frac{m}{10}\right)^2 < 3 < \left(\frac{m+1}{10}\right)^2$$

$$\frac{m^2}{10^2} < 3 < \frac{(m+1)^2}{10^2}$$

Consideremos solamente la expresión por defecto:

$$\frac{m^2}{10^2} < 3$$

Multiplicando ambos miembros por 10^2, resulta:

$$m^2 < 3 \times 10^2$$

y extrayendo la raíz cuadrada:

$$m < \sqrt{3 \times 10^2}$$

Dividiendo ahora por 10 ambos miembros, la raíz por defecto queda aproximada en menos de un décimo,

$$\therefore \quad \frac{m}{10} < \frac{\sqrt{3 \times 10^2}}{10}$$

Efectuando los cálculos:

$$\frac{\sqrt{3 \times 10^2}}{10} = \frac{\sqrt{300}}{10} = \frac{17}{10} = 1{,}7$$

de donde:

$$\sqrt{3} = 1{,}7 \text{ ; con } \varepsilon < 0{,}1$$

Luego: *para hallar la raiz cuadrada de un número natural con un error menor que* 0,1, 0,01, 0,001,..., *se multiplica el número por* 10^2, 100^2 *o* 1000^2..., *según la aproximación que se pida, y luego se halla la raiz entera del producto, dividiendo el resultado por 10, 100, 1000, etc.*

Ejemplos: Calcular con menor error que 0,1 la raíz cuadrada de 5.

$$\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5 \times 10^2}}{10} = \frac{\sqrt{500}}{10} = \frac{22}{10} = 2{,}2$$

$$\therefore \quad \sqrt{5} = 2{,}2; \text{ con } \varepsilon < 0{,}1$$

2) Calcular la $\sqrt{13}$, con menor error de 0,01.

$$\sqrt{13} = \frac{\sqrt{13 \times 100^2}}{100} = \frac{\sqrt{130000}}{100} = \frac{360}{100} = 3{,}60$$

$$\therefore \quad \sqrt{13} = 3{,}60; \text{ con } \varepsilon < 0{,}01$$

3) Calcular $\sqrt{321}$, con menor error de 0,001.

$$\sqrt{321} = \frac{\sqrt{321 \times 1000^2}}{10000} = \frac{\sqrt{321000000}}{1000} = \frac{17916}{1000} = 17{,}916$$

$$\therefore \quad \sqrt{321} = 17{,}916; \text{ con } \varepsilon < 0{,}001.$$

31. Necesidad de la creación de los números irracionales. — En el campo de los números racionales, no es posible obtener la raíz exacta de los números naturales que no sean potencias perfectas del mismo grado que indique el índice.

En efecto:

$$\sqrt{9} = 3, \quad \text{pues,} \quad 3^2 = 9$$

Pero carecería de sentido el decir raíz cuadrada de 5, puesto que después de sucesivos ensayos comprobaríamos la imposibilidad de obtener un número racional que elevado al cuadrado nos diera 5.

En los ejemplos anteriores hemos podido verificar que la raíz cuadrada con mayor aproximación de un número natural que no es cuadrado perfecto, es una expresión decimal compuesta de un número ilimitado de cifras decimales y que no llega nunca a constituir una fracción decimal exacta ni periódica.

Para que estas raíces sean posibles, los matemáticos se han visto obligados a crear nuevos números, que son los *números irracionales o inconmensurables,* ampliando así el campo numérico.

Según esto, los números irracionales carecen de numeración propia y se expresan por medio de números comensurables que es preciso determinar con la aproximación que se quiera.

32. Noción de número irracional. — Consideremos el número racional 5. Con respecto al número 5 elegido, podemos dividir a los números racionales en tres clases. En la primera estarán todos los números menores que el 5; en la segunda todos los números mayores que el 5, y en la tercera el mismo número 5.

Como todo número racional es menor, mayor o igual que el número 5 dado, podemos decir que, de acuerdo con la clasificación anterior, el número 5 es el *elemento de separación* entre los números menores y mayores que 5, pues 5 es mayor que todos los de la primera clase y menor que todos los de la segunda.

Consideremos ahora el número 2 y pongamos en la primera clase todos los números cuyos cuadrados sean menores que 2, y en la segunda clase todos los números cuyos cuadrados sean mayores que 2. Esas dos clases de números no tienen elemento racional de separación, pues sabemos que no hay ningún número racional que elevado al cuadrado de 2.

Calculando las raíces cuadradas de 2 por defecto y por exceso, con aproximaciones sucesivas de 0,1, 0,01, 0,001, . . ., tendremos las siguientes sucesiones de números:

$$A = 1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ \ldots.$$

$$B = 2,\ 1{,}5,\ 1{,}42,\ 1{,}415,\ 1{,}4143,\ \ldots.$$

El cuadrado de cualquier número de la sucesión A es menor que 2, mientras que el cuadrado de cualquier número de la sucesión B es mayor que 2. Los números de la sucesión A van aumentando, mientras que los de la B van disminuyendo; es decir, la primera es una sucesión creciente y la segunda es decreciente.

La diferencia entre cada dos términos correspondientes de ambas sucesiones es:

$$\begin{gathered} 2 - 1 = 1 \\ 1{,}5 - 1{,}4 = 0{,}1 \\ 1{,}42 - 1{,}41 = 0{,}01 \\ 1{,}415 - 1{,}414 = 0{,}001 \\ 1{,}4143 - 1{,}4142 = 0{,}00001 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Como puede observarse, las diferencias son cada vez menores, de manera que pueden llegar a ser tan pequeñas como se quiera.

Si dos sucesiones cumplen las condiciones que cumplen la A y la B, *definen un número irracional.* En el caso del ejemplo, el número irracional definido es $\sqrt{2}$.

33. Representación de los números irracionales. — Los números irracionales o inconmensurables, están compuestos por un número ilimitado de cifras decimales no periódicas y se las representa con un número decimal de la aproximación que se desee, poniendo a continuación puntos suspensivos para indicar que las cifras decimales siguen indefinidamente.

Ejemplos:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots;\quad \sqrt{3} = 1{,}732\ldots;\quad \sqrt{5} = 2{,}236\ldots$$

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots;\qquad e = 2{,}718281\ldots$$

En general, son números irracionales las raíces cuadradas de los números primos. El número π es la razón entre la circunferencia y el diámetro; e es la base de los logaritmos neperianos.

Los números irracionales provienen también de la razón de dos segmentos. Así, la razón entre la diagonal de un cuadrado y su lado es $\sqrt{2}$; la razón entre el lado del triángulo equilátero inscrito y el radio es $\sqrt{3}$, etc. :

$$\frac{d_4}{l_4} = \sqrt{2} \quad ; \quad \frac{l_3}{r} = \sqrt{3}$$

34. Números reales. — Se llaman *números reales* a los formados por los números racionales con los irracionales.

Recordando los números conocidos hasta ahora, podemos establecer el siguiente cuadro sinóptico:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\textit{Números naturales}\\ \textit{Números negativos}\end{array}\right\}\textit{Números enteros}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\textit{Núm. fracc. puros}\end{array}\right\}\textit{Números racionales}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\textit{Números irracionales}\end{array}\right\}\textit{Números reales}$$

EJERCICIOS

Convertir en números decimales las siguientes fracciones ordinarias, multiplicando ambos términos por un mismo número:

71) $\frac{7}{2}$ 75) $\frac{19}{25}$

72) $\frac{5}{4}$ 76) $\frac{13}{50}$

73) $\frac{5}{8}$ 77) $\frac{24}{125}$

74) $\frac{3}{5}$ 78) $\frac{16}{20}$

Convertir en números decimales las siguientes fracciones ordinarias (dar los valores con 8 cifras decimales):

79) $\frac{4}{9}$ 83) $\frac{56}{39}$

80) $\frac{5}{11}$ 84) $\frac{4}{37}$

81) $\frac{4}{33}$ 85) $\frac{41}{21}$

82) $\frac{17}{7}$ 86) $\frac{1}{91}$

Idem, ídem:

87) $\frac{11}{6}$ 91) $\frac{23}{42}$

88) $\frac{3}{14}$ 92) $\frac{86}{65}$

89) $\frac{124}{55}$ 93) $\frac{5}{66}$

90) $\frac{209}{70}$ 94) $\frac{39}{110}$

Convertir en fracciones ordinarias los números decimales siguientes:

95)	0,32	99)	0,0084
96)	8,375	100)	2,8
97)	6,1625	101)	132,56
98)	0,064	102)	0,00032

Idem, ídem:

103)	0,2222 ...	107)	0,927927 ...
104)	0,363636 ...	108)	12,252525...
105)	2,135135 ...	109)	0,03690369 ...
106)	6,727272 ...	110)	2,857142857142 ..

Idem, ídem:

111)	0,4222...	115)	5,3205454 ...
112)	0,840909 . .	116)	428,5666...
113)	0,48932932 ..	117)	0,00125125 ...
114)	0,023636 ...	118)	2,08383383...

Calcular, con menor error que 1 y 0,01, la raíz cuadrada de los números siguientes:

119)	18	122)	875
120)	35	123)	40
121)	203	124)	156

Idem, ídem, con menor error que 0,001:

125)	8	127)	38
126)	12	128)	92

CAPITULO III

Magnitudes.

35. Concepto de igualdad. — Varios entes son *iguales* cuando se pueden reemplazar unos a otros. Al reemplazarse se tiene en cuenta sólo una cualidad común, prescindiendo de todas las demás. Si no se indica cual es la cualidad que se considera aisladamente, no tiene sentido la igualdad.

Así, si decimos que dos monedas son iguales, pueden serlo en cuanto al *color,* en cuanto al *tamaño,* en cuanto al *peso,* en cuanto al *valor adquisitivo,* etc.

Por consiguiente, la igualdad absoluta, o *identidad,* sólo existe entre una cosa y sí misma.

Recíprocamente, si dos entes son iguales, tienen una *cualidad común;* así, si dos conjuntos son coordinables tienen una cualidad común, que es el mismo *número natural;* el concepto de *argentino* encierra la cualidad común de todas las personas nacidas en la Argentina, etc.

Este concepto de la igualdad *por abstracción* cumple los siguientes caracteres lógicos:

1º *Carácter idéntico:* $A = A$;

2º *Carácter recíproco:* Si es $A = B$, es $B = A$;

3º *Carácter transitivo:* Si es $A = B$ y $B = C$, es $A = C$.

Si en un sistema de entes se verifican los tres caracteres lógicos *idéntico, recíproco* y *transitivo,* esos entes son iguales en algo, es decir, tienen una cualidad común.

36. Cantidades. — Se llama *cantidad* a todo *ente* de un sistema de entes, entre los cuales puede definirse la *igualdad* y la *suma.*

Decir que puede definirse la igualdad, significa que se cumplen los tres caracteres *idéntico, recíproco* y *transitivo;* y que puede definirse la suma significa que se cumplen las propiedades de la suma: *uniforme, conmutativa, asociativa* y *monótona.*

Así, son cantidades los números naturales, los segmentos, los arcos de circunferencia, los ángulos, los polígonos, etc.

Representaremos a las cantidades con las letras mayúscula: *A, B, C, D, ...*

37. **Cantidades homogéneas.** — Se llaman *cantidades homogéneas* a las cantidades que tienen una cualidad común, es decir, que pertenecen a un mismo sistema de entes.

Así, en el conjunto de los ángulos, cada ángulo es una cantidad, y varios ángulos son cantidades homogéneas.

Las cantidades que pertenecen a distintos sistemas de entes se llaman *cantidades heterogéneas,* como los números y los ángulos.

38. **Magnitudes.** — Se llama *magnitud* a la cualidad abstracta respecto a la cual las cantidades homogéneas se pueden considerar iguales o desiguales.

Así, son magnitudes: la *longitud,* o cualidad común de los segmentos iguales; la *superficie,* o cualidad común de las figuras equivalentes; el *volumen,* o cualidad común de los cuerpos equivalentes; la *forma,* o cualidad común de las figuras semejantes, etc.

39. **Postulado de la divisibilidad.** — *Dada una cantidad* **A** *y un número* **n**, *existe siempre otra cantidad* **U**, *tal, que es* $\mathbf{n} . \mathbf{U} = \mathbf{A}$.

Mediante este postulado admitimos que una cantidad cualquiera se puede dividir material o idealmente en partes iguales.

40. **Postulado de Arquímedes.** — *Si* **A** y **B** *son dos cantidades homogéneas y* **A** *no es nula, existe siempre un número natural* **n** *tal, que* $\mathbf{n} . \mathbf{A} > \mathbf{B}$.

41. **Postulado de ordenación.** — *Si tres cantidades homogéneas son tales que es* $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ *y* $\mathbf{B} < \mathbf{C}$, *se admite que es* $\mathbf{A} < \mathbf{B} < \mathbf{C}$; *y si es* $\mathbf{A} < \mathbf{B}$, *también* $\mathbf{B} > \mathbf{A}$.

42. **Cantidades comparables.** — Se llaman *cantidades comparables* a las cantidades homogéneas que cumplen las condiciones de los postulados de la *divisibilidad,* de *Arquímedes* y de *ordenación.*

Así, son cantidades comparables los números racionales, los segmentos de recta, los ángulos, etc.

43. Comparación de cantidades. Casos que pueden presentarse. — Dadas dos cantidades homogéneas, A y B, puede presentarse uno de estos casos:

1º La cantidad A es la suma de un número exacto de veces la cantidad B, es decir

$$A = \underbrace{B + B + \ldots + B}_{m} \quad \therefore \quad A = m.B$$

En tal caso, el número de sumandos, m, es un *número natural,* y A un múltiplo de B.

2º La cantidad A no es la suma de un número exacto de veces la cantidad de B, pero sí es la suma de un número exacto de veces de una parte alícuota de la cantidad B; es decir, que

$$A = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{m} \qquad (1)$$

siendo

$$B = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{n}.$$

De la expresión $B = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{n}$, se deduce que b es la enésima parte de B, o sea

$$b = \frac{B}{n}$$

de manera que sustituyendo en la expresión (1), obtenemos:

$$A = \underbrace{\frac{B}{n} + \frac{B}{n} + \ldots + \frac{B}{n}}_{n}$$

luego:

$$A = m. \frac{B}{n}$$

El número $\frac{m}{n}$ formado por el par de números m y n, es un *número racional.*

3º La cantidad A no es la suma de un número exacto de veces la cantidad B, ni de ninguna parte alícuota de B. Entonces el número formado es un *número irracional* y de acuerdo a lo explicado en el capítulo anterior deberá considerarse como número decimal con la aproximación que se desee.

44. Producto de una cantidad por un número. — Al multiplicar una cantidad A por un número, puede ser que éste sea un número *natural,* o *racional,* o *irracional.*

1º *Número natural.* — Se llama *producto de una cantidad por un número natural,* a la suma de tantas cantidades iguales a la dada como unidades tiene el número. Así, el producto de A y m es:

$$A \cdot m = \underbrace{A + A + A + \ldots + A}_{m}$$

2º *Número racional positivo.* — Se llama *producto de una cantidad por un número racional positivo,* a la suma de tantos sumandos iguales como indique el numerador, de la cantidad dada dividida en tantas partes como indique el denominador. Así, el producto de A y $\frac{m}{n}$ es:

$$A \cdot \frac{m}{n} = \underbrace{\frac{A}{n} + \frac{A}{n} + \ldots + \frac{A}{n}}_{m}$$

3º *Número irracional.* — Se llama *producto de una cantidad por un número irracional,* al producto de la misma cantidad por el número decimal que se aproxime al número irracional dado con menor error que un décimo, un centésimo, etc. Así, el producto de A y el número irracional π es:

$$A \cdot \pi = \begin{cases} A \cdot 3 = A + A + A & ; \ \varepsilon < 1 \\ A \cdot 3{,}1 = A \cdot \dfrac{31}{10} & ; \ \varepsilon < 0{,}1 \\ A \cdot 3{,}14 = A \cdot \dfrac{314}{100} & ; \ \varepsilon < 0{,}01 \\ A \cdot 3{,}141 = A \cdot \dfrac{3141}{1000} & ; \ \varepsilon < 0{,}001 \\ \ldots\ldots \ldots \ldots\ldots & \\ \ldots\ldots \ldots \ldots\ldots & \end{cases}$$

45. Cociente de una cantidad por un número. — Se llama *cociente* de una cantidad por un número (natural, racional o irracional), a la cantidad que multiplicada por el número dado da de producto una cantidad igual a la propuesta.

El cociente de la cantidad A y el número n es otra cantidad B, tal que $B.n = A$.

46. POSTULADO. — *Dadas dos cantidades homogéneas, existe siempre un número entero, fraccionario o irracional, y sólo uno, tal, que la primera es igual al producto de dicho número por la otra.*

Es decir, que dadas dos cantidades A y B, homogéneas, existe un número n tal, que es $A = B$.

Recíprocamente: *dada una cantidad y un número, existe siempre una cantidad, homogénea con la dada, que multiplicada por el número da un producto igual a la cantidad dada.*

Es decir, que dada la cantidad A y el número n, existe una cantidad B, tal, que es $A = n.B$.

47. Razón de dos cantidades. Medida de una cantidad. — Se llama *razón* de dos cantidades homogéneas, a su cociente. La primer cantidad se llama *antecedente* y *consecuente* la segunda.

La razón de las cantidades A y B se indica $\frac{A}{B}$, o bien $A : B$.

Por el postulado anterior, dadas las cantidades A y B, su razón $A : B$ deberá ser un número n, pues es $A = B.n$, *es decir:*

$$\frac{A}{B} = n$$

Se llama *medida de una cantidad*, a la razón entre ésta y otra cantidad arbitraria, homogénea con la dada, llamada *unidad de medida*. Si la cantidad es A y U la unidad de medida, se tendrá que la medida de A es:

$$\frac{A}{U} = a \quad \text{pues es} \quad A = U.a.$$

48. Valor de una cantidad con respecto a una unidad. Número concreto. — Se llama *valor de una cantidad con respecto a una unidad*, el producto de la unidad de medida por la medida de la cantidad. Si la medida de la cantidad A con respecto a la unidad U es a, el valor de la cantidad A es $U.a$:

$$\frac{A}{U} = a = \textit{medida de } A$$

Valor de $A = U . a$

El valor de una cantidad es constante, pudiendo variar la unidad elegida. Así, si tomamos un segmento A y una unidad U, fig. 1, tenemos:

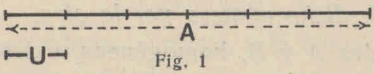
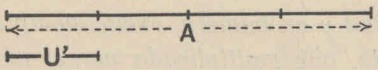


Fig. 1

$$\frac{A}{U} = 6 = \textit{medida de } A \textit{ respecto a } U$$



Valor de $A = 6 \times U$ (1)

Fig. 2

Pero si el segmento es el mismo y la unidad de medida es U', fig. 2, tenemos:

$$\frac{A}{U'} = 4 = \textit{medida respecto a } U'$$

Valor de $A = 4 \times U'$ (2)

Las expresiones (1) y (2) nos dicen que es

$$\textit{valor de } A = 6 \times U = 4 \times U' = \textit{constante.}$$

Se llama *número concreto,* al valor de una cantidad respecto a una unidad, es decir, a los números que designan la magnitud de las cantidades que miden.

Ejemplos: 5 $; 14 m.; 20°; 2,5 Kg.

Se llama *número* abstracto al número que expresa la medida de la cantidad dada sin especificar la unidad de medida. Así, en los ejemplos últimos, son números abstractos 5, 14, 20 y 2,5.

49. TEOREMA. — *La razón de dos cantidades es igual a la de sus medidas respecto de una misma unidad.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} \textit{Cantidad } A;\ a = \textit{medida de } A \textit{ respecto a } U. \\ \textit{Cantidad } B;\ b = \textit{medida de } B \textit{ respecto a } U. \end{array} \right.$$

$$\text{T}\ )\ \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

Demostración. — Por hipótesis tenemos:

$$\frac{A}{U} = a$$

y por definición de razón de dos cantidades (**47**), debe ser:

$$A = U.a$$

y por definición de cociente de una cantidad y un número (**45**), resulta:

$$\frac{A}{a} = U \qquad (1)$$

Además, por hipótesis, es $\frac{B}{U} = b$, y procediendo análogamente, tenemos:

$$\frac{B}{b} = U \qquad (2)$$

Como los segundos miembros de (1) y (2) son iguales, resulta:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$

Si consideramos que A es el dividendo, a el divisor y la cantidad $\frac{B}{b}$ el cociente, por definición de cociente de una cantidad por un número, (**45**), es

$$A = \frac{B}{b}.a$$

y por definición de producto de una cantidad por un número, (**44**, 2º), en el segundo miembro se tiene:

$$A = B.\frac{a}{b}$$

y por definición de razón de dos cantidades, (**47**), tenemos, finalmente:

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

50. Observación. — Nótese que como es $A = U.a$, y $B = U.b$, la razón de A y B es

$$\frac{A}{B} = \frac{U.a}{U.b}$$

y como el segundo miembro debe ser $\frac{a}{b}$, significa que U que multiplica y U que divide han desaparecido, operándose una verdadera *simplificación de cantidades iguales que multiplican y dividen.*

Ejemplo:

$$\frac{14\,Hm}{28\,Hm} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$$

51. TEOREMA. —*El producto de la razón de una cantidad a otra por la razón de esta última a una tercera, es igual a la razón de la primera y la tercera.*

$$H \left\{ \frac{A}{B} \text{ y } \frac{B}{C} \textit{ razones dadas} \right. \qquad T \left\{ \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{C} \right.$$

Demostración. — Sean a, b y c las medidas de A, B y C respecto a una unidad común. Entonces, por el teorema anterior:

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{b}{c}$$

y multiplicando ordenadamente, obtenemos:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \qquad (1)$$

Por el teorema anterior, también es:

$$\frac{A}{C} = \frac{a}{c} \qquad (2)$$

y como los segundos miembros de (1) y (2) son iguales, resulta:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{C}$$

52. OBSERVACIÓN. — Nótese que, para obtener el segundo miembro, en el primero se ha *simplificado* la cantidad B.

SISTEMA METRICO DECIMAL

53. Definiciones. — Se llama *sistema de medidas* al conjunto de unidades destinadas a medir las diversas magnitudes.

El *sistema métrico decimal* es el conjunto de pesas y medidas que tiene por base el *metro,* y que sirven para medir las magnitudes usuales. El sistema métrico se llama *decimal* porque sus diversas unidades siguen los principios de la numeración decimal.

54. Reseña histórica. — A fines del siglo XVIII los sistemas de medidas variaban de país a país, y en un mismo país había tantos sistemas como provincias o regiones tuviera. Todo eso dificultaba la relaciones comerciales.

El sistema métrico data de la Revolución Francesa de 1789. La Asamblea Constituyente, en Mayo de 1790, decretó la unificación de las pesas y medidas y una comisión nombrada por la Academia de Ciencias fué la encargada de realizarlo.

Con el propósito de que el nuevo sistema fuera invariable y no tuviera carácter nacional, la comisión eligió como unidad de longitud a la diezmillonésima parte del cuarto del meridiano terrestre, que fué llamada *metro.*

Dos comisiones, llamadas del *metro* y del *kilogramo,* tuvieron la misión de establecer el *metro-patrón* y el *kilogramo-patrón.*

El metro-patrón fué fijado una vez que se hicieron numerosas mediciones de arcos de meridiano, cuyos resultados diferían siempre, hasta que dos astrónomos, *Delambre* y *Méchain,* midieron el arco de meridiano comprendido entre *Dunkerque* y *Barcelona,* trabajo que terminaron *Arago* y *Biot,* prolongando la medición, que duró siete años, hasta las *Islas Baleares.*

El kilogramo-patrón fué establecido por *Lefevre-Gineau,* quien después de muchas mediciones de gran precisión, determinó el peso de un decímetro cúbico de agua pura a la temperatura de su densidad máxima (4°).

Dos modelos de platino se construyeron, uno para el *metro* y otro para el *kilogramo,* los que fueron depositados en el *Archivo de París.*

Casi todos los países del mundo han adoptado el *sistema métrico decimal* como legal y obligatorio, lo que permite llamársele *Sistema Universal de Pesas y Medidas.* El empleo legal del sistema métrico es facultativo en *Inglaterra* y *Estados Unidos de Norte América.*

55. Ventajas del sistema métrico decimal. — Sobre los demás sistemas el métrico decimal tiene las siguientes ventajas:

1ª Es *fijo,* pues las unidades están representadas por *patrones* invariables.

2ª) Es *uniforme,* pues es usado en todos los países civilizados del mundo.

3ª Es *simple,* pues los múltiplos y submúltiplos de las diversas unidades varían de 10 en 10, siendo fácil su conversión, así como su lectura y escritura.

56. Unidades principales y secundarias. — Las unidades fundamentales del sistema métrico son el *metro* y el *kilogramo.*

Las unidades derivadas son: el *metro cuadrado* para las *superficies;* el *metro cúbico* para los *volúmenes;* el *litro* para las *capacidades,* y el *peso* para los *valores monetarios.*

Se llaman *principales* las unidades fundamentales y derivadas para cada clase de magnitud, y *secundarias* sus respectivos múltiplos y submúltiplos.

Las unidades secundarias se distinguen haciendo preceder la unidad principal de los prefijos siguientes: para los múltiplos: *deca* (10), *hecto* (100), *kilo* (1.000), *miria* (10.000), *mega* (1.000.000); y para los submúltiplos: *deci* (0,1), *centi* (0,01), *mili* (0,001) y *micro* (0,000001).

MEDIDAS DE LONGITUD

57. Definiciones. — Se llama *longitud* a lo que tienen de común los segmentos iguales. La unidad principal es el *metro* (del griego, *metrón = medida).*

La comisión nombrada en 1790 por la Academia de Ciencias para buscar una unidad *natural* e *invariable,* estableció que el metro sería la diezmillonésima parte del cuarto del meridiano terrestre, calculado del polo al ecuador. Pero mediciones posteriores han demostrado que la Tierra es un cuerpo irregular y que todos sus meridianos son distintos, resultando, después de corregir algunos errores, que el

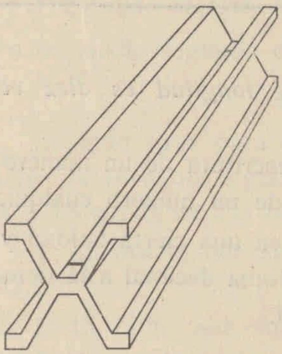


Fig. 3
Prototipo internacional del metro

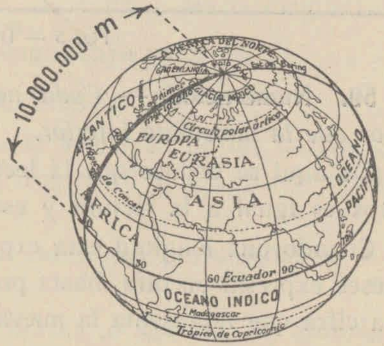


Fig. 4
Un cuadrante terrestre mide 10 millones de metros.

metro actual es *dos décimos de milímetro* menor que lo que debía ser. Por eso, para evitar inconvenientes, se dice que: *el metro es la longitud a 0° de temperatura de una barra de platino iridiado, depositada en París.*

58. Unidades secundarias. — Las unidades secundarias figuran en el cuadro siguiente. Al lado de cada una figura su abreviatura respectiva que conviene recordar.

NOMBRE	VALOR	ABREVIATURA
Kilómetro	*mil metros*	*Km*
Hectómetro	*cien metros*	*Hm*
Decámetro	*diez metros*	*Dm*
METRO	UNIDAD PRINCIPAL	*m*
Decímetro	*décimo de metro*	*dm*
Centímetro	*centésimo de metro*	*cm*
Milímetro	*milésimo de metro*	*mm*
Micrón	*millonésimo de metro*	μ

El *micrón* es un milésimo de milímetro, y se le representa por la letra griega μ (mu). Se emplea en la medición de longitudes muy pequeñas, como el tamaño de las células, microbios, etc.

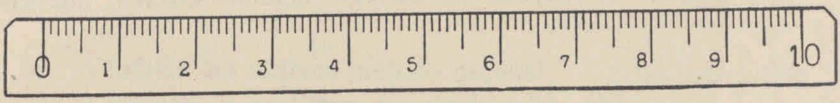


Fig. 5 — Decímetro.

59. Numeración. — *Cada unidad de longitud es diez veces mayor que la inmediata inferior.*

De aquí se deduce que la lectura y escritura de un número de metros es igual a la lectura y escritura de un número cualquiera.

Cuando una longitud está expresada en una cierta unidad y se la desee expresar en otra, basta poner la coma decimal a la derecha de la cifra que representa la nueva unidad.

Ejemplo: 456,25 m = 45,625 Dm = 4,5625 Hm = 4562,5 dm = 45625 cm.

Se comprueba que cada cifra representa siempre la misma unidad en cada una de las diversas escrituras; así, el 6 representa metros en los cinco ejemplos dados.

60. Medidas itinerarias. — Son los que se usan para medir la distancia entre dos lugares.

MEDIDAS TERRESTRES. — Las más usadas son el *kilómetro* y el *hectómetro.* También se usa la *legua métrica,* que vale *4 km,* y la *legua terrestre,* o *legua de 25 por grado,* cuyo valor se obtiene así:

El meridiano mide 40.000.000 de metros y vale 360°, de manera que un grado vale 40.000.000 m : 360 = 111.111,111 m, y como un grado tiene 25 leguas terrestres, una legua terrestre mide

111.111,111 m : 25 = 4.444,44 m = 4,444 Km.

MEDIDAS MARINAS. — Las más usadas son:

1º La *legua marina,* o *legua de 20 por grado,* cuyo valor es

111.111,111 m : 20 = 5.555,55 m = 5,555 Km.

2º La *milla marina,* que es igual a la tercera parte de la legua marina, o $\frac{1}{60}$ de la longitud del grado, o sea la longitud de un minuto del meridiano terrestre, cuyo valor es:

$$5.555,55 \text{ m} : 3 = 1.852 \text{ m (aproximadamente)}$$

3º El *nudo marino,* que es $\frac{1}{120}$ de milla, o sea la longitud de un arco de medio segundo de meridiano, cuyo valor es:

$$1.852 : 120 = 15,43 \text{ m.}$$

El nudo sirve para expresar la velocidad de los barcos. Si un barco fila 18 nudos significa que recorre 18 nudos en medio minuto, o sea 18 millas en una hora.

4º La *braza,* que sirve para medir las profundidades, y mide 1,62 m.

5º El *cable,* que mide 120 brazas, o sea 200 m. aproximadamente.

MEDIDAS DE SUPERFICIE

61. Definiciones. — Se llama *superficie* a lo que tienen de común las figuras equivalentes. La unidad principal es el *metro cuadrado,* que es el área de un cuadrado de un metro de lado.

62. Unidades secundarias. — Son las siguientes:

NOMBRE	VALOR					ABREVIATURA
Kilómetro cuadrado	*Cuadrado de un*		*Km*	*de lado*	$= 1.000.000$ m²	*Km²*
Hectómetro cuadrado	,,	,,	*Hm*	,,	$= 10.000$ *m²*	*Hm²*
Decámetro cuadrado	,,	,,	*Dm*	,,	$= 100$ *m²*	*Dm²*
METRO CUADRADO	,,	,,	*m*	,,	$= 1$ *m²*	*m²*
Decímetro cuadrado	,,	,,	*dm*	,,	$= 0,01$ *m²*	*dm²*
Centímetro cuadrado	,,	,,	*cm*	,,	$= 0,0001$ *m²*	*cm²*
Milímetro cuadrado	,,	,,	*mm*	,,	$= 0,000001$ *m²*	*mm²*

Conviene tener presente que un *decámetro cuadrado* son 100 m² y no 10 m², etc.; y que un *decímetro cuadrado* no es un décimo de m², etc.

63. Numeración. — *Cada unidad de superficie es cien veces mayor que la inmediata inferior.*

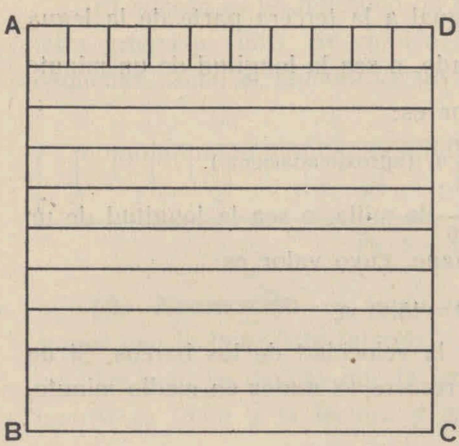


Fig. 6

Consideremos un cuadrado *ABCD* que represente un metro cuadrado (fig. 6). Dividamos el lado *AB* en diez partes iguales y por los puntos de división tracemos paralelas al lado *AD*. El cuadrado queda dividido en diez rectángulos de 1 m de largo y 1 dm de ancho. Si dividimos ahora *AD* en 10 partes iguales y trazamos paralelas a *AB*, el primer rectángulo queda descompuesto en 10 cuadrados de 1 dm de lado, o sea en 10 dm². Como hay 10 rectángulos iguales, en todos habrá 10 dm² × 10 = 100 dm², es decir, que un metro cuadrado es 100 veces mayor que la unidad inmediata inferior. De igual manera se probaría que cualquier otra unidad equivale a 100 unidades del orden inmediato inferior.

Por consiguiente, podemos escribir:

1 Km²	= 100 Hm²	= 10.000 Dm²	= 1.000.000 m²
1 Hm²	= 100 Dm²	= 10.000 m²	= 1.000.000 dm²
1 Dm²	= 100 m²	= 10.000 dm²	= 1.000.000 cm²
1 m²	= 100 dm²	= 10.000 cm²	= 1.000.000 mm²
1 dm²	= 100 cm²	= 10.000 mm²	
1 cm²	= 100 mm²		

De lo expuesto se deduce que son necesarios dos lugares para escribir cada orden decimal, pues si tomamos el m² como unidad, los decámetros cuadrados ocupan el lugar de las centenas, los hectómetros cuadrados ocupan el lugar de las decenas de mil, etc.; y los decímetros cuadrados ocupan el lugar de los centésimos, los centímetros cuadrados ocupan el lugar de los diezmilésimos, etc.

Ejemplo. — Escribir 32 Hm², 8 Dm², 56 m² y 14 cm²:

320.856,0014 m².

Cuando una medida está expresada en una cierta unidad y se la desee expresar en otra, basta poner la coma decimal a la derecha de la cifra que represente la nueva unidad, recordando que cada dos lugares expresa un orden decimal.

Ejemplo. — 75368,5046 m² = 753,685046 Dm² = 7536850,46 dm².

64. Medidas agrarias. — Sirven para expresar la superficie de los campos, bosques, terrenos, etc. La *unidad principal* es el *área (a),* que vale 100 m². Las *unidades secundarias* son: la *hectárea (Ha.),* que vale 10.000 m², y la *centiárea (ca.),* que vale 1 m².

MEDIDAS DE VOLUMEN

65. Definiciones. — Se llama *volumen* a lo que tienen de común los cuerpos equivalentes. La unidad principal es el *metro cúbico,* m³, que es el volumen de un cubo de un metro de arista.

66. Unidades secundarias. — Se emplean solamente los submúltiplos, que son los siguientes:

NOMBRE	VALOR	ABREVIATURA
Decímetro cúbico	*Cubo de un dm de lado = 0,001 m³*	*dm³*
Centímetro cúbico	*„ „ cm „ = 0,000001 m³*	*cm³*
Milímetro cúbico	*„ „ mm „ = 0,000000001 m³*	*mm³*

67. Numeración. — *Cada unidad de volumen es mil veces mayor que la inmediata inferior.*

Sea *AF,* fig. 7, un cubo de un metro de arista. Dividiendo la arista *AD* en 10 partes iguales y trazando por los puntos de división planos paralelos a la base, tendremos 10 capas iguales. Dividiendo las aristas *DC* y *CF* en 10 partes iguales cada una y trazando por los puntos de división de *CD* paralelas a *CF,* y por los puntos de

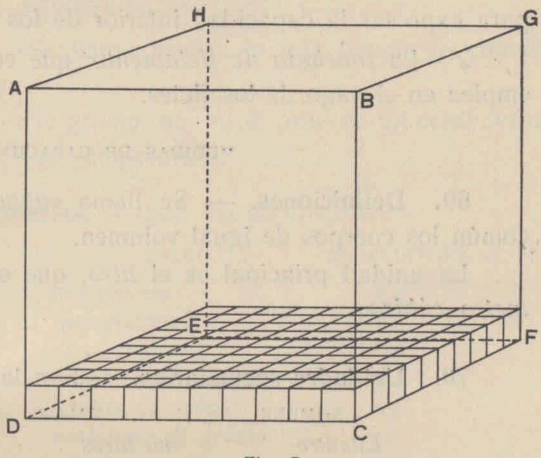


Fig. 7

división de *CF* paralelas a *CD,* obtendremos 100 cubos iguales a 1 dm^3, es decir, cada capa consta de 100 dm^3, y como en todo el cubo tenemos 10 capas iguales, tendremos 100 $dm^3 \times 10 = 1.000\ dm^2$, luego el metro cúbico es mil veces mayor que 1 dm^3. De igual manera se probaría que cualquier otra unidad equivale a mil unidades del orden inmediato inferior.

Por consiguiente, podemos escribir:

$$1\ m^3 = 1.000\ dm^3 = 1.000.000\ cm^3 = 1.000.000.000\ mm^3$$
$$1\ dm^3 = 1.000\ cm^3 = 1.000.000\ mm^3$$
$$1\ cm^3 = 1.000\ mm^3$$

Haciendo análoga consideración a la hecha para las medidas de superficie llegamos a la conclusión de que se necesitan tres lugares para cada unidad.

Ejemplo. — Escribir 2 m^3, 425 dm^3, 8 cm^3 y 14 mm^3:

$$2{,}425008014\ m^3.$$

Para el cambio de unidad se procede de manera parecida a la explicada en las medidas de superficie:

Ejemplo. — $16{,}034286\ m^3 = 16034{,}286\ dm^3 = 16.034.286\ cm^3$.

68. Tonelaje de los navíos. — Los marinos emplean la palabra *tonelada* con dos significados diferentes:

1º La *tonelada de arqueo,* que equivale a 2,83 m^3 y se emplea para expresar la capacidad interior de los navíos;

2º La *tonelada de fletamento,* que equivale a 1,44 m^3, que se emplea en el pago de los fletes.

MEDIDAS DE CAPACIDAD

69. Definiciones. — Se llama *capacidad* a lo que tienen de común los cuerpos de igual volumen.

La unidad principal es el *litro,* que es el volumen de un *decímetro cúbico.*

70. Unidades secundarias. — Son las siguientes:

NOMBRE	VALOR	ABREVIATURA
Kilolitro	*mil litros*	*Kl*
Hectolitro	*cien litros*	*Hl*

NOMBRE	VALOR	ABREVIATURA
Decalitro	*diez litros*	*Dl*
LITRO	UNIDAD PRINCIPAL	*l*
Decilitro	*décimo de litro*	*dl*
Centilitro	*centésimo de litro*	*cl*
Mililitro	*milésimo de litro*	*ml*

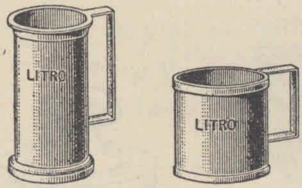


Fig. 8
Medidas para líquidos

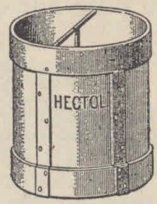


Fig. 9
Medida para áridos

71. Numeración. — *Cada unidad de capacidad es diez veces mayor que la unidad inmediata inferior.*

La lectura y escritura de un número de litros es igual a la de los números.

Ejemplo. — Escribir 32 hectolitros, 2 decalitros, 6 litros, 9 decilitros, 4 centilitros y 8 mililitros:

3226,948 l

También se tiene que:

458,367 l = 45,8367 Dl = 4,58367 Hl = 4583,67 dl = 45836,7 cl

MEDIDAS DE PESO

72. Definiciones. — Se llama *peso* a lo que tienen de común los cuerpos de igual masa.

La unidad principal es el *gramo,* que es el peso de un centímetro cúbico de agua pura a 4° de temperatura.

73. Unidades secundarias. — Son las siguientes:

NOMBRE	VALOR	ABREVIATURA
Kilogramo	*mil gramos*	*Kg*
Hectogramo	*cien gramos*	*Hg*
Decagramo	*diez gramos*	*Dg*
GRAMO	UNIDAD PRINCIPAL	*g*
Decigramo	*décimo de gramo*	*dg*
Centigramo	*centésimo de gramo*	*cg*
Miligramo	*milésimo de gramo*	*mg*

Si se toma como unidad práctica al *Kilogramo,* se tienen estos múltiplos:

Quintal métrico	*100 Kg*	*Qm*
Tonelada métrica	*1.000 Kg*	*Tm*

Para pesar los diamantes, perlas y piedras preciosas se emplea el *quilate,* que pesa *dos decigramos.*

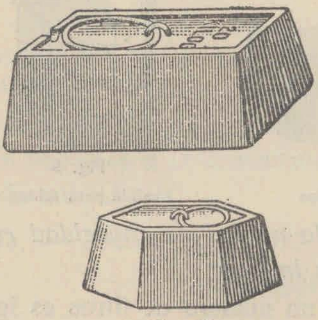


Fig. 10
Pesas de hierro fundido

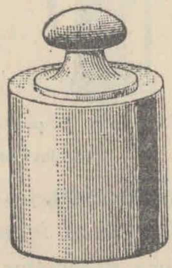


Fig. 11
Pesas de bronce

74. Correspondencia entre las unidades de volumen, de capacidad y de peso. — Recordando las definiciones de las unidades de *volumen, capacidad* y *peso,* y suponiendo que las medidas de volumen estén llenas de *agua pura,* se tienen estas correspondencias:

$1\ m^3 = 1\ Kl$. . . . . $1\ Tm = 1.000\ Kg.$
$1\ dm^3 = 1\ l$. . . . . $1\ Kg$
$1\ cm^3 = 1\ ml$. . . . . $1\ g.$

PESO ESPECIFICO

75. Definiciones. — Se llama *peso específico* de un cuerpo al peso de la unidad de volumen de ese cuerpo.

Si el peso de un cuerpo es P y su volumen es V, su peso específico p es:

$$p = \frac{P}{V}$$

De esta expresión se deduce que:

$$P = p.V \qquad \text{y} \qquad V = \frac{P}{p}$$

expresiones que nos dicen que:

El peso de un cuerpo es igual al producto de su peso específico por su volumen;

El volumen de un cuerpo es igual a su peso dividido por su peso específico.

76. PROBLEMA 1. —*Hallar el peso de 8 litros de ácido sulfúrico sabiendo que su peso específico es 1,84.*

$$P = p.V$$

$$P = 1{,}84 \times 8 = 14{,}72\ Kg.$$

77. PROBLEMA 2. —*Hallar el volumen de un bloc de granito que pesa 536 Kg, sabiendo que su peso específico es 2,7.*

$$V = \frac{P}{p}$$

$$V = 536 : 2{,}7 = 198{,}5\ \text{dm}^3$$

78. PROBLEMA 3. —*Un bloc de piedra pesa 35 Kg y su volumen es de 14 dm³. Calcular su peso específico.*

$$p = \frac{P}{V}$$

$$p = 35 : 14 = 2{,}5$$

PESO ESPECIFICO DE VARIOS CUERPOS

Aceite de lino	0,9403	Azúcar	1,606
„ „ oliva	0,916	Mármol	2,72
Acero laminado	7,84	Azufre	2,033
„ fundido	7,81	Aluminio	2,6
Acido clorhídrico	1,247	Bronce	8,5 a 9,2
„ sulfúrico	1,84	Cal viva	0,84
„ nítrico	1,5	Carbón vegetal	0,25
Agua destilada	1,000	Cebada	0,633
„ de mar	1,026	Centeno	0,74
Aire atmosférico	0,001299	Cera	0,97
Alcohol puro	0,793	Cerveza	1,02
Amoníaco	0,897	Cobre	8,8
Antracita	1,8	Cristal	2,49
Arcilla	1,93	Caucho	0,93
Arena	1,343	Diamante	3,515
Avena	0,478		

Estaño	7,29	Níquel	8,28
Granito	2,5 a 2,8	Oro	19,26
Harina	1,035	Plata	10,47
Hielo	0,93	Platino	21,45
Hierro fundido	7,21	Plomo	11,35
„ forjado	7,79	Petróleo	0,847
Latón	8,4	Porcelana	2,42
Ladrillo	1,5 a 2,2	Tierra común vegetal	1,11
Leche de vaca	1,035	Vidrio de botellas	2,73
Mercurio	13,59	Vino	0,993
Miel	1,45	Yeso	0,96
Nafta	0,76	Zinc	6,86

MEDIDAS MONETARIAS

78 a La moneda. — Los productos naturales o industriales son intercambiados con dos propósitos: para ser consumidos o para transformarse en elementos de nuevos cambios.

En las sociedades primitivas, los productos se cambiaban entre sí, *trueque,* o bien contra el trabajo; pero como esos procedimientos tenían sus inconvenientes, la necesidad hizo de que se inventara un elemento intermediario, la *moneda,* verdadero denominador común, que sirviera de unidad común de medida entre los valores de los productos cambiados.

Debía cumplir la moneda las siguientes condiciones:

1º) ser lo más general posible, a fin de que pudiera servir para los cambios internacionales;

2º) poderse dividir en varios submúltiplos, con un valor suficiente a pesar de su poco volumen;

3º) ser inalterable a los agentes físicos, para poderse conservar;

4º) poderse transportar fácilmente.

Casi todos los metales poseen algunas de esas cualidades, de ahí que de ellos se hayan hecho las monedas, quedando en definitiva, la *plata* y el *oro,* llamados *metales preciosos,* como los únicos empleados en la época moderna.

Como el valor de un metal es proporcional a su peso, se hicieron pequeños lingotes de peso conocido y con un valor dado, a los que se les dió forma circular para mayor comodidad, en los que se grabaron imágenes de dioses, reyes, etc., que certificaban el peso y el valor del lingote. Esa fué la *moneda real,* pero como no siempre las subdivisiones de ella correspondía al pequeño valor de ciertas cosas hubo que crear monedas de escaso valor, o *moneda de vellón.*

Hoy día las monedas no son de un solo metal, sino de aleaciones de metal fino con cobre a fin de hacerlas más resistentes, dependiendo su valor de su *título* y de su peso.

78 b Título de una moneda. — Se llama *título* o *ley* de una moneda, a la razón del peso del metal fino que contiene y el peso total de la moneda. Si llamamos t al título, p al peso del metal fino y P al peso de la moneda, tenemos:

$$t = \frac{p}{P} \qquad (1)$$

y de esta fórmula deducimos:

$$p = P.t \qquad (2)$$

lo que nos dice que: *el peso del metal fino de una moneda es igual al peso de la moneda por su título.*

De (1) también deducimos:

$$P = \frac{p}{t} \qquad (3)$$

lo que nos dice que: *el peso de una moneda es igual al peso del metal fino dividido por su título.*

En casi todos los países europeos, Argentina y en EE. UU. el título es de $\frac{9}{10}$ lo que indica que por cada 10 gramos que pesa una moneda, 9 gramos es el peso del metal fino, oro o plata. En Inglaterra y sus colonias, Portugal, Turquía, Japón, Brasil, Chile, etc., el título adoptado es de $\frac{11}{12}$

Una ley fija en cada país la unidad monetaria y su título.

Ejemplos: 1º) *Calcular el título del dólar de oro, cuyo peso es de 1,672 gramos y el peso del metal fino es de 1,5048 gramos.*

Se tiene: $$t = \frac{p}{P}$$

o bien: $$t = \frac{1,5048}{1,672} = 0,900$$

2º) *Calcular la cantidad de oro puro que contiene el argentino, cuyo peso es de 8,0645 gramos y su título es 0,900.*

Se tiene: $p = P.t$

o bien: $p = 8{,}0645 \times 0{,}900 = 7{,}25805$ g. de oro

3º *Calcular el peso de una moneda de oro de 5 pesetas que contiene 1,45161 g. de oro puro y su título es 0,900.*

Se tiene: $P = \frac{p}{t}$

o bien: $P = \frac{1{,}45161}{0{,}900} = 1{,}612$ g.

MEDIDAS MONETARIAS ARGENTINAS

78 c Definiciones. — Las *medidas monetarias* son las que sirven para determinar el valor de las cosas.

La *unidad monetaria argentina* es el *peso oro,* $ o|s, que tiene un múltiplo, el *argentino*, que vale 5 pesos oro, y un submúltiplo, el *centavo,* que vale un centésimo de peso.

Las monedas argentinas son de *oro, plata, níquel* y *cobre.*

De *oro,* son el *argentino,* que vale 5 pesos oro y el *medio argentino,* que vale 2,50 pesos oro;

De *plata,* son las monedas de 1 peso, 50, 20, 10 y 5 centavos;

De *níquel,* son las monedas de 20, 10 y 5 centavos;

De *cobre,* son las monedas de 2 y 1 centavos.

En la práctica se emplea el *peso papel* o *peso moneda nacional,* $ m|n., que son billetes emitidos por el *Banco Central de la República* y cuyo valor es de 44 centavos oro.

El *argentino* pesa 8,0645 gramos y, como se ha dicho, su título es de *nueve décimos.*

78 d Reducción de pesos oro a pesos moneda nacional. — Sea reducir 32 $ o|s. a pesos m|n. Tenemos que

0,44 o$s.	————	1 m$n.
32 „	————	x „

Como la regla de tres planteada es directa, (**108**), resulta:

$$x = \frac{32}{0,44} = 72,72 \text{ m\$n.}$$

Lo mismo habríamos hecho en cualquier otro caso análogo, luego: *para reducir pesos oro a pesos moneda nacional se dividen los pesos oro por 0,44.*

78 e Reducción de pesos moneda nacional a pesos oro. — Sea reducir 54 $ m|n. a pesos oro. Tenemos que

1 m$n.	————	0,44 o$s.
54 „	————	x „

Como la regla de tres planteada es directa, (**108**), resulta:

$$x = 54 \times 0,44 = 23,76 \text{ o\$s.}$$

Lo mismo habríamos hecho en cualquier otro caso análogo, luego: *para reducir pesos moneda nacional a pesos oro, se multiplican los pesos moneda nacional por 0,44.*

PRINCIPALES MEDIDAS INGLESAS

79. Medidas de longitud.

1 milla = 1.760 yardas = 1.609,34 m
1 braza = 2 yardas = 1,8288 m
1 yarda (yd) = 3 pies = 0,914399 m
1 pie (') = 12 pulgadas = 0,3048 m
1 pulgada (") = 2,54 cm

80. Medidas de superficie.

1 milla cuadrada = 640 acres = 2,59 Km^2
1 acre = 4.840 yardas cuadradas = 4.046,87 m^2
1 yarda cuadrada = 0,8361 m^2
1 pie cuadrado = 0,0929 m^2 *= 9,29* dm^2
1 pulgada cuadrada = 6,45 cm^2

81. Medidas de volumen.

1 yarda cúbica = 0,764515 m^3
1 pie cúbico = 28,315 dm^3
1 pulgada cúbica = 16,38 cm^3

82. Medidas de capacidad. — Para áridos y líquidos.

1 cuarto = 8 bushels = 290,96 litros
1 saco = 3 bushels = 109,11 litros
1 bushel = 8 galones = 36,37 litros
1 galón (gall.) = 4 cuartas = 4,545963 litros
1 galón norteamericano = 3,78543 litros
1 cuarta (qt.) = 2 pintas = 1,136 litros
1 pinta (pt) = 4 gills = 0,568 litros
1 gill = 0,142 litros

83. Medidas de peso. — Las medidas de peso se dividen en medidas de *peso, weigh,* empleados en el comercio de las mercaderías corrientes, y en medidas *troy,* empleadas para los metales preciosos, joyería y platería.

a) Medidas weighs:

1 tonelada larga = 20 quintales = 1.016,05 Kg.
1 tonelada corta = 907,19 Kg.
1 quintal = 112 libras = 50,8 Kg.
1 cuarto = 28 libras = 12,7 Kg.
1 piedra = 14 libras = 6,35 Kg.
1 libra = 16 onzas = 0,453592 Kg.
1 onza = 437,5 granos = 28,35 gramos
1 grano = 0,0648 gramos

b) Medidas troy:

1 libra troy = 12 onzas troy = 373,2419 gramos
1 onza troy = 480 granos = 31,1035 gramos
1 penique = 24 granos = 1,5552 gramos
1 grano = 6,48 cg.

84. Medidas monetarias.

1 libra esterlina, o soberano, (£) = 20 chelines = 240 peniques
1 chelín (sh) = 12 peniques (d).

Una cantidad expresada en moneda inglesa, por ejemplo £ 5, sh. 14, d. 7, se escribe así £ 5.14.7, o bien: £ 5|14|7.

Para más facilidad en los cálculos, es conveniente transformar los chelines en fracción decimal de libra, para lo cual se dice:

$$1 \text{ sh} = \frac{1}{20} \text{ £} = \frac{5}{100} \text{ £} = 0{,}05 \text{ £}$$

de manera que multiplicando la cantidad de chelines por 0,05 tendremos centésimos de libra.

También tenemos que:

$$1 \text{ d} = \frac{1}{240} \text{ £} = 0{,}004 \text{ £ aproximadamente,}$$

de manera que, para reducir peniques a fracción decimal de libra basta multiplicarlos por 0,004, y obtendremos milésimos de libra.

Ejemplos. — 1º *Reducir 14 chelines a fracción decimal de libra.*

$$14 \times 0{,}05 = 0{,}70 \text{ £}$$

2º *Reducir 8 peniques a fracción decimal de libra.*

$$8 \times 0{,}004 = 0{,}032 \text{ £}$$

3º *Reducir £ 4.16.10 a libras y fracción decimal de libra.*

$$16 \times 0{,}05 = 0{,}800 \text{ £}$$
$$10 \times 0{,}004 = 0{,}040 \text{ £}$$
$$4 + 0{,}040 + 0{,}800 = 4{,}84 \text{ £}$$

EJERCICIOS

Reducir las cantidades siguientes a metros, a kilómetros y luego a centímetros:

129)	2 Km, 5 Hm, 6 m.	133)	24 m, 76 dm, 82 mm.
130)	4 Dm, 2 Hm, 85 cm.	134)	136 dm, 250 cm, 158 mm.
131)	15 Hm, 65 Dm, 132 dm.	135)	0,25 Km, 3,4 Hm, 0,38 m.
132)	38 Dm, 836 cm., 46 mm.	136)	0,035 Hm, 18 m, 0,034 Dm.

137. — Un automóvil recorre 12 m. por segundo, ¿cuál es su velocidad en kilómetros por hora?

138. — La velocidad de un tren es de 65 Km. por hora, ¿cuántos metros recorre por minuto y por segundo?

139. — Los glóbulos rojos de la sangre miden 2 μ de espesor y 7 μ de diámetro. ¿Cuántos glóbulos se necesitan para hacer una pila de 5 mm. de altura? ¿Cuántos se necesitan para formar una longitud de 12 mm.?

140. — Dos buques se hallan a una distancia de 8.750 Km. Navegan a su encuentro a razón de 25 millas por hora el uno, y filando 18 nudos el otro. Después de 72 horas de viaje, ¿a qué distancia se encontrarán?

141. — Una profundidad de 70 m., ¿cuántas brazas son?

142. — Una profundidad de 15 brazas, ¿cuántos metros son?

143. — ¿Cuántas millas terrestres y marinas son 500 Km.?

144. — Una distancia de 12 Hm. y 5 Dm. reducirla a millas marinas, a brazas y a cables.

145. — Si un buque fila 28 nudos, ¿cuál es su velocidad en kilómetros por hora?

Reducir las cantidades siguientes a metros cuadrados, a decímetros cuadrados y luego a decámetros cuadrados:

146) 5 Hm^2, 32 m^2, 385 dm^2

147) 32,6 Dm^2, 2835 cm^2, 0,04 Km^2

148) 0,0058 Km^2, 2,3 Hm^2, 2357 cm^2

149) 0,0071 Dm^2, 38.326 dm^2, 54.346 cm^2

150) 0,475 Km^2, 8,6 Hm^2, 356,2 Dm^2

151) 8,35 m^2, 497,68 dm^2, 72,436,5 cm^2

152) 0,00735 Dm^2, 0,976 m^2, 5,38 dm^2

153) 0,084 Hm^2, 3,345 m^2, 28364,58 mm^2

Reducir las cantidades siguientes a hectáreas y luego a áreas:

154) 315,6 Km^2, 2,6 Dm^2

155) 435,48 Dm^2, 35.762 m^2

156) 8.750 m^2, 28356 dm^2

157) 37.000 cm^2, 875.436 mm^2

Expresar en metros cuadrados y luego en áreas, las siguientes cantidades:

158. — Un décimo de kilómetro cuadrado.

159. — Medio hectómetro cuadrado.

160. — El área de un cuadrado de 5,4 Dm. de lado.

161. — El área de un cuadrado de 0,256 Hm. de lado.

162. — Calcular el costo de un terreno que mide 8,66 m. de frente y 42,5 m. de fondo, a razón de 7,35 $ la vara cuadrada. Una vara cuadrada mide 75 decímetros cuadrados.

163. — Calcular el valor de un campo de forma de trapecio, a razón de 5.200 $ la hectárea. Sus medidas son: base mayor = 5.420 m.; base menor = 3.415 m.; altura = 685 m.

164. — Se tiene un rectángulo de 35 cm. de largo y 24 cm. de ancho. Calcular el lado del cuadrado y el diámetro del círculo equivalentes a dicho rectángulo.

165. — Un disco mide 62 mm. de diámetro. Calcular el ancho que hay que dar a un rectángulo de 8 cm. de largo para que sea equivalente al disco.

Reducir las cantidades siguientes a metros cúbicos, a decámetros cúbicos, y luego a decímetros cúbicos:

166)	16,52 Dm^3, 85.738 cm^3	170)	0,0374 m^3, 42,3 dm^3
167)	10,53 m^3, 15.000 dm^3	171)	2,4 m^3, 273.000 cm^3
168)	0,125 Dm^3, 48,546 m^3	172)	75.000 cm^3, 876.000 mm^3
169)	386,256 dm^3, 28.300 cm^3	173)	46.7000 dm^3, 80.000 cm^3

Reducir las cantidades siguientes a litros y luego a hectólitros:

174)	3,5 m^3, 2850 dm^3	178)	57.000 cm^3, 18.000 mm^3
175)	0,138 m^3, 18400 cm^3	179)	17,548 m^3, 74,8 dm^3
176)	36 dm^3, 254,48 cm^3	180)	20,38 dm^3, 14.000 cm^3
177)	172,84 dm^3, 2876 mm^3	181)	0,0486 m^3, 84,2 dm^3

182. — Un depósito mide 6,5 m. de largo, 4,8 m. de ancho y 3.15 m. de alto. Calcular su capacidad en metros cúbicos, en litros y en hectólitros.

183. — Un depósito cilíndrico de petróleo mide 12 m. de diámetro y está lleno hasta los 7,8 m. de su altura. Calcular cuántas latas de base cuadrada de 23,5 cm. de lado y 34 cm. de altura podrán llenarse con aquel contenido.

Reducir las cantidades siguientes a gramos y a kilogramos:

184)	8,52 Kg, 2750 Dg.	188)	0,45 Kg, 37,42 Hg.
185)	485 Hg, 37,4 Dg.	189)	5,25 Dg, 342 Cg.
186)	0,0485 Kg, 57300 Cg.	190)	18,5 cg, 45 mg.
187)	72,48 Hg, 356 g.	191)	3,4 g., 285 cg.

Reducir a quintales y a toneladas las cantidades siguientes:

192)	3.750 Kg.	194)	24.378 Dg.
193)	18.435 Hg.	195)	175.480 g.

196. — Calcular el peso de una planchuela de hierro, de 75 cm. de largo, 8,5 cm. de ancho y 18 mm. de espesor.

197. — Calcular el peso de una chapa de aluminio, de 1,23 m. de largo, 24 cm. de ancho y 2,5 mm. de espesor.

198. — Calcular el peso de una barra redonda de acero, de 12 mm. de diámetro y 1,55 de largo.

199. — Un alambre de cobre de 85 m. de largo tiene 1 mm. de diámetro. Calcular su peso.

200. — Determinar el volumen de una llave de hierro que pesa 82 g.

201. — Determinar el volumen de 45 Kg. de petróleo y el peso de 30 litros de nafta.

202. — Un paralelepípedo de hielo mide 5 m. de largo, 3 m. de ancho y 2 m. de alto. Sumergido en el mar, calcular la altura de la parte que emerge. Densidad del hielo = 0,93; densidad del agua de mar = 1,026.

203. — Una planchuela de acero de 5 mm. de espesor, 6 cm. de ancho y 8 cm. de largo ha costado 4,50 $. ¿Cuánto costará otra planchuela de igual calidad de 8 mm. de espesor, 5 cm. de ancho y 9,2 cm. de largo?

Reducir a metros las siguientes cantidades:

204)	8 yard. 2'77"	208)	340,35 yard.
205)	25 yard. 1' 9"	209)	2500",2
206)	42" 8"	210)	28",6
207)	56' 5"	211)	5 millas 850 yard. 28".

212. — Se han comprado 35 varillas de acero. Cada una mide 14'7". El metro de varilla vale 25 centavos. Calcular el importe de la compra.

213. — Se han comprado 15 rollos de alambre. Cada rollo mide 120 yardas. ¿Cuánto importa la compra a razón de 15 centavos el metro?

Reducir a yardas, pies y pulgadas las siguientes cantidades:

214)	100 m.	218)	3658 cm.
215)	4,58 m.	219)	2365 mm.
216)	28,365 m.	220)	28,4 cm.
217)	2 Km.	221)	148 mm.

Reducir a metros cuadrados las siguientes cantidades:

222)	358 yard.^{2}	224)	25 p.^{2}, 46 pulg.^{2}
223)	45 yard.^{2}, 56 p.^{2}	225)	12500 pulg.^{2}

Reducir a centímetros cuadrados las siguientes cantidades:

226)	2,35 p.^{2}	228)	18 pulg.^{2}
227)	3 p.^{2}, 15 pulg.^{2}	229)	50,6 pulg.^{2}

Reducir a pies cuadrados las siguientes cantidades:

230)	8,25 m^2	232)	50 cm^2
231)	156 m^2	233)	32.489 cm^2

Reducir a pulgadas cuadradas las siguientes cantidades:

234)	12 dm^2	236)	8 cm^2
235)	24 cm^2	237)	200 mm^2

238. — Una locomotora trabaja a una presión de 200 libras por pulgada cuadrada. ¿A cuántas atmósferas equivalen? Una atmósfera es una presión de 1 kg. por centímetro cuadrado.

239. — Una caldera trabaja a 8 atmósferas. ¿A cuántas libras por pulgada equivalen?

Reducir a kilogramos las siguientes cantidades:

240)	150 libras	242)	50 onzas
241)	8,5 libras	243)	12 libras, 9 onzas

Reducir a libras y onzas las siguientes cantidades:

244)	35 Kg.	246)	75 gramos
245)	Media tonelada	247)	5,480 Kg.

Reducir a pesos m|n. al cambio de 49 peniques, las cantidades siguientes:

248)	560 peniques	251)	£ 12, 18, 10.
249)	142 chelines	252)	£ 0.13,5
250)	£ 4. 8. 7.	253)	£ 7.0.9

Reducir a moneda inglesa, al cambio de 49 peniques, las siguientes cantidades:

254)	75,30 $ o/s	257)	1.000 $ m/n.
255)	0,85 $ o/s	258)	2.846,05 $ m/n.
256)	284,25 $ m/n.	259)	0,45 $ m/n.

260. — Se han comprado 150 Tm. de hulla en £ 94.5.8. Calcular el valor de la tonelada en moneda inglesa y en pesos moneda nacional. El cambio está a 50 peniques.

261. — Se han comprado 1.800 Tm. de hierro en 165.480 pesos moneda nacional. Calcular el valor de la tonelada en moneda inglesa y en pesos moneda nacional. Cambio a 50 peniques.

262. — La bolsa de 80 Kg. de trigo Rosafé vale 10,45 $ m/n. ¿Cuánto importa la venta de 3.200 bolsas en moneda inglesa?

263. — Se han exportado a Amberes 2.794.000 libras de lana a razón de 28,5 peniques por libra. Calcular el valor de la venta en moneda inglesa y en pesos moneda nacional. Cambio a 46 peniques.

CAPITULO IV

Razones y Proporciones.

85. Razón. — Se llama *razón* de dos números, al cociente exacto de dividir el uno por el otro. El primer número se llama *antecedente;* el segundo, *consecuente.*

Así, la razón de 18 y 6 es 3, pues $18 : 6 = 3$; 18 es el antecedente y 6 es el consecuente.

La razón de dos números a y b se representa $\frac{a}{b}$ o bien $a : b$.

Las razones gozan de todas las propiedades de la división exacta, pues son divisiones exactas.

Todos los procedimientos de cálculo de las fracciones son aplicables a las razones.

86. Proporción. — Se llama *proporción* a la igualdad de dos razones. Los antecedentes y consecuentes de las razones son los antecedentes y consecuentes de la proporción.

Si se tienen las razones iguales

$$\left.\begin{array}{l} \frac{12}{4} = 3 \\[1ex] \frac{15}{5} = 3 \end{array}\right\} \text{ se obtiene la proporción } \quad \frac{12}{4} = \frac{15}{5}$$

De una manera general, una proporción es una igualdad de la forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (1)$$

designando a a, b, c y d a números enteros o fraccionarios.

Los números a, b, c, d son los *términos* de la proporción; a y c son los *antecedentes;* b y d son los *consecuentes.* El primero y último términos *(a y d)* se llaman *extremos;* el segundo y el tercero *(b y c)* se llaman *medios*. El último término, *d*, se llama *cuarto proporcional* entre los números *a*, *b* y *c*.

La proporción (1) se lee: *a* es a *b*, como *c* es a *d*, o bien: *a* sobre *b* es igual a *c* sobre *d*.

También suele escribirse la proporción (1) así:

$$a : b :: c : d$$

notación que está en desuso.

87. Proporción continua. — Se llama *proporción continua* a aquella en que los medios son iguales.

Ejemplos:

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2} ; \frac{3}{9} = \frac{9}{27} ; \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

En una proporción continua el medio *b* se llama *medio proporcional* o *medio geométrico*, y el extremo *c* se llama *tercero* entre *a* y *b*.

88. TEOREMA FUNDAMENTAL. — *En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

$$H \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \qquad\qquad T \left\{ a.d = b.c \right.$$

Demostración. — Multiplicando ambos miembros de la igualdad

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

por *bd*, resulta:

$$\frac{a}{b}.bd = \frac{c}{d}.bd$$

y simplificando, queda la tesis:

$$a.d = b.c$$

89. COROLARIO I. — *En una proporción continua el producto de los extremos es igual al cuadrado del medio proporcional.*

En la proporción

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{d} \qquad \text{se tiene} \quad a.d = b^2$$

90. Cálculo de un extremo desconocido. — COROLARIO II. — *Un extremo de una proporción es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.*

En la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{se tiene } a.d = b.c$$

y dividiendo ambos miembros por d, resulta, después de *simplificar:*

$$a = \frac{b.c}{d}$$

y análogamente:

$$d = \frac{b.c}{a}$$

Ejemplo. — Calcular x en la proporción $\frac{7}{2} = \frac{28}{x}$

Se tiene:

$$x = \frac{2 \times 28}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

91. Cálculo de un medio desconocido. — COROLARIO III. — *Un medio de una proporción es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio.*

En la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{se tiene } b.c = a.d$$

y dividiendo ambos miembros por c y simplificando, queda

$$b = \frac{a.d}{c}$$

y análogamente: $$c = \frac{a.d}{b}$$

Ejemplo: Calcular x en la proporción $\frac{18}{x} = \frac{12}{14}$

Se tiene:

$$x = \frac{14 \times 18}{12} = \frac{252}{12} = 21.$$

92. Corolario IV. — *En una proporción continua al medio proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.*

En la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \qquad \text{se tiene } b^2 = a.c$$

y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, resulta:

$$b = \sqrt{a.c}$$

Ejemplo: Calcular x en la proporción $\dfrac{24}{x} = \dfrac{x}{6}$

Se tiene:

$$x = \sqrt{24 \times 6} = \sqrt{144} = 12$$

93. Teorema recíproco. — *Si el producto de dos números es igual al de otros dos, con los cuatro números se puede formar una proporción, siendo extremos los dos factores de un producto, y medios los dos factores del otro producto.*

$$H)\ a.d = b.c \qquad T\left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right.$$

Demostración. — En efecto, dividiendo ambos miembros de la igualdad $a.d = b.c$ por $b.d$, resulta:

$$\frac{a.d}{b.d} = \frac{b.c}{b.d}$$

y simplificando, queda la tesis:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

94. Teorema. — *En toda proporción se pueden permutar los medios o los extremos entre sí, o bien los antecedentes con sus respectivos consecuentes.*

$$H\left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \qquad T\left\{ \frac{a}{c} = \frac{b}{d};\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a};\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right.$$

Demostración. — En efecto, se tiene que la tesis es cierta, pues en todas las proporciones se tiene $a.d = b.c$ lo mismo que en la proporción de la hipótesis.

Se llama *alternar,* permutar los medios o extremos de una proposición; e *invertir,* permutar los antecedentes con sus consecuentes.

95. Las siete proporciones deducidas de otra. — Si tenemos la proporción

1ª $\qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

alternándola, invirtiéndola, o permutando las razones, obtenemos las siguientes proporciones:

2ª $\qquad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ $\qquad$ *alternando los extremos de la 1ª,*

3ª $\qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ $\qquad$ *alternando los medios de la 2ª,*

4ª $\qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ $\qquad$ *alternando los extremos de la 3ª,*

5ª $\qquad \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ $\qquad$ *permutando la 1ª,*

6ª $\qquad \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$ $\qquad$ *alternando los extremos de la 5ª,*

7ª $\qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ $\qquad$ *alternando los medios de la 6ª,*

8ª $\qquad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ $\qquad$ *alternando los extremos de la 7ª,*

La igualdad $ad = bc$ equivale a cada una de las ocho proporciones diferentes, de donde se deduce que de una cualquiera de ellas se puede obtener cualquiera de las otras (1).

96. TEOREMA. — *En toda proporción la suma, o resta, del antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente, como*

(1) Las proporciones que se pueden deducir de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se obtienen de inmediato del cuadrado

a	c
b	d

considerándolo en sus cuatro posiciones de un lado, y en sus cuatro posiciones visto al trasluz.

la suma, o resta, del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.

$$H \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \qquad T \left\{ \begin{array}{ll} 1^{a} & \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d} \\ 2^{a} & \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d} \end{array} \right.$$

Demostración. — 1ª Sumando 1 a ambos miembros de la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{se tiene} \quad \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

y efectuando la suma, resulta:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

2ª Si suponemos $a > b$, se deberá tener $c > d$. Restando 1 a ambos miembros de la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ se obtiene } \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$

y efectuando la resta resulta:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

97. TEOREMA. — *De una proporción se obtiene otra reemplazando en cada razón el numerador por la suma de los dos términos y el denominador por su diferencia.*

$$H \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \qquad T \left\{ \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \right.$$

Demostración. — Hemos visto, (**96**) que de la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

se obtienen las proporciones

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

dividiendo miembro a miembro estas dos igualdades y simplificando los divisores iguales b y d, respectivamente, resulta:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

98. Serie de razones iguales. — Se llama *serie de razones iguales* a varias razones, tales, que la primera es igual a la segunda, ésta igual a una tercera, ésta igual a una cuarta, etc.

Ejemplos:

$$\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{6}{3}=\frac{10}{5}=\frac{12}{6}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$$

De una manera general:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{m}{n}$$

99. TEOREMA FUNDAMENTAL. — *En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como un antecedente es a su propio consecuente.*

$$H\left\{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{m}{n}\right. \qquad T\left\{\frac{a+c+e+m}{b+d+f+n}=\frac{m}{n}\right.$$

Demostración. — De las dos primeras razones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deduce, alternando los medios:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

y por el teorema (**96**)

$$\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$$

o bien, alternando los medios:

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$$

Sustituyendo $\frac{c}{d}$ por su igual $\frac{e}{f}$ y procediendo de la misma manera con la proporción obtenida

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{e}{f}$$

se deduce:

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{e}{f}$$

Sustituyendo $\frac{e}{f}$ por su igual $\frac{m}{n}$ y procediendo de la misma manera con la proporción obtenida

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{m}{n}$$

se deduce, finalmente, que:

$$\frac{a+c+e+m}{b+d+f+n}=\frac{m}{n}$$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

100. Magnitudes directamente proporcionales. — Dos magnitudes son *directamente proporcionales,* cuando la razón de dos cantidades cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de las cantidades correspondientes de la otra.

Si las magnitudes son **A** y **B**, y *A* y *A'* son dos cantidades de **A**, y *B* y *B'* son las dos cantidades correspondientes de **B**, y se tiene que

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$$

las magnitudes **A** y **B** son directamente proporcionales.

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, solamente se dice que son *proporcionales.*

Ejemplos: Son magnitudes proporcionales: el *precio* de una mercadería que se vende al kilogramo y su *peso;* el *precio* de una mercadería que se vende al metro y su *longitud;* el *salario* de un obrero y el *tiempo* que trabaja; el *espacio* recorrido por un móvil con movimiento uniforme y el *tiempo* empleado; el *área* de un rectángulo y su *ancho;* el *volumen* de un cilindro y su *altura;* la *longitud* de una circunferencia y su *diámetro;* los *arcos* de una circunferencia y sus *ángulos centrales* correspondientes; el *interés* que produce un capital y el *tiempo* que se lo tiene invertido en un negocio; etc.

Algunas veces la proporcionalidad es una convención establecida, o bien el resultado de varias observaciones.

El teorema siguiente permite establecer aritméticamente una consecuencia de la proporcionalidad de dos magnitudes.

101. TEOREMA. — *Si dos magnitudes son proporcionales, al producto de una cantidad de una de ellas por un número le corresponde el producto de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número.*

H { **A** y **B** *magnitudes proporcionales.*
A y *A'* cantidades de **A**; *B* y *B'* cantidades correspondientes de **B**;
n número dado.

T) *A.n* y *A' cantidades correspondientes de B.n* y *B'.*

Demostración. — Como por hipótesis **A** y **B** son proporcionales, se debe tener

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \qquad (1)$$

y multiplicando ambos miembros por *n:*

$$\frac{A}{A'} \cdot n = \frac{B}{B'} \cdot n$$

o bien:

$$\frac{A \cdot n}{A'} = \frac{B \cdot n}{B'}$$

y si la razón de $A.n$ y A' es igual a la razón de $B.n$ y B', por definición de magnitudes proporcionales, deben ser $A.n$ y A' cantidades correspondientes de $B.n$ y B'.

102. COROLARIO. — Si en vez de multiplicar por n hubiéramos multiplicado ambos miembros de (1) por su inversa $\frac{1}{n}$, tendríamos:

$$\frac{A}{A'} \cdot \frac{1}{n} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\frac{A \cdot \frac{1}{n}}{A'} = \frac{B \cdot \frac{1}{n}}{B'}$$

$$\frac{\frac{A}{n}}{A'} = \frac{\frac{B}{n}}{B'}$$

expresión que nos dice que, *si dos magnitudes son proporcionales, al cociente de una cantidad por un número le corresponde el cociente de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número.*

103. Magnitudes inversamente proporcionales. — Dos magnitudes son *inversamente proporcionales,* cuando la razón de dos cantidades cualesquiera de una de ellas es igual a la inversa de la razón de las dos cantidades correspondientes de la otra.

Si las magnitudes son **A** y **B**, y A y A' son dos cantidades de **A**, y B y B' son las dos cantidades correspondientes de **B**, y se tiene que

$$\frac{A}{A'} = \frac{1}{\frac{B}{B'}}$$

las magnitudes **A** y **B** son inversamente proporcionales.

Nótese que:

$$\frac{1}{\frac{B}{B'}} = \frac{B'}{B}$$

de manera que la expresión (1) se puede escribir así:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B'}{B}$$

Ejemplos: Son magnitudes inversamente proporcionales: el *tiempo* empleado para hacer un trabajo y el *número* de obreros necesarios; el *tiempo* necesario para hacer un trabajo por un cierto número de obreros y la *duración* de la jornada de trabajo; el *peso* de una mercadería que se debe pagar con una suma determinada y el *precio* de la unidad de peso; el *volumen* ocupado por un gas y la *presión* que soporta, etc.

104. Teorema. — *Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, al producto de una cantidad de una de ellas por un número, le corresponde el cociente de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número, y recíprocamente.*

H { **A** y **B** *magnitudes inversamente proporcionales,*
A y A' cantidades de **A**; *B y B' cantidades correspondientes de* **B**; *n número dado.*

T { *$A.n$ y A' cantidades correspondientes de $\frac{B}{n}$ y B'.*

Demostración. — Como por hipótesis **A** y **B** son inversamente proporcionales, se debe tener

$$\frac{A}{A'} = \frac{B'}{B}$$

y multiplicando ambos miembros por *n:*

$$\frac{A.n}{A'} = \frac{B'.n}{B}$$

dividiendo ambos términos del segundo miembro por *n,* resulta:

$$\frac{A.n}{A'} = \frac{B'}{\frac{B}{n}}$$

y si la razón de $A.n$ y A' es igual a la razón inversa de B' y $\frac{B}{n}$, por definición de magnitudes inversamente proporcionales, deben ser $A.n$ y A' cantidades correspondientes de $\frac{B}{n}$ y B'.

105. Corolario. — Si en vez de multiplicar por n hubiéramos multiplicado ambos miembros de (1) por $\frac{\ }{n}$, tendríamos:

$$\frac{A}{A'} \cdot \frac{1}{n} = \frac{B'}{B} \cdot \frac{1}{n}$$

o bien:

$$\frac{A . \frac{1}{n}}{A'} = \frac{B'}{B.n}$$

de donde:

$$\frac{\frac{A}{n}}{A'} = \frac{B'}{B.n}$$

expresión que nos dice que, *si dos magnitudes son inversamente proporcionales, al cociente de una cantidad por un número le corres-*

ponde el producto de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número.

106. Magnitud proporcional a varias otras. — Una magnitud es *directa* o *inversamente proporcional a varias otras*, cuando es directa o inversamente proporcional a cada una de ellas.

Si las magnitudes son **A**, **B**, **C** y **D**, diremos que:

1º) **A** es proporcional a **B**, **C** y **D** cuando sea:

A proporcional a **B**
A „ „ **C**
A „ „ **D**

y 2º) **A** es inversamente proporcional a **B**, **C** y **D**, cuando sea:

A inversamente proporcional a **B**
A „ „ „ **C**
A „ „ „ **D**

Ejemplos: El *interés* que produce un capital es directamente proporcional al valor del *capital*, al *tiempo* de imposición y a la *tasa* del interés; el *tiempo* necesario para tejer una pieza de tela es inversamente proporcional al número de *obreros* que trabajan en ella y a las horas de duración de la *jornada* de trabajo.

EJERCICIOS

Expresar las siguientes razones con los menores números enteros posibles:

264) 73.920 : 10.080

265) 149,04 : 91,224

266) 302,4 : 1.056

267) 1.152 : 268,8

Calcular el valor de x en las siguientes proporciones:

268) $36 : 45 :: 28 : x$

268 bis) $x : 9 :: 28 : 42$

269) $52 : 24 :: x : 36$

270) $140 : x :: 28 : 35$

271) $48 : 280 :: x : 315$

272) $x : 40 :: 135 : 54$

Idem, ídem:

273) $5 : x :: x : 45$

274) $18 : x :: x : 8$

275) $28 : x :: x : 1{,}75$

276) $34 : x :: x : 25$

Idem, ídem:

277) $3{,}4 : x :: 0{,}25 : 1{,}32$

278) $2{,}52 : 3{,}68 :: 1{,}2 : x$

279) $x : 0{,}16 :: 5{,}2 : 0{,}45$

280) $24 + x : x :: 18 : 5$

281) $3{,}7 : 0{,}72 :: 8 - x : x$

282) $5 - x : + x :: 2 : 3.$

283. — Calcular la cuarta proporcional a las fracciones

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$$

284. — Calcular la media proporcional entre las fracciones

$$\frac{4}{5} \text{ y } \frac{6}{7}$$

285. — Demostrar que si dos proporciones tienen iguales los consecuentes, los antecedentes forman una proporción.

286. — Demostrar que en la proporción $a + b : a - b :: c + a : c - a$, es a medio proporcional entre b y c.

287. — Hallar dos números cuya razón sea $\frac{3}{4}$ y su suma 168.

288. — Hallar dos números cuya razón sea, 0,35 y su suma 459.

289. — Hallar dos números cuya razón sea $\frac{2}{3}$ y su diferencia 12.

290. — Hallar dos números cuya razón sea 0,16 y su diferencia 21.

CAPITULO V

Regla de tres.

107. Definiciones. — Se llama *regla de tres* al procedimiento aritmético para resolver los problemas en que figuren cuatro cantidades proporcionales.

Si las cuatro cantidades son directa o inversamente proporcionales, la regla de tres es *directa* o *inversa,* respectivamente.

La regla de tres es *simple* si en el problema no intervienen sino dos magnitudes, y *compuesta* si figuran tres o más magnitudes.

La regla de tres compuesta puede ser *directa, inversa* o *mixta,* según sean entre sí las magnitudes que intervengan.

108. Resolución de las reglas de tres. — Toda regla de tres se puede resolver por medio de dos procedimientos: 1º) *método de las proporciones;* 2º) *método de reducción a la unidad.*

Por cualquiera de los dos procedimientos, después del enunciado del problema, se escriben los valores de las magnitudes dadas y en la línea siguiente se escriben las cantidades correspondientes, una de las cuales deberá ser la incógnita, que se representa por x.

Después se determina si la proporcionalidad es directa o inversa, anotando una D o una I, en su caso, y se resuelve aplicando las propiedades ya estudiadas.

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

109. PROBLEMA 4. — *Si 18 metros de tela han costado $ 41,40 ¿cuánto costarán 25 metros de la misma tela?*

Planteo

$$\left.\begin{array}{lcr} 18 \text{ m.} & \text{———————} & 41{,}40 \ \$ \\ 25 \text{ m.} & \text{———————} & x \ \$ \end{array}\right\} D$$

Para saber si la regla es directa o inversa nos preguntaremos: *Si 18 m cuestan tanto, más metros ¿costarán más o costarán menos?* Como *más metros* cuestan *más pesos,* las magnitudes son proporcionales, luego la regla es *directa,* lo que se indica con la letra *D.*

Solución

1º) *Método de las proporciones.*

Como las magnitudes son proporcionales, (**100**), podemos escribir:

$$\frac{18\text{ m}}{25\text{ m}} = \frac{41{,}40\ \$}{x\ \$}$$

y como la razón de dos cantidades es igual a la de sus medidas respecto de una misma unidad (**49**), tendremos:

$$\frac{18}{25} = \frac{41{,}40}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{41{,}40 \times 25}{18} = 57{,}50\ \$$$

Respuesta: Los 25 m. de tela cuestan 57,50 $.

2º *Método de reducción a la unidad.* — Consiste en determinar el valor de una unidad y después hallar el valor de la cantidad dada. Se razona así: 18 m han costado 41,40 $:

18 m. ———— 41,40 $

Si 18 m. cuestan tanto, 1 m. costará menos, o sea 18 veces menos:

$$1\text{ m.} \text{ ———— } \frac{41{,}440\ \$}{18}$$

y 25 m. costarán 25 veces más:

$$25m \text{ ———— } \frac{41{,}40\ \$ \times 25}{18} = 57{,}50\ \$$$

110. PROBLEMA 5. — *Con 20 litros de nafta un automóvil recorre 130 km. ¿Qué cantidad de nafta gastará para ir de Buenos Aires a Mar del Plata cuya distancia es de 430 km.?*

Planteo

$$\left.\begin{array}{lcl} 130\text{ Km.} & \text{————} & 20\text{ l.} \\ 430\ \text{,,} & \text{————} & x\text{ l.} \end{array}\right\} D$$

Diremos: *si para recorrer 130 km. gasta tanta nafta, para recorrer 430 km., ¿gastará más o gastará menos?* Gastará más, luego las magnitudes son proporcionales y la regla es *directa.*

Solución

1º) *Método de las proporciones.*

Teniendo en cuenta lo visto en (**100**) y el teorema (**49**), resulta:

$$\frac{130}{430} = \frac{20}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{430 \times 20}{130} = 66{,}1 \text{ l.}$$

Respuesta: Para recorrer 430 Km. se necesitan 66,1 litros de nafta.

2º *Método de reducción a la unidad.*

Diremos así: Para recorrer 130 km. se han necesitado 20 litros:

$$130 \text{ Km.} \text{ ——— } 20 \text{ l.}$$

Si 130 Km. se recorren con tanto, para recorrer 1 Km. se gastará menos, o sea 130 veces menos:

$$1 \text{ Km.} \text{ ——— } \frac{20 \text{ l.}}{130}$$

y para recorrer 430 Km. se gastará 430 veces más:

$$430 \text{ Km.} \text{ ——— } \frac{20 \text{ l.} \times 430}{130} = 66{,}1 \text{ l.}$$

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

111. PROBLEMA 6. — *Se sabe que un obrero trabajando 8 horas diarias tarda 14 días para hacer cierto trabajo. Si trabajara 7 horas, ¿cuántos días emplearía?*

Planteo

$$\left.\begin{array}{l} 8 \text{ h.} \text{ ——— } 14 \text{ d.} \\ 7 \text{ h.} \text{ ——— } x \text{ d.} \end{array}\right\} I$$

Hay que averiguar si la regla es directa o inversa. Para eso nos preguntaremos: *Si trabajando 8 horas emplea tanto, trabajando menos, ¿tardará más o tardará menos?* Si trabaja *menos* por día, tardará *más* días, luego la regla es *inversa,* por ser inversamente proporcionales las magnitudes, lo que se indica con la letra I.

Solución

1º) *Método de las proporciones.*

Como las magnitudes son inversamente proporcionales, (**103**), podemos escribir:

$$\frac{8\text{ h}}{7\text{ h}} = \frac{x\text{ d.}}{14\text{ d.}}$$

y como la razón de dos cantidades es igual a la de sus medidas respecto de una misma unidad (**49**), tendremos:

$$\frac{8}{7} = \frac{x}{14} \quad \therefore \quad x = \frac{8 \times 14}{7} = 16 \text{ días.}$$

Respuesta: Si trabaja 7 horas diarias empleará 16 días.

2º) *Método de reducción a la unidad.*

Razonaremos así: Trabajando 8 h. diarias necesita 14 días:

$$8\text{ h.} \;\text{———}\; 14\text{ d.}$$

Si trabajando 8 horas tarda tanto, si trabajara 1 hora diaria tardaría 8 veces más:

$$1\text{ h.} \;\text{———}\; 14\text{ d.} \times 8$$

y trabajando 7 horas tardará 7 veces menos:

$$7\text{ h.} \;\text{———}\; \frac{14\text{ d.} \times 8}{7} = 16 \text{ días.}$$

112. PROBLEMA 7. —*Se han empleado 18 horas para ir en automóvil desde Buenos Aires a Córdoba con una velocidad media de 40 Km. ¿Qué tiempo se empleará a la vuelta a una velocidad media de 55 Km.?*

Planteo

$$\left.\begin{array}{l} 40\text{ Km.} \;\text{———}\; 18\text{ h.} \\ 55\text{ Km.} \;\text{———}\; x\text{ h.} \end{array}\right\} I$$

Diremos: *si a 40 Km. se tarda tanto, a 55 Km. ¿se tardará más o se tardará menos?* Se tardará menos, luego las magnitudes son inversamente proporcionales, es decir, la regla es *inversa*.

Solución

1º) *Método de las proporciones.*

Teniendo en cuenta lo visto en (**103**) y en (**49**), podemos escribir:

$$\frac{55}{40} = \frac{18}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{40 \times 18}{55} = 13 \text{ horas } 5 \text{ minutos.}$$

Respuesta: A la velocidad de 55 Km. tardará 13 h. 5 m.

2º) *Método de reducción a la unidad.*

Razonaremos así: A razón de 40 Km. se ha tardado 18 h.:

40 Km. ———— 18 h.

luego a una velocidad de 1 Km. se tardará 40 veces más:

1 Km. ———— 18 h. $\times$ 40

y a una velocidad de 55 Km. se tardará 55 veces menos:

$$55 \text{ Km.} \text{ ———— } \frac{18 \text{ h.} \times 40}{55} = 13 \text{ h. } 5 \text{ m.}$$

113. Observación. — La cuestión fundamental en una regla de tres es determinar previamente si es *directa* o es *inversa*. Observemos en los problemas (**109**) y (**110**) resueltos, que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando *aumentando* una cantidad *aumenta* la otra, o *disminuyendo* una *disminuye* la otra.

Sintéticamente, podemos decir que la regla es *directa,* cuando las cantidades van de *más a más,* o de *menos a menos.*

En los problemas (**111**) y (**112**) resueltos, observemos que dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando *aumentando* una cantidad *disminuye* la otra, o *disminuyendo* una *aumenta* la otra.

Podemos decir, pues, que la regla es *inversa* cuando las cantidades van de *más a menos,* o de *menos a más.*

REGLA DE TRES COMPUESTA

114. Problema 8. —*Se ha pagado 25 $ por transportar 3.000 Kg. de carga a una distancia de 235 Km. ¿Cuánto habrá que pagar para transportar por la misma vía 1.800 Kg. a una distancia de 690 Km.?*

Planteo

3.000 Kg.	———	235 Km.	———	25 $
1.800 „	———	690 „	———	x „

Solución

Una vez escritas las cantidades de manera que se correspondan las homogéneas, cuidando de dejar la incógnita al final, se compara cada par de cantidades homogéneas con el último par, obteniéndose tantas reglas de tres simples como pares de cantidades haya menos uno.

1º *Método de las proporciones.*

Comparemos las cantidades 3.000 Kg. y 1.800 Kg. con 25 $ y x $. Si el transporte de 3.000 Kg. cuesta 25 $, el transporte de 1.800 Kg. costará *menos* pesos; va de *menos a menos*, luego es una regla de tres directa, y podremos escribir:

$$3.000 : 1.800 :: 25 : x \qquad (1)$$

Comparemos las cantidades 235 Km. y 690 Km. con 25 $ y x $. Si el transporte de cierta carga a una distancia de 235 Km. cuesta 25 $, el transporte de la misma carga a una distancia de 690 Km. costará *más pesos;* va de *más a más*, luego es una regla de tres directa, y podremos escribir:

$$235 : 690 :: 25 : x \qquad (2)$$

Como la razón $25 : x$ es común a las proporciones (1) y (2), las podremos escribir de esta manera:

$$\left.\begin{array}{l} 3.000 : 1.800 \\ 235 : 690 \end{array}\right\} :: 25 : x$$

Si multiplicamos los antecedentes y los consecuentes de las primeras razones, resultará:

$$3.000 \times 235 : 1.800 \times 690 :: 25 : x \qquad (3)$$

de donde se obtiene que:

$$x = \frac{1.800 \times 690 \times 25}{3.000 \times 235} = 44{,}04 \text{ \$}$$

Respuesta: El transporte de 1.800 Kg. a 690 Km. de distancia cuesta 44,04 $.

Racionalmente, el procedimiento seguido se explica de esta manera:

Si el transporte de 3.000 Kg. de carga ha costado 25 $, el transporte de 1.800 Kg. a la misma distancia costará menos pesos; va de menos a menos, luego es una regla de tres directa, y podemos escribir:

$$3000 : 1.800 : : 25 : y \qquad (4)$$

Si el transporte de cierta carga a una distancia de 235 Km. ha costado y pesos, para transportar la misma carga a 690 Km. costará más pesos; va de más a más, luego es una regla de tres directa, y tenemos:

$$235 : 690 : : y : x \qquad (5)$$

Multiplicando ordenadamente los antecedentes y los consecuentes de las proporciones (1) y (2), resulta:

$$3.000 \times 235 : 1.800 \times 690 : : 25 \times y : y \times x$$

simplificando en la segunda razón y, que multiplica y divide, queda:

$$3.000 \times 235 : 1.800 \times 690 : : 25 : x \qquad (6)$$

Como puede verse, la proporción (6) es la misma proporción (3).

2º) *Método de reducción a la unidad.*

$$\begin{array}{lllll} 3.000 \text{ Kg.} & \text{———} & 235 \text{ Km.} & \text{———} & 25 \text{ \$} \\ 1.800 \text{ ,,} & \text{———} & 690 \text{ ,,} & \text{———} & x \text{ ,,} \end{array}$$

Si para transportar 3.000 Kg. a 235 Km. se ha pagado 25 $, para transportar 1 Kg. a la misma distancia se pagará 3.000 veces menos:

$$1 \text{ Kg.} \text{ ——— } 235 \text{ Km.} \text{ ——— } \frac{25}{3.000}$$

y para transportar 1.800 Kg. se pagará 1.800 veces más:

$$1.800 \text{ Kg.} \text{ ——— } 235 \text{ Km.} \text{ ——— } \frac{25 \times 1.800}{3.000}$$

Pero si para transportar 1.800 Kg. a 235 Km. se paga tanto, para transportar la misma carga a 1 Km. se pagará 235 veces menos:

$$1.800 \text{ Kg.} \text{ ——— } 1 \text{ Km.} \text{ ——— } \frac{25 \times 1.800}{3.000 \times 235}$$

y para transportar la misma carga a 690 Km. se pagará 690 veces más:

$$1.800 \text{ Kg.} \text{ ——— } 690 \text{ Km.} \text{ ——— } \frac{25 \times 1.800 \times 690}{3.000 \times 235} = 44{,}04 \ \$$$

115. PROBLEMA 9. — *Si 12 albañiles, trabajando 8 horas diarias, hacen 70 metros de pared en 10 días, para hacer una pared de 50 metros trabajando 15 albañiles 6 horas diarias, ¿cuánto tiempo emplearán?*

Planteo

12 alb. ———	8 h. ———	70 m. ———	10 días
15 alb. ———	6 h. ———	50 m. ———	x días

Solución

1º *Método de las proporciones.*

Comparemos las cantidades 12 alb. y 15 alb. con 10 días y x días. Si 12 albañiles hacen cierto trabajo en 10 días, 15 albañiles para hacer el mismo trabajo tardarán menos días; va de *más a menos*, luego es una regla de tres inversa, y podremos escribir:

$$15 : 12 :: 10 : x \qquad (1)$$

Comparemos las cantidades 8 horas y 6 horas con 10 días y x días. — Si un grupo de obreros trabajando 8 horas diarias hacen cierto trabajo en 10 días, trabajando 6 horas diarias para hacer el mismo trabajo tardarán más días; va de *menos a más*, luego es una regla de tres inversa, y podremos escribir:

$$6 : 8 :: 10 : x \qquad (2)$$

Comparemos las cantidades 70 m. y 50 m. con 10 días y x días. — Si para hacer 70 m. de un trabajo un grupo de obreros ha tardado 10 días, para hacer 50 m. del mismo trabajo el mismo grupo de obreros tardará menos días; va de *menos a menos*, luego es una regla tres directa, y podremos escribir:

$$70 : 50 :: 10 : x \qquad (3)$$

Las proporciones (1), (2) y (3) tienen común la razón $10 : x$ y las podemos escribir de esta manera:

$$\left.\begin{array}{r} 15 : 12 \\ 6 : 8 \\ 70 : 50 \end{array}\right\} :: 10 : x \qquad (4)$$

Si multiplicamos los antecedentes y los consecuentes de las primeras razones, resultará:

$$15 \times 6 \times 70 : 12 \times 8 \times 50 :: 10 : x$$

de donde se obtiene que:

$$x = \frac{12 \times 8 \times 50 \times 10}{15 \times 6 \times 70} = \frac{160}{21} = 7 \text{ d. } 3 \text{ h. } 42 \text{ m.}$$

Respuesta: Los 15 albañiles trabajando 6 horas diarias para hacer 50 m. de pared tardarán 7 días y 4 horas, aproximadamente.

NOTA. — *Al resolver un problema de regla de tres compuesta por el método de las proporciones, en lugar de escribir las proporciones (1), (2) y (3), se escriben directamente en la forma escrita en (4), y luego se continúa en la forma explicada.*

2º *Método de reducción a la unidad.*

12 alb. ——— 8 h. ——— 70 m. ——— 10 d.
15 „ ——— 6 „ ——— 50 „ ——— x „

Si 12 albañiles hacen cierto trabajo en 10 días, 1 albañil tardará 12 veces más para hacer el mismo trabajo:

1 alb. ——— 8 h ——— 70 m. ——— 10×12

y 15 albañiles tardarán 15 veces menos:

15 alb. ——— 8 h. ——— 70 m. ——— $\dfrac{10 \text{ d.} \times 12}{15}$

Pero si trabajando 8 horas tardan tanto, trabajando 1 hora tardarán 8 veces más:

15 alb. ——— 1 h. ——— 70 m. ——— $\dfrac{10 \text{ d.} \times 12 \times 8}{15}$

y trabajando 6 horas diarias tardarán 6 veces menos:

15 alb. ——— 6 h. ——— 70 m. ——— $\dfrac{10 \text{ d.} \times 12 \times 8}{15 \times 6}$

Si para hacer 70 m. los 15 albañiles tardan tanto, para hacer 1 m. tardarán 70 veces menos tiempo:

$$15 \text{ alb.} \text{ ——— } 6 \text{ h.} \text{ ——— } 1 \text{ m.} \text{ ——— } \frac{10 \text{ d.} \times 12 \times 8}{15 \times 6 \times 70}$$

y para hacer 50 m. de pared tardarán 50 veces más:

$$15 \text{ alb.} \text{ ——— } 6 \text{ h.} \text{ ——— } 50 \text{ m.} \text{ ——— } \frac{10 \text{ d.} \times 12 \times 8 \times 50}{15 \times 6 \times 70} = 7 \text{ d. } 3 \text{ h. } 42 \text{ m.}$$

REGLA DEL TANTO POR CIENTO

116. Generalidades. — Para conocer el *beneficio* o *ganancia* que obtiene un comerciante al vender sus mercaderías, se indica generalmente la utilidad que resulta por cada 100 pesos, o cada 100 centavos.

Así, por ejemplo, si un comerciante gana 25 centavos por cada peso, la ganancia es del 25 por ciento, y se indicará así: 25 %; si un mineral de hierro da 37 Tm. de hierro por cada 100 Tm. de mineral, su rendimiento es del 37 %; si por cada 100 Kg. de trigo se obtienen 72 Kg. de harina, su rendimiento es del 72 %, etc.

Se evalúa en *tanto por ciento* (%), o en *tanto por mil* (‰) las *comisiones* que pagan los comerciantes a sus corredores, empleados, etc.; los *impuestos* a los réditos; la *contribución territorial;* los *aportes* a las Cajas de Jubilaciones; la *composición* de los cuerpos compuestos; los *honorarios* de algunos profesionales; la *moneda de quiebra* con que la masa de un comerciante fallido paga las deudas de éste; etc.

El tanto por ciento indica siempre la proporcionalidad de las magnitudes a que se refiere. Por consiguiente, los problemas sobre tanto por ciento se reducen a reglas de tres simples directas.

117. Beneficios comerciales. — En el comercio las *utilidades* o *beneficios* se expresan en *tanto por ciento del precio de venta.*

El *beneficio bruto* es la diferencia entre el *precio de venta* y el *precio de compra.*

El *beneficio neto* es el beneficio bruto menos los *gastos generales:* alquiler, salarios, impuestos.

118. Problema 10. — *El mineral de hierro de Lagunillas produce el 37 % de su peso de hierro. Calcular la cantidad de hierro que se obtendrá de 8500 Tm. de mineral.*

Solución

$$\begin{array}{lcl} 100 \text{ Tm.} & \text{———} & 37 \text{ Tm.} \\ 8.500 \text{ „} & \text{———} & x \text{ „} \end{array}$$

El rendimiento del mineral es proporcional a su peso, luego:

$$100 : 8.500 :: 37 : x$$

$$\therefore\ x = \frac{8.500 \times 37}{100} = 3.145 \text{ Tm.}$$

Respuesta: Las 8.500 Tm. de mineral producen 3.145 Tm. de hierro.

119. Problema 11. — *Un comerciante compra mercaderías por valor de 480 $. ¿En cuánto deberá venderlas para ganar el 30 %?*

Solución

$$\begin{array}{lcl} 100 \text{ \$} & \text{———} & 30 \text{ \$} \\ 480 \text{ „} & \text{———} & x \text{ „} \end{array}$$

Como la regla de tres es directa, tenemos:

$$\frac{480}{100} = \frac{30}{x} \qquad \therefore \qquad x = \frac{480 \times 30}{100} = 144 \text{ \$} \qquad (1)$$

El beneficio del comerciante es 144 $, luego deberá vender las mercaderías en 480 + 144 = 624 $.

120. Observación. — En la solución del problema tenemos

$$480 + 144 = 624$$

pero en lugar de 144 podemos poner su valor indicado en (1), y quedará:

$$480 + \frac{480 \times 30}{100} = 624$$

y sacando 480 como factor común, queda:

$$480\left(1+\frac{100}{30}\right) = 624$$

o bien:

$$480 \times 1{,}3 = 624$$

expresión que nos dice que, *para calcular el precio de reventa sabiendo el % de ganancia, basta dividir por 100 el % dado y sumarle 1, multiplicando esa suma por el precio de compra.*

121. PROBLEMA 12. —*Se compra un juego de muebles en 680 $ y se quiere ganar el 45 %, ¿en cuánto hay que venderlo?*

Solución

De acuerdo con la observación anterior, haremos así:

$$\begin{aligned} 45 : 100 &= 0{,}45 \\ 1+0{,}45 &= 1{,}45 \\ 680 \times 1{,}45 &= 986 \ \$ \end{aligned}$$

Respuesta: Habrá que venderlo en 986 $.

EJERCICIOS

291. — Una lata de aceite Y. P. F. de 18,750 litros vale 13,80 $. ¿Cuánto costarán los 6 litros que necesita un automóvil?

292. — Se sabe que 100 pesos chilenos valen 14,80 $ m/n. ¿Cuántos pesos chilenos se podrán comprar con 350 $ m/n.?

293. — Una partida de 25 bolsas de centeno de 73 kg. cada una se ha comprado en 126,25 $. ¿Cuánto costarán 140 bolsas?

294. — Una masa de aire ocupa un volumen de 4,5 litros bajo una presión de 3 atmósferas. Calcular su volumen, a la misma temperatura, bajo una presión de 2,25 atmósferas.

295. — Un equipo de 18 obreros emplea 24 días para hacer cierto trabajo, ¿cuánto tiempo emplearán 16 obreros para hacer el mismo trabajo?

296. — Para recorrer cierta distancia, la rueda de un carro, que mide 1,80 m, ha dado 250 vueltas. ¿Cuántas vueltas habría dado si su diámetro fuese de 2,20 m.?

297. — Un empresario puede hacer una obra en 90 días con un equipo de 65 obreros trabajando 8 horas diarias. Para terminar el trabajo en 60 días, ¿cuntos obreros se necesitan si trabajan 9 horas diarias?

298. — Para tejer 40 metros de paño de 0,70 m. de ancho se han empleado 62 kg. de lana. Con 160 kg. de lana ¿qué cantidad de paño de 0,92 m. de ancho se podrán tejer?

299. — En 15 días, trabajando 8 horas diarias, 25 obreros hacen 150 m. de un trabajo cuya dificultad está representada por 4. ¿Cuántos días emplearán 25 obreros, trabajando 9 horas diarias para hacer 80 m. de un trabajo cuya dificultad está representada por 5?

300. — En Catamarca existe un canal de riego, llamado Río del Valle, de 2,60 m de ancho y 3 m de profundidad. Para hacer un tramo de 7 Km se han empleado en su construcción 700 obreros que han trabajado a razón de 8 horas por día, durante 18 meses de 30 días y 6 días más. ¿Cuántos días de 9 horas, necesitarán 560 obreros para hacer otro canal de 4½ Km de largo, por 2,80 m. de ancho y 2,40 m de profundidad, en un terreno cuya dureza es 1/3 del anterior?

301. — Un comerciante compra por valor de 1.200 $. Le hacen el 5 % de descuento y gana en la venta el 18 %. ¿Cuál es su ganancia?

302. — En los Yacimientos Petrolíferos de Salta, de un pozo de petróleo se extrae a razón de 10 horas por día y emplea 4 días en llenar un estanque de 270 m^3. ¿En cuántos días llenará otro estanque de 20 m de diámetro y 2,40 m de profundiad, extrayendo 7 horas por día?

303. — Si se venden 250 hectolitros de trigo en 4.125 $, la ganancia es del 15 % sobre el precio de compra. ¿Cuál es el precio de compra de un hectólitro de trigo?

304. — Se ha pagado 4.875 $ por cierta cantidad de mineral de cobre a razón de 6,50 $ el quintal. El mineral contiene el 15 % de su peso de cobre y se pierde en la operación el 2 % del cobre del mineral y el laboreo cuesta 2,40 $ por quintal. ¿Cuánto vale el kilogramo de cobre obtenido?

305. — El jabón cuando se seca pierde un décimo de su peso. Un comerciante compra cierta cantidad de jabón fresco y una vez seco lo vende a el kilogramo, ganando el 25 % en la venta. ¿Cuánto cuesta el kilogramo de jabón fresco?

306. — Se compran 3.850 lamparitas a 19,50 $ el cien. Se calculan las roturas en el 12 % y se quiere ganar el 25 %. ¿Cuál será el precio de venta de la docena de lamparitas?

307. — Un viajante de comercio gana 5,30 $ por día y el 3 % de comisión sobre las ventas que realice. Sus gastos diarios ascienden a 10,70 $. Calcular el volumen de las ventas realizadas sabiendo que después de 45 días de viaje tiene una ganancia de 380 $.

CAPITULO VI

Interés simple.

122. Definiciones. — Se llama *capital,* al caudal que alguno posee (campos, ganados, casas, muebles, títulos de renta, industrias, dinero en efectivo, etc.), valuado en dinero.

Cuando una persona entrega a otra un cierto capital en concepto de préstamo, el beneficio o utilidad que la primera recibe de la segunda por el uso que ésta hizo de la cantidad prestada, se llama *interés, renta* o *rédito.*

El interés se fija teniendo en cuenta el *capital* y el *tiempo.* Si no se estipula previamente, en qué condiciones o a cuánto ha de ascender el interés, la manera usual de calcularlo, es fijar el importe o precio que debería pagarse por cada unidad o cien del capital prestado, al final de cada período de tiempo. Esta cantidad se llama *tasa del interés o razón.*

El capital que se toma como base para fijar el interés, se llama *capital regulador.*

Cuando la tasa del interés se establece a razón de un tanto por cada 100 unidades monetarias, se llama *tanto por ciento,* y se expresa así: %; y *tanto por uno,* cuando se fija un tanto por cada unidad. Es decir, que el tanto por uno es la centésima parte del tanto por ciento.

El factor *tiempo.* es necesario tenerlo en cuenta en dos *circunstancias distintas:* tanto en la duración del préstamo, como en los períodos de tiempo con arreglo a los cuales ha sido estipulada la tasa del interés.

El tiempo es generalmente expresado en *años,* pero puede serlo también en *semestres, trimestres, meses, días* y en cualquier otra unidad de tiempo determinada, en cuyo caso se distingue con los nombres de *interés semestral, trimestral, mensual, diario, etc.*

Hay dos clases de interés, llamados *simple* uno, y *compuesto* el otro. Es *simple,* cuando los intereses que devenga el capital no se acumulan a éste, es decir que el que otorga el préstamo, puede retirar los beneficios producidos al final de cada período de tiempo. Es *compuesto,* cuando el interés producido por el capital, se acumula a éste, al cabo de cada unidad de tiempo, con el fin de producir a su vez nuevos intereses.

El procedimiento que permite determinar el *interés* o *ganancia,* de un *capital* dado en préstamo durante un *tiempo* y a un *tanto por ciento* convenido, se llama *Regla de Interés.*

La práctica ha establecido en operaciones de esta naturaleza, la siguiente:

123. CONVENCIÓN. — *El interés es proporcional al capital, al tiempo y a la tasa.*

Las cuestiones que resuelve la Regla de Interés, constituyen un caso particular de la Regla de Tres.

124. Determinación de la fórmula general del interés simple. — Llamemos C al capital; t, al tanto por ciento; n, el tiempo expresado en años; e I, al interés del capital al cabo del tiempo n.

Según la convención establecida, la cuestión queda reducida a la regla de tres compuesta siguiente:

Si \$ 100, en 1 año, ganan \$ t
„ C, „ n „ ganarán „ x

Los capitales 100 y C son directamente proporcionales a sus intereses respectivos.

Resolviendo:

$$\left.\begin{matrix} 100 : C \\ 1 : n \end{matrix}\right\} : : t : x$$

por lo tanto,

$$100 \times 1 : C \times n : : t : x$$

$$\therefore \quad x = \frac{C \times n \times t}{100}$$

pero, $x = I$ de donde:

$$I = \frac{C \times n \times t}{100} \qquad (I)$$

que es la fórmula fundamental del interés simple.

Luego: *El interés es igual al producto del capital, por el tiempo y el tanto por ciento, sobre 100.*

125. Fórmulas derivadas. — De la fórmula fundamental del interés y por simple transposición de términos deducimos las siguientes:

$$100 \times I = C \times n \times t$$

II) $C = \dfrac{100\, I}{n\, t}$ Fórmula del *capital*

III) $n = \dfrac{100\, I}{C\, t}$ Fórmula del *tiempo*

IV) $t = \dfrac{100\, I}{C\, n}$ Fórmula del *tanto por ciento*

126. Fórmulas del interés simple en función del tiempo expresado en meses y días. — Cuando el tiempo está expresado en meses o en días, las fórmulas anteriores se transforman en otras con sólo expresar el tiempo en forma fraccionaria, puesto que un mes es $\frac{1}{12}$ de año y un día es $\frac{1}{360}$ de año, siempre que el año considerado sea el comercial. Si el tiempo estuviese expresado en años y meses, o en años, meses y días, es de práctica reducir todo el tiempo a meses o a días.

Si en la fórmula general del interés simple hacemos: $n = 1$ año, tendremos:

$$I = \frac{C\, t}{100}$$

que es el interés simple para un año; el mismo para un mes $= \frac{1}{12}$ de año, será:

$$I = \frac{C\, t}{100} \times \frac{1}{12} = \frac{C\, t}{1200}$$

y para *m*, meses:

$$I = \frac{C\, m\, t}{1200}$$

que es la fórmula del interés, en función del tiempo expresado en meses.

Con igual razonamiento, el interés simple para un día $= \frac{1}{360}$ de año, será:

$$I = \frac{C\,t}{100} \times \frac{1}{360} = \frac{C\,t}{36000}$$

y para d, días:

$$I = \frac{C\,d\,t}{36000}$$

que es la fórmula del interés, en función del tiempo expresado en días.

De estas dos últimas fórmulas, deducimos las correspondientes del capital, tiempo y tanto por ciento.

127. Cuadro de las fórmulas del interés simple, en función del tiempo expresado en años, meses y días.

AÑOS	MESES	DIAS
$I = \frac{C\,n\,t}{100}$	$I = \frac{C\,m\,t}{1200}$	$I = \frac{C\,d\,t}{36000}$
$C = \frac{100\,I}{n\,t}$	$C = \frac{1200\,I}{m\,t}$	$C = \frac{36000\,I}{d\,t}$
$n = \frac{100\,I}{C\,t}$	$m = \frac{1200\,I}{C\,t}$	$d = \frac{36000\,I}{C\,t}$
$t = \frac{100\,I}{C\,n}$	$t = \frac{1200\,I}{C\,m}$	$t = \frac{36000\,I}{C\,d}$

En todas estas fórmulas, el tanto por ciento es anual y el tiempo está referido para el año de 360 días, pero el procedimiento es idéntico para las demás unidades usuales de tiempo.

Si en las cuestiones del interés simple, el tiempo está expresado en días, es forzoso distinguir dos casos: el *Interés práctico,* cuando el tiempo se refiere al *año comercial* de 360 días, llamado así porque prácticamente es el que se emplea en el comercio, y el *Interés real,* cuando el tiempo se refiere al *año civil de 365 días,* siendo este interés el más lógico por ser el más exacto.

Interés práctico: $\quad I = \frac{C\,d\,t}{36000}$

Interés real $\quad$: $\quad I = \frac{C\,d\,t}{36500}$

Por lo tanto, si en las operaciones de esta clase no se especifica el año, debe entenderse año comercial.

128. Tabla para calcular el tiempo comprendido entre dos fechas. — Cuando las dos fechas son las mismas, el tiempo (número de días) se halla indicado por el cruce de la columna y de la línea correspondiente a los meses en cuestión.

A	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Setiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
De Enero	**365**	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
Febrero	334	**365**	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
Marzo	306	337	**365**	31	61	92	122	153	184	214	245	275
Abril	275	306	334	**365**	30	61	91	122	153	183	214	244
Mayo	245	276	304	335	**365**	31	61	92	123	153	184	214
Junio	214	245	273	304	334	**365**	30	61	92	123	153	185
Julio	184	215	243	274	304	335	**365**	31	62	92	123	153
Agosto	153	184	212	243	273	304	334	**365**	31	61	92	122
Setiemb.	122	153	181	212	242	273	303	334	**365**	30	61	91
Octubre	92	123	151	182	212	243	273	304	335	**365**	31	61
Noviemb.	61	92	120	151	181	212	242	273	304	334	**365**	30
Diciemb.	31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	**365**

Si las dos fechas son diferentes, por ejemplo: del 9 de marzo al 14 de agosto, se cuentan según la tabla del 9 de marzo al 9 de agosto 153 días, a los que se deberán sumar los 5 días que faltan para el 14 de agosto y tendremos así, 158 días, tiempo que media entre el 9 de marzo y el 14 de agosto.

129. PROBLEMA 13. — *¿Qué interés producirán $ 25.700 al cabo de 3 años, colocados al 7 % anual?*

Solución

Aplicando la regla de tres:

Si \$ 100, en 1 año ganan \$ 7
„ 25.700, „ 3 „ „ „ x

$$\left.\begin{array}{l}100 : 25.700\\ 1 : 3\end{array}\right\} : : 7 : x$$

$$100 \times 1 : 25.700 \times 3 : : 7 : x$$

de donde:

$$x = \frac{25.700 \times 3 \times 7}{100} = \$\ 5.397.$$

Método de reducción a la unidad:

Si \$ 100, en 1 año, producen \$ 7 de interés

„ 1 „ „ „ producirá $\frac{7}{100}$ „ „

„ 25.700 „ „ „ „ $\frac{7 \times 25.700}{100}$ de interés.

„ 25.700 „ 3 „ „ $\frac{7 \times 25.700 \times 3}{100} = \$\ 5.397.$

Aplicando la fórmula general:

$$I = \frac{C\,n\,t}{100} = \frac{25.700 \times 3 \times 7}{100} = 5.397$$

130. PROBLEMA 14. — *¿Qué beneficio producirán \$ 4.620, al 6 % anual durante 5 meses?*

Solución

Aplicando la fórmula del interés para el tiempo expresado en meses, tenemos:

$$I = \frac{C\,m\,t}{1.200} = \frac{4.620 \times 5 \times 6}{1.200} = \$\ 115{,}50$$

131. PROBLEMA 15. — *¿Cuál es el capital que ha producido \$ 485,80 durante 8 años, al 5 % anual?*

Solución

Por regla de tres:

Si \$ 5, son producidos por \$ 100 en 1 año

„ 485,80 serán „ „ „ x „ 8 años

Los capitales son inversamente proporcionales a los tiempos, cuando producen el mismo interés en tiempos distintos:

$$\left.\begin{array}{l} 5 : 485{,}80 \\ 8 : 1 \end{array}\right\} : : 100 : x$$

$$5 \times 8 : 485{,}80 \times 1 : : 100 : x$$

de donde,

$$x = \frac{485{,}80 \times 100}{5 \times 8} = 1214{,}50$$

Aplicando la fórmula del capital:

Se tiene, $C = \dfrac{100\ I}{n\ t}$

o bien, $C = \dfrac{100 \times 485{,}80}{5 \times 8}$

de donde: $C = \$\ 1214{,}50$

Por reducción a la unidad:

Si \$ 5, en 1 año, es el interés de \$ 100

„ 1 „ „ „ será „ „ „ „ $\dfrac{100}{5}$

„ 485,80 „ „ „ „ „ „ „ „ $\dfrac{100 \times 485{,}80}{5}$

y, „ 485,80 „ 8 años „ „ „ „ „ $\dfrac{100 \times 485{,}80}{5 \times 8}$

de donde: $C = \$\ 1214{,}50$

132. PROBLEMA 16. — *¿Cuál es el capital que ha producido \$ 348,50 durante 6 años y 5 meses, al 4 ½ % anual?*

Solución

6 años y 5 meses = 77 meses.

La fórmula $C = \dfrac{1.200\ I}{m\ t}$

nos da: $$C = \frac{1.200 \times 348,50}{4,5 \times 77} = \$ \ 1.206,92$$

133. PROBLEMA 17. —*Un capital de $ 7.791,10, colocado durante 2 años, 3 meses y 20 días, ha producido $ 628,70. ¿A qué tanto por ciento estuvo colocado?*

Solución

2 años, 3 meses y 20 días es igual a 830 días.

Por regla de tres.

$ 7.791,10 producen $ 628,70 en 830 días
„ 100 „ „ x „ 360 „

Por lo tanto:

$$\left.\begin{matrix} 7.791,10 : 100 \\ 830 \quad : 360 \end{matrix}\right\} : : 628,70 : x$$

$$7.791,10 \times 830 : 100 \times 360 : : 628,70 : x$$

de donde $$x = \frac{100 \times 360 \times 628,70}{7.791,10 \times 830} = 3,50 \ \%$$

Aplicando la fórmula.

Se tiene, $$t = \frac{36000 \ I}{C.d}$$

o bien, $$t = \frac{36000 \times 628,70}{7791,10 \times 830}$$

de donde: $$t = 3,50 \ \%$$

Por reducción a la unidad.

Si $ 7.791,10, en 830 días producen $ 628,70 de interés

„ 1 „ „ „ producirá $\frac{628,70}{7.791,10}$ „ „

„ „ „ 1 día „ $\frac{628,70}{7.791,10 \times 830}$

„ 100 „ 360 días „ $\frac{628,70 \times 100 \times 360}{7.791,10 \times 830}$

de donde $$t = 3,50 \ \%$$

134. PROBLEMA 18. — *¿A qué tanto por ciento $ 12.800 han producido $ 2.280 de interés durante 3 años y 9 meses?*

Solución

3 años y 9 meses es igual a 45 meses.

Se tiene, $$t = \frac{1.200\ I}{C\ m}$$

o bien, $$t = \frac{1.200 \times 2.280}{12.800 \times 45} = 4\ \tfrac{3}{4}\ \%$$

135. PROBLEMA 19. — *¿Durante qué tiempo un capital de $ 10.700 colocado al 6 % de interés anual, ha producido $ 1.572,90 de interés?*

Solución

Aplicando la regla de tres.

Si $ 100 ganan $ 6 en 1 año

„ 10.700 ganarán „ 1.572,90 „ x años

Es inversa la relación de los capitales y los tiempos:

$$\left.\begin{array}{r} 10.700 : 100 \\ 6 : 1.572,90 \end{array}\right\} : : 1 : x$$

$$10.700 \times 6 : 100 \times 1.572,90 : : 1 : x$$

de donde: $$x = \frac{100 \times 1.572,90}{10.700 \times 6} = 2,45 \text{ años.}$$

o sea: $$x = 2 \text{ años, } 5 \text{ meses y } 12 \text{ días.}$$

Aplicando la fórmula.

Se tiene, $$n = \frac{100\ I}{C\ t}$$

de donde: $$n = \frac{100 \times 1.572,90}{10.700 \times 6} = 2,45 \text{ años.}$$

136. PROBLEMA 20. — *Calcular el interés producido por un capital de $ 35.900 al 6,25 %, durante 175 días de año legal.*

Solución

La fórmula $$I = \frac{C\ d\ t}{36.500}$$

nos da, $I = \dfrac{35.900 \times 175 \times 6{,}25}{36.500}$

de donde: $I = \$\ 1.075{,}77$

137. Tasa semestral, trimestral y mensual. — En la práctica el tanto por ciento se refiere generalmente al período de un año para el tiempo, y éste se expresa en muchas ocasiones en meses o días, según ya hemos visto. Puede ocurrir, sin embargo, que la tasa del interés sea *semestral, trimestral o mensual.* En estos casos se convierte en tasa anual, multiplicándola respectivamente por el número de semestres, trimestres o meses, que tiene el año. Pero se acostumbra también ajustar los cálculos a la tasa del interés estipulada, debiendo entonces reducirse dicho tiempo a la nueva unidad.

138. Problema 21. — *¿Qué interés producen $ 600, al 5 % semestral durante 7 meses?*

Solución

1er. Procedimiento: Convirtiendo la tasa semestral en anual, se tiene:

$$t = 5 \times 2 = 10\ \%\ \text{anual.}$$

$$\therefore \quad I = \frac{C\,m\,t}{1.200} = \frac{600 \times 7 \times 10}{1.200} = \$\ 35$$

2º *Procedimiento:* Reduciendo el tiempo a la nueva unidad:

$$1\ \text{mes} = \frac{1}{6}\ \text{de semestre}$$

$$7\ \text{meses} = \frac{7}{6}\ \text{de semestres}$$

$$\therefore \quad I = \frac{C\,n\,t}{100} = \frac{600 \times \frac{7}{6} \times 5}{100} = \frac{600 \times 7 \times 5}{100 \times 6} = \$\ 35.$$

139. Problema 22. — *¿Qué interés producen $ 4.000, al 3 % trimestral en 1 año, 3 meses y 12 días?*

Solución

1 año, 3 meses y 12 días = 462 días.

$$1\ \text{día} = \frac{1}{90}\ \text{de trimestre}$$

$$462\ \text{días} = \frac{462}{90}\ \text{de trimestre}$$

aplicando la fórmula,

$$I = \frac{C\,n\,t}{100} = \frac{4.000 \times \frac{462}{90} \times 3}{100} = \frac{4.000 \times 462 \times 3}{100 \times 90} = \$\ 616$$

140. PROBLEMA 23. — *¿Qué capital habrá producido $ 520 de interés al 2 % mensual en 78 días?*

Solución

$$1 \text{ día} = \frac{1}{30} \text{ de mes}$$

$$78 \text{ días} = \frac{78}{30} \text{ de mes}$$

La fórmula nos da:

$$C = \frac{100\,I}{n\,t} = \frac{100 \times 520}{\frac{78}{30} \times 2} = \frac{100 \times 520 \times 30}{78 \times 2} = \$\ 10.000$$

141. Tanto por uno. — En lugar de aplicar el *tanto por ciento,* en los cálculos del interés simple, se acostumbra en la práctica emplear el *tanto por uno,* para simplificar las operaciones.

La fórmula general,

$$I = \frac{C\,n\,t}{100}$$

puede también escribirse:

$$I = C \times \frac{t}{100} \times n \qquad (1)$$

El *tanto por uno,* que designamos con la letra *i*, es la centésima parte del tanto por ciento; es decir:

$$\frac{t}{100} = i$$

y reemplazando en (1) este valor, se tiene:

$$I = C\ i\ n$$

que es la fórmula del interés simple en función del tanto por uno.

De esta fórmula deducimos las siguientes:

$$C = \frac{I}{i\,n} \quad \textit{Fórmula del capital}$$

$$i = \frac{I}{C\,n} \quad \textit{Fórmula del tanto por uno}$$

$$n = \frac{I}{C\,i} \quad \textit{Fórmula del tiempo}$$

Si el tiempo estuviera expresado en meses o días, el procedimiento a seguir es análogo al que hemos empleado para transformar la fórmula del interés simple, cuando la tasa es el tanto por ciento anual.

$$\therefore \quad I = \frac{C\,i\,m}{12}; \quad I = \frac{C\,i\,d}{360}; \quad I = \frac{C\,i\,d}{365}$$

142. Cuadro de las fórmulas del interés simple en función del tanto por uno. — En lo sucesivo emplearemos con preferencia estas fórmulas para resolver las cuestiones en que intervienen el interés.

AÑOS	MESES	DIAS	AÑO CIVIL
$I = C\,i\,n$	$I = \frac{C\,i\,m}{12}$	$I = \frac{C\,i\,d}{360}$	$I = \frac{C\,i\,d}{365}$
$C = \frac{I}{i\,n}$	$C = \frac{12\,I}{i\,m}$	$C = \frac{360\,I}{i\,d}$	$C = \frac{365\,I}{i\,d}$
$i = \frac{I}{C\,n}$	$i = \frac{12\,I}{C\,m}$	$i = \frac{360\,I}{C\,d}$	$i = \frac{365\,I}{C\,d}$
$n = \frac{I}{C\,i}$	$m = \frac{12\,I}{C\,i}$	$d = \frac{360\,I}{C\,i}$	$d = \frac{365\,I}{C\,i}$

143. PROBLEMA 24. — *Se pide el interés de \$ 7.854 durante 8 años a razón del 5 % anual.*

Solución

Elementos de cálculo: $C = \$\ 7.854$; $i = 0{,}05$; $n = 8$ años.

La fórmula general,

$$I = C\,i\,n$$

nos da,

$$I = 7.854 \times 0,05 \times 8$$

de donde:

$$I = \$\ 3.141,60$$

144. Problema 25. — *Calcular el interés de $ 8.540 durante 2 años, 7 meses y 18 días, al 4 ½ % anual.*

Solución

2 años, 7 meses y 18 días son 948 días.

$$i = \frac{t}{100} = \frac{4,50}{100} = 0,045$$

Se tiene,

$$I = \frac{C\,i\,d}{360}$$

o bien,

$$I = \frac{8.540 \times 0,045 \times 948}{360}$$

de donde:

$$I = \$\ 1.011,99$$

145. Problema 26. — *¿Cuál es el interés legal de $ 280.600, calculados al 6 %, por 194 días?*

Solución

Elementos de cálculo: $C = \$\ 280.600$; $i = 0,06$; $d = 194$ días.

La fórmula,

$$I = \frac{C\,i\,d}{365}$$

nos da,

$$I = \frac{280.600 \times 0,06 \times 194}{365}$$

o sea:

$$I = \$\ 8.948,45$$

146. Problema 27. — *¿Cuál es el capital que ha producido $ 655,20 durante 8 meses al 5 ¼ % anual?*

Solución

El tanto por uno en este caso es,

$$i = \frac{t}{100} = \frac{5,25}{100} = 0,0525$$

Aplicando la fórmula, $C = \dfrac{12\,I}{i\,m}$

se tiene, $C = \dfrac{12 \times 655{,}20}{0{,}0525 \times 8}$

de donde: $C = \$\ 18.720$

147. Fórmula del monto. — Definición. — Se llama *monto,* o *valor acumulado,* a la suma del capital y sus intereses simples.

Representando por M el monto, tendremos:

$$M = C + I \qquad (1)$$

pero:

$$I = \frac{C\,n\,t}{100} \qquad (2)$$

reemplazando (*2*) en (*1*), se tiene:

$$M = C + \frac{C\,n\,t}{100} = \frac{100\,C + C\,n\,t}{100}$$

de donde:

$$M = \frac{C\,(100 + n\,t)}{100}$$

que es la *fórmula fundamental del monto* en función del capital.

148. Fórmulas derivadas. — Siguiendo el método empleado para deducir las fórmulas correspondientes al *capital, tanto por ciento* y *tiempo,* de la fórmula general del interés se deducen las que corresponden a esos mismos valores en función del monto. Así, tenemos:

$$100\,M = C\,(100 + n\,t) \qquad (3)$$

de donde, $C = \dfrac{100 + n\,t}{100\,M}$ *Fórmula del capital*

Efectuando en (3), las operaciones indicadas:

$$100\,M = 100\,C + C\,n\,t$$

y,

$$100\,M - 100\,C = C\,n.t$$

Sacando el factor común 100, tenemos:

$$100\,(M - C) = C\,n\,t$$

de donde:

$$n = \frac{100\,(M - C)}{C\,t} \quad \textit{Fórmula del tiempo}$$

$$t = \frac{100\,(M - C)}{C\,n} \quad \textit{Fórmula del tanto por ciento}$$

Si el tiempo se hallara expresado en meses o días, bastaría sustituir en la igualdad de la definición (1) el interés por la fórmula correspondiente, para deducir luego la expresión del monto en función de la unidad de tiempo respectivo. Así:

$$M = C + \frac{C\,m\,t}{1200} = \frac{C\,(1200 + n\,t)}{1200}$$

análogamente, se tiene:

$$M = \frac{C\,(36000 + d\,t)}{36000}\,; \quad M = \frac{C\,(36500 + d\,t)}{36500}$$

149. PROBLEMA 28. — *¿Cuál es el monto de \$ 3.000, al 6 % anual durante 2 años?*

Solución

Los elementos que intervienen en este problema son:

$C = \$\ 3.000$; $t = 6\ \%$ anual; $n = 2$ años

Aplicando la fórmula,

$$M = \frac{C \times (100 + n\,t)}{100}$$

Se tiene, $M = \dfrac{3.000\ (100 + 2 \times 6)}{100} = \dfrac{3.000 \times 112}{100}$

de donde:

$$M = \$\ 3.360$$

150. PROBLEMA 29. — *Calcular el monto de \$ 2.500 que fueron colocados al 5 % anual, durante 9 meses.*

Solución

Elementos de cálculo: $C = \$\ 2.500$; $t = 5\ \%$; $m = 9$ meses

1er. Procedimiento. — Aplicando la fórmula del monto en función del tiempo expresado en meses.

$$M = \frac{C \times (1.200 + m\,t)}{1.200}$$

se tiene, $M = \dfrac{2.500\ (1.200 + 9 \times 5)}{1.200} = \dfrac{2.500 \times 1.245}{1.200}$

Luego: $M = \$\ 2.593,75$

2º Procedimiento. — Sustituyamos el tiempo *n*. por una expresión fraccionaria.

$$9 \text{ meses} = \frac{9}{12} \text{ de año}$$

La fórmula, $M = \dfrac{C\ (100 + n\,t)}{100}$

nos da, $M = \dfrac{2.500\ \left(100 + \dfrac{9}{12} \times 5\right)}{100} = \dfrac{2.500 \times 103,75}{100}$

de donde: $M = \$\ 2.593,75$

151. PROBLEMA 30. — *Se han recibido $ 30.022,80 en capital e intereses por una suma colocada al 4,5 % anual, durante 6 años. ¿Cuál es esta suma?*

Solución

Elementos de cálculo: $M = \$\ 30.022,80;\ t = 4,50\ \%;\ n = 6$ años.

Se tiene, $C = \dfrac{100\ M}{100 + n\,t}$

o bien $C = \dfrac{100 \times 30.022,80}{100 + 6 \times 4,50}$

luego: $C = \$\ 23.640$

152. PROBLEMA 31. — *Un capital colocado al 7 % anual, durante 135 días, se convirtió al cabo de este tiempo en $ 16.276,33. Calcular el capital.*

Solución

Elementos de cálculo: $M = \$\ 16.276{,}33$; ; $t = 7\ \%$; $d = 135$ días

Despejando C en la fórmula,

$$M = \frac{C\ (36.000 + d\,t)}{36.000}$$

Se tiene,

$$C = \frac{36.000\ M}{36.000 + d\,t}$$

o bien,

$$C = \frac{36.000 \times 16.276{,}33}{36.000 + 135 \times 7}$$

de donde:

$$C = \$\ 15.860$$

153. PROBLEMA 32. — *Una persona, que ha colocado $ 12.820 a razón de 5 ¼ % de interés anual, retira el capital y los intereses al final de 140 días del año legal. ¿Cuánto ha recibido?*

Solución

Elementos de cálculo: $C = \$\ 12.820$ $t = 5{,}25\ \%$ $d = 140$ días.

Aplicando la fórmula,

$$M = \frac{C\ (36.500 + d\,t)}{36.500}$$

se tiene,

$$M = \frac{12.820\ (36.500 + 140 \times 5{,}25)}{36.500}$$

de donde:

$$M = \$\ 13.078{,}15$$

154. Fórmula del monto en función del tanto por uno. — Completan las fórmulas fundamentales para el interés simple las fórmulas del monto en función del tanto por uno, las que se deducen siguiendo un procedimiento análogo al caso anterior.

Por definición de monto, se tiene:

$$M = C + I \qquad (1)$$

y como,

$$I = C\,i\,n \qquad (2)$$

sustituyendo (*2*) en (*1*):

$$M = C + C\,i\,n \qquad (3)$$

y sacando el factor común C, se tiene:

$$M = C\ (1 + in)$$

que es la fórmula fundamental del monto en función del *capital* y del *tanto por uno.*

Luego: *Para hallar el monto se multiplica el capital por el producto del tanto por uno por el tiempo aumentado en uno.*

De la fórmula anterior se deducen los valores para el *capital, tanto por uno* y *tiempo.* Así, tenemos:

$$C = \frac{M}{1 + i\,n}$$

transponiendo C, en (3),

$$M - C = C\,i\,n$$

de donde,
$$i = \frac{M - C}{C\,n}$$

y,
$$n = \frac{M - C}{C\,i}$$

Análogamente obtendremos las fórmulas del monto para el tiempo expresado en meses o días.

Por lo tanto:

$$M = C + \frac{C\,i\,n}{12} \quad \therefore \quad M = \frac{C\ (12 + i\,n)}{12}$$

$$M = C + \frac{C\,i\,d}{360} \quad \therefore \quad M = \frac{C\ (360 + id)}{360}$$

$$M = C + \frac{C\,i\,d}{365} \qquad M = \frac{C\ (365 + i\,d)}{365}$$

155. PROBLEMA 33. — *¿Cuál es el capital definitivo producido por $ 7.620 colocados al 5 % durante 3 años?*

Solución

Elementos de cálculo: $C = \$\ 7.620$; $i = 0{,}05$; $n = 3$ *años*

Se tiene,
$$M = C\ (1 + i\,n)$$

o bien, $M = 7.620 \; (1 + 0{,}05 \times 3)$

de donde: $M = \$ \; 8.763$

156. Problema 34. — *Por una suma colocada al $6\frac{3}{4}$ % anual, se han recibido al cabo de 160 días \$ 17.602,70 por capital e intereses. Calcular dicha suma.*

Solución

El tanto por uno en este caso, es:

$$i = \frac{6{,}75}{100} = 0{,}0675$$

Despejando C, en la fórmula,

$$M = \frac{C \; (360 + i\,d)}{360}$$

se obtiene, $$C = \frac{360\,M}{360 + i\,d}$$

o bien, $$C = \frac{360 \times 17.602{,}70}{360 + 0{,}0675 \times 160}$$

de donde: $$C = \$ \; 17.090$$

157. Problema 35. — *Determinar el monto producido por un capital de \$ 18.960, colocado al 5 ½ % anual, al cabo de 180 días del año legal.*

Solución

Elementos de cálculo: $C = \$ \; 18.960$; $i = 0{,}055$; $d = 180$ días.

Se tiene, $$M = \frac{C \; (365 + i\,d)}{365}$$

o bien, $$M = \frac{18960 \; (365 + 0{,}055 \times 180)}{365}$$

luego: $$M = \$ \; 19.474{,}25$$

METODOS COMERCIALES

158. Con el objeto de obtener mayor rapidez en los cálculos del interés, se han ideado diversos artificios con el fin de reducir en lo posible las dificultades y duración de dichos cálculos.

Estos procedimientos se conocen con el nombre de *métodos comerciales o métodos abreviados de cálculo,* porque su origen está en el comercio, que es donde con frecuencia se hace necesario la celeridad y exactitud en las operaciones de esta clase.

Los métodos abreviados consisten en *artificios de cálculo,* que permiten transformar la fórmula del interés bajo formas prácticas. Entre otros procedimientos se emplean los conocidos con los nombres de:

a) *divisores fijos,*

b) multiplicadores fijos,

c) partes alícuotas del tiempo,

d) partes alícuotas del capital,

e) partes alícuotas de la tasa.

Veamos cada uno de estos métodos por separado.

159. *a)* **Divisores fijos.** — Sean las fórmulas del interés simple, que ya nos son conocidas:

$$I = \frac{C\,n\,t}{100} \qquad I = \frac{C\,m\,t}{1200} \qquad I = \frac{C\,d\,t}{36000}\,; \qquad I = \frac{C\,d\,t}{36500}$$

dividamos numerador y denominador de cada una de ellas por *t:*

$$I = \frac{C\,n}{100 : t}\,; \quad I = \frac{C\,m}{1200 : t}\,; \quad I = \frac{C\,d}{36000 : t}\,; \quad I = \frac{C\,d}{36500 : t}$$

Los **cocientes** *de dividir por la tasa los denominadores de las correspondientes fórmulas del interés simple, llámanse* **divisores fijos.**

160. Fórmula fundamental. — Designando con la letra *D* a estos cocientes, las fórmulas anteriores se transforman en las siguientes *fórmulas fundamentales por el divisor fijo.*

$$I = \frac{C\,n}{D}\;;\quad I = \frac{C\,m}{D}\;;\quad I = \frac{C\,d}{D}$$

Luego: *Para hallar el interés simple de un capital, se multiplica el capital por el tiempo y el producto se divide por el divisor fijo correspondiente, a la tasa dada.*

161. Fórmulas de los divisores fijos.

AÑOS	MESES	DIAS
$I = \frac{C\,n}{D}$	$I = \frac{C\,m}{D}$	$I = \frac{C\,d}{D}$
$C = \frac{I\,D}{n}$	$C = \frac{I\,D}{m}$	$C = \frac{I\,D}{d}$
$n = \frac{I\,D}{C}$	$m = \frac{I\,D}{C}$	$d = \frac{I\,D}{C}$
$M = \frac{C\ (D + n)}{D}$	$M = \frac{C\ (D + m)}{D}$	$M = \frac{C\ (D + d)}{D}$

Ejemplos. — El divisor fijo correspondiente al 4 % anual, será:

$$D = \frac{100}{t} = \frac{100}{4} = 25 \quad \text{Tiempo expresado en años}$$

$$D = \frac{1200}{t} = \frac{1200}{4} = 300 \quad \text{Tiempo expresado en meses}$$

$$D = \frac{36000}{t} = \frac{36000}{4} = 9000 \quad \text{Año comercial}$$

$$D = \frac{36500}{t} = \frac{36500}{4} = 9175 \quad \text{Año común.}$$

En la práctica se emplean con preferencia los divisores fijos exactos, cuando el día es la unidad de tiempo.

162. Cuadro de los divisores fijos más usuales.

t = %	Por Años	Por Meses	Por Días
½	200	2400	72000
1	100	1200	36000
1 ½	—	800	24000
2	50	600	18000
2 ½	40	480	14400
3	—	400	12000
3,60	—	—	10000
3 ¾	—	320	9600
4	25	300	9000
4 ½	—	—	8000
5	20	240	7200
6	—	200	6000
7 ½	—	160	4800
8	—	150	4500
9	—	—	4000
10	10	120	3600
12	—	100	3000

163. Número Comercial. — Se llama *número,* en las operaciones de interés, al producto del capital por el tiempo.

De modo que, designando por N al número, la fórmula general del interés en función del divisor fijo se transformará en la siguiente:

$$I = \frac{N}{D}$$

164. PROBLEMA 36. — *Calcular el interés de $ 8.560 durante 2 años, 7 meses y 18 días, al 4 ½ %* anual.

Solución

Elementos de cálculo: $C = \$\ 8560 \quad ; \quad D = 8000$

2 años, 7 meses y 18 días = 948 días.

Se tiene, $$I = \frac{C\,d}{D}$$

o bien, $$I = \frac{8560 \times 948}{8000}$$

luego: $I = \$\ 1014{,}36$

165. PROBLEMA 37. — *Se pide el interés legal de \$ 19.620, calculado al 5 % anual durante 194 días.*

Solución

El divisor fijo correspondiente es:

$$D = \frac{36.500}{5} = 7.300$$

Aplicando la fórmula, $I = \dfrac{C\,d}{D}$

obtenemos, $I = \dfrac{19.620 \times 194}{7.300}$

o bien: $I = \$\ 521{,}40$

166. PROBLEMA 38. — *¿Cuál es el capital definitivo producido por \$ 28.060, colocados al 9 % durante 2 años, 3 meses y 18 días?*

Solución

Elementos de cálculo: $C = \$\ 28.060 \ ; \ D = 4.000$

2 años, 3 meses y 18 días = 828 días.

Aplicando la fórmula del monto en función del divisor fijo,

$$M = \frac{C\ (D + d)}{D}$$

se tiene, $M = \dfrac{28.060\ (4.000 + 828)}{4.000}$

luego: $M = \$\ 33.868{,}42$

167. PROBLEMA 39. — *Determinar el capital que colocado al 4 % anual ha producido al final de 198 días, \$ 790, 35?*

Solución

Elementos de cálculo: $I = \$\ 790{,}35$; $d = 198$ días; $D = 9000.$

Despejando C, en la fórmula,

$$I = \frac{C\,d}{D}$$

se tiene,

$$C = \frac{I\,D}{d}$$

o bien,

$$C = \frac{790{,}35 \times 9.000}{198} = \$\ 35.925$$

168 *b)* **Multiplicadores fijos.** — En las fórmulas del interés, si dividimos el numerador y el denominador por sus respectivos denominadores, tendremos:

$$I = \frac{C\,n.\dfrac{t}{100}}{\dfrac{100}{100}} = C\,n.\frac{t}{100}$$

$$I = \frac{C\,m.\dfrac{t}{1.200}}{\dfrac{1.200}{1.200}} = C\,m.\frac{t}{1.200}$$

$$I = \frac{C\,d.\dfrac{t}{36.000}}{\dfrac{36.000}{36.000}} = C\,d.\frac{t}{36.000}$$

$$I = \frac{C\,d.\dfrac{t}{36.500}}{\dfrac{36.500}{36.500}} = C\,d.\frac{t}{36.500}$$

Los cocientes $\frac{t}{100}$, $\frac{t}{1.200}$, $\frac{t}{36.000}$, $\frac{t}{36.500}$ de dividir la tasa por los denominadores de las correspondientes fórmulas del interés simple, llámanse *multiplicadores fijos.*

Ejemplos: El multiplicador fijo correspondiente al 4 % anual será:

$$\frac{t}{100} = 4 : 100 = 0{,}04 \qquad \textit{(tiempo expresado en años)}$$

$$\frac{t}{1.200} = 4 : 1.200 = 0{,}00\widehat{3} \qquad \textit{(tiempo expresado en meses)}$$

$$\frac{t}{36.000} = 4 : 36.000 = 0{,}0001 \qquad \textit{(tiempo expresado en días)}$$

De modo que, designando con la letra M estos cocientes, las fórmulas anteriores tomarán las formas siguientes:

$$I = C.n.M; \quad I = C.m.M \quad I = C.d.M$$

169. PROBLEMA 40. — *Del 2 de agosto al 3 de octubre, se cuentan 62 días. Calcular el interés de \$ 8.530 al 5 ½ % anual.*

Solución

El multiplicador fijo correspondiente es:

$$M = \frac{t}{36.000} = \frac{5{,}50}{36.000} = 0{,}000152\widehat{7}$$

Se tiene, $$I = C.d.M$$

o bien, $$I = 8.530 \times 62 \times 0{,}0001528$$

de donde: $$I = \$\ 80{,}81$$

170. *c)* **Partes alícuotas del tiempo.** — Está basado este procedimiento en el siguiente:

Principio. — *Todo capital colocado a interés simple durante un número de días igual a la centésima parte del divisor fijo que corresponde a la tasa estipulada, produce un interés igual a la centésima parte del capital.*

Sean I, el interés; C, el capital; t, la tasa, y $\frac{360}{t}$, la centésima parte del divisor fijo, correspondiente a la tasa t, el número de días.

En efecto, en la expresión

$$I = \frac{C\,d\,t}{36.000}$$

hagamos, $$d = \frac{360}{t}$$

y tendremos, $$I = \frac{C.\ \frac{360}{t}\ .t}{36.000}$$

y después de simplificar, $I = \dfrac{C}{100}$

En otros términos diremos:

Un capital a interés simple, durante un número de días igual a la centésima parte del divisor fijo que corresponde a la tasa convenida, gana el uno por ciento de dicho capital.

Otra cosa que interesa conocer, en los problemas en que se aplica el método que tratamos, es cómo se calculan los *días* y *el interés* de un capital al cabo de un cierto tiempo. Para tal objeto debemos recordar la convención (**123**) acerca de la *proporcionalidad existente entre el interés y el capital y el tiempo;* y la *simultaneidad* enunciada por el principio anterior que expresaremos esquemáticamente, así:

Para: $d = \dfrac{360}{t}$ ———————— $I = \dfrac{C}{100}$

En palabras, esto quiere decir que, en $\dfrac{360}{t}$ días, el interés simple es igual a la centésima parte del capital.

Con esto, ya estamos en condiciones de resolver los siguientes problemas.

171. PROBLEMA 41. — *¿Qué interés produce un capital de $ 27.950 al 4 %, al cabo de 168 días?*

Solución

En primer lugar tenemos: $d = \dfrac{360}{t} = \dfrac{360}{4} = 90$ días.

Descompongamos en seguida el número de días dado en el problema (168 en este caso), en una serie de submúltiplos de la centésima parte del divisor fijo, 90, que escribiremos en una misma columna vertical, y a la derecha de cada uno de estos sumandos, la correspondiente parte del interés.

	DIAS		INTERES
Para:	90		$ 279,500
„	30	(279,50 : 3)	„ 93,167
„	30		„ 93,167
„	15	(93,16 : 2)	„ 46,583
„	3	(46,58 : 5)	„ 9,317
Para	168 días	al 4 % anual	= $ 521,734

Luego: $I = \$\ 521{,}73$

172. PROBLEMA 42. — *Determinar el interés de $ 15.985, que fué cobrado por 123 días al 7 ½ % anual.*

Solución

Tenemos:

$$d = \frac{360}{t} = \frac{360}{7{,}50} = 48 \text{ días}$$

Por lo tanto:

DIAS		INTERES
Para: 48 días		$ 159,850
„ 12 „	(159,85 : 4)	„ 39,962
„ 60 „	(39,963 × 5)	„ 199,810
„ 3 „	(39,963 : 4)	„ 9,990
Para 123 días al 7 ½ % anual		= $ 409,612

Luego: $I = \$\ 409{,}612$

173. PROBLEMA 43. — *¿Qué capital producirá un interés de $ 345 al 6 % en 80 días?*

Solución

En primer término:

$$d = \frac{360}{t} = \frac{360}{6} = 60 \text{ días}$$

y por lo tanto,

$$d = \frac{360}{t} \text{ ——— } I = \frac{C}{100} \text{ ——— } C = 100.I$$

En la determinación por este método de un capital desconocido, debe tenerse presente que el interés es el mismo variando sólo el tiempo. Es decir: *si el tiempo varía según una razón dada, el capital debe variar en razón inversa de la misma razón a fin de que el interés permanezca constante, en cada caso.*

Luego:

$$\text{Para: } d = \frac{360}{6} = 60 \text{ días} \quad \text{———} \quad C = 100 \times 345 = \$ \ 34.500$$

$$\text{,, } d = 20 \text{ ,,} \quad \text{———} \quad C = 34.500 \times 3 = \text{,, } 103.500$$

$$\text{,, } d = 80 \text{ ,,} \quad \text{———} \quad C = 103.500 : 4 = \text{,, } 25.875$$

Luego: $C = \$ \ 25.875$

174. *d*) **Partes alícuotas del capital.** — Este método se funda en el siguiente:

Principio. — *Todo capital colocado a interés simple e igual al divisor fijo que corresponde a la tasa estipulada, produce un interés igual al número de días en que se expresa el tiempo.*

En efecto, en la fórmula fundamental para el divisor fijo,

$$I = \frac{C\,d}{D}$$

hagamos,

$$C = D$$

y tendremos;

$$I = \frac{D\,d}{D}$$

y después de simplificar resulta:

$$I = d$$

Según esto, debemos descomponer el capital en forma análoga a como se descomponía el tiempo en el caso anterior.

Luego: *Para determinar el interés de un capital por el método de las partes alícuotas del capital, se descompone éste en una serie de sumandos que sean múltiplos o submúltiplos del divisor fijo, y después de calcular los intereses correspondientes a cada una de estas partes, se suman los resultados parciales.*

175. PROBLEMA 44. — *¿Qué interés producirá en 123 días un capital de \$ 15.550, al 4 % anual?*

Solución

En primer lugar tenemos:

$$C = D = \frac{36000}{4} = \$ \ 9.000$$

y por lo tanto,

$$C = D \text{ ——— } I = d = 123 \text{ días.}$$

Luego:

Para: $C =$ $	9.000 en 123 días		———	$I =$ $ 123,—
„ „	4.500 „ „ „	(123, : 2)	———	„ 61,50
„ „	1.500 „ „ „	(61,50 : 3)	———	„ 20,50
„ „	500 „ „ „	(20,50 : 3)	———	„ 6,83
„ „	50 „ „ „	(6,83 : 10)	———	„ 0,68
Para $ 15.550 en 123 días al 4 %				= $ 212,51

Luego:

$$I = \$ \ 212{,}51$$

176. *e*) **Partes alícuotas de la tasa.** — Este método se aplica únicamente en los casos en que la tasa no divide exactamente a 36.000.

Consiste este procedimiento en calcular el interés a una tasa distinta de la expresada en el problema, pero que tenga un divisor fijo exacto que facilite los cálculos. Luego se descompone la diferencia entre las dos tasas en partes alícuotas de la tasa auxiliar; se calculan los intereses parciales de estos tantos y se suman o restan al interés hallado según los casos, para obtener finalmente el interés a la tasa verdadera. En la práctica se toma generalmente como tasa supuesta o tasa base, para calcular el interés por este método, el 3,60 %, siendo 10.000 su divisor fijo para el año comercial.

177. PROBLEMA 45. — *Calcular el interés de* **$** *9.752 al 5 ¼ %*, por 250 días.

Solución

Elementos de cálculo: $C =$ **$** 9.752; $t = 5{,}25$ %; $d = 250$ días.

Tomemos como tasa supuesta el 3,60 % y calculemos el interés. El exceso de la tasa del problema sobre la auxiliar, es de 1,65 %. Descompongamos esta diferencia en partes alícuotas de 3,60 %, y tendremos: 1,20 que es $\frac{1}{3}$ de 3,60; 0,40 que es $\frac{1}{3}$ de 1,20 y 0,05 que es $\frac{1}{8}$ del anterior. Calculados los intereses a las tasas indicadas, se disponen de la manera siguiente:

al 3,60 %	(9.752 × 250 : 10.000)	= $ 243,80
„ 1,20 %	(243,80 : 3)	= „ 81,27
„ 0,40 %	(81,27 : 3)	= „ 27,09
„ 0,05 %	(27,09 : 8)	= „ 3,38
Al 5,25 % por 250 días		= $ 355,54

Luego:

$$I = \$\ 355{,}54$$

178. Método del 60 o del 6 %. — En la práctica se abrevia el método de las partes alícuotas, adquiriéndose la costumbre de deducir constantemente los resultados del cálculo del interés, a la tasa base del 6 % por 60 días comerciales.

De este modo se efectúa con extrema facilidad dicho cálculo, dado el gran número de partes alícuotas de 60, de aquí el nombre con que se designa este método.

Para efectuar este cálculo, se descompone previamente en partes alícuotas el tiempo y después la tasa, procediéndose en forma análoga a los métodos ya explicados.

179. PROBLEMA 46. — *Determinar el interés de $ 9.752, al 5 ¼ % por 250 días.*

Solución

En primer lugar se tiene:

$$d = \frac{360}{t} = \frac{360}{6} = 60 \text{ días}$$

$$I = \frac{C}{100} = \frac{9752}{100} = \$\ 97{,}52$$

Por lo tanto:

Para 60 días		I = $ 97,52
„ 180 „	(97,52 × 3)	= „ 292,56
„ 10 „	(97,52 : 6)	= „ 16,25
En 250 días $ 9752 producen		$ 406,33

Restemos de esta suma el 0,75 % que es $\frac{1}{8}$ de 6, para obtener el interés a la tasa verdadera.

Al 6 % ———————————————— = $ 406.33
„ 0,75 % ———— (406,33 : 8) ———— = „ 50,79

En 250 días al 5,25 % = $ 355,54

Luego: $I = \$ \ 355{,}54$

180. Total de los intereses producidos por varios capitales colocados al mismo tanto por ciento, durante tiempos distintos. — Nos hemos ocupado hasta ahora en el cálculo del interés simple de un capital único. Sin embargo, se presenta en la práctica y con suma frecuencia el caso de determinar el total de los intereses simples de varios capitales, colocados a un mismo tanto por ciento, pero respecto a tiempos distintos.

En este caso, puede determinarse por separado el interés producido por cada capital y sumar luego los intereses parciales, pero en la práctica se determina con una sola operación el *total de los intereses de varios capitales*, mediante el empleo de divisores fijos.

181. Determinación de la fórmula. — Designemos por C_1, C_2, $C_3 \ldots$, los distintos capitales, colocados a una misma tasa t y respectivamente por los tiempos n_1, n_2, n_3 .... Además, llamemos por I_1, I_2, I_3, ... los intereses parciales.

El interés de cada capital por el método del divisor fijo, respectivamente, será:

$$I_1 = \frac{C_1 n_1}{D}$$

$$I_3 = \frac{C_2 n_2}{D}$$

$$I_2 = \frac{C_3 n_3}{D}$$

....

....

Sumando ordenadamente, se tiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + \ldots = \frac{C_1 \ n_1}{D} + \frac{C_2 \ n_2}{D} + \frac{C_3 \ n_3}{D} + \ldots$$

La suma de estos intereses parciales, será el interés de todos los capitales en conjunto. De modo que designando por I_t el total de los intereses producidos y efectuando la suma indicada en el segundo miembro; resulta:

$$I_t = \frac{C_1 n_1 + C_2 n_2 + C_3 n_3 + \ldots.}{D}$$

Sustituyendo en esta expresión el producto del capital por el tiempo, por su valor; será:

$$I_t = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots.}{D}$$

Luego: *Para hallar el total de los intereses producidos por varios capitales colocados al mismo tanto por ciento, durante tiempos distintos, se divide la suma de los números comerciales por el divisor fijo del tanto correspondiente.*

182. PROBLEMA 47. — *Calcular el total de los intereses producidos por los siguientes capitales colocados a la misma tasa, del 6 % anual: $ 9.275 a 122 días; $ 6.480 a 236 días y $ 5.390 a 277 días.*

Solución

En primer lugar:

$$D = \frac{36.000}{6} = 6.000$$

$$N_1 = C_1 n_1 = 9.275 \times 122 = 1.131.550$$
$$N_2 = C_2 n_2 = 6.480 \times 236 = 1.529.280$$
$$N_3 = C_3 n_3 = 5.390 \times 277 = 1.493.030$$

y aplicando la fórmula,

$$I_t = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{D}$$

tendremos:

$$I_t = \frac{1.131.550 + 1.529.280 + 1.493.030}{6.000}$$

de donde: $$I_t = \frac{4.153.860}{6.000} = \$\ 692,31$$

183. Tanto por ciento medio de una serie de depósitos. — Definición. — Se llama *promedio* o *tanto por ciento medio de interés,* al tanto por ciento único a que deben colocarse varios capitales para que produzcan el mismo interés que si estuvieran colocados a tiempos y tantos por cientos diferentes.

184. Determinación de la fórmula. — Llamemos a C_1, C_2, $C_3 \ldots$ los capitales colocados respectivamente a las tasas t_1, t_2, $t_3 \ldots$ y a los tiempos n_1, n_2, $n_3 \ldots$. Además, designemos por t_m el tanto por ciento medio.

El total de los intereses será:

$$I_t = \frac{C_1 n_1 t_1}{100} + \frac{C_2 n_2 t_2}{100} + \frac{C_3 n_3 t_3}{100} + \ldots$$

$$\therefore\ I_t = \frac{C_1 n_1 t_1 + C_2 n_2 t_2 + C_3 n_3 t_3 + \ldots}{100} \qquad (1)$$

Por otra parte, estos mismos capitales colocados a una misma tasa t_m, y en igual condición de tiempos, deben producir el mismo *total de los intereses,* según la definición. Luego:

$$I_t = \frac{(C_1 n_1 + C_2 n_2 + C_3 n_3 + \ldots)\ t_m}{100} \qquad (2)$$

Por el carácter transitivo de la igualdad entre (1) y (2), resulta:

$$\frac{C_1 n_1 t_1 + C_2 n_2 t_2 + C_3 n_3 t_3 + \ldots}{100} = \frac{(C_1 n_1 + C_2 n_2 + C_3 n_3 + \ldots)\ t_m}{100}$$

simplificando:

$$C_1 n_1 t_1 + C_2 n_2 t_2 + C_3 n_3 t_3 + \ldots = (C_1 n_1 + C_2 n_2 + C_3 n_3 + \ldots)\ t_m$$

y despejando t_m, resulta:

$$t_m = \frac{C_1 n_1 t_1 + C_2 n_2 t_2 + C_3 n_3 t_3 + \ldots}{C_1 n_1 + C_2 n_2 + C_3 n_3 + \ldots}$$

Sustituyendo por su valor los productos del capital por el tiempo, se tiene:

$$t_m = \frac{N_1 t_1 + N_2 t_2 + N_3 t_3 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots}$$

Luego: *Para hallar el tanto por ciento medio de una serie de depósitos, colocados a tasas distintas, se suman los productos del* *número correspondiente a cada capital por la tasa respectiva y este resultado se divide por la suma de los números comerciales.*

185. PROBLEMA 48. — *Determinar el tanto por ciento medio de los siguientes capitales a interés simple: $ 850, al 6 % durante 150 días; $ 1.900, al 4 ½ % durante 115 días y $ 660 al 7 % durante 80 días.*

Solución

Elementos de cálculo:

$$N_1 = C_1 n_1 = 850 \times 150 = 127500$$
$$N_2 = C_2 n_2 = 1900 \times 115 = 218500$$
$$N_3 = C_3 n_3 = 660 \times 80 = 52800$$
$$t_1 = 6\,\% \quad ; \quad t_2 = 4\tfrac{1}{2}\,\% \quad ; \quad t_3 = 7\,\%$$

y aplicando la regla:

$$t_m = \frac{N_1 t_1 + N_2 t_2 + N_3 t_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$

tenemos:

$$t_m = \frac{127500 \times 6 + 218500 \times 4{,}50 + 52800 \times 7}{127500 + 218500 + 52800}$$

Luego:

$$t_m = \frac{2117850}{398800} = 5{,}31\,\%$$

186. Método de Thoyer. — El matemático JUAN THOYER ha ideado un procedimiento práctico, relativamente simple, para calcular con rapidez el *numerador* de la fórmula anterior, es decir:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \ldots .$$

Este procedimiento sólo se aplica en los tiempos que no excedan de 99 días.

Consiste este método en descomponer el tiempo de cada capital en decenas y unidades de días, de manera que cada capital figure ganando intereses de un modo distinto en dos duraciones diferentes.

Los capitales así considerados se inscriben en una tabla a doble entrada, construida expresamente, y conteniendo 100 números, de modo que se vea con claridad el tiempo que corresponde a cada uno de ellos.

TABLA GENERAL DE THOYER

Unidades de días

Decenas de días	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0											L_0
1											L_1
2											L_2
3											L_3
4											L_4
5					K						L_5
6											L_6
7											L_7
8											L_8
9											L_9
Totales	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	
Décuplos	$10 L_0$	$10 L_1$	$10 L_2$	$10 L_3$	$10 L_4$	$10 L_5$	$10 L_6$	$10 L_7$	$10 L_8$	$10 L_9$	
Sumas	$S_0 \times 0$	$S_1 \times 1$	$S_2 \times 2$	$S_3 \times 3$	$S_4 \times 4$	$S_5 \times 5$	$S_6 \times 6$	$S_7 \times 7$	$S_8 \times 8$	$S_9 \times 9$	
Números	N_0	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	

En esta tabla las *columnas* verticales se refieren a unidades de días, y las *líneas* horizontales a las decenas de días. Por ejemplo, un capital cualquiera *K*, colocado durante 54 días, se incribirá en la casilla de cruce de la línea 5 y columna 4.

Una vez inscriptos de este modo todos los capitales en dicha tabla, se suman las líneas y las columnas. Las sumas horizontales, representadas por las letras L_0, L_1, L_2 .... L_9, constituyen cada una el capital que gana interés durante las respectivas decenas de días, y los totales C_0, C_1, C_2, C_3 ... C_9 de las columnas, el capital que produce interés durante las unidades de días, que aparecen indicados en la parte superior de la columna sorrespondiente.

Se llevan los totales de las líneas, sobre los totales de las columnas, multiplicándoselos previamente por 10, así:

$$C_1 + 10\,L_1; \quad C_2 + 10\,L_2; \quad C_3 + 10\,L_3$$

y se forman de este modo nuevos totales que designamos por

$$S_0,\ S_1,\ S_2\ \ldots\ldots\ S_9$$

que a su vez se multiplican respectivamente por 0, 1, 2, 3, 4, ... 9, resultando los siguientes productos:

$$S_1,\ 2\,S_2,\ 3\,S_3,\ 4\,S_4,\ \ldots\ldots\ 9\,S_9$$

La suma de todos estos *números*, será igual al numerador de la fórmula del total de los intereses de varios capitales colocados a una misma tasa. Por lo tanto:

$$S_1 + 2\,S_2 + 3\,S_3 + 4\,S_4 + \ldots\ldots + 9\,S_9 = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots\ldots + N_n$$

y dividiendo ambos miembros por el divisor fijo, del tanto correspondiente resulta:

$$\frac{S_1 + 2\,S_2 + 3\,S_3 + \ldots + 9\,S_9}{D} = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots\ldots + N_n}{D}$$

de donde,

$$I_t = \frac{S_1 + 2\,S_2 + 3\,S_3 + \ldots\ldots + 9\,S_9}{D}$$

que es la fórmula general del total de los intereses hallada por el *Método de Thoyer.*

187. Observación. — Si son varios los capitales que producen interés por igual tiempo, se pondrá su suma en la casilla que deberían ocupar.

188 PROBLEMA 49. — *Hallar el interés total para los siguientes capitales colocados al 6 %: $ 900 durante 12 días; $ 1.500 por 15 días; $ 500 por 24 días; $ 670 por 29 días; $ 800 por 33 días; $ 1.100 por 37 días; $ 2.300 por 40 días; $ 1.600 por 45 días; $ 780 por 53 días; $ 4.000 por 58 días; $ 2.600 por 62 días; $ 1.700 por 68 días; $ 1.400 por 80 días; $ 900 por 85 días; $ 1.500 por 94 días y $ 2.000 por 99 días.*

Empleando el cuadro de Thoyer, se tiene:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0											
1			900			1.500					2.400
2					500					670	1.170
3				800				1.100			1.900
4	2.300					1.600					3.900
5				780					4.000		4.780
6			2.600						1.700		4.300
7											
8	1.400					900					2.300
9					1.500					2 000	3.500
	3.700		3.500	1.580	2.000	4.000		1.100	5.700	2.670	242.500
		24.000	11.700	19.000	39.000	47.800	43.000		23.000	35.000	
	3.700 x 0	24.000 x 1	15.200 x 2	20.580 x 3	41.000 x 4	51.800 x 5	43.000 x 6	1.100 x 7	28.700 x 8	37.670 x 9	
	0	24.000	30.400	61.740	164.000	259.000	258.000	7.700	229.600	339.030	1373470

$$D = 6000$$

Luego: $$I_t = \frac{1.373.470}{6.000} = \$\ 228,96.$$

189. Prórroga de pagos. — Cuando se anticipa en una parte el pago de una deuda, con el fin de postergar el pago total de la misma por un plazo mayor, se llama *prórroga de pagos.*

Esta operación se basa en el siguiente:

Principio. — *El interés que produce toda cantidad anticipada de una deuda por el tiempo que falta para su vencimiento, debe ser igual al interés del saldo por la prórroga que se establece.*

Para mayor claridad, diremos que el mecanismo de esta operación consiste en descomponer el capital que constituye la deuda en dos capitales distintos, llamados: *anticipo A,* el uno y *saldo S,* el otro. También designemos y en forma general por *n,* el tiempo que falta para el vencimiento y por *p,* la prórroga.

A fin de que los intereses producidos sean iguales y, de acuerdo al principio establecido, los capitales anticipo y saldo, serán inversamente proporcionales a los tiempos. Es decir:

$$\frac{A}{S} = \frac{p}{n}$$

y por simple transposición, se obtienen los valores de p, S, A, y n, que resuelven las cuatro cuestiones de la prórroga de pagos. Luego:

$$p = \frac{A\,n}{S}$$

que es la fórmula de la *prórroga de pagos.*

$$S = \frac{A\,n}{p}$$ **Fórmula del** *saldo*

$$A = \frac{S\,p}{n}$$ **Fórmula del** *anticipo*

$$n = \frac{Sp}{A}$$ **Fórmula del** *tiempo*

190. PROBLEMA 50. — *Se tiene una obligación de $ 700, a 8 meses de plazo. A los 6 meses, se hace un anticipo de $ 300. ¿Cuánto tiempo se puede demorar el pago del resto sin perjudicar al acreedor?*

Solución

Elementos de cálculo:

$A = \$\ 300$; $S = 700 - 300 = \$\ 400$; $n = 8 - 6 = 2$ meses.

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$p = \frac{A\,n}{S} = \frac{300 \times 2}{400} = \frac{6}{4} = 1{,}5 \text{ meses.}$$

$$\therefore \quad p = 1 \text{ mes y } 15 \text{ días.}$$

Luego puede demorarse el plazo del resto por un mes y 15 días.

191. Observación. — Los problemas de prórroga de pagos se resuelven también por regla de tres.

Consideremos el problema último:

Si a los 6 meses se adelantan $ 300, se han entregado también los intereses de esta suma, correspondientes a los 2 meses que faltan para el vencimiento de la obligación. Por lo tanto se pueden retener los \$ 400 restantes, el tiempo suficiente para que ganen el mismo interés que \$ 300 en los 2 meses.

En efecto:

Si \$ 300, ganan cierto interés en 2 meses,

„ 400, ganarán el mismo interés en x meses.

Como vemos, los capitales son inversamente proporcionales a los tiempos a fin de producir el mismo interés:

$$\frac{400}{300} = \frac{2}{x}$$

de donde:

$$x = \frac{300 \times 2}{400} = 1{,}5 \text{ meses} = 1 \text{ mes y } 15 \text{ días.}$$

192. PROBLEMA 51. — *Un comerciante tiene una obligación de \$ 6.000 a 10 meses de plazo, pero hizo un anticipo de \$ 2.000 y el plazo se prorrogó 3,5 meses más. ¿En qué fecha hizo el anticipo?*

Solución

En primer lugar:

$A = \$\ 2.000$; $S = 6.000 - 2.000 = \$\ 4.000$; $p = 3{,}5$ meses.

Aplicando la fórmula: $n = \dfrac{Sp}{A}$

nos da: $n = \dfrac{4.000 \times 3{,}5}{2.000} = 7$ meses.

193. PROBLEMA 52. — *A los 75 días de haberse firmado una obligación de \$ 10.000 a 270 días, se adelanta una parte de la deuda y se obtiene una prórroga de 105 días. ¿Cuál fué el anticipo?*

Solución

Elementos de cálculo:

$S = 10.000 - A$; $n = 270 - 75 = 195$ días; $p = 105$ días.

Aplicando la fórmula, se tiene:

$$A = \frac{Sp}{n} = \frac{(10.000 - A) \times 105}{195} = \frac{(10.000 - A) \times 7}{13}$$

y dando forma entera a esta expresión, se tiene:

$$13A = (10.000 - A) \times 7 = 70.000 - 7A$$

$$13A + 7A = 70.000$$

o bien,

$$20A = 70.000$$

de donde:

$$A = \frac{70.000}{20} = \$\ 3.500.$$

194. PROBLEMA 53. — *Un negociante hizo un anticipo de $ 5.000, a los 4 ¼ meses, después de haber firmado un pagaré a 11 meses para aplazar en 2 ½ meses, el pago total de la deuda. ¿A cuánto ascendió el saldo?*

Solución

Elementos de cálculo:

$A = \$\ 5.000$; $n = 11 - 4{,}25 = 6{,}75$ meses; $p = 2{,}5$ meses.

Aplicando la fórmula, resulta:

$$S = \frac{A\,n}{p} = \frac{5.000 \times 6{,}75}{2{,}5} = \$\ 13.500$$

195. PROBLEMA 54. — *Una obligación de $ 15.400, vence a los 16 meses de plazo, pero a los 4 meses se entregaron a cuenta $ 3.400, y a los 10 meses, $ 5.000. Determinar la prórroga del resto.*

Solución

Los elementos de cálculo en este caso son:

$$a_1 = \$\ 3.400; \qquad a_2 = \$\ 5.000$$

$$n_1 = 16 - 4 = 12 \text{ meses}; \ n_2 = 16 - 10 = 6 \text{ meses}$$

$$An = a_1 n_1 + a_2 n_2 = 3.400 \times 12 + 5.000 \times 6$$

$$S = 15.400 - (3.400 + 5.000) = \$\ 7.000$$

Aplicando la fórmula general, resulta:

$$p = \frac{A\,n}{S} = \frac{3.400 \times 12 + 5.000 \times 6}{7.000} = 14{,}4 \text{ meses.}$$

Luego el pago del saldo deberá efectuarse a los 16 + 14,4 = 30,4 meses.

INTERÉS COMPUESTO

196. Definiciones. — Cuando el interés producido por un capital se acumula a éste, con el fin de producir a su vez nuevo interés, se llama *interés compuesto* al interés producido por el capital y los intereses acumulados.

La acumulación de los intereses al capital al fin de cada unidad de tiempo, se llama *capitalización de los intereses,* y *período de capitalización* a dicha unidad de tiempo.

Las cuestiones de *interés compuesto,* pueden resolverse mediante los procedimientos de cálculo ya conocidos. En efecto: se calcula primeramente el interés simple que produce el capital inicial en el primer período de tiempo; después el interés que produce en el 2º período la suma del capital primitivo y el interés hallado, que es el *monto* del primer año; luego lo que produce en el 3er. período, el monto del capital anterior y así sucesivamente hasta considerar, todas las unidades de tiempo.

197. PROBLEMA 55. — *¿Cuál es el interés compuesto, producido por un capital de $ 900 al 6 % anual, durante 4 años?*

Solución

Elementos de cálculo: $C = \$\ 900$; $t = 6\ \%$ anual; $n = 4$ años.

Aplicando para mayor comodidad la fórmula general del interés simple en función del tanto por uno, determinaremos el interés correspondiente a cada período:

$$I = C\,i\,n$$

Interés del 1er. periodo:	900 × 0,06 = $ 54
Monto del 1er. periodo y capital del 2do.	900 + 54 = „ 954
Interés del 2do. periodo:	954 × 0,06 = „ 57,24
Monto del 2do. periodo y capital del 3º.	954 + 57,24 = „ 1.011,24
Interés del 3er. periodo:	1.011,24 × 0,06 = „ 60,67
Monto del 3er periodo y capital del 4º.	1.011,24 + 60,67 = „ 1.071,91

Interés del 4º período:	$1.071{,}91 \times 0{,}06 =$ \$ 64,31
Monto total	$1.071{,}91 + 64{,}31 =$ „ 1.136,22

Luego el interés compuesto es:

$$1.136{,}22 - 900 = \$\ 236{,}22$$

198. Deducción de la fórmula fundamental. — En lugar de resolver las cuestiones de interés compuesto valiéndonos del método anterior, que resulta demasiado lento, se emplea en la práctica una fórmula especial que facilita y simplifica en sumo grado la resolución de estos problemas.

Vamos a deducir esta fórmula general:

En efecto, el interés simple del capital primitivo al terminar el primer período de tiempo será $C.i$, puesto que el tiempo es igual a 1. Cuando finalice dicha unidad de tiempo, el capital inicial C se habrá convertido en:

$$C + C.i$$

y sacando factor común C, se tiene:

$$C + C.i = C.(1 + i)$$

Este valor $C.(1 + i)$, pasa a constituir el capital base del segundo período de tiempo, para producir en su transcurso nuevos intereses. Estos intereses serán:

$$C.(1 + i).i$$

Al terminar la segunda unidad de tiempo, el monto parcial correspondiente será:

$$C(1 + i) + C(1 + i)i$$

y sacando factor común $C.(1 + i)$; se tiene:

$$C(1 + i) + C(1 + i)\ i = C(1 + i)\ (1 + i) = C(1 + i)^2$$

El capital $C\ (1 + i)^2$, constituye el capital base que durante el tercer período de tiempo producirá nuevos intereses.

Procediendo análogamente, se determinaría el monto parcial correspondiente a cada una de las demás unidades de tiempo, para obtener así al terminar el *período enésimo,* la expresión general del *valor acumulado.*

Con el fin de abreviar, observemos las fórmulas halladas y veremos que cada una de ellas se obtiene multiplicando la suma anterior por la expresión $(1 + i)$, y que las potencias de este factor $(1 + i)$, están indicadas en cada caso por el número de períodos.

Esto nos permite generalizar. De modo que, designado por A el *monto total* correspondiente al enésimo período será:

$$A = C(1 + i)^n \qquad (1)$$

que es la *Fórmula del Monto*, en el interés compuesto.

Luego: *Para determinar el monto de un capital colocado a intereses compuestos, se multiplica dicho capital por la suma de la unidad más el tanto por uno de capitalización, elevada a una potencia indicada por el número de períodos.*

De la fórmula anterior, deducimos fácilmente,

$$C = \frac{A}{(1 + i)^n} \qquad (2)$$

que es la *fórmula del capital primitivo.*

199. Observación. — Nos hemos concretado a indicar únicamente la fórmula del monto total y la del capital primitivo, dado que las otras dos fórmulas derivadas, la del número de períodos y la de la tasa, requieren para su aplicación y mayor exactitud el auxilio del cálculo logarítmico, materia que corresponde a otra parte del programa de estudios.

200. PROBLEMA 56. — *¿Cuál es el monto de un capital de $ 4.000 colocados a interés compuesto, durante 3 años al 6 % anual?*

Solución

Elementos de cálculo: $C = \$\ 4.000$; $i = 0{,}06$; $n = 3$ años.

La fórmula, $A = C\,(1 + i)^n$

nos da, $A = 4.000\,(1 + 0{,}06)^3$

de donde, $A = 4.000 \times 1{,}06^3$

o sea, $A = \$\ 4.764{,}06.$

201. PROBLEMA 57. — *Determinar el capital que colocado al 4 ½ % de interés compuesto por 6 años, ha producido un monto total de $ 8.546,92.*

Solución

Elementos de cálculo: $A = \$\ 8.546,92$; $i = 0,045$; $n = 6$ años.

Se tiene, $$C = \frac{A}{(1 + i)^n}$$

o bien, $$C = \frac{8.546,92}{(1 + 0,045)^6}$$

o sea, $$C = \frac{8.546,92}{1,045^6}$$

de donde; $$C = \$\ 6.563,18.$$

202. PROBLEMA 58. — *¿A cuánto ascienden los intereses producidos por un capital de $ 12.500, que estuvo colocado al 5 % de interés compuesto durante 4 años?*

Solución

Elementos de cálculo: $C = \$\ 12.500$ $i = 0,05$ $n = 4$ años

Se tiene, $$A = C\ (1 + i)^n$$

o bien, $$A = 12.500\ (1 + 0,05)^4$$

de donde: $$A = \$\ 15.193,83.$$

Por definición de monto y designando por I_c, a los intereses, se tiene,

$$A = C + I_c$$

de donde, $$I_c = A - C$$

o bien, $$I_c = 15.193,83 - 12.500$$

o sea: $$I_c = \$\ 2.693,83.$$

EJERCICIOS

Resolver, aplicando la fórmula general, los siguientes problemas:

308. — Determinar el interés de \$ 9.740, durante 6 años al 4 % anual.

309. — Calcular el interés de \$ 15.800 al cabo de 4 años y al 6 ¼ % anual.

310. — Calcular el interés de un capital de \$ 25.000, colocado al 4 % anual durante 3 años y 4 meses.

311. — Determinar el beneficio producido por un préstamo de \$ 6.500 al 6 ¾ % al cabo de 1 año, 5 meses y 18 días.

312. — Se da en hipoteca la cantidad de \$ 18.000 al 1 ½ % trimestral. ¿Cuál es el beneficio legal al cabo de 3 ½ años?

313. — Un cambista vendió un lote de 1.000 bolsas de trigo Rosafé, de 80 kg. c/u., a \$ 10,50 la bolsa, pagadero a los 90 días, al 3/5 % mensual. ¿Cuál es el beneficio?

314. — ¿Qué renta mensual producirá una hipoteca de \$ 10.000 colocada al 5 ¼ % semestral?

315. — Determinar el interés producido por £ 580/5/8 durante 2 años y 5 meses al 4 ¾ % anual.

316. — El 9 de febrero presté la suma de \$ 4.500 al 1 ¼ % trimestral. ¿Qué interés habré percibido al 10 de agosto del mismo año?

317. — Se ha vendido una finca de 350 varas cuadradas a razón de \$ 32 la vara, abonándose al contado la mitad y el resto a 1,5 años de plazo al 6 ¾ % anual. ¿Cuál es la suma definitiva que debe entregarse en el tiempo estipulado?

318. — Calcular el capital que colocado al 7,20 %, ha producido \$ 1.512 al cabo de 2 años.

319. — Determinar el capital que ha dado un beneficio de \$ 3.256,40, al 4,5 %, durante 1 año y 8 meses.

320. — Se han obtenido \$ 1.280,35 de beneficio por préstamo al 1 ⅛ % mensual al cabo de 3 años, 5 meses y 28 días. Determinar la suma prestada.

321. — Al cabo de 3 ½ años se ha percibido la suma de \$ 1.620 en concepto de interés por la hipoteca de una finca al 3 % semestral. Determinar el valor de la hipoteca.

322. — ¿Cuál es el capital que colocado al 5 $^{2}/_{5}$ % anual ha producido £ 82/16/5 durante 148 días?

323. — Se han recibido \$ 4.327,90 en concepto de capital e intereses por una suma colocada a 7 ¼ % durante 4 años. ¿Cuál es esa suma?

324. — Un prestamista ha recibido en concepto de capital e intereses \$ 1.800,27 por una cantidad colocada al 4 ¾ % durante 175 días. Determinar el valor del préstamo.

325. — Calcular el tanto por ciento anual a que fueron colocados \$ 9.740 durante 6 años para producir \$ 2.337,60 de interés.

326. — Una persona dió \$ 30.000 en hipoteca por una chacra y ha obtenido en 2 años y 168 días \$ 4.625 de beneficio. ¿A qué tanto por ciento colocó su dinero?

327. — Se han recibido $ 102,06 de interés por un préstamo de $ 6.804 a los 2 meses y 12 días. Determinar el tanto por ciento semestral.

328. — Un capital de 2.290 £, colocado durante 3 años y 6 meses, ha producido £ 320/12 de interés. Calcular el tanto por ciento.

329. — Un propietario ha colocado en diferentes Bancos la cantidad de $ 120.000, repartida de la siguiente manera: al 6 % un tercio del capital; la cuarta parte al 5 ¼ %; la quinta parte al 6 ½ % y al 4 % el resto. Deseando obtener mayor beneficio, retira al cabo de un año su capital y lo coloca en préstamo hipotecario, obteniendo un aumento de $ 901 al año. Determinar el tanto por ciento de la hipoteca.

330. — ¿Durante cuánto tiempo $ 15.800 colocados al 6 ¼ % anual han producido $ 3.950?

331. — Un capital de $ 18.600, colocado al 7 ¼ %, ha producido $ 3.146,50 de beneficio. Calcular el tiempo.

332. — Se ha efectuado un préstamo hipotecario de $ 8.400 al 8 ²/₅ %, cobrándose al cabo de un cierto tiempo $ 901,60. ¿Durante qué tiempo se efectuó el préstamo?

333. — A los 120 días de haberse vendido una partida de azúcar tucumana, al 4 ²/₅ % de interés anual, se ha recibido $ 3.957,20 en concepto de capital e intereses. ¿Cuál es el valor del azúcar?

334. — Por una suma colocada al 4 ¾ %, durante 1 año y 5 meses, se ha obtenido un monto de $ 22.030,60. Calcular los intereses de dicha suma.

335. — Una persona ha colocado en Caja de Ahorros $ 10.300 al 4 ½ %. Al cabo de un año, 4 meses y 18 días, retira el capital y los intereses. Determinar dicha suma.

Resolver por el método de los divisores fijos, multiplicadores fijos, partes alícuotas del tiempo y partes alícuotas del capital. los siguientes problemas:

336. — Calcular el interés de $ 14.300 colocados al 4 % durante 135 días

337. — Determinar el interés producido por $ 23.950 colocados al 5 % en el tiempo transcurrido del 6 de abril al 25 de julio del mismo año.

338. — Calcular el capital que impuesto al 6 % durante 294 días ha producido $ 913,56 de interés.

339. — Calcular el interés de $ 10.970, durante el tiempo comprendido entre el 9 de julio al 29 de diciembre del mismo año, siendo el 9 % la tasa del interés.

340. — Se ha dado en préstamo $ 13.048 al 3,60 % anual. ¿Qué beneficio se ha obtenido a los 150 días?

341. — ¿Qué interés han producido $ 5.786 al cabo de 172 días, al 2,25 % semestral?

342. — Un hacendado realizó una venta de hacienda por valor de $ 20.500, debiendo ser satisfecha al 8 % anual al cabo de 205 días. Calcular el interés.

343. — Un prestamista facilitó el 20 de octubre $ 9.400 al 3 % anual. ¿Qué interés cobró el 13 de diciembre del mismo año?

Resolver por el método de las partes alícuotas de la tasa y método de los 60 días los siguientes problemas:

344. — Calcular el interés de $ 13.800, colocado al 4 ¾ % anual durante 130 días.

345. — Se pide el interés de $ 18.640, que fueron colocados en préstamo hipotecario, al 5 ¼ % anual, al cabo de 295 días.

Resolver los siguientes problemas sobre tanto por ciento medio e interés total:

346. — Se han colocado $ 20.500 al 4 ¾ %; $ 50.800 al 5 ½ %; $ 70.600 al 6 % y $ 90.000 al 6 ¼ %. ¿Cuál es el tanto por ciento medio de su renta anual?

347. — El 12 de marzo de cierto año se han colocado $ 11.200 al 5 ½ %; el 5 de mayo $ 5.400 al 4 ³/₅ %; el 11 de julio $ 10.000 al 5 % y el 7 de octubre del mismo año $ 8.700 al 7 ¼ %. Determinar la tasa media anual.

348. — Calcular el total de los intereses producidos por los siguientes capitales colocados en calidad de préstamo al 7 ½ % anual; $ 4.000 a 90 días; $ 13.000 a 150 días; $ 9.500 a 126 días y $ 6.200 a 75 días.

349. — Se pide el interés total de una serie de depósitos efectuados en la Caja de Ahorros de un cierto Banco que paga el 4 ½ % anual de interés y que son: $ 1.500 al 15 de abril; $ 1.300 el 20 de junio; $ 2.000 el 3 de agosto; $ 1.700 el 18 de agosto y $ 900 el 14 de noviembre del mismo año.

Resolver los siguientes problemas sobre prórroga de pagos:

350. — Un ganadero tiene una obligación de $ 8.000 a 6 meses de plazo, pero a los 3 ¾ meses entregó a cuenta $ 3.500. ¿Por cuánto tiempo se aplazó el pago del saldo?

351. — Sobre una deuda de $ 15.400, se hace un anticipo a los 150 días antes de su vencimiento y se obtiene una prórroga de 90 días. ¿A cuánto asciende el anticipo?

352. — Hay una obligación de $ 4.650. Se entregaron a cuenta $ 2.550, prorrogándose en 4 ¼ meses el pago del saldo. ¿En qué fecha se hizo el anticipo?

353. — Por una obligación de $ 23.500 que vence a los 21 meses de plazo, se hicieron los siguientes anticipos: $ 9.000 a los 8 meses y $ 4.500 a los 14 meses. ¿Cuánto tiempo se puede demorar el pago del resto?

Resolver los siguientes problemas sobre interés compuesto:

354. — Calcular el monto de un capital de $ 7.600 colocado a intereses compuestos, durante 4 años al 6 ½ % anual.

355. — Un prestamista facilitó $ 15.000 al 7 ¼ % de interés compuesto durante 3 años. ¿Cuánto recibió por capital e intereses?

356. — Determinar el capital que colocado al 5 ¾ % de interés compuesto por 6 años, ha producido un monto total de $ 12.583,27.

357. — Un capital dado en préstamo al 6 % anual se convirtió al cabo de 5 años en $ 8.970,50. Determinar dicho capital.

358. — ¿A cuánto asciende el interés producido por un capital de $ 19.400 que estuvo colocado durante 6 años al 7 ½ % anual de interés compuesto?

CAPITULO VII

Descuento.

203. Definiciones. — Se llama *descuento,* a toda deducción que se hace sobre el importe de una factura o documento de crédito, *pagaré, letra de cambio,* etc., que se paga antes de su vencimiento.

De manera, pues, que el descuento es un interés que debe restarse al capital en lugar de sumarlo. Para calcular el descuento se emplearán, por lo tanto, las mismas fórmulas que las determinadas para el interés, así como todos los métodos comerciales explicados anteriormente. Para evitar confusiones, es necesario conocer los diferentes valores del capital en esta operación, los cuales toman el nombre de *valor nominal* y *valor efectivo.*

Se llama *valor nominal* o *escrito,* al valor del capital exigible al final del tiempo de la operación, y *valor efectivo* o *actual,* al valor que tiene el documento en el momento de ser negociado.

La diferencia existente entre estos dos valores es lo que constituye el *descuento.*

Hay dos clases de descuento a interés simple, llamados *comercial* uno y *racional* o *matemático* el otro.

204. Descuento comercial. — Se da el nombre de *descuento comercial,* al interés simple del valor nominal en el tiempo que falta para el vencimiento.

De acuerdo con esta definición, podemos determinar la fórmula correspondiente.

Consideremos previamente la fórmula general del interés simple:

$$I = \frac{C.n.t}{100}$$

Designemos por D_c al descuento comercial, y por V al valor nominal del documento. Sustituyamos en la expresión anterior I por D_c, y C por V, y tendremos así la fórmula general del descuento comercial:

$$D_e = \frac{V.n.t}{100}$$

De aquí deducimos fácilmente las correspondientes fórmulas de los demás elementos.

$$V = \frac{100.D_c}{n.t} \qquad n = \frac{100.D_c}{V.t} \qquad t = \frac{100.D_c}{V.n}$$

Sabemos que la fórmula del interés simple, cuando la tasa es el tanto por uno, es (**142**):

$$I = C.i.n$$

y sustituyendo I y C por sus valores, resulta:

$$D_c = V.i.n$$

que es la fórmula del *descuento comercial* en función del tanto por uno.

De ella se deducen las siguientes fórmulas derivadas:

$$V = \frac{D_c}{i.n} \qquad i = \frac{D_c}{V.n} \qquad n = \frac{D_c}{V.i}$$

Si en las demás fórmulas del interés simple, (**127**), sustituímos igualmente I, interés, por Dc, descuento, y C, capital, por V, valor nominal, tendremos así las fórmulas del descuento comercial en función del tiempo expresado en meses, o en días, según se trate del año comercial o civil. Por lo tanto:

$$D_c = \frac{V.m.t}{1200} \qquad D_c = \frac{V.d.t}{36000} \qquad D_c = \frac{V.d.t}{36500}$$

205. Fórmula del valor efectivo. — Como el valor efectivo V_e, es igual al valor nominal menos el descuento, se tiene:

$$V_e = V - D_c \qquad (1)$$

y sustituyendo a D_c por su valor

$$D_c = \frac{V.n.t}{100}$$

tendremos:

$$V_e = V - \frac{V.n.t}{100}$$

Efectuando la resta del segundo miembro, resulta:

$$V_e = \frac{100.V - V.n.t}{100}$$

y sacando el factor común V:

$$V_e = \frac{V.(100 - n.t)}{100} \qquad (2)$$

que es la fórmula del *valor efectivo* en función del valor nominal:

Sacando el denominador en (2), se tiene:

$$100.V_e = V\ (100 - n.t)$$

de donde:

$$V = \frac{100 - n.t}{100.V_e} \qquad (3)$$

que es la fórmula del *valor nominal* en función de valor efectivo.

Procediendo en forma idéntica para cuando el tiempo se halle expresado en meses o días del año comercial o legal, tendremos estas otras fórmulas para el valor efectivo:

$$V_e = \frac{V\ (1200 - m.t)}{1200}$$

$$V_e = \frac{V\ (36000 - d.t)}{36000}$$

$$V_e = \frac{V\ (36500 - d.t)}{36500} \qquad (6)$$

Si la tasa del descuento es el tanto por uno, las fórmulas del valor nominal y del valor efectivo se deducen de manera análoga a la anterior. En efecto, se sabe que es:

$$V_e = V - D_c$$

y sustituyendo D_c por su valor obtenido en (**204**), resulta:

$$V_e = V - V.i.n$$

sacando factor común V:

$$V_e = V\ (1 - i.n) \qquad (7)$$

de donde:

$$V = \frac{V_e}{1 - i.n} \qquad (8)$$

que son las mismas fórmulas anteriores en función del tanto por uno.

206. Valor efectivo en función del divisor fijo. — Sabemos que el interés simple en función del divisor fijo es (**160**):

$$I = \frac{C.n}{D}$$

pero hemos dicho que es $I = D_c$ y $C = V$, luego, sustituyendo estos valores en la igualdad dada, resulta:

$$D_c = \frac{V.n}{D} \qquad (1)$$

Consideremos ahora la igualdad conocida (**205**):

$$V_e = V - D_c$$

y reemplazando a D_c por su valor (1), resulta:

$$V_e = V - \frac{V.n}{D}$$

y efectuando:

$$V_e = \frac{V.D - V.n}{D}$$

y sacando el factor común V:

$$V_e = \frac{V\,(D - n)}{D} \qquad (9)$$

que es la fórmula del valor efectivo en función del divisor fijo. De ella se deduce fácilmente el valor nominal V:

$$V = \frac{Ve.D}{D - n} \qquad (10)$$

207. Problema **59.** — *¿Qué descuento se hizo sobre un pagaré de $ 4.350 que fué descontado al 6 %, a los 180 días antes de su vencimiento?*

Solución

Elementos de cálculo: $V = \$\ 4.350$; $t = 6\ \%$; $d = 180$ días.

a) *Se tiene:* $$D_c = \frac{V.d.t}{36.000}$$

o bien: $$D_c = \frac{4.350 \times 180 \times 6}{36.000}$$

luego: $$Dc = \$\ 130,50$$

b) Por el método de los divisores fijos, se tiene:

$$D = \frac{36.000}{6} = 6.000$$

La fórmula: $$D_c = \frac{V.d}{D}$$

nos da: $$D_c = \frac{4.350 \times 180}{6.000} = \$\ 130,50.$$

c) Por el método de las partes alícuotas del capital, tenemos:

$D = 6.000$; $V = \$\ 4.350$; $d = 180$ días.

Para $ 600 en 180 días	= $ 18.—
„ „ 1.800 „ „ „	= „ 54.—
„ „ 900 „ „ „	= „ 27.—
„ „ 900 „ „ „	= „ 27.—
„ „ 90 „ „ „	= „ 2.70
„ „ 60 „ „ „	= „ 1.80
$V = \$\ 4.350$	$D_c = \$\ 130.50$

208. Problema **60.** — *¿Cuál es el valor efectivo de un docu-*

mento de crédito de $ 16.500, que fué descontado al 5 % a los 144 días antes del vencimiento?

Solución

Elementos de cálculo: $V = \$\ 16.500$; $t = 5\ \%$; $d = 144$ días.

a) Determinando primero el descuento, se tiene:

$$D_c = \frac{V.d.t}{36.000}$$

o bien:

$$D_c = \frac{16.500 \times 144 \times 5}{36.000}$$

de donde: $Dc = \$\ 330$

y como: $V_e = V - De$

tendremos, $V_e = \$\ 16.500 - 330$

luego: $V_e = \$\ 16.170$

b) Valor efectivo en función del divisor fijo:

$D = 7.200$; $V = \$\ 16.500$; $d = 144$ días.

Se tiene:

$$V_e = \frac{V\ (D - \mathrm{n})}{D}$$

o bien:

$$V_e = \frac{16.500\ (7.200 - 144)}{7.200}$$

o sea: $V_e = \$\ 16.170$

c) Por el método de las partes alícuotas del capital:

Para $	7.200	en 144 días	= $ 144
„ „	7.200	„ „ „	= „ 144
„ „	1.800	„ „ „	= „ 36
„ „	300	„ „ „	= „ 6
V = $	16.500		D_e: = $ 330

Luego:

Valor nominal:	= $ 16.500
Descuento:	= „ 330
Valor efectivo:	= $ 16.170

209. PROBLEMA **61.** — *¿En qué tiempo un documento de $ 3.800 colocado al 7½ %, produjo un descuento de $ 71,25?*

Solución

Elementos de cálculo: $V = \$\ 3.800$; $t = 7{,}50\ \%$; $Dc = \$\ 71{,}25$.

Aplicando la fórmula correspondiente:

$$n = \frac{100 . Dc}{V . t}$$

se tiene:
$$n = \frac{100 \times 71{,}25}{3.800 \times 7{,}50}$$

de donde:
$$n = \tfrac{1}{4} \text{ de año}$$

o sea:
$$d = 90 \text{ días.}$$

210. PROBLEMA **62.** — *¿Cuál es el valor nominal de una letra de cambio que pagada a los 120 días antes del vencimiento ha producido un descuento de $ 576,94 al 5¼ %?*

Solución

Elementos de cálculo: $Dc = \$\ 576{,}94$; $t = 5{,}25\%$; $d = 120$ días.

a) Se tiene:
$$V = \frac{36.000 . Dc}{d . t}$$

o bien:
$$V = \frac{36.000 \times 576{,}94}{120 \times 5{,}25}$$

de donde:
$$V = \$\ 32.968$$

b) Verificación por el método de las partes alícuotas de la tasa.

$V = \$\ 32.968$; $d = 120$ días; *tasa auxiliar* $= 3{,}6\ \%$

Al 3,60 %	$\dfrac{32.968 \times 120}{10.000}$	= $ 393,62
1,20 „	395,62 : 3	= „ 131,87
0,30 „	131,87 : 4	= „ 32,97
0,15 „	32,97 : 2	= „ 16,48
Al 5,25 %		= $ 576,94

211. Problema **63.** — *¿A qué tanto por ciento se descontó una letra de $ 4.500, que por 48 días, sufrió un descuento de $ 55,50?*

Solución

Elementos de cálculo: $V = \$\ 4.500$; $Dc = \$\ 55{,}50$; $d = 48$ días.

Se tiene: $$t = \frac{36.000 . Dc}{V . d}$$

o bien: $$t = \frac{36.000 \times 55{,}50}{4.500 \times 48}$$

y efectuando: $$t = 9{,}25\ \%$$

212. Descuento racional. — Se llama *descuento racional* o *matemático,* al interés simple del valor efectivo de la operación en el tiempo que falta para su vencimiento.

En el descuento racional se toma como *valor del capital* el *valor efectivo* del documento, y el *valor escrito* como *monto* del capital real.

Este modo de descontar es el más lógico, puesto que toda obligación en el momento de ser descontada debe valer menos, dado que le faltan los intereses del valor efectivo para constituir el valor nominal en el tiempo estipulado. Sin embargo, el descuento comercial es el que se prefiere en la práctica por la facilidad en efectuar su cálculo.

Para determinar la fórmula general, procederemos en forma análoga a la empleada en el descuento comercial.

Designemos por D_m el descuento racional y V'_e, el valor efectivo racional.

Sustituyamos en la fórmula general del interés simple:

$$I = \frac{C . n . t}{100}$$

la I, interés, por D_m, descuento, y la C, capital por V'_e, valor efectivo, y tendremos la fórmula del descuento racional:

$$D_m = \frac{V'_e . n . t}{100} \qquad (1)$$

Sacando el denominador, resulta:

$$100\ D_m = V'_e . n . t \qquad (2)$$

pero:

$$V' = V - D_m$$

y reemplazando este valor en (2), se tiene:

$$100\ D_m = (V - D_m)\ n . t$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$100\ D_m = V . n . t - D_m . n . t$$

transponiendo términos:

$$100\ D_m + D_m . n . t = V . n . t$$

y sacando factor común D_m:

$$D_m\ (100 + n . t) = V . n . t$$

de donde:

$$D_m = \frac{V . n . t}{100 + n . t} \qquad (3)$$

que es la fórmula del *descuento racional* en función del valor nominal.

De las fórmulas (1) y (3) deducimos fácilmente las expresiones respectivas para cada uno de los demás elementos que intervienen en ellas.

Así, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} V'_e &= \frac{100 . D_m}{n . t} & \qquad V &= \frac{D_m\ (100 + n . t)}{n . t} \\ n &= \frac{100 . D_m}{V'_e . t} & \qquad n &= \frac{100 . D_m}{(V - D_m) t} \\ t &= \frac{100 . D_m}{V'_e . n} & \qquad t &= \frac{100 . D_m}{(V - D_m) n} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Si el tiempo figura expresado en meses o en días del año comercial o legal, las fórmulas correspondientes se obtienen siguiendo el mismo método empleado que para la deducción de la fórmula general.

Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{lll} D_m = \dfrac{V'_e.m.t}{1200} & D_m = \dfrac{V'_e.d.t}{36000} & D_m = \dfrac{V'_e.d.t}{36000} \\[2ex] D_m = \dfrac{V.m.t}{1200 + m.t} & D_m = \dfrac{V.d.t}{36000+d.t} & D_m = \dfrac{V.d.t}{36500+d.t} \end{array}\right\} \quad (5)$$

Y aplicando igual procedimiento a la fórmula de interés simple, cuando la tasa es el tanto por uno:

$$I = C.i.n$$

se tiene:

$$D_m = V'_e.i.n \qquad (6)$$

que es la fórmula del descuento racional en función del tanto por uno.

213. Valor efectivo en función del divisor fijo. — Sabemos que (**160**):

$$I = \frac{C.n}{D}$$

pero hemos dicho que es $I = D_m$ y $C = V'_e$, luego, sustituyendo estos valores en la fórmula anterior, resulta:

$$D_m = \frac{V'_e.n}{D} \qquad (1)$$

Consideremos ahora la igualdad conocida (**212**):

$$V'_e = V - D_m$$

y reemplazando D_m por su valor (1), resulta:

$$V' = V - \frac{V'_e.n}{D}$$

y pasando el sustraendo al primer miembro, queda:

$$V'_e + \frac{V'_e.n}{D} = V$$

y efectuando:

$$\frac{V'_e.D + V'_e.n}{D} = V$$

multiplicando por D ambos miembros y simplificando, tenemos:

$$V'_e.D + V'_e.n = V.D$$

y sacando el factor común V'_e:

$$V'_e\ (D + n) = V.D$$

de donde:

$$V'_e = \frac{V.D}{D + n} \qquad (7)$$

que es la fórmula que nos da el valor efectivo en función del divisor fijo. De ésta deducimos:

$$V = \frac{V'_e (D + n)}{D} \qquad (8)$$

214. PROBLEMA **64.** — *¿Cuál es el descuento racional sufrido por una letra que, al 5 % anual, sólo pagaron por ella $ 7.652,80 a los 45 días antes del vencimiento?*

Solución

Elementos de cálculo: $V'e = \$\ 7.652{,}80$; $t = 5\ \%$; $d = 45$ días.

La fórmula,
$$D_m = \frac{V'_e . d . t}{36.000}$$

nos da:
$$D_m = \frac{7.652{,}80 \times 45 \times 5}{36.000}$$

de donde:
$$D_m = \$\ 47{,}83$$

215. PROBLEMA **65.** — *¿Qué descuentos habrá que hacer a un pagaré de* **$** *12.900 descontado racionalmente al* 9 % *a los 128 días antes de su vencimiento?*

Solución

Elementos de cálculo: $V = \$\ 12.900$; $t = 9\ \%$; $d = 128$ días.

a) Se tiene:
$$D_m = \frac{V . d . t}{36.000 + d . t}$$

o bien:
$$D_m = \frac{12.900 \times 128 \times 9}{36.000 + 128 \times 9}$$

de donde:
$$D_m = \$\ 400$$

Además:
$$V'_e = V - D_m$$

luego:
$$V' = 12.900 - 400 = \$\ 12.500$$

b) Verificación por partes alícuotas del tiempo.

D = 4.000 ; V'_e = \$ 12.500 ; d = 128 días

Para 40 días	= \$ 125
„ 80 „	= „ 250
„ 8 „	= „ 25
128 días	\$ 400

216. Problema **66.** — *Calcular el valor efectivo de un documento de crédito que, descontado racionalmente al 7 %, a los 96 días antes del vencimiento, el descuento fué de \$ 126,42.*

Solución

Elemento de cálculo: $D_m = \$\ 126{,}42;\ t = 7\ \%;\ d = 96$ días.

a) Por la fórmula:
$$V'_e = \frac{36000.D_m}{d.t}$$

se tiene:
$$V'_e = \frac{36.000 \times 126{,}42}{96 \times 7}$$

o bien:
$$V'_e = \$\ 6.772{,}50$$

b) Otro procedimiento.

Determinemos en primer lugar el valor nominal. Despejando V en la fórmula:

$$D_m = \frac{V.d.t}{36000 + d.t}$$

se tiene:
$$V = \frac{D_m\ (36000 + d.t)}{d.t}$$

o bien:
$$V = \frac{126{,}42\ (36.000 + 96 \times 7)}{96 \times 7}$$

de donde:
$$V = \$\ 6.898{,}92$$

Pero es:
$$V'_e = V - D_m$$

y sustituyendo los valores conocidos:

$$V' = 6.898{,}92 - 126{,}42$$

de donde:
$$V'_e = \$\ 6.772{,}50.$$

217. PROBLEMA **67.** — *Calcular qué tanto por ciento se habrá descontado un pagaré de $ 14.630 que, a los 9 meses antes del vencimiento, el descuento racional fué de $ 630.*

Solución

Elementos de cálculo: $V = \$\ 14.630$; $D_m = \$\ 630$; $m = 9$ meses.

Se tiene: $V'_e = V - D_m$

o bien: $V'_e = 14.630 - 630$

luego: $V'_e = \$\ 14.000$

La fórmula de la tasa:

$$t = \frac{1200 . D_m}{V'_e . m}$$

nos da: $$t = \frac{1200 \times 630}{14000 \times 9}$$

de donde: $t = 6\ \%$

218. PROBLEMA **68.** — *Calcular qué tiempo antes de su vencimiento fué negociada una obligación de $ 3.687,60, cuyo descuento matemático al 4 % anual fué de $ 87,60.*

Solución

Elementos de cálculo: $V = \$\ 3.687{,}60$; $D_m = \$\ 87{,}60$; $t = 4\ \%$.

Tenemos: $V'_e = V - D_m$

o bien: $V'_e = 3.687{,}60 - 87{,}60$

o sea: $V'_e = \$\ 3.600$

La fórmula del tiempo:

$$n = \frac{100\ D_m}{V'_e . t}$$

nos da: $$n = \frac{100 \times 87{,}60}{3600 \times 4}$$

de donde: $n = \frac{73}{120}$ de año

o sea: $d = 219$ días.

219. Problema **69.** — *Por un pagaré descontado racionalmente al 4 %, se recibió $ 3.600 a los 219 días antes de su vencimiento. Determinar el valor nominal.*

Solución

Elementos de cálculo: $V'_e = \$\ 3.600$; $t = 4\ \%$; $d = 219$ días.

Aplicando la fórmula:

$$V = \frac{V'_e\ (D + d)}{D}$$

se tiene:
$$V = \frac{3600\ \ (9000 + 219)}{9000}$$

o bien:
$$V = \frac{3.600 \times 9.219}{9000}$$

de donde:
$$V = \$\ 3.687{,}60$$

La solución de este problema sirve también de verificación del que antecede.

220. Relación entre el descuento comercial y el descuento racional. — Demostración analítica. — Siendo el descuento racional, el interés simple del valor efectivo, cantidad menor que el valor nominal, es evidente que debe ser también menor que el descuento comercial.

Vamos a determinar la diferencia entre las dos clases de descuento para un mismo capital.

Las fórmulas del descuento comercial y racional, en función del tanto por uno, son, respectivamente, las siguientes:

$$D_c = V.i.n$$
$$D_m = V'_e.i.n$$

restando miembro a miembro se obtiene:

$$D_c - D_m = V.i.n - V'_e.i.n$$

factoreando $i.n$: $D_c - D_m = (V - V'_e)i.n$

pero, por definición es:

$$V - V'_e = D_m$$

luego sustituyendo, resulta:

$$D_c - D \quad = D \quad .i.n$$

Observando el segundo miembro de esta igualdad, vemos que es la expresión del interés simple, en la que figura el descuento racional como capital.

De aquí deducimos que: *la diferencia entre las dos clases de descuentos, es el interés simple del descuento racional.*

221. Problema 70. — *La diferencia de los dos descuentos de un pagaré a 96 días y al 5 %, es de, $ 1,34. ¿Cuál es el valor nominal?*

Primera solución

Elementos de cálculo: $D_c - D_m = \$ \; 1{,}34$; $t = 5$ %; $d = 96$ días.

Determinación del descuento racional.

Se tiene: $D_c - D_m = D_m . i . n$

y dando valores, se obtiene:

$$1{,}34 = D_m \; 0{,}05 \times \frac{96}{360}$$

de donde: $D_m = \dfrac{360 \times 1{,}34}{0{,}05 \times 96}$

luego: $D_m = \$ \; 100{,}50$

Determinación del valor actual racional.

La fórmula: $V'_e = \dfrac{36000 . D_m}{d . t}$

nos da: $V'_e = \dfrac{36.000 \times 100{,}50}{96 \times 5}$

de donde: $V'_e = \$ \; 7.537{,}50$

Determinación del valor nominal.

Se tiene: $V = V'_e + D_m$

o bien: $V = 7.537{,}50 + 100{,}50$

luego: $V = \$\ 7.638$

Segunda Solución

Después de haber encontrado $ 100,50 para el descuento racional, en la fórmula:

$$D_m = \frac{V.d.t}{36.000 + .d.t}$$

se despeja V: $$V = \frac{D_m\ (36.000 + d.t)}{d.t}$$

y sustituyendo los valores dados, resulta:

$$V = \frac{100{,}50\ (36.000 + 96 \times 5)}{96 \times 5}$$

$$V = \frac{100{,}50 \times 36.480}{480}$$

de donde: $V = \$\ 7.638.$

Tercera solución

Sabemos que es: $D_c - D_m = 1{,}34$

de donde: $D_c = 1{,}34 + D_m$

o bien: $D_c = 1{,}34 + 100{,}50$

luego: $D_c = \$\ 101{,}84$

La fórmula: $$V = \frac{36.000 \times D_c}{d.t}$$

o sea: $$V = \frac{D.D_c}{d}$$

nos da: $$V = \frac{7.200 \times 101{,}84}{96}$$

de donde: $V = \$\ 7.638.$

222. Problema **71.** — *Los descuentos comercial y racional de un pagaré al 4 % anual, son respectivamente, \$ 912,80 y \$ 900. Determinar el vencimiento del pagaré.*

Solución

Elementos de cálculo: $D_c = \$\ 912{,}80$; $D_m = \$\ 900$; $t = 4\ \%$.

Despejando n en la fórmula:

$$D_c - D_m = D_m \cdot i . n$$

se tiene:

$$n = \frac{D_c - D_m}{D_m . i}$$

o bien:

$$n = \frac{912{,}80 - 900}{900 \times 0{,}04} = \frac{1.280}{900 \times 4} = \frac{16}{45} \text{ de año.}$$

o sea:

$$d = 128 \text{ días.}$$

223. Problema **72.** — *Calcular el valor actual racional, de un documento de crédito, cuyo descuento comercial fué de \$ 912,80 y de \$ 900 el racional.*

Solución

Se tiene:

$$D_c - D_m = D_m \cdot i . n \qquad (1)$$

y además:

$$D_m = V'_e . i . n \qquad (2)$$

Dividiendo miembro a miembro, se obtiene:

$$\frac{D_c - D_m}{D_m} = \frac{D_m . i . n}{V'_e . i . n}$$

y simplificando:

$$\frac{D_c - D_m}{D_m} = \frac{D_m}{V'_e}$$

de donde:

$$V'_e = \frac{D^2_m}{D_e - D_m}$$

Reemplazando valores, resulta:

$$V'_e = \frac{900^2}{912{,}80 - 900}$$

$$V'_e = \frac{8.100.000}{12{,}80}$$

luego:

$$V'_e = \$\ 63.281{,}25.$$

TITULOS DE CRÉDITO PUBLICO

224. Generalidades. — Se llaman *valores mobililarios,* a los documentos representativos de las operaciones de crédito.

En los valores mobiliarios se distinguen varias categorías, siendo las más importantes: los *fondos públicos, acciones de capital, obligaciones, bonos, etc.*

Los documentos que representan valores prestados por particulares a entidades públicas (Estado, Provincia, Municipio), se llaman *fondos públicos,* o *títulos de crédito público.*

Las necesidades urgentes de bien público imponen a los gobiernos gastos extraordinarios que, en la mayoría de los casos, no pueden solventar con sus recursos propios y se ven obligados a contraer empréstitos, especificando el interés y la suficiente garantía de la operación. Estos compromisos son contratos de creación de títulos que representan el equivalente de las sumas prestadas y que se designan con el nombre de *emisión de renta.*

El Estado o entidad pública que realiza la operación de préstamo, se obliga a pagar al poseedor de un título de renta un tanto por ciento sobre el capital facilitado. El precio que se paga por un título de renta se llama *precio de emisión.* Es decir, que si la operación se efectúa al 89 % y al 5 % de interés anual, el suscritor recibirá un título de $ 100 por cada $ 89 efectivos que facilita, y disfrutará de una renta anual de $ 5 por cada título.

El total de estas obligaciones se denomina *deuda pública* y está constituída por la *deuda consolidada,* o *del Estado,* y *la deuda flotante* o *del Tesoro.* La *deuda consolidada* es aquella cuyo servicio de pago de intereses y amortización, figura entre las obligaciones ordinarias del Estado y puede ser *permanente* o *perpetua,* si el término de reembolso no ha sido determinado. La *deuda flotante* responde a necesidades del momento y da lugar a la creación de títulos llamados *bonos* u *obligaciones del Tesoro.* El plazo de emisión de estos valores es fijo y pagaderos al final del timpo estipulado juntamente con los intereses del capital.

El *valor nominal* de un título es la cantidad especificada en el documento, y *valor efectivo* es el precio que tiene al ser negociado.

Las cuestiones relativas a títulos de crédito público se resuelven por regla de tres.

225. Deducción de la Fórmula de la Renta. — Problema general. *¿Qué renta* **R** *tiene una persona que ha invertido un capital* **C** *en títulos de la deuda pública al tanto por ciento* **t**, *cotizados el valor* E?

Solución

Como cada título tiene un valor efectivo *E*, diremos:

Si **E** $ *efectivos producen* **t** $

un capital de **C** $ *producirán* **R** $

La regla de tres planteada es directa, luego:

$$\frac{E}{C} = \frac{t}{R}$$

de donde se deduce:

$$R = \frac{C.t}{E} \qquad (1)$$

que es la *fórmula de la renta,* expresión que nos dice que: *la renta que produce un capital es igual al producto del capital dado por el tanto por ciento y el resultado dividido por la cotización de los títulos.*

De la fórmula anterior se deducen fácilmente los valores respectivos para cada uno de los demás elementos.

$$C = \frac{R.E}{t} \; ; \; E = \frac{C.t}{R} \; ; \; t = \frac{E.R}{C}$$

226. PROBLEMA **73.** — *Se han invertido $ 12.900 en títulos de una deuda al* 8 %, *que ha producido una renta anual de $ 1500. Determinar la cotización.*

Solución

Aplicando la fórmula:

$$E = \frac{C.t}{R}$$

se tiene:

$$E = \frac{12.900 \times 8}{1500} = \$\ 68{,}80.$$

227. PROBLEMA **74.** — *¿Qué capital efectivo necesito invertir en títulos de ferrocarriles del 4 % cotizados al 63½ %, para tener una renta anual de $ 4.500?*

Solución

Aplicando la fórmula:

$$C = \frac{R.E}{t}$$

se tiene:

$$C = \frac{4.500 \times 63{,}50}{4} = \$\ 71.437{,}50$$

228. PROBLEMA **75.** — *Se han colocado $ 64.300 efectivos en títulos de cierta deuda, cotizados a 95,45 % y que producen una renta anual de $ 5.500. Determinar el tanto por ciento de renta.*

Solución

Aplicando la fórmula:

$$t = \frac{E.R}{C}$$

se tiene:

$$t = \frac{95{,}45 \times 5.500}{64.300} = 8{,}16\ \%$$

229. PROBLEMA **76.** — *¿Cuánto valen en plaza los títulos de una deuda del 7¾ %, estando el interés corriente al 9 %?*

Solución

Aplicando la fórmula:

$$E = \frac{C.t}{R}$$

se tiene:

$$E = \frac{100 \times 7{,}75}{9} = \$.\ 86^{1}/_{9}$$

230. PROBLEMA **77.** — *Se han adquirido 325 títulos de crédito público del 9 % anual. ¿Qué renta producen y a qué tanto por ciento se ha colocado el dinero?*

Solución

Por los 325 títulos a 92,50 cada uno se han pagado:

$$C = 325 \times 92,50 = \$\ 30.062,50$$

Además, si $\quad \$ \quad 92,50$ efectivos producen $\$\ 9$

$\quad\quad\quad\quad$ „ $30.062,50$ $\quad$ „ $\quad$ „ $\quad$ „ x

luego:
$$\frac{92,50}{30062,50} = \frac{9}{x}$$

de donde:
$$x = \frac{30062,50 \times 9}{92,50} = \$\ 2.925$$

Aplicando la fórmula:

$$t = \frac{E.R}{C}$$

se tiene:
$$t = \frac{100 \times 2.925}{30.062,50} = 9,76\ \%$$

EJERCICIOS

Resolver los siguientes problemas sobre descuento comercial y racional:

359. — Calcular el descuento sufrido por una letra de cambio de $ 8.650 que vencía a los 160 días y fué negociada al 7 ¼ % anual.

360. — ¿Cuál es el valor nominal de un efecto de comercio que, colocado al 1 $^4/_5$ % trimestral y pagado a los 4 meses antes del vencimiento, ha producido un descuento de $ 576,96?

361. — Determinar el valor nominal de un pagaré que descontado al 6 % y a los 84 días antes de su vencimiento ha dado un valor efectivo de $ 2.327,25.

362. — Se han recibido $ 3.485,50 por un documento de crédito a 3 meses y 15 días de plazo, descontado al ½ % mensual. Calcular el valor nominal.

363. — ¿A qué tanto por ciento se descontó un pagaré de $ 8.700 que, por 72 días, sufrió un descuento de $ 107,88?

364. — Se ha vendido un solar de 450 varas cuadradas, recibiéndose en pago un pagaré por su valor de $ 13.500 a 1 año y 4 meses de plazo. A los 7 meses el comprador retira el pagaré mediante el pago inmediato de $ 12.758,85. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha concedido?

365. — ¿En qué tiempo un efecto de $ 9.200 descontados al 6 ½ % ha dado un descuento de $ 184,50?

366. — Un comerciante de Tucumán vendió una partida de azúcar por $ 23.500, recibiendo en pago un pagaré por su valor a 90 días de plazo, que acto continuo negoció al 8 % de descuento anual. ¿Cuál es el valor efectivo del documento?

367. — Un cerealista adquiere una partida de avena compuesta de 1.200 bolsas, dando en pago una letra por su valor. A los 104 días antes del vencimiento consigue retirar la letra mediante un descuento del 9 ¾ %, entregando al efecto $ 7.055,51. Determinar el valor nominal del documento.

368. — ¿Cuál es el descuento racional al 7 % anual de un pagaré de $ 8.950 a los 84 días antes de su vencimiento?

369. — Un constructor adquiere una cierta cantidad de ladrillos, dando por su valor una letra a 4 meses y 18 días. Pasados 2 meses y 10 días, la negocia racionalmente al 8 ½ % anual, recibiendo $ 2.340,35. Calcular el descuento.

370. — Calcular el valor efectivo de un documento que, descontado racionalmente al 2 ¼ % trimestral a los 4 meses antes del vencimiento, sufrió un descuento de $ 327,42.

371. — Un bodeguero de Mendoza enajena una partida de vinos de mesa, recibiendo un pagaré por $ 3.800 a 135 días. Corridos 75 días, negocia la letra al 9 $^4/_5$ % anual de descuento racional. ¿Cuánto recibió?

372. — Cierto ganadero recibe una letra por $ 11.353,47 a 160 días de plazo en pago de un lote de hacienda. A los 85 días vende la letra, la que sufre un descuento racional de $ 278,67. ¿A qué tanto por ciento liquidó el documento?

373. — Un particular vendió una finca en $ 32.640 recibiendo los tres quintos de su valor al contado y el resto en una obligación a 5 meses y 15 días que, a los 3 meses y 3 días la negoció al 10 % de descuento racional, invirtiendo su efectivo en harina de $ 1,60 la bolsa de 10 kg. ¿Cuántas bolsas de harina pudo comprar?

374. — ¿Cuánto tiempo antes de su vencimiento fué liquidada una obligación de $ 6.093,38 cuyo descuento matemático al 2 % trimestral fué de $ 123,38?

Resolver los siguientes problemas sobre fondos públicos:

375. — Una persona ha comprado 630 títulos del 7 %, cotizados al 90,50 %. ¿Qué renta obtiene?

376. — Calcular qué renta se obtendrá comprando $ 26.400 de títulos del 3 %, siendo la cotización de 69,25 %.

377. — Se han invertido $ 6.650 en la compra de títulos de cierta deuda al 6 %, que ha producido una renta anual de $ 750. Determinar la cotización.

378. — Se han empleado $ 42.000 en títulos de la deuda pública cotizados a 75,60 %, que producen una renta anual de $ 6.000. ¿Cuál es el tanto por ciento que ganan los títulos?

379. — ¿Cuánto costaron $ 2.500 de renta al 3 ½ %, cotizándose los títulos a 68,60 %?

380. — Un industrial posee $ 20.000 nominales en títulos de crédito público del 4 % y cotizados al 94,50 %. ¿Qué renta tiene y a qué tanto por ciento ha colocado el dinero?

381. — Determinar el importe de la compra de títulos del Empréstito Interno del 6 % de interés anual que cotizados al 82,50 % producen una renta de $ 1.320 anual.

382. — Un capitalista ha comprado una renta de $ 1.500 oro sellado en fondos públicos del 6 % cotizados al 87 %. ¿Cuántos pesos moneda nacional habrá invertido estando el oro a 230 %?

383. — Se han empleado $ 29.300 en títulos de la deuda pública del 4 % al precio de 93,60 %. Determinar el valor nominal de la compra, pagando ⅛ % de corretaje.

CAPITULO VIII

Vencimiento medio.

231. Nociones generales. — En las operaciones comerciales y bancarias, se utiliza el cálculo del *vencimiento medio*, con el fin de sustituir por una sola suma de dinero y a un plazo único, varios documentos de plazos distintos.

El *vencimiento medio*, es un caso especial del promedio de interés referente al tiempo, cuando la tasa es la misma para todos los capitales, y consiste en resolver la siguiente cuestión: *determinar el tiempo necesario en el cual un solo documento, igual a la suma de los valores nominales de varios otros y de vencimientos diferentes, produzca un interés igual al total de los intereses de los efectos parciales.*

232. Deducción de la fórmula general. — Sean V_1, V_2, V_3 los capitales y n_1, n_2, n_3 los plazos correspondientes, colocados todos a una misma tasa t, y n_x, al plazo medio que se busca.

El interés (o descuento) total de los capitales en función del divisor fijo correspondiente a la tasa única, es (**181**):

$$I_t = \frac{V_1 . n_1 + V_2 . n_2 + V_3 . n_3}{D} \qquad (1)$$

y el valor del interés (o descuento) del documento único, será:

$$I_x = \frac{(V_1 + V_2 + V_3) n_x}{D} \qquad (2)$$

pero, por definición, es:

$$I_t = I_x$$

e igualando las expresiones (1) y (2), tendremos:

$$\frac{V_1 . n_1 + V_2 . n_2 + V_3 . n_3}{D} = \frac{(V_1 + V_2 + V_3) n_x}{D}$$

y simplificando resulta:

$$V_1.n_1 + V_2.n_2 + V_3.n_3 = (V_1 + V_2 + V_3)n_x$$

de donde:

$$n_x = \frac{V_1.n_1 + V_2.n_2 + V_3.n_3}{V_1 + V_2 + V_3}$$

Generalizando, se tiene:

$$n_n = \frac{V_1 n_1 + V_2 n_2 + V_3 n_3 + \ldots}{V_1 + V_2 + V_3 + \ldots} \qquad (3)$$

que es la fórmula general del *Vencimiento medio,* la que nos dice que *el plazo medio es igual a la suma de los productos de los capitales por sus tiempos correspondientes de los diversos documentos, todo dividido por la suma de los capitales de los documentos dados.*

Teniendo en cuenta que, por definición de *número* comercial (**163**), es:

$$V_1.n_1 = N_1 \;;\; V_2.n_2 = N_2 \;;\; V_3.n_3 = N_3; \ldots$$

sustituyendo estos valores en (3), resulta:

$$n_x = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots}{V_1 + V_2 + V_3 + \ldots}$$

en donde se observa que la tasa no interviene en el cálculo del vencimiento medio.

La expresión última la podemos indicar más brevemente así:

$$n_x = \frac{\sum_1^n N_n}{\sum_1^n V_n}$$

en la que la letra griega Σ (sigma) indica la suma de los valores de *N* y de *V* desde *1* hasta *n.*

En esta clase de operaciones se acostumbra considerar un origen común para los tiempos no expresados con precisión, y que corresponde a los diferentes capitales.

Este origen común se llama *época,* la que generalmente es determinada por la fecha del primer documento.

233. PROBLEMA **78.** — *Un comerciante ha adquirido una partida de cueros del Chubut por valor de $ 20.000, suscribiendo en* *cambio tres documentos: uno por $ 5.000 a 60 días de la fecha; otro por $ 7.000 a 140 días y el último por $ 8.000 a 180 días. Determinar el vencimiento medio correspondiente si se paga de una sola vez el importe total de la compra.*

Solución

En este problema se especifica el tiempo de cada capital.

Elementos de cálculo: $V_1 = \$ 5.000$; $V_2 = \$ 7.000$; $V_3 = \$ 8.000$

$n_1 = 60$ días; $n_2 = 140$ días; $n_3 = 180$ días.

Documento único: $V_1 + V_2 + V_3 = \$ 20.000$

Aplicando la fórmula última:

$$n_x = \frac{V_1.n_1 + V_2.n_2 + V_3.n_3}{V_1 + V_2 + V_3}$$

y reemplazando en ella los valores dados, resulta:

$$n_x = \frac{5.000 \times 60 + 7.000 \times 140 + 8.000 \times 180}{5.000 + 7.000 + 8.000}$$

$$n_x = \frac{2.720.000}{20.000}$$

de donde:

$$n_x = 136 \text{ días}$$

Disposición práctica para el cálculo:

Capitales	Vencimientos	Números
$ 5.000	60 días	300.000
„ 7.000	140 „	980.000
„ 8.000	180 „	1.440.000
$ 20.000		2.720.000

Suma de capitales: 20.000

Suma de los números: 2.720.000

de donde: $$n_x = \frac{\sum_{1}^{n} N_n}{\sum_{1}^{n} V_n} = \frac{2.720.000}{20.000} = 136 \text{ días}$$

Luego el comprador puede efectuar el pago del importe total de la deuda a los 136 días de la fecha, sin perjuicio para ninguna de las partes.

234. PROBLEMA **79.** — *Por la compra de cierta cantidad de algodón, se ha dado en pago los pagarés siguientes: uno de $ 5.000 que vence el 18 de junio; otro de $ 3.000 el 10 de agosto; y otro de $ 6.200 el 21 de agosto; y el último, de $ 2.600 el 16 de septiembre. Determinar la fecha en que deberán pagarse de una sola vez y sin perjuicio para ninguna de las partes.*

Solución

En este problema el tiempo que comprende a cada documento, no está expresado en forma precisa. Cuando esto ocurre en cuestiones de esta clase, se prefiere como método más práctico, *tomar por época la fecha del vencimiento más próximo* y relacionar con ésta los demás vencimientos. En nuestro caso tomaremos por época, *el 18 de junio.* Para fijar con exactitud el número de días que median entre la época y la fecha del vencimiento de cada documento, haremos uso de la tabla (**128**) para calcular el tiempo entre dos fechas. Al tomar por época la fecha del primer vencimiento será igual a cero el plazo del primer capital. Luego se procede como en el problema anterior.

Disposición práctica.

Capitales		Días	Números
$ 5.000	al 18 junio	0	
„ 3.000	„ 10 agosto	53	159.000
„ 6.200	„ 21 „	64	396.800
„ 2.600	„ 16 septbre.	90	234.000
$ 16.800			789.800

Aplicando la fórmula:

$$n_x = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + N_4}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}$$

resulta:

$$n_x = \frac{789.800}{16.800}$$

de donde:

$$n_x = 47 \text{ días}$$

Por lo tanto, el vencimiento medio es 47 días después del 18 de junio, es decir, el 4 de agosto.

235. Vencimiento común. — Consiste esta operación en reemplazar varios documentos por otro, con tal que: *el valor actual de todos los documentos propuestos sea igual al valor actual del efecto único dado en su reemplazo, siendo la tasa la misma para todos los capitales.*

De acuerdo con esta condición y con respecto al documento único, los problemas de vencimiento común consisten en:

a) *Determinar su valor nominal,*

b) *Determinar la fecha de su vencimiento.*

236. Deducción de la fórmula. — Problema general. — *Se tienen varios documentos cuyos valores nominales son* V_1, V_2 *y* V_3, *cuyos tiempos respectivos de vencimiento son* n_1, n_2 *y* n_3, *colocados todos a la misma tasa* t. *Calcular el valor* V_x *de un documento único colocado a un tiempo* n_x *a la misma tasa* t.

Solución

Considerando el descuento comercial, la fórmula del valor efectivo en función del divisor fijo **(206)**, es:

$$V_e = \frac{V\,(D - n)}{D}$$

con la que calculamos el valor efectivo de cada uno de los documentos dados:

para V_1: $$V_{1e} = \frac{V_1\,(D - n_1)}{D}$$

para V_2: $$V_{2e} = \frac{V_2 (D - n_2)}{D}$$

para V_3: $$V_{3e} = \frac{V_3 (D - n_3)}{D}$$

De la misma manera, el valor efectivo del documento único es:

$$V_{xe} = \frac{V_x (D - n_x)}{D}$$

Por definición de vencimiento común (235), el valor efectivo del documento único debe ser igual a la suma de los valores efectivos de los documentos dados, es decir:

$$V_{xe} = V_{1e} + V_{2e} + V_{3e}$$

y sustituyendo por sus iguales respectivos, resulta:

$$\frac{V_x (D - n_e)}{D} = \frac{V_1 (D - n_1)}{D} + \frac{V_2 (D - n_2)}{D} + \frac{V_3 (D - n_3)}{D}$$

y eliminando los denominadores, se tiene:

$$V_x (D - n_x) = V_1 (D - n_1) + V_2 (D - n_2) + V_3 (D - n_3)$$

efectuando las operaciones del segundo miembro, queda:

$$V_x (D - n_x) = V_1.D - V_1.n_1 + V_2.D - V_2.n_2 + V_3.D - V_3.n_3$$

y agrupando los términos del segundo miembro:

$$V_x (D - n_x) = V_1.D + V_2.D + V_3.D - V_1.n_1 - V_2.n_2 - V_3.n_3$$

sacando el factor común D, y encerrando los términos negativos en un paréntesis:

$$V_x (D - n_x) = D (V_1 + V_2 + V_3) - (V_1.n_1 + V_2.n_2 + V_3.n_3)$$

de donde:

$$V_x = \frac{D (V_1 + V_2 + V_3) - (V_1.n_1 + V_2.n_2 + V_3.n_3)}{D - n_x} \qquad (1)$$

que es la fórmula del valor nominal del documento único. Como se comprende fácilmente, la fórmula obtenida puede extenderse al caso en que fueran más de tres los documentos dados.

La fecha del vencimiento común la deducimos fácilmente de la igualdad (1). Por lo tanto, efectuando operaciones en el primer miembro, se tiene:

$$V_x . D - V_x . n_x = D\,(V_1 + V_2 + V_3) - (V_1 . n_1 + V_2 . n_2 + V_3 . n_3)$$

transponiendo los términos queda:

$$V_x . D - D\,(V_1 + V_2 + V_3) + (V_1 . n_1 + V_2 . n_2 + V_3 . n_3) = V_x . n_x$$

sacado el factor común D:

$$D\,[V_x - (V_1 + V_2 + V_3)] + (V_1 . n_1 + V_2 . n_2 + V_3 . n_3) = V_x . n_x$$

de donde:

$$n_x = \frac{D\,[V_x - (V_1 + V_2 + V_3)] + (V_1 . n_1 + V_2 . n_2 + V_3 . n_3)}{V_x}$$

expresión que nos da el plazo común buscado.

RESOLUCION DE PROBLEMAS EN QUE LOS DOCUMENTOS SE DESCUENTAN COMERCIALMENTE.

237. PROBLEMA 80. — *Determinar el valor nominal de un pagaré con vencimiento a los 240 días, dado en sustitución de los siguientes documentos: \$ 8.400 por 65 días; \$ 5.300 por 110 días y \$ 4.000 por 140 días. Se calcula el descuento al 6 % anual.*

Solución

Elementos de cálculo: V_1 = \$ 8.400; V_2 = \$ 5.300; V_3 = \$ 4.000

n_1 = 65 días; n_2 = 110 días; n_3 = 140 días

n_x = 240 días; D = 6.000

Aplicando la fórmula correspondiente,

$$V_x = \frac{D\,(V_1 + V_2 + V_3) - (V_1 . n_1 + V_2 . n_2 + V_3 . n_3)}{D - n_x}$$

se tiene:

$$V = \frac{6.000\ (8.400+5.300+4.000) - (8.400 \times 65 + 5.300 \times 110 + 4.000 \times 140)}{6.000 - 240}$$

o bien: $$V_x = \frac{6.000 \times 17.700 - 1.689.000}{5.760}$$

$$= \frac{106.200.000 - 1.689.000}{5.760}$$

$$= \frac{104.511.000}{5.760}$$

de donde: $V_x = \$\ 18.144{,}27$

Disposición práctica

Se simplifican los cálculos por medio de una disposición del problema, con el fin de obtener rápidamente la suma de los capitales y la suma de los números:

Capitales	*Vencimientos*	*Números*
$ 8.400	65 días	546.000
„ 5.300	110 „	583.000
„ 4.000	140 „	560.000
$ 17.700		1.689.000

siendo: $t = 6\ \%$; $D = 6\ 000$

Sustituyendo en la fórmula las sumas correspondientes por los valores obtenidos, se tiene:

$$V_x = \frac{6.000 \times 17.700 - 1.689.000}{6.000 - 240}$$

de donde: $V_x = \$\ 18.144{,}27$

238. Problema **81.** — *Un comerciante posee tres documentos: uno, de $ 1.800 a 45 días, otro, de $ 900 a 90 días y otro de $ 3.600 a 120 días, y quiere dar en su reemplazo un pagaré por valor de $ 6.360. Determinar el vencimiento de dicho pagaré, siendo la tasa el 6 % anual.*

Solución

Elementos de cálculo: $V_1 = \$\ 1.800$; $V_2 = \$\ 900$; $V_3 = \$\ 3.600$.

$n_1 = 45$ días; $n_2 = 90$ días; $n_3 = 120$ días

$V_x = \$\ 6.360$; $t = 6\ \%$; $D = 6.000$

Aplicando la fórmula correspondiente:

$$n_x = \frac{D\,[V_x - (V_1 + V_2 + V_3)] + (V_1.n_1 + V_2.n_2 + V_3.n_3)}{V_x}$$

se tiene:

$$n_x = \frac{6.000\ [\ 6.360 - (1.800 + 900 + 3.600)] + (1.800 \times 45 + 900 \times 90 + 3.600 \times 120)}{6.360}$$

$$\frac{6.000\ (6.360\ -\ 6.300)\ +\ 594.000}{6.360}$$

$$= \frac{6.000 \times 60 + 594.000}{6.360}$$

de donde: $n_x = 150$ días

Disposición práctica

Capitales	*Vencimientos*	*Números*
\$ 1.800	45 días	81.000
„ 900	90 „	81.000
„ 3.600	120 „	432.000
\$ 6.300		594.000

siendo: $t = 6\ \%$; $D = 6.000$

Sustituyendo en la fórmula las sumas correspondientes por los valores obtenidos, se tiene:

$$n_x = \frac{6.000\ (6.360\ -\ 6.300)\ +\ 594.000}{6.360}$$

$$= \frac{6.000\ \times\ 60\ +\ 594.000}{6.360}$$

luego: $n_x = 150$ días

239. Documentos equivalentes. — Cuando dos documentos descontados a la misma tasa producen el mismo valor efectivo, se llaman *documentos equivalentes.*

En la equivalencia de documentos, que es un caso particular del vencimiento común, se proponen los siguientes problemas:

a) *Calcular el valor nominal desconocido de uno de los documentos,*

b) *Calcular el tiempo desconocido de uno de los documentos.*

Vamos a deducir las fórmulas correspondientes, mediante las cuales podamos resolver esta clase de problemas.

240. Deducción de las fórmulas. — Sean, V_1 el *valor nominal conocido*, y V_x el *valor nominal desconocido* de los respectivos documentos, descontados al mismo tanto por ciento *t*, siendo n_1 y n_x, los tiempos correspondientes.

Si consideramos el descuento comercial, la expresión del valor efectivo para cada capital en función del divisor fijo, será:

para V_1 $$V_{1e} = \frac{V_1 \, (D - n_1)}{D} \qquad (1)$$

para V_x $$V_{xe} = \frac{V_x \, (D - n_x)}{D} \qquad (2)$$

Por definición de equivalencia de documentos, las expresiones (1) y (2) deben ser iguales, luego:

$$\frac{V_1 \, (D - n_1)}{D} = \frac{V_x \, (D - n_x)}{D}$$

Suprimiendo denominadores, queda:

$$V_1 \, (D - n_1) = V_x \, (D - n_x) \qquad (3)$$

de donde: $$V_x = \frac{V_1 \, (D - n_1)}{D - n_x}$$

que es la fórmula del valor nominal desconocido.

Considerando nuevamente la igualdad (3) y efectuando las operaciones indicadas, se tiene:

$$V_1 . D - V_1 . n_1 = V - V_x . D_x . n_x$$

y aislando el último término:

$$V_x . n_x = V_1 . n_1 + V_x \, D - V_1 . D$$

de donde:

$$n_x = \frac{V_1 . n_1 + V_x . D - V_1 . D}{V_x}$$

que es la fórmula del tiempo desconocido de uno de los documentos.

241. PROBLEMA **82.** — *Calcular el valor nominal de un pagaré a 90 días, para que sea equivaente a otro de $ 7.500 a 120 dias, si se calcula el descuento comercial al 6 % anual.*

Solución

Elementos de cálculo: $V_1 = \$\ 7.500$; $n_x = 90$ días

$n_1 = 120$ días $\quad t = 6\ \%$ $\quad D = 6.000$

Aplicando la fórmula:

$$V_x = \frac{V_1\ (D - n_1)}{D - n_x}$$

se tiene:

$$V_x = \frac{7.500\ (6.000 - 120)}{6.000 - 90}$$

$$V_x = \frac{7.500 \times 5.880}{5.910}$$

de donde:

$$V_x = \$\ 7.461{,}93$$

242. PROBLEMA **83.** — *Calcular qué plazo necesita un efecto de comercio de $ 5.373 para que sea equivalente a otro de $ 5.400 a 60 días, si el descuento comercial se calcula al 4 % anual.*

Solución

Elementos de cálculo: $V_1 = \$\ 5.400$; $V_x = \$\ 5.373$; $D = 9.000$

$n_1 = 60$ días $\quad t = 4\ \%$

Se tiene, **(240)**:

$$n_x = \frac{V_1 . n_1 + V_x . D - V_1 . D}{V_x}$$

o bien:

$$n_x = \frac{5.400 \times 60 + 5.373 \times 9.000 - 5.400 \times 9.000}{5.373}$$

$$n_x = \frac{48.681.000 - 48.600.000}{5.373}$$

de donde:

$$n_x = 15 \text{ días}$$

EJERCICIOS

Resolver los siguientes problemas de vencimiento medio, vencimiento común y efectos equivalentes:

384. — Un comerciante ha vendido mercaderías por valor de $ 15.000, pagaderas como sigue: $ 4.000 a los 45 días; $ 5.000 a los 60 días y $ 6.000 a los 120 días. Determinar el vencimiento medio.

385. — Un banquero tiene tres letras a cuenta de una misma persona: $ 4.680 a 80 días; $ 7.400 a 4 meses y $ 10.500 a los 6,5 meses. Conviniendo suscribir un documento por el importe total, calcular la fecha de su vencimiento.

386. — Determinar el plazo medio de los siguientes pagarés: uno de $ 6.500 al 12 de julio; otro de $ 4.000 al 7 de agosto; y otro de $ 900 el 14 de septiembre y el último de $ 3.600 al 4 de octubre.

387. — Un estanciero compró varias máquinas agrícolas, dando en pago tres efectos: uno de $ 8.700 al 25 de abril; otro de $ 5.750 al 14 de julio y el tercero de $ 11.550 al 23 de octubre. No pudiendo satisfacer el primer documento, convienen que el estanciero haga efectivo el importe de los tres efectos en un solo plazo. Determinar la fecha de este vencimiento.

388. — Se ha dado un pagaré con vencimiento a los 150 días, en reemplazo de los tres siguientes: $ 1.800 por 45 días; $ 900 por 3 meses y $ 3.600 por 4 meses. El descuento es del 6 % anual. Determinar su valor nominal.

389. — Un negociante adquirió una partida de lana, dando en pago 3 documentos: $ 8.400 por 65 días; $ 5.300 por 105 días y $ 4.000 por 140 días. Quiere dar en reemplazo un pagaré por valor de $ 18.144,27. Determinar el vencimiento común, siendo el descuento del 6 % anual.

390. — Habiendo comprado un estanciero el 20 de marzo un lote de hacienda, dió en cambio un pagaré por $ 12.000 al 29 de abril y otro por $ 15.000 al 16 de setiembre, siendo el 9 % la tasa del descuento. Pocos días antes del primer vencimiento resuelve reemplazar las dos obligaciones por un documento único por valor de $ 27.657,20. Calcular el vencimiento común.

391. — En reemplazo de un documento de $ 12.000 que vence a los 45 días, una persona dió los tres pagarés siguientes: $ 3.000 a 20 días; otro de $ 4.000 y otro de $ 5.000 a 40 días. Determinar el vencimiento del segundo documento.

392. — Una persona firmó tres letras, cuyos valores nominales son: $ 2.300, $ 3.750 y $ 4.600 y vencen respectivamente a los 50, 90 y 110 días. Desea sustituir estos tres documentos por uno solo, cuya disponibilidad sea de 160 días. Calcular el valor nominal del efecto único, si el descuento comercial es del 4 ½ % anual.

393. — En reemplazo de cuatro pagarés, cuyos importes respectivos son de $ 3.650, $ 6.540, $ 2.830 y $ 7.480 y que tienen por plazos 45, 75, 118 y 140 días, un comerciante propuso a su acreedor firmar uno solo por valor de $ 20.590. Calculando el descuento comercial al 1,25 % trimestral, hallar el vencimiento de este último pagaré.

394. — Tiene un banquero cuatro obligaciones: la 1ª de $ 6.800 al 5 % que vence el 15 de mayo; otra de $ 9.200 al 6 ½ % el 13 de agosto; y otra de $ 2.300 al 4,25 % el 12 de octubre, y la última de $ 3.900 al 8 % que vence el 14 de junio. Desea sustituirlas por un documento único. Calcular su plazo y tanto por ciento de descuento.

395. — Tres letras firmadas el 15 de abril, tienen por valor nominal respectivamente $ 9.600; $ 7.850 y $ 12.000. El primer documento vence el 24 de junio; el segundo el 9 de julio y el tercero vence el 21 de julio. Quiere sustituirse por un solo efecto a 120 días. Hallar su valor nominal si el descuento comercial se calcula al 6 % anual.

396. — ¿Cuál será el valor nominal de una letra a 60 días para que sea equivalente a otra de $ 5.373 pagadera a los 15 días, si el descuento comercial se calcula al 4 % anual?

397. — Se tienen dos letras, siendo sus valores nominales $ 7.500 y $ 7.462, venciendo la primera a los 120 días. Si se calcula el descuento comercial al 6 % anual, ¿qué plazo de tiempo necesita la segunda para que resulte equivalente a la anterior?

398. — Determinar la fecha en que resultarían equivalentes las dos letras siguientes: una de $ 3.690 que vence dentro de 89 días y otra de $ 3.660 a los 56 días, si el descuento se calcula al 9 %.

CAPITULO IX

Repartición proporcional.

243. Definiciones. — Se llama *repartición proporcional,* a la operación que tiene por objeto, descomponer una cantidad, o un número, en partes proporcionales a otros dados, de manera que la relación de las partes con los números respectivos, formen una serie de razones iguales.

La repartición proporcional, es una aplicación de las proporciones, basándose, por lo tanto, en sus principios y propiedades.

La repartición puede ser *directa, inversa* y *mixta.*

Es *directa,* cuando es directa la relación entre las partes y los números respectivos, y es *inversa,* si es inversa dicha proporcionalidad. La repartición es *mixta,* si la cantidad dada, se descompone en partes directamente proporcionales a algunos de los números dados, e inversamente proporcionales a otros.

La repartición puede ser también *simple* y *compuesta.* Es *simple,* si el reparto se verifica en relación a una sola serie de números y compuesta cuando se efectúa tomando como base varias series de números.

REPARTICION DIRECTA SIMPLE

244. Problema general. — *Descomponer el número* **N** *en partes directamente proporcionales a los números* **a, b** *y* **c.**

Solución

Si representamos por x, y, z, las partes buscadas, tendremos:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

y por el teorema fundamental de la serie de razones iguales, se tiene:

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

pero como es: $x + y + z = N$

sustituyendo, tendremos:

$$\frac{N}{a+b+c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

de donde se deducen las proporciones:

$$\frac{N}{a+b+c} = \frac{x}{a} \quad \therefore \quad x = \frac{N}{a+b+c} \cdot a$$

$$\frac{N}{a+b+c} = \frac{y}{b} \quad \therefore \quad y = \frac{N}{a+b+c} \cdot b$$

$$\frac{N}{a+b+c} = \frac{z}{c} \quad \therefore \quad z = \frac{N}{a+b+c} \cdot c$$

Luego: *para repartir un número en partes directamente proporcionales a otros dados, se divide dicho número por la suma de los números proporcionales, y el cociente que resulta se multiplica por cada uno de éstos.*

245. PROBLEMA **84.** — *Repartir 13.800 en partes directamente proporcionales a los números 4, 5 y 6.*

Solución

Elementos de cálculo: $N = 13.800$; $a + b + c = 4 + 5 + 6 = 15$

La fórmula:

$$x = \frac{N}{a+b+c} . a$$

nos da:

$$x = \frac{13.800}{15} \times 4$$

de donde:

$$\begin{aligned} x &= 920 \times 4 &= 3.680 \\ y &= 920 \times 5 &= 4.600 \\ z &= 920 \times 6 &= 5.520 \\ \hline \textit{Verificación} & &= 13.800 \end{aligned}$$

246. PROBLEMA **85.** — *Repartir \$ 815 entre cuatro obreros cuyos trabajos están entre sí como* $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$ *y* $\frac{3}{4}$.

Solución

La demostración anterior es también válida, cuando los números proporcionales son fraccionarios.

En este caso se reducen previamente las fracciones a un común denominador, prefiriéndose en la práctica la aplicación del mínimo común múltiplo, y se reparte la cantidad dada en partes proporcionales a los numeradores.

En efecto; multiplicando cada una de las fracciones por 60, que es el m. c. m., de los denominadores, tendremos:

$$\frac{1}{3} \times 60 = 20 \quad ; \quad \frac{4}{5} \times 60 = 48$$

$$\frac{5}{6} \times 60 = 50 \quad ; \quad \frac{3}{4} \times 60 = 45$$

los productos 20, 50, 48 y 45 sustituyen a los números proporcionales del enunciado. Es decir:

$$a + b + c + d = 20 + 50 + 48 + 45 = 163.$$

Aplicando la regla **(244)**:

$$x = \frac{N}{a + b + c + a} \times a$$

se tiene:

$$\begin{array}{rcl} x = \dfrac{815}{163} \times 20 & = & \$ \ 100 \\ y = 5 \times 50 & = & ,, \ 250 \\ z = 5 \times 48 & = & ,, \ 240 \\ k = 5 \times 45 & = & ,, \ 225 \\ \hline \textit{Verificación} & = & \$ \ 815 \end{array}$$

REPARTICION DIRECTA COMPUESTA

247. Problema general. — *Dividir el número* **N**, *en partes proporcionales a los números* **a, b** *y* **c**, *y de los números* **m, n** *y* **q.**

Solución

Multipliquemos los términos de una de las series por los correspondientes de la otra y tendremos los siguientes productos:

$$am \quad ; \quad bn \quad ; \quad cq$$

Prácticamente se reduce este caso a una repartición simple, dividiendo el número N, en proporción directa a estos productos.

Así, tenemos:

$$\frac{N}{am + bn + cq} = \frac{x}{am} = \frac{y}{bn} = \frac{z}{cq}$$

de donde se deducen las proporciones siguientes:

$$\frac{N}{am + bn + cq} = \frac{x}{am} \therefore \quad x = \frac{N}{am + bn + cq} \times am$$

$$\frac{N}{am + bn + cq} = \frac{y}{bn} \therefore \quad y = \frac{N}{am + bn + cq} \times bn$$

$$\frac{N}{am + bn + cq} = \frac{z}{cq} \therefore \quad z = \frac{N}{am + bn + cq} \times cq$$

Luego: *para dividir un número en partes proporcionales a varios números y a otros varios, se divide dicho número por la suma de los productos de los primeros por los segundos, y el cociente se multiplica por cada uno de los productos obtenidos.*

248. PROBLEMA **86.** — *Dividir el número 1290, en partes proporcionales a los números 3, 4 y 5 y de los números 6, 7 y 8.*

Solución

Elementos de cálculo:

$$N = 1290 \quad ; \quad am + bn + cq = 3 \times 6 + 4 \times 7 + 5 \times 8 = 86$$

Aplicando la regla **(247)**:

$$x = \frac{N}{am + bn + cq} \times am$$

se tiene:

$$x = \frac{1.290}{86} \times 3 \times 8 = 270$$

$$y = 15 \times 4 \times 7 = 420$$

$$z = 15 \times 5 \times 8 = 600$$

Verificación $= 1.290$

249. PROBLEMA **87.** — *Distribuir la cantidad de \$ 198.162,50 entre tres personas proporcionalmente a la edad de cada uno y del sueldo mensual que disfrutan. El 1º tiene 40 años y gana \$ 700; el 2º tiene 30 años y gana \$ 450, y el último 25 años y \$ 250 de sueldo.*

Solución

Elementos de cálculo: $N = \$\ 198.162{,}50.$

$$am + bn + cq = 40 \times 700 + 30 \times 450 + 25 \times 250 = 47.750$$

se tiene (247):

$$x = \frac{N}{am + bn + cq} \times am$$

de donde:

$$\begin{aligned} x &= \frac{198.162{,}50}{47.750} \times 40 \times 700 &= \$\ 116.200 \\ y &= 4{,}15 \times 30 \times 450 &= \text{,,}\ \ 56.025 \\ z &= 4{,}15 \times 25 \times 250 &= \text{,,}\ \ 25.937 \\ &\textit{Verificación} &= \$\ 198.162{,}50 \end{aligned}$$

REPARTICION INVERSA SIMPLE

250. Definición. — Dividir una cantidad en partes *inversamente proporcionales* a varios números, consiste en determinar partes tales, que sean proporcionales a las inversas de los números dados.

Según esto, nuestro problema se reduce al caso anterior.

251. Problema general. — *Dividir el número* **N**, *en partes inversamente proporcionales a los números* **a**, **b** *y* **c**.

Las inversas de estos números son:

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}$$

y siendo x, y, z, las partes buscadas, tendremos, por definición:

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}}$$

y por el teorema fundamental de la serie de razones iguales, resulta:

$$\frac{x + y + z}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}}$$

o bien:

$$\frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}}$$

de aquí se deducen las proporciones que dan los valores de las partes, de la repartición inversa:

$$\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{x}{\frac{1}{a}} \quad \therefore \quad x=\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}}\times\frac{1}{a}$$

$$\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{y}{\frac{1}{b}} \quad \therefore \quad y=\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\times\frac{1}{b}$$

$$\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{z}{\frac{1}{c}} \quad \therefore \quad z=\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\times\frac{1}{c}$$

Luego: *para dividir un número en partes inversamente proporcionales a otros dados, se procede como en el caso de repartición directa, cuando los números proporcionales son fracciones.*

252. Problema **88.** — *La construcción de un puente, valuado en \$ 180.670, fué costeado por los municipios de tres ciudades, en razón inversa de sus distancias al puente. La primera dista 8 km. la segunda 15 km. y la tercera, 20 km. Determinar con cuánto contribuyó cada una.*

Solución

Las inversas de 8, 15 y 20 son:

$$\frac{1}{8},\ \frac{1}{15},\ \frac{1}{20}$$

y aplicando el m. c. m. en la suma de estas fracciones, se tiene:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}=\frac{15+8+6}{120}=\frac{29}{120}$$

Aplicando la regla anterior:

$$x=\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\times\frac{1}{a}$$

o bien:

$$x=\frac{180.670}{\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}}\times\frac{1}{8}=\frac{180.670}{\frac{29}{120}}\times\frac{15}{120}$$

luego, simplificando, resulta:

$$x = \frac{180.670}{29} \times 15 = \$\ 93.450$$

$$y = 6.230 \times 8 = \text{,,}\ 49.840$$

$$z = 6.230 \times 6 = \text{,,}\ 37.380$$

Verificación $= \$\ 180.670$

REPARTICION INVERSA COMPUESTA

253. Problema general. — *Dividir el número* **N** *en partes inversamente proporcionales a los números* **a, b, c** *y de los números* **m, n, q.**

Solución

Sean x, y, z, las partes buscadas.

Multiplicando ordenadamente los términos correspondientes de las dos series de datos, se tendrán los siguientes productos, que constituyen la serie base de la repartición:

$$am\ ,\ bn\ ,\ cq$$

Las inversas de estos números son:

$$\frac{1}{am}\ ,\ \frac{1}{bn}\ ,\ \frac{1}{cq}$$

Prácticamente queda reducido este caso a una repartición inversa simple, y procediendo en forma análoga tendremos los valores de las partes buscadas. Luego:

$$x = \frac{N}{\frac{1}{am} + \frac{1}{bn} + \frac{1}{cq}} \times \frac{1}{am}$$

$$y = \frac{N}{\frac{1}{am} + \frac{1}{bn} + \frac{1}{cq}} \times \frac{1}{bn}$$

$$z = \frac{N}{\frac{1}{am} + \frac{1}{bn} + \frac{1}{cq}} \times \frac{1}{cq}$$

Luego: *para dividir un número en partes inversamente proporcionales a varios números y a otros varios, se multiplican los dos grupos de números y luego se divide el número dado en partes inversamente proporcionales a los productos obtenidos.*

254. Problema **89.** — *Dividir 15.756 $ en partes inversamente proporcionales a los números 2, 4, 6 y de los números 3, 5 y 7.*

Solución

Elementos de cálculo: $N = 15.756$ $

$$a = 2; \quad b = 4; \quad c = 6$$
$$m = 3; \quad n = 5; \quad q = 7$$

Debemos efectuar el producto de los inversos de la primera serie por los inversos de la segunda, lo que nos dará:

$$\frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{4 \times 5}, \frac{1}{6 \times 7}$$

o bien:
$$\frac{1}{6}, \frac{1}{20}, \frac{1}{42}$$

que reducidos al mínimo denominador común, resulta:

$$\frac{70}{420}, \frac{21}{420}, \frac{10}{420}$$

Tomando solamente los numeradores, puesto que el denominador común debe ser suprimido, tendremos para base del reparto directo:

$$70 \quad , \quad 21 \quad , \quad 10$$

con lo cual nuestro problema queda reducido a repartir $ 15.756 en partes directamente proporcionales a los mismos.

Por lo tanto (**244**):

$$\begin{aligned}
x &= \frac{15.756}{101} \times 70 & &= 10.920 \\
y &= 156 \times 21 & &= 3.276 \\
z &= 156 \times 10 & &= 1.560 \\
&\textit{Verificación} & &= 15.756
\end{aligned}$$

REPARTICION MIXTA

255. La *repartición mixta* es un caso particular de la repartición compuesta.

Para aclarar el concepto de esta clase de repartición, es suficiente señalar el ejemplo práctico de la construcción de un puente, que debe ser costeado por los municipios de tres ciudades en proporción directa de sus poblaciones y en razón inversa de sus distancias al puente.

256. Problema general. — *Dividir el número* **N**, *en partes directamente proporcionales a los números* **a**, **b**, **c** *y en partes inversamente proporcionales a los números* **m**, **n**, **q**.

Solución

Sean x, y, z las partes que se buscan.

Las inversas de los números m, n, q son:

$$\frac{1}{m}, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{q}$$

y formando los productos de estos inversos, con los términos de la serie de proporcionalidad directa, se tiene:

$$a.\frac{1}{m}, \qquad b.\frac{1}{n}, \qquad c.\frac{1}{q}$$

o bien:

$$\frac{a}{m}, \qquad \frac{b}{n}, \qquad \frac{c}{q}$$

que constituyen los números bases de la repartición proporcional.

Por definición, se tendrá:

$$\frac{x}{\frac{a}{m}} = \frac{y}{\frac{b}{n}} = \frac{z}{\frac{c}{q}}$$

y aplicando el teorema fundamental de la serie de razones iguales, resulta:

$$\frac{N}{\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{q}} = \frac{x}{\frac{a}{m}} = \frac{y}{\frac{b}{n}} = \frac{z}{\frac{c}{q}}$$

Como se ve, nuestro problema queda reducido a un reparto de proporcionalidad directa, en el que los números son:

$$\frac{a}{m}\;,\;\frac{b}{n}\;,\;\frac{c}{q}$$

Por lo tanto:

$$x=\frac{N}{\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{q}}\times\frac{a}{m}\;;\;y=\frac{N}{\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{q}}\times\frac{b}{n}\;;\;z=\frac{N}{\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{q}}\times\frac{c}{q}$$

257. PROBLEMA **90.** — *Dividir el número 9.607 en razón directa a 2, 3, 6, y en razón inversa de 8, 9 y 12.*

Solución

Efectuando los productos de los términos de la primera serie por los inversos de la segunda se tendrá:

$$\frac{2}{8}\;,\;\frac{3}{9}\;,\;\frac{6}{12}$$

simplificando, queda,

$$\frac{1}{4}\;,\;\frac{1}{3}\;,\;\frac{1}{2}$$

y reduciendo al mínimo denominador común, se tiene:

$$\frac{3}{12}\;,\;\frac{4}{12}\;,\;\frac{6}{12}$$

y tomando solamente los numeradores, tendremos los números que constituyen la serie base del reparto directo:

3 , 4 *y* 6

Aplicando la regla, tendremos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{9.607}{13}\times 3 &&= 2.217\\ y &= 739\times 4 &&= 2.956\\ z &= 739\times 6 &&= 4.434\\ &\textit{Verificación} &&= 9.607 \end{aligned}$$

REGLA DE SOCIEDAD O COMPAÑIA

258. Definiciones: Se llama *compañía,* o *entidad social,* al conjunto de varias personas que además de su actividad y experiencia comercial, aportan sus capitales a fin de explotar, en común un negocio o fomentar una industria con el objeto de obtener *lucro* o *utilidad.*

Cada uno de los componentes de la sociedad, se llama *socio,* y *aporte social* o *imposición,* al capital de cada socio. *Capital social,* es la reunión de todos los aportes. La *utilidad* o *pérdida total* que corresponde al capital social, se llama *dividendo general,* y *dividendo parcial* a la parte de ganancia o pérdida que corresponde al capital de cada socio.

Las entidades comerciales más importantes son: *colectivas, anónimas, comanditarias y de responsabilidad limitada.*

La *Regla de Compañía* tiene por objeto repartir entre varios asociados el beneficio o la parte resultante de operaciones hechas por ellos en común.

Las cuestiones que resuelve la regla de compañía, son aplicaciones de la repartición proporcional directa. Si las ganancias o pérdidas se reparten en relación directa a los capitales o en proporción a los tiempos en que han estado colocados, se dice que es *simple,* y es *compuesta,* cuando el reparto se hace en base a las dos series de datos, capitales y tiempos distintos.

Esta operación tiene por fundamento los siguientes principios.

PRINCIPIOS. — I) *Las ganancias o pérdidas de varios capitales distintos impuestos durante tiempos iguales, son proporcionales a los capitales.*

II) *Las ganancias o pérdidas de varios capitales iguales, impuestos durante tiempos distintos, son proporcionales a los tiempos.*

259. Casos de la Regla de Compañía. — Se presentan los siguientes casos:

1º) *Capitales y tiempos iguales;*

2º) *Capitales distintos y tiempos iguales;*

3º) *Capitales iguales y tiempos diferentes;*

4º) *Capitales y tiempos distintos.*

260. PRIMER CASO. — **Capitales y tiempos iguales.** — Como cada uno de los socios tiene impuesto el mismo capital, durante el mismo tiempo, tendrá la misma ganancia o pérdida. Luego: *la ganancia o pérdida se divide en partes iguales al número de socios.*

261. PROBLEMA **91.** — *Tres personas constituyen una sociedad aportando cada una $ 5.000. Al cabo de tres años obtienen una ganancia de $ 2.700. Determinar lo que corresponde a cada socio.*

Solución

$$x = \frac{2.700}{3} = 900\ \$$$

Corresponde a cada socio una ganancia de $ 900.

262. SEGUNDO CASO. — **Capitales distintos y tiempos iguales.** — Consiste en determinar la ganancia o pérdida de varios capitales distintos en un mismo tiempo.

Según el *Principio I,* (**258**), se ha establecido que en estos casos las ganancias o pérdidas sean proporcionales a los capitales. De aquí se deduce que: *la ganancia o pérdida social que designaremos en forma general por G, se divide en partes proporcionales a los capitales.*

263. PROBLEMA **92.** — *Tres comerciantes forman una sociedad. El 1º, aportó $ 10.000, el 2º $ 13.000, y el último $ 17.000. Al fin de cierto tiempo obtienen un beneficio de $ 35.000. Determinar lo que corresponde a cada socio.*

Solución

Designemos, respectivamente, por a_1, a_2 y a_3 los aportes de cada comerciante, siendo x, y, z las partes respectivas de ganancia o pérdida.

Elementos de cálculo: $a_1 = \$\ 10.000$; $a_2 = \$\ 13.000$; $a_3 = \$\ 17.000$.

Capital social: $10.000 + 13.000 + 17.000 = \$\ 40.000$.

Dividendo general: $G = \$ 35.000.$

y aplicando la regla general de repartición **(244)**:

$$x = \frac{G}{a_1 + a_2 + a_3} \times a_1$$

. . . .

. . . .

se tiene:

$$x = \frac{35.000}{40.000} \times 10.000 \qquad = \$ \ 8.750$$

$$y = \frac{7}{8} \times 13.000 \qquad = \text{,,} \ 11.375$$

$$z = \frac{7}{8} \times 17.000 \qquad = \text{,,} \ 14.875$$

Verificación $= \$ \ 35.000$

264. PROBLEMA **93.** — *Una sociedad integrada por cuatro socios, instaló un almacén, aportando cada uno respectivamente los siguientes capitales: $ 150.000; $ 300.000; $ 90.000 y $ 60.000. Un incendio produce daños valuados en $ 180.500 y $ 2.500 de gastos en concepto de extinción del fuego. ¿Cuánto corresponde de pérdida a cada asociado?*

Solución

El dividendo general en este caso, está constituído por los $ 180.500 de daños y los $ 2.500 de gastos.

Elementos de cálculo: $a_1 = \$ 150.000$; $a_2 = \$ 300.000$; $a_3 = \$ 90.000$; $a_4 = \$ 60.000$.

Capital social: 150.000 + 300.000 + 90.000 + 60.000 = $ 600.000.

Dividendo general: $G = 180.500 + 2.500 = \$ 183.000.$
y aplicando la regla **(244)**:

$$x = \frac{G}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \times a_1$$

se tiene:

$$x = \frac{183.000}{600.000} \times 150.000 \qquad = \$ \ 45.750$$

$$y = \frac{61}{200} \times 300.000 = ,, \ 91.500$$

$$z = \frac{61}{200} \times 90.000 = ,, \ 27.450$$

$$k = \frac{61}{200} \times 60.000 = ,, \ 18.300$$

$$\textit{Verificación} = \$ \ 183.000$$

265. TERCER CASO. — **Capitales iguales y tiempos distintos.**

El *Principio II,* (**258**), establece que, en las cuestiones de esta clase, las ganancias o pérdidas, son directamente proporcionales a los tiempos. Por lo tanto; *para determinar la ganancia o pérdida que corresponde a cada capital empleado, se divide la ganancia o pérdida total en partes proporcionales a los tiempos.*

266. PROBLEMA **94.** — *Para fomentar una industria tres capitalistas constituyen una sociedad, contribuyendo cada uno con pesos 90.000. El 1º, colocó su capital por 2 años; el 2º, por 3 años y el último, por 5 años. Se disuelve la sociedad con una ganancia de \$ 72.480,50. Determinar el beneficio de cada asociado.*

Solución

Elementos de cálculo: $n_1 = 2$ años; $n_2 = 3$ años; $n_3 = 5$ años.

Tiempo total: $2 + 3 + 5 = 10$ años.

Dividendo general: $G = \$ \ 72.480{,}50$.

Aplicando la fórmula de repartición directa:

$$x = \frac{G}{n_1 + n_2 + n_3} \times n_1$$

se tiene:

$$x = \frac{72.480{,}50}{10} \times 2 = \$ \ 14.496{,}10$$

$$y = 7.248{,}05 \times 3 = ,, \ 21.744{,}15$$

$$z = 7.248{,}05 \times 5 = ,, \ 36.240{,}25$$

$$\textit{Verificación:} \quad \$ \ 72.480{,}50$$

267. PROBLEMA 95. — *Se asociaron tres ganaderos, aportando cada uno la suma de \$ 200.000. Al finalizar el 2º año, se liquida la sociedad, con una pérdida que corresponde al 27 % del capital social. Determinar la pérdida que corresponde a cada ganadero, sabiendo que el 1º, retiró su capital a los 11 meses; el 2º, a los 17 meses; y el 3º dejó su capital durante todo el tiempo del contrato.*

Solución

Elementos de cálculo: $n_1 = 11$ meses; $n_2 = 17$ meses; $n_3 = 24$ meses

Tiempo total: $11 + 17 + 24 = 52$ meses.

En primer lugar debemos establecer con exactitud el dividendo general, que en este caso es la pérdida total. Por lo tanto determinando el 27 % del capital social, 600.000, tendremos:

Dividendo general: $G = 600.000 \times 0{,}27 = \$\ 162.000$

y aplicando la regla de repartición, resulta:

$$x = \frac{162.000}{52} \times 11 = \$\ 34.269{,}23$$

$$y = \frac{81.000}{26} \times 17 = \text{,,}\ 52.961{,}54$$

$$z = \frac{81.000}{26} \times 24 = \text{,,}\ 74.769{,}23$$

Verificación: \$ 162.000

268. TEOREMA. — *Las ganancias o pérdidas producidas por dos capitales, impuestos durante tiempos distintos son proporcionales a los productos de los capitales por los tiempos.*

$$H \left\{ \begin{array}{llll} C = \text{capital}; & n = \text{tiempo}; & g = \text{ganancia o pérdida.} \\ C_1 = \text{,,} & n_1 = \text{,,} & g_1 = \text{»} & \text{»} \end{array} \right.$$

$$T \left\{ \quad \frac{g}{g_1} = \frac{C.n}{C_1.n_1} \right.$$

Demostración. — Si el capital C, produce la ganancia o pérdida g, en el tiempo n, en el tiempo n_1, producirá una ganancia o pérdida distinta que designamos por g_2.

Tratándose de capitales iguales, tendremos por lo establecido en el *Principio I*, que:

$$\frac{g}{g_2} = \frac{n}{n_1} \qquad (1)$$

Además los capitales C, y C_1 producen en el mismo tiempo, n_1, respectivamente las ganancias o pérdidas g_2 y g_1. Tratándose, entonces, de tiempos iguales, las ganancias o pérdidas deben ser proporcionales a los capitales, según lo establecido en el *Principio II*, luego:

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{C}{C_1} \qquad (2)$$

Multiplicando ordenadamente las igualdades (1) y (2), se tiene:

$$\frac{g}{g_2} \times \frac{g_2}{g_1} = \frac{n}{n_1} \times \frac{C}{C_1}$$

y simplificando, tenemos:

$$\frac{g}{g_1} = \frac{C \cdot n}{C_1 \cdot n_1} \qquad (3)$$

que es la tésis.

Como se ve, este teorema es una consecuencia de los principios establecidos anteriormente. (258).

269. Cuarto caso. — **Capitales y tiempos distintos.** — Se basa en el teorema anterior y es, por lo tanto, una aplicación de la repartición directa compuesta, dado que en él se propone repartir las ganancias o pérdidas en base a las dos series de datos, capitales y tiempos distintos.

Siendo el dividendo general G, igual a la suma de las ganancias o pérdidas parciales g y g_1, podemos aplicar en (3), una de las propiedades de las proporciones referente a la suma de antecedente y consecuente y deducir los valores g y g_1.

Luego:

$$\frac{g + g_1}{g} = \frac{C.n + C_1.n_1}{C.n}$$

$$\frac{g + g_1}{g_1} = \frac{C.n + C_1.n_1}{C_1.n_1}$$

hagamos: $$G = g + g_1$$

y tendremos:

$$\frac{G}{g} = \frac{C.n + C_1.n_1}{C.n} \quad ; \quad \frac{G}{g_1} = \frac{C.n + C_1.n_1}{C_1.n_1}$$

de donde:

$$g = \frac{G}{C.n + C_1.n_1} \cdot C.n \quad ; \quad g_1 = \frac{G}{C.n + C_1.n_1} \cdot C_1.n_1$$

que es la fórmula general.

Luego: *para determinar la ganancia o pérdida, de capitales distintos, colocados en tiempos diferentes, se reparte la ganancia o pérdida social en partes proporcionales a los productos de los capitales por los tiempos.*

270. PROBLEMA **96.** — *Tres comerciantes firman un contrato de sociedad. El 1º contribuye con $ 75.000, por 3 años; el 2º, con $ 45.000 por 2 años y el 3º, $ 90.000 por 4 años. Se liquida la sociedad con un beneficio de $ 150.000. Determinar lo que corresponde a cada uno.*

Solución

Elementos de cálculo: $C = \$\ 75.000$; $C_1 = \$\ 45.000$; $C_2 = \$\ 90.000$

$n = 3$ años; $n_1 = 2$ años; $n_2 = 4$ años

Números proporcionales.

$$\begin{aligned} C.n &= 75.000 \times 3 &&= 225.000 \\ C_1.n_1 &= 45.000 \times 2 &&= 90.000 \\ C_2.n_2 &= 90.000 \times 4 &&= 360.000 \\ &\textit{Suma total:} &&= 675.000 \end{aligned}$$

Dividendo general: $G = \$\ 150.000$

y aplicando la regla:

$$x = \frac{G}{C.n + C_1.n_1 + C_2.n_2} \cdot C.n$$

se tiene:

$$x = \frac{150.000}{675.000} \times 225.000 \qquad = \$\ 50.000$$

$$y = \frac{2}{9} \times 90.000 \qquad = „\ 20.000$$

$$z = \frac{2}{9} \times 360.000 \qquad = „\ 80.000$$

Verificación: $ 150.000

271. PROBLEMA **97.** — *Tres personas se asocian. La 1ª, anticipa $ 9.000 al comienzo de la sociedad y 6 meses más tarde $ 6.000; la 2ª, contribuye con $ 17.000 y 4 meses después retira $ 2.000; la 3ª, adelanta $ 10.000, retirando, 3 meses más tarde, $ 3.000 y 2 meses después coloca $ 7.000. El beneficio total fué de $ 19.827 al cabo de 14 meses, sobre el cual se acuerda a la 2ª una prima del 10 %. Determinar la ganancia de cada una.*

Solución

En primer lugar debemos establecer la cantidad a repartir. Para esto deduciremos del beneficio total la prima del 10 % que se otorga al 2º socio.

Beneficio total:	$ 19.827
10 % de 19.827:	„ 1.982,70
Dividendo general:	$ 17.844,30

Los capitales de cada socio deben ser considerados en la forma como ingresan en la sociedad, de modo que quede bien determinado el tiempo que corresponde a cada suma para poder formar los correspondientes números proporcionales. Se procede así:

	Capitales.		*Tiempos.*			*N. proporcionales.*
1º)	$ 9.000	×	6 meses	=	54.000	174.000
	„ 15.000	×	8 „	=	120.000	
2º)	„ 17.000	×	4 „	=	68.000	218.000
	„ 15.000	×	10 „	=	150.000	
3º)	„ 10.000	×	3 „	=	30.000	170.000
	„ 7.000	×	2 „	=	14.000	
	„ 14.000	×	9 „	=	126.000	
					Suma N. proporcionales:	562.000

Aplicando la regla, se tiene:

$$x = \frac{17.844{,}30}{562.000} \times 174.000$$

o bien:

$$x = \frac{8.922{,}15}{281} \times 174 = \$\ 5.524{,}75$$

$$y = \frac{8.922{,}15}{281} \times 218 = \text{,,}\ 6.921{,}81$$

$$z = \frac{8.922{,}15}{281} \times 170 = \text{,,}\ 5.397{,}74$$

Verificación: $ 17.844,30

272. Observación. — Los casos 3º y 4º que hemos visto en el número **259** son completamente teóricos. En efecto, cuando los tiempos son desiguales, quiere decir que a la sociedad ya constituída se apega un nuevo socio, para lo cual establece la ley que se forme una nueva sociedad, y si en la primer sociedad había ganancias, los primeros socios no van a permitir que el nuevo socio participe en ellas sin derecho alguno, y si hubiere habido pérdidas, con toda seguridad que el nuevo socio no va a querer cargar con parte de ellas. En ambos casos, pues, se liquidará la primera sociedad y comenzará una nueva en la que los tiempos serán iguales para todos los socios. Lo mismo ocurre si se retira un socio.

PRORRATEO DE FACTURAS

273. Definiciones. — Se llama *prorrateo de facturas,* a la operación que consiste en distribuir los gastos de una factura entre los diferentes elementos que la componen, para determinar el valor de cada clase de mercaderías en razón de su *costo y gastos.*

Los gastos por adquisición de mercaderías comprenden: los de *portes* o *fletes, seguros, cargas* y *descargas, envase, acarreos, derechos de aduana, depósitos, comisiones, corretajes,* etc.

El prorrateo de facturas es un caso particular de la repartición proporcional aplicada a las operaciones de compra. Las cuestiones de prorrateo se resuelven también por regla de tres.

Se presentan dos casos:

1º *Que las mercaderías compradas sean todas de la misma clase y precios.*

2º *Que las mercaderías compradas sean de diferente clase y precios.*

274. Primer caso. — **Problema 98.** — *Hemos adquirido una partida de azúcar compuesta de 100 bolsas, pesando cada una 75,50 kg., a razón de \$ 0,38 el kg. Los gastos por comisión, corretaje y fletes, ascienden a \$ 151. Determinar el precio del kg. de azúcar.*

Solución

Total de unidades compradas: 100 × 75,50 kg. = 7.550 kg.

Resolución por regla de tres. — Diremos:

si a 7.550 kg. corresponden \$ 151 de gastos
a 1 „ „ „ x „ „

luego: $$\frac{7.550}{1} = \frac{151}{x}$$

de donde: $$x = \frac{151}{7.550}$$

o sea: $$x = \$\ 0{,}02$$

Precio de un kg., por costo y gasto: 0,38 + 0,02 = \$ 0,40.

Es decir, que: *para efectuar el prorrateo en este caso, se divide el total de gastos por el número de unidades compradas y el cociente se agrega al valor de compra de la unidad.*

275. Segundo caso. — Consiste en distribuir el total de gastos en partes proporcionales a las unidades y precios respectivos de compra.

Problema **99.** — *Hemos comprado 200 kg. de yerba, a \$ 1,20 el kg., 150 kg. de café especial a \$ 4 el kg., 320 kg. de café mezcla a \$ 2 el kg. y 80 cajas de azúcar pesando cada una 12,50 kg., a \$ 0,50 el kg. El total de gastos asciende a \$ 79,20. Determinar el valor de un kg. de cada clase de mercadería según el costo y gasto.*

Solución

En primer lugar determinemos el valor de cada partida.

		Componentes
200 kg. de yerba.	a $ 1,20 el kg.	= $ 240
150 „ „ café especial.	„ „ 4, „ „	= „ 600
320 „ „ „ mezcla.	„ „ 2, „ „	= „ 640
1.000 „ „ azúcar — (12,50 × 80)	„ „ 0,50 „ „	= „ 500
	Total por compras	= $ 19 80
	Total por gastos	= $ 79,20

Dividamos ahora el total de gastos en partes proporcionales a los componentes: 240, 600, 640 y 500 y tendremos el correspondiente aumento del valor de cada partida.

Se tiene (**244**):

$$x = \frac{N}{a + b + c + d} \times a$$

o bien:

$$x = \frac{79{,}20}{1980} \times 240$$

de donde:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}04 \times 240 &&= \$\ 9{,}60 \\ y &= 0{,}04 \times 600 &&= \text{„ } 24, \\ z &= 0{,}04 \times 640 &&= \text{„ } 26{,}60 \\ k &= 0{,}04 \times 500 &&= \text{„ } 20, \end{aligned}$$

Luego diremos: si 200 kg., de yerba originan $ 9.60 de gastos, a 1 kg., le corresponderá un gasto de,

$$\frac{9{,}60}{200} = \$\ 0{,}048$$

y la parte de gastos correspondientes a cada kg., de café especial, café mezcla y azúcar, respectivamente será:

$$\frac{24}{150} = \$\ 0{,}16 \ ; \quad \frac{26{,}60}{320} = \$\ 0{,}083 \ ; \quad \frac{20}{1.000} = \$\ 0{,}02$$

Precio de 1 Kg. por costo y gastos

Yerba	=	1,20	+	0,048	=	$ 1,248
Café especial	=	4	+	0,16	=	„ 4,16
Café mezcla	=	2	+	0,083	=	„ 2,083
Azúcar	=	0,50	+	0,02	=	„ 0,52

EJERCICIOS

Resolver los siguientes problemas sobre repartición proporcional:

399. — Repartir 8.760 en partes proporcionales a los números 4, 7 y 13.

400. — Se pide repartir 7.520 en partes proporcionales a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$.

401. — Dividir el número 75.900 en partes proporcionales a 4, 7, 9 y a los números 10, 13 y 15.

402. — Distribuir $ 34.196 entre tres personas en razón inversa de los números 3, 5 y 11.

403. — Repartir 14.628 en relación inversa de los números 2, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$.

404. — Dividir 10.470 en partes inversamente proporcionales a $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ y 2 y a los números 6, 9 y $\frac{1}{4}$.

405. — Se han invertido $ 634,80 en el pago de 4 conductores por el transporte de 920 Hl. de trigo a tanto por Hl. El 1º transportó 125 Hl.; el 2º 180 Hl.; el 3º 255 Hl. y 370 Hl. el 4º. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

406. — Se pide repartir 3.900 en razón directa a 3, 5 y 6 y en relación inversa a los números 9, 10 y 24.

407. — En la construcción de cierta obra se han empleado 3 obreros y su costo ha sido de $ 890. El 1º trabajó 5 días de 8 horas; el 2º 6 días de 7 horas y el último 9 días de 6 horas. ¿Cuánto recibió cada obrero?

408. — Un hacendado resuelve repartir un campo de 3.000 Ha. y 60 áreas, entre dos familias de colonos en razón directa de sus miembros y en relación inversa del capital que poseen. Una se compone de nueve personas y cuenta con $ 6.000 y la otra es de cuatro miembros y tiene $ 8.000. ¿Qué extensión de campo corresponderá a cada familia?

409. — Tres fuentes corriendo juntas llenan un estanque de 3.200 m^3., en cierto tiempo. La 1ª corriendo sola, consigue llenarlo en 4 horas; la 2ª en 9 horas y la última en 7 horas. Encontrar la cantidad de líquido que derramó cada fuente en el mismo tiempo.

410. — Un particular deja por testamento $ 76.541 que deben ser repartidos entre sus tres sobrinos, bajo la condición de que sus partes sean inversamente proporcionales a sus edades: uno tiene 20 años; otro 15 años y el último 12 años. Determinar la parte de cada legatario.

411. — Dos municipios resuelven construir un camino valuado en $ 150.000 y cuyo gasto debe ser costeado por ambos en razón directa de la renta y del número de sus habitantes. La 1ª tiene 15.000 habitantes y una renta anual de $ 130.000 y la 2ª tiene 22.000 habitantes y $ 200.000 de renta. ¿Con cuánto debe contribuir cada una?

412. — El activo de una quiebra es de $ 90.860,50, importando los gastos de liquidación el 8 % del mismo. Si se adeuda a 4 acreedores respectivamente $ 350.000; $ 26.700; $ 42.500 y $ 23.600; ¿qué cantidad recupera cada acreedor?

413. — Un particular deja en su testamento $ 132.000, para ser distribuídos entre dos asilos, uno de ancianos y otro de huérfanos, y un hospital, en forma tal, que el hospital reciba los cuatro quintos de lo que corresponde al asilo de ancianos y el de huérfanos los tres medios de lo que reciba el hospital. ¿Cuánto toca a cada institución?

Resolver los siguientes problemas sobre regla de sociedad:

414. — Tres asociados han colocado en un comercio los siguientes capitales: el 1º aportó $ 16.500; el segundo $ 20.700 y el último $ 31.600. Al fin de cierto tiempo obtienen una ganancia de $ 46.200. Determinar lo que corresponde a cada socio.

415. — Cuatro personas han constituído una sociedad para explotar una industria y aportaron respectivamente los siguientes capitales: $ 130.000; $ 85.600; $ 183.400 y $ 92.750. Al finalizar el contrato observan una pérdida de $ 78.564,23. ¿Qué pérdida tiene cada uno?

416. — Tres personas compran una estancia por la suma de $ 502.800 que luego venden obteniendo el 1º $ 25.000 de ganancia; $ 45.000 el segundo y el último $ 13.800. ¿Cuál fué el aporte de cada socio?

417. — Se asociaron dos industriales contribuyendo cada uno con igual capital. Uno colocó su capital por 3 años y el otro por 5 años. Se liquida la sociedad con una ganancia de $ 85.620. Determinar la ganancia de cada socio.

418. — Un industrial emprende una empresa con un capital de $ 45.000. Cinco meses más tarde interesa en su negocio a un capitalista, quien aporta $ 60.000. Seis meses después de esto, un segundo capitalista entra en la sociedad con $ 80.000. Al cabo de dos años la empresa ha obtenido un beneficio de $ 90.000. ¿Qué ganancia corresponde a cada uno si se ha convenido otorgar al primer socio una prima del 4 % sobre el beneficio total?

419. — Una sociedad integrada por tres hacendados duró tres años. Aportó el primero $ 18.000, pero a los 15 meses agrega $ 8.000; el segundo contribuye por todo el tiempo del contrato con $ 30.000 y el tercero con $ 25.000, que al cabo de 9 meses lo aumentó en $ 10.000. Al finalizar la sociedad se observa una pérdida total de $ 25.000. ¿Qué parte de pérdida corresponde a cada uno?

420. — La ganancia total de una empresa comercial formada por tres personas fué de $ 65.700, sobre la cual se acordó a la primera una prima del 8 %. El primer socio colocó $ 46.300; el segundo impuso $ 20.000 por 8 meses y el último $ 25.700 por 12 meses. La sociedad duró 18 meses. Encontrar la ganancia de cada asociado.

421. — Se ha constituído una compañía comercial con un capital de $ 150.000. Uno de los accionistas impuso su capital por un año; otro por 16 meses; un tercero por 20 meses y el último por el tiempo que duró la empresa, que fué de 2 años. La ganancia fué el 30 % del capital social. ¿Qué ganancia tiene cada uno?

422. — Al liquidar una empresa que se dedicaba a la compra y venta de vinos del país, observa un beneficio total de $ 74.580. Uno de los socios puso un capital de $ 50.000 del que, 4 meses más tarde, retiró $ 10.000; el segundo aportó $ 60.000 que después de 5 meses aumentó en $ 8.000 y el tercero contribuyó con $ 30.000. La sociedad duró un año y 6 meses y se pagó a un corredor el 6 ½ % sobre el beneficio total. ¿Qué ganancia corresponde a cada socio?

423. — Tres industriales se asociaron por 3 años para la explotación del tanino. El primero formó con $ 120.000; el segundo con $ 180.000

y el último puso los dos quintos de lo impuesto por el segundo más $ 50.000. La ganancia total fué de $ 700.000. Se pagó el 1 % de corretaje y se acordó una prima del 3 % sobre el beneficio para ser repartida entre los obreros de la empresa. ¿Qué ganancia obtiene cada uno?

Resolver los siguientes problemas sobre prorrateo de facturas:

424. — Se han comprado 100 quintales métricos de azúcar a $ 38 el Qm.; 125 Qm. a $ 32 el Qm. y 65 Qm. a $ 40 el Qm. Los gastos por transporte ascienden a $ 500. Determinar el precio a que resulta el Qm. de cada clase.

425. — Un comerciante adquirió 300 cajones de uva de mesa a $ 3,15 el cajón. Se han satisfecho $ 150 por transporte y el 2 % de comisión. ¿A cuánto resulta el cajón de uva?

426. — Un particular adquiere una partida de 400 kg. de café, a $ 1,60 el kg.; 640 kg. de maíz molido a $ 0,15 el kg.; 200 kg. de azúcar a $ 0,35 el kg. y 300 kg. de harina especial a $ 0,22 el kg. Se abonó $ 110 por gastos varios. ¿A cuánto debe vender cada unidad de la compra, si desea obtener el 5 % de beneficio?

CAPITULO X

Mezcla y aligación.

276. Definiciones. — Llámase *mezcla* a la unión de varias sustancias conservando cada una de ellas su naturaleza. Por ejemplo: la unión de *avena y trigo; cafés* de diferentes calidades; *harinas* de diferentes precios; *vinos* de clases distintas; *aceites* de varias calidades; etc.

Aleación o aligación es la unión íntima, de varios metales por fusión. Por ejemplo: el *bronce* formado por la unión del *cobre, estaño* y *zinc* fundidos.

Si entre los metales combinados para formar la aleación, figura el *mercurio*, el compuesto que resulta recibe el nombre particular de *amalgama*.

Precio de una sustancia, es el valor en pesos m|n. de la unidad de medida, y *precio medio* el de la mezcla.

La mezcla en la práctica comercial tiene diversas finalidades. Unas veces, se efectúa la mezcla con el propósito de obtener un contenido con características más aceptables para el consumo. En otros casos se mezclan o combinan sustancias de calidades superiores con otras de calidades inferiores, con fines de competencia en los precios.

REGLA DE MEZCLA

277. Definición. — Se llama *regla de mezcla* el procedimiento que permite resolver los problemas referentes a las mezclas.

La regla de mezcla puede ser *directa* o *inversa*.

La regla de mezcla es *directa*, cuando dadas las cantidades a mezclar y sus precios respectivos, hay que determinar el *precio medio* de la mezcla. Es *inversa,* cuando conociendo el precio medio de la mezcla y el de cada una de las sustancias a mezclar, hay que determinar la proporción en que deben mezclarse.

278. Regla directa. — Si representamos por c_1, c_2, c_3, las cantidades a mezclar y por p_1, p_2, p_3, sus precios respectivos, la suma de las cantidades mezcladas ha de constituir la cantidad de la mezcla, y como el valor de cada sustancia es igual al producto de su medida por el valor de la unidad, resulta que la suma de todos estos valores será el precio total de la mezcla, o sea:

$$\textit{precio de la mezcla} = c_1 . p_1 + c_2 . p_2 + c_3 . p_3$$

y si designamos por P_m el precio medio de la unidad de la mezcla, el valor total según este precio debe ser igual al valor total anteriormente expresado:

$$P_m \, (c_1 + c_2 + c_3) = c_1 . p_1 + c_2 . p_2 + c_3 . p_3$$

de donde:

$$P_m = \frac{c_1 . p_1 + c_2 . p_2 + c_3 . p_3}{c_1 + c_2 + c_3} \qquad (1)$$

Luego: *para hallar el precio medio de la mezcla, se suman los productos de cada cantidad por su precio y el resultado se divide por la suma de las cantidades mezcladas.*

279. Problema **100.** — *Se han mezclado 20 Hl. de trigo a $ 25 el Hl., con 30 Hl., a $ 22 y con 10 Hl. a $ 31. Determinar el precio medio del hectólitro de mezcla.*

Solución

Elementos de cálculo:

$c_1 = 20$ *Hl.* ; $c_2 = 30$ *Hl.* ; $c_3 = 10$ *Hl.*
$p_1 = \$ \, 25$; $p_2 = \$ \, 22$; $p_3 = \$ \, 31$

Aplicando la fórmula:

$$P_m = \frac{c_1 . p_1 + c_2 . p_2 + c_3 . p_3}{c_1 + c_2 + c_3}$$

se tiene:

$$P_m = \frac{20 \times 25 + 30 \times 22 + 10 \times 31}{20 + 30 + 10}$$

o sea:

$$P_m = \$ \, 24{,}50$$

En la práctica se dispone la operación de la manera siguiente:

$$\begin{array}{lllcr}
20\ Hl. \text{ a } \$\ 25 & \text{cuestan} & 20 \times 25 & = & \$\ \ 500 \\
30\ \text{,, ,, ,, } 22 & \text{,,} & 30 \times 22 & = & \text{,, }\ \ 660 \\
10\ \text{,, ,, ,, } 31 & \text{,,} & 10 \times 31 & = & \text{,, }\ \ 310 \\
\hline
\text{Los } 60\ Hl. & \text{de la mezcla cuestan} & & & \$\ 1.470
\end{array}$$

$$1\ Hl. \text{ ,, ,, ,, ,, } \frac{1.470}{60} = \$\ 24{,}50$$

280. Mezclas de sustancias en cantidades iguales. — Ocurre con frecuencia que las distintas sustancias que entran en una mezcla o combinación, lo hacen en cantidades iguales. En este caso en la igualdad general que hemos deducido:

$$P_m = \frac{c_1.p_1 + c_2.p_2 + c_3.p_3}{c_1 + c_2 + c_3}$$

es:

$$c_1 = c_2 = c_3$$

y sustituyendo, resulta:

$$P_m = \frac{c_1.p_1 + c_1.p_2 + c_1.p_3}{c_1 + c_1 + c_1}$$

o bien:

$$P_m = \frac{c_1\ (p_1 + p_2 + p_3)}{3.c_1}$$

y simplificando, tenemos:

$$P_m = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}$$

Luego: *cuando las sustancias mezcladas lo hacen en cantidades iguales, el precio medio de la mezcla se obtiene dividiendo la suma de los precios por el número de sustancias mezcladas.*

281. Problema **101.** — *Se mezclan vino de \$ 0,45 el litro, con vino de \$ 0,70 y \$ 1,25. ¿A cuánto debe venderse el litro de la mezcla?*

Solución

Por la regla anterior, se tiene:

$$P_m = \frac{0{,}45 + 0{,}70 + 1{,}25}{3}$$

de donde:

$$P_m = \$\ 0{,}80$$

282. Mezclas de sustancias con gastos. — Hay mezclas en las cuales se originan gastos, aumentando así el valor de las mismas, sin que esto altere el valor particular de cada una de las cantidades. De modo que, si representamos por G los gastos, éstos deben sumarse al valor total de la mezcla. Así, se tendrá:

$$P_m\,(c_1 + c_2 + c_3) = c_1 . p_1 + c_2 . p_2 + c_3 . p_3 + G$$

de donde:

$$P_m = \frac{c_1 . p_1 + c_2 . p_2 + c_3 . p_3 + G}{c_1 + c_2 + c_3}$$

De donde se deduce que: *para determinar el precio medio de una mezcla con gastos, se divide la suma de los valores de las cantidades y los gastos, por la suma de las cantidades.*

283. PROBLEMA **102.** — *En el caso del Problema 100 se producen gastos por valor de $ 60,60. Calcular el precio medio del hectólitro de mezcla.*

Solución

Entonces, el precio medio es:

$$P_m = \frac{20 \times 25 + 30 \times 22 + 10 \times 31 + 60{,}60}{20 + 30 + 10}$$

o sea:

$$P_m = \frac{1.470 + 60{,}60}{60}$$

de donde: $P_m = \$\ 25{,}51$ el *Hl.*

284. Regla inversa. — Tiene por finalidad determinar la proporción en que deben mezclarse sustancias de precios diferentes, fijándose de antemano el precio medio de la misma. Por lo tanto, los problemas de este caso son indeterminados.

Esta regla no admite una solución completa, excepto cuando en el problema intervienen dos sustancias solamente. Cuando las sustancias son más de dos, el problema tiene infinidad de soluciones.

Para mayor claridad, supongamos que sean solamente dos, c_1 y c_2, las cantidades que figuran en la mezcla y p_1 y p_2 los precios respectivos, siendo P_m el precio medio de la unidad de mezcla.

Supongamos, además, como condición indispensable, que el precio medio tenga un *valor intermedio* entre los precios particulares de la unidad de las cantidades desconocidas, es decir, que sea mayor que uno y menor que otro:

$$p_1 > P_m > p_2$$

Al vender una unidad de c_1 al precio P_m, se pierde $p_1 - P_m$, y en las c_1 unidades se perderá:

$$c_1\ (p_1 - P_m)$$

y al vender una unidad de c_2 al precio P_m, se gana $P_m - p_2$, y en las c_2 unidades se ganará,

$$c_2\ (P_m - p_2)$$

Pero, por compensación, lo que se pierde es igual a lo que se gana, luego:

$$c_1 .\ (p_1 - P_m) = c_2 .\ (P_m - p_2)$$

Por el teorema recíproco del fundamental de las proporciones resulta (**93**):

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{P_m - p_2}{p_1 - P_m}$$

de aquí el siguiente:

PRINCIPIO. — *Cuando son dos las sustancias que entran en la mezcla, las cantidades mezcladas son inversamente proporcionales a las diferencias entre sus precios respectivos y el precio medio.*

285. PROBLEMA **103.** — *¿Cuántos kilogramos de azúcar de 46 centavos el Kg. hay que mezclar con azúcar de 36 centavos el Kg. para que resulte a 40 centavos la unidad de la mezcla?*

Solución

Como los elementos del problema son decimales del mismo orden, pueden considerarse como cantidades enteras, para facilitar los cálculos.

Elementos de cálculo: $p_1 = 46$; $p_2 = 36$; $P_m = 40$

Aplicando la fórmula:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{P_m - p_2}{p_1 - P_m}$$

se tiene:
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{40 - 36}{46 - 40}$$

de donde:
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{6}$$

lo que nos dice que las cantidades deben mezclarse en la razón de 4 a 6, o bien, 4 kg. de azúcar de \$ 0,46 el kg. con 6 kg. de \$ 0,36.

Siendo la razón geométrica la expresión de un número racional, podemos multiplicar o dividir sus términos por un número cualquiera sin que ello altere su valor, siempre que esto convenga.

De modo que, teniendo en cuenta el resultado del problema anterior, diremos que, en lugar de mezclar azúcar en la proporción de 4 a 6, podemos hacerlo en la razón de 2 a 3, de 8 a 12, etc. Esto justifica el carácter indeterminado de los problemas de esta naturaleza.

Otro procedimiento.

En la práctica se dispone la operación de la manera siguiente:

$$\begin{array}{lccccl}
C_1 = & 46 & & & 4 & \text{Kg. a \$ 0,46} \\
 & & \searrow & \nearrow & & \\
 & & & 40 & & \\
 & & \nearrow & \searrow & & \\
C_2 = & 36 & & & 6 & \text{Kg. a \$ 0,36}
\end{array}$$

Las flechas diagonales indican la colocación de las diferencias, de acuerdo al principio establecido.

VERIFICACIÓN. — Con las cantidades obtenidas y sus precios respectivos, se formula un nuevo problema de regla directa para determinar el precio medio de mezcla y probar que éste es igual al precio medio dado.

En efecto:

$$\begin{array}{rl}
\text{4 Kg. a \$ 0,46 valen} & \text{\$ 1,84} \\
\text{6 ,, ,, ,, 0,36 ,,} & \text{,, 2,16} \\
\hline
\text{10 Kg. a \$ 0,40} = & \text{\$ 4.—}
\end{array}$$

286. Las sustancias mezcladas son más de dos. — Si las especies a mezclarse son más de dos, el problema se reduce al anterior, comparando cada dos precios, uno mayor y otro menor que el precio medio.

Según el principio establecido, las sustancias consideradas deben ser tales que, al mezclarse lo hagan en razón inversa de las diferencias de precio.

Todas las mezclas parciales efectuadas en esta forma deben producir el precio medio conocido, como veremos en el siguiente problema.

287. PROBLEMA **104.** — *¿En qué proporción se debe mezclar trigo de $ 12 el Hl., de $ 15, $ 20 y $ 24, para obtener un precio medio de $ 18 el hectolitro?*

Solución

Comparemos los precios de dos en dos, uno mayor y otro menor que el precio medio, y efectuemos separadamente dos mezclas parciales; una con las especies de a $ 12 y $ 20 y otra con las de a $ 15 y $ 24, siendo $ 18 el precio medio de ambas.

Disposición práctica

$$P_m = 18. \left\{ \begin{array}{l} 12 \leftarrow \cdots\cdots\cdots\cdots 2 \\ 15 \leftarrow \cdots\cdots\cdots\cdots 6 \\ 20 \leftarrow \cdots\cdots\cdots\cdots 6 \\ 24 \leftarrow \cdots\cdots\cdots\cdots 3 \end{array} \right.$$

Se anotan las diferencias de precios en las líneas correspondientes en la forma indicada en el cuadro y siguiendo el método empleado, en el caso de ser dos las sustancias a mezclar. Reunidos los resultados obtenidos de las dos mezclas, éstos tendrán el mismo precio medio dado.

Luego deben mezclarse 2 Hl. de trigo a $ 12, con 6 de 15, 6 de 20 y 3 de $ 24 el Hl.

Verificación

2 Hl.	a $	12	= $	24
6 „	„ „	15	= „	90
6 „	„ „	20	= „	120
3 „	„ „	24	= „	72
17 Hl.	a $	18	= $	306

Segunda Solución

El mismo problema puede resolverse de la manera siguiente:

Hagamos ahora las dos mezclas parciales: una con las especies de a 12 y 24 pesos, y la otra con las de 15 y 20 pesos, y tendremos así expresada de otro modo la proporción de la mezcla total.

$$P_m = 18. \left\{ \begin{array}{l} 12 \leftarrow \\ 15 \leftarrow \\ 20 \leftarrow \\ 24 \leftarrow \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} \dotfill 6 \\ \dotfill 2 \\ \dotfill 3 \\ \dotfill 6 \end{array}$$

Entran así en la mezcla, 6 Hl. de trigo a $ 12 por cada 2 de 15, 3 de 20 y 6 de 24 pesos el Hl.

Esto justifica el carácter ilimitado de las soluciones.

Verificación

$$\begin{array}{rlrl} 6 & \text{Hl. a } \$ \ 12 = & \$ & 72 \\ 2 & \text{,, ,, ,, } 15 = & \text{,,} & 30 \\ 3 & \text{,, ,, ,, } 20 = & \text{,,} & 60 \\ 6 & \text{,, ,, ,, } 24 = & \text{,,} & 144 \\ \hline 17 & \text{Hl. a } \$ \ 18 = & \$ & 306 \end{array}$$

288. Problema **105.** — *Se desea obtener 840 Kg. de café, a un precio medio de $ 2,90 el Kg., mezclando café de $ 2,10; de $ 2,50; de $ 3,20; de $ 3,30 y de $ 3,60 el Kg. ¿Cuántos Kg. de cada clase entran en la mezcla?*

Solución

En este caso las cantidades de precio mayor no son en igual número a las de precio menor, *siendo ilimitadas las soluciones.*

Análogamente al ejemplo anterior, se comparan los precios de dos en dos, y siempre uno mayor y el otro menor que el precio medio dado. Como las cantidades que entran en la mezcla lo hacen en número impar, es evidente que debe quedar un precio sin intervenir, que lo comparamos luego, si es mayor, con cualquiera de precio menor y viceversa si ocurre lo contrario, y en la forma que indica el siguiente cuadro.

$$P_m = 2{,}90 \left\{ \begin{array}{llcr|r} 2{,}10 & & = & 0{,}30 & 3 \\ 2{,}50 & 0{,}40 + 0{,}70 & = & 1{,}10 & 11 \\ 3{,}20 & & = & 0{,}80 & 8 \\ 3{,}30 & & = & 0{,}40 & 4 \\ 3{,}60 & & = & 0{,}40 & 4 \end{array} \right.$$

Para mayor comodidad en los cálculos, se multiplican las relaciones halladas por la correspondiente potencia de 10, para convertirlas en números enteros. Según esto, las relaciones de precio serán:

3, 11, 8, 4 y 4

Sólo falta para resolver el problema, repartir los 840 kg. en partes proporcionales a esos números. Aplicando **(244)**, tenemos:

$$3 + 11 + 8 + 4 + 4 = 30$$

$$\begin{array}{rlr} x = & \dfrac{840}{30} \times 3 & = \ 84 \text{ Kg.} \\ y = & 28 \times 11 & = 308 \ \text{,,} \\ z = & 28 \times \ 8 & = 224 \ \text{,,} \\ k = & 28 \times \ 4 & = 112 \ \text{,,} \\ t = & 28 \times \ 4 & = 112 \ \text{,,} \\ \hline & & 840 \text{ Kg.} \end{array}$$

Verificación

84 Kg.	a	$ 2,10	=	$	176,40
308 ,,	,,	,, 2,50	=	,,	770.—
224 ,,	,,	,, 3,20	=	,,	716,80
112 ,,	,,	,, 3,30	=	,,	369,60
112 ,,	,,	,, 3,60	=	,,	403,20
804 Kg.	a	$ 2,90	=	$	2.436.—

289. PROBLEMA **106.** — *Un comerciante tiene harina de trigo de $ 1,80, de $ 2,20 y de $ 2,90 los 10 kilos. ¿Cuánto debe tomar de la 2ª y 3ª clase para obtener con 320 Kg. de la primera una mezcla a razón de $ 2,40 los 10 Kg.?*

Solución

Esta es una cuestión especial de la regla inversa. Su característica consiste en fijar, además de los datos necesarios, la cantidad de una de las sustancias. Debemos, pues, determinar en primer lugar la proporción de la mezcla. Así, tenemos:

$$P_m = 2{,}40 \begin{cases} 1{,}80 & = 0{,}50 \\ 2{,}20 & = 0{,}50 \\ 2{,}90 & 0{,}60 + 0{,}20 = 0{,}80 \end{cases} \begin{array}{|c} 5 \\ 5 \\ 8 \end{array}$$

Por una simple regla de tres, podremos determinar las cantidades desconocidas de la segunda y tercera clase. Representemos por x, e y a esas cantidades.

Los números proporcionales son:

$$5 \ , 5 \ , 8$$

y las cantidades correspondientes,

$$320 \ , x \ , y$$

Resolviendo por regla de tres, se tiene:

$$\frac{5}{320} = \frac{5}{x} \quad ; \quad \frac{5}{320} = \frac{8}{y}$$

de donde:

$$x = \frac{320 \times 5}{5} = 320 \text{ Kg.}$$

$$y = \frac{320 \times 8}{5} = 512 \text{ Kg.}$$

Esto significa que debemos tomar 320 kg. de \$ 2.20 y 512 kg. de \$ 2.90 los 10 kg., para mezclar con 320 kg. de \$ 1.80.

Verificación

320 Kg. a \$ 1,80 los 10 Kg.	= \$ 57,60
320 „ „ „ 2,20 „ „ „	= „ 70,40
512 „ „ „ 2,90 „ „ „	= „ 148,48
1152 Kg. a \$ 2,40 los 10 Kg.	= \$ 276,48

290. PROBLEMA **107.** — *Se tiene trigo de cuatro clases: de 10,50; de 11,20; de 9,80 y de 9,30 pesos el Hl. ¿Cuántos Hl. se deben tomar de la 3ª y 4ª clase, de manera que con 45 Hl. de la 1ª y 25 de la 2ª, se obtenga una mezcla de \$ 10,05 el Hl. de trigo?*

Solución

Conociendo las cantidades y precios respectivos de dos o más de las especies a mezclar, formularemos un problema de regla directa, con el fin de hallar el precio medio correspondiente. Así:

$$\begin{array}{lrl}
45 \text{ Hl. a } \$ \ 10{,}50 & = & \$ \ 472{,}50 \\
25 \ ,, \ ,, \ ,, \ 11{,}20 & = & ,, \ 280.— \\
\hline
70 \text{ Hl.} & & \$ \ 752{,}50
\end{array}$$

Luego: $$1 \text{ Hl.} = \frac{752{,}50}{70} = \$ \ 10{,}75$$

De manera que estas dos especies quedan reducidas a una sola, que expresaremos diciendo:

70 Hl. de trigo a $ 10,75 el Hl.

En esta forma la cuestión se reduce al caso del problema anterior y como tal lo resolveremos.

Representemos por x e y, las cantidades necesarias de la 3ª y 4ª clase.

Relaciones de precios

$$P_m = 10{,}05 \left\{ \begin{array}{l} 10{,}75 \\ 9{,}80 \\ 9{,}30 \end{array} \right. \quad \begin{array}{lr} 0{,}75+0{,}25 & = 1.— \\ \dots\dots\dots & = 0{,}70 \\ \dots\dots\dots & = 0{,}70 \end{array} \left| \begin{array}{l} 10 \\ 7 \\ 7 \end{array} \right.$$

Los números proporcionales son:

10, 7, 7

y las cantidades correspondientes:

70, x, y

Resolviendo por regla de tres, se tiene:

$$\frac{10}{70} = \frac{7}{x} \quad ; \quad \frac{10}{70} = \frac{7}{y}$$

de donde: $$x = \frac{70 \times 7}{10} = 49 \text{ Hl.}$$

$$y = \ ,, \ = 49 \ ,,$$

Verificación

$$\begin{array}{lrl}
45 \text{ Hl. a } \$ \ 10{,}50 & = & \$ \ 472{,}50 \\
25 \ ,, \ ,, \ ,, \ 11{,}20 & = & ,, \ 280.— \\
49 \ ,, \ ,, \ ,, \ 9{,}80 & = & ,, \ 280{,}20 \\
49 \ ,, \ ,, \ ,, \ 9{,}30 & = & ,, \ 455{,}70 \\
\hline
168 \text{ Hl. a } \$ \ 10{,}05 & = & \$ \ 1.688{,}40
\end{array}$$

191. Problema 108. — *Un cerealista tiene maíz de dos clases: de $ 4,33 y $ 4,50 el Qm. Desea efectuar una mezcla con la condición de que entren de la 1ª clase, 42 Qm. más. ¿Cuánto debe tomar de cada una para poder vender la mezcla a $ 4,38 el Qm.?*

Solución

La cuestión que plantea este problema es otro caso especial de la regla inversa. Las especies a mezclar son dos, y se da la diferencia entre las cantidades de cada una.

En primer término se halla la razón de la mezcla, aplicando la proporción del principio fundamental **(284)**.

Los *elementos de cálculo* son:

$$C_1 = x \;;\; C_2 = y \;;\; p_1 = 4{,}33 \;;\; p_2 = 4{,}50 \;;\; P_m = 4{,}38$$

Se tiene: $$\frac{C_1}{C_2} = \frac{P_m - p_2}{p_1 - P_m}$$

o bien: $$\frac{x}{y} = \frac{4{,}38 - 4{,}50}{4{,}33 - 4{,}38}$$

de donde: $$\frac{x}{y} = \frac{-0{,}12}{-0{,}05} = \frac{12}{5} \qquad (1)$$

proporción que nos da la razón de los precios.

Aplicando en (1) una de las propiedades de las proporciones, referente a la diferencia entre antecedente y consecuente, tendremos estas otras:

$$\frac{x-y}{x} = \frac{12-5}{12} \;;\; \frac{x-y}{y} = \frac{12-5}{5}$$

Pero: $$x - y = 42 \text{ Qm.}$$

Sustituyendo y efectuando, se tiene:

$$\frac{42}{x} = \frac{7}{12} \;;\; \frac{42}{y} = \frac{7}{5}$$

de donde: $$x = \frac{42 \times 12}{7} = 72 \text{ Qm.}$$

$$y = \frac{42 \times 5}{7} = 30 \;\text{„}$$

$$x - y \qquad = 42 \text{ Qm.}$$

Verificación

72 Qm.	$\times$	$	4,33	=	$	311,76	
30 „	$\times$	„	4,50	=	„	135.—	
102 Qm.	a	$	4,38	=	$	446,76	

292. Regla de aleación. — Los metales llamados finos, se presentan ordinariamente combinados con metales de calidad inferior que los vuelven más duros y resistentes a la acción degastadora del tiempo.

La pureza de un lingote lo determina la cantidad de *metal fino* que contiene por unidad de peso. Esta relación convencional se llama *ley* o *título de la aleación.*

En las naciones que han adoptado el *sistema cegesimal de medidas,* el título de un lingote se calcula en milésimas. Al decir que el título de una barra de oro es al 0,900 de fino, significa que por cada gramo de metal hay 0,900 g. de oro puro.

En la práctica, por motivos comerciales o de carácter industrial, se hace necesario modificar el título de un lingote, ya sea para mejorar o rebajar su ley, fundiéndolos en tal caso con otros de títulos distintos.

El procedimiento que resuelve las cuestiones, originadas por la combinación de metales, se llama *regla de aleación,* y es un caso particular de las mezclas, que se resuelven con solo sustituir en éstas los precios de las sustancias por los respectivos títulos, que representaremos por t_1, t_2, t_3, etc., y por T_m el título medio de la unidad de aleación.

293. Problema **109.** — *Determinar el título medio de la aleación que resulta al fundir tres lingotes de oro: uno de 1.200 g. y título de 0,900, con otro de 1.500 g. de 0,950 de fino y otro de 1.200 g. de 0,870.*

Solución

Este problema corresponde al primer caso de mezcla y se tiene:

1.200 g.	$\times$ 0,900	=	1.080	g. de oro puro
1.500 „	$\times$ 0,950	=	1.425	„ „ „ „
1.200 „	$\times$ 0,870	=	1.044	„ „ „ „
3900 g.		=	3549	g. de oro puro

En 3.900 g. de aleación hay 3.549 g. de oro puro, luego la unidad de mezcla contiene:

$$T_m = \frac{3.549}{3.900} = 0{,}910 \text{ de fino.}$$

294. PROBLEMA **110.** — *En qué proporción debe ligarse oro de 0,920 y 0,800 de fino para obtener 42 Kg. al título de 0,870?*

Solución

Esta cuestión corresponde al segundo caso de mezcla, llamado de regla inversa. Así tenemos:

$$T_m = 870 \left\langle \begin{matrix} 920 \\ 800 \end{matrix} \right. \quad \times \quad \begin{matrix} 70 & \text{———} & 7 \\ 50 & \text{———} & 5 \end{matrix}$$

Luego la combinación de los metales, debe efectuarse en la relación de 7 a 5.

Para obtener los 42 kg. de aleación, falta repartir esta cantidad en partes proporcionales a 7 y 5.

Representemos por x e y, a las cantidades respectivas que entran de cada lingote:

Por lo tanto:

$$x = \frac{42}{12} \times 7 = 24{,}5 \text{ Kg.}$$

$$y = \frac{42}{12} \times 5 = 17{,}5 \text{ Kg.}$$

$$= 42. \text{ Kg.}$$

Se necesitan 24,5 kg. de 0,920 de fino y 17,5 kg. de 0,800.

Verificación

$$\begin{array}{lll} 24{,}5 \text{ Kg.} \times 0{,}920 & = 22{,}540 \text{ Kg. de oro puro} \\ 17{,}5 \text{ „} \times 0{,}800 & = 14.\text{—} \quad \text{„ „ „ „} \\ \hline 42 \text{ Kg.} \times 0{,}870 & = 36{,}540 \text{ Kg. de oro puro.} \end{array}$$

295. PROBLEMA **111.** — *Se tienen dos barras de oro; una de 0,750 de fino y otra de 0,890, y se desea fundirlas con otras dos, una* *de oro puro y la otra de cobre. ¿Cuánto debe tomarse de cada clase para obtener 340 gramos de aleación a 0,930 de fino?*

Solución

Es la unidad el título del oro puro y cero la del cobre.

Relación de precios

$$P_m = 0{,}900 \left\{ \begin{array}{r} 0 \\ 0{,}750 \\ 0{,}890 \\ 1 \end{array} \right. \begin{array}{rl|r} & = 0{,}100 & 5 \\ & = 0{,}100 & 5 \\ & = 0{,}100 & 5 \\ 0{,}900+0{,}150+0{,}010 & = 1{,}060 & 53 \end{array}$$

Representemos por x, y, z, k, las cantidades respectivas de cada clase. Aplicando la regla de repartición proporcional **(244)**, se tiene:

Suma de los números proporcionales:

$$5+5+5+53 = 68$$

Suma de las cantidades correspondientes:

$$x+y+z+k = 340 \text{ gr.}$$

$$x = \frac{340}{68} \times 5 = 25 \text{ gramos.}$$

$$y = \text{„} = 25 \text{ „}$$

$$z = \text{„} = 25 \text{ „}$$

$$k = \frac{340}{68} \times 53 = 265 \text{ „}$$

340 gramos.

Verificación

25 g. × 0	=	0	oro puro
25 „ × 0,750	=	18,75 g.	„ „
25 „ × 0,890	=	22,25 „	„ „
265 „ × 1.—	=	265.— „	„ „
340 g. a 0,900 de fino	**=**	**306.**	**g. oro puro**

296. Observación. — Cuando en las mezclas entran líquidos alcohólicos, no pueden aplicarse directamente las fórmulas halladas, porque la contracción provocada en estas clases de mezclas varía el grado y el precio de las mismas.

Es frecuente en el comercio rebajar el grado de los alcoholes añadiéndoles agua. Con el fin de corregir el error de los cálculos, producido por la contracción, se han construído tablas especiales que determinan la cantidad de agua a añadir.

REGLA CONJUNTA

297. Definición. — La *regla conjunta,* llamada también de *cadena,* es la que tiene por objeto determinar la relación de dos cantidades ligadas antre sí por medio de otras equivalencias conocidas.

La regla conjunta es un caso particular de la regla de tres compuesta.

Las equivalencias se anotan como si fueran igualdades, por ejemplo:

$$9\ \text{K.} = 5\ \text{m.}$$

donde las letras *K* y *m,* representan las especies y los coeficientes *9* y *5* las unidades respectivas que se toman de cada especie y se lee así: *9 unidades de la especie K, equivalen a 5 unidades de la especie m.*

Esta operación se basa en el siguiente:

298. TEOREMA. — *Si se multiplican ordenadamente varias equivalencias, tales que el segundo miembro de cada una de ellas sea de la misma especie que el primer miembro de la equivalencia siguiente, los productos que se obtienen son equivalentes, siendo el primer producto de la primera especie y el segundo de la última.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} 3\,m = 5\,t \\ 9\,t = 4\,k \\ 2\,k = 6\,l \\ 8\,l = 7\,q \end{array} \right. \qquad T) \quad 3 \times 9 \times 2 \times 8\,m = 5 \times 4 \times 6 \times 7\ q.$$

Demostración. — En primer lugar, consideremos las dos primeras igualdades de la hipótesis:

$$\begin{array}{l} 3\,m = 5\,t \\ 9\,t = 4\,k \end{array}$$

Multiplicando los dos miembros de la primera equivalencia por *9* y los de la segunda por *5*, ambos coeficientes de la especie *t*, resulta:

$$3 \times 9m = 5 \times 9t$$
$$5 \times 9t = 5 \times 4k$$

y por el carácter transitivo de la igualdad, se tiene:

$$3 \times 9m = 5 \times 4k$$

Comparando esta nueva equivalencia con la tercera de las dadas y procediendo en forma análoga, tendremos esta otra:

$$3 \times 9 \times 2m = 5 \times 4 \times 6l$$

y esta con la última, tendremos:

$$3 \times 9 \times 2 \times 8m = 5 \times 4 \times 6 \times 7q.$$

quedando demostrado el teorema.

299. Resolución de la regla conjunta. — COROLARIO. — El teorema anterior nos permite transformar una serie de equivalencias, dependientes las unas de las otras, en una equivalencia única, a fin de determinar la relación que se desee. Luego: *para resolver las cuestiones de regla conjunta, se designa previamente la cantidad buscada por la letra x, la que es equivalente a la cantidad propuesta. Debajo de ésta se escriben todas las equivalencias dadas o necesarias a la solución, de modo que el primer miembro de cada una de ellas sea de la misma especie de unidad que el segundo miembo de la que le precede, hasta llegar a un segundo miembro de la misma especie que la desconocida. El valor de ésta, es igual al producto de los segundos miembros, divididos por el producto de los números de los primeros miembros.*

300. PROBLEMA **112.** — *Calcular cuántas varas hay en 450 yardas, sabiendo que 27 yardas equivalen a 76 pies, que 8 pies valen 2,60 metros y que 15 varas valen 12,99 metros.*

Solución

Anotemos las equivalencias en la forma indicada por la regla. Así:

$$\begin{array}{rlcrl} x & \textit{varas} & = & 450 & \textit{yardas} \\ 27 & \textit{yardas} & = & 76 & \textit{pies} \\ 8 & \textit{pies} & = & 2{,}60 & \textit{metros} \\ 12{,}99 & \textit{metros} & = & 15 & \textit{varas} \end{array}$$

y multiplicando ordenadamente se tiene:

$$x \,.\, 27 \times 8 \times 12{,}99 \text{ varas} = 450 \times 76 \times 2{,}60 \times 15 \text{ varas}$$

o bien:
$$27 \times 8 \times 12{,}99\, x = 450 \times 76 \times 2{,}60 \times 15$$

de donde:
$$x = \frac{450 \times 76 \times 2{,}60 \times 15}{27 \times 8 \times 12{,}99}$$

o sea:
$$x = 475{,}36 \text{ varas.}$$

301. Problema **113.** — *Determinar el peso de trigo correspondiente a 5.000 Kg. de harina, sabiendo que 3,12 Hl. de trigo producen, término medio, 157 Kg. de harina, y que el peso de 5 Dl. equivalen a 37,5 Kg. de trigo.*

Solución

Disposición de los elementos de cálculo:

$$\begin{array}{rlcrl} x & \text{Kg. } \textit{de trigo} & = & 5000 & \textit{Kg. de harina} \\ 157 & ,, \ \textit{de harina} & = & 3{,}12 & \textit{Hl. de trigo} \\ 1 & \text{Hl } \textit{de trigo} & = & 10 & \textit{Dl. de trigo} \\ 5 & \text{Dl. } \textit{de trigo} & = & 37{,}5 & \textit{Kg. de trigo} \end{array}$$

de donde:
$$x = \frac{5.000 \times 3{,}12 \times 10 \times 37{,}5}{157 \times 5}$$

o sea:
$$x = 7452{,}23 \text{ Kg. de trigo.}$$

302. Observación. — En la práctica no se deben efectuar las operaciones indicadas sino después de simplificar la expresión, suprimiendo los factores comunes a los dos términos. Para comprobar el resultado obtenido se reemplaza en el enunciado la incógnita por el valor hallado y se formula un nuevo problema de conjunta, considerando para ello cualquiera de los demás elementos como nueva incógnita.

CAMBIO

303. Definiciones. — La palabra *cambio* tiene diversas acepciones:

1ª) Es el contrato en virtud del cual una de las partes se obliga a proporcionar a la otra una suma de dinero existente en un lugar distinto de aquel en que se hizo la estipulación.

Este es el *cambio comercial* o *trayecticio*, que se efectúa por el *contrato de cambio* (1).

2ª) Es la permuta de la moneda de diferentes países o de monedas del mismo país, pero de diferente especie.

Este es el cambio *manual* o *real*.

3ª Es la diferencia entre el valor nominal de un título y el que resulta de su negociación.

El objeto principal del cambio consiste en la transferencia de sumas de dinero de un país a otro, sin los riesgos y costos que significa el transporte efectivo de dinero.

304. Diferentes clases de cambio. Definiciones. — El *cambio* puede ser *directo* o *indirecto:* es *cambio directo*, cuando en la operación intervienen únicamente dos plazas, y *cambio indirecto*, cuando se efectúa con la intervención de plazas auxiliares.

Si el cambio se realiza entre plazas de una misma nación, se llama *cambio nacional* o *interior*, y *es extranjero* o *exterior*, si se verifica entre plazas de países distintos.

Se llama *curso* o *precio* del cambio entre dos plazas, a la relación de las cantidades de monedas que son equivalentes en una época determinada. El precio de los cambios es variable como el de todas las mercaderías, dando esto lugar a las transacciones corrientes y a las especulaciones, según la abundancia o la variedad de los títulos, y a las ofertas y demandas.

Se llama *cotización* a la expresión del cambio.

El cambio puede estar: *a la par, sobre la par* y *bajo la par*. Está *a la par*, cuando el precio de cotización es igual a la relación entre el valor efectivo de las monedas. Entonces el valor intrínseco de las monedas destinadas al pago es igual al de las monedas compradas. Así, cuando decimos que el cambio entre la República Argentina, Italia y Suiza, está a la par, significa que un peso oro argentino equivale a 5 liras, o a 5 francos suizos. El cambio está *sobre la par*, cuando la suma entregada en pago es inferior al valor que se compra, y *bajo la par* en caso contrario.

(1) Arts. 589 y 590 del Código de Comercio.

Considerando de nuevo el ejemplo anterior, diremos que el cambio está *sobre* o *bajo* la par, cuando se requiere, *menos* o *más* de un peso oro argentino, para adquirir 5 liras o 5 francos suizos.

Si el cambio se efectúa entre países cuyas monedas son de idéntico valor, se realiza éste abonando un tanto por ciento sobre el valor de la letra, por ejemplo: Francia e Italia.

Las cantidades de monedas nacionales y extranjeras que se comparan, constituyen los *términos del cambio*. En la práctica se ha establecido que de los dos términos monetarios necesarios para fijar el precio de cotización, tan sólo uno de ellos puede variar, mientras el otro debe permanecer constante. El *término fijo* se llama también *cierto*, e *incierto* el *término variable*. En las cotizaciones el término fijo constituye lo que se llama *base del cambio*.

En el lenguaje bancario una plaza da el *cierto*, cuando la moneda de esta plaza sirve de término fijo en la comparación, y aquella otra que suministra el término variable, da el *incierto*.

Entre las plazas comerciales de Buenos Aires, Londres y París, el término fijo o *cierto*, es el peso oro argentino, siendo el término variable o *incierto*, la cantidad de peniques o francos que deben pagarse por un peso oro. Así, también Londres da el cierto a París y el incierto a Lisboa.

El uso general ha hecho que en la lista de los cambios se mencione solamente el término variable, pues el término fijo se considera sobreentendido, consiguiéndose de esta manera reducir la lista de los cambios a una expresión simple para comodidad de banqueros y comerciantes. Si decimos que en París el cambio sobre Londres es de 25,58, significa que el elemento fijo es en este caso la libra esterlina que vale en ese momento 25,58 francos.

305. Paridad monetaria. — Se llama *paridad monetaria* o *intrínseca*, al valor de las monedas extranjeras consideradas como lingotes, en base a la cantidad de metal fino que contiene cada una de ellas.

Para determinar la par intrínseca de una moneda con respecto a otra de igual metal, se calcula previamente el peso del metal puro que contiene cada una de ellas y se plantea en forma general la siguiente proporción: *El metal fino de una moneda es al valor que* *ésta representa, como el metal puro de la otra es a la paridad buscada x.*

Es decir:

$$\frac{\textit{metal fino de una moneda}}{\textit{valor que representa.}} = \frac{\textit{metal fino de la otra moneda}}{\textit{paridad buscada.}}$$

306. Problema **114.** — *Hallar la paridad de la libra esterlina en pesos argentinos.*

Solución

Calculemos en primer lugar el peso del metal fino que contiene cada una de las monedas, en nuestro caso de la *libra esterlina* y del *argentino.*

Hemos visto ya (78b) que el peso del metal fino de una moneda se obtiene multiplicando el peso de dicha moneda por su título.

Si la ley de la libra esterlina es de $0{,}91\widehat{6}$ de fino y su peso de 7,988 gramos, se tendrá:

Peso del metal fino de la £:

$$7{,}988 \times 0{,}91\widehat{6} = 7{,}32228 \text{ gr. de oro puro.}$$

Siendo el título del argentino de 0,900 de fino y su peso de 8,0645 gramos, tendremos:

Peso del metal fino del argentino:

$$8{,}0645 \times 0{,}900 = 7{,}25805 \text{ gr. de oro puro.}$$

Aplicando la proporción establecida anteriormente se tiene:

$$\frac{\textit{metal fino argentino}}{\textit{valor que representa}} = \frac{\textit{metal fino £}}{x}$$

Sustituyendo por los valores hallados, resulta:

$$\frac{7{,}25805}{5} = \frac{7{,}32228}{x}$$

de donde:

$$x = \frac{7{,}32228 \times 5}{7{,}25805}$$

o bien: $x = 5{,}044$ pesos oro argentino.

Luego la paridad monetaria de la libra esterlina en pesos oro argentino es de 5,044.

Los cálculos a que da lugar la proposición general pueden simplificarse si obtenemos previamente el peso del metal puro que corresponde a la unidad monetaria en cada sistema. Según esto, en nuestro problema bastaría determinar la cantidad de metal fino que corresponde a un peso oro. Si el argentino tiene 7,32228 gramos de metal puro y vale 5 pesos oro, a 1 peso oro le corresponderá la quinta parte, o sea 1,45161 gramos de metal fino.

La proporción correspondiente será:

$$\frac{1{,}45161}{1} = \frac{7{,}32228}{x}$$

de donde: $$x = \frac{7{,}32228}{1{,}45161} = 5{,}044 \text{ pesos oro.}$$

De aquí deducimos que: *para calcular la par intrínseca de una moneda con respecto a otra del mismo metal, bastará dividir el peso del metal fino que contiene cada unidad monetaria de la primera por el metal puro de la otra.*

307. PROBLEMA **115.** — *Calcular la paridad monetaria en dólares del peso oro argentino, sabiendo que la ley del dólar es de 0,900 de fino y pesa 1,6718 gramos.*

Solución

A un peso oro argentino corresponde, como hemos visto, 1,45161 grs. de oro puro, y el peso del metal puro del dólar es $1{,}6718 \times 0{,}900 = 1{,}50462$ grs. oro puro.

Aplicando la regla anterior se tiene:

$$x = \frac{1{,}45161}{1{,}50462} = 0{,}9648 \textit{ dólar.}$$

308. Cambio nacional o interior. — Se llama *cambio nacional* o *interior,* al que se efectúa entre plazas de un mismo país.

En el cambio nacional la cotización de letras puede ser a la *par,* con *beneficio,* o con *daño.* El cambio entre dos plazas está *a bene-*

ficio, cuando por el valor nominal de la letra girada sobre una de éstas, se paga en la otra más en efectivo. Y el cambio está *a daño,* en caso contrario.

Con frecuencia en las operaciones de compra o venta de letras, se originan gastos consistentes en el pago de *comisión, corretaje,* etc. Se ha convenido en estos casos que si se trata de compra de letra, se agreguen los gastos a su efectivo por cambio, y que se resten si es una venta de letra.

Las cuestiones sobre cambio nacional se resuelven por regla de tres y por regla conjunta.

309. PROBLEMA **116.** — *Se ha tomado en Rosario de Santa Fe una letra de cambio sobre Córdoba, por valor de $ 4800, estando el cambio a ¾ % de beneficio. ¿Qué cantidad se ha pagado?*

Solución

Estando el cambio a beneficio para el vendedor, es evidente que el comprador de la letra debe pagar 0,75 % más del valor nominal de la misma.

Por regla de tres

$ 100 nominales cuestan $ 100,75 efectivos
„ 4800 „ costarán „ x „

La regla es directa, luego:

$$\frac{100}{4800} = \frac{100,75}{x}$$

de donde:
$$x = \frac{4800 \times 100,75}{100}$$

o bien:
$$x = \$\ 4836 \text{ efectivos.}$$

Por regla conjunta

$$\begin{array}{rcl} x \ \$ \ \textit{efectivos} & = & \$ \ 4800 \quad \textit{nominales} \\ 100 \ „ \ \textit{nominales} & = & „ \ \ 100,75 \ \textit{efectivos} \\ \hline 100\ x & = & 4800 \times 100,75 \end{array}$$

de donde:
$$x = \frac{4800 \times 100,75}{100} = \$\ 4836 \text{ efectivos}$$

310. Problema **117.** — *Por una letra sobre Córdoba, al cambio de ¾ % de beneficio se pagó en Rosario de Santa Fe $ 4836. Calcular el valor nominal de la letra.*

Solución

Estando el cambio a beneficio, resultará a daño para el comprador de la letra. Resolviendo:

Por regla de tres

Con $	100,75	efectivos	se	tienen $ 100	nominales
„ „	4836	„	„	„ „ x	„

Siendo la regla directa, resulta:

$$\frac{100{,}75}{4836} = \frac{100}{x}$$

de donde:

$$x = \frac{4836 \times 100}{100{,}75}$$

o sea

$$x = \$\ 4800 \text{ nominales}$$

311. Problema **118.** — *Se ha comprado una letra de $ 18700, desbolsando por ella $ 18840,25. Determinar el cambio de la negociación.*

Solución

Por regla conjunta

$$\begin{array}{rcl} x \ \$ \ \textit{efectivos} & = & \$ \ 100 \ \textit{nominales} \\ 18700 \ „ \ \textit{nominales} & = & „ \ 18840{,}25 \ \textit{efectivos} \\ \hline 18700 . x & = & 100 \times 18840{,}25 \end{array}$$

de donde:

$$x = \frac{100 \times 18840{,}25}{18700} = \$\ 100{,}75$$

Esto significa que la operación se ha efectuado con el cambio a beneficio para el documento, puesto que por cada 100 pesos nominales, se han pagado $ 100,75 en efectivo. Lo que nos dice que habiéndose entregado $ 0,75 más por cada $ 100 nominales, el tanto por ciento de cambio estará determinado por este exceso, luego:

$$t = 0{,}75 \ \% = \tfrac{3}{4} \ \% \text{ de beneficio}$$

312. PROBLEMA **119.** — *He comprado en Mendoza una letra de $ 15600 sobre Bahía Blanca, con el cambio a 1/4 % de daño. ¿Cuánto he pagado por la letra?*

Solución

Estando el cambio a daño para el vendedor, el comprador debe abonar 0,25 % menos que el del valor nominal de la letra. Es decir, que por cada $ 100 nominales debo pagar $ 99,75 efectivos.

Por regla conjunta

$$\begin{array}{rcl} x \text{ \$ } \textit{efectivos} & = & \text{\$ } 15600 \quad \textit{nominales} \\ 100 \text{ ,, } \textit{nominales} & = & \text{,, } \quad 99{,}75 \; \textit{efectivos} \\ \hline 100.x & = & 15600 \times 99{,}75 \end{array}$$

de donde: $x = \dfrac{15600 \times 99{,}75}{100} = \text{\$ } 15561 \text{ efectivos}$

313. PROBLEMA **120.** — *Un negociante de Mendoza tomó una letra sobre Bahía Blanca con el cambio de 1/4 % de daño y pagó por ella $ 15561. ¿De cuánto era la letra?*

Solución

$$\begin{array}{rcl} x \text{ \$ } \textit{nominales} & = & \text{\$ } 15561 \; \textit{efectivos} \\ 99{,}75 \text{ ,, } \textit{efectivos} & = & \text{,, } \quad 100 \; \textit{nominales} \\ \hline 99{,}75.x & = & 15561 \times 100 \end{array}$$

de donde: $x = \dfrac{15561 \times 100}{99{,}75}$

luego: $x = \text{\$ } 15600 \; \textit{nominales}$

314. PROBLEMA **121.** — *Se ha vendido una letra de $ 16500 sobre Tucumán, al cambio del 2 % de beneficio, y se pagó el 1/2 ‰ de corretaje y 1 1/4 % de comisión. ¿Cuánto costó la letra?*

Solución

Esta es una cuestión de cambio nacional con gastos.

Calculemos en primer lugar el efectivo de $ 100 nominales por cambio y gastos, para luego determinar por regla conjunta el costo de la letra.

Efectivo de $ 100 por cambio al 2 % beneficio.

$$100 + 2 = \$\ 102$$

Gastos.

$$\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\ ‰ \text{ de } \$\ 100 = \$\ 0{,}05 \textit{ corretaje} \\ 1\tfrac{1}{4}\ \% \text{ ,, ,, } 100 = \text{ ,, } 1{,}25 \textit{ comisión} \\ \hline \text{Total} = \$\ 1{,}30 \end{array}$$

Tratándose de una venta de letra, los gastos efectuados deben deducirse del efectivo de $ 100 por cambio.

Efectivo de $ 100 por cambio y gastos.

$$102 - 1{,}30 = \$\ 100{,}70$$

Por regla conjunta

$$\begin{array}{l} x \ \$ \textit{ efectivos} = \$\ 16500 \quad \textit{nominales} \\ 100 \ \$ \textit{ nominales} = \text{ ,, } 100{,}70 \textit{ efectivos, cambio y gastos} \\ \hline 100 . x = 16500 \times 100{,}70 \end{array}$$

de donde:

$$x = \frac{16500 \times 100{,}70}{100}$$

luego:

$$x = \$\ 16615{,}50$$

315. Cambio extranjero o exterior. — Se llama *cambio extranjero o exterior,* al que tiene lugar entre plazas comerciales de países distintos.

Las cuestiones sobre cambio extranjero se resuelven por regla conjunta.

316. PROBLEMA **122.** — *Calcular el valor en pesos moneda nacional de una letra de 3500 £, sobre Londres, estando el cambio a 38* $^{4}/_{11}$

Solución

Por regla conjunta

$$\begin{array}{l} x \ \$ \ \text{m/n} = 3500 \ £ \\ 1 \ £ = 240 \textit{ peniques} \\ 38\,^{4}/_{11} \text{ peniques} = 1 \ \$ \ \text{o/s} \\ 0{,}44 \ \$ \ \text{o/s} = 1 \ \$ \ \text{m/n} \\ \hline 38\,^{4}/_{11} \times 0{,}44 \ x = 3500 \times 240 \end{array}$$

de donde: $$x = \frac{3500 \times 240}{38\,^4/_{11} \times 0{,}44}$$

o bien: $$x = \frac{3500 \times 240 \times 11 \times 100}{422 \times 44}$$

luego: $$x = \$\ 49763{,}03\ {}^{m}\!/_{n}.$$

317. PROBLEMA 123. — *Determinar la cantidad de francos que se podrán comprar con \$ 2500, estando el cambio sobre París a 20,10 %.*

$$x \text{ francos} = 2500\ \$\ {}^{m}\!/_{n}$$
$$20{,}10\ \$\ {}^{m}\!/_{n} = 100 \text{ francos}$$
$$20{,}10 . x = 2500 \times 100$$
$$x = \frac{2500 \times 100}{20{,}10}$$
$$x = 12437{,}82 \text{ francos}$$

318. **Cambio indirecto. — Arbitraje.** — Con el fin de utilizar la diferencia en el precio de los cambios entre diversas plazas comerciales, se realiza un conjunto de operaciones, que permiten establecer el método de cambio más ventajoso para efectuar el pago o cobro de una cantidad entre personas que residen en plazas distintas. Este cálculo, llamado *arbitraje*, se aplica con preferencia en el comercio de giros.

Con frecuencia el arbitraje indica como más ventajoso para aplicar, el *cambio indirecto*.

El arbitraje de cambio es *simple* o *compuesto*, según el número de plazas que en él intervienen.

319. PROBLEMA 124. — *Un comerciante debe pagar 7500 francos en París, y efectúa el giro por intermedio de Londres. Calcular el valor de la letra en pesos moneda nacional, sabiendo que el cambio de Londres sobre París es de 74,95 francos por £; de Buenos Aires sobre Londres, a 38 peniques por 1 \$ o|s y de Buenos Aires sobre París a 19,35 \$ los 100 francos.*

Solución

Cambio indirecto

$$\begin{array}{rcl} x \ \$ \ ^{m}/_{n} & = & 7500 \ \textit{francos} \\ 74{,}95 \ \textit{francos} & = & 1 \ £ \\ 1 \ £ & = & 240 \ \textit{peniques} \\ 38 \ \textit{peniques} & = & 1 \ \$ \ o|s \\ 0{,}44 \ \$ \ o|s & = & 1 \ \$ \ ^{m}/_{n} \\ \hline 74{,}95 \times 38 \times 0{,}44 . x & = & 7500 \times 240 \end{array}$$

$$x = \frac{7500 \times 240}{74{,}95 \times 38 \times 0{,}44}$$

$$x = 1436{,}36 \ \$ \ ^{m}/_{n}$$

Cambio directo

$$\begin{array}{rcl} x \ \$ \ ^{m}/_{n} & = & 7500 \ \textit{francos} \\ 100 \ \textit{francos} & = & 19{,}35 \ \$ \ ^{m}/_{n} \\ \hline 100 . x & = & 7500 \times 19{,}35 \end{array}$$

$$x = \frac{7500 \times 19{,}35}{100}$$

$$x = 1451{,}25 \ \$ \ ^{m}/_{n}$$

Luego es más ventajoso emplear el *cambio indirecto.*

320. Problema **125.** — *Un industrial de Buenos Aires debe girar 9600 florines a Amsterdam. Consultando la lista de cambios, halla los siguientes tipos de cotización:*

N. York s/Amsterdam, 68,70 dólar por 100 florines,
Buenos Aires s/N. York, 301 $ los 100 dólares,
Londres s/Amsterdam, 7,20 florines por £,
Buenos Aires s/Londres, a 36,70 el 1 $ o|s,
Buenos Aires s/Amsterdam, 206,40 $ los 100 florines.

Desea saber si conviene efectuar un giro directo, o por intermedio de las plazas de Nueva York o Londres.

Solución

Vía Nueva York, Amsterdam.

$$\begin{array}{rcl} x \ \$ \ ^{m}/_{n} & = & 9600 \ \textit{florines} \\ 100 \ \textit{florines} & = & 68{,}70 \ \textit{dólares} \\ 100 \ \textit{dólares} & = & 301 \ \$ \ ^{m}/_{n} \\ \hline 100 \times 100 . x & = & 9600 \times 68{,}70 \times 301 \end{array}$$

$$x = \frac{9600 \times 68{,}70 \times 301}{100 \times 100}$$

$$x = 19851{,}55 \ \$ \ {}^{m}\!/\!_{n}$$

Vía Londres, Amsterdam

$$\begin{array}{rcl}
x \ \$ \ {}^{m}\!/\!_{n} & = & 9600 \ \textit{florines} \\
7{,}30 \ \textit{florines} & = & 1 \ £ \\
1 \ £ & = & 240 \ \textit{peniques} \\
36{,}70 \ \textit{peniques} & = & 1 \ \$ \ \text{o|s} \\
0{,}44 \ \$ \ \text{o|s} & = & 1 \ \$ \ {}^{m}\!/\!_{n} \\
\hline
7{,}30 \times 36{,}70 \times 0{,}44 . x & = & 9600 \times 240
\end{array}$$

$$x = \frac{9600 \times 240}{7{,}30 \times 36{,}70 \times 0{,}44}$$

$$x = 19816{,}67 \ \$ \ {}^{m}\!/\!_{n}$$

Cambio directo

$$\begin{array}{rcl}
x \ \$ \ {}^{m}\!/\!_{n} & = & 9600 \ \textit{florines} \\
100 \ \textit{florines} & = & 206{,}40 \ \$ \ {}^{m}\!/\!_{n} \\
\hline
100 . x & = & 9600 \times 206{,}40
\end{array}$$

$$x = \frac{9600 \times 206{,}40}{100}$$

$$x = 19814{,}40 \ \$ \ {}^{m}\!/\!_{n}$$

Lo que nos dice que el *cambio directo* es el más ventajoso.

EJERCICIOS

Resolver los siguientes problemas sobre regla de aligación:

427. — Se han mezclado 60 kg. de café de $ 2,10 el kilogramo, con 40 kg. de 2,70, con 34 kg. de $ 3,20 y con 20 kg. de $ 3,48. ¿Cuánto vale el kilogramo de la mezcla?

428. — Se mezclaron 23 litros de vino de $ 1,50 el litro, con 16 litros de $ 1,20, con 7 litros de $ 0,90 y con 10 litros de agua. Determinar el precio de la unidad de mezcla.

429. — Un comerciante mezcla 16 Hl. de harina a $ 17 el hectolitro, con 30 Hl. a $ 15,50 y con 22 Hl. a $ 14,10. ¿A cuánto debe vender el hectolitro de la mezcla para ganar el 5 %?

430. — Ha mezclado un cerealista 150 quintales de trigo a $ 13,15 el quintal, con 80 de $ 12, y con 120 de $ 13,75. ¿A cuánto resultan los 80 kilogramos de mezcla?

431. — Se mezclan 50 litros de agua a 16°, con 22 litros a 0°, con 12 litros de agua hirviendo y 20 litros a 4°. Determinar la temperatura de la mezcla.

432. — Se han fundido juntos tres lingotes de oro: uno de 0,900 de fino que pesa 2,5 kg.; otro de 0,800 de fino que pesa 1,4 kg. y el último de 0,860 de fino que pesa 750 gr. Determinar el título de la aleación.

433. — Un joyero funde 1.500 gr. de oro puro con 700 gr. de 0,870 de fino y con 200 gr. de cobre. ¿Cuál es el título de la aleación que resulta?

434. — Un negociante ha hecho una mezcla con tres clases de vino: 6 Hl. de $ 50 el hectolitro, con 12 Hl. de $ 75 y con 4 Hl. de $ 80 y agrega 3 hectolitros de agua. La nueva clase de vino la envasa en botellas de un litro, que luego vende ganando el 15 % sobre el precio de compra. ¿A cuánto vende la botella?

435. — ¿En qué proporción debo mezclar café de $ 1,60; $ 2; $ 2,40 y $ 2,50 el kilogramo para obtener a $ 2,10 la unidad de mezcla?

436. — Llenar un tonel de 250 litros, con vino de $ 0,80, $ 1,20 y $ 1,35 el litro, de manera que el precio medio sea de $ 1,05 el litro.

437. — Un cerealista mezcla 750 quintales de trigo de $ 13,60 el quintal, con trigo de $ 12,25; de $ 10,90 y de $ 13, para obtener un precio medio de $ 12,40 el quintal. Determinar la cantidad que entra en la mezcla de cada una de las demás especies.

438. — Compró un almacenero 9 quintales de azúcar de $ 0,42 el kilogramo y 12 quintales de $ 35 el quintal, para mezclar con azúcar de $ 0,45 el kilogramo. ¿Qué cantidad debe tomar de cada una para poder vender a $ 4 los 10 kg. de la mezcla?

439. — Se ha hecho un pedido de 910 toneladas de maíz de $ 4,90 el quintal y sólo hay en existencia maíz de $ 4,20, de $ 4,50, de $ 5,30 y de $ 6 el quintal. ¿Qué cantidad de toneladas se debe tomar de cada clase?

440. — Un molinero tiene harina de cuatro clases: de $ 21, de $ 27, de $ 30 y de $ 34 el hectolitro. Desea efectuar una mezcla de modo que entren 18 Hl. de la segunda clase. ¿Cuánto debe tomar de cada especie, para poder exportar la mezcla a $ 28 el hectolitro?

441. — Se tiene arroz de $ 6 y de $ 7,20 los 10 kilogramos y se pide una mezcla con la condición que entren de la primera clase 30 quintales más. Determinar la cantidad necesaria de cada especie para obtener un precio medio de $ 7 los 10 kilos.

442. — ¿En qué proporción deben ligarse oro de 0,900; de 0,950 y de 0,870 de fino, para obtener 30 kg. al título de 0,910?

443. — Se tiene una barra de oro de 1.400 gr. de 0,930 de título. Determinar la cantidad de cobre que debe agregarse para rebajar el título a 0,840, y el peso del nuevo lingote.

444. — Se desea fundir una barra de plata de 1.500 gr. al título de 0,830 con plata 0,920, de 0,860 y de 0,950 de fino, para obtener un lingote de 0,900 de ley. Determinar la cantidad en gramos que deben entrar de cada una.

445. — Un lingote de oro de 0,830 de título pesa 3.420 gramos. ¿Qué cantidad de cobre debe retirarse para elevar el título a 0,950?

446. — ¿En qué proporción deben fundirse oro puro, oro de 0,780, de 0,820 y de cobre para obtener un lingote de 3.000 gr. de 0,950 de título?

447. — Un lingote de oro de 0,780 de título pesa 2.500 gramos. ¿Qué cantidad de oro puro es necesario añadir para que resulte una barra de 0,850 de título?

448. — Un chacarero ha tenido un gasto de $ 1.190, en la mezcla de 900 fanegas de trigo de $ 12 la fanega, con 1.600 fanegas de $ 9,50 y 1.000 de $ 10,81. ¿A qué precio debe entregar la fanega de la mezcla para ganar un 5 %?

449. — Se desea obtener un lingote de oro de 0,940 de fino, fundiendo juntas cuatro barras; una de 0,880 de fino y otra de 0,950 con 500 gramos de 0,730 de fino y con 900 gramos de 0,800. ¿Qué cantidad de gramos debe tomarse de cada una?

450. — Vendió un estanciero 2.500 bolsas de lino por $ 35.100, el que fué proporcionado por lino, tipo Rosafé, de $ 13,90, de $ 14,15 y de $ 13,50 la bolsa. Habiendo obtenido una ganancia de $ 550, determinar el número de bolsas que ha tomado de cada clase para efectuar la mezcla.

Resolver los siguientes problemas sobre cambios y arbitrajes:

451. — He comprado una letra de $ 12.300 al cambio de 1 ¼ % de beneficio. ¿Cuánto me costó la letra?

452. — Se ha negociado una letra de $ 3.500 al cambio de 2 % de daño. ¿Cuál es su valor efectivo?

453. — Para efectuar el pago de una partida de vinos de Mendoza, un comerciante giró una letra a dicha plaza al cambio de ¾ % de daño desembolsando a tal efecto $ 7.940. Determinar el valor nominal de la letra.

454. — Con el fin de cobrar una deuda en Bahía Blanca, un capitalista de Córdoba, negocia una letra a cargo del deudor, por $ 16.800 al 1 ½ % de beneficio. ¿Cuánto recibió?

455. — Un negociante de Salta, tomó una letra sobre Buenos Aires, de $ 14.500 que le costó $ 14.681,25. ¿A qué cambio compró la letra?

456. — Hemos vendido por cuenta de un hacendado de Río Gallegos, una letra de $ 20.000 al cambio de 2 % de daño y con ½ % de comisión. ¿Cuánto costó la letra?

457. — Un negociante de San Luis, para satisfacer el importe de una partida de azúcar de Rosario de Santa Fe, tomó una letra sobre dicha plaza con el cambio de 2 % de beneficio, ½ % de corretaje y 1 ¼ % de comisión, desembolsando $ 7.018,50. ¿De cuánto era la letra?

458. — ¿Cuánto se pagará por una letra de 3.580 francos sobre París, estando el cambio a 22,78 francos el $ o/s.?

459. — Calcular en pesos moneda nacional, el valor de una letra sobre Londres de £ 750/8/5, al cambio de 46 ⅛.

460. — ¿Cuántos pesos moneda nacional se pagará por una letra de 5.800 liras, al cambio de $ 23,18 las 100 liras?

461. — Se han vendido a un comerciante de Nueva York mercaderías por valor de $ 25.000. ¿A cuántos dólares ascienden la operación, si en el día la cotización de Buenos Aires s/Nueva York, es de 299,85 $ m/n. los 100 dólares?

462. — Se ha negociado en Londres un efecto de 12.500 francos pagaderos en París dentro de 25 días. En el día de la negociación el cambio de Londres sobre París era de 120,75 francos a la vista y cobró un descuento bancario de 3 %. Determinar el importe total de la operación.

463. — Hay que girar a Madrid 30.000 pesetas. Averiguar si conviene hacerlo directamente o por las plazas intermedias de Londres y N. York, cotizándose en el día 100 pesetas a 13,86 dólares; 1 £ a 4,99 dólares; 10 pesetas a $ 4,17, y el $ o/s. a 36 $^4/_{11}$ peniques.

464. — Un comerciante de París, que ha invertido 100.000 francos en la compra de dólares que los hace vender en Génova, ordena se compren con las liras obtenidas, libras esterlinas, que él revende en París. Se sabe que el cambio entre París y N. York, está a 26,53 francos y entre Génova y N. York, a 6,20 liras por dólar; entre Génova y Londres a 26,35 liras por £ y París cotiza sobre Londres a 132,15 francos. ¿Qué resultado obtiene, teniendo en cuenta que se paga en Génova ½ ‰ de comisión por cada operación de venta o compra?

465. — Determinar la vía más ventajosa para girar 12.000 florines a Amsterdam, sabiendo que el cambio está:

Londres s/Amsterdam, a 7,26 florines por £.

Berlín s/Londres a 12,28 marcos por £.

Berlín s/Zurich a 81,30 marcos por 100 francos suizos.

Buenos Aires s/Zurich a 112,68 $ m/n. los 100 francos suizos.

La plaza de Londres cobra ¾ % de comisión; la de Berlín 3 ½ ‰; el 2 ¼ ‰ la de Suiza y ½ % la de Buenos Aires.

Errata

Pag 81 — Una razón invertida
82 id.
98 id

INDICE

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

CAPITULO VII

CAPITULO VIII

CAPITULO IX

CAPITULO X

IMPRESO EN LOS TALLERES DE LA CASA

ALGUNAS PUBLICACIONES DE LA CASA

ARCELLI M. — *Higiene de la Alimentación.*

ARRIOLA F. — *Historia Antigua, Oriente, Grecia y Roma.* Adaptada a los programas Nacionales, Normales y Comerciales, 1er. año. 1 tomo tela.

ARRIOLA F. — *Historia General, Edad Media, Moderna y Contemporánea.* De acuerdo a los programas de los Colegios Nacionales, Comerciales, y Escuelas Normales, 2º año 1 tomo tela.

ARRIOLA F. — *Historia Americana y Argentina.* De acuerdo al programa de 3er. año Nacional. 1 tomo tela.

ARRIOLA F. — *Historia Argentina y Americana.* De acuerdo al programa de 4º año Nacional. 1 tomo tela.

ARRIOLA F. — *Historia de la Civilización.*

ARRIOLA F. — *Historia Argentina,* para los grados elementales, 2 vol.

ARRIOLA F. — *Historia Americana.* Curso Elemental.

ARRIOLA F. — *Historia Universal.* Para los grados elementales.

BASTITA E. — *Elementos de Aritmética.*

BASTITA E. y DE MARTINI A. — *Contabilidad.* Adaptada a los programas oficiales de las Escuelas de Comercio. En varios tomos.

BENITEZ M. — *Higiene y Puericultura.*

BERESI J. J. — *Geografía, Asia y Africa.* De acuerdo a los programas de los Colegios Nacionales, Comerciales y Escuelas Normales. 1 tomo tela. 1er. año.

BLANCO J. M. — *Atlas de Anatomía Zoológica.* Para los estudios secundarios.

BURNETT F. F. — *Burnett's Grammar.* (5a edición). Los señores profesores y alumnos han hecho de esta gramática un texto imprescindible porque resuelve las dificultades de pronunciación y construcción gramatical por comparación con el idioma castellano. Es completa.

CASTEL C. — *Mon premier livre de Français.* Curso elemental para los principiantes.

CASTEL C. — *Mon second livre de Français.* Libro para curso primario.

CASTEL C. — *Conjugaison des verbes.* Un libro indispensable para el estudio de los verbos franceses.

CLARET E. — *Libro de Religión.* Tomo 1º

CLARET E. — ,, ,, ,, ,, 2º

CLARET E. — ,, ,, ,, ,, 3º

Un curso completo de catecismo adaptado para cada una de las edades de la juventud católica.

DEL LAGO A. — *Iniziazione Italiana.* Libro primero de acuerdo a los programas de 4º año Nacional. Libro segundo, para 5º año.

DESPEL J. — *Le Français à l' Ecole.* Méthode pratique de Français, cours préparatoire.

DREIDEMIE O. J. — *Antologia Castellana,* Colección de lecturas escolares para los alumnos de Bachillerato; anotadas y comentadas, 2 tomos.

Tomo 1º para 1º y 3er. año. Tomo 2.º para 4.º y 5.º año.

EHLUAL G. — *Manual de Psicologia.* 4º año Nacional.

EVANS A. — *My First Book.* Para las clases infantiles. (2 tomos).

FAYET L. — *Historia de la Literatura Castellana.* Redactada de acuerdo con el programa vigente de 5º año Nacional.

GABRIAC P. — *Novisima Geografia Atlas.* Curso elemental para 3º y 4º grado. Una obra de gran relieve. Aprobada por el Consejo de Educación de la Provincia de Buenos Aires.

GABRIAC P. — *Novísima Geografía Atlas.* Curso medio para 4º, 5º y 6º grado. Un libro inmejorable. Aprobada por el Consejo de Educación de la Provincia de Buenos Aires.

GALARZA F. J. — *Geología* (Esquemas de). Texto de acuerdo a los programas de los Colegios Nacionales, Liceo de Señoritas, Escuelas Normales e iniciación de la Facultad de Ciencias

GALARZA F. J. — *La Estructura de la Materia.*

H. E. C. — *Historia Religiosa.* Libro 1º para 1º y 2º grado.

H. E. C. — *Historia Religiosa.* Libro 2º para 3º y 4º grado.

H. E. C. — *Historia Religiosa.* Libro 3º para 5º y 6º grado.

H. E. C. — *Explanación de la Doctrina Cristiana,* según Hillaire, para 5º y 6º grado; 1º, 2º y 3er. año.

H. E. C. — *Lecciones de Lengua Castellana.* Curso elemental y curso medio, 2 tomos, para la Enseñanza Primaria.

H. E. C. — *Lecciones de Lengua Castellana.* Curso superior para Colegios Nacionales y Escuelas Normales.

H. E. C. — *Contabilidad.* (Nueva edición).

H. E. C — *La Tierra.* (Edición 28ª, completamente reformada).

LARA DOS SANTOS — *Botánica.* (Para ingreso).

LARA DOS SANTOS — *Botánica.* Estudios secundarios.

LAVELLI A. V. — *Giovinezza.* Libro de lectura para 4º y 5º año, de Italiano de los Colegios Nacionales.

LORDAC P. — *Nociones de Geometría.* Para los grados elementales.

MAZZANTI J. — *Muchachito.* — Texto de lectura para 1er. grado inferior.

MAZZANTI J. — *Alegría.* Texto de lectura para 2º grado.

MAZZANTI J. y FLORES I. MARIO. — *Cien Lecturas.* Libro de lectura para 5º y 6º grado, de las Escuelas Primarias de la Capital y Provincia de Buenos Aires.

MENDOZA REY M. I. — *Pedagogía Didáctica.*

MILTON J. — *Lucecitas.* Libro de lectura para 1er. grado inferior.

MOLINELLI WELLS J. — *My English Book.* Curso de inglés en tres libros para los Colegios Nacionales, Escuelas Normales y de Comercio.

MORAN V. — *Instrucción Moral y Cívica,* dispuesto para los grados 3º, 4º 5º y 6º. de las Escuelas Primarias Nacionales y Escuelas primarias de la Provincia de Buenos Aires, 1 tomo encuadernado. Aprobado por el Consejo de Educación de la Provincia de Buenos Aires.

NAVARRO SANTA ANA y ANGUITA. — *Aritmética.*

PERAY E. — *Nuevo Devocionario de la Juventud.* Compuesto para uso especial de las Escuelas y Colegios Católicos.

PIAZZA L. — *Química Inorgánica.* Adaptada a los programas vigentes de Colegios Nacionales y Escuelas Normales, y con breves capítulos de industrias argentinas, de gran utilidad para estudiantes de Escuelas de Comercio.

PIAZZA L. — *Química Orgánica,* Id., id.

VALDASPE T. — *Historia de la Literatura Castellana.*

VALDASPE T. — *Tratado de Lógica.*

VIDAL J. — *Botánica.* Obra de gran alcance, con láminas en colores, para 2º y 3er. año de los Colegios y Liceos Nacionales y Escuelas Normales.

VINARDELL A. — *Historia Argentina.* Para la Escuela Primaria. Aprobada por el Consejo de Educación de la Provincia de Buenos Aires.

WALTER B. — *Gramática Inglesa.* Un libro indispensable para los alumnos de 2º, 3º y 4º año Nacional.

FLUCTUAT NEC MERGITUR
LIBRERIA
JOSE MOLY