

CLARO C. DASSEN

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA ELEMENTALES

VOLUMEN II: ARITMÉTICA

E INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

Editorial ESTRADA

Aritmética y Álgebra

ELEMENTALES

POR

C. C. DASSEN

Ingeniero Civil,
Doctor en Ciencias Físico - Matemáticas,
Profesor Honorario de la Universidad de Buenos Aires,
Académico de Número, etc.

Texto para los Colegios Nacionales
y Escuelas Normales

PRIMERA EDICIÓN

VOL. II, ARITMÉTICA
E INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA



BUENOS AIRES
ANGEL ESTRADA Y Cía. — EDITORES

466 — BOLIVAR — 466

1938

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

*Régimen Legal de la Propie-
dad Intelectual. Ley 11.723.*

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA
ELEMENTALES

VOL. II, ARITMÉTICA
E INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

P R E F A C I O

En el Prefacio que la Casa Editora ha puesto al frente del Volumen I, han sido expuestos los antecedentes y las modalidades de estos libros de Aritmética y Álgebra. Poco cabe agregar aquí ya que el presente Volumen II se ajusta estrictamente a los mismos criterios, sobre todo, en lo relativo a principios fundamentales y definiciones: para una enseñanza secundaria son, desde luego, las nociones empíricas de unidad y de su partición cuando ello es posible, que deben servir de base a todo el edificio, evitando palabras huecas y la intervención de entidades metafísicas.

En este concepto se han definido, por ejemplo, las llamadas "cantidades irracionales". Podrán verse mayores consideraciones sobre el particular, encaradas dentro de un terreno más vasto, en el libro del autor, titulado La Logique Empiriste, que le han merecido la aprobación muy honrosa del ilustre filósofo Leon Brunschwig.

Los dos últimos capítulos de este volumen tratan la Introducción al Álgebra, y distinguen bien esta ciencia del cálculo literal, lo que no se hace generalmente y es sin embargo importante señalar.

Terminaré estas breves consideraciones observando que, en el presente volumen más que en el primero, se encuentran cuestiones abstrusas para los alumnos, que no conviene abordar o sólo hacerlo después de poseer la práctica de las mismas y es, si queda tiempo y si la capacidad de los educandos lo permite. Citaré, por ejemplo, el cálculo de los errores, las teorías de las raíces cuadrada y cúbica y otros temas impresos con caracteres menores. Hay también cuestiones, como las relativas a las monedas que, hoy más que nunca, están sujetas a continuas mudanzas, circunstancias, que será menester tomar en cuenta o realizar.

Por lo demás, los numerosos ejercicios que acompañan el texto, fáciles unos, difíciles otros, todos con sus soluciones, permitirán a los señores profesores una buena práctica electiva de los temas.

C. C. D.

Enero 1938.

CAPÍTULO I

CANTIDADES Y NÚMEROS FRACCIONARIOS DECIMALES

1. Manera de representarlos. Convenciones. Notaciones. — Un número fraccionario cuyo denominador es 10 ó una potencia de 10, se llama *decimal*, y entonces suele representársele de una manera especial; así, el número fraccionario $\frac{2}{10}$, se escribe 0,2 ó .2; el nú-

mero $\frac{17}{100}$ se escribe 0,17 ó .17; de igual manera se tienen las siguientes igualdades convencionales:

$$\frac{103}{10} = 10,3 = 10.3; \quad \frac{457}{100000} = 0,00457 = .00457.$$

La convención anterior puede enunciarse de la manera siguiente:

Para escribir en forma entera un número fraccionario decimal, se escribe, primero, el numerador; luego se cuentan, a partir de la cifra de la derecha, tantas cifras cuantos ceros tiene el denominador, agregando, si es necesario, ceros a la izquierda del numerador, y se pone en seguida una coma (o una seña que, a veces, es un punto a la izquierda de la última cifra así contada, siempre que no traiga confusión). Cuando se pone una coma se escribe un cero delante de dicha última cifra, siempre que no hubiese ya una cifra escrita. Viceversa, para dar la forma ordinaria a un número escrito en la forma recién indicada, se suprime la coma (o la seña), y se divide el número resultante por la potencia de 10 cuyo exponente tiene tantas unidades como cifras hay a la derecha de la seña suprimida. Así, en vez de 0,3476 y de 43,76 se escribirá

$$\frac{3476}{10^4} = \frac{3476}{10000}; \quad 43,76 = \frac{4376}{100}; \text{ etc.}$$

2. Para enunciar verbalmente un número de esta clase, se tienen en cuenta las siguientes observaciones: si sólo existe una cifra

a la derecha de la coma, ello significa que el denominador es 10, de modo que, al quitar la coma, el número que representan las cifras, es el numerador; y como el denominador es diez, ese número representa *décimos*. De igual manera, si existen dos cifras a la derecha de la coma, el número que representan todas las cifras al quitar la coma, es el de centésimos del número fraccionario dado; y así sucesivamente tendríamos *milésimos*, *diez milésimos*, *cien milésimos*, *millonésimos*, *diez millonésimos*, *cien millonésimos*, etc. Por consiguiente, para leer un número decimal escrito bajo forma entera, se lee el número como si no existiera la coma y se agrega una de las palabras anteriores: *décimos*, *centésimos*, ..., a saber, la que corresponde a la última cifra, contando a partir de la coma hacia la derecha. Así, el número fraccionario decimal 3,56789 se leerá: *trescientos cincuenta y seis mil setecientos ochenta y nueve cien milésimos*; 0.0003 se leerá: *tres diez milésimos*.

Consideremos el número fraccionario decimal: $\frac{3476}{100}$.

Tenemos que

$$\frac{3476}{100} = 34 + \frac{7}{10} + \frac{6}{100},$$

pues

$$\frac{7}{10} = \frac{70}{100}, \quad 34 = \frac{3400}{100},$$

de modo que, efectivamente,

$$34 + \frac{7}{10} + \frac{6}{100} = \frac{3400}{100} + \frac{70}{100} + \frac{6}{100} = \frac{3400 + 70 + 6}{100} = \frac{3476}{100}.$$

Se deduce que también puede leerse un número fraccionario de la siguiente manera:

Se lee, primero, el número a la izquierda de la coma y se agrega la palabra *enteros*; luego se lee el número a la derecha de la coma y se agrega la palabra que corresponde al rango de la última cifra de la derecha. O también: se lee cada cifra a la derecha de la coma, una después de otra, empezando por la inmediata a la coma, agregando sucesivamente las palabras *décimos*, *centésimos*, etcétera.

Así, la fracción decimal anterior 34,76 se leerá 34 enteros y 76 centésimos o 34 enteros, 7 décimos y 6 centésimos.

3. Reflexionando sobre la regla dada para representar un número fraccionario decimal bajo forma entera, se deduce que, en resumen, consiste en la aplicación del sistema de numeración decimal al caso de representar los números cuando se tiene en cuenta la posibilidad de fraccionar la unidad que sirve de base, considerando la como un conjunto de diez unidades idénticas llamadas *décimos*; estas últimas como el de otras diez llamadas *centésimos*, etcétera.

4. Ahora bien, si al conjunto de diez unidades fundamentales se le llama una *decena*, y al de diez de éstas una *centena*, etc., y si, para representar un número, se conviene en escribir al lado, unas de las otras, las cifras que representan, respectivamente, el número de unidades, de decenas, de centenas, etc., escribiendo de izquierda a derecha de tal manera que la cifra de la derecha sea la de las unidades, conviniendo además que una cifra escrita a la izquierda de otra expresa unidades diez veces mayores, es racional que, para representar los décimos — que son unidades diez veces menores que las unidades fundamentales, — se escriba el número de dichos décimos a la derecha del relativo a las unidades que sirven de base, y luego a la derecha de la cifra de los décimos la de los centésimos, etc. Pero ahora, para poder distinguir cuál de las cifras expresa las unidades que sirven de base, es preciso agregar una indicación (la coma o el punto), cosa que antes no era necesario, pues sabíamos que esta cifra era la de la derecha.

Así como no se altera a un número entero agregándole ceros a su izquierda, no se altera tampoco un número fraccionario decimal escrito en forma entera, agregando ceros a su derecha; pues quedando la coma en su lugar, cada cifra conserva, sin alterar, su valor absoluto y relativo. Así:

$$43,57 = 43,570 = 043,57000.$$

5. Se puede también observar que

Si en un número fraccionario decimal se traslada la coma, uno o más lugares hacia la derecha o la izquierda, dicho número queda multiplicado o dividido por una potencia de 10 cuyo exponente es el entero que indica de cuántos lugares se ha corrido la coma; por lo tanto, si se suprime la coma, el número queda multiplicado

por 10 elevado a la potencia indicada por el número de cifras decimales que existían.

EJERCICIOS

Escribir en cifras los números fraccionarios decimales siguientes:

1. Dos mil treinta y cinco millonésimos; tres millones veintiocho mil nueve unidades, ochenta y siete millonésimos; veintitrés millones, cuatrocientos mil nueve billonésimos.

2. Leer los siguientes números fraccionarios decimales:

0,000107; 43007500,0127015; 1000001,1000001;

3. Escribir en forma de números fraccionarios ordinarios los números fraccionarios decimales:

6,574; 0,050; 0,0005; 101,00009; 430000,101.

4. Multiplicar y dividir por 1000 los números:

40.005; 3.1; 1224.31; 0.00345; 959.413267.

5. ¿Qué peso de pan se necesita para alimentar 10000 soldados durante 100 días, si cada soldado consume 0,730 unidades de peso por día?

6. Un empresario necesita 1500 pesos para pagar el trabajo de 25 obreros, que ganan 4 pesos diarios cada uno, ¿cuántos días han trabajado dichos obreros?

7. Una barra de hierro de 1 unidad de largo se alarga 0,0000126 de la unidad cuando la temperatura aumenta de 1 grado, ¿cuál será, a 100 grados, la longitud de una barra de hierro que, a 0 grado, tiene una longitud de 10 unidades?

8. Expresar cada uno de los siguientes números fraccionarios decimales como suma de números fraccionarios de forma ordinaria cuyos denominadores sean 10, 100, 1000, etc.:

4,6; 157,9; 0,5; 6,0052; 0,1579; 2,006; 1,1003; 0,003467; 3,0075; 3,006.

9. Expresar, en forma de números fraccionarios decimales, los siguientes:

$$\frac{6}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{1}{10000}; \frac{6}{1000000}; \frac{9}{10} + \frac{9}{100000}.$$

6. Cálculos. — Las observaciones anteriores demuestran que los cálculos con cantidades y números fraccionarios decimales son exactamente iguales a los que ese efectúan con los números y cantidades enteras, sólo que, al terminar la operación y obtenido el resultado, es necesario saber dónde debe ponerse la coma o el punto que indica la cifra relativa de las unidades enteras.

7. Adición y substracción. — No requiere explicaciones la siguiente:

Regla práctica. — *Para adicionar varios números fraccionarios decimales, se escriben ellos, los unos debajo de los otros, cuidando de que las comas se hallen en una misma columna; se efectúa luego*

la adición como si se tratara de números enteros; obtenida la suma, se coloca la coma debajo de las de los sumandos.

Análoga regla para la substracción.

Ejemplos.—Sea adicionar 0,0987 con 121, con 38,74 y con 2,936; y sea restar 0,7982 de 28,53. Dispondremos las operaciones de la manera siguiente:

Adición	Substracción
0,0987	
121,	
38,74	28,53
2,936	0,7982
suma: 162,7747	resta: 27,7318

EJERCICIOS

Efectuar las adiciones siguientes:

10. $38,08 + 237,007 + 89 + 3,3 + 420,906 + 27,5401$.

11. $504,16 + 403,81 + 66,17 + 48,91 + 43,01 + 36,19 + 0,75$.

12. $0,679 + 0,1234 + 1,79 + 0,9004 + 9,558 + 0,113 + 6,67 + 80,1662$.

13. $.05 + .0051 + .0001 + 365.00009 + .000001$; $2.0002 + 2.002 + 1.001 + .02$.

14. Tres cajas pesan: la primera 39,50 unidades, la segunda 12,75 más que la primera, y la tercera 0,5 más que las dos primeras juntas, ¿cuál es el peso de cada una de estas dos últimas, y cuál el total?

15. Un mercader ha vendido 17,25 unidades de longitud de género por 103,50 pesos, luego 9,75 unidades por 97,50 pesos, y por último 26 unidades por 296,25 pesos. ¿Cuántas unidades de género ha vendido en total y qué suma ha obtenido de la venta?

Efectuar las substracciones siguientes:

16. $154,29 - 107,81$; $340,201 - 60,07$; $4130,401 - 201,72$.

17. $0,00999 - 0,00989$; $1 - 0,98765$; $70 - 50,810525$.

18. $0,01 - 0,0025$; $462 - 3,001004$.

19. Una persona hace una compra por valor de 107,83 pesos y paga con dos billetes de 100 pesos, ¿qué vuelto debe entregársele?

20. Una persona adeuda 1035,75 pesos y paga 634,35, ¿cuánto debe aún?

21. Una persona tiene 70 pesos y compra diversos objetos cuyos precios son respectivamente, 8 pesos, 13,50 pesos, 24,75 pesos y 4,25 pesos, ¿cuánto le queda?

22. Un negociante tiene en caja 1675,50 pesos, compra mercaderías por valor de 420,75 pesos y las paga, luego abona una factura de 595 pesos, recibe después, de dos clientes, primero, la suma de 375,25 pesos y luego 209,30 pesos, ¿qué suma le queda en caja?

23. A pesa 67,5 unidades de peso; B pesa 0,851 unidades más que A; C 1,025 más que B; D 5,75 más que A, ¿cuál es el peso total de A, B, C, y D?

24. La distancia entre A y B es 25,384 unidades; la distancia de C a A es 12,625 unidades y la de D a B son 17,249 unidades, ¿qué distancia media entre C y D si ambos están situados entre A y B?

25. 3.576 unidades de peso de té se colocan en paquetes respectivamente de 1.205, 0.968 y 1.128 unidades, ¿cuánto queda sin empaquetar?

8. Multiplicación. — *Si uno de los factores es entero, se efectúa la multiplicación como si se tratara de números enteros, y el producto expresa unidades de mismo orden que el de la última cifra del factor decimal, de suerte que la coma se colocará separando tantas cifras a la derecha como tenga el factor decimal.*

Esta regla no necesita demostración después de lo observado en el n.º 6.

Veamos el caso en que ambos factores son números fraccionarios decimales. Supongamos que uno tiene m cifras decimales, es decir m cifras a la derecha de la coma, y el otro n cifras decimales; si se les diera la forma general de los números fraccionarios, el denominador del primero sería 10^m , y el del otro 10^n , de modo que al multiplicar los denominadores según la regla del n.º 262 (página 140, vol. I), el producto tendría por denominador $10^m \times 10^n$, es decir 10^{m+n} o sea 1 seguido de $m+n$ ceros; luego, al escribir el número fraccionario en la forma especial usada para los números fraccionarios decimales, se tendrá que poner la coma delante de la cifra que ocupa el lugar $m+n$ a partir de la derecha; de aquí se desprende la siguiente:

Regla. — *Para multiplicar dos factores fraccionarios decimales, se hace la operación como si fueran enteros y, para poner la coma, se cuentan tantas cifras, a partir de la derecha, como cifras decimales tienen ambos factores juntos.*

Ejemplos. — Sea multiplicar 24,349 por 48 (o 48 por 24,349); 12,35 por 2,70 y 0,034 por 0,008.

Dispondremos las operaciones así:

24,349	12,35	0,034
48	2,70	0,008
194792	8645	0,000272
97396	2470	
1168,752	33,345	

Como es fácil comprenderlo, la propiedad conmutativa de la multiplicación permite aplicar, para verificar el resultado, la prueba general.

También puede usarse la prueba por nueve, pues la teoría de esta prueba puede aplicarse al caso de multiplicación de números fraccionarios decimales escritos en la forma entera.

EJERCICIOS

Efectuar las multiplicaciones siguientes y aplicar la prueba por 9:

26. 0.004143×310 ; 9.832×175 ; 0.55066×4500 .

27. 100.057×810.000 ; 0.00007201×9541 ; 0.0005089×0.00452 .

28. .00000256 por 17 y por 5.1; 5.756 por 7, por 6.3 y por .504.

29. .00167 por 6.541, por 654.1 y por .00006541; 150.3205 por .087218.

30. Se compra un tonel de vino de 228 unidades de capacidad a razón de 1.05 pesos la unidad, ¿qué suma debe abonarse?

31. Un obrero gana 0.60 pesos por hora de trabajo, ¿cuánto gana por semana, sabiendo que trabaja 6 días y 9 horas diarias?

32. Se llena un tonel de 225 unidades de capacidad con 132 unidades de vino comprando a 0.55 peso la unidad, y el resto con vino comprado a 0.60 pesos la unidad, ¿qué beneficio se realizará vendiendo el tonel a 145 pesos?

33. Un negociante compra 80 docenas de platos a 5.25 pesos la docena; en el transporte se rompen 9 platos, si el negociante vende los otros a razón de 0.65 la pieza, ¿qué beneficio realizará?

34. Una barra de hierro se alarga de 0.0000126 veces su longitud para un aumento de temperatura de 1 grado, y para 30 grados 30 veces más, ¿cuál será la longitud de una barra a 30 grados sabiendo que a 0 grado su longitud es 3.835 unidades.

Simplificar las siguientes expresiones:

35. $.1 \times .1 \times .1 \times .1 \times .1 \times .1$; $.5 \times .5 \times 1.5 \times 5.5 \times .05$.

36. $.1 \times 10.2 \times .3 \times .5 \times .2$; $.834 \times .12 \times 8.012 \times 50.0001$.

37. Una milla equivale a 1.6093 kilómetros, expresar en kilómetros el valor de 5.2625 millas.

38. La renta producida por una casa es de 80 pesos en el primer piso; la del segundo piso es .725 la del primero, la del tercer piso es .725 la del segundo, y la del piso bajo es 1.04 la del tercer piso. Hallar la renta de cada piso.

9. División.—El cociente de dos números fraccionarios decimales no es, en general, otro número decimal. Así:

$$\frac{3}{10} : \frac{4}{100} = \frac{300}{40} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2};$$

pero puede serlo; por ejemplo:

$$\frac{51}{100} : \frac{3}{10} = \frac{510}{300} = \frac{17}{10};$$

luego

$$0,51 : 0,3 = 1,7.$$

Esto sucederá, como puede sin dificultad comprobarse, cuando el numerador del dividendo sea un múltiplo del divisor; en este caso, la regla para multiplicar dos factores fraccionarios decimales permitirá deducir la relativa a la división. Si el dividendo tiene p decimales y el divisor n , el cociente debe tener $p - n$ decimales, a fin de que el producto de este último por el divisor tenga p decimales como lo exige la regla relativa a la multiplicación. Por consiguiente:

10. *Para dividir dos números fraccionarios decimales escritos en la forma especial, se efectúa la división prescindiendo de las comas, como si se tratara de dividir números enteros, la división debe ser exacta para que el cociente sea también un número fraccionario decimal, y obtenido dicho cociente, se pondrá la coma delante de la cifra que ocupa el lugar $p - n$, a contar de la derecha, siendo p y n los números de cifras decimales que tienen respectivamente el dividendo y el divisor.*

La regla anterior comprende el caso particular de que el dividendo o el divisor sean números enteros, pero si el dividendo es entero, se le agregará, en forma de cifras decimales, tantos ceros a su derecha como cifras decimales tenga el divisor, a fin de que la substracción $p - n$ sea posible; en este caso $p - n$ será igual a cero, lo que prueba que el cociente debe ser entero.

Ejemplos. — Efectuar las divisiones siguientes:

$$1710,31 : 53 \quad ; \quad 945 : 3,5 \quad ; \quad 191,25 : 0,09$$

tendremos:

1710,31 53	945,0 3,5	191,25 0,09
120 32,27	245 270	11 2125
143	0	22
371		45
0		0

EJERCICIOS

Efectuar las divisiones siguientes :

39. $8385,536 : 256$; $117,990 : 2700$; $26616,384 : 246,448$.

40. $7451,325 : 256,5$; $5441928 : 8632,5$; $.00750116 : 1354$.

41. .01001 dividido por 5, 25, 125 y 625 ; 8,56406 dividido por 22537 y por 112685.

42. 3,6288 dividido por 3, 63, 126, 189.

43. 932,463 dividido por 287, 861, 574.

44. .0011355 : .003, 12.5 : .000025, 2560,0160001 : 1,59601.

45. Dividir $0,003125 \times 0.48$ por 0,000125 ; 0,16016 por 1.43, 14.3, 143, 0,0000143.

46. ¿Cuál debe ser el peso de 1,25 unidades de longitud de paño, si 100 unidades pesan 20 unidades de peso ?

47. Para subir hasta la cúspide de una torre de 48,75 unidades de altura se necesita salvar 325 escalones, ¿cuál es la altura de cada escalón ?

48. Un ciclista hace 20,70 unidades de recorrido por hora, sabiendo que anda 8 horas por día, ¿cuántos días empleará para recorrer 828 unidades ?

49. El diámetro de una pieza de moneda es 0,025 unidades de longitud, ¿cuántas monedas será necesario poner en línea recta a continuación unas de otras para obtener 15,75 unidades de longitud ?

50. ¿En cuántos bultos cada uno de 2,35 unidades de peso puede dividirse una masa de 338,40 unidades ?

51. En un vagón hay un cierto número de bultos que pesan cada uno 5,325 unidades ; existe un número 7 veces mayor de bultos pesando cada uno 10,34 unidades ; 12 veces más pesando 15,175 unidades y 25 veces más pesando 17,365 unidades. Si el peso total es 10408,95 unidades, ¿cuántos bultos existe ?

52. ¿En cuántas longitudes de 0,1535 unidades puede descomponerse una de 5,68 unidades ? ¿cuál es la longitud restante ?

53. El producto de dos números es 0,15252. Si se aumenta uno de ellos en 0,02 el producto resulta ser 0,1525446. Hallar los números.

11. Potenciación. — De la regla dada para la multiplicación resulta que :

Para elevar a una cierta potencia un número fraccionario decimal escrito en la forma especial, se efectúa la potenciación como si no existiera la coma y se tratara de números enteros ; obtenida la potencia se separa con la coma tantas cifras a la derecha cuantas indica el producto del número de cifras decimales de la base multiplicado por el exponente de la potencia.

Ejemplo. — $(0,03)^3 = 0,000027$; se ha separado 2 (número de cifras decimales de la base) $\times$ 3 (exponente de la potencia) = 6 cifras.

12. NOTA. — Cuando, en una operación, existen números fraccionarios cualesquiera y otros decimales escritos con su notación especial, se da a éstos la forma general. Así, $\frac{2}{3} + 3,52 + \frac{7}{5} = \frac{2}{3} + \frac{352}{100} + \frac{7}{5}$.

EJERCICIOS

54. Elevar al cuadrado los números siguientes:

0,04; 0,0072; 2,4; 0,01; 45,5; 0,99; 9,9; 7,005.

55. Elevar al cubo los números siguientes:

3,2; 0,5; 0,07; 0,001; 10,5.

CAPÍTULO II

CONVERSIÓN DE UN NÚMERO FRACCIONARIO CUALQUIERA EN OTRO DECIMAL Y CONSECUENCIAS

13. Naturaleza del problema. — El problema de que tratamos en este capítulo consiste en lo siguiente:

Dado un número fraccionario no decimal, hallar el mayor número análogo decimal, con un número, de cifras decimales fijado, que no sea mayor que el dado.

Sea $\frac{a}{b}$ el número fraccionario dado (a y b representan, por ahora, números enteros); busquemos cuál es el mayor número fraccionario decimal de n cifras decimales, menor que $\frac{a}{b}$; escribiendo el

número buscado en la forma general, podrá representarse así: $\frac{c}{10^n}$ y se verificarán las desigualdades:

$$\frac{c}{10^n} \leq \frac{a}{b} < \frac{c+1}{10^n}, \quad \text{o también} \quad c \leq \frac{a}{b} \times 10^n < c+1.$$

Estas desigualdades hacen ver, claramente, que c es la parte entera del número fraccionario $\frac{a \times 10^n}{b}$, o, si se quiere, el cociente de la división natural de $a \times 10^n$ por b , tal cual se interpretó en el n.º 136 (Vol. 1, pág. 69). Luego:

14. Para hallar el mayor número fraccionario decimal de n cifras decimales, inferior o igual a otro número fraccionario no decimal dado, se multiplica éste por 10^n ; se busca la parte entera de la división de ese producto, por el denominador y se señala en esta parte entera n cifras decimales.

15. Valor decimal aproximado de un número fraccionario no decimal. — Si consideramos la serie de números fraccionarios siguientes,

cada uno de los cuales se forma agregando $\frac{1}{10^n}$ al que le precede:

$$0, \frac{1}{10^n}, \frac{2}{10^n}, \frac{3}{10^n}, \dots, \frac{c}{10^n}, \frac{c+1}{10^n}, \dots$$

se nota que: o bien el número fraccionario $\frac{a}{b}$ es igual a uno de

ellos, o está comprendido entre dos consecutivos $\frac{c}{10^n}$ y $\frac{c+1}{10^n}$; en el

primer caso, $\frac{a}{b}$ se diferenciará de cualquier número fraccionario

decimal que no sea $\frac{c}{10^n}$, por lo menos en $\frac{1}{10^n}$; en el otro caso, es

decir, si $\frac{a}{b}$ no es igual a un número fraccionario decimal de n

cifras decimales, las diferencias entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{10^n}$ y entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c+1}{10^n}$

serán menores que $\frac{1}{10^n}$, y relativamente a los demás números deci-

males, tales diferencias serán mayores que $\frac{1}{10^n}$; en este caso, entre

los números fraccionarios decimales de n cifras inferiores a $\frac{a}{b}$, es

$\frac{c}{10^n}$ el que más se acerca a él; ese número $\frac{c}{10^n}$ se dice ser el **valor**

aproximado por defecto de $\frac{a}{b}$ en menos de $\frac{1}{10^n}$, o simplemente el

valor aproximado de $\frac{a}{b}$ con n cifras decimales; el número $\frac{c+1}{10^n}$

se dice ser el **valor aproximado** de $\frac{a}{b}$ **por exceso** en menos de $\frac{1}{10^n}$.

Si $a \times 10^n$ es un múltiplo de b , es decir si la división de $a \times 10^n$ por b es exacta, el número fraccionario no decimal $\frac{a}{b}$ habrá quedado transformado exactamente en otro decimal; en caso contrario, la división admitirá un resto r y se tendrá:

$$a \times 10^n = c \times b + r,$$

o también

$$\frac{a \times 10^n}{10^n \times b} = \frac{c \times b}{10^n \times b} + \frac{r}{10^n \times b},$$

o también

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{10^n} + \frac{r}{10^n \times b} \quad \therefore \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{10^n} = \frac{r}{10^n \times b};$$

lo que nos hace conocer el valor de la diferencia entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{10^n}$.

16. Por ejemplo, consideremos el número fraccionario no decimal $\frac{26}{7}$ y supongamos que se quiera hallar su *valor aproximado*

por defecto en menos de $\frac{1}{10^5}$, es decir de 0,00001. Efectuaremos

la división natural de 26×10^5 , o sea 2600000, por 7; y siendo el cociente 371428, separaremos 5 cifras decimales (a fin de dividirlo por 10^5) y obtendremos 3,71428, y como se tiene que

$$2600000 = 371428 \times 7 + 4$$

resulta

$$\frac{26}{7} = 3,71428 + 0,00001 \times \frac{4}{7};$$

lo que demuestra que la diferencia $\frac{26}{7} - 3,71428$ es $\frac{4}{7}$ de cien milésimos.

17. La operación efectuada pone de relieve la notable propiedad siguiente: si se quieren obtener, sucesivamente, los valores

aproximados de $\frac{26}{7}$ por defecto en menos de $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$

cada operación puede aprovecharse para efectuar la siguiente. En efecto, primeramente debe efectuarse la división natural de 26 por 7, el cociente es 3 y el resto 5; luego, para obtener el valor apro-

ximado por defecto en menos de $\frac{1}{10}$, es menester efectuar la divi-

sión natural de 260 por 7, pero como ya se calculó la primera cifra de ese cociente, que resulta ser 3, y se obtuvo el resto 5, basta agregar un cero a la derecha de dicho resto y dividir 50 por 7 para obtener la segunda cifra del cociente, que resulta ser 7, y se

obtiene el resto 1; luego el valor aproximado por defecto de $\frac{26}{7}$

en menos de 0,01 es 3,7. Para obtener, ahora, el valor aproximado

en menos de 0,001 se deberá dividir 2600 por 7, y como ya tenemos las dos primeras cifras del cociente y el resto 1, relativo a ellas, bastará dividir 10 por 7 y se tendrá la tercera cifra, 1, del cociente y el resto 3, resultando 3,71; y así sucesivamente. Se dispone la operación como se indica a la izquierda. Las consideraciones anteriores justifican la regla práctica y observaciones que siguen:

$$\begin{array}{r}
 26 \quad | \quad 7 \\
 50 \quad 3,71428 \\
 10 \\
 30 \\
 20 \\
 60 \\
 4
 \end{array}$$

18. **Regla práctica.** — *Para obtener el valor aproximado de un número fraccionario no decimal, con n cifras decimales, se efectúa la división natural del numerador por el denominador, el cociente expresa la parte entera del número fraccionario decimal buscado, es decir, su valor aproximado en menos de una unidad; se pone la coma a continuación del cociente hallado, se escribe un cero a la derecha del resto y se divide el número así formado por el denominador, obteniéndose la primera cifra decimal y otro resto; se continúa análogamente escribiendo cada vez un cero a la derecha del resto hasta tener el número de cifras decimales que se desea; el número fraccionario decimal escrito a título de cociente, viene a ser el valor aproximado buscado, y su diferencia con el número frac-*

cionario no decimal dado es igual al producto de una unidad decimal del orden de la última cifra del cociente, por un número fraccionario no decimal, menor que el número uno, cuyo numerador es el último resto de la división y cuyo denominador es el del número fraccionario dado.

19. Cuando se tiene el valor aproximado por defecto con n cifras decimales, basta enunciar una, dos, tres, ... cifras decimales para tener el valor aproximado del número fraccionario dado en menos de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ...; *forzando*, es decir aumentando de 1

la última cifra decimal de la derecha, se obtienen los valores aproximados por exceso en menos de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ...

20. Teniendo el valor aproximado de un número fraccionario $\frac{a}{b}$ con n cifras decimales, se obtiene evidentemente el valor apro-

ximado del producto de dicho número multiplicado por 10, 100, 1000, ..., con $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... cifras decimales, adelantando simplemente la coma de uno, dos, tres, ... lugares hacia la derecha; e inversamente. Por ejemplo, si se buscan los valores aproximados sucesivos de $\frac{31}{7}$ y de $\frac{3100}{7}$, se halla exactamente las mis-

mas cifras en el cociente, y los mismos restos parciales en igual orden, sólo que en el segundo caso la parte entera se compone de dos cifras más que la relativa al primero.

EJERCICIOS

Hallar el cociente aproximado de:

56. 2893232 : 4285 por defecto en menos de 0,01.

57. 279512 : 129 por exceso en menos de 0,1.

58. 2893232 : 4285 por defecto en menos de 0,001.

59. 67618 : 422 por defecto en menos de 0,001.

60. 96177 : 1485 por defecto en menos de 0,001.

61. 51900 : 1400 por defecto en menos de 0,001.

Hallar el cociente aproximado en menos de $\frac{1}{10^6}$ de los siguientes números fraccionarios:

$$62. \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{3}{11}.$$

$$63. \quad \frac{15}{22}, \frac{7}{26}, \frac{13}{42}, \frac{11}{12}, \frac{11}{13}.$$

$$64. \quad 8\frac{9}{14}, 24\frac{6}{17}, 2\frac{1}{27}, 3\frac{4}{45}, 3\frac{37}{96}.$$

21. Números fraccionarios no decimales, reducibles y no reducibles a otros decimales. — La operación tratada anteriormente se llama, aunque impropriamente en general, **conversión de un número fraccionario no decimal en otro decimal**. Sólo es correcta esa denominación en el siguiente caso:

22. Supongamos que el número fraccionario no decimal $\frac{a}{b}$ resulte ser igual a uno decimal con n cifras decimales; calculando los valores aproximados de $\frac{a}{b}$ por defecto en menos de $\frac{1}{10^n}$, se obtendrá necesariamente el número fraccionario decimal a que es igual $\frac{a}{b}$ y se conocerá este hecho en la circunstancia de ser nulo el resto de la división parcial que corresponde a la enésima cifra decimal; si se quisiera continuar la operación todas las demás cifras del cociente serían ceros; en cambio, si $\frac{a}{b}$ no es igual a ningún número fraccionario decimal, la operación podrá continuarse indefinidamente sin obtener jamás un resto nulo.

23. Es conveniente saber reconocer de antemano si el número fraccionario no decimal $\frac{a}{b}$ es o no igual a otro decimal; a ese efecto, simplifiquémoslo, si hay lugar a ello, de manera que sus términos sean primos entre sí. Si $\frac{a}{b}$ es igual a un número fraccionario decimal

de n cifras decimales, deberemos tener la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{x}{10^n}$, en la

que x indica un número entero; luego, como $x = \frac{a \times 10^n}{b}$, debe verifi-

carse que si se agrega n ceros a la derecha de a , el número entero obtenido debe ser divisible por b , pero como b es ahora primo con a , es menester que b divida 10^n , esto es, $2^n \times 5^n$; luego, si b se descompone en factores primos, éstos no deben contener otros factores que 2 y 5 elevados a una potencia menor o a lo suma igual a n .

Inversamente, la menor potencia de 10 tal que su producto por a sea divisible por b , tendrá un exponente n igual al mayor exponente de los factores 2 y 5 de b , descompuestos en factores primos. Luego, podemos establecer que:

24. *La condición necesaria y suficiente para que el número fraccionario no decimal cuyos términos son primos entre sí $\frac{a}{b}$, sea igual a otro decimal, es que el denominador b , descompuesto en factores primos, no admita otros factores que 2 y 5; el número fraccionario decimal equivalente al dado tendrá tantas cifras decimales cuantas indique el mayor de los exponentes a que se encuentran elevados 2 ó 5 en la descomposición de b . Ejemplos:*

$$\frac{1}{2} = 0,5; \quad \frac{1}{4 = 2^2} = 0,25; \quad \frac{1}{8 = 2^3} = 0,125; \quad \frac{1}{16 = 2^4} = 0,0625; \quad \frac{1}{5} = 0,2;$$

$$\frac{1}{25 = 5^2} = 0,04; \quad \frac{1}{125 = 5^3} = 0,008; \quad \frac{1}{625 = 5^4} = 0,0016.$$

25. Cuando el denominador b contiene factores primos distintos de 2 y 5, no existe un número fraccionario decimal equivalente al dado y la operación indicada en el n.º 17 no tendrá fin.

26. Supongamos que se quiera convertir $\frac{18}{19}$ en un número fraccionario deci-

mal; se tiene, efectuando la división, que $\frac{18}{19} = 0,94736$, aproximadamente, en me-

nos de 1 cien milésimo, por defecto; pero el cociente podría (nos. 247 del Vol. I, pág. 131; y 16 de éste), expresarse

$$\begin{array}{r} 180 \\ 90 \\ 140 \\ 70 \\ 130 \\ 16 \end{array} \begin{array}{r} 19 \\ \hline 0,94736 \end{array} \quad \text{así: } \frac{18}{19} = 0,94736\frac{16}{19}, \text{ en la que } \frac{16}{19} \text{ expresa, no } \frac{16}{19} \text{ de la}$$

unidad, sino $\frac{16}{19}$ de un cien milésimo, es decir $\frac{16}{19} \times \frac{1}{100000}$

$$= \frac{16}{1900000}.$$

Esta observación permite, a veces, obtener un número considerable de cifras decimales sin gran trabajo, como se ve en el ejemplo siguiente. Sea

reducir $\frac{1}{17}$; se tiene:

$$\frac{1}{17} = 0,0588235\frac{5}{17}; \quad (1)$$

∴ multiplicando (1) por 5

$$\frac{5}{17} = 0,2941176\frac{8}{17};$$

∴ reemplazando en (1)

$$\frac{1}{17} = 0,05882352941176\frac{8}{17}; \quad (2)$$

∴ multiplicando (2) por 8

$$\frac{8}{17} = 0,47058823529411\frac{13}{17};$$

∴ reemplazando en (2)

$$\frac{1}{17} = 0,0588235294117647058823529411\frac{13}{17}.$$

EJERCICIOS

Examinar cada uno de los números fraccionarios siguientes y establecer si pueden reducirse o no exactamente en números análogos decimales:

65. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}.$

66. $\frac{3}{4}, \frac{17}{25}, \frac{18}{24}, \frac{17}{16}, \frac{13}{20}.$

67. $\frac{8}{23}, \frac{7}{32}, \frac{8}{125}, \frac{13}{64}, \frac{17}{80}.$

68. $\frac{213}{625}, \frac{13}{128}, \frac{157}{256}, \frac{117}{264}, \frac{717}{3125}.$

$$69. \frac{231}{512}, \frac{94}{400}, \frac{117}{350}, \frac{208}{1200}, \frac{91}{264000}.$$

Expresar en números fraccionarios decimales los siguientes:

$$70. \frac{3}{20}, \frac{7}{20}, \frac{18}{25}, \frac{19}{250}.$$

$$71. \frac{111}{125}, \frac{560}{125}, \frac{17}{40}, \frac{5}{16}, \frac{9}{16}.$$

$$72. \frac{3}{5120}, \frac{3}{9}, \frac{11}{16}, \frac{115}{64}, \frac{23}{32}, \frac{23}{320}.$$

27. Números fraccionarios decimales periódicos. — Supondremos que se trata de cantidades menores que la unidad; si así no sucediera, bastaría substituir el numerador por el resto de la división natural de aquél por el denominador.

Consideremos el número fraccionario no decimal $\frac{13}{14}$; como

$14 = 2 \times 7$, no existe número fraccionario decimal equivalente al dado y entonces la operación indicada en el n.º 17 será interminable.

Observemos la marcha de esta operación. Encontramos como dividiendo parciales sucesivos 130, 40, 120, 80, 100, 20, 60, 40; es evidente que a partir de este último, obtenido ya anteriormente, las operaciones van a reproducirse exactamente en el mismo orden en que se han producido con anterioridad; en nuestro ejemplo volveremos a encontrar los dividendos parciales 120, 80, 100, 20, 60, 40 y las cifras del cociente, 2, 8, 5, 7, 1, 4; y así indefinidamente. Este resultado debía por otra parte tener lugar indefectiblemente, pues como los dividendos parciales provienen todos de agregar un cero a la derecha de los rectos parciales, y como éstos son menores que el dividendo (en este caso, menores que 14) no pueden ser sino los números inferiores a dicho dividendo (o sea 1, 2, 3, ..., 12, 13), luego, a lo sumo después de 13 divisiones parciales, debe aparecer forzosamente un resto parcial ya prece-

dentemente obtenido o uno igual al numerador del número fraccionario dado, y entonces las operaciones parciales se reproducirán *periódicamente*.

$$\begin{array}{r|l} 130 & 14 \\ 126 & 0,9285714 \\ \hline 40 & \\ 28 & \\ 120 & \\ 112 & \\ 80 & \\ 70 & \\ 100 & \\ 98 & \\ 20 & \\ 14 & \\ 60 & \\ 56 & \\ 40 & \\ \vdots & \end{array}$$

dicamente y no habrá dificultad en escribir el número fraccionario decimal aproximado por exceso o por defecto con tantas cifras como uno desee.

Llámanse *número fraccionario decimal periódico* un símbolo escrito en forma de número fraccionario decimal pero en que se supone una serie indefinida de cifras decimales, las que, a partir de una de ellas, se reproducen periódicamente siempre las mismas y en el mismo orden.

28. El conjunto de las cifras que se reproducen, se llama el **período** del número fraccionario decimal periódico; las primeras cifras que no se reproducen, si existen, constituye lo que se llama **parte no periódica** o **parte irregular**. Para indicar tal número fraccionario se escribe la parte no periódica, luego el período y a continuación nuevamente el período o las primeras cifras de él a fin de que pueda distinguírsele bien, y, finalmente, unos puntos suspensivos; también se suele a veces suprimir los puntos suspensivos y la repetición de todo o de parte del período poniendo un punto encima de cada una de las cifras de éste, o de la primera y la última del mismo. Así, el número anterior se escribiría de las maneras siguientes:

$$0.9285714285714\dots \quad 0.9285714285\dots \quad 0.\dot{9}2\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4} \quad 0.928571\dot{4}.$$

En este número fraccionario decimal periódico, 285714 es el período y 9 la parte irregular o no periódica.

29. El número fraccionario no decimal $\left(\text{en nuestro caso, } \frac{13}{14} \right)$

que da lugar a establecer un número fraccionario decimal periódico cuando se busca los valores aproximados por defecto de aquél

en menos de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... suponiendo que las operaciones se

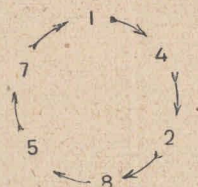
continúan indefinidamente, se llama **número fraccionario engendrador** o **fracción generatriz** del número fraccionario decimal periódico considerado.

Los números fraccionarios decimales periódicos se dividen en **simples** o en **mixtos** según tengan o no parte irregular; el anterior era mixto, el $0.\dot{3}\dot{6}$ es simple.

30. Fácilmente podrán comprobarse las siguientes igualdades:

$\frac{1}{3} = .\dot{3}$	$\frac{1}{9} = .\dot{1}$	$\frac{1}{11} = .\dot{0}\dot{9}$
$\frac{2}{3} = .\dot{6}$	$\frac{2}{9} = .\dot{2}$	$\frac{2}{11} = .\dot{1}\dot{8}$
$\frac{1}{6} = .1\dot{6}$	$\frac{3}{9} = .\dot{3}$	$\frac{3}{11} = .\dot{2}\dot{7}$
$\frac{5}{6} = .8\dot{3}$	$\frac{4}{9} = .\dot{4}$	$\frac{4}{11} = .\dot{3}\dot{6}$
$\frac{1}{7} = .\dot{1}42857$	$\frac{5}{9} = .\dot{5}$	$\frac{5}{11} = .\dot{4}\dot{5}$
$\frac{2}{7} = .\dot{2}85714$	$\frac{6}{9} = .\dot{6}$	$\frac{6}{11} = .\dot{5}\dot{4}$
$\frac{3}{7} = .\dot{4}28571$	$\frac{7}{9} = .\dot{7}$	$\frac{7}{11} = .\dot{6}\dot{3}$
$\frac{4}{7} = .\dot{5}71428$	$\frac{8}{9} = .\dot{8}$	$\frac{8}{11} = .\dot{7}\dot{2}$
$\frac{5}{7} = .\dot{7}14285$	$\frac{9}{9} = .\dot{9}$	$\frac{9}{11} = .\dot{8}\dot{1}$
$\frac{6}{7} = .\dot{8}57142$	$\frac{9}{9} = 1 = .\dot{9}$	$\frac{10}{11} = .\dot{9}\dot{0}$
		$\frac{11}{11} = .\dot{0}\dot{0}$

31. Llama especialmente la atención la forma fraccionaria periódica correspondiente al denominador 7. Siempre figuran en ellos los mismos dígitos 1, 4, 2, 8, 5, 7; si se disponen éstos cíclicamente, como se indica al margen, se verá que, empezando a girar en el sentido 1, 4, 2, 8, 5, 7, 1 se obtiene sucesivamente los números 142857, 428571, 285714, 857142, 571428, 714285, los que corresponden



precisamente a los períodos relativos a los números $\frac{1}{7}$,

$\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$. Es curioso también el hecho de que

los tres últimos dígitos 8, 5, 7, se obtienen restando de 9 los 3 primeros ($9 - 1 = 8$, $9 - 4 = 5$, $9 - 2 = 7$), así como que, dispuestos estos dígitos en el orden 1, 2, 4, 5, 7, 8 de magnitud, vienen a ser los pri-

meros números del período de los números ordenados también en magnitud $\frac{1}{7}$,

$\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$. Análogas propiedades se observan para los números deci-

males periódicos procedentes del denominador 13, etc.

32. Todo número fraccionario decimal periódico admite en general una fracción generatriz. — Dado un número fraccionario decimal periódico cualquiera, cabe preguntar si admite una fracción generatriz. Desde luego, si admite una, ésta será única; notemos, en efecto, que si se reduce a fracciones decimales dos fracciones no

decimales diferentes $\frac{a}{b}$ y $\frac{a_1}{b_1}$, continuando la operación indefini-

damente, deberá forzosamente obtenerse fracciones decimales diferentes, pues si así no fuera, y se obtuviese siempre las mismas cifras decimales, prolongando suficientemente la operación se obtendría valores aproximados de ambas fracciones no decimales cuya

diferencia sería menor que $\frac{1}{10^n}$ y por pequeña que fuera la

diferencia entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{a_1}{b_1}$ podría siempre tomarse un número n

bastante grande de cifras decimales para que $\frac{1}{10^n}$ fuera menor que

$\frac{a}{b} - \frac{a_1}{b_1}$, lo que es absurdo.

Establecido lo anterior consideremos en primer lugar el caso de que falte la parte no periódica, sea, por ejemplo, 0,3636...

El número fraccionario no decimal con términos enteros $\frac{a}{b}$

será el engendrador de 0,3636... si, reduciendo $\frac{a}{b}$, se halla como

parte entera 0 (es decir, que $a < b$) y como primeras cifras decimales 3 y 6 y luego un resto igual al numerador a ; esto equivale a establecer que la división natural de $a \times 100 : b$ es 36 y el resto a . Luego $a \times 100 = b \times 36 + a$; o también, restando a a ambos miembros de la igualdad anterior:

$$a \times (100 - 1) = a \times 99 = b \times 36, \quad \text{luego} \quad \frac{a}{b} = \frac{36}{99};$$

y, recíprocamente, esta última igualdad supone la primera. Luego,

si se toma para $\frac{a}{b}$ uno cualquiera de los números fraccionarios

equivalentes a $\frac{36}{99}$, se tendrá que $a \times 100 = b \times 36 + a$, y como a es

menor que b , desde que 36 es menor que 99, se ve que efectuando la división natural de $a \times 100$, por b , se tendrá por cociente 36 y a

por resto. Luego $\frac{36}{99}$ es la fracción generatriz de 0,3636...

La demostración falla en un solo caso, y es el del número fraccionario decimal periódico simple 0,99999... porque entonces

al formar $\frac{a}{b}$ se hallaría que $a = b$, lo que permite establecer la igualdad $0,999... = 1$. Luego:

33. Regla. — *Todo número fraccionario decimal periódico simple cuya parte entera es 0 y cuyo período no sea 9, admite una fracción generatriz cuyo numerador es el período y cuyo denominador está formado por tantos 9 como cifras tiene el período.*

34. Si el número fraccionario decimal periódico admitiera parte entera (si se tratara, por ejemplo, de 375,3636...) se reduciría al caso anterior, de la siguiente manera:

$$375,3\ddot{6} = 375 + 0,3\ddot{6} = 375 + \frac{36}{99} = \frac{375 \times 99 + 36}{99} = \frac{37161}{99}.$$

35. Consideremos ahora el caso en que existe una parte irregular; sea, por ejemplo, 0,3753 $\ddot{6}$ en el que la parte entera es 0.

Hemos visto recién que el número fraccionario $\frac{375 \times 99 + 36}{99}$

engendra 375,3 $\ddot{6}$, de suerte que los valores aproximados de aquél por defecto en menos de 0,1; 0,01; 0,001; ... son respectivamente:

$$375,3; \quad 375,36; \quad 375,363; \quad 375,3636; \dots$$

Luego, los valores aproximados por defecto en menos de 0,0001, 0,00001, 0,000001, ... del número fraccionario $\frac{375 \times 99 + 36}{99 \times 1000}$ son

(n.º 20):

$$0,3753 \quad ; \quad 0,37536 \quad ; \quad 0,375363 \quad ; \quad 0,3753636; \dots$$

Luego, $\frac{375 \times 99 + 36}{99 \times 1000}$ es la fracción generatriz del número

fraccionario decimal periódico mixto 0,375353636 ... y puede escribirse así:

$$\frac{375 \times (100 - 1) + 36}{99000} = \frac{37500 - 375 + 36}{99000} = \frac{37536 - 375}{99000}$$

Si el período fuera constituido por 9; por ejemplo, si se trata de 0,3759999... se obtendría como fracción generatriz

$$\frac{375 \times 99 + 99}{99 \times 1000} = \frac{99(375 + 1)}{99 \times 1000} = \frac{376}{1000} = 0,376;$$

lo que conduce a establecer la igualdad 0,375999... = 0,376 y demuestra que 0,3759 no admite fracción generatriz. De lo anterior resulta la siguiente:

36. Regla. — *Todo número fraccionario decimal periódico mixto cuya parte entera es 0 y cuyo período no sea constituido por 9, admite una fracción generatriz cuyo numerador se obtiene restando el período, del número constituido escribiendo la parte irregular y a su derecha el período, y cuyo denominador se obtiene escribiendo tantos 9 como cifras tiene el período, y a la derecha de éstos tantos ceros como cifras tiene la parte irregular.*

Si la parte entera no es cero se reduce al caso anterior en la forma indicada en el n.º 34. Así, sea el número

$$\begin{aligned} 43,37536 &= 43 + 0,37536 = 43 + \frac{37536 - 375}{99000} = \\ &= \frac{43 \times 99000 + 37536 - 375}{99000} = \frac{4294161}{99000} \end{aligned}$$

o también

$$43,37536 = 0,4337536 \times 100 = \frac{4337536 - 43375}{9900000} \times 100.$$

EJERCICIOS

Convertir en números fraccionarios decimales los siguientes:

$$73. \frac{1192}{36}, \frac{59}{7}, \frac{560}{52}, \frac{73,001}{990}, \frac{3}{11}, \frac{16}{37}, \frac{8}{30}.$$

$$74. \frac{7}{25}, \frac{6}{75}, \frac{81}{1250}, \frac{111}{625}, \frac{7}{160}, \frac{5}{26}, \frac{4}{35}.$$

$$75. \frac{4}{15}, \frac{1}{15}, \frac{13}{15}, \frac{7}{18}, \frac{17}{30}, \frac{7}{12}, \frac{97}{900}, \frac{5}{37}.$$

$$76. \frac{7}{75}, \frac{13}{22}, \frac{10}{99}, \frac{1235}{11111}, \frac{1}{41}, \frac{13}{41}, \frac{6}{35}, \frac{3}{148}, \frac{5}{56}, \frac{13}{77}.$$

Hallar las fracciones generatrices de los siguientes números fraccionarios periódicos:

$$77. .\dot{3}\dot{6}, .\dot{6}\dot{3}, .\dot{3}\dot{3}, .\dot{4}\dot{2}, .\dot{6}\dot{4}\dot{8}.$$

$$78. .\dot{1}\dot{0}\dot{8}, .\dot{6}\dot{2}\dot{1}, .\dot{2}\dot{1}\dot{6}, .\dot{7}\dot{6}\dot{7}\dot{1}, .\dot{1}\dot{8}\dot{8}\dot{1}.$$

$$79. 5.\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}, 10.\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}, .\dot{0}\dot{5}\dot{6}, .\dot{1}\dot{5}\dot{6}.$$

$$80. .\dot{0}\dot{0}\dot{3}\dot{3}, 15.\dot{8}\dot{6}, 5.\dot{0}\dot{1}\dot{1}\dot{3}\dot{6}, 3.\dot{0}\dot{7}\dot{6}\dot{7}\dot{1}.$$

$$81. 2.\dot{3}\dot{7}\dot{4}\dot{8}\dot{1}, 9.\dot{9}\dot{8}\dot{7}\dot{5}\dot{4}, 2.\dot{3}\dot{9}\dot{0}\dot{5}\dot{4}\dot{8}\dot{1}.$$

$$82. 15.\dot{1}\dot{9}\dot{4}\dot{3}\dot{9}\dot{8}, 3.\dot{1}\dot{9}\dot{0}\dot{2}\dot{3}\dot{2}\dot{7}, 1.\dot{2}\dot{0}\dot{1}\dot{3}\dot{4}\dot{3}\dot{8}.$$

$$83. 6.\dot{1}\dot{0}\dot{0}\dot{4}\dot{2}\dot{7}\dot{3}\dot{5}, 5.\dot{1}\dot{6}\dot{1}\dot{8}\dot{8}\dot{1}.$$

37. OBSERVACIONES. — Consideremos la fracción generatriz de un número fraccionario decimal periódico, por ejemplo, la fracción $\frac{17}{99}$ engendradora del número $0.\dot{1}\dot{7}$; esta fracción no será, en general, irreducible, pero como el denominador es primo con 2 y con 5 quedará siempre primo con 2 y con 5, aun cuando se simplifique la fracción hasta su menor expresión. Luego, un número fraccionario ordinario irreducible que engendra un número fraccionario periódico puro tiene su denominador primo con 2 y 5.

38. Sea, ahora, la fracción $\frac{23417 - 234}{99000}$ engendradora del número frac-

cionario periódico mixto $0.\dot{2}\dot{3}\dot{4}\dot{1}\dot{7}$; su numerador no puede terminar en 0, pues, como es fácil verificarlo, si así sucediera, la parte no periódica tendría una cifra menos; luego, dicho numerador, es primo con 10 y por lo tanto con 2 ó con

5, pero como el denominador es divisible por 10^3 , resulta que, simplificando en lo posible la fracción generatriz en cuestión, si el denominador de la misma, una vez que dicha fracción sea irreducible, se descompone en factores primos, contendrá los factores 2 ó 5 elevados a un exponente igual al número de cifras de la parte irregular.

39. Recíprocamente, todo número fraccionario irreducible cuyo denominador no es divisible ni por 2 ni por 5, dará nacimiento a un número fraccionario decimal periódico simple, desde que no puede dar lugar a uno mixto ni a uno de número limitado de cifras (n.º 24). Todo número fraccionario irreducible en el que el denominador es divisible por 2 ó por 5 y por algún otro número primo, dará nacimiento a un número fraccionario decimal periódico mixto desde que no puede originar uno simple ni uno de número limitado de cifras; el número de cifras de la parte no periódica será igual al exponente de aquel de los factores 2 ó 5 que entra con el mayor exponente en el denominador del número fraccionario dado descompuesto en factores primos.

40. División de dos números fraccionarios decimales. — Hemos indicado en el n.º 10 cómo se dividen dos números fraccionarios decimales y hemos visto que, en general, el cociente es un número fraccionario no decimal; pero, si se quiere, puede reducirse éste a otro decimal aproximado, calculando una, dos, tres, ... cifras decimales o, como se dice, *llevando* la división hasta los décimos, hasta los centésimos, etc.

41. Sea dividir 7342,689, es decir $\frac{7342689}{1000}$, por 428; aplicando

lo dicho en el n.º 254, pág. 135 (Vol. I), el cociente será la fracción $c = \frac{7342689}{428000}$, es decir, el cociente de la fracción $c_1 = \frac{7342689}{428}$,

dividido por 1000; pero en base a lo establecido en el n.º 20, la reducción en números fraccionarios decimales de c y c_1 viene a ser una sola y misma operación, las cifras se siguen en el mismo orden, pero en el segundo caso representan unidades mil veces mayores que en el primero; el número de unidades simples de c será, por consiguiente, el de millares de c_1 , de suerte que el número en cuestión es el de los miles de la parte entera de c_1 , es decir, del cociente de la división natural de 7342689 por 428 y se obtiene efectuando la división natural de 7342 (número de millares de 7342689) por 428, o también dividiendo el número de unidades simples, 7342, del dividendo primitivo 7342,689 por el dividende 428.

42. A este efecto, se adopta la disposición siguiente:

Se escribe el dividendo y el divisor como si se tratara de números enteros, se divide la parte entera, 7342, por el divisor 428, tam-

$$\begin{array}{r|l} 7342,689 & 428 \\ \hline 428 & 17,15581... \end{array}$$

3062

2996

0666

428

2388

2140

2489

2140

3490

3424

660

428

232

.

.

producto del divisor por el cociente más el resto. Efectivamente, tratándose de números enteros se verificaría que

$$734268900 = 428 \times 1715581 + 232;$$

luego dividiendo por 100000 resulta:

$$7342,68900 = 428 \times 17,15581 + 0,00232.$$

Si el divisor no fuera entero, por ejemplo, si se tratara de

dividir 7342,689 por 4,28, o sea $\frac{7342689}{1000} : \frac{428}{100}$, se reduciría este

caso al anterior avanzando la coma hacia la derecha, en el dividendo y en el divisor, de tantos lugares cuantas cifras decimales tiene el divisor, con lo que quedaría reducido éste a un número

$$\begin{aligned} \text{entero; sabemos, efectivamente, que } & \frac{7342,689}{4,28} = \frac{7342689}{1000} : \frac{428}{100} = \\ & = \frac{7342689}{428} \times \frac{100}{1000} = \frac{7342689}{10} \times \frac{1}{428} = \frac{734268,9}{428}. \end{aligned}$$

Las observaciones anteriores justifican la siguiente:

43. Regla práctica. — *Para efectuar la división de dos números decimales y reducir simultáneamente el cociente a número fraccionario decimal, se corre la coma en el dividendo (agregando ceros, si es necesario) de tantos lugares a la derecha como cifras decimales tiene el divisor; se efectúa luego la división como si se tratara de números enteros, pero se coloca una coma en el cociente, después de haber hallado la cifra de éste que corresponde al dividendo parcial cuya última cifra es la de las unidades del dividendo obtenido por la primera operación indicada, y se continúa la división bajando sucesivamente las cifras decimales del dividendo, cifras que se reemplazan por ceros cuando se han agotado todas y se desea tener más cifras decimales en el cociente. Si el divisor es un número entero, no es necesario efectuar la operación previa, indicada, de correr la coma.*

44. Ejemplo. — Sea dividir 1,414213 por 0,00647. Se dispone la operación así:

$$\begin{array}{r|l} 141421,3 & 647 \\ 1294 & 218,58 \\ \hline 1202 & \\ 647 & \\ \hline 5551 & \\ 5176 & \\ \hline 3753 & \\ 3235 & \\ \hline 5180 & \\ 5176 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Como el divisor tiene cinco cifras decimales, se ha corrido la coma de cinco lugares a la derecha del dividendo, se ha puesto la coma después de obtener la cifra 8 del cociente, porque procede de dividir el dividendo parcial 5551, cuya última cifra es la de las unidades del dividendo 141421,3; deseando obtener centésimos en el cociente, se ha bajado un cero después de bajar la última cifra 3 del dividendo. Puede verificarse que se tiene

$$1,414213 = 0,00647 \times 218,58 + 0,0000004.$$

EJERCICIOS

84. Calcular en menos de una unidad por defecto, los cocientes de
 $309,7026 : 0,3141$; $70,602 : 28,845$; $418,589 : 5,45$.

85. Calcular el cociente, aproximado por defecto en menos de 0, 01, de
 $814,637 : 38$.

EJERCICIOS RELATIVOS A NÚMEROS FRACCIONARIOS DECIMALES

86. Una persona alquila un departamento por la suma de 750 \$ anuales y paga, además, como contribuciones, una suma de 42,50 \$, ¿cuál es el precio del alquiler: 1.º por trimestre, 2.º por mes, 3.º por semana, 4.º por día? (Considérese el año de 52 semanas y de 365 días).

87. Una mujer tiene cierto número de huevos; vende $\frac{1}{3}$ de ese número y uno más a una persona; $\frac{1}{3}$ de los restantes a una segunda persona; $\frac{1}{5}$ de lo restante a una tercera; le quedan 15 huevos, ¿cuántos tenía?

88. Siete personas deben pagar en común 681,80 \$; como varias de ellas son insolventes, las otras deben pagar cada una 73,05 pesos más, ¿cuántas personas son insolventes?

89. Cierta fracción teniendo por denominador 148, origina un número fraccionario decimal periódico mixto cuya parte no periódica se compone de dos cifras, seguidas de $\overline{783}$; sabiendo que la parte no periódica es los $\frac{2}{3}$ del numerador, hallar éste.

90. Con 856,75 \$ debe pagarse 57 obreros; 25 de ellos han ganado 14,75 \$ cada uno, ¿qué suma corresponde a cada uno de los otros?

91. Mostrar que hay dos números fraccionarios ordinarios irreducibles cuyo denominador es 148, iguales ambos a una fracción decimal periódica constituida por una parte irregular de 2 cifras seguidas de $\overline{567}$.

92. Un tendero ha comprado género a razón de 63 \$ las 9 unidades de longitud; lo vuelve a vender a 52,50 \$ cada 7 unidades y obtiene 234 \$ de beneficio, ¿cuántos metros de género había comprado?

93. Para pagar el alquiler de su campo, un arrendatario vende 18 carneros a 34 \$ cada uno y cierto número de bolsas de trigo a 18 \$ cada una, ¿cuántas bolsas debe vender si el alquiler que paga es de 1926 \$?

94. En una unidad de peso de agua de mar hay 0,035 unidades de sal, ¿cuánta sal hay en 1500 unidades de capacidad de agua de mar, sabiendo que una unidad de agua de mar pesa 1,026 unidades de peso?

95. Dos personas poseían economías cuyo total alcanzaba a 502,20 \$. Habiendo gastado una de ellas los $\frac{2}{3}$ de su parte y la otra los $\frac{3}{7}$ de la suya, queda a la primera dos veces más que a la segunda, ¿cuáles son las economías de cada uno?

96. Se ha comprado un tonel de vino de 140 unidades de capacidad por 135 \$ con todos los gastos comprendidos en ese precio. Se pone el vino en botellas que cuestan 15 \$ el ciento y con tienen 0,65 unidades cada una. La colocación del vino en botellas cuesta 6,50 \$ y se pierde en la operación 2,2 unidades, ¿a cuánto debe venderse la botella para ganar 45 \$ en total?

97. Un labrador compra a un viñero 7 barricas de vino de 225 unidades de capacidad a 49,50 \$ la barrica, y le vende 15,50 medidas de trigo a 16,50 \$ cada una, ¿cuánto dinero debe entregar el labrador para saldar su cuenta y cuánto paga por unidad de vino?

98. Para pagar sus obreros, un patrón les ha distribuido una suma de 907,50 \$, la cual ha sido repartida entre 15 hombres, 18 mujeres y 4 niños.

La parte de una mujer es $\frac{6}{13}$ de la de un hombre y $\frac{12}{5}$ de la de un niño,

¿qué suma han percibido los hombres, las mujeres y los niños?

99. Sabiendo que cierto volumen de agua pesa 773 veces más que otro igual de aire, hallar el peso de unidad de volumen de aire, sabiendo que la unidad de agua vale 1. Hallar el peso del oxígeno encerrado en una unidad de aire sabiendo que el aire encierra los 0,23 de su peso de oxígeno.

100. Un tonel de vino ha costado 145 \$, se entrega los $\frac{2}{5}$ a 0,75 \$ la unidad de capacidad y los $\frac{3}{8}$ a 0,70 \$ la unidad. El resto se vende a 0,68 \$ la unidad y produce 36,72 \$. Calcular el beneficio total y la capacidad del tonel.

101. Una empresa de ferrocarril cobra por el transporte del carbón, 0,97 \$ por cierta unidad de peso y de distancia; se paga además un derecho fijo de 2,12 \$ por vagón de 3240 unidades de peso distintas de las primeras y equivalentes a 0,082 de ellas. Una usina paga anualmente al ferrocarril 25800 \$ por transportar los carbones que consume; el recorrido es de 2,375 unidades de distancia. Calcular el número de unidades de carbón transportadas.

102. Dos barricas están llenas de vino cuyo precio es 0,65 \$ la unidad de capacidad. La primera, que es doble de la segunda, ha costado 74,75 \$ más que ésta, ¿cuál es la capacidad de cada una?

103. Un hombre hace 0,01 de unidad de longitud en 15 pasos, ¿cuántas unidades hace en una hora si hace 100 pasos por minuto?

CAPÍTULO III

CÁLCULOS APROXIMADOS

45. Generalidades. — En muchas ocasiones una suma de dinero está expresada con suficiente exactitud conociéndola hasta los centavos, en otros casos basta conocerla hasta los pesos. Cuando nos referimos al tiempo, basta en ciertos casos conocer los segundos, en otros bastan las horas, en otros los días, etc.

Un número se dice ser lo suficientemente **aproximado**, cuando está bastante cerca del verdadero a los propósitos del caso. Supongamos, por ejemplo, que una persona compra una pieza de género de 3 metros de longitud por 5 pesos. Si quisiera comprar solamente

1 metro, el precio de éste sería $1\frac{2}{3}$ de pesos o sea 1 peso más

66,666... centavos; pero como no es posible pagar $\frac{2}{3}$ de peso, esto es 66,666... centavos, debemos considerar la suma de 1 peso 67 centavos como el **valor aproximado** de un metro del género en cuestión.

46. De igual manera, tratándose de largos períodos de tiempo como los que transcurren entre dos acontecimientos históricos muy alejados uno del otro, el período de tiempo en cuestión está suficientemente aproximado conociendo simplemente el número de años transcurridos entre uno y otro acontecimiento, etc.

47. Generalmente basta, para los usos corrientes, conocer una cantidad hasta sus dos primeras cifras decimales.

48. Errores. — Supongamos que una cantidad cuyo valor exacto es 9,45843 unidades, es reemplazada por la cantidad 9,458 unidades, la diferencia entre 9,45843 unidades y 9,458 unidades = 0,00043 unidades es lo que se llama el **error** cometido al tomar una por otra. Vemos que si, en el caso anterior, en vez de tomar 9,45843

unidades, se hubiera tomado 9,459, el error sería $9,459 - 9,45843 = 000057$ unidades, mayor que antes. Si se conviene en expresar una cantidad con sólo las dos o tres primeras cifras decimales, se debe, evidentemente, tomar éstas de tal manera que el error sea el menor posible. Así, en el caso anterior, en vez de 9,45843 podríamos usar 9,458 ó 9,459, pero debemos optar por la primera porque el error cometido es entonces menor. Igualmente si, en vez de 62,19999642, basta expresar el mismo número con solo 5 decimales, tendríamos dos números que responderían, a saber 62,19999 y 62,20, pero debemos elegir este último porque el error cometido sería menor. Es fácil comprobar que la cuestión está regida por la siguiente regla:

49. *Si la primera de las cifras omitidas es igual o mayor que 5, se aumentará en 1 la última de las cifras retenidas; en caso contrario, bastará suprimir las cifras que se desprecian.*

Así, 3,4562499, expresado con cuatro cifras decimales, se volverá 3,4562, y 3,4562501 se volverá 3,4563.

50. Muchos números pueden ser tratados de la manera anterior. Por ejemplo, en las tablas estadísticas, pueden a veces ignorarse, sin inconvenientes, las centenas, decenas y unidades. Así, el valor aproximado admisible sin inconveniente, de 37624392, sería, en este caso, 37624000; el de 84304663 sería 84305000.

EJERCICIOS

Indicar los números enteros aproximados anteriores y posteriores respectivamente a los siguientes números, determinando al mismo tiempo el más aproximado de ambos:

104. 6,75; 11,01; 18,54; 17,394; 220,09; 567,61; 85,91.

105. 745,831; 1001,5504; 10,924; 999,51.

Determinar los números con dos cifras decimales más próximos a los siguientes:

106. 3,456; 6,1484; 18,432; 24,376.

107. 2,183; 0,05673; 3,8952; 0,917; 18,764.

Determinar con tres cifras decimales:

108. 37,4132; 13,2051; 24,3643; 8,4175.

109. 4,5738; 21,3626; 57,7112; 19,8939.

110. 7,6381; 23,4235; 47,3843; 10,2957.

111. 3,5968; 19,9991; 399,9997.

Escribir los números más aproximados a los siguientes, siendo ceros sus tres últimas cifras (aproximados a los millares):

112. 36325; 134369; 91638; 78809.

113. 45234 ; 273724 ; 98315 ; 147471.
 114. 56943 ; 239968 ; 189924 ; 197572.
 115. 30791 ; 125441 ; 374814 ; 399903.

51. Adición y substracción. — Trátemos de hallar la suma de dos o más números, o la diferencia de dos números, lo más exactas posible, con cierto número de cifras decimales.

Sea, por ejemplo, hallar la suma y la diferencia de 3,79841159321 y 5,62018078024 con cuatro cifras decimales. Retendremos, en los datos, *seis* cifras decimales (es decir, dos más de las cuatro que debe tener la suma y la diferencia), y escribiremos los números en columnas, como se indica al margen; no se escribe la quinta y sexta cifra decimal del resultado, pero si la quinta cifra resulta mayor que 4, se forzará en 1 la cuarta cifra, como sucede en este ejemplo.

	5,620181
	3,798412
suma	9,4186
diferencia ..	1,8218

El objeto de retener en los datos dos cifras decimales más que las que se piden en el resultado, es para conocer la cifra siguiente de este resultado a fin de saber si la última cifra decimal conservada es o no mayor que 4; es fácil cerciorarse de para ello no bastaría una sola cifra más

conservada en los datos, pues la suma o diferencia de esta cifra puede ser modificada por la suma o diferencia de la siguiente; en cambio sería inútil retener tres cifras más, pues en general, las terceras, en nada influirían sobre el resultado relativo a las primeras.

EJERCICIOS

Hallar las sumas con dos decimales, lo más aproximada a las exactas de

116. $15,67301 + 4,370956 + 5,21562 + 18,86483$.

117. $3,15792 + 0,314157 + 6,354671 + 0,637205$.

Hallar las diferencias con dos cifras decimales lo más aproximadas, de :

118. $10,9843 - 8,6734$; $3,6725 - 0,5697$.

119. $8,6201 - 5,4983$; $3,4795 - 1,5249$.

Hallar la suma aproximada con cinco cifras decimales, de los siguientes números fraccionarios periódicos :

120. $\dot{.3}$, $\dot{.6}$, $\dot{.12}$.

121. $\dot{.648}$, $\dot{.2621}$, $\dot{.108}$.

122. $\dot{.005}$, $\dot{.18}$, $\dot{.42}$.

123. $\dot{.7641}$, $\dot{.11881}$, $\dot{.67671}$.

124. $\dot{7,50011}$, $\dot{.80020}$, $\dot{.789}$, $\dot{85,12}$.

125. $\dot{2,101}$, $\dot{.243183}$, $\dot{.1236}$, $\dot{45,29}$.

$$126. \overset{\cdot}{.}03\overset{\cdot}{6}, 5,01\overset{\cdot}{5}, \overset{\cdot}{.}05\overset{\cdot}{9}, \overset{\cdot}{.}64\overset{\cdot}{8}, \overset{\cdot}{.}02, 1,00\overset{\cdot}{6}.$$

$$127. 6,\overset{\cdot}{5}\overset{\cdot}{6}\overset{\cdot}{3}, 1,\overset{\cdot}{5}\overset{\cdot}{6}, \overset{\cdot}{.}01\overset{\cdot}{8}.$$

$$128. 2,003\overset{\cdot}{5}\overset{\cdot}{8}, \overset{\cdot}{.}083\overset{\cdot}{8}\overset{\cdot}{8}\overset{\cdot}{9}\overset{\cdot}{9}\overset{\cdot}{4}, 35,1612, 1,00\overset{\cdot}{6}.$$

$$129. 3,\overset{\cdot}{7}\overset{\cdot}{6}\overset{\cdot}{7}\overset{\cdot}{1}, \overset{\cdot}{.}06\overset{\cdot}{2}\overset{\cdot}{1}, \overset{\cdot}{.}01\overset{\cdot}{6}, \overset{\cdot}{.}24.$$

Efectuar las subtracciones siguientes expresando los restos con cinco cifras decimales lo más aproximadamente posible:

$$130. 43,\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{5} - 9,\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{4}, 6,\overset{\cdot}{4} - 5,\overset{\cdot}{5}, 32,\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{8}\overset{\cdot}{1} - 25,20\overset{\cdot}{8}\overset{\cdot}{6}.$$

$$131. 3 - 2,763210\overset{\cdot}{9}\overset{\cdot}{4}, 3,208562\overset{\cdot}{5} - 1,20125\overset{\cdot}{6}\overset{\cdot}{1}, 10,10\overset{\cdot}{1} - \overset{\cdot}{.}350\overset{\cdot}{6}\overset{\cdot}{1}.$$

$$132. 15,09\overset{\cdot}{5}\overset{\cdot}{1} - 7,\overset{\cdot}{3}\overset{\cdot}{7}, 4,732\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0} - 3,141\overset{\cdot}{6}.$$

$$133. \begin{array}{r} 355 \\ 113 \end{array} - \begin{array}{r} 22 \\ 7 \end{array}.$$

52. Multiplicación. — Hemos visto que, para obtener el valor de la suma de varios números fraccionarios decimales con cierto número de cifras decimales que sea lo más aproximado al verdadero, se conserva, en los datos, dos cifras decimales más de las que se piden en el resultado; en consecuencia, desde que, en el proceso de la multiplicación, determinamos un número de productos parciales y hacemos la suma de ellos, será necesario que cada uno de estos productos parciales esté determinado con dos cifras decimales más que las pedidas. Sea, por ejemplo, hallar el producto aproximado de 123,76592 por 324,786 sin decimales.

123,76	592
3 24	786
37129,78	
2475,32	
495,06	
86,63	
9,90	
74	
40197,43	
40197	

Como en cada producto parcial debemos conservar dos cifras decimales, colocaremos la cifra de las unidades, 4, del multiplicador debajo de la segunda cifra decimal, 6, del multiplicando trazaremos una raya vertical a la derecha de los dígitos 6 y 4 y tendremos cuidado de colocar la segunda cifra decimal de cada producto parcial inmediatamente a la izquierda de dicho raya. Primeramente multiplicaremos el multiplicando por la cifra 3 de las más altas unidades del multiplicador, el cual representa 300 en este caso, por cuya razón empezaremos multiplicando por 9, cuarta cifra decimal del multiplicando, pues este producto origina la segunda cifra decimal del producto parcial en cuestión; diremos, pues, $3 \times 9 = 27$, pero, en vez de escribir 7, escribire-

mos 8, pues se ve inmediatamente que la tercera cifra decimal de dicho producto parcial, obtenido multiplicando 3 por 2, sería mayor que 4; obtenemos así 37129,78. Multiplicaremos, ahora, el multiplicando por 2, cifra de las decenas del multiplicador, como ésta representa 20, empezaremos a multiplicar por 5, tercera cifra decimal del multiplicando, pues obtendremos así la segunda cifra decimal del producto; tenemos $2 \times 5 = 10$, pero no escribamos 0 sino 2, porque la tercera cifra decimal de este producto sería 18, de suerte que, por tener una decena, la segunda cifra decimal sería 1, y como la tercera resultaría ser 8, mayor que 4, deberá escribirse como segunda cifra $1 + 1 = 2$; obtenemos así el producto parcial 2475,32.

Así continuaremos; al multiplicar por 7, primera cifra decimal del multiplicador, se empezará por la cifra 7, primera cifra decimal del multiplicando, etc. Sumando los productos parciales se obtiene 40197,43, y por lo tanto el producto buscado es 40197.

53. A continuación se indican otros dos ejemplos:

Hallar el producto aproximado con 4 cifras decimales de $56,876 \times 0,00144$, y hallar el producto aproximado con 6 cifras decimales de $0,00040635 \times 241,6358$.

		Disposiciones :		0,00040635	
				241	,6358
56,876000	,00144			0,08127000	
0				1625400	
,056876				40635	
22750				24381	
2275				1219	
0,0819				203	
				32	
				0,098189	

EJERCICIOS

Hallar los productos siguientes, aproximados con 2 decimales :

134. $3,207 \times 0,321$; $4,367 \times 0,208$; $2,563 \times 0,672$.

135. $6,825 \times 0,623$; $29,582 \times 0,476$; $21,347 \times 10,365$.

136. $14,287 \times 25,894$; $35,478 \times 168,825$; $12,847 \times 352,457$.

Hallar los valores aproximados con 5 cifras decimales de:

137. $32,1598 \times 563089$; $3,72 \times 0,0005962$.

138. $0,005762 \times 3,20876$; $0,0006284 \times 840,32105$.

139. $28,5631 \times 0,37642567$; $3,208943621 \times 8,4230156201$.

140. $4,320972148 \times 5,630142197$; $(0,0087624)^2$.

141. $(3,8456)^2 - (3,7206)^2$.

142. Hallar el producto aproximado, sin decimales, de $7,3129 \times 115,73$.

143. Hallar el peso de 15,35 unidades de longitud de alambre sabiendo que 1 unidad pesa 6,735 unidades de peso; expresar dicho peso aproximado en unidades de peso, sin decimales.

144. Hallar, en pesos, sin centavos, el costo aproximado de 57,315 unidades de una substancia a razón de 5,78 pesos la unidad.

Hallar los productos, aproximados con 3 decimales, de:

145. $7,6 \times 3$; 5 y 7 ; $.15 \times 2$; 6 y 8 ; $7,3674 \times 560$.

146. $.008376 \times 762$; $3,097 \times .00061$; $45,62018 \times 28,31$.

147. $189,3514 \times 846,521$; $49,49 \times 612,57525$.

148. $.0006 \times .028$; $6,8351 \times .7$; $.5 \times .4$; $.018 \times .03$.

(Para resolver este último ejercicio conviene hallar las fracciones generatrices de las decimales).

54. División. — En el n.º 43 hemos indicado cómo se halla el cociente aproximado de dos números fraccionarios decimales con cierto número de cifras. Las reglas y los ejemplos siguientes no requieren mayores explicaciones después de lo dicho relativamente a la multiplicación.

55. Regla. — *Para obtener el cociente aproximado de dos números con cierto número de cifras decimales, se efectúa la división de los números dados como se indicó en el n.º 43 hallando en el cociente una cifra decimal más de las que se piden; si ésta es mayor que 4, se aumenta en 1 la anterior; cuando, en el curso de la operación, falta determinar, en el cociente, dos cifras menos de las que tiene el dividendo, en vez de bajar la cifra siguiente del dividendo, se tacha la última del dividendo y así se continúa hasta el fin, recordando, al hacer los productos parciales de cada cifra del cociente por el dividendo, lo dicho en el n.º 52.*

56. Ejemplo. — Hallar el cociente aproximado, sin cifras decimales, de $673,1489 : 0,41432$.

La división anterior es equivalente, como sabemos, a la 67314890 : 41432.

Luego tenemos:

$$\begin{array}{r|l} 67314890 & 41432 \\ 41432 & 1624,7 \end{array}$$

258828

248592

10237

8286

1951

1657

294

290

41×7 escribiremos 290; el cociente pedido resulta ser 1625.

A continuación se indica cómo se halla el cociente aproximado de 2,7182818 por 3,1415927 con 6 decimales.

$$\begin{array}{r|l} 27182818,0 & 31415927 \\ 251327416 & 0,8652559 \end{array}$$

2050076 4

1884955 6

165120 8

157079 6

8041 2

6283 2

1758 0

1570 8

187 2

157 1

30 1

28 3

1 8

Después de determinar las cifras 1 y 6 del cociente queda solamente por determinar tres cifras, es decir, dos menos que las que tiene el dividente, luego, dejaremos de bajar cifras del dividendo y tacharemos cifras a la derecha del dividente, pero en vez del dividendo parcial 10236 escribiremos 10237 porque si hubiéramos bajado la cifra siguiente del dividendo, éste hubiera sido 9; igualmente, al multiplicar la cifra 4 del cociente por 414 escribiremos 1657 en vez de 1656, porque si hubiéramos multiplicando por todo el dividente, la cifra siguiente al 5 hubiera sido 7, como se verifica en seguida; de igual manera en vez de

Procediendo a dividir 27182818 por 31415927, debemos hallar 7 cifras decimales; después de hallar 0 y 8, queda por determinar en el cociente 6 cifras decimales, esto es, dos cifras menos que las del dividente; empezaremos entonces a tachar cifras a la derecha del dividente y efectuaremos los productos parciales teniendo cuidado de aumentar la cifra de la derecha de estos productos en la forma indicada; se halla como cociente 0,865256.

EJERCICIOS

Hallar los cocientes aproximados, con 2 cifras decimales, de las siguientes divisiones:

$$149. \text{ } 0,552073 : 0,321562 ; \quad 0,463672 : 0,208431.$$

$$150. \text{ } 0,2995824 : 0,476126 ; \quad 88,25 : 3,54783.$$

$$151. \text{ } 5,894 : 14,2873 ; \quad 2,457 : 1,28474.$$

Hallar los cocientes aproximados, con 4 cifras decimales, de:

$$132. \text{ } 3476,321 : 1248,4176 ; \quad 56,9812 : 47,87631.$$

$$153. \text{ } 37,20518 : 0,1462304 ; \quad 185,37612 : 0,8764032.$$

$$154. \text{ } 0,13751432 : 1,8763015 ; \quad 17,1890865 : 0,13249672.$$

155. Si la luz tarda 499 segundos de tiempo para venir del Sol a la Tierra y siendo 149504000 kilómetros la distancia entre estos dos astros, hallar el camino que recorre la luz en una hora despreciando las unidades menores que los millares.

156. Sabiendo que 576,73 unidades de longitud de una tela cuestan 2435 pesos 35 centavos, hallar el precio del metro de género aproximado en menos de un centavo.

Hallar los valores aproximados, con 3 cifras decimales, de los cocientes de

$$157. \text{ } .3 \text{ dividido por } 3, 5, 7 ; \quad .3325 \text{ dividido por } 5, 25, 125.$$

$$158. \text{ } 37,087 \text{ dividido por } 5 \text{ por } 9 \text{ y por } 45 ; \quad 380694 \text{ dividido por } .003, \text{ y } .025.$$

$$159. \text{ } .10101 \text{ dividido por } 18 \text{ y por } 0,00036 ; \quad .2001 \text{ dividido por } 1001 \text{ por } 100,1 \text{ y por } 1,001.$$

$$160. \text{ } 20,13972 \text{ dividido por } 42,1 ; \quad 645,7536736 \text{ dividido por } 14,155.$$

$$161. \text{ } 318,236520639 : 1,003446 ; \quad .6 : .7 ; \quad .054 : .02.$$

$$162. \text{ } .0009 : .0909 ; \quad .3936117 : .18 ; \quad .013426 : .03327.$$

57. Valor aproximado de un número dado en menos de otro dado. — Dado un número a cualquiera y otro entero o fraccionario α (*), llámase *valor aproximado por defecto* de a en menos de α , al mayor múltiplo de α inferior o igual a a ; ese valor, aumentado con α es el valor, *aproximado por exceso*, de a en menos de α ; si k es el entero por el cual debe multiplicarse α para tener el valor aproximado por defecto de a en menos de α se deberá tener, según definición:

$$k\alpha \leq a < (k+1)\alpha,$$

o también

$$k \leq \frac{a}{\alpha} < k+1;$$

(*) El símbolo α es una letra griega que se lee *alfa*.

luego k es la parte entera del cociente $\frac{a}{\alpha}$.

Así, los valores aproximados de $\frac{355}{113}$ en menos de $\frac{1}{7}$ se obtendrán hallando la parte entera del cociente $\frac{355 \times 7}{113} = \frac{2485}{113}$; se obtiene como cociente 21 y como resto 112; luego, el valor aproximado por defecto buscado es $\frac{21}{7} = 3$, y el por exceso $\frac{22}{7}$.

58. Errores. Definiciones. — Recordemos que cuando se reemplaza un número, considerado como exacto, por otro aproximado, el *error* cometido es la diferencia entre ambos números; el error es por *exceso* o por *defecto*, según que el segundo número sea mayor o menor que el primero.

Ordinariamente no se conoce ni el número exacto ni el error, sino únicamente un número respecto del cual el error es inferior; ese número se llama un **límite superior** o, simplemente, un **límite** del error.

Se dice que a_1 es un valor aproximado de a con un *error menor* que α por *exceso* o por *defecto*, según que el error sea en menos o en más.

59. Operaciones. Cálculos aproximados. — Adición. — Sean $a, b, c, d, \dots$ números incógnitos de los que se conocen valores aproximados $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$, y sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ (*) los límites superiores de los errores respectivos. Siendo los números $a, b, c, d, \dots$ mayores que $a_1 - \alpha, b_1 - \beta, c_1 - \gamma, d_1 - \delta, \dots$ y menores que $a_1 + \alpha, b_1 + \beta, c_1 + \gamma, d_1 + \delta, \dots$ la suma $a + b + c + d + \dots$ estará comprendida entre los números.

$$(a_1 - \alpha) + (b_1 - \beta) + (c_1 - \gamma) + (d_1 - \delta) + \dots \equiv \\ \equiv a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \dots - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots)$$

y

$$(a_1 + \alpha) + (b_1 + \beta) + (c_1 + \gamma) + (d_1 + \delta) + \dots \equiv \\ \equiv a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \dots + (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots)$$

(*) Los símbolos β, γ, δ , son letras minúsculas del alfabeto griego y se leen: *beta, gama, delta*, respectivamente.

los cuales difieren ambos de $(a + b + c + d + \dots)$ en un número igual a $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots$. Luego, al tomar como valor aproximado de la suma de los números $a + b + c + d + \dots$ la de sus valores aproximados $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \dots$ se cometerá un error menor que la suma de los límites de los errores.

Si se conoce el sentido de los errores, por ejemplo, si suponiendo cuatro sumandos se sabe que los dos primeros errores son por defecto y los otros dos por exceso, se podrá asegurar que, siendo a_1, b_1, c_1, d_1 , inferiores respectivamente a $a_1 + \alpha, b_1 + \beta, c_1 + \gamma$ y superiores respectivamente a $a_1, b_1, c_1 - \gamma, d_1 - \delta$, la suma estará comprendida entre $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 - (\gamma + \delta)$ y $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + (\alpha + \beta)$, y que, por tanto, $a_1 + b_1 + c_1 + d_1$ será un valor aproximado de la suma con un error menor que la mayor de las dos sumas obtenidas efectuando por una parte la suma de los errores por defecto y por otra la suma de los errores por exceso.

60. EJEMPLOS. — I. Hallar un valor aproximado de la suma de los tres números 31,428; 7,825 y 14,642, siendo todos los errores menores que 0,001.

31,428	Se efectuará la operación indicada al margen. El error que
7,825	afecta la suma 53,895 es menor que 0,003 y la suma verdadera
14,642	está comprendida entre 53,898 y 53,892; 53,89 es un valor apro-
53,895	ximado cuyas cifras son exactas.

II. Calcular con un error menor que $\frac{1}{10^4}$ la suma de los números fracciona-

rios $\frac{18257}{32549}, \frac{423678}{59474}, \frac{27}{9953}$.

Reduciendo cada uno de los números fraccionarios a otros decimales con cinco cifras decimales y sumando los valores aproximados así obtenidos, el error que afectará la suma será inferior a $\frac{3}{10^5}$ y por lo tanto, con mayor

razón, que $\frac{1}{10^4}$. Se obtiene el siguiente resultado:

0,56090	El valor 7,6873 es aproximado por defecto con un error inferior
7,12375	
0,00271	a $\frac{3}{10^5} + \frac{7}{10^5} = \frac{1}{10^4}$, y, por consiguiente, es el valor aproximado de la
7,68736	suma de los tres números fraccionarios dados en menos de $\frac{1}{10^4}$.

61. **Substracción.** — Es evidente que si a_1 y b_1 son valores aproximados de los números a y b con errores menores que α y β , el

número $a_1 - b_1$ será un valor aproximado de $a - b$ con un error menor que $\alpha + \beta$. Si a_1 y b_1 son valores aproximados en el mismo sentido, ambos por defecto o ambos por exceso, el error cometido tomando $a_1 - b_1$ por valor aproximado de $a - b$ es menor que el mayor de los valores α o β .

EJERCICIOS

163. Hallar el valor aproximado de $1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$

en menos de 0,000000005.

164. Una cantidad expresada aproximadamente con 3 cifras decimales exactas se multiplica por 24, ¿cuáles son los límites del error del resultado?

165. Tres cantidades expresadas aproximadamente con 3 cifras decimales exactas se juntan, ¿cuáles son los límites del error cometido en la suma?

Hallar los valores aproximados con 5 decimales de las siguientes cantidades expresadas en forma de series de un número ilimitado de términos:

$$166. \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{8^4} + \dots$$

$$167. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \dots$$

$$168. \frac{2}{5} + \frac{4}{5.10} + \frac{8}{5.10.15} + \frac{16}{5.10.15.20} + \dots$$

$$169. \frac{1}{1.4.7} + \frac{1}{4.7.10} + \frac{1}{7.10.13} + \frac{1}{10.13.16} + \dots$$

$$170. 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} + \dots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{239^5} - \dots \right)$$

62. Multiplicación. — Sean a_1 y b_1 valores aproximados de a y b con errores menores que α y β ; el producto ab estará comprendido entre

$$y \quad \begin{aligned} (a_1 - \alpha)(b_1 - \beta) &\equiv a_1 b_1 - a_1 \beta - b_1 \alpha + \alpha \beta \\ (a_1 + \alpha)(b_1 + \beta) &\equiv a_1 b_1 + a_1 \beta + b_1 \alpha + \alpha \beta, \end{aligned}$$

los cuales difieren de $a_1 b_1$ en una cantidad igual o menor que $a_1 \beta + b_1 \alpha + \alpha \beta \equiv a_1 \beta + (b_1 + \beta) \alpha \equiv b_1 \alpha + (a_1 + \alpha) \beta$, la que puede ser considerada como un límite superior del error que se comete

tomando $a_1 b_1$ como valor aproximado de ab . Se calcula *grosso modo* este límite reemplazando a_1 y $b_1 + \beta$ por números mayores, pero que permitan cálculos rápidos, por ejemplo, por los números que se deducen de a_1 y b_1 forzando la primera cifra de la izquierda y reemplazando todas las otras por ceros.

Cuando a_1 y b_1 son valores aproximados en sentido contrario, por ejemplo a_1 por defecto y b_1 por exceso, a y b son respectivamente mayores que a_1 y $b_1 - \beta$ y son respectivamente inferiores a $a_1 + \alpha$ y b_1 ; luego, el producto está comprendido entre $a_1 b_1 - a_1 \beta$ y $a_1 b_1 + b_1 \alpha$; puede pues tomarse en éstos, como límite del error cometido substituyendo $a_1 b_1$ por ab , al mayor de los números $a_1 \beta$ y $b_1 \alpha$.

63. *Ejemplo.* — Los valores aproximados de dos números son 18,751 y 0,0934; los errores correspondientes son inferiores a $\frac{1}{2 \times 10^3}$ y $\frac{1}{10^4}$; hallar el valor aproximado del producto.

Tomando $18,751 \times 0,0934 = 1,7513434$ como valor aproximado del producto, se comete un error menor que

$$\frac{1}{2 \times 10^3} \times 0,1 + \frac{1}{10^4} \times 20 = \frac{1}{2 \times 10^4} + \frac{2}{10^3} < \frac{3}{10^3}.$$

Ahora bien, al tomar como valor aproximado 1,75 se cometerá, por el hecho de suprimir las cifras decimales que siguen, un error inferior a $\frac{2}{10^3}$; luego,

el error total será menor que $\frac{3}{10^3} + \frac{2}{10^3}$ o sea que $\frac{1}{200}$; en resumen, el número

1,75 se aproxima al verdadero en menos de una media unidad del orden de la última cifra decimal.

64. *División.* — Sean a_1 y b_1 valores aproximados de a y b con errores menores que α y β , respectivamente; el cociente $\frac{a}{b}$ estará

comprendido entre $\frac{a_1 - \alpha}{b_1 + \beta}$ y $\frac{a_1 + \alpha}{b_1 - \beta}$, la diferencia entre $\frac{a_1}{b_1}$ y $\frac{a}{b}$ será, por consiguiente, inferior a la mayor de las dos diferencias.

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 - \alpha}{b_1 + \beta}, \quad \frac{a_1 + \alpha}{b_1 - \beta} - \frac{a_1}{b_1};$$

y como se tiene:

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 - \alpha}{b_1 + \beta} \equiv \frac{a_1(b_1 + \beta) - b_1(a_1 - \alpha)}{b_1(b_1 + \beta)} \equiv \frac{a_1\beta + b_1\alpha}{b_1(b_1 + \beta)}$$

$$\frac{a_1 + \alpha}{b_1 - \beta} - \frac{a_1}{b_1} \equiv \frac{(a_1 + \alpha)b_1 - a_1(b_1 - \beta)}{b_1(b_1 - \beta)} \equiv \frac{a_1\beta + b_1\alpha}{b_1(b_1 - \beta)}$$

estas dos diferencias son inferiores a

$$\frac{a_1\beta + b_1\alpha}{(b_1 - \beta)^2};$$

luego, podrá tomarse esta expresión como límite superior del error

cometido cuando se substituye $\frac{a_1}{b_1}$ por $\frac{a}{b}$. Para calcular esa ex-

presión, se reemplaza a_1 y b_1 en el numerador, por números mayores, por ejemplo, por los que se obtienen forzando la primera cifra de la izquierda y reemplazando las otras por ceros; al contrario, en el denominador, se reemplazará $b_1 - \beta$ por un número menor, por ejemplo, por el que se deduce de b , reemplazando por ceros todas las cifras menos la primera de la izquierda. Si los errores son de igual sentido en el numerador y en el denominador,

por ejemplo, si ambos están aproximados por exceso, la relación $\frac{a_1}{b_1}$

está comprendido entre $\frac{a_1 - \alpha}{b_1}$ y $\frac{a_1}{b - \beta_1}$, y como se tiene

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 - \alpha}{b_1} \equiv \frac{\alpha}{b_1}, \quad \frac{a_1}{b_1 - \beta} - \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1\beta}{b_1(b_1 - \beta)} < \frac{a_1\beta}{(b_1 - \beta)^2},$$

se podrá tomar como límite del error cometido reemplazando $\frac{a}{b}$

por $\frac{a_1}{b_1}$, el mayor de los números $\frac{\alpha}{b_1}, \frac{a_1\beta}{(b_1 - \beta)^2}$.

65. Ejemplo: $a_1 = 3,1415927$ y $b_1 = 0,0178964$ son valores aproximados de a y b ambos por exceso con errores menores que $\frac{1}{2 \times 10^7}$ ¿con cuántas cifras

decimales exactas puede tenerse el cociente $\frac{a}{b}$?

En vez de a_1 , tomaremos 4, y en vez de b_1 0,01; entonces de acuerdo con lo recién indicado, el error cometido al tomar $\frac{a_1}{b_1}$ como valor aproximado de $\frac{a}{b}$ es menor que el mayor de los números

$$\frac{\left(\frac{1}{2 \times 10^7}\right)}{0,01} = \frac{1}{2 \times 10^5} \quad \text{y} \quad \frac{4 \times \frac{1}{2 \times 10^7}}{(0,01)^2} = \frac{2}{10^3}$$

es decir, menor que 0,002; efectuando la reducción de $\frac{a}{b}$ hasta la tercera cifra decimal, se cometerá, por ese hecho, un error inferior a 0,001; luego, al adoptar tal valor como cociente, se comete un error menor que $0,02 + 0,001 = 0,003$; se halla 175,543; luego, $\frac{a}{b}$ está comprendido entre 175,546 y 175,540, su valor aproximado en menos de 0,01 es 175,54. Son, por consiguiente, dos las cifras decimales exactas del cociente buscado.

66. Potenciación. — De lo dicho relativamente a la multiplicación, se deduce que si a_1 es un valor aproximado de a con un error menor que α , a^2 se diferenciará de a_1^2 en menos de $2a_1\alpha + \alpha^2$; se tendría, análogamente, que a^3 se diferenciaría de a_1^3 en menos de $3a_1^2\alpha + 3a_1\alpha^2 + \alpha^3$, y así sucesivamente; se calculará el error grosso modo, reemplazando a_1 y α por números mayores, por ejemplo forzando las cifras, como se indicó al tratar de la multiplicación.

EJERCICIOS

Determinar cuáles son las cifras de los productos y cocientes siguientes que pueden considerarse exactas, suponiendo que los datos puedan considerarse lo más exactos posibles con las cifras en que están expresados:

171. $3,34 \times 5,71$; $52,31 \times 75,05$; $374,3 \times 5,75$.

172. $342,71 \times 17,8$; $567,84 \times 25,125$.

173. $846,812 \times 15,6241$; $3,72 : 1,5$; $37 : 5,21$.

174. $3,721 : 0,126$; $846,5 : 0,0124$; $576,5 : 25,75$.

175. $93,642 : 3,712$; $\frac{35,75 \times 0,17}{3,76}$; $\frac{345 \times 26,7}{2,45}$; $\frac{175,32 \times 15,7}{26,54}$.

CAPÍTULO IV

EL CONCEPTO DE LÍMITE MATEMÁTICO

EL NÚMERO IRRACIONAL

67. **El Concepto de límite matemático.** — Sea $\frac{a}{b}$ unidades, una cantidad fraccionaria no decimal, ni reducible a una decimal; sean, también, α_n unidades y β_n unidades, sus valores aproximados, respectivamente por exceso y por defecto, en menos de $\frac{1}{10^n}$; se tiene entonces:

$$\alpha_n \leq \frac{a}{b} < \beta_n, \quad \beta_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n};$$

la diferencia entre $\frac{a}{b}$ unidades y una cualquiera de las cantidades α_n unidades y β_n unidades es, a lo suma, igual a $\frac{1}{10^n}$, y puede tomarse

n bastante grande para que $\frac{1}{10^n}$ sea inferior a cualquier número

por pequeño que sea éste; se expresa lo anterior diciendo que es posible aproximarse a una cantidad fraccionaria cualquiera no decimal, ya en más, ya en menos, por medio de otras cantidades fraccionarias decimales. Tomando un número fijo ε (*) tan pequeño como se desee, es posible hacer corresponder a ε un número entero n tal que, para ese número y otros mayores, la diferencia entre $\frac{a}{b}$

(*) ε letra griega minúscula que se enuncia *epsilon*.

65. *Ejemplo.* — $a_1 = 3,1415927$ y $b_1 = 0,0178964$ son valores aproximados

unidades y α_n unidades, o entre $\frac{a}{b}$ unidades y β_n unidades, sea menor que ε . Se expresa lo anterior diciendo que las cantidades variable α_n y β_n tienen por *límite matemático* $\frac{a}{b}$ cuando n crece indefinidamente.

68. En general, llámase **límite matemático** de una serie de grandores matemáticos variables según cierta ley, a una cantidad fija a la que pueden aquéllos, en base a la ley que rige su variabilidad, acercarse tanto como se desee a punto de que las diferencias entre ellas y los valores de la cantidad fija, sean inferiores a cualquier cantidad dada por ínfima que sea ésta, sin poder, empero, alcanzarla.

69. Así, en el caso anterior, cuando n crece incesantemente, α_n tiende hacia $\frac{a}{b}$, sin alcanzarlo jamás, no obstante aumentar sin cesar; $\frac{a}{b}$ es el *límite matemático* superior de α_n ; al contrario, $\frac{a}{b}$ es el *límite matemático* inferior de β_n cuando n crece indefinidamente.

De igual manera vemos que $1 + \frac{1}{n}$, o sea $\frac{n+1}{n}$, tiene por límite matemático 1 cuando n crece indefinidamente; igualmente, la serie de valores:

$$\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n},$$

tiene por límite matemático 1; lo mismo que las siguientes:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}; \quad \frac{3}{2}, \frac{5}{5}, \frac{7}{7}, \dots, \frac{2n+1}{2n}.$$

Por último, es evidente que el límite matemático de los números fraccionarios decimales siguientes:

$$\begin{array}{ccccccc} 0,36 & ; & 0,37536 & ; & 4,36 & ; & 4,37536 \\ 0,3636 & ; & 0,3753636 & ; & 4,3636 & ; & 4,3753636 \\ 0,363636 & ; & 0,375363636 & ; & 4,363636 & ; & 4,375363636 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

son las fracciones generatrices de los números fraccionarios decimales periódicos $0.\dot{3}\dot{6}$, $0.375\dot{3}\dot{6}$, $4.\dot{3}\dot{6}$, $4.375\dot{3}\dot{6}$, es decir:

$$\frac{36}{99}, \frac{37536 - 375}{99000}, \frac{4 \times 99 + 36}{99}, \frac{437536 - 4375}{99000} \quad (\text{n.º 32 y siguientes}).$$

El límite matemático de la serie $0,9$; $0,99$; $0,999$; ... es 1 y el de la $4,9$; $4,99$; $4,999$; ... es 5 .

70. Los conceptos de cantidad y de número irracional. — Las operaciones inversas de la potenciación serán tratadas más adelante pero desde ahora podemos encarar el caso que ellas no sean posibles.

71. Supongamos que se trata de grandores continuos y se pregunte cuál es la cantidad que elevada al cuadrado, da 3 unidades. No existe desde luego ningún conjunto compuesto de un número entero de unidades que satisfaga a la cuestión puesto que un conjunto de una unidad elevado al cuadrado reproduce ese mismo conjunto de una unidad; y, por otra parte, un conjunto de dos unidades, elevado al cuadrado, da cuatro unidades, o sea ya más de 3 unidades, y a medida que aumenta el número de unidades del conjunto base, aumenta también el de su cuadrado.

Podemos, por lo tanto, escribir:

$$(1 \text{ unidad})^2 < 3 \text{ unidades} < (2 \text{ unidades})^2.$$

Para abreviar la escritura vamos a representar la unidad con la letra u .

De acuerdo con lo observado en el Vol. I (n.º 266, pág. 143): ese número entero 3 que no es potencia de otro número entero, tampoco podrá serlo de uno fraccionario. No existe pues ninguna cantidad que sea raíz cuadrada de $3u$, pero hay cantidades fraccionarias cuyo cuadrado se aproxima a $3u$ tanto como se quiere.

Efectivamente, los conjuntos $1u$ y $2u$, puede indicarse así: $\frac{10}{10}u$ y $\frac{11}{10}u$

$\frac{20}{10}u$; si consideramos entonces las cantidades fraccionarias $\frac{11}{10}u$,

$\frac{12}{10}u, \dots, \frac{19}{10}u$, observamos que, elevadas ellas al cuadrado e interpretadas esas operaciones como quedó indicado en el Vol. I (pág. 143, n.º 265), obtenemos cantidades que comienzan con $1u$ y terminan con $4u$; hay entonces, dos intermedios, que resultan ser $\frac{17}{10}u$ y $\frac{18}{10}u$, satisfaciendo a las condiciones

$$\left(\frac{17}{10}u\right)^2 < 3u < \left(\frac{18}{10}u\right)^2$$

Pero esos conjuntos $\frac{17}{10}u$ y $\frac{18}{10}u$ pueden indicarse así: $\frac{170}{100}u$ y

$\frac{180}{100}u$, de modo que considerando los intermedios: $\frac{171}{100}u, \frac{172}{100}u$,

$\dots, \frac{179}{100}u$, obtendremos, como antes, dos de ellos, que resultan ser

$\frac{173}{100}u$ y $\frac{174}{100}u$, satisfaciendo las condiciones:

$$\left(\frac{173}{100}u\right)^2 < 3u < \left(\frac{174}{100}u\right)^2$$

Y así indefinidamente, ya que como hemos recién recordado, nunca encontraremos una fracción que elevada al cuadrado, dé 3.

72. Las cantidades $1u, \frac{17}{10}u, \frac{173}{100}u, \frac{1732}{1000}u, \dots$, aumentan sin

cesar, pero en virtud de las desigualdades anteriores quedan siempre inferiores a cualquiera de las cantidades de la segunda serie: $2u, \frac{18}{10}u, \frac{174}{100}u, \frac{1733}{1000}u, \dots$

A su vez las cantidades de esa segunda serie, decrecen sin cesar quedando, sin embargo, siempre superiores a una cualquiera de las cantidades de la primera.

73. Resulta así que si bien la pregunta inicial ¿qué cantidad elevada al cuadrado origina una de 3 unidades?, debe contestarse diciendo que *no existe tal cantidad*, sin embargo, esa pregunta ha dado lugar a la determinación de dos series indefinidas de cantidades fraccionarias cuyos cuadrados se aproximan a 3 unidades cada vez más y más unos por defecto, otros por exceso, pudiendo acercarse a ese valor tanto como se desee de manera que la diferencia sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea; todas las cantidades de una de las series tienen sus cuadrados que se aproximan a 3 unidades en menos y todos los de la otra se aproximan en más a ese valor; 3 unidades es, entonces, el límite matemático inferior o superior de esa serie de cuadrados.

74. Al proceso de cálculo que ha determinado la formación de esas dos series, o, si se quiere, a la ley que hace salir los elementos de esas series es a lo que se ha dado el nombre de **número irracional** si se prescinde de la *unidad*, y de **cantidad irracional**, en caso contrario.

75. Como veremos más adelante (n.º 212), la operación que consiste en buscar qué cantidad, x , elevada a una potencia dada, n , origina una cantidad dada, a unidades, se llama *radicación* y se expresa así:

$$x = \sqrt[n]{a} \text{ unidades}$$

Si pues $a = 3$, y $n = 2$ se tendrá que

$$x = \sqrt[2]{3} \text{ unidades}$$

significa preguntar qué cantidad, x , elevada al cuadrado, da lugar a 3 unidades, o sea precisamente la pregunta formulada en el n.º 71.

76. Ya vimos que esa pregunta da lugar a un proceso de cálculo al que se ha dado el nombre de *número* o de *cantidad irracional*. Se ha convenido en representar el primero con el símbolo $\sqrt[2]{3}$, o simplemente $\sqrt{3}$; y al segundo con $\sqrt{3} \text{ unidades}$. En base a ese proceso de cálculo realizado o esbozado en los n.ºs 71 y 72, se escribe

$$\sqrt{3} = 1,7321\dots\dots,$$

lo que significa, en suma, que, si se eleva al cuadrado 1,7321 se obtiene no precisamente 3, pero sí un número (que aquí es 3,00017041),

que se diferencia muy poco de 3 y que se diferenciará tanto menos cuantos más decimales pongamos en el lugar de los puntos suspensivos, determinándolas por aplicación del referido proceso de cálculo. Más adelante (en los números 251 y siguientes, págs. y), se indicará cómo se ejecuta en la práctica ese cálculo, y cómo se estiman las aproximaciones

77. El raciocinio anterior puede repetirse siempre que se haga la pregunta paradójal ¿cuál es el conjunto que elevado a la potencia b origina un conjunto de a unidades, no existiendo ningún conjunto entero o fraccionario que elevado a esa potencia entera b origine el de a unidades?

Tendremos, entonces, simbólicamente

$$\sqrt[b]{a} \text{ unidades} = \sqrt[b]{a} \text{ unidades}$$

$\sqrt[b]{a}$ siendo el símbolo que define el proceso de cálculo que da lugar a dos series indefinidas de cantidades fraccionarias, que constituyen lo que hemos abreviadamente llamado un *número irracional*.

78. A las cantidades enteras y fraccionarias se les dice en general, **cantidades racionales**, lo mismo que a los números enteros y fraccionarios se le dice **números racionales**, justamente para diferenciarlos de las cantidades y números irracionales que acabamos de definir. Aquéllos corresponden a procesos finitos; éstos a procesos análogos, pero que se prosiguen sin término. Más detalles se darán en los n^{os}. 249 y siguientes.

CAPÍTULO V

MEDIDA DE LOS GRANDORES MATEMÁTICOS

MEDIDA DEL TIEMPO

79. Definiciones.— En lo que sigue consideraremos grandores matemáticos continuos. Fijada la *unidad*, la cantidad a expresar está determinada enunciando el número entero o fraccionario de unidades que comprende, y de las que por consiguiente pueden considerarse suma, agregado o conjunto. Ese número se llama también *medida* de la cantidad en base a la unidad adoptada.

Medir la cantidad es determinar ese número entero o fraccionario. Claro está que si se habla de “cantidades irracionales” (como en el n.º 77), no hay caso de hablar de mediciones, por eso y para distinguirlas desde ese punto de vista, se las dice “cantidades incommensurables”.

80. Grandores matemáticos continuos más usuales.— **Elección de las unidades.** Los grandores continuos más sencillos y que más usualmente se presentan en la práctica son los siguientes: las longitudes, las áreas, los volúmenes, el peso de los cuerpos, las sumas de dinero, el tiempo. Las unidades idénticas en que pueden considerarse descompuestas estas cantidades no vienen ya impuestas por su naturaleza como en los grandores discontinuos, sino que pueden elegirse libremente, sólo que, una vez elegida una unidad, no conviene variarla; lo mismo decimos de las unidades secundarias en que pueden aquéllas considerarse descompuestas a su vez. Veremos más adelante un sistema de unidades llamado **métrico decimal**; entre tanto, hablaremos especialmente del tiempo como cantidad matemática.

81. Unidades de tiempo.— El tiempo que tarda la Tierra para dar una vuelta alrededor de sí misma se llama **un día** (*); este tiempo

(*) Es el *día sideral*; el *día solar medio* es el que tarda la Tierra, en dar la vuelta alrededor de sí misma, hasta volver a pasar frente al llamado *sol medio*; es el día que encaramos en el texto.

puede tomarse como unidad de *tiempo*. A su vez el día puede considerarse como un conjunto de 24 unidades idénticas de tiempo llamadas **horas**, las horas, a su vez, como un conjunto de 60 unidades llamados **minutos**, el minuto como el conjunto de 60 **segundos**; un tiempo que corresponde a 365 días se llama, en general, un **año**, el que corresponde a 100 años un **siglo**. Luego, un siglo es el tiempo que comprende 100 años, el año el que comprende 365 días, un día el que comprende 24 horas, la hora el que comprende 60 minutos y el minuto el que comprende 60 segundos. El tiempo que corresponde a 7 días se llama una **semana**. El que corresponde a cinco años, un **lustro**.

82. Reducción de unidades. — Si un minuto es el tiempo equivalente a 60 segundos, una hora, que equivale a 60 minutos, equivaldrá a 60×60 o sea 3600 segundos; de igual manera, un día equivaldrá a 24×60 o sea 1440 minutos y a $1440 \times 60 = 86400$ segundos, y así sucesivamente; viceversa, 500 días equivalen a 1 año y 135 días; 80 horas equivalen a 3 días y 8 horas; 70 minutos equivalen a una hora y 10 minutos, etc. La regla que hay que seguir para hacer estas reducciones es, evidentemente, la siguiente:

83. *Para pasar de unidades superiores a otras inferiores se multiplica el número de aquéllas por el que indica cuántas unidades inferiores existen en la superior. Para pasar de unidades inferiores a superiores, se divide el número de aquéllas por el que indica cuántas unidades inferiores se necesitan para originar una superior, el cociente de la división es el buscado, el resto indica cuántas unidades inferiores quedan sin alcanzar a originar una superior.*

84. Así, para reducir 5 siglos y 7 años a años, multiplicaremos 5 por 100, que es el número de años que existen en un siglo, y agregaremos los 7 años; tendríamos 507 años; o viceversa, para reducir 507 años a unidades superiores dividiremos 507 por 100, el cociente 5 nos dará el número de siglos y el resto 7 el de años que no alcanzan a formar un siglo; tendremos que 507 años equivalen a 5 siglos más 7 años.

85. Unidades de tiempo. — El año real o *tropical*, como se le llama, no se compone de 365 días solares medios, como hemos supuesto, sino de 365,24225 días; generalmente se le considera de 365, pero entonces, para compensar el cuarto de

día despreciado, cada cuatro años se considera un año de 366 días que se llama *bisiesto*; sin embargo, como de esta manera se comete un pequeño error inverso que es de 3 días en cada 400 años, se suprime en 4 siglos tres años bisiestos.

El cuadro siguiente da una idea clara de la cuestión:

	Días
Año trópico	365,24225
Año común	365
Atraso	0,24225
Atraso en 4 años	0,969
Reforma llamada juliana, adición de un día	1
Adelanto cada 4 años	0,031
Adelanto en 100 años o sea 25 veces 4 años	0,775
Reforma llamada gregoriana, quitando un día cada 100 años	1
Atraso en 100 años	0,225
Atraso en 400 años	0,9
Otra reforma gregoriana, adición de un día cada 400 años	1
Adelanto	0,1
Adelanto en 400 años	1

Puede notarse que la expresión

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} - \frac{1}{4000}$$

reducida a número fraccionario decimal origina 365,24225.

De aquí la siguiente regla:

El año civil se compone de 365 días, pero aquellos años cuyo número de orden es un múltiplo de 4, tienen 366 y se llaman bisiestos; pero los años seculares cuyo número de orden no es divisible por 400 no son bisiestos, a excepción de aquellos que son divisible por 400.

Así, 1897 es un año ordinario de 365 días, 1896 es bisiesto, 1900 también, pero el año 2000 no lo es.

En cuanto a los meses, no son todos de 30 días, sino que, como es sabido, se verifica que enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre tienen 31 días, los otros meses tienen 30 días a excepción de febrero que tiene 28 días en los años ordinarios y 29 en los bisiestos.

En las transacciones comerciales se supone el año de 360 días, y se le llama *financiero* o *comercial*.

PROBLEMA. — *Hallar qué día de la semana corresponde al 19 de marzo de 1853, sabiendo que el 10 de noviembre de 1902 es un lunes.*

Tenemos que, desde el 19 de marzo de 1853 al 10 de noviembre de 1853 son $12 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 10 = 236$ días. De 1853 a 1902 inclusive van 49 años o sea 38 años ordinarios + 11 bisiestos.

Total: $236 + 38 \times 365 + 11 \times 366 = 236 + 13870 + 4026 = 18132$ días, o sea 2590 semanas más 2 días.

Se trata, pues, de un sábado (dos días antes de lunes).

EJERCICIOS

176. ¿De cuántos minutos se compone 3 días?
 177. ¿A cuántos segundos equivalen 3 siglos y 7 semanas?
 178. ¿A cuántas horas equivalen 2 años y 5 días?
 179. ¿A cuántos lustros equivalen 7 siglos y 40 años?
 180. ¿A cuántos minutos equivalen 3 lustros y 5 horas?
 181. ¿A cuántos días equivalen 4 siglos y 10 semanas?
 182. ¿A cuántas semanas equivalen 8 lustros y 2 años?
 183. ¿A cuántos minutos equivalen 2 siglos, 3 años y 5 semanas?
 184. ¿A cuántos segundos equivalen 3 siglos y 7 minutos?
 185. Expresar en base a unidades más altas las siguientes cantidades: 757 días; 1452 horas; 7457 minutos y 437 segundos; 575 lustros 827 horas y 628 minutos; 1457890 segundos.

Véase también los ejercicios nos. 737 a 745 pág. 274.

86. Adición de cantidades matemáticas continuas. — Es evidente que si dichas cantidades están expresadas en base a una misma unidad, basta sumar los números que indican cuántas unidades tienen las cantidades a sumar, para tener el número de unidades de la suma. Así, la suma de 7 años, de 3 años y de 2 años, es 12 años. Ahora, si las cantidades no están expresadas en base a una única unidad, se puede, o expresarlas todas en base a la unidad más pequeña, como se indicó en el Vol. I (n.º 228, pág. 121), o sumar separadamente las unidades de cada categoría, expresándolas después en la forma que se desee mediante una nueva reducción a unidades más altas o más bajas. Por ejemplo, si se quiere resolver el problema siguiente:

Investigar qué tiempo separa dos acontecimientos históricos sabiendo que otro acontecimiento intermediario se verificó 3 siglos, 47 años y 37 días después del primero y 2 siglos, 64 años y 355 días antes que el segundo.

Es evidente que bastará hacer la suma de los dos períodos indicados, a saber, 3 siglos, 46 años, 37 días; y 2 siglos, 64 años 355 días; el primer período reducido a días nos da $3 \times 100 \times 365 + 47 \times 365 + 37 = 126692$ días; el otro equivale a $2 \times 100 \times 365 + 64 \times 365 + 355 = 96715$ días; luego el tiempo buscado es $126692 + 96715 = 223407$, días; reducidos a unidades superiores, resulta que 223407 días equivalen a 612 años, 27 días, y como 612 años equivalen a 6 siglos, 12 años, resulta que el tiempo buscado es 6 siglos, 12 años y 27 días.

87. Podíamos también haber efectuado la operación de la siguiente manera:

3 siglos	47 años	37 días	Diremos: 37 días + 355 días son
2 „	64 „	355 „	392 días; 47 años + 64 años son 111
5 siglos	111 años	392 días	años; 3 siglos + 2 siglos son 5 siglos;
6 „	12 „	27 „	luego, el tiempo buscado se compone
1	1		de 5 siglos, 111 años y 392 días; pero
3 siglos	47 años	37 días	392 días son 27 días más 1 año, de
2 „	64 „	355 „	suerte que como ya que en el tiempo
6 siglos	12 años	27 días	había 111 años, resultan 112 años, o
			sea 1 siglo más 12 años; y como ya
			había 5 siglos resulta 6 siglos; prácti-
			camente se efectúa de una vez la operación como se indica en el
			cuadro inferior.

Las explicaciones anteriores justifican la siguiente:

88. Regla práctica. — *Para adicionar varias cantidades de una misma especie expresadas en base a distintas unidades, se escriben sus símbolos unos debajo de los otros de tal manera que se encuentren en una misma columna los números que expresan las unidades idénticas de las cantidades a sumar; se adicionan, luego, separadamente estas unidades idénticas, teniendo cuidado, si esta suma origina un número mayor que el de las unidades de la misma especie contenidas en la unidad superior, de haber la reducción, reteniendo el número de unidades de la especie superior para añadirla a la suma de las mismas.*

EJERCICIOS

Efectuar las adiciones siguientes:

186. 29 días 12 horas 44 minutos 2 segundos + 27 días 7 horas 43 minutos 11 segundos.

187. 5 días 35 minutos 42 segundos + 28 horas 48 minutos 14 segundos + 6 horas 45 segundos + 52 minutos 10 segundos + 2 horas 18 minutos.

188. 43 siglos 8 años 300 días 18 horas 40 minutos 30 segundos + 18 siglos 97 años 89 días 23 horas 38 minutos 56 segundos + 57 siglos 2 años 99 días 19 horas 49 minutos 16 segundos + 111 siglos 99 años 359 días 23 horas 59 minutos 59 segundos.

189. 144 siglos 4 minutos 2 segundos + 37 años 47 horas + 364 días 28 horas + 1 siglo 7 años 2 minutos.

89. Substracción. — Si las cantidades están expresadas en base a una misma unidad, basta restar el número que expresa cuántas unidades hay en el substraendo, del que expresa cuántas hay en el minuendo, para tener el relativo a la resta. Así, 7 años menos 2 años son evidentemente 5 años. Si las cantidades están expresadas en base a diversas unidades, se puede expresarlas todas en base a la menor de dichas unidades como se indicó en el n.º 86, o bien restar separadamente las unidades de cada especie del substraendo de las de igual especie del minuendo; si alguna de estas substracciones parciales es imposible, se la hace posible agregando al minuendo parcial una unidad de la especie inmediata superior, teniendo cuidado de descontar esta unidad al efectuar la substracción parcial siguiente. Por ejemplo:

90. Sea restar de 6 siglos, 12 años y 27 días un período de 3 siglos, 47 años y 37 días. Reduciendo todo a días tendremos que restar de 223407 días (equivalentes a 6 siglos, 12 años y 27 días), 126692 días (equivalente a 3 siglos, 47 años y 37 días); obtenemos 96715 días o sea 2 siglos, 64 años y 355 días.

91. Podríamos también efectuar la operación como lo indica el cuadro siguiente:

Diremos: 37 días no pueden ser restados de 27 días, agrego, en				consecuencia, un año a 27 días y tengo
6 siglos	12 años	27 días		$27 + 365 = 392$ días; 37 días restados
3 „	47 „	37 „		de 392 días nos da 355 días; 47 años
2 siglos	64 años	355 días		no pueden ser restados de 11 años (es
				decir de 12 años menos 1 año extraído

para agregarlo a 27 días), por consiguiente, agrego 1 siglo a 11 años y tengo 111 años, menos 47 años son 64 años; 3 siglos restado de 5 siglos, es decir, de 6 siglos menos 1 siglo (extraído para agregar a los 11 años) son 2 siglos; luego, el resto buscado es 2 siglos, 64 años y 355 días.

92. Regla práctica. — *Para substraer una cantidad de otra de misma especie expresada en base a distintas unidades, se escribe el substraendo debajo del minuendo de tal manera que se correspondan las unidades idénticas; se subtrae luego separadamente las unidades de cada categoría del substraendo, de las correspondientes del mi-*

nuendo, agregando a estas últimas, si necesario es, una unidad del orden inmediato superior, en cuyo caso se descontará esta unidad de las idénticas del minuendo, o se agregará una de las mismas, a las idénticas del substraendo.

EJERCICIOS

Efectuar las subtracciones siguientes:

190. 7 siglos 5 días — 3 años 25 segundos.

191. 8 semanas 7 horas 3 segundos — 15 días 13 minutos.

192. 17 siglos 9 años 29 días — 3 siglos 99 años 59 segundos.

193. 5 siglos 14 años 15 días — 80 años 20 días 7 horas.

194. 3 años 1 día 1 hora 1 minuto — 2 años 359 días 23 horas 59 minutos.

93. Multiplicación. — Es evidente que, para multiplicar una cantidad expresada en base a distintas unidades por un número, basta multiplicar separadamente los conjuntos de unidades de las varias especies por dicho número, y efectuar las reducciones a unidades superiores que hubiera lugar. También puede reducirse las diversas unidades a la de orden inferior, multiplicar el número de éstas por el multiplicador y efectuar luego la reducción a unidades de especie superior.

94. Ejemplo. — Sea multiplicar por 10 el período de 6 siglos, 12 años y 27 días. El producto se compondrá de $6 \times 10 = 60$ siglos, $12 \times 10 = 120$ años y $27 \times 10 = 270$ días, o sea 61 siglos, 20 años y 270 días. También, reduciendo a días se tendrá $223407 \text{ días} \times 10 = 2234070 \text{ días}$, lo que, reducidos a unidades superiores, originarían el mismo resultado anterior.

EJERCICIOS

Efectuar las multiplicaciones siguientes:

195. (93 años 7 días) $\times$ 24.

196. (7 siglos 10 años 9 minutos) $\times$ 15.

197. (99 años 359 días 23 horas 59 minutos) $\times$ 999.

198. Un fenómeno se produce periódicamente cada 29 días 7 horas 8 minutos 19 segundos, ¿cuánto tiempo se requiere para que se produzcan 57 veces?

95. División. — Basta reducir a unidades inferiores, efectuar la división, que supondremos exacta, y reducir luego el resultado a unidades superiores.

Así, para dividir por 10, 61 siglos, 20 años y 270 días, reduciremos a días el dividendo y tendremos que dividir 2234070 días por 10, lo que nos da 223407 días o sea 6 siglos, 12 años y 27 días.

Es evidente que si los diversos grupos de unidades componentes son divisibles por el divisor, bastará efectuar estas divisiones parciales. Así, 6 siglos, 12 años y 240 días, divididos por 3, corresponden a

$$\frac{6}{3} \text{ siglos } \frac{12}{3} \text{ años } \frac{240}{3} \text{ días o sea 2 siglos, 4 años y 80 días.}$$

96. Potenciación. — Esta operación supone cantidades expresadas en base a una sola unidad y, por lo tanto, no es apreciable a los conjuntos expresados en base a distintas unidades, salvo que, previamente, se especifique a cuál de estas unidades deben referirse.

Así, para elevar 2 pesos al cuadrado en base a centavos, se tendrá que 2 pesos equivalen a 200 centavos y como $200^2 = 40000$, resulta que el cuadrado pedido es 40000 centavos, o sea 400 pesos. Si debiera elevarse al cuadrado en base a la unidad peso, se tendría que 2 pesos elevados al cuadrado, son 4 pesos.

EJERCICIOS

Efectuar las operaciones siguientes:

199. (7 siglos 10 días 20 horas) : 10.

200. (61 siglos 20 años 270 días) : (6 siglos 12 años 27 días).

201. Dividir 999 siglos 16 horas 39 minutos por 999.

202. Si un fenómeno se verifica periódicamente cada 29 días 7 horas 8 minutos 19 segundos, ¿cuántas veces se verificará en 4 años 209 días 22 horas 54 minutos 3 segundos?

203. Elevar al cubo 7000 centavos en base a la unidad centavo.

204. Elevar al cuadrado 29 días 7 horas 8 minutos 19 segundos tomando como unidad el segundo.

CAPÍTULO VI

§ 1. — SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

97. Unidades principales. Múltiplos y submúltiplos. — El sistema métrico se aplica para expresar especialmente las siguientes cantidades matemáticas: *longitudes, áreas, volúmenes, pesas y monedas.*

La unidad fundamental del sistema es el **metro** (por esta razón se le llama *métrico*). El metro es la longitud que tiene a 0° de temperatura, una regla de platino depositada en los archivos nacionales franceses. Corresponde, aproximadamente, a la cuarenta millonésima parte de la longitud de un meridiano terrestre.

Para cada especie de cantidades, (es decir, de longitudes, áreas, volúmenes, etc.) existe una unidad principal; a saber: el *metro* para las longitudes, el *metro cuadrado* para las áreas, el *metro cúbico* para los volúmenes, el *gramo* para las pesas, y el *franco* para las monedas. Todas ellas están ligadas ingeniosamente con el metro, según se verá oportunamente.

A cada unidad principal corresponden otras secundarias, las cuales son *múltiplos* o *submúltiplos decimales* de esas unidades (por eso se llama *decimal* este sistema).

Los múltiplos se designan con las partículas **deca, hecto, kilo, miria** (que significan diez, cien, mil y diez mil) antepuestas al nombre de la unidad principal.

Los submúltiplos se designan análogamente con los prefijos **deci, centi, mili** (que significan décimo, centésimo y milésimo) antepuestos al nombre de la unidad principal.

98. Unidades de longitud (*). — Hemos ya definido la unidad fundamental llamada *metro*. Esta se designa abreviadamente así: m. (**). De lo dicho anteriormente tenemos las siguientes unidades secundarias:

(*) La definición *exacta* de la noción de longitud de una línea, es del resorte de la Geometría; pero la noción vulgar, de sentido intuitivo, nos basta para el caso.

(**) Las abreviaturas que indicamos son las establecidas oficialmente en 1878 por una comisión internacional; y su uso es *obligatorio* en Francia en virtud de la ley de 11 de julio de 1903 y del decreto presidencial de 28 de julio de 1903.

múltiplos { El *decámetro* (dam.) que vale 10 metros.
 El *hectómetro* (hm.) que vale 100 metros.
 El *kilómetro* (km.) que vale 1000 metros.

El *miriámetro* (Mm.) que vale 10000 metros.

submúltiplos { El *decímetro* (dm.) que vale 0,1 metro.
 El *centímetro* (cm.) que vale 0,01 metro.
 El *milímetro* (mm.) que vale 0,001 metro.

Se usan también a veces el *megámetro* (un millón de metros), y el *micron* (μ) que es un millonésimo de metro.

99. Numeración. — Como los múltiplos o submúltiplos constituyen unidades de diversos órdenes ligadas por la relación de que cada una es diez veces mayor que la precedente y diez veces menor que la siguiente, las cantidades se expresan en este sistema como los números enteros o los fraccionarios decimales; para indicar la cifra de la unidad elegida se escribe una coma a su derecha y después del número se escribe el símbolo representativo de dicha unidad. Así, 4,5 m. representa 4 metros 5 décimos de metro, esto es 4 metros 5 decímetros; 8,532 km. significa 8 kilómetros 5 hectómetros 3 decámetros 2 metros u 8 kilómetros 532 metros. Se escribe también a menudo así: 4^m,5; 8^{km},532.

100. Elección de la unidad. — La unidad principal se elige en cada caso según el valor de las longitudes a expresar. Generalmente se elige el metro. Esto sucede, por ejemplo, cuando quiere expresarse la altura de un edificio, la longitud de una pieza de género, etc.

Para hallar prácticamente la medida de una longitud a expresar en metros, se hace uso de instrumentos de diversas formas.

Así, para apreciar la longitud de una pieza de género, se usa lo que se llama *metro-cinta*, el cual viene a ser una cinta de un metro de longitud dividida en centímetros; también se usa un *metro de madera*, el cual consiste en una vara de madera de un metro de longitud igualmente dividida en centímetros.

Los albañiles y demás obreros constructores de edificios usan el metro plegadizo (fig. 1), compuesto de diez trozos articulados de 1 decímetro de longitud cada uno, divididos en centímetros y el primer trozo en milímetros.

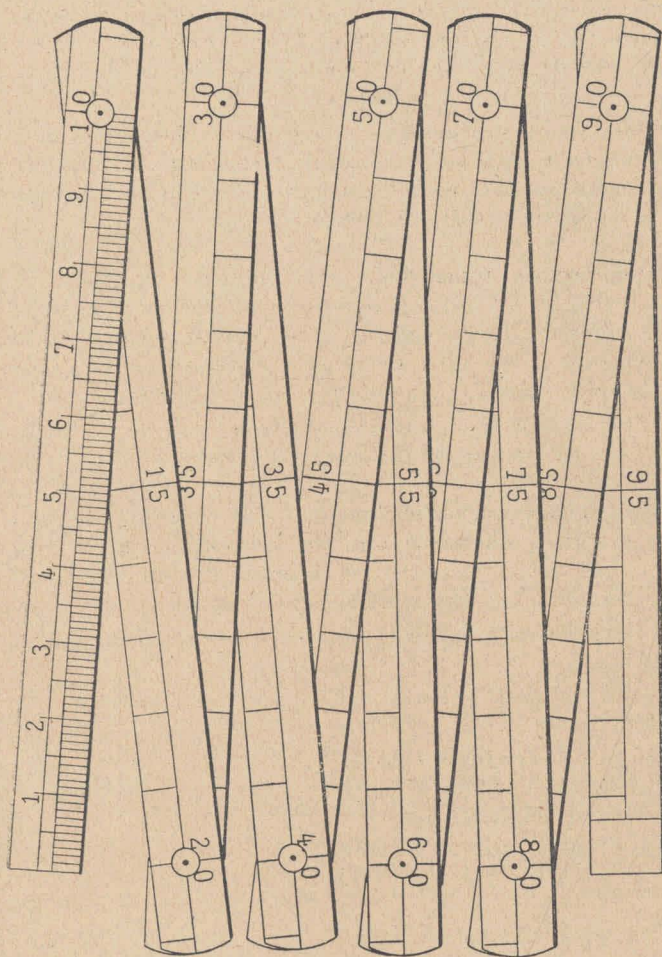


Fig. 1. — Metro plegadizo, tamaño natural.

Para las medidas de campos y en agrimensura, se usa como unidad el decímetro, y como instrumento la *cadena de agrimensor*, formada por 50 eslabones de 2 decímetros cada uno, o la cinta de agrimensor de 10 metros de longitud, dividida en decímetros y a veces en centímetros y milímetros.

Para pequeñas longitudes se usa el centímetro y el milímetro como unidades. Así, los espesores de las maderas, en carpintería, y el diámetro interior de los cañones están expresados respectivamente en centímetros y milímetros.

101. Medidas itinerarias. — Para grandes longitudes se usa como unidad el kilómetro y a veces el miriámetro. Las longitudes de los caminos y de las vías férreas se indican con postes distantes un kilómetro uno de otro. Entre ellos se colocan postes más pequeños los cuales sirven para apreciar los hectómetros.

En geografía y navegación se usa a veces como unidad la *legua métrica* que equivale a cuatro kilómetros.

102. Unidades superficiales (*). — La unidad principal es el **metro cuadrado**, que es el área que corresponde a un cuadrado cuyos lados tienen un metro de longitud. Se expresa abreviadamente así: $m.^2$.

Los múltiplos y submúltiplos vienen a ser los siguientes:

Múltiplos:	Corresponde al área de un cuadrado cuyos lados tienen de longitud
Decámetro cuadrado ($dam.^2$)	1 $dam.$
Hectómetro cuadrado ($hm.^2$)	1 $hm.$
Kilómetro cuadrado ($km.^2$)	1 $km.$
Miriámetro cuadrado ($Mm.^2$)	1 $Mm.$
Submúltiplos:	
Decímetro cuadrado ($dm.^2$)	1 $dm.$
Centímetro cuadrado ($cm.^2$)	1 $cm.$
Milímetro cuadrado ($mm.^2$)	1 $mm.$

(*) La definición exacta del número que mide una área dada, corresponde a la Geometría.

103. Área de una superficie.—Consideremos el cuadrado MNPQ (fig. 4). Si sus lados MN, NQ, QM, QP, tuviesen un metro de longitud, la porción de papel encerrada por él sería, entonces, 1 m.^2 . Ahora bien, se llama en general *área* de una superficie limitada por una línea, a la porción de ella encerrada por dicha línea

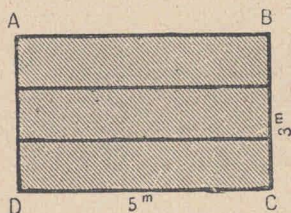


Fig. 2.

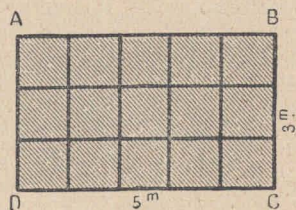


Fig. 3.

expresada en base al metro cuadrado. Así, el área encerrada por la línea ABCD (figs. 2 y 3) sería 15 metros cuadrados, suponiendo que AB tuviese 5 metros y BC, 3 metros; y entonces se puede considerar ABCD como el conjunto de quince cuadrados iguales al metro cuadrado.

En general, para medir el área de una porción de superficie plana, se busca cuántos metros cuadrados, decímetros cuadrados, etc., contiene.

En ciertos casos, como en el de las figuras 2 y 3, esta operación no presenta dificultad. Si cada una de las porciones iguales en que está dividido BC, tuviese en vez de un metro, un centímetro, siendo también AB igual a 5 centímetros, se tendría ABCD descompuesto en quince centímetros cuadrados; su área sería, pues, 15 cm.^2 .

Las porciones superficiales de la forma ABCD de las figuras 2 y 3, se llaman *rectángulos*; AB, BC, CD y DA, se llaman los lados, la longitud de uno de los lados mayores AB o CD, se llama el *largo*, la de uno de los otros dos, el *ancho* del rectángulo.

104. Numeración.—Una unidad superficial cualquiera contiene cien unidades superficiales del orden inmediato inferior. Así:

1 dam.² contiene cien metros cuadrados

1 hm.² contiene cien decámetros cuadrados

- 1 km.² contiene cien hectómetros cuadrados
- 1 m.² contiene cien decímetros cuadrados
- 1 dm.² contiene cien centímetros cuadrados
- 1 cm.² contiene cien milímetros cuadrados.

Es fácil comprobar tal principio.

Imaginemos dibujados un cuadrado y dividido cada lado en diez partes, iguales, uniendo los puntos de división por rectas, como

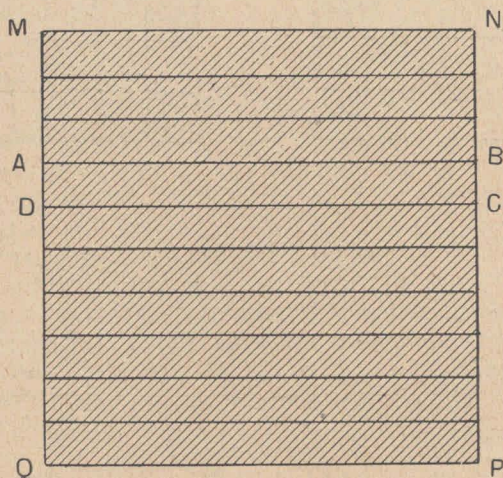


Fig. 4.

indican las figuras 4 y 5, salta a la vista que el cuadrado primitivo resulta descompuesto en cien cuadrados iguales más pequeños, cuyo lado es la décima parte del lado del cuadrado primitivo.

Por de pronto se forman (fig. 4) diez bandas (una de ellas ABCD), las cuales resultan después descompuestas cada una en diez cuadrados (uno de ellos es el ACMN, fig. 5); luego resultan $10 \times 10 = 100$ cuadrados.

Si el cuadrado grande MNPQ es 1 m.² cada uno de los chicos en que está descompuesto será 1 dm.². Luego 1 m.² equivale a 100 dm.², y de análoga manera se demuestran las otras equivalencias establecidas.

De lo anterior se deduce también que 1 m.² equivale a $100 \times$

100 = 10000, centímetros cuadrados, y a $100 \times 100 \times 100 = 1000000$, milímetros cuadrados.

1 hm.² equivale a 10000 m.²

1 km.² » 1000000 m.²; etc.

Para enunciar un número que expresa unidades superficiales, es menester tomar algunas precauciones debido a la circunstancia

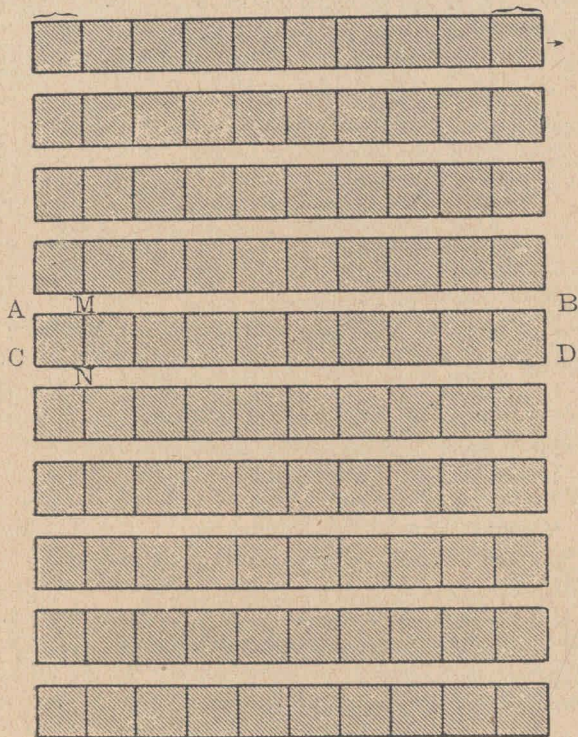


Fig. 5.

de que las unidades crecen de 100 en 100 en vez de crecer de 10 en 10, como en el caso de las longitudes.

Así, una área de 4,5261 hm.² comprende 4 hm.² 52 dam.² y 61 m.², puesto que 52 centésimos de hm.² son 52 dam.², desde que

la centésima parte de un hm.² es dam.², y así sucesivamente. De aquí la siguiente:

Regla. — *Para leer un número expresando una área, se subdivide mentalmente la parte decimal del número en secciones de dos cifras a contar del signo decimal. Se enuncia primero la parte entera seguida del nombre de la unidad principal, luego, a continuación, las secciones de dos cifras, seguidas de los nombres de las unidades de orden inferior sucesivas. Si el número de cifras decimales es impar, se agrega un cero a la derecha.*

También puede, evidentemente, extenderse, a la parte entera, la descomposición hecha a partir del signo decimal, nombrando las unidades sucesivas superiores.

Así, la expresión 13456,789030 m.², se enunciaría 13456 m.² 78 dm.² 90 cm.² 30 mm.², o bien 1 hm.² 34 dam.² 56 m.² 78 dm.² 90 cm.² 30 mm.².

Resulta también de lo anterior, que si se quiere cambiar la unidad principal, el número que expresa el área de una superficie debe multiplicarse o dividirse por 100, 10000, 1000000, según que se tome una unidad 10², 10⁴, 10⁶ veces mayor o menor; esto equivale a correr la coma de 2, 4, 6 lugares a la derecha o a la izquierda. Así, en vez de decir 1434 m.² 7840, puede decirse 14,347840 dam.² o 143478,40 dm.².

105. Medidas agrarias. — Para medir campos, prados o bosques, se toma como unidad el dam.² que se llama entonces especialmente *área* (a.); en estos casos, se usan exclusivamente como múltiplos y submúltiplos, la **hectárea** (ha.) y la **centiárea** (ca.), unidades que representan respectivamente 100 áreas y 0,01 área, o sea un hectómetro cuadrado y 1 metro cuadrado. Por ejemplo, 78,23 a. se leen 78 áreas 23 centiáreas y equivale a 7823 m.² o a 78 dam.² 23 m.²; lo mismo, 45 ha. 713 se lee 45 hectáreas 71 áreas 30 centiáreas.

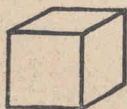


Fig. 6.

En resumen, tenemos la siguiente correspondencia:

Hectárea (ha.) equivale al hectómetro cuadrado;
 Área (a.) equivale al decámetro cuadrado;
 Centiárea (ca.) equivale al metro cuadrado.

106. Unidades de volumen (*).—La unidad principal de volumen es el *metro cúbico*, que es el volumen de un cubo (un cuerpo en forma de dado), (fig. 6), cuyas aristas tienen 1 metro de longitud.

Se designa el metro cúbico así: $m.^3$.

Generalmente no se usan múltiplos del cubo, pero estos serían el decámetro cúbico ($dam.^3$), el hectómetro cúbico ($hm.^3$), etc., los cuales representarían los volúmenes de los cubos cuyas aristas tuvieran respectivamente 1 $dam.$, 1 $hm.$, etc., de longitud. Los submúltiplos, usados bastante frecuentemente, son los siguientes:

	Representa el volumen de un cubo cuyas aristas tienen una longitud de
Decímetro cúbico ($dm.^3$)	1 $dm.$
Centímetro cúbico ($cm.^3$)	1 $cm.$
Milímetro cúbico ($mm.^3$)	1 $mm.$

107. Volumen de un cuerpo.—Medir un volumen es hallar cuántos $m.^3$, $dm.^3$, $cm.^3$, $mm.^3$ contiene. En ciertos casos esta operación no ofrece dificultad alguna. Así, el volumen de un cuerpo de la forma de la figura 7, cuyas aristas tienen, respectivamente, 6 $cm.$, 4 $cm.$ y 3 $cm.$ es $6 \times 4 \times 3 = 72 \text{ cm.}^3$, como lo indica claramente la figura misma, pues se pueden considerar cuatro capas de $3 \times 16 = 48$ cubos de un centímetro cúbico constituyendo el cuerpo. Si el cuerpo cuyo volumen quiere medirse es hueco, verbi-gracia, si es un recipiente, puede prácticamente conocerse su volumen interior o *capacidad*, como se dice, tomando a este efecto otro recipiente de capacidad conocida, por ejemplo, 1 $dm.^3$, llenándolo de agua, y vertiendo ésta en el otro, repitiendo la misma operación cuantas veces fueren necesarias hasta llenarlo. Si ha debido verse, por ejemplo, 14 $dm.^3$ de agua, la capacidad buscada es, evidentemente, 14 $dm.^3$.

Los cuerpos de la forma del de la figura 7 se llaman *paralelepípedos rectos rectangulares*. Las aristas de ese cuerpo son iguales de cuatro en cuatro y hay tres grupos de distinta longitud. Existen,

(*) La definición precisa de la noción de volumen es el resorte de la *Geometría del Espacio*.

pues, tres longitudes de aristas; la mayor (de 6 cm. en la figura) se llama *largo* del cuerpo; la intermedia (de 4 cm. en la figura) *ancho*, y la menor (de 3 cm. en la figura) *alto* o *espesor* del cuerpo.

108. Numeración. — Una unidad de volumen cualquiera equi-

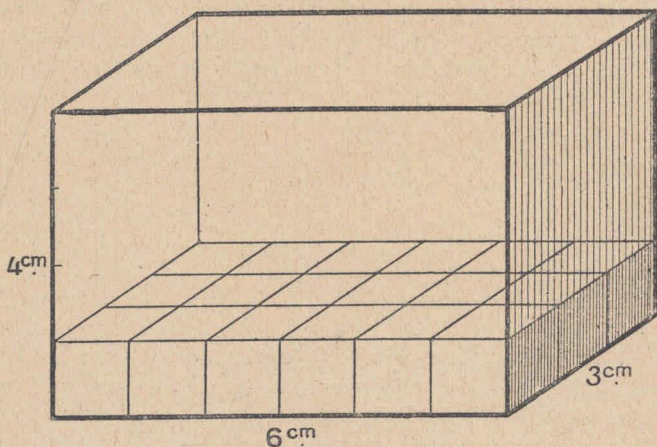


Fig. 7.

vale a mil unidades de volumen del orden inmediato anterior. Así:

1 m.³ contiene 1000 dm.³

1 dm.³ contiene 1000 cm.³

1 cm.³ contiene 1000 mm.³.

Por consiguiente:

1 m.³ contiene $1000 \times 1000 = 100000 = 10^5$, cm.³ y $1000 \times 1000 \times 1000 = 1000000000 = 10^9$, mm.³.

Fácilmente puede comprenderse la razón de esta equivalencia. La figura 8 lo demuestra con toda claridad.

Consideremos el cubo de la figura 8, descompongamos el cuadrado AC de base en 100 partes, como se hizo al tratar de las figuras 4 y 5; vemos que sobre cada uno de los cien cuadraditos iguales en que ha quedado descompuesto AC, pueden colocarse diez

cubos iguales superpuestos, pues $AQ = \frac{1}{10}$ m. El cubo dado se halla,

por consiguiente, descompuesto en $100 \times 10 = 1000$ cubos parciales iguales, cuyas aristas tienen una longitud diez veces menor que

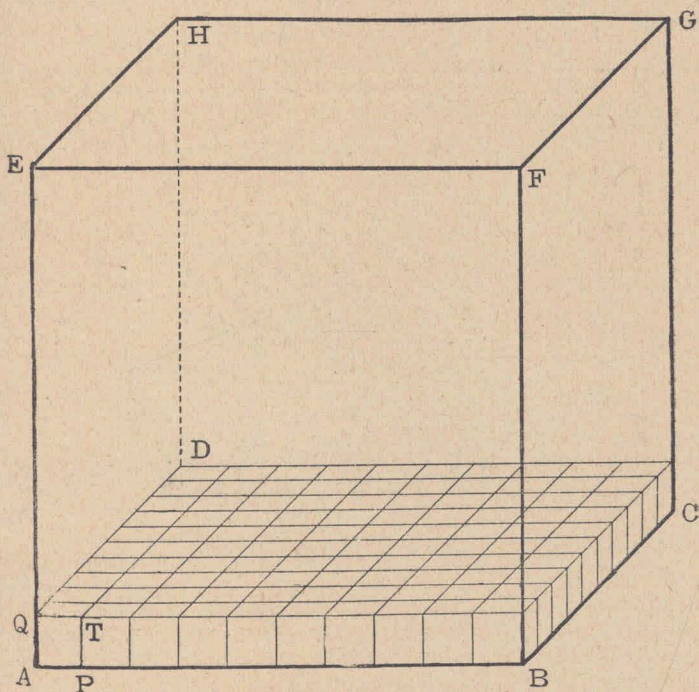


Fig. 8.

la del cubo dado. Luego, si este último es 1 m.^3 se ve que contendrá 1000 dm.^3 ; y de igual manera si fuera 1 dm.^3 resultaría contener 1000 mm.^3 .

Un raciocinio enteramente análogo al efectuado relativamente a las unidades superficiales (n.º 104) hace ver que:

Para leer un número que expresa un volumen, se descompone mentalmente la parte decimal del número en secciones de 3 cifras a partir del signo decimal; se enuncia primeramente la parte entera y se la hace seguir del nombre de la unidad principal; luego se lee sucesivamente cada una de las secciones (completando la última con

uno o dos ceros si resulta tener dos o una cifra), seguida del nombre de las unidades de los órdenes inferiores sucesivos.

Así, $3,86 \text{ m.}^3$ se lee 3 m.^3 860 dm.^3 ; igualmente $73281,73795 \text{ dm.}^3$ se lee 73281 dm.^3 737 cm.^3 950 mm.^3 ; también puede decirse, evidentemente, 73 m.^3 281 dm.^3 737 cm.^3 950 mm.^3 .

109. **Unidades para cubicar leña.** — Para determinar el volumen de la leña destinada a la calefacción, se usa a veces un cajón de madera de la forma indicada en la figura 9, cuya capacidad viene a ser un m.^3 ; en este caso el m.^3

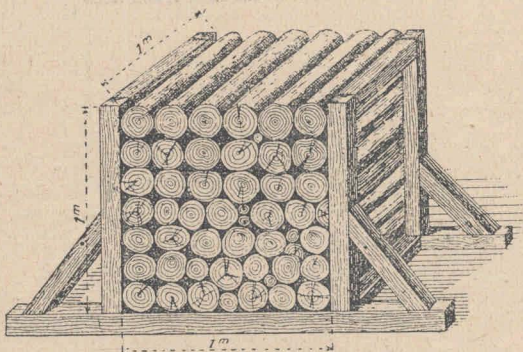


Fig. 9.

recibe el nombre de **estéreo**; se le representa por el símbolo (e.) y el único múltiplo y submúltiplo usado es el **decastéreo** (das.) y el **decistéreo** (ds.); el primero equivale a 10 estéreos y el otro a la décima parte del estéreo.

Pero se prefiere hoy vender la leña al peso o a la astilla.

110. **Unidades de capacidad.** — Hemos dicho que por **capacidad** de un vaso se entiende el volumen interior del mismo.

La **unidad principal de capacidad es el litro (l.)**, que equivale al **decímetro cúbico (*)**.

Los múltiplos y submúltiplos del litro son:
Múltiplos:

Decalitro (dal.), que equivale a 10 litros;

Hectolitro (hl.), que equivale a 100 litros;

(*) Los **metrólogos** definen al litro como siendo el volumen de una masa de 1 kg. de agua a 4° a la presión de 76 cm. de mercurio. Excede así al dm.^3 en menos de $1/30000$.

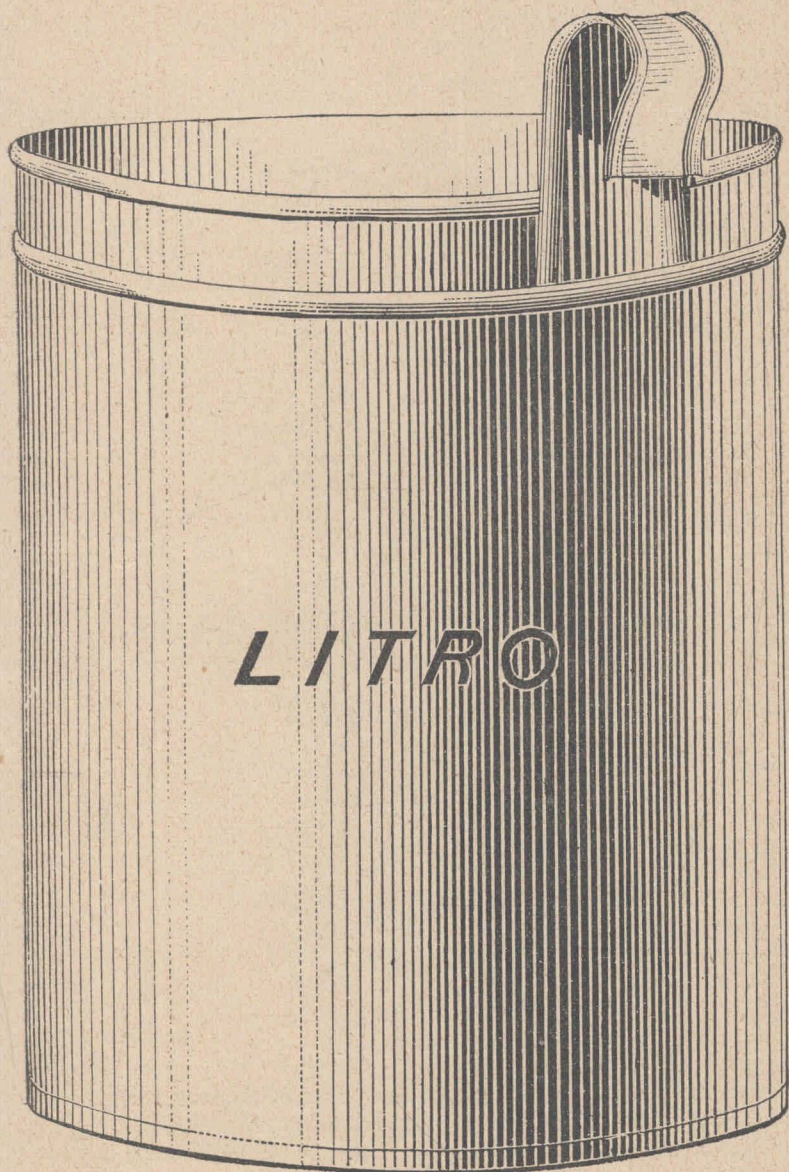


Fig. 10. — Litro, tamaño natural.

Kilolitro (kl.), que equivale a 1000 litros.

Submúltiplos:

Decilitro (dl.), que equivale al décimo de litro;

Centilitro (cl.), que equivale al centésimo de litro;

Mililitro (ml.), que equivale al milésimo de litro.

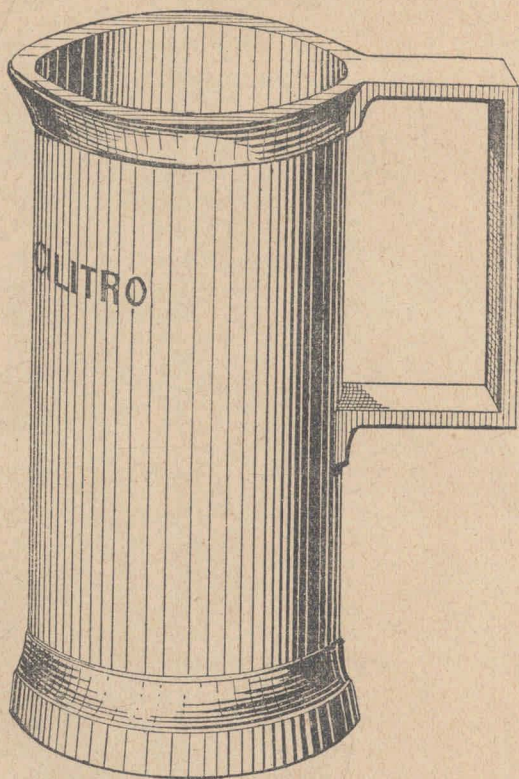


Fig. 11. — Decilitro para líquidos, tamaño natural.

Para la venta al por mayor de líquidos, de granos y de carbón de coke se usa como unidad principal el hectolitro.

El decalitro sirve como unidad principal para la venta de frutas y legumbres secas.

En la práctica se usan, para medir las capacidades, los recipientes indicados en las figuras 10 a 12. Los de las figuras 10 y 11 se usan para líquidos y están constituidos por vasos cilíndricos de estaño, de cobre estañado y de latón, provisto de un asa. La altura es igual o doble del diámetro de la base. La serie comprende: el *doble litro*, el *litro*, el *medio litro*, el *doble decilitro*, el *decilitro*,



Fig. 12. — Decilitro para áridos, tamaño natural.

el *medio decilitro*, el *doble centilitro* y el *centilitro*. La figura 12 representa una de las medidas usadas para granos y legumbres (áridos). Son vasos cilíndricos de roble con guarnición de hierro cuya altura es igual al diámetro de la base. La serie comprende el *hectolitro*, el *medio hectolitro*, el *doble decalitro*, el *decalitro*, el *medio decalitro*, el *doble litro*, el *litro*, el *medio litro*, el *doble decilitro*, el *decilitro*.

111. Unidades de masa y de peso (*).—La unidad de masa es el **gramo**, que viene a ser la milésima parte de la masa de un prototipo internacional de platino iridado, depositada en los archivos franceses. El gramo es muy aproximadamente la masa de un centímetro cúbico de agua destilada, en el vacío, a su máxima densidad.

Se designa el gramo con el símbolo (g.). He aquí sus múltiplos y submúltiplos:

Múltiplos:

Decagramo (dag.), que equivale a 10 gramos;

Hectogramo (hg.), que equivale a 100 gramos;

Kilogramo (kg.), que equivale a 1000 gramos.

Submúltiplos:

Decigramo (dg.), que equivale a 1 décimo de gramo;

Centigramo (cg.), que equivale a 1 centésimo de gramo;

Miligramo (mg.), que equivale a 1 milésimo de gramo.

Se deduce de ello que para escribir y leer las cantidades de

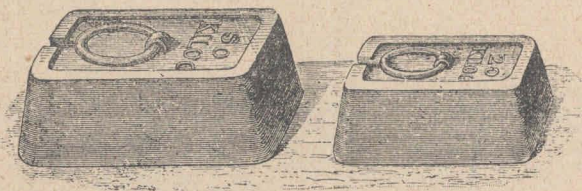


Fig. 13. — Pesas de fundición de 20 y de 5 kilogramos.

esta naturaleza expresadas con el sistema de unidades indicadas, rige la misma ley que para las unidades de longitud.

Así, 83,715 g. se lee 83 gramos 715 miligramos; 54,238 kg. se lee 54 kilogramos 238 gramos y puede también decirse 54 kilogramos, 2 hectogramos, 3 decagramos, 8 gramos.

112. Elección de las unidades.—Prácticamente sólo se emplean tres unidades principales a saber: el gramo, el kilogramo y la tonelada métrica, que vale 1000 kilogramos.

(*) La fuerza de atracción que la gravedad terrestre ejerce sobre una masa, es el *peso* de esta.

El gramo se usa únicamente en el comercio de pequeñas cantidades de sustancias al peso, como ser en las boticas.

El kilogramo es la unidad práctica más común. La tonelada (t.) se usa únicamente en el comercio al por mayor, en las indus-

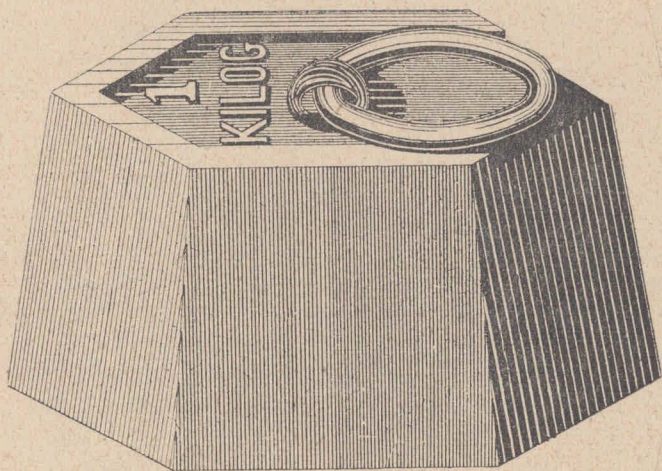


Fig. 14. — Pesa en fundición de 1 kilogramo, tamaño natural.

trias, en las tarifas de transportes y en general para expresar todos los pesos considerables.

Se usa a veces otra unidad, el **quintal** (métrico), que vale 100 kilogramos.

113. Pesas. — Para apreciar el peso de un cuerpo se usan en la práctica unos aparatos llamados balanzas y unas masas metálicas (pesas) de peso conocido.

Las pesas usadas en la práctica tienen la forma indicada en las figuras 13, 14 y 15. Por disposición legal cada unidad de estas pesas, tiene lo mismo que las indicadas en las figuras 10 y 11, su duplo y su mitad.

Las pesas considerables de 50 y de 20 kilogramos son de fundición, su forma (fig. 13) es la de un tronco de pirámide de base rectangular.

Las pesas medianas comprendidas entre 1 hectogramo y 1 kilogramo se construyen también en fundición, pero en forma de tronco de pirámide con base exagonal, del tipo indicado en la figura 14.

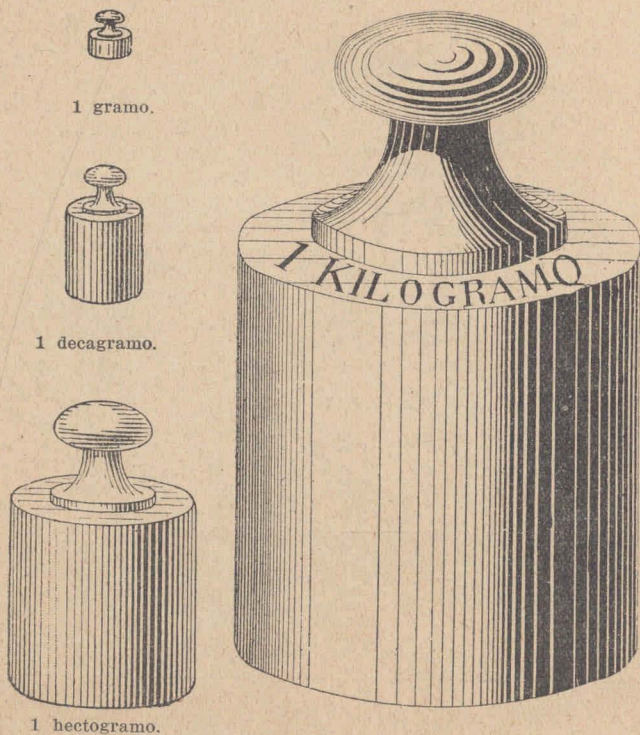


Fig. 15. — Pesas de cobre, tamaño natural.

Existe también una serie de pesas cilíndricas de cobre de 1 gramo a 5 kilogramos (fig. 15).

Por último, las pesas de menos de 1 gramo, llamadas *pesas pequeñas* se construyen en forma de láminas de cobre o de níquel muy finas, cuadradas, con un canto levantado para poderlas asir fácilmente.

He aquí un resumen de las *piezas marcadas en uso*:

De fundición $\left\{ \begin{array}{l} 50 \text{ kg.} \\ 20 \text{ »} \\ 10 \text{ »} \end{array} \right.$

De fundición o cobre $\left\{ \begin{array}{l} 5 \text{ kg.} \\ 2 \text{ »} \\ 1 \text{ »} \\ 5 \text{ hg. o } 500 \text{ g.} \\ 2 \text{ » } 200 \text{ »} \\ 1 \text{ » } 100 \text{ »} \end{array} \right.$

De cobre $\left\{ \begin{array}{l} 5 \text{ dag. o } 50 \text{ g.} \quad 5 \text{ g.} \quad 5 \text{ dg.} \quad 5 \text{ cg.} \quad 5 \text{ mg.} \\ 2 \text{ »} \quad 20 \text{ »} \quad 2 \text{ »} \quad 2 \text{ »} \quad 2 \text{ »} \\ 1 \text{ »} \quad 10 \text{ »} \quad 1 \text{ »} \quad 1 \text{ »} \quad 1 \text{ »} \end{array} \right.$

114. Correspondencia entre los pesos y los volúmenes. — Recordemos las siguientes relaciones:

1 cm.³, o sea un mililitro de agua, pesa 1 gramo;

1 dm.³, o sea un litro de agua, pesa 1 kilogramo;

1 hectolitro de agua pesa 1 quintal;

1 m.³, o mil litros de agua, pesa 1 tonelada.

Por esta razón las unidades de peso y de volumen:

gramo,	centímetro cúbico,
kilogramo,	litro o decímetro cúbico,
tonelada,	metro cúbico,

se dicen correspondientes y los números que expresan, en base a estas unidades, un volumen de agua y el peso del mismo son iguales. Así, 25 litros de agua pesan 25 kilogramos; 7 centilitros de agua pesan 70 gramos, pues 7 centilitros equivalen a 70 cm.³, y 1 cm.³ de agua pesa 1 gramo.

115. Densidad. — *Ilámase densidad o peso específico de un cuerpo al número que expresa el peso de la unidad de volumen de dicho cuerpo, estando ambas cantidades expresadas en sus unidades respectivas.* De lo dicho anteriormente resulta que la densidad del agua es 1. Decir que el mercurio tiene por densidad 13,6 significa que el litro de mercurio pesa 13,6 kilogramos o que 1 cm.³ de mercurio pesa 13,6 gramos, o también que 1 m.³ de mercurio pesa 13,6 t.

Si llamamos p y v respectivamente los números que expresan el peso y el volumen de un cuerpo en base a las unidades correspondientes (n.º anterior)

resulta, evidentemente, que la densidad d de este cuerpo se obtendrá dividiendo p por v y se tendrá la relación

$$d = \frac{p}{v} \quad (1)$$

de la que se deducen estas otras:

$$v = \frac{p}{d} \quad (2)$$

$$p = vd. \quad (3)$$

Estas relaciones o fórmulas (*), como se llaman, permiten encontrar uno de los tres números v , p o d conociendo los otros dos.

EJEMPLOS. — I. *Sabiendo que la densidad del cobre es 8,8, ¿cuál es el peso de 15 cm.³ de cobre?*

Aplicando la fórmula (3) se tiene $v = 15$ y $d = 8,8 \therefore p = 15 \times 8,8 = 132$ y como la unidad de peso correspondiente al cm.³ es el gramo, se tiene que el peso buscado es 132 gramos.

II. *La densidad del alcohol puro es 0,79, ¿cuánto pesen 28 litros?*

Se tiene $p = 28 \times 0,79 = 22,12$. Luego el peso pedido es 22,12 kg. o sea 22 kg. 12 g.

III. *23 litros de un líquido pesan 25,715 kg., ¿cuál es la densidad del líquido?*

Se tiene $d = \frac{p}{v} \therefore d = \frac{25,715}{23} = 1,118$. Se ha dividido aquí directamente

25,715 por 23 en virtud de ser el kg. y el litro unidades correspondientes; pero si el peso hubiese sido dado en gramos, hubiera sido necesario dividir por 1000 el número de gramos a fin de tener el relativo a kilogramos.

116. Unidades monetarias. — La unidad fundamental es el franco, que consiste en una moneda constituida por una aleación de plata y de cobre del peso de cinco gramos (*). Se designa abreviadamente así: fr.

El franco no tiene múltiplos pero sí dos submúltiplos a saber: *el décimo*, o sea la décima parte del franco, es decir 0,1 fr.; *el céntimo*, o sea la centésima parte del franco, es decir 0,01 fr.

Raras veces se usa el décimo. Así 7,8 gramos se lee 7 francos 80 céntimos, o simplemente 7 francos 80.

117. Monedas argentinas. — Existen legalmente *cuatro clases de monedas* en la República Argentina; las monedas *de oro*, las *de plata*, las *de bronce de níquel* y las *de cobre*.

(*) Llámase fórmula una expresión en que figuran letras, y con la que, mediante ciertos datos o cantidades conocidas, puede obtenerse elementos desconocidos, pues liga unos con otros, de manera a hacer tal obtención realizable.

(*) Valor comprendido entre 43 y 49 mg. de oro al título de 900 milésimos de fino. (Ley del 2 de octubre de 1936).

118. Ley de una aleación.—Para fabricar una moneda nunca se emplea un metal fino (oro o plata) puro, porque las piezas que así se obtendrían no serían bastante duras y se deformarían fácilmente.

Para aumentar la resistencia de las monedas se agrega a las de oro cierta cantidad de cobre y a las de plata cierta cantidad de cobre, o de cobre y cinc; a las de cobre cierta cantidad de estaño y cinc.

Fundir de esta manera varios metales constituye lo que se llama hacer una **aleación**.

Llámase **ley** de una aleación, al número cociente del peso del metal fino dividido por el peso total de la aleación.

Así, una moneda de 5 francos que pesa 25 gramos contiene 22,5 gramos de plata, su ley, por consiguiente es $22,5 : 25 = 0,900$, y se dice que es de 900 milésimos.

Llamando l a la ley, p al número que expresa el peso del metal fino, P al análogo relativo al peso total de la aleación, se tiene la fórmula $l = p : P$, de las que se deducen estas otras dos $p = lP$ y $P = p : l$, las cuales permiten hallar uno de los tres números, l , p , P , conociendo los otros dos; los pesos deben estar, evidentemente, expresados en base a la misma unidad.

119. Monedas de oro.—La ley de esta clase de monedas es 0,900. En la República Argentina se usan dos tipos de monedas de oro (*). El patrón oficial es el *peso oro*, cuyo valor es de 5 francos y se divide en 100 partes iguales llamadas *centavos* (cts.); existe la moneda llamada *argentino* y la llamada *medio argentino*, equivalentes, respectivamente, a 5 pesos oro y a $2\frac{1}{2}$ pesos oro. La palabra *peso*, tratándose de monedas, se representa por el símbolo \$.

El peso del *argentino* es de 8,0645 gramos. Su diámetro es de 22 mm.; el diámetro del *medio argentino*, es de 19 mm.

En el sistema métrico propiamente dicho figuran monedas de oro de 100, de 50, de 20, de 10 y de 5 francos, pero las dos primeras son muy escasas y la última ya no se acuña.

El cuadro siguiente da cuenta del peso legal y del diámetro de estas piezas:

(*) Ley n.º 1130, de 5 de noviembre de 1881.

Piezas	Ley	Peso legal en gramos	Tolerancia en milésim.	Diámetro en milímetros
100 fr.	0,900	32,25806	1	35
50 »	»	16,12903	2	28
20 »	»	6,45161	2	21
10 »	»	3,22580	2	19
5 »	»	1,61290	2	17

120. Monedas de plata.—He aquí las piezas de este metal usadas en la República Argentina:

Valor	LEY		PESO LEGAL		Diámetro milímetros	Equiva- lencia francos
	Justo	Tolerancia	Justo	Tolerancia		
	milésimos	milésimos	gramos	milésimos		
1 peso	0,900	2	25,00	3	37	5,00
50 cts.	»	3	12,50	5	30	2,50
20 »	»	5	5,00	5	23	1,00
10 »	»	5	2,50	7	18	0,50
5 »	»	5	1,25	10	16	0,25

El cuadro siguiente da cuenta de las piezas de moneda de plata en el sistema propiamente métrico decimal:

Piezas francos	Ley	PESO LEGAL		Diámetro milímetros
		Justo gramos	Tolerancia milésimos	
5.00	0,900	25,00	3	37
2.00	0,835	10,00	3	27
1.00	»	5,00	5	23
0.50	»	2,50	7	18

121. Monedas de bronce de níquel.—En la República Argentina se usan las siguientes piezas de bronce de níquel (*):

(*) Ley n.º 3321, de 4 de diciembre de 1895.

Piezas pesos	LEY		PESO LEGAL		Diámetro milímetros	Equiva- lencia francos
	Níquel milésimos	Cobre milésimos	Justo gramos	Tolerancia milésimos		
0,20	25	75	4	4	21	1,00
0,10	25	75	3	5	19	0,50
0,05	25	75	2	5	17	0,25

122. Monedas de cobre.— El cuadro siguiente se refiere a las monedas de cobre usadas entre nosotros.

Valor de las piezas centavos	ALEACIÓN		PESO LEGAL		Diámetro milímetros	Equiva- lencia francos
	Justo milésimos	Tolerancia milésimos	Justo gramos	Tolerancia milésimos		
2	cobre 95	10	10	10	30	0,10
1	estaño 4	5	5	10	25	0,05
	cinc 1	5				

En Francia se usa las piezas de 0,10, 0,05, 0,02 y 0,01 de franco, de igual aleación a las usadas aquí y de peso legal igual, respectivamente, a 10 gramos, 5 gramos, 2 gramos y 1 gramo. Los diámetros son de 30 mm., 25 mm., 20 mm. y 15 mm.; existe una tolerancia de 10 milésimos en el peso para las piezas de 0,10 y 0,05 francos y una de 15 milésimos en las otras dos.

Observaciones.— Puede notarse que fuera de la introducción del $\frac{1}{2}$ argentino, nuestro sistema monetario sigue en todo los principios del sistema métrico. Hasta en los tamaños de las piezas se nota tal correlación, pues sumando los diámetros de 42 argentinos y 4 medios argentinos resulta

$$42 \times 22 \text{ mm.} + 4 \times 19 \text{ mm.} = 924 \text{ mm.} + 76 \text{ mm.} = 1 \text{ m.}$$

y lo mismo se verifica sumando los diámetros respectivos de

10 monedas de plata de 1 \$ y 21 de 50 cts.

53 monedas de plata de 10 cts. y 2 de 20 cts.

30 monedas de cobre de 2 cts. 4 de 1 centavo.

25 monedas de níquel de 20 cts. y 25 de 10 cts.

40 monedas de cobre de 1 centavo.

.....

En las monedas hay que distinguir el *valor legal* determinado por la ley y el *valor efectivo* fijado por el comercio; así 1 \$ oro y 1 \$ plata tienen el mismo valor legal pero no comercial, pues ningún comerciante recibe por el mismo valor *un peso plata y un peso oro*. Terminaremos haciendo notar que cuando debe recibirse una suma considerable de monedas, por lo general, las casas bancarias en vez de contarlas las pesan para mayor comodidad y rapidez; resulta efectivamente que, como puede comprobarse teóricamente:

Una cantidad de oro pesa tantos gramos como veces 62 centavos vale;

Una cantidad de plata pesa tantos gramos como veces 4 centavos vale;

Una cantidad de cobre pesa tantos decagramos como veces 2 centavos vale.

123. Hacia 1937, muchos Estados habían cambiado o se aprontaban en abandonar sus patrones tipos monetarios oro para substituirlos por monedas flotantes de papel, de menor valor, reglamentado por el curso de los cambios. Así, en Francia, una ley (2 octubre 1936), ha instituído un *nuevo franco* representado por un peso de oro al título 900 comprendido entre 43 y 49 miligramos. En Italia, un decreto del 5 de octubre 1936 asigna, provisoriamente, a la *lira*, un curso regido por el de la libra esterlina, a razón de 76 liras por cada libra. En los Estados Unidos se anunciaba también una desvolarización siendo su valor fijado provisoriamente al 60% del *dólar-oro*. ("Annuaire du Bureau des Longitudes" para 1937).

Ese mismo Anuario, después de hacer la manifestación anterior, trae el siguiente cuadro de unidades monetarias:

AFGHANISTÁN (14 marzo 1926). — Unidad: *afghani-plata*, peso 10 gramos plata 900. Moneda corriente, *rupia* de Kabul.

ALBANIA. — Unidad: *franco-oro* (5 lek), peso 0g.3225806, al título de 900 milésimos, o sea, 0g.2903 oro fino, igual al antiguo franco-oro francés.

ALEMANIA (30 agosto 1926). — Unidad: *reichsmark-oro*, representado por 0g.358423 de oro fino. Moneda basada sobre el patrón oro, pero sin oro en circulación; están previstas piezas de 10 y 20 *reichsmarks*, al título 900.

ARGENTINA (5 noviembre 1881). — Unidad: *peso* o *peso-oro*, peso 1g.6129, título 900, conteniendo 1g.451613 de oro fino; la moneda oro no está en circulación.

AUSTRIA (30 junio 1925). — Unidad: *schilling-oro*, peso 0g.21172086 de oro fino. El acuñamiento de piezas de 25 y 10 schillings está prevista.

BÉLGICA (26 octubre 1926). — Unidad: *belga-oro*, representado por 0g.20921 de oro fino.

BOLIVIA (2 septiembre 1928). — Unidad: *boliviano-oro*, con 0g.54917 de oro fino. No hay piezas de oro en circulación.

BRASIL. — Unidad: *milreis-oro*. Se han acuñado monedas de 10 y 20 mil-

reis. La pieza de 20 milreis pesa 17g.929 de oro al título de $916\frac{2}{3}$ milésimos. Desde 1891 no se ven más estas piezas en la circulación. Una ley de fecha 18 diciembre 1926 ha creado una nueva unidad: *cruziero-oro* con 2g. de oro al título 900, o sea 1g.8 de oro puro.

BULGARIA (27 mayo 1880).— Unidad: *leva-oro*, representada por 0g.2903225 de oro fino igual al antiguo franco oro francés. Actualmente el *leva* ha sido estabilizado en base a 92 *leva* = 1g. de oro fino.

CANADÁ (4 mayo 1910).— Unidad: *dollar-oro* con 1g.504636 de oro fino como el *dollar-oro* de U. S. A. La pieza de 10 *dollars*, al título de 900, pesa 16g.718.

CHILE (14 octubre 1925).— Unidad: *peso-oro* con 0g.183057 de oro fino. El *Cóndor*: 40 pesos = 1 libra esterlina oro. La moneda que está, de hecho, en circulación, es el peso papel.

CHINA (8 marzo 1933).— Unidad: *yuan-plata*, peso 26g.6971, título 880 milésimos y conteniendo 23g.493448 de plata fina. 1 yuan = 100 zen; 1 zen = 10 li.

COLOMBIA (12 junio 1907).— Unidad: *peso-oro*, peso 1g.59761, título $916\frac{2}{3}$, equivalente a la quinta parte de una libra esterlina y conteniendo 1g.4645 de oro fino.

COSTA RICA (26 octubre 1896).— Unidad: *Colón-oro*, peso 7g.78; título 900, conteniendo 7g. de oro fino. Las piezas de oro han casi desaparecido de la circulación.

CUBA (7 noviembre 1914).— Unidad: *peso-oro*, peso 1g.6718, título 900, contenido 1g.5046 de oro fino, como el *dollar-oro* canadiense.

DANTZIG (22 octubre 1923).— Unidad: *florin o gulden-oro*, representado por 0g.292895 de oro fino. 25 florines = 1 libra esterlina oro.

DINAMARCA (23 mayo 1873).— Unidad: *krone-oro*, con 0g.403226 de oro fino.

ECUADOR (4 marzo 1927).— Unidad: *sucro-oro*, con 0g.300933 de oro fino; 24,3 sucres = 1 libra esterlina. Ha sido prevista una nueva unidad *sucro-oro* conteniendo 0g.73224 de oro fino.

EGIPTO (18 octubre 1916).— Unidad: *libra egipcia-oro* al peso de 8g.5, al título de 875, conteniendo 7g.4375 de oro fino.

ESPAÑA (19 octubre 1868).— Unidad: *peseta-oro*, 0g.290322 de oro fino equivalente al antiguo franco-oro francés. El acuñamiento de las monedas metálicas está interrumpido desde 1914 y las monedas de oro no están ya en circulación.

ESTADOS UNIDOS DE N. AMÉRICA (12 febrero 1873 y 14 marzo 1900).— Unidad: *dollar-oro*, de peso 1g.6718, al título 900, conteniendo 1g.50464 de oro fino. La pieza de 1 *dollar-oro* no se fabrica desde 1890. El *águila* (10 dólares) al título 900, pesa 16g.71818.

ESTONIA (1.º enero 1928).— Unidad: *Eestikroon-oro* (Corona estonia), igual a la sueca; pesa 0g.448 de oro 900 y contiene, pues, 0g.403226 de oro puro.

FILIPINAS (13 junio 1922).— Unidad *peso-plata*, de peso 20 g. al título 800 milésimos, equivalente a 50 cents-oro U. S. A. La paridad con el oro está mantenida por el Gold Standard Fund Act del 13 junio 1922.

FINLANDIA (1929).—Unidad: *markka-oro*. La pieza de 100 markka pesa 4g.21053 de oro 900, conteniendo, pues, 3g.78945 de oro fino.

FRANCIA (25 junio 1928).—Unidad *franco-oro* con 0g.0655 de oro 900; son, pues, 0g.05895 de oro fino. La Ley del 25 de junio 1928 ha mantenido para el pago de los empréstitos extranjeros contraídos en francos-oro, antes de aquella fecha, el antiguo valor del franco-oro definido por la Ley del 17 germinal año XI, representado por 32cg.26 de oro 900 (29cg.03, oro fino).

GRECIA (12 mayo 1928).—Unidad: *drachma-oro*, representado por 0g.01952634 de oro fino. 375 *drachmai* = 1 libra esterlina oro.

GUATEMALA.—Unidad: *quetzal-oro*, igual al *dollar-oro* de los EE. UU. de América (1g.50464 oro fino).

HAÍTI.—Unidad: *gurda-oro*, 0g.30092 oro fino. 1 gurda = 20 cents-oro. U. S. U.

HONDURAS.—Unidad: *peso* o *dollar-plata*, peso 25 g. al título de 900 milésimos. Una ley de 1926 ha autorizado la creación de una nueva unidad monetaria: el *lempira-oro* igual a 50 cents-oro. U. S. A.

HUNGRÍA (4 noviembre 1925).—Unidad: *pengo-oro* con 0g.263158 de oro fino.

INDIAS INGLESAS (2 marzo 1906).—Unidad: *Indian-rupee-plata*, peso 11g.664 al título 916 milésimos. Un "Indian Currency Act", de 1927, ha creado una nueva *rupee-oro*, que pesa 8g.47512 conteniendo 0g.54919 de oro fino.

INGLATERRA (22 abril 1870).—Unidad: *sovereign* o *libra esterlina-oro*, con peso 7g.9881 al título 916 $\frac{2}{3}$ milésimos y conteniendo 7g.3224 de oro fino.

IRÁN.—Unidad: *kran-plata*, con peso 4g.6, plata 900. La ley del 18 marzo 1930 ha creado un patrón en oro; el *rial* representado por 0g.3661191 de oro fino y el *pahlavi* equivalente a 20 *riales*.

ITALIA (22 diciembre 1927).—Unidad: *lira-oro* 0g.079191 de oro fino.

LETONIA.—Unidad: *lat-oro* (0g.2903226 de oro fino).

LITUANIA (16 agosto 1922).—Unidad: *lita-oro* (0g.150462 oro fino).

MESOPOTAMIA [I raq] (25 noviembre 1930).—Unidad: *dinar-oro* (7g.322382 oro fino).

MÉXICO (29 abril 1925).—Unidad: *peso-oro* (0g.75 oro fino).

NICARAGUA (1912).—Unidad: *córdoba-oro*, peso 1g.6718, oro 900, equivalente al *dollar-oro* U. S. A. (1g.50464 oro fino).

NIPPON (*Japón*) (5 marzo 1907).—Unidad: *yen-oro* (2 *fun*) con 0g.75 de metal fino.

NORUEGA (16 octubre 1875).—Unidad: *krone-oro*, peso 0g.448 al título 900 y conteniendo 0g.403226 de oro fino, como el *krone-oro* danés. La pieza de 20 kroner pesa 8g.960572 de oro 900.

PAÍSES BAJOS (28 mayo 1901, 31 diciembre 1906, 1.º julio 1909 y 31 octubre 1912).—Unidad: *florín-oro* o *gulden*. El patrón monetario es la pieza de 10 florines que pesa 6g.720 al título 900 milésimos, conteniendo 6g.048 de oro fino.

PANAMÁ (27 junio 1904).—Unidad: *balboa-oro* con peso 1g.672 al título 900 milésimos, conteniendo 1g.505 de oro fino. El balboa es, legalmente, equivalente al *dollar-oro* U. S. A.

PERÚ (13 febrero 1930).—Unidad: *sol-oro* con 0g.60185 de oro fino. Un sol equivale a 40 cents-oro (U. S. A.).

POLONIA (13 octubre 1927).—Unidad: *zloty-oro* representado por 0g.1687 de oro fino. 1 kg. oro fino = 5924,44 zlotyes.

PORTUGAL (22 mayo 1911).—Unidad: *escudo-oro* equivalente al *mil-reis-oro*. La pieza de oro de 10 escudos pesa 18g.065 al título de 900 milésimos y contiene 10g.2585 de oro fino. La circulación monetaria está, de hecho, exclusivamente constituida por papel moneda.

RUMANIA (8 febrero 1929).—Unidad: *leu-oro* (0g.01 de oro 900 o sea 0g.009 de oro fino).

SALVADOR (16 julio 1920).—Unidad teórica: *colón-oro* (0g.836 de oro 900 o sea 0g.7524 de oro fino). Los signos monetarios son, principalmente, papel moneda.

SIAM (mayo 1926).—Unidad: *baht-oro* (0g.66567 de oro fino); 11 bahts = 1 libra esterlina oro. No se ha fabricado la moneda de oro.

SUECIA (27 mayo 1873, 16 octubre 1875).—Unidad: *krona-oro* (0g.448 de oro 900 o sea 0g.403226 de oro fino como el krone-oro danés y noruego). La pieza de 20 *kronor* pesa 8g.960572 de oro 900 conteniendo 8g.0645 de oro fino.

SUIZA.—Unidad: *franco-oro* (0g.3226 de oro 900, 0g.2903225 oro fino, o sea 0cg.218 menos que el antiguo franco-oro francés). La pieza de 20 francos pesa 6g.4516 al título 900 o sea 5 cg. menos que la antigua pieza de 20 francos franceses).

TCHECOSLOVAQUIA (octubre 1929).—Unidad: *corona-oro* (0g.04458 oro fino).

TERRANOVA.—Unidad: *dollar-oro* que normalmente equivale a 4 s. 1 $\frac{1}{3}$ d. de la moneda de oro inglesa.

TURQUÍA (17 abril 1916).—Unidad: *peso* de 40 *paras*. La *libra turca* (100 pesos) pesa 7g.216 de oro 916 y contiene 6g.6147 de oro fino.

UNIÓN DE LAS REPÚBLICAS SOVIETISTAS SOCIALISTAS (U. R. S. S.).—Unidad teórica: *rublo-oro* (0g.774234 de oro fino). Los signos monetarios son, en su mayoría, papel moneda. También se utiliza como moneda de transacción, *tchervonetz* equivalentes a 10 rublos-oro.

URUGUAY (6 diciembre 1906).—Unidad: *peso-oro* (1g.697 al título 917 milésimos), conteniendo 1g.55 de oro fino. Para conmemorar el centenario del Uruguay, en 1930, se ha emitido cierto número de piezas de oro de 8 g. de peso al título de 485 milésimos. Sólo circula papel moneda.

VENEZUELA.—Unidad: *bolívar-oro* equivalente a 0g.290323 de oro fino. Los signos monetarios consisten, principalmente, en papel moneda.

YUGOSLAVIA.—Unidad: *dinar-oro* = 0g.0265 de oro fino. En la práctica, la circulación monetaria consiste en papel moneda.

125. *Moneda corriente en la Argentina* (1937).—La moneda corriente en la Argentina es el billete del Estado que tiene curso legal. Su valor es 44 centavos oro por cada peso papel (o \$ 227,27 m/n por 100 \$ oro).

126. *Valor comparativo de un peso oro argentino* (año 1937).—Vale 0.933 de un peso oro uruguayo; 0.965 dollar-oro norteamericano; 1.764 mil-reis-oro brasileño; 0.89 milreis-oro portugués; 5 francos-oro (pesetas-oro españolas o liras-oro italianas); 4.05 marcos oro alemanes; 3 chelines, 11 $\frac{1}{2}$

peniques oro ingleses; 2381 florines - oro holandeses; 3.60 coronas - oro escandinavos.

127. *Valor legal para circular en la Argentina* (ley 2 diciembre 1881).

<i>Monedas de oro</i>	<i>Peso</i>	<i>Fino</i>	<i>Valor</i>
5 soles (Perú)	8,0645	900	5,028
25 pesetas (España)	8,0645	900	5
20 milreis (Brasil)	17,929	916 $\frac{2}{3}$	11,326
Onza (México)	27,00	875	16,275
Águila (EE. UU.)	16,717	900	10,364
Cóndor (Chile)	15,253	900	9,455
Doblón (España)	8,336	900	5,16
Soberano (Inglaterra)	7,9881	916 $\frac{2}{3}$	5,044
20 francos (Francia)	6,451	900	4,00
20 marcos (Alemania)	7,965	900	4,938

EJERCICIOS

Longitudes

205. ¿A cuántos mm. equivale el km.?

206. ¿A cuántos cm. equivale el dam.?

207. ¿A cuántos dm. equivale el mm.?

208. Reducir mm. a hm.; cm. a Mm. y dm. a dam.

209. Escribir con cifras y sumar las cantidades siguientes tomando el dm. como unidad: cuarenta y cuatro metros ocho centímetros; cincuenta y dos decímetros siete decímetros; setenta y cinco milímetros; diez y seis hectómetros ciento veintidós decímetros; cincuenta decímetros ochocientos nueve milímetros; tres kilómetros; un decímetro; seiscientos veinticinco metros cuarenta y ocho centímetros.

210. Tomando el metro como unidad, escribir las siguientes cantidades: 47 m. 23 mm.; 68 dam. 7 dm.; 5482 cm.; 3 hm. 4 mm.; 7 m. 17 mm.; 222 dm. 1 mm.; 16 hm. 7; 253 dam. 025; 0,00493 km.; 1628,2 cm.; 32,1 km.

211. Un carpintero ha suministrado 35,45 m. de tablas a 0,75 pesos moneda nacional el metro, ¿cuántos pesos debe abonársele?

212. Una locomotora recorre 8 hm. 9 dam. 4 m. por minuto, ¿cuántos metros recorre en un segundo y cuántos kilómetros en 6,5 horas?

213. El paso ordinario de un hombre es 0,8 m., ¿cuánto tiempo empleará un viajero para recorrer 40 kilómetros haciendo 100 pasos por minuto?

214. Siendo de 636,2 Mm., aproximadamente, el radio de la tierra, ¿cuántas veces mayor es esta longitud que la altura de una montaña de 7821 m.?

215. Una resma de papel contiene 20 manos y cada mano 25 hojas, sabiendo que 50 resmas ocupan una altura de 6,75 metros, ¿cuál es en mm. el espesor de una hoja de papel?

216. Dos viajeros parten simultáneamente de Buenos Aires para encontrarse en un pueblo situado a 270 miriámetros; el primero hace 45 hm. por

hora, el otro 4 km. por hora; el primero anda 8 horas por día y el otro 10 horas por día, ¿cuánto tiempo emplearán uno u otro para hacer el trayecto y de cuánto será el adelanto en km. del primero que llegue, respecto del otro?

Áreas

217. ¿A cuántos cm.² equivale $\frac{1}{4}$ dam.²?

218. ¿A cuántos dm.² equivale 1 Mm.²?

219. ¿A cuántos centésimos de mm.² equivale un décimo de m.²?

220. Escribir con cifras las siguientes cantidades y efectuar luego la suma de las mismas tomando como unidad el dm.²; ocho m.² veintidós cm.², trecientos veintiocho dm.²; siete dam.² ocho m.² ochenta cm.²; nueve hm.² cincuenta y un mil seiscientos veinte dm.²; sesenta y un mil ochenta y cinco cm.²; veinticinco mm.².

221. Expresar en áreas las siguientes cantidades: 14 dam.² 5 m.²; 417 m.² 33 cm.²; 8 km.² 7 m.²; 48025 m.²; 1235 hm.² 25 dm.²; 0,6 m.².

222. Expresar en m.² las siguientes cantidades: 17,63 ha.; 5,79 a.; 0,07 a.; 6,4879 ha.; 16,25 ca.; 47 ha.

223. Efectuar la suma siguiente tomando como unidad el área: 17 a 82 ca.; 17 ha. 82 ca.; 170 ha. 8 a. 2 ca.; 82 ha. 17 a.; 8 ha. 217 ca.; 9425 ca.

224. El área de una hoja de cartón es de 24 dm.², ¿en cuántos pedazos de 16 cm.² puede cortarse aquella?

225. ¿Cuál es el área equivalente a los $\frac{3}{7}$ de 42 cm.² y cuál a los $\frac{5}{8}$ de 3 m.²?

226. La población específica de una nación se expresa por el número medio de los habitantes que encierra por km.². Sabiendo que la población de una ciudad es de 950891 habitantes y su área de 181,41 km.², determinar su población específica.

227. Un jardín público tiene 2ha. 50 a., ¿cuántas veces está dicho jardín contenido en la ciudad cuya área es de 230 hectáreas?

228. Una estancia de 85 ha. que había costado 250000 \$ se vuelve a vender en dos lotes, uno de 59 ha. 40 a. a razón de 4000 \$ la hectárea; y el restante al precio de 3500 \$ la hectárea, ¿qué suma se ha ganado o perdido en la venta?

229. Sabiendo que los adoquines de granito tienen 22 cm. de largo por 13 de ancho, ¿cuántos adoquines serán necesarios para adoquinar un terreno de 5 ha. 9 a. 41,52 ca.?

230. En el medio de un terreno cuadrado se ha construido un pabellón cuadrado. La distancia entre la construcción y el lado de la propiedad es de 6 m.; sabiendo que el espacio que no ha sido ocupado por el pabellón es de 440 m.², cuál es la extensión del terreno?

231. Una propiedad cuyo valor total es de 14778,70 \$ se compone de una casa y de un terreno especial de 3,26 ha. Deduciendo 1392 \$ del valor de la casa se obtiene el valor de 2 ha. de tierra, ¿cuál es el precio de la casa y cuál el del terreno especial?

Volúmenes

232. ¿A cuántos mm^3 equivale un dm^3 ?
233. ¿Qué relación existe entre el cm^3 y el dam^3 ?
234. ¿Qué relación existe entre la centésima parte de 1 m^3 y la décima parte de 1 mm^3 ?
235. ¿Qué relación existe entre la décima parte de 1 dm^3 y la centésima parte de 1 cm^3 ?
236. Efectuar la adición siguiente expresando el resultado en m^3 : 9m^3 335 dm^3 27 cm^3 + 25 m^3 7 dm^3 3232 mm^3 + 13 dm^3 + 13 cm^3 + 13 mm^3 + 437 cm^3 70 mm^3 .
237. Enunciar las cantidades siguientes en base a las distintas unidades enteras: $9,268\text{ m}^3$; $17,3472\text{ m}^3$; $0,06\text{ m}^3$; $0,009\text{ m}^3$; $53,748723\text{ m}^3$; $0,000000099$ metros³.
238. El m^3 de buenas mampostería cuesta 25 \$, ¿cuánto costará 8 m^3 400 dm^3 de la misma mampostería?
239. Para construir una pared, se ha empleado 25 m^3 y 48 dm^3 de mampostería a 4,60 \$ el m^3 , ¿a cuánto sale?
240. Un estanque tiene una capacidad de 4378 m^3 240 dm^3 ; y otro 3948 m^3 700 dm^3 , ¿cuántas veces mayor es el primero?
241. Se ha construido una pared de 83 m^3 70 dm^3 con ladrillos de 2 dm^3 400 cm^3 , ¿cuántos ladrillos se ha invertido?
242. ¿Cuántas cajas de 32 cm^3 podrán colocarse en un cajón de 1 m^3 600 dm^3 ?
243. ¿A cuántos m^3 equivale 10 estéreos; a cuántos decistéreos equivale 15 m^3 835 dm^3 ?
244. Relacionar con el decastéreo y con el decistéreo: $38,3$ estéreos; $148,2$ estéreos; $0,9$ estéreos; $1289,8$ estéreos.
245. ¿Cuántos decistéreos vale el doble estéreo? ¿cuántos decímetros cúbicos y cuántos décimos de metro cúbico?
246. En un incendio, un aserradero que contenía 340 decastéreos de leña se han quemado enteramente; si el decastéreo costaba 195 \$, ¿cuál es la pérdida?
247. Un carrero ha transportado 48 estéreos de leña en varios viajes; su carro contiene 2 estéreos 4 decistéreos, ¿cuántos viajes ha hecho?
248. Se ha empleado cierto número de obreros para aserrar 390 estéreos de leña; cada obrero ha serruchado 32 estéreos 5 decistéreos, ¿cuántos obreros han sido empleados?
249. Si el desistéreo de madera cuesta 1,75 \$, ¿qué cuesta el estéreo, el decastéreo, el doble estéreo y el medio decastéreo?
250. ¿A cuántos decilitros y centilitros equivale el decalitro?
251. ¿A cuántos hectolitros equivale el decalitro, el decilitro, el dm^3 , el décimo de m^3 , el centilitro, el centésimo de m^3 ?
252. Efectuar la suma siguiente y expresar el resultado en litros: 44 l. 8 cl. + 55 dal. 7 dl. + 61 cl. + 16 hl. 28 dl. + 15 dal. 802 cl. + 1 cl. + 729 l. 40 cl.
253. Tomando el dl. como unidad, expresar los números siguientes: 47 l.

2 cl.; 60 dal. 7 dl.; 7602 cl.; 9 l.; 20,75 hl.; 99 dl.; 235 l.; 0,19 l.; 28 dal. 28 cl.; 1001,1 l.

254. Convertir en m.³ las cantidades siguientes: 5470 l.; 21 hl.; 3675 dal.; 89057 hl.; 29 cl.; 0,004 l.

255. Un hombre puede transportar 13,5 dal. de trigo, ¿cuántos viajes hará para transportar 66,15 hl.?

256. Se quiere llenar de agua un frasco de 75 cl. con un dedal de 2,5 cm.³, ¿cuántas veces será necesario vaciar en el frasco el contenido del dedal?

257. ¿Cuántos dobles decilitros debe verterse en un decalitro para llenarlo hasta la mitad?

258. Un algibe contiene 474 m.³ de agua; diariamente se extrae 96 baldes de 22,5 litros cada uno, ¿en cuánto tiempo se vaciará el algibe?

259. En una quinta de 5 ha. 40 a. se ha plantado manzanos a razón de 75 por ha. Si un manzano produce, término medio, 18 dobles decalitros de manzanas y que un hectolitro de manzanas produce 50 litros de cidra, ¿cuántos hectolitros de cidra produce la quinta?

260. 1 dm.³ de hielo pesa 0,9189, ¿cuál es el peso en menos de 1 kg. de aproximación de un block de hielo de $53 \times 27 \times 0,039$, m.³?

Pesas

261. Reducir hectogramos a miligramos, kilogramos a dobles decigramos; medios decagramos a toneladas.

262. Tomando el kg. como unidad, ¿qué unidad representan los milésimos, las decenas, los décimos, los diez milésimos, las centenas, los centésimos, los millares, los cien milésimos, los millonésimos?

263. Efectuar la adición siguiente expresando el resultado en decigramos: 58 g. 2 mg. + 40 dag. 9 dg. + 71 cg. + 3 kg. 50 g. + 1 mg. + 7 hg. + 30,025 dag. + 1 t.

264. Cuál será el peso de los siguientes volúmenes de agua pura: 38 l.; 4,23 hl.; 0,39 l.; 23,48 l.; 25,3 dl.; 18 m.³; 3,4 m.³; 0,5 dm.³; 439 cm.³; 8,56 l.; 4 cl.; 2,045 l.; 5,21 cl.

265. Qué pesas deben colocarse en el platillo correspondiente de la balanza para efectuar las pesadas que se expresan a continuación, disponiendo de las siguientes pesas:

Una de 500 g., dos de 2 hg., una de 1 hg.;

Una de 50 g., dos de 20 g.; una de 10 g.;

Una de 5 g., dos de 2 g., una de 1 g.

Pesadas a efectuar: 25 gr.; 250 g.; 13 g.; 7 g.; 9 g.; 47 g.; 749 g.; 3,6 hg.; 1 kg.; 999 gr.

266. Cuál es el peso total de un barril de aceite sabiendo que su capacidad es de 225 litros, que vacío pesa 63,5 kg.; y que la densidad del aceite es 0,92.

267. Un pan de azúcar pesa 9 kg. 40 dg., ¿cuál será el peso de 548 panes de azúcar de igual especie?

268. Un recipiente vacío pesa 15,875 kg., lleno de alcohol pesa 3839 dag., ¿cuál es su capacidad, sabiendo que la densidad del alcohol es 0,79?

269. Un block de hierro cuyo volumen es de 5830 cm.³ pesa 44 kg. 891 g., ¿cuál es la densidad del hierro?

270. Un rollo de alambre pesa 20,988 kg.; se quiere fabricar con él clavos de 37,5 mm. de longitud, ¿cuántas docenas de clavos podrá fabricarse sabiendo que el metro de alambre pesa 132,5 gramos?

271. Una barra de hierro tiene 2,45 m. de longitud, 7 cm. de ancho y 0,025 m. de espesor, ¿cuál es su peso sabiendo que el dm.³ pesa 7,7 kg.?

272. Un tonel vacío pesa 40 kg. 5 dag.; lleno de agua pesa 578694 gramos, ¿cuántos litros de agua es preciso extraerle para que pese únicamente 2638 hg.? ¿cuál es la capacidad del tonel?

273. ¿Cuál es el peso de un pedazo de tiza de 0,05 m. de longitud 0,01 m. de ancho y 0,01 m. de espesor, siendo la densidad de la tiza 2,1?

274. Se puede extraer de un quintal de trigo 52 kg. de almidón. La hectárea de tierra produce 1363 litros de trigo y el hectolitro de trigo pesa 78 kg., ¿cuál es el peso del almidón que podrá extraerse de la cosecha de trigo de un terreno de 36435 m.²?

275. A volumen igual, el corcho solo pesa 0,25 del peso del agua, ¿cuál es el peso de cien tapones de corcho de 4 1/2 cm.³?

276. Un mercader vende 137 dag. de azúcar, se pregunta ¿qué pesas ha puesto en la balanza y cuál sería el volumen de agua que equilibra al azúcar?

277. ¿Cuántos dm.³ de aire hay en una caja de 0,54 m. de longitud, 0,45 m. de ancho y 0,31 m. de alto? ¿qué pesa ese aire a razón de 1,3 gr. el dm.³? ¿cuántos dm.² han sido necesarios para construir esta caja?

Monetarias

278. ¿Cuántos pesos existen en 425 centavos? ¿en 1457 centavos?

279. Restar 81,25 \$ de 100 \$.

280. ¿Cuántas monedas de 100 francos puede acuñarse con un kilogramo de oro?

281. ¿Qué suma en plata pesa 1 kg.?

282. ¿Cuántos argentinos se requiere para obtener 5 millones de francos?

283. Siendo de 15 1/2 la relación legal entre las monedas de oro y las de plata, ¿cuál sería el peso de una moneda de plata de 20 francos?

284. ¿Cuánto cobre habría que agregar a 5 kg. 40 dag. de plata para obtener moneda francesa, y qué suma se obtendría despreciando los gastos de fabricación?

285. ¿Cuál es el peso de 692 pesos en oro a la par?

286. Suponiendo que un hombre pueda cargar 75 kg., ¿qué suma en oro y cuál en plata podría cargar?

287. En uno de los platillos de una balanza se pone 8 monedas de 1 \$ argentino en plata, 17 monedas de 2 francos, 21 monedas de 2 centavos y 300 gramos; en el otro platillo se pone un frasco vacío cuyo peso es de 152 g., ¿qué volumen de agua será necesario introducir en el frasco para establecer el equilibrio?

288. Hallar el peso de oro puro, así como el de cobre contenido en una suma compuesta de 12 argentinos y 4 piezas de 10 francos.

289. Un obrero que gana 3,80 \$ por día y trabaja 6 días por semana; después de 52 semanas de trabajo sólo ha recibido una suma que, en plata,

pesaría 5,396 hg., ¿cuántos días ha dejado de trabajar y a cuánto alcanzan las economías del obrero si su gasto medio es de 2,75 \$ diario?

290. Una bolsa con monedas de plata tiene un peso neto (es decir, sin contar el de la bolsa) de 449.5 g. compuesto del mayor número posible de piezas de 5 fr., luego de las de 2 fr., de las de 0,50 fr. y de las de 0,20 fr. ¿Qué número de piezas de cada clase existe dentro de la bolsa?

291. Una pila de piezas de 20 francos, cuyo valor es de 1000 fr. tiene una altura de 64 mm.; una pila de piezas de 5 francos en plata valiendo 100 fr. tiene 54 mm. de altura. Calcular con estos datos, el espesor de cada una de las monedas; la altura de una pila de oro de valor de 5 mil millones; la altura de una pila de monedas de 5 fr. valiendo también cinco mil millones de fr.

Ejercicios diversos sobre el sistema métrico

292. Un terreno de 3 ha. 15 ca. se ha pagado 27000 \$, ¿a cuánto sería menester vender el m.² para obtener una ganancia de 17 pesos por área?

293. Dos personas efectúan un cambio; la primera cede a la segunda leña, y ésta le entrega vino, a saber: 0,05 l. de vino por 0,002 m.³ de leña. ¿Si la primera entre 3 estéreos 9 decistéreos de leña, ¿cuánto vino debe entregar la segunda?

294. Un balde lleno de agua pesa 17,750 kg., cuando se saca la mitad del agua sólo pesa 10,50 kg., ¿cuánto debe pesar cuando vacío y cuál es su capacidad?

295. ¿Cuántas monedas de 20 centavos en plata se necesitan para equilibrar en una balanza un vaso que pesa 0,7 kg. conteniendo tres litros de agua?

296. Un cultivador posee 32 kg. de semillas de trébol con los cuales desea sembrar a razón de 22 kg. por hectárea un terreno de 208 m. de longitud, ¿cuál es el ancho del terreno?

297. Diez litros de nieve, al fundirse, producen 1 litro de agua, ¿cuál es el peso soportado por un techo de forma reectangular teniendo 25 m. de longitud y 6,80 m. de ancho encima del cual la nieve forma una capa de espesor uniforme de 7 cm.?

298. El agua proveniente de la fusión de la nieve expresada en el ejercicio anterior se recoge en un recipiente de 12,25 m. de longitud por 3,40 m. de ancho, ¿a qué altura alcanza el agua en el recipiente?

299. Un lingote de plata pura pesa 2,468 kg., quiere acuñársele en monedas, de manera que se tenga un número igual de monedas de 5 y de 2 fr., ¿qué peso de cobre habrá que agregar y cuál será el valor total de las piezas fabricadas?

300. Una botella de 0,75 l. pesa, vacía, 250 gr.; llena de alcohol hasta las dos terceras partes de su capacidad pesa 660 g. Se compra 24 botellas enteramente llenas de este alcohol, cuyo peso bruto es de 21,165 kg. Se pregunta si hay fraude y, en caso afirmativo, cuántos litros de agua se ha substituido al alcohol puro?

301. Dos barricas llenas de vino de 80 \$ el hectolitro se han vendido
5
a precios que difieren de 36 \$. Se sabe que los — de la capacidad de la pri-
6

10
 mera equivalen a los $\frac{10}{13}$ de la capacidad de la segunda, ¿cuál es, en litros, la capacidad de ambas barricas?

302. Una persona compra un litro de leche y tiene la precaución de pesarla. Encuentra un peso de 1 kg. 24 g.; ahora bien, un litro de leche pura debe pesar 1 kg. 30 g. Admitiendo que lo que se ha vendido por leche pura sea una mezcla de leche y de agua, se pregunta, ¿cuántos centilitros de leche pura y cuántos de agua componen el litro vendido?

303. Para disminuir una carpeta rectangular de 1,75 m. de longitud por 1,56 m. de ancho, se ha quitado de los cuatro costados una tira de género de 0,11 m. de ancho. Esta carpeta ha sido luego forrada enteramente con un género de 0,67 m. de ancho al precio de 32,60 fr. la pieza de 120 m. y luego bordeada con un cordón de 4,30 \$ la pieza de 100 metros, ¿cuál es el precio de la reparación efectuada y qué superficie de género se ha quitado?

304. Un m.³ de estiércol pesa 750 kg. en circunstancias de venderse. Se pregunta ¿cuántos miles de kg. de estiércol se necesitará para cubrir un campo de 38 áreas, sabiendo que se exparse 80 m.³ por hectárea?

305. Una canilla suministra 3,60 l. de agua por minuto; dejándola abierta durante 4,35 horas, ¿a qué altura subirá el agua en el estanque correspondiente sabiendo que éste tiene la forma de un paralelepípedo recto rectangular cuyos lados inferiores son de 1,5 m. y 0,80 m.?

306. Sabiendo que un litro de semilla de lino pesa 62 dag. y que la semilla en cuestión puede producir aceite a razón de los $\frac{2}{5}$ de su peso, se

pregunta ¿qué suma se obtendrá con la venta del aceite suministrado por la semilla recogida en un terreno de 16 $\frac{1}{2}$ a., admitiendo que cada área suministra 12 litros de semilla y que el aceite de lino vale 1,50 fr. el kg.?

307. ¿Cuál es el peso de las monedas contenidas en un saco sabiendo que se compone de 8 argentinos, 7 monedas de 5 francos en plata, 24 monedas de 0,5 fr. y 3 monedas de 0,10 fr.?

308. Un posadero ha comprado 45 barricas de vino, de 225 litros cada una, a 125 \$ la barrica. Vende $\frac{2}{3}$ de ese vino a 0,65 \$ el litro; el $\frac{1}{5}$ a 0,60 \$ el litro y el resto a 0,55 \$ el litro, ¿qué beneficio ha obtenido?

309. Se quiere hacer una aleación con 100 fr. en piezas de plata de 5 fr.; 50 fr. en monedas de 2 fr. y 25 gramos de cobre puro, ¿cuál es la ley de la aleación así obtenida?

310. Un lingote de aleación de plata y cobre tiene por ley 0,840 y ha sido obtenido haciendo fundir en un crisol dos lingotes de diferente ley, los cuales han suministrado: el primero 1417,5 g. y el otro 15781,5 g. de plata fina. El que suministró mayor peso de plata, suministró también 2961 g. de cobre más que el otro, ¿cuál era la ley de cada lingote?

§ 2. — EXTENSIÓN DEL SISTEMA MÉTRICO

OTROS SISTEMAS DE UNIDADES EN USO (*)

128. a) **Extensión del sistema métrico.** — Fuera de Francia el sistema métrico fué adoptado desde los comienzos del siglo XIX por algunas provincias de Italia; en 1816 se le declaró obligatorio en los Países Bajos, a la sazón reunidos (Bélgica, Holanda, Luxemburgo). España lo aceptó en 1849, y desde 1860 las adhesiones fueron cada vez en aumento. En 1872, una Comisión Internacional, en la que estaban 30 estados representados, se reunió en París por invitación del gobierno de Francia a fin de establecer los prototipos internacionales. Para la ejecución de los nuevos prototipos del metro y del kilogramo se tomaron, como punto de partida, los patrones de los Archivos franceses.

Una oficina internacional de Pesas y Medidas fué creada de acuerdo con una convención diplomática en 1875 (Convención del Metro); se instaló en el pabellón de Breteuil (Sèvres). Su misión fué construir y conservar los patrones definitivos y compararlos con los patrones nacionales suministrados por los diversos estados.

Los patrones definitivos del metro y del kilogramo fueron sancionados por la Conferencia General de 1889 y depositados en los sótanos del pabellón de Breteuil (Sèvres).

Actualmente (1937), treinta y tres estados se han adherido a la Convención del Metro, a saber: Alemania, Argentina (**), Austria, Bélgica, Bulgaria, Canadá, Chile, Dinamarca, España, Estados Unidos de América, Finlandia, Francia y Algeria, Gran Bretaña, Holanda, Hungría, Irán, Islandia, Italia, México, Japón, Noruega, Perú, Polonia, Portugal, Rumania, Siam, Suecia, Suiza, Tchecoslovaquia, Turquía, Uruguay, U. R. S. S. y Yugoslavia.

Desde la conferencia de 1872, los progresos del sistema métrico han sido muy rápidos.

Actualmente ese sistema es teóricamente obligatorio en los países siguientes: Afganistán, Alemania, Argentina, Austria, Bélgica y Congo belga, Bolivia, Brasil, Bulgaria, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Dinamarca e Islandia, Ecuador, España, Estonia, Filipinas, Finlandia, Francia y Colonias francesas, Grecia, Guatemala, Haití, Holanda y Colonias, Honduras, Hungría, Irán, Italia con la Tripolitana y la Cirenaica, Letonia, Lituania, Luxemburgo, Malta, Marruecos, Mauricio, México, Nicaragua, Nippon (Japón), Noruega, Perú, Polonia, Portugal y Colonias, Rumania, Salvador, Seychelles, Siam, Suecia, Suiza, Siria (Líbano), Tchecoslovaquia, Túnez, Turquía, U. R. S. S., Uruguay, Venezuela y Yugoslavia.

(*) *Annuaire pour l'an 1937 publié par Le Bureau des Longitudes.*

(**) En la República Argentina el sistema métrico es obligatorio desde el 1.º de enero de 1878, en virtud de la ley n.º 845, de julio 13 de 1877 y decreto reglamentario de la misma, de junio 27 de 1878.

Tiene uso facultativo en Abisinia, Canadá, Dominicana (Rep.), Egipto, Estados Unidos de N. A., Gran Bretaña, Irlanda, Panamá, Palestina, Paraguay, Unión del África del S. En China la ley autoriza al Ministerio del Comercio para declararlo obligatorio en las administraciones de su dependencia, y ya lo es en los ferrocarriles.

129. b) Medidas inglesas y estadounidenses. — Las unidades fundamentales del sistema que utiliza Inglaterra están definidas por los patrones-tipo: la yarda, que es la distancia a $62^{\circ} \frac{2}{3}$ c.) entre dos trazos grabados sobre pastillas de oro sostenidos por una barra de bronce, llamada la "Imperial Standard Yard", y la libra "Avoir-dupois" (pound) que es la masa de un patrón en platino llamado "Imperial Standard Pound".

En los Estados Unidos de Norte América las unidades homónimas de las inglesas están definidas por sus relaciones con las unidades del sistema métrico:

$$1 \text{ yard (U. S. A.)} = \frac{3600}{3937} \text{ m.}$$

$$1 \text{ pound av. (U. S. A.)} = 0,453592428 \text{ kg.}$$

(ley del 28 de julio 1866 confirmada en 5 de abril 1893 por el "Secretary of Treasury").

130. Resulta de esas definiciones que los factores de conversión entre las unidades americanas y las métricas están fijadas con carácter invariable, mientras que las unidades inglesas y métricas quedan sujetas a revisiones en cuanto se haga cualquier nueva determinación experimental. Y así, las últimas medidas han dado los números siguientes:

$$1 \text{ yard (G. B.)} = 0,91439841 \text{ m. (en 1928)}$$

$$1 \text{ pound (G. B.)} = 0,453592338 \text{ kg. (en 1933)}$$

que acusan, respecto de los valores americanos, un apartamiento de 3 millo-nésimos para las longitudes y de 2 diez millonésimos para las masas. Esos números generalmente utilizados por los metrólogos, son ligeramente distintos de aquellos que resultan de los valores legales, que se dan a continuación, los cuales datan, respectivamente, de los años 1895 y 1883.

Longitudes

	Inglaterra		E. U. de N. A.
Inch (*), in (1000 mil)	25,399978	mm.	25,4000508 mm.
Foot (**), ft (12 in)	304,79974	mm.	304,80061 mm.
Yard, yd (3 ft)	914,3992	mm.	914,40183 mm.
Fathom (6 ft)	1,8287984	m.	1,8288037 m.
Pole (o perch) (16,5 ft)	5,0291956	m.	5,0292101 m.
Chain (22 yd)	20,116782	m.	20,116840 m.
Furlong (220 yd)	201,16782	m.	201,16840 m.
Mile (statute) (1760 yd)	1609,3426	m.	1609,3472 m.
Mile (nautical) (6080 ft)	1853,1824	m.	—
Mile (nautical) (6080,20 ft)	—		1853,2489 m.

(*) *Inch* o pulgada, se representa así: (In. '). La milésima parte de un *inch* es un *mil*.

(**) *Foot* o pie, se representa por (Ft., ").

Áreas

	Inglaterra	E. U. de N. A.
Square inch	6,45159 cm. ²	6,45163 cm. ²
Square foot (144 sq. in.)	929,029 cm. ²	929,034 cm. ²
Square yard (9 sq. ft)	0,836126 m. ²	0,836131 m. ²
Acre (4840 sq. yd.)	40,4685 a.	40,4687 a.
Square mile (640 acres)	258,998 ha.	259,000 ha.

Volúmenes

Cubic inch	13,3870 cm. ³	13,3872 cm. ³
Cubic foot	28,3168 dm. ³	28,3170 dm. ³
Cubic yard	764,553 dm. ³	764,556 dm. ³

Capacidades

Bushel (Bu)	35,3677 l.	35,2383 l.
Gallon (Gal)	4,54596 l.	3,78533 l.
Quart (Qt)	1,13649 l.	—
Liquid quart	—	0,9463331 l.
Pint (Pt)	0,568245 l.	—
Gill	0,142061 l.	—
Fluid ounce (480 minims)	28,4123 ml.	29,5729 ml.
Fluid drachm (60 minims)	3,55153 ml.	3,69661 ml.
Minim	0,0591922 ml.	0,0616102 ml.

Masas

1.º Medidas *Avoir du poids* (empleadas generalmente):

Grain (1/7000 lb)	64,798918 mg.
Dram, dr (1/256 lb)	1,7718454 g.
Ounce, oz (1/16 lb)	28,34953 g.
Pound, lb	453,592428 g.
Short Ton (2000 lb)	907,1849 kg.
Stone (14 lb)	6,350294 kg.
Hundredweight, cwt (112 lb)	50,80235 kg.
Ton (2240 lb = 20 cwt)	1016,047 kg.

2.º Medidas *Troy* (usadas para los metales preciosos):

Grain	64,798918 mg.
Penny weight (24 grains)	1,555174 g.
Troy ounce (480 grains)	31,10348 g.
Troy pound (5760 grains)	373,2418 g.

3.º Medidas *Apothecaries* (usadas en farmacia):

Grain (1/7000 lb)	64,798918 mg.
Scruple (20 grains)	1,295978 g.
Drachm (60 grains)	3,887935 g.
Troy ounce (480 grains)	31,10348 g.

Monetarias

Oro	{	Soberano, 20 shilling (£)	7.988 g.	0,916 $\frac{2}{3}$ fino	5.044 \$ oro arg.
		$\frac{1}{2}$ soberano, 10 shilling	3.994 g.		2.522 »
Plata	{	Corona, 5 shilling	28.276 g.	0.925 fino	1.161 »
		$\frac{1}{2}$ corona	14.138 g.		0.582 »
		2 florines, 4 shilling	22.620 g.		0.928 »
		Florín	11.310 g.		0.464 »
		Shilling (s.)	5.655 g.		0.232 »
		6 peniques ($\frac{1}{2}$ shilling) (d.)	2.828 g.		0.116 »
Moneda corriente: 1 guinea (21 shilling)					5.296 »

139. c) Otras unidades de medidas usuales:

Legua marina o geográfica	5555,555 m.
Legua terrestre	4444,444 m.
Milla marina	1852,000 m.
Quilate	2055 mg.

140. d) División de la circunferencia y de los ángulos:

Para apreciar porciones o *arcos de circunferencia* se supone dividida la circunferencia en 360 partes iguales que se llaman *grados*, cada uno de éstos en otras 60 partes iguales que se llaman *minutos*, y éstos en 60 partes iguales o *segundos*. El grado se indica con el signo °; el minuto con ' y el segundo así: ". Un arco de 46 grados 22 minutos y 7 segundos se escribirá por consiguiente: 43°22'7".

Lo mismo ocurre para con los ángulos: el ángulo recto se supone dividido en 90 grados, cada uno de éstos en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.

Esta división se llama *sexagesimal*.

141. Otro sistema consiste en tomar como unidad el cuadrante o el ángulo recto, y las divisiones son *centesimales*.

Refiriéndonos sólo a los ángulos, tendremos el siguiente cuadro:

	Símbolo	Valor
Ángulo recto	D	1 D
Grado (centesimal)	gr	1/100 D
Decigrado	dgr	1/1000 D
Centigrado	cgr	1/10000 D
Miligrado	mgr	1/100000 D
Grado (sexagesimal)	d ° ° (*)	1/90 D
Minuto de ángulo	'	1/60 d
Segundo de ángulo	"	1/60 '

(*) El símbolo ° puede emplearse cuando, por la naturaleza de la unidad considerada, no puede haber dudas, especialmente cuando el ángulo comprende también minutos.

142. Refiriéndonos a la circunferencia resultan así las siguientes correspondencias:

	Sistema sexagesimal	Sistema centesimal
Cuarto de circunferencia (cuadrante)	$\left\{ \begin{array}{l} 90^{\circ} \\ 540' \\ 32400'' \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 100 \text{ gr.} \\ 1000 \text{ dgr.} \\ 10000 \text{ cgr.} \\ 100000 \text{ mgr.} \end{array} \right.$

143. e) **Antiguas medidas y pesas españolas.** — Como aun suele usarse entre nosotros, en parte, el sistema antiguo español de pesas y medidas, indicaremos este último someramente, dando también su correlación con el sistema métrico decimal.

144. Unidades de longitud:

	Equivalente en metros	
	legal (*)	usual (**)
Legua (lg.) equivalente a 40 cuadras	5193,60	5190,0
Cuadra (cd.) equivalente a 150 varas	128,99	129,90
Vara (v.) equivalente a 3 pies	0,8666	0,866
Pie (p.) equivalente a 12 pulgadas	0,2888	0,288
Pulgada (plg.) equivalente a 12 líneas	0,02407	0,024
Línea (l.) equivalente a 12 puntos	0,002006	0,002

La unidad principal era la *vara*, la que, en ciertos casos, solía dividirse en dos *medias varas* o *codos*, en *cuartas* o *palmos*, y el palmo en 12 dedos.

145. Unidades superficiales:

	Equivalencia en metros cuadrados	
	legal	usual
Legua cuad. = 1600 cd. ²	2703584,00	26998416,0
Cuadra cuad. = 22500 v. ²	16897,40	16897,4
Vara cuad. = 9 p. ²	0,750995	0,749956
Pie cuad. = 144 plg. ²	0,083444	0,083328
Pulgada cuad. = 144 l. ²	0,00057947	0,000579
Línea cuad.	0,00000402	0,000004

Se solía usar también la *manzana* que era un cuadrado, en general de 140 varas de lado; el *cuarto de tierra* que era un rectángulo de $17 \frac{1}{2}$ varas de frente por 70 varas de fondo, o sea $\frac{1}{16}$ de manzana. También se usaba el *solar*, el *sitio*, etc.

146. Unidades de volumen:

Vara cúbica	$3^3 = 27$, pies cúbicos
Pie cúbico	$12^3 = 1728$, pulgadas cúbicas
Pulgada cúbica	$12^3 = 1728$, líneas cúbicas

La unidad principal era la *vara cúbica*.

(*) Decreto del gobierno de la provincia de Buenos Aires de 29 de julio de 1881.

(**) Establecida por el ex Departamento de Ingenieros.

147. Unidades de capacidad. — *Para líquidos:*

	Equiv. métrica litros
Pipa (pp.) equivalente a 4 cuarterolas o 6 barriles	456,02647
Cuarterola	114,00661
Barril (bar.) equivalente a 32 frascos	76,00438
Frasco (fr.) equivalente a 4 cuartas	2,375137
Cuarta (ct.) equivalente a 2 medias cuartas	0,5937844
Media cuarta, equivalente a 2 octavas	0,2968922
Octava	0,1484432

La unidad principal era el *frasco*. Se usaba también el *galón*, equivalente a $\frac{8}{5}$ de frasco, y la *caneca*, equivalente a 8 frascos.

Para áridos:

	Equiv. métrica decalitros
Fanega, equivalente a 2 medias fanegas	13,7272
Media fanega, equivalente a 2 cuartillas	6,8636
Cuartilla, equivalente a 2 medias cuartillas	3,4318

148. Unidades de peso. — *Del comercio:*

	Equiv. métrica kilogramos
Tonelada (ton.) equivalente a 20 quintales	918,80
Quintal (qq.) equivalente a 4 arrobas	45,94
Arroba (@) equivalente a 25 libras	11,4850
Libra (lb.) equivalente a 16 onzas	0,4594
Onza (onz.) equivalente a 16 adarmes	0,0287125
Adarme (ad.) equivalente a 36 granos	0,0017945
Grano	0,000049848

Pesada de cueros secos, equivalente a 35 lb.

» » salados, equivalente a 60 lb.

» » de carnero lavados, equivalente a 30 lb.

Farmacéuticas:

	Equiv. métrica gramos
Libra, equivalente a 12 onzas	344,55
Onza, equivalente a 8 dracmas	28,7125
Dracma, equivalente a 3 escrúpulos	3,589
Escrúpulo, equivalente a 2 óvalos	1,1963
Óvalo, equivalente a 12 granos	0,5981
Grano	0,04985

Monetarias:

La onza de oro, equivalente a 15,75 pesos fuertes.

El peso fuerte (5,17 francos), equivalente a 8 reales.

El real, equivalente a 12,50 centavos.

De estas unidades antiguas aún se usa la vara y la vara cuadrada, equivalentes, como se ve, a 0,866 m. y 0,751 m.² aproximadamente. De aquí la siguiente:

149. Regla. — *Para reducir aproximadamente varas a metros, se multiplica por 0,866; para reducir metros a varas se divide por 0,866 o se multiplica por 1,1547. Para reducir varas cuadradas a metros cuadrados se multiplica por 0,751; para reducir metros cuadrados a varas cuadradas se divide por 0,751 o se multiplica por 1,331.*

EJERCICIOS

Medidas inglesas

311. Multiplicar 8241 £ (*) 9 s. 11 $\frac{1}{2}$ d. por 945 y dividir el resultado por 319.

312. ¿Cuál es el costo de un telegrama enviado a 3800 millas sabiendo que el telegrama se compone de 300 palabras inglesas y 150 persas siendo de $\frac{1}{2}$ d. por milla el costo de la transmisión de cada 50, palabras inglesas y $\frac{3}{4}$ d. el costo de la transmisión de cada 30 palabras persas, por milla?

313. La suma de 7 $\frac{1}{2}$ d. ha sido repartida entre tres personas, A, B y C, de tal manera que A recibe 1 $\frac{1}{2}$ d. más que C, y B 2 $\frac{1}{4}$ d. menos que C. Si un soberano se reparte en la misma forma, ¿qué suma recibirá A, B y C?

314. El número de alumnos de un colegio aumentó de cuarenta a cincuenta, habiéndose de esta manera obtenido una economía de 2 £ 5 s. por alumno. Si el aumento total en el gasto es de 525 £, ¿cuál es el costo de mantenimiento de cada uno de los 40 alumnos?

315. El número de pasajeros de segunda clase de un tren es tres veces mayor que el de primera clase; el número de los de tercera clase excede al de las otras dos clases juntas en 36 unidades. El pasaje por milla de primera clase es doble del de segunda y triple del de tercera; si la distancia media recorrida por cada uno de los viajeros de 1.^a clase es de 120 millas, la recorrida por cada uno de los de 2.^a clase 50 millas y por los de 3.^a 25 millas, y si el gasto total efectuado es de 390 £ 1 s. 8 d. ¿cuántos pasajeros de cada clase han viajado?

316. Si 121 tons. 17 cwt. 2 qrs. de carbón cuestan 137 £ 2 s. 2 $\frac{1}{4}$ d., ¿cuál es el precio de la ton. y qué precio por ton. debe pagar un obrero si paga 7 lbs. por cada penique?

317. Siete partes en peso de oro se mezclan con ocho partes en peso de plata, y el peso del total es 250 ozs., ¿cuál es el valor de la mezcla siendo el precio del oro y de plata respectivamente de 3 £ 17 s. 9 d. y 40 $\frac{1}{2}$ d. la onza?

318. Sabiendo que 5760 grains forman una libra (pound) Troy y que 7000 grains forman una libra avoir du poids, hallar cuántas libras y onzas Troy equivalen a 3 qrs. 12 libras avoir du poids.

(*) El símbolo £ se escribe, en la práctica, delante del número que lo afecta, pero en obsequio a la lógica, lo escribiremos después, como los demás símbolos de unidades.

319. ¿Cuántos postes de telégrafo se requieren para sostener un hilo de 73 *mi.* 3 *fur.* 16 *rods.*, suponiendo que el intervalo entre cada poste sea de 99 *ft.*

320. Un chimenea es protegida por un pararrayos constituido por 17 barras de cobre, las cuales se atornillan una con otra en 3 *in.* en cada junta. Las tres barras más altas tienen 7 pies cada una de longitud total, las ocho siguientes 11 *ft.* cada una, y las 6 últimas 13 *ft.* cada una. El pararrayo sobresale 6 *ft.* encima de la chimenea y está enterrado en el suelo 9 *ft.*, ¿cuál es la altura de la chimenea?

321. Un club de cricket compra un terreno de 10 *ac.* 3 *ro.* 28 *po.* por la suma neta de 17500 £, ¿cuál es el costo del acre?

322. Determinar el número de *links* (cadenas) cuadradas de un terreno de 3 $\frac{1}{4}$ acres de extensión, sabiendo que una cadena de agrimensor de 100 *links* tiene 22 *yds.* de longitud.

323. Reducir 35469099 *cub. in.* a *ft. cub.*

324. Un lechero compra leche a 10 *d.* el *gallon*, vende diariamente 57 *gals.*, incluso los domingos, ¿a qué precio debe vender la *qt.* para obtener un provecho anual de 346 £ 15 *s.*?

325. Si un pie cúbico de agua pesa 1000 *oz.*, ¿cuántas yardas cúbicas de agua pesan 337 $\frac{1}{2}$ *tons.*?

326. Si Neptuno se halla a 2706920000 millas de distancia de la Tierra y si la luz recorre 185000 millas por segundo, ¿qué tiempo invertirá para pasar de la Tierra a Neptuno.

327. Un buqué sale de Plymouth el 28 de junio a las 6 a. m., llega a Auckland a las 9 a. m. del 14 de agosto. Ha hecho escala en Tenerife, en el Cabo, y en Hobart, perdiendo exactamente 2 $\frac{1}{4}$ días en estos puertos. Sabiendo que la distancia total recorrida es de 12500 millas, ¿cuál es el camino recorrido por hora por el buque?

328. 990 *gals.* de cerveza común y 3474 *gals.* de cerveza doble, deben colocarse enteramente en barriles del mismo tamaño y lo más grande posible sin mezclar ambas clases de cerveza, ¿qué capacidad debe tener cada barril?

329. El oro cuesta 3 £ 17 *s.* 10 $\frac{1}{2}$ *d.* por onza, ¿cuál es el menor número de onzas que puede acuñarse para obtener un número entero de soberanos?

330. ¿Cuál es la longitud mayor de las que 18 *yds.* 1 *ft.* 3 *in.* y 20 *yds.* 1 *ft.* 9 *in.* son múltiplos?

331. Hallar el m. c. d. de 36 £ 0 *s.* 4 $\frac{1}{2}$ *d.*; 48 £ 14 *s.* 7 $\frac{1}{2}$ *d.* y 861 £ 7 *s.* 4 $\frac{1}{2}$ *d.*?

332. ¿Cuál es la menor suma de dinero que contiene exactamente las siguientes sumas: 5 *s.* 5 *d.*; 7 *s.* 1 *d.*; 7 *s.* 7 *d.* y 9 *s.* 11 *d.*?

333. Hallar la menor longitud que contiene exactamente: 6 *yds.* 5 *in.*; 6 *yds.* 2 *ft.* 7 *in.*; 8 *yds.* 2 *ft.* 11 *in.*

334. Hallar la menor suma del dinero de la que cierto número de hombres, mujeres y niños puedan respectivamente recibir 1 £ 7 *s.* 6 *d.*; 18 *s.* 9 *d.* y 8 *s.* 3 *d.* cada uno.

335. Dividir 4 £ 2 *s.* y 6 *d.* entre tres personas A, B, C de tal manera que la parte de A sea los $\frac{5}{8}$ de la de B; y la de B 1 $\frac{1}{2}$ vez la de C.

336. Hallar la diferencia entre $\frac{2 \text{ £ } 17 \text{ s. } 6 \text{ d.}}{12 \text{ £ } 18 \text{ s. } 9 \text{ d.}}$ y $\frac{2 \text{ cwt. } 2 \text{ qrs. } 10 \text{ lbs.}}{12 \text{ cwt. } 0 \text{ qrs. } 19 \text{ lbs.}}$.

337. ¿Qué fracción de 4 s. 7 d. excede los $\frac{3}{7}$ de $\frac{3}{5}$ de 2 s. 1 d. en 1 s. 5 d.?

338. Reducir $\frac{7}{19}$ de 3 s. 11 $\frac{1}{2}$ d. + $\frac{4}{33}$ de 10 £ 14 s. 6 d. — $\frac{8}{17}$ de 18 s. 5 d. a una fracción de 5 £ 12 s. 9 d.

339. Reducir 17 cwt. 2 qrs. 24 $\frac{1}{2}$ lbs. a una fracción decimal de 2 tons. 5 cwt.

340. Hallar el valor en tons., cwt., qrs., etc., de 2,16 de 3 tons. 12 cwt. + .142857 de 1 cwt. 3 qrs. 22 lbs. + .75 de cwt. + 3.83 de 9 lbs. 13 oz.

341. Hallar el valor de 3.3428571 de 0,49 £.

342. Hallar el número de poles existentes en $\frac{0.94}{3.863}$ de 6 ac. 1 rd. 35 po.

343. Reducir a su más simple expresión $\frac{2.3888...}{3.9090...}$ de 27 £ 3 s. 9 d.

344. Hallar el valor, en \$ oro argentino, de 47 kg. 8 dag. 4 g. de un artículo cuyo precio es 23,57 £ el kg.

345. Un acre equivale a 0,40467 ha. y una libra esterlina a 25,25 fr. Un estado vende 1927 ha. de tierras por 10100000 fr., ¿cuál es el precio por acre en £, s. y d.?

Monetarias

346. Se tiene 6 cubiertos de plata con ley de 0,920. El peso de cada uno es 125 g. Se les hace fundir y se fabrica moneda inglesa (piezas de 1 shilling), ¿cuánta plata habrá que agregar?

347. Una suma en oro acuñado con ley de 0,9 ha sido convertida a ley de 0,835 por el agregado de 650 gramos de cobre, ¿cuál era esa suma?

348. ¿Cuál es el número de monedas de 20 centavos en plata que puede fabricarse con un trozo de plata pura de 126 cm.³ sabiendo que la plata pura pesa 10 $\frac{1}{2}$ veces más que el agua.

349. 7200 \$ oro americano han sido abonados en Londres con 1477 £ 10 s. ¿Cuál es en £, s. y d. el valor de 1 \$ oro americano?

350. Si 25 fr. equivalen a un soberano, ¿qué gana o pierde una persona que recibe el pago de una deuda de 16 £ 5 s. en francos calculados a

$\frac{3}{9 - \frac{3}{4}}$ d. cada uno?

351. Si un soberano equivale a 25.15 francos, ¿cuánto por ciento pierde el que lo recibe por 25 francos?

352. Si 1 dollar equivale a $4 \text{ s. } 3\frac{4}{5} \text{ d.}$ y a 5,439 fr., ¿cuántos francos equivalen a 1 £?

353. ¿Qué vale 1 £ en París si 12 fl. 2 c. valen 1 £ y 9 fl. 50 c. valen 20 fr. en París?

354. En Berlín 500 g. de oro equivalen a 1392 marcos y en Londres una onza de metal fino equivale a 3 £ 17 s. 9 d., ¿qué relación existe entre el metal fino de Berlín y el de Londres? (Una onza pesa 31,1035 g.).

355. Si 3 £ equivalen a 20 thalers; 25 thalers a 93 fr. y 27 fr. a 5 scu.; 62 scu. a 135 gul., ¿cuántos gulden existen en 2 £?

Antiguas monedas españolas

356. Reducir 19 quintales españoles a libras.

357. Reducir 3 barriles y 7 frascos a pipas.

358. Reducir $\frac{4}{5}$ varas a pies.

359. Reducir a onzas 48 libras.

360. Reducir 5346 onzas a unidades superiores.

361. Reducir $\frac{25}{7}$ varas a distintas unidades.

362. Reducir 7 lbs., 9 onz., 4 adarmes a fracciones de arroba.

363. Reducir a onzas 12 arrobas, 8 libras y 7 onzas.

364. Reducir a unidades inferiores 0,14 de un barril.

365. Efectuar la adición siguiente:

4	quintales	3	arrobas	5	lbs.	7	onzas
0	»	1	»	1	»	4	»
16	»	2	»	22	»	9 $\frac{2}{3}$	»

366. Efectuar la substracción: (32 varas, 2 pies, 4 pulgadas) — 17 varas, 1 pie, 9 pulgadas).

367. Hallar el valor de 3 arrobas de un artículo sabiendo que una arroba cuesta 8 pesos 6 reales.

368. Una fanega de trigo pesa 3 arrobas, 8 libras y 6 onzas, ¿cuánto pesarán 19 fanegas?

369. Una vara de tela vale 6 reales, ¿cuánto valdrán 3 varas y 5 pulgadas?

370. Una arroba de cacao ha costado 2 pesos, ¿cuánto costarán 2 arrobas, 6 libras y 8 onzas?

371. Habiendo costado 2 pesos 5 y $\frac{1}{2}$ reales, 7 varas, 1 pie y 4 pulgadas, ¿cuánto costará una vara?

372. Si una arroba ha costado 4 pesos y 5 reales, ¿cuántas arrobas, libras y onzas se podrán comprar con 27 pesos y 6 reales?

373. Un móvil recorre en tiempos iguales espacios iguales; sabiendo que en 1 hora ha recorrido 13 varas, 2 pies, 5 pulgadas y 6 líneas, ¿qué espacio recorrerá en 20 horas, 36 minutos y 20 segundos?

374. Un móvil anda en 1 minuto 50 $\frac{3}{4}$ varas, ¿cuántas andará en 10 minutos y 25 segundos?

375. Si en un día, 10 horas, 10 minutos se han tejido 1000 varas y 2 pies de tela, ¿cuántas varas corresponden a una hora de trabajo?

376. 13 @ y 5 lbs., costaron 528 \$, ¿cuánto cuesta la @?

377. Se ha comprado un terreno de 10 varas de frente por 40 de fondo al precio de 7560 \$, ¿cuánto se ha pagado por pie cuadrado?

Unidades sexagesimales

378. Reducir a segundos $10^{\circ} 16' 27''$ sexagesimales.

379. Reducir $39987''$ a grados, minutos y segundos sexagesimales.

380. Efectuar las operaciones siguientes:

$40^{\circ} 30' 50'' \times 9$; $364^{\circ} 37' 30'' : 9$ (sexagesimales).

2 horas, 4 minutos, 8 segundos $\times 15$.

$12^{\circ} 8' 24'' \times 15$.

$12^{\circ} 3' : 15$.

4 horas, 7 minutos, 3 segundos : 15.

381. ¿Qué edad tiene el 12 de febrero de 1871 un sujeto que nació el 10 de octubre de 1781?

Conversión de unidades

382. Convertir en metros:

259 vrs., 1 p., 5 plgs., 10 ls.

5,402 m. en varas y submúltiplos.

8,2046 kg. en libras españolas y submúltiplos

707,80 litros en frascos.

383. Calcular la cantidad de dm.³ contenidos en un barril sabiendo que la capacidad de un frasco es de 170 pulgadas cúbicas más 1080 líneas cúbicas.

384. Sabiendo que la distancia del Retiro a Belgrano es de 72 cuabras y 28 varas, expresar esta distancia en metros.

385. Una quinta que tiene 3 cuabras cuadradas de superficie más 5000 varas cuadradas, se ha vendido en 135929,45 \$, ¿a cuánto sale el m.²?

150. Regla conjunta (*o de la cadena*). — El problema llamado **regla conjunta** tiene por objeto, dada una cantidad expresada en base a un sistema de unidades, hallar la expresión de la misma en base a otro sistema de unidades, mediante ciertas equivalencias o relaciones que ligán uno y otro sistema de unidades.

Los ejemplos siguientes dan una idea clara de la naturaleza de la cuestión.

EJEMPLO 1.º — ¿Cuántos pesos costarían 40 kilogramos de té, sabiendo que 8 libras españolas de té cuestan 12 pesos y que 23 kilogramos equivalen a 50 libras?

Sea x \$ el costo buscado; escribamos enfrente una de otra,

empezando por x , como se indica al margen, las cantidades que se corresponden en el problema, de manera que

x \$	40 kg.	la unidad de la cantidad de la derecha de cada
23 kg. = 50 lb.		fila sea igual a la de la izquierda de la fila si-
8 lb.	12 \$	guiente; resulta, necesariamente, que la primera

y la última cantidad así escritas, están expresadas en base a una misma unidad; además, la segunda fila implica una igualdad por cuya razón se ha puesto el signo $=$.

Diremos ahora, si 40 kilogramos cuestan x \$, 40×23 kg. costarán $23 \times x$ \$; pero 40×23 kg. son 40×50 libras en virtud de la igualdad establecida. Luego 40×50 libras cuestan $23 \times x$ \$; luego $40 \times 50 \times 8$ libras costarán $23 \times x \times 8$ \$, pero en virtud de que 8 libras cuestan 12 \$; se infiere que $8 \times 40 \times 50$ libras costarán $12 \times 40 \times 50$ \$.

Tenemos, pues, en resumen, la siguiente igualdad:

$$23 \times x \times 8 \$ = 40 \times 50 \times 12 \$.$$

$$x = \frac{40.50.12}{23.8}.$$

El ejemplo anterior justifica la siguiente:

151. Regla práctica. — *Para resolver una regla conjunta, se forma con los datos y la incógnita una serie de filas de dos cantidades, de manera que la cantidad de la izquierda de cada fila sea de la misma unidad que la de la derecha de la fila anterior; la última cantidad debe resultar de misma unidad que la primera; se obtienen, así, dos columnas de cantidades; multiplicando los números que figuran en ambas columnas, debe obtenerse dos números iguales, y de esta igualdad se deduce el valor de la incógnita.*

EJEMPLO 2.º — *¿Cuántas libras esterlinas equivalen a 2000 reales españoles, siendo el cambio en Hamburgo de 45 chelines por cada 20 reales y el de Hamburgo con Londres de 220 chelines por libra esterlina?*

Tenemos que

$$\begin{aligned} x \text{ £} &= 2000 \text{ reales} \\ 20 \text{ reales} &= 45 \text{ chelines} \\ 220 \text{ chelines} &= 1 \text{ £} \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$x \cdot 20 \cdot 220 = 2000 \cdot 45 \cdot 1$$

$$\therefore x = \frac{2000 \times 45}{220 \times 20} = 20 \frac{5}{11}, \text{ £.}$$

EJEMPLO 3.º — Hallar en pesos moneda nacional el valor de 76 kilogramos de café sabiendo que 10 kilogramos equivalen a 22 libras inglesas, que 112 libras inglesas de dicho café valen 7 guineas, que la guinea equivale a 252 peniques, que 150 peniques equivalen a 15 pesetas españolas y que 5 pesetas equivalen a 2,27 pesos moneda nacional.

Del cuadro

$$\begin{aligned} x \text{ \$ } \frac{m}{n} & \quad 76 \text{ kg.} \\ 10 \text{ kg.} & = 22 \text{ libras} \\ 112 \text{ libras} & \quad 7 \text{ guineas} \\ 1 \text{ guinea} & = 252 \text{ peniques} \\ 150 \text{ peniques} & = 15 \text{ pesetas} \\ 5 \text{ pesetas} & = 2,27 \text{ \$ } \frac{m}{n} \end{aligned}$$

resulta

$$x \cdot 10 \cdot 112 \cdot 1 \cdot 150 \cdot 5 = 76 \cdot 22 \cdot 7 \cdot 252 \cdot 15 \cdot 2,27$$

$$\therefore x = \frac{76 \cdot 22 \cdot 7 \cdot 252 \cdot 15 \cdot 2,27}{10 \cdot 112 \cdot 150 \cdot 5} = 119,56, \text{ \$ } \frac{m}{n}.$$

EJERCICIOS

386. Si 20 manzanas valen tanto como 12 peras, si 9 peras valen tanto como 4 naranjas y 12 naranjas tanto como 240 nueces, ¿cuánto costarán 25 manzanas, 5 peras y 10 naranjas siendo de 0,45 \$ el valor del ciento de nueces?

387. A puede copiar 6 páginas mientras B copia 5, B copia 15 mientras C copia 12, C copia 4 mientras D copia 3. A, que puede copiar 20 páginas por día, recibe un original de 240 páginas para copiar y después de haber copiado la cuarta parte, llama simultáneamente a B, C y D para que lo ayuden, ¿en cuánto tiempo quedará terminada la copia?

388. Supondremos que 4 obreros ingleses pueden hacer en un día tanto trabajo como 5 franceses, y que 4 franceses tanto como 7 negros. 13 obreros ingleses y 12 franceses efectuaron un trabajo en 3 días, ¿en cuánto tiempo lo efectuarían 10 negros?

389. Suponiendo que 5 lbs. (inglesas) de café cuestan tanto como 7 lbs. de chocolate, 10 lbs. de chocolate tanto como 3 lbs. de té, 5 lbs. de té tanto como 35 lbs. de azúcar, 7 lbs. de azúcar tanto como 2 lbs. de cacao y que 1 cwt. de cacao cuesta 8 £ 6 s. 8 d., hallar el precio de 1 lb. de café.

CAPÍTULO VII

RAZONES Y PROPORCIONES

§ 1. — RAZONES

152. Definiciones. — Llámanse **razón** o **relación** entre dos cantidades matemáticas de la misma especie consideradas en cierto orden, al número cociente de la división de la primera por la segunda. Cuando se habla de *razones* entre dos cantidades tomadas en cierto orden, la primera, es decir el dividendo, se llama el **antecedente** de la razón, la otra el **consecuente**.

El antecedente y el consecuente de una razón se llaman los *términos* de la misma. Por extensión se habla también de razones entre dos números.

La relación o razón entre un conjunto de 8 hombres y otro de 2 hombres, es el número 4 que expresa el cociente de la división de la primera cantidad por la segunda. Si se tomaran las cantidades anteriores en el orden inverso, el cociente o sea la razón sería el número fraccionario $\frac{2}{8}$, de suerte que la expresión $\frac{2 \text{ hombres}}{8 \text{ hombres}}$ kilómetros expresaría $\frac{1}{4}$ kilómetro, es decir 250 metros.

De igual manera, la razón entre las cantidades $\sqrt{8}$ km. y $\sqrt{4}$ km. es el número irracional $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}$ o sea $\sqrt{2}$.

Si la unidad en base a la que se expresan las dos cantidades que se consideran, fuera la segunda de ellas, la razón entre ambas sería, evidentemente, la medida del antecedente según resulta del n.º 79; puede, por consiguiente, establecerse que la razón entre dos cantidades consideradas en cierto orden, es el número que expresa la medida de la primera cantidad tomando la segunda como unidad. Si la razón es un número entero, la segunda canti-

dad se dice ser una **parte alicuota** de la primera. Si la razón es un número racional, las dos cantidades se dicen **comensurables**, una con respecto de la otra y entonces la razón entre ella se dice ser una **medida común** entre ellas. En caso contrario, las dos cantidades se dicen **incomensurables** la una respecto de la otra.

153. Propiedades.— Las identidades siguientes, ya demostradas (n.º 231, Vol. I, pág. 123 y siguientes):

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{1}{\frac{b}{a}} \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{am}{bm}; \quad \frac{a}{b} \equiv \frac{\left(\frac{a}{m}\right)}{\left(\frac{b}{m}\right)} \quad (2)$$

$$\frac{a}{c} \equiv \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \quad (3)$$

pueden enunciarse de la siguiente manera:

(1) *La razón entre dos cantidades consideradas en cierto orden, es inversa (Vol. I, pág. 141) de la razón entre estas mismas cantidades consideradas en orden inverso; o también:*

El número medida de a, tomando b como unidad, es inverso del número medida de b tomando a como unidad;

(2) *La razón entre dos cantidades no altera si se multiplican o dividen ambas por una misma cantidad o por un mismo número; o también, refiriéndose a la segunda parte del enunciado:*

Si dos grandores a y b son comensurables con un tercero m., son comensurables entre sí; el número medida de a, cuando se toma b como unidad, es la razón entre los números medidas de a y b cuando se toma m como unidad;

(3) *Si a es comensurable con b y b lo es con c, a es también comensurable con c y la medida de a en base a la unidad c es el*

producto de la medida de a en base a la unidad b multiplicada por la medida de b en base a la unidad c .

Consideremos dos cantidades a y b , y sea $a : b$ la razón entre ellas; esta razón será menor, igual o mayor que 1 según que $a < b$, $a = b$, $a > b$. La identidad:

$$\frac{a}{b} - \frac{a+x}{b+x} \equiv \frac{ax-bx}{b(b+x)} \equiv \frac{x(a-b)}{b(b+x)}$$

nos demuestra que si $a > b$, la diferencia $\frac{a}{b} - \frac{a+x}{b+x}$ tiene un valor

determinado y que, por tanto, $\frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x}$; que si $a = b$, esta dife-

rencia se hace nula, y por lo tanto $\frac{a}{b} = \frac{a+x}{b+x}$; y por último, que

si $a < b$, la expresión $a - b$ carece de sentido, lo que significa que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}.$$

Luego:

Si se agrega al antecedente y al consecuente de una razón una misma cantidad, esta razón disminuye, no altera o aumenta según que el antecedente sea mayor, igual o menor que el consecuente; e inversamente, si en vez de agregar, se quita una misma cantidad, a los dos términos de la razón.

154. Si varias razones son iguales, pueden deducirse algunas consecuencias importantes.

Por ejemplo, si se tiene

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$$

resultará

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}.$$

Pues, si llamamos k a cualquiera de las razones iguales, resulta, de las propiedades conocidas, las siguientes igualdades:

$$a = bk; \quad c = dk; \quad e = fk; \dots$$

luego, sumando ordenadamente y sacando k , factor común,

$$a + c + e + \dots = (b + d + f + \dots)k,$$

es decir,

$$k = \frac{a + c + e + \dots}{b + d + f + \dots},$$

es decir

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{a + c + e + \dots}{b + d + f + \dots}.$$

EJERCICIOS

390. Hallar la razón existente entre 8 km., 7 m., 10 dm. y 937 metros.

391. Hallar el número cuya razón con $7\frac{2}{3}$ es igual a la razón existente entre 3 £ 1 s. 3 d. y 4 £ 13 s. 11 d.

392. Hallar la razón entre 17 horas, 45 minutos, 28 segundos y 124 horas, 18 minutos, 16 segundos y presentarla en la forma más sencilla.

393. Hallar un número fraccionario cuya razón con $7\frac{7}{26}$ sea la existente

entre $\frac{14}{15}$ y la tercera parte de $\frac{13}{20}$.

394. Si los dos décimos de un número son iguales a los 4 centésimos de otro, ¿cuál es la razón entre ambos números?

395. En una ciudad existen 15933 blancos y 50055 negros. Expresar en su forma más simple la razón entre el número de blancos y el total de la población.

396. La razón entre dos números es $\frac{24}{30}$, el m. c. m. entre ellos es 720.

¿Cuáles son esos números?

397. Expresar lo más sencillamente posible la razón entre $4,333\dots$ y $10\frac{1}{9} + 3,0333\dots$

398. Si 226 miembros de un congreso representan 12832803 personas, ¿cuál es la razón cuyo antecedente es 1, entre la representación y la población, y cuántos miembros debe, por lo menos, tener en el parlamento una población de 189860 habitantes?

399. En una escuela, la razón entre los alumnos de la primera clase al total es $\frac{1}{7}$; la razón entre los de la segunda y el total es $\frac{5}{12}$; la razón entre la de la tercera y el total es $\frac{8}{21}$; el restante de alumnos son 15 niños. Hallar el número total de alumnos de la escuela.

400. La razón entre dos longitudes es $3\frac{5}{8}$; la segunda es 29,856 m., ¿cuál es la primera?

§ 2. — PROPORCIONES

155. Definición. — Si dos razones son iguales, la igualdad que establece esta circunstancia recibe, en ciertos casos, el nombre de **proporción** y entonces las cuatro cantidades necesarias para establecer esa proporción, se dicen **proporcionales** en el orden en que están consideradas.

Por ejemplo, si las cuatro cantidades de misma especie a , b , c , d , son tales que la razón $\frac{a}{b}$ entre las dos primeras, es igual a la razón $\frac{c}{d}$ entre las dos segundas, dichas cuatro cantidades son pro-

porcionales en el orden indicado y se tiene la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

que se expresa diciendo: *a es a b como c es a d*, y se escribe también $a : b :: c : d$.

Los términos a y d son los **extremos**, b y c los **medios** de dicha proporción. En general, a , b , c y d se llaman los **términos** de la proporción.

En vez de las cantidades mismas se suele, a menudo, escribir los números que las expresan en base a una unidad establecida; en el ejemplo anterior las cuatro cantidades proporcionales se componen de a , b , c y d unidades; por extensión se prescinde también frecuentemente de la noción de unidad y se consideran proporciones únicamente entre números.

De acuerdo con estas convenciones, las igualdades

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}; \quad \frac{\left(\frac{5}{8}\right)}{\left(\frac{7}{0}\right)} = \frac{25}{28}$$

son proporciones entre los números 3, 2, 6, 4 por un lado, y entre los números $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$, 25 y 28 por otro.

Supondremos esencialmente en lo que sigue que ninguna de las razones consideradas, y por lo tanto que ninguno de los términos, sea nulo.

156. Principales propiedades. — Si se tiene

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ se deduce que } \frac{ad}{bd} = \frac{cb}{bd}, \text{ es decir, que } ad = cb.$$

Luego:

En toda proporción el producto de los extremos debe ser igual al producto de los medios.

Por consiguiente, si tres de los términos de una proporción son conocidos, puede hallarse el cuarto. Así, si a , c , d son dados

en la proporción anterior, se tiene que $b = \frac{ad}{c}$.

Inversamente, si tenemos $ad = bc$ se deducirá que $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$,

esto es, que *cuatro cantidades, ninguna de ellas nulas, conteniendo respectivamente a , b , c , d unidades tales que $ad = bc$, son proporcionales en el orden indicado.*

157. Varias cantidades a , b , c , d , ... se dicen estar en **propor-**

ción continua cuando se tiene $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \dots$

158. Una proporción se dice **continua** si los medios son iguales;

por ejemplo: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

El medio común b se dice **medio proporcional** entre los extremos a y c ; su valor es $b = \sqrt{ac}$.

El extremo c se llama una **tercera proporcional** entre a y b ; su valor es $c = \frac{b^2}{a}$.

159. En la proporción $a : b :: c : d$, d se llama la **cuarta proporcional** entre a , b y c .

160. Si $a : b :: c : d$ y $e : f :: g : h$ se tendrá evidentemente, multiplicando ordenadamente las dos igualdades.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ y } \frac{e}{f} = \frac{g}{h},$$

que

$$ae : bf :: eg : dh.$$

161. Especialmente, si se tiene

$$a : b :: c : d$$

$$b : x :: d : y,$$

se tendrá

$$a : x :: c : y.$$

Si se verifica la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ es decir si } ad = bc, \quad (1)$$

se verificarán también las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{d}{c}; & \frac{a}{c} &= \frac{b}{d}; & \frac{a+b}{b} &= \frac{c+d}{d}; \\ \frac{a-b}{b} &= \frac{c-d}{d}; & \frac{a+b}{a-b} &= \frac{c+d}{c-d}. \end{aligned}$$

Efectivamente, en todas estas expresiones se verifica que el producto de los extremos es igual al producto de los medios (n.º 156)

siempre que la igualdad (1) exista, es decir, siempre que las cantidades expresadas por a , b , c , d , sean proporcionales.

Combinando las transformaciones anteriores, resultan también estas otras proporciones derivadas de la $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$:

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}; \quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}; \quad \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}; \text{ etc.}$$

162. Todo lo anterior se enuncia diciendo:

Si cuatro cantidades son proporcionales en un cierto orden $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$ también lo son si este orden se cambia de manera que se substituyan los antecedentes por los consecuentes $\left(\frac{b}{a} = \frac{d}{c}\right)$ o se reemplacen entre sí los extremos $\left(\frac{d}{b} = \frac{c}{a}\right)$, o los medios $\left(\frac{a}{c} = \frac{b}{d}\right)$. También son proporcionales las cantidades obtenidas reemplazando los antecedentes por la suma o diferencia entre ellos y sus consecuentes respectivos $\left(\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}\right)$; o los consecuentes por la suma, o diferencia entre ellos y los antecedentes respectivos $\left(\frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}\right)$ o un antecedente y su respectivo consecuente por la suma o diferencia entre los antecedentes y la suma o diferencia entre los consecuentes $\left(\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d}\right)$; o, finalmente, los antecedentes por la suma de ellos con los consecuentes, y los consecuentes por la diferencia entre el antecedente y dicho consecuente $\left(\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}\right)$, etc.

También puede decirse:

Dadas cuatro cantidades proporcionales en un cierto orden, el

exceso de la primera sobre la segunda (o viceversa) es a la segunda como el exceso de la tercera sobre la cuarta (o viceversa) es a la cuarta, etc.

EJERCICIOS

Hallar los términos que faltan en las siguientes proporciones:

401. $287 : 492 :: x : 5376$; $64 : x :: 576 : 225$;

402. $x : 17 :: 804 : 67$; $832 : 122 :: x : 2440$.

Hallar la cuarta proporcional entre:

403. 18,35 y $12\frac{6}{7}$; $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{8}$; 0.45, 0.8 y 0.369.

404. $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ cwt., $21\frac{5}{8}$ lbs., $\frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{8}}{\frac{8}{8} - \frac{2}{8}}$ tons. (medidas inglesas).

405. Hallar la tercera proporcional entre 5 y 0,05; 7 y 100; $\frac{4}{15}$ y $\frac{8}{15}$;

$4 + \frac{2}{3}$ y 8.

406. Hallar x en esta ecuación: $\frac{\frac{13}{5}}{12 + \frac{7}{10}} = \frac{3 + \frac{12}{15}}{x}$.

407. Hallar la media proporcional entre 36 y 81.

408. Demostrar la igualdad de las razones $\frac{43}{65}$ y $\frac{4343}{6565}$ aplicando el principio del n.º 154.

409. Hallar una razón igual a $\frac{4}{6}$ y tal que la suma de sus términos sea 90.

410. Hallar una razón igual a $\frac{7}{9}$ y tal que la diferencia entre sus términos sea 8.

411. Hallar una media proporcional entre 9 y 16; 12 y 48; 36 y 81; 5 y 125.

CAPÍTULO VIII

CANTIDADES DIRECTA O INVERSAMENTE PROPORCIONALES

163. Definición. — Consideremos por una parte, los números

$$6, 8, 24, 16, 12,$$

y por otra los números

$$3, 4, 12, 8, 6;$$

cada término de la primera serie se obtiene multiplicando por 2 el término correspondiente de la segunda; inversamente, cada término de la segunda se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ el término correspondiente de la primera.

Puede también decirse que la razón entre un término de la primera serie y el correspondiente de la segunda es siempre 2 o que la razón entre un término de la segunda serie y el correspondiente de la primera es constantemente $\frac{1}{2}$; en esa condiciones, se dice que los números 6, 8, 24, 16, 12 son **proporcionales** a los números 3, 4, 12, 8, 6.

164. En general, dadas dos series de números $a, b, c, d, \dots$ y $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$, en las que se supone que ningún número es cero, se dirá que los números de la primera serie son *proporcionales* a los de la segunda si se tiene

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \dots$$

lo cual implica que se tenga también

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{d_1}{d} = \dots$$

165. Propiedades. — Si designamos con la letra r a la razón $a : a_1$ se tendrá evidentemente $a = a_1 r$, $b = b_1 r$, $c = c_1 r$, $\dots$ y análoga-

mente $a_1 = \frac{a}{r}$, $b_1 = \frac{b}{r}$, $c_1 = \frac{c}{r}$, ... Luego, dadas dos series de números proporcionales, los términos de una de ellas se obtienen multiplicando los de la otra por la razón entre un término de ésta y el correspondiente de la otra; recíprocamente, dadas dos series de números correspondientes, si cada término de una de las series se obtiene multiplicando el término correspondiente de la otra por un factor constante, los términos de una de las series son evidentemente proporcionales a los de la otra.

Esta observación permite, conociendo dos términos correspondientes de dos series, escribir en una de ellas todos los números que se desee y calcular luego los términos correspondientes de la otra de manera que ambas series sean proporcionales.

Supongamos, por ejemplo, que los números 4 y 3 deban corresponderse en la primera y segunda serie; cada número de la segunda serie deberá ser igual al correspondiente de la primera multiplicado

por $\frac{3}{4}$, de suerte que si, en la primera serie se considera los números 8, 12, 16, 7, los correspondientes de la segunda serán

$$8 \times \frac{3}{4} = 6, \quad 12 \times \frac{3}{4} = 9, \quad 16 \times \frac{3}{4} = 12, \quad 7 \times \frac{3}{4} = \frac{21}{4}, \dots$$

Si se consideran dos series de números proporcionales, la razón entre dos términos de la primera serie, es igual a la razón entre los dos términos correspondientes de la segunda serie.

Pues si los términos de una de las dos series

$$\begin{array}{l} a, \quad b, \quad c, \quad d, \dots \\ a_1, \quad b_1, \quad c_1, \quad d_1, \dots \end{array}$$

son proporcionales a los términos de la otra, se tendrá, por ejemplo, que

$$\frac{b}{b_1} = \frac{d}{d_1} \quad \therefore \quad \frac{b}{d} = \frac{b_1}{d_1}.$$

Recíprocamente:

Si dos series de números son tales que la razón entre dos términos cualesquiera de una es siempre igual a la razón entre los dos

términos correspondientes de la otra, los términos de una de las series son proporcionales a los de la otra.

Pues si se tienen las series

$$a, b, c, d, \dots$$

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$$

y se verifica

$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{c}{a} = \frac{c_1}{a_1}, \quad \frac{d}{a} = \frac{d_1}{a_1}, \dots$$

se tendrá también que

$$\frac{b}{b_1} = \frac{a}{a_1}, \quad \frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1}, \quad \frac{d}{d_1} = \frac{a}{a_1}, \dots \quad \therefore \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \dots$$

166. Números inversamente proporcionales.— Cuando varios números son proporcionales a varios otros, se dice a menudo, y en el mismo sentido, que son *directamente* proporcionales; pero generalmente se suprime esta nueva palabra.

Consideremos ahora dos series de números

$$a, b, c, d, \dots$$

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$$

tales que ninguno sea nulo, se dice que los términos de una serie son **inversamente proporcionales** a los de la otra, si son proporcionales a los inversos de ésta, es decir si las series siguientes

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \dots$$

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$$

son proporcionales (directamente).

Para que esto suceda es condición necesaria y suficiente que la razón entre uno cualquiera de los números de la primera serie y el inverso de la otra, es decir, que el producto de dos números correspondientes de ambas series sea constante, pues debe tenerse

$$\frac{1:a}{a_1} = \frac{1:b}{b_1} = \frac{1:c}{c_1} = \dots$$

es decir

$$aa_1 = bb_1 = cc_1 = \dots$$

Así, los números

$$1, 3, 4, 8, 12, 24$$

y los números

24, 8, 6, 3, 2, 1

son inversamente proporcionales; pues se tiene

$$1 \times 24 = 3 \times 8 = 4 \times 6 = 8 \times 3 = 12 \times 2 = \dots$$

De una manera enteramente análoga a la empleada ya al tratar de las series de números proporcionales se demostraría que:

Si se considera dos series de números inversamente proporcionales, la razón entre dos términos de la primera serie es inversa de la existente entre los dos términos correspondientes de la segunda serie; y recíprocamente.

167. Grandores directa o inversamente proporcionales. — Una cantidad A se dice **variar directamente** con otra B, o que es **directamente proporcional** a otra B, cuando ambas cantidades están ligadas de tal manera que si B cambia, A también cambia, y la razón entre dos valores cualesquiera de B es igual a la razón entre dos valores correspondientes de A.

Dos cantidades se dicen **variar inversamente** o ser **inversamente proporcionales**, si los valores de una de ellas dependen de los de la otra, de tal manera que la razón entre dos valores cualesquiera de una es inversa o recíproca de la razón entre los valores correspondientes de la otra.

Si en vez de las cantidades mismas consideramos los números que las expresan en base a una unidad dada, los principios establecidos en los n^{os} 165 y 166, nos hacen ver que la serie de números que se relacionan con los valores variables de A y la serie de números relativos a los valores correspondientes de B, son proporcionales, directa o inversamente, según que A sea directa o inversamente proporcional a B.

Ejemplos. — El salario de un obrero es proporcional al tiempo durante el cual ha trabajado.

Pues si un obrero gana 3 pesos por día, en dos días ganará 6 pesos, en 3 días 9 pesos, etc., y se tiene que existe proporcionalidad en las dos series siguientes;

pesos 3, 6, 9, ...

días 1, 2, 3, ...

Tenemos igualmente que, en general, el precio de una mercadería es proporcional a su peso si se vende al peso, es proporcional a su volumen si se vende al volumen; el precio de una tela, de un

hilo, de una cinta, etc., que se vende a tanto el metro, es proporcional a su longitud, etc.

El tiempo necesario para efectuar cierto trabajo es inversamente proporcional al número de obreros empleados para efectuarlo.

Pues si un obrero emplea 60 días para efectuar un trabajo, dos obreros emplearán la mitad de tiempo, es decir, $\frac{60}{2} = 30$ días;

3 obreros lo harán en $\frac{60}{3}$ días = 20 días; 4 en $\frac{60}{4} = 15$ días, etc., y

se tiene que las series

obreros	1	2	3	4	5	6	...
días	60	30	20	15	12	10	...

son inversamente proporcionales ya que se tiene

$$1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = \dots$$

168. Grandores directa o inversamente proporcionales a varios otros. — Cuando un grandor depende de varios otros, se dice que es **directamente proporcional** a uno de estos últimos, o bien que varía en **razón directa** de uno de ellos, si es directamente proporcional a éste cuando los demás grandores de los que también depende permanecen fijos.

Igualmente, cuando un grandor depende de varios otros, se dice que es **inversamente proporcional** a uno de ellos o bien que varía en **razón inversa** de uno de ellos, si es inversamente proporcional a éste cuando los demás grandores de los que también depende permanecen fijos.

Así, el salario de un grupo de obreros, es simultánea y directamente proporcional al número de obreros y al tiempo que han trabajado. El tiempo necesario para que un estanque, alimentado por un caño, se llene, es directamente proporcional a la capacidad del estanque e inversamente proporcional al volumen de líquido que sale del caño en la unidad de tiempo.

EJERCICIOS

412. El precio de un diamante varía proporcionalmente con el cuadrado de su peso; sabiendo que un diamante de 0,411 g. vale \$ 200, ¿cuánto valdrá un diamante de 0,687 g.

413. Un viajero ha empleado $3\frac{1}{4}$ días para efectuar los $\frac{2}{3}$ de su camino.

¿cuánto tiempo invertirá para recorrer los $\frac{4}{5}$?

414. La caída de los cuerpos en el vacío está regida por la siguiente ley: los espacios recorridos son proporcionales al cuadrado de los tiempos empleados en recorrerlos. Según esto, ¿cuál será el espacio recorrido por un cuerpo al cabo de 5 segundos de caída, sabiendo que el espacio recorrido en el primer segundo es 4,9 m.

415. ¿Cuánto tiempo empleará un cuerpo para caer libremente desde una altura de 313,6 m.?

416. El cuadrado del tiempo que emplean los planetas para dar la vuelta alrededor del Sol varía directamente con los cubos de sus distancias a ese astro. ¿Qué tiempo emplearía Venus, sabiendo que la Tierra emplea un año y que la razón entre las distancias de Venus y de la Tierra al Sol es de 0,72333?

417. La raíz cuadrada de x varía inversamente con el cuadrado de y . Si $x = 8$ cuando $y = 3$, hallar x cuando $y = 1\frac{1}{2}$.

418. El cuadrado de x varía proporcionalmente al cubo de y . Cuando $x = 3$, $y = 4$, ¿qué valor tendrá y cuando $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$?

419. El número de vibraciones que una cuerda estirada efectúa por segundo varía en razón inversa de su longitud. Sentado esto y sabiendo que una cuerda de acero tendida con un cierto peso efectúa 814 vibraciones por segundo, siendo su longitud de 0,75 m., ¿qué longitud deberá tener esa cuerda para que, estando igualmente tendida, dé doble número de vibraciones?

420. Si los términos de dos series son respectivamente proporcionales a los términos de una tercera serie, aquéllos son proporcionales entre sí.

421. Dadas dos series de números proporcionales $a, b, c, \dots$; $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$ se podría, designando por $m, n, p, q, \dots$, números cualesquiera distintos de cero, introducir en la primera serie de números, los números $ma, mb, mc, md, \dots$ con tal de introducir como términos correspondientes en la segunda los términos $ma_1, mb_1, mc_1, md_1, \dots$; también se puede introducir en una de las series la suma o diferencia de dos o más términos, a condición de introducir en la otra serie, como términos correspondientes, la suma o diferencia de los términos correspondientes de la otra serie.

CAPÍTULO IX

APLICACIONES

§ 1. — REGLAS DE TRES

169. Definiciones. — La consideración de los grandores directa o inversamente proporcionales origina cuestiones que se resuelven mediante una **regla de tres**. *Regla de tres* se llama también al problema mismo: Tratándose de un grandor directa o inversamente proporcional a varios otros se conoce el valor de este grandor que corresponde a valores dados de aquellos de que depende y se quiere calcular un segundo valor correspondiente a otros valores dados de aquellos de que depende.

La regla de tres se dice *simple*, si sólo se trata de dos grandores directa o inversalmente proporcionales; se llama *simple y directa* en el primer caso, y *simple e inversa* en el segundo.

La regla de tres se dice *compuesta*, cuando afecta más de dos grandores.

170. Resolución. — Toda cuestión de esta naturaleza se resuelve, en la práctica, por el procedimiento llamado de *reducción a la unidad*. La dificultad consiste en reconocer en cada caso si los dos grandores que se consideran son directa o inversamente proporcionales, y para ello bastará suponer que los valores de uno de los grandores se vuelvan dos, tres, ... veces mayores y observar si entonces los valores correspondientes del otro grandor se vuelven dos, tres, ... veces mayores o menores.

Los ejemplos siguientes dan una idea más concreta de la cuestión.

171. Regla de tres simple y directa. — Ejemplo: *Sabiendo que 25 litros de vino cuestan 32,25 \$, ¿cuánto costarán 37 litros del mismo vino?*

El precio del litro de vino es, evidentemente, proporcional a la cantidad de vino; luego, llamando x al costo pedido deberemos tener la siguiente igualdad:

$$\frac{x}{32,25} = \frac{37}{25} \quad \therefore \quad x = \frac{37 \times 32,25}{25} = 47,73.$$

También puede hacerse el raciocinio siguiente:

Si 25 litros de vino cuestan 32,25 \$, un solo litro costará 25 veces menos, es decir $\frac{32,25}{25}$ \$, y si un litro cuesta $\frac{32,25}{25}$ \$, 37 litros costarán 37 veces más, esto es $\frac{32,25 \times 37}{25}$ \$.

Ambas maneras de raciocinar, en el fondo, vienen a ser idénticas; pero, en la primera, se suprime, por decir así, el raciocinio; se la llama **método por la cuarta proporcional**, pues el valor buscado figura como una cuarta proporcional entre tres valores conocidos. El otro procedimiento, más recomendable, es el llamado **método por reducción a la unidad**.

172. Regla de tres simple e inversa. — Ejemplo: *Ocho obreros han necesitado 18 días para efectuar cierto trabajo, ¿cuánto tiempo necesitarán 12 obreros para efectuar el mismo trabajo?*

Método por la cuarta proporcional. — El tiempo necesario a diferentes números de obreros para efectuar un mismo trabajo es inversamente proporcional a estos números, suponiendo que, en el mismo tiempo, cada obrero ejecuta el mismo trabajo. Luego, llamando x el número de días que necesitarán 12 obreros para efectuar el trabajo ejecutado en 18 días por 8 obreros se tendrá:

$$\frac{18}{x} = \frac{12}{8} \quad \therefore \quad x = \frac{18 \times 8}{12} = 12.$$

173. Método por reducción a la unidad. — Si 8 obreros han necesitado 18 días para efectuar cierto trabajo, un solo obrero necesitará 18 veces más tiempo para efectuar el mismo trabajo, esto es, necesitará 18×8 días; y como 12 obreros lo efectuarían 12 veces más ligero, es decir en 12 veces menos tiempo que un obrero, se

deduce que estos 12 obreros efectuarán el trabajo en $\frac{18 \times 8}{12}$ días, esto es, en 12 días.

174. Regla de tres compuesta. — En una regla de tres compuesta interviene un grandor que varía en razón directa o inversa con varios otros. Para resolver un problema de esta especie bastará aplicar el raciocinio correspondiente a una regla de tres simple, tantas veces cuantos grandores rigen la variación de aquél cuyo valor incógnito se busca.

Para aplicar el método de reducción a la unidad se hace, en cada caso, un raciocinio apropiado, del que dan cuenta los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.º — Se han pagado 1920 \$ por 24 barricas de vino de 228 litros de capacidad cada una, ¿cuál sería el precio de 58 barricas del mismo vino, teniendo cada una 130 litros de capacidad?

El precio del vino es proporcional al número de barricas y al número de litros que contiene cada una. Después de disponer los datos y la incógnita en la forma indicada al margen se dice: Si las barricas tuvieran todas la capacidad de 228 litros, al costar 1920 \$ las 24 barricas, una sola costaría 24 veces menos, esto es, $\frac{1920}{24}$ \$,

y 58 barricas $\frac{1920 \times 58}{24}$ \$. Si la capacidad común de las barricas en vez de ser de 228 litros fuera de 1 litro, el precio de las 58 barricas hubiera sido 228 veces menor, esto es, $\frac{1920 \times 58}{24 \times 228}$ \$; pero como la capacidad efectiva de las 58 barricas es de 130 litros cada una, el precio de ellas resulta ser $\frac{1920 \times 58 \times 130}{24 \times 228}$ \$. Luego

$$x = \frac{1920 \times 58 \times 130}{24 \times 228} \$ = \frac{150800}{57} \$ = 2645,61 \$.$$

175. De lo precedente se deduce la siguiente:

Regla práctica. — *Si el grandor cuyo valor incógnito se busca varía proporcionalmente a todos los demás, se forma el cuadro relativo al problema, se escribe antes que todo el número que está escrito encima o debajo de x , luego se multiplica este número por el producto de los números que están en la fila de la incógnita y se divide por los números que aún restan. El resultado nos da el valor buscado.*

Así, en nuestro caso, ante todo escribiremos el número 1920, que está escrito encima de x , luego lo multiplicaremos por 58×130 , producto de los números que pertenecen a la fila en que se encuentra x , y lo dividiremos por 24×228 , producto de los números restantes.

EJEMPLO 2.º — *500 obreros de ferrocarril, trabajando 10 horas diarias, han colocado 2300 metros de vía en 28 días, ¿cuántos metros de vía colocarían 425 obreros, trabajando 8 horas diarias durante 42 días?*

El número de metros colocados (incógnita del problema) es directamente proporcional al número de obreros, al número de días y al de horas diarias de trabajo. Formemos el cuadro.

500 obreros	10 horas	2300 metros	28 días	
425	»	8	»	x
				»
				42
				»

Aplicando la regla anterior tenemos:

$$x = \frac{2300 \times 425 \times 8 \times 42}{500 \times 10 \times 28} = 2346 \text{ m.}$$

Si se quisiera raciocinar se diría:

Si 500 obreros, trabajando 10 horas diarias, durante 28 días, han colocado 2300 metros de vía, un obrero trabajando en la misma forma, es decir, 10 horas diarias, durante 28 días, hubiera colocado 2300 metros, y 425 obre-

500 veces menos longitud de vía, es decir $\frac{2300}{500}$ metros. Si en vez de bajar 10 horas por día hubieran estos 425 hombres trabajado única-

mente 1 hora diaria, hubieran colocado 10 veces menos longitud de vía es decir: $\frac{2300 \times 425}{500 \times 10}$ m. y trabajando 8 horas $\frac{2300 \times 425 \times 8}{500 \times 10}$ m.

Si en vez de trabajar 28 días hubieran trabajado un solo día, hubieran colocado 28 veces menos longitud de vía, es decir $\frac{2300 \times 425 \times 8}{500 \times 10 \times 28}$ m.; y trabajando 42 días $\frac{2300 \times 425 \times 8 \times 42}{500 \times 10 \times 28}$ m.

Esta operación puede efectuarse así:

$$\begin{array}{r}
 17 \qquad 3 \\
 85 \quad 2 \quad 21 \\
 \hline
 2300 \times 425 \times 8 \times 42 = 23 \times 17 \times 2 \times 3 = 2346. \\
 \hline
 500 \times 10 \times 28 \\
 1 \quad 2 \quad 7 \\
 1 \quad 1
 \end{array}$$

Se tacha los dos ceros de 2300 y los dos de 500, lo que equivale a dividir por 100 ambos términos del número fraccionario y, por lo tanto, a no alterarlo, luego se divide 425 y el 5 que queda de 500, por 5, y se tiene 85 y 1; luego dividimos por 5 a 85 y 10 queda 17 y 2; luego dividimos por 2, 42, y 2 y queda 21 y 1; luego dividimos por 4 a 8 y 28 y quedan 2 y 7; luego dividimos por 7 a 21 y 7 quedando 3 y 1; así hemos eliminado el denominador y queda el valor $23 \times 17 \times 2 \times 3 = 2346$.

EjemPlo 3.º — 324 obreros trabajando 5 horas diarias durante 40 días, han pavimentado una plaza rectangular de 225 metros de longitud y 150 metros de ancho, ¿cuántos obreros se necesitarán para pavimentar, en 18 días, trabajando 12 horas diarias, otra plaza rectangular de 195 metros de longitud y 120 de ancho.

Formemos el cuadro siguiente:

324 obreros	40 días	5 horas	225 m. largo,	150 m. ancho
x	»	18	»	12
		»	12	»
			195	»
			»	120
				»

El número de obreros varía en razón inversa del número de días y horas diarias de trabajo, y en razón directa del trabajo a efectuarse. Luego, si para hacer el trabajo indicado, trabajando 5 horas diarias, 324 obreros necesitan 40 días, para realizarlo en un día en las mismas condiciones se hubiera requerido 324×40 obreros, y para efec-

tuarlo en 18 días $\frac{324 \times 40}{18}$ obreros. Si en vez de trabajar los obre-

ros 5 horas diarias hubieran trabajado éstos 1 hora, se hubiera nece-
sitado, para hacer el mismo trabajo, 5 veces más obreros, es decir

$\frac{324 \times 40 \times 5}{18}$ obreros y trabajando 12 horas diarias 12 veces menos

obrerros es decir $\frac{324 \times 40 \times 5}{18 \times 12}$ obreros. Si conservando el mismo

ancho la plaza rectangular hubiera tenido 1 metro de largo en
vez de 225, hubieran bastado, para hacer construir el pavimento
en las condiciones anteriores, 225 veces menos obreros, es decir:

$\frac{324 \times 40 \times 5}{18 \times 12 \times 225}$ obreros. Pero teniendo la plaza 195 m. de longitud

se requerirá $\frac{324 \times 40 \times 5 \times 195}{18 \times 12 \times 225}$ obreros; si en vez de tener la plaza

150 metros de ancho hubiera tenido 1 solo metro de ancho, hubiera
bastado para construir el pavimento en las condiciones anteriores,

150 veces menos obreros, es decir: $\frac{324 \times 40 \times 5 \times 195}{18 \times 12 \times 225 \times 150}$ obreros. Pero

como tiene 120 metros, se necesitará $\frac{324 \times 40 \times 5 \times 195 \times 120}{18 \times 12 \times 225 \times 150} =$

208 obreros.

Puede efectuarse esta última operación así:

$$\begin{aligned} & \frac{324 \times 40 \times 5 \times 195 \times 120}{18 \times 12 \times 225 \times 150} = \\ & = \frac{(\cancel{3}.9.12) \times (\cancel{3}.8) \times \cancel{5} \times (\cancel{3}.5.13) \times (2.\cancel{3}.10)}{(\cancel{3}.6) \times 12 \times (\cancel{3}.3.9) \times (\cancel{3}.5.10)} = \\ & = 8.13.2 = 208. \end{aligned}$$

Examinando el valor incógnito se deduce la siguiente:

176. Regla práctica. — *Para obtener el valor incógnito se forma primero el cuadro relativo al problema; se escribe luego el*

número que se halla encima o debajo de x , luego se multiplica éste por los números que se hallan en su misma fila y que corresponden a grandores que varían en razón inversa de aquél a que se refiere x , y por los de la otra fila que corresponde a grandores que varían en razón directa de aquél a que se refiere x , y se divide el producto por los números restantes del cuadro.

En nuestro caso, por ejemplo, escribiremos primero 324, número escrito encima de x en el cuadro formado, luego multiplicaremos 324 por 40 y por 5, números de la fila donde no se encuentra x y que corresponden a los grandores *días* y *horas diarias*, los cuales, en este problema, varían en razón inversa del número de obreros, grandor a que se refiere x ; multiplicaremos también por 195 y 120, números de la otra fila relativos a los grandores *largo* y *ancho* de la plaza, los cuales varían en razón directa del número de obreros, al que se refiere x , y el producto de $324 \times 40 \times 5 \times 195 \times 120$ lo dividiremos por el producto $18 \times 12 \times 225 \times 150$ de los números restantes del cuadro.

En cada caso, sin embargo, conviene además hacer el raciocinio, a fin de salvar los errores que es posible cometer.

EJEMPLO 4.º — *Un manufacturero ha gastado, una primera vez 1560 \$ para pagar 52 obreros, cada uno de los cuales ha trabajado durante 50 horas; una segunda vez ha gastado 4158 pesos para pagar cierto número de obreros, cada uno de los cuales ha trabajado 6 horas, cuál es ese número, suponiendo que en ambos casos cada obrero recibe la misma paga por hora de trabajo?*

Si, para pagar 1560 pesos durante 50 horas, se necesitan 52 obreros; para pagar la misma suma durante 1 hora, se necesitará que los obreros sean 50 veces más numerosos, es decir, que sean 52×50 y para pagar 1 peso durante 1 hora se necesitará 1560 veces menos obreros es decir $\frac{1560}{52 \times 50}$; para pagar 4158 pesos

durante 1 hora se necesita que los obreros sean 4158 veces más numerosos, es decir que sean $\frac{52 \times 50 \times 4158}{1560}$ y para pagar la mis-

ma suma en 6 horas bastarán 6 veces menos obreros, es decir $52 \times 50 \times 4158$

$$\frac{1560 \times 6}{52 \times 50 \times 4158} = 1555 \text{ obreros.}$$

Ahora bien, aun cuando este raciocinio nos conduce a un resultado aceptable, contiene un intermediario absurdo, pues la expresión

$$\frac{52 \times 50}{1560} \text{ obreros} = \frac{5}{3} \text{ obreros}$$

carece de significado; en este

caso, efectivamente, trátase de cantidades discontinuas; pero puede salirse del paso introduciendo otras unidades ficticias, imaginando, por ejemplo, que cada obrero pueda reemplazarse por 3 niños, los que efectuarían en el mismo tiempo el mismo trabajo.

En ese caso, el número de obreros que se obtiene deberá triplicarse, y en vez de $\frac{5}{3}$ de hombres se tendría 5 niños.

En cada caso análogo, puede salirse del paso de la manera indicada. Si el resultado, final es también una cantidad fraccionaria, por ejemplo, si el resultado definitivo anterior hubiera sido

$$1555\frac{1}{4} \text{ obreros, se debe interpretar como que representaría } 1556 \frac{1}{4} \text{ hombres.}$$

Prácticamente no tiene la cuestión importancia alguna.

177. Problemas que implican un incremento uniforme. — Consideremos el siguiente problema:

8 bueyes comen el pasto de un prado en 2 días, ¿en qué tiempo lo comerán 16 bueyes?

Vemos que en este problema debe considerarse una proporción simple, pero el *crecimiento uniforme* del pasto debe también considerarse. Efectivamente, si el pasto crece uniformemente y 8 bueyes lo comen en dos días no puede deducirse que 16 bueyes lo comerán en 1 día, sino que, como el crecimiento del pasto en dos días es doble del crecimiento en 1 día, es menester, para resolver el problema, conocer la altura inicial y el crecimiento uniforme del pasto, u otros datos que suplan a éstos.

Daremos dos ejemplos de problemas de esta clase.

EJEMPLO 1.º — *Si 3 ovejas emplean 30 días, y 5 ovejas 15 días en comer el pasto de un prado, ¿cuántas ovejas comerán el pasto en 12 días suponiendo que éste crezca uniformemente?* Tenemos:

3 ovejas comiendo 30 días equivalen a 90 ovejas comiendo 1 día.

5 ovejas comiendo 15 días equivalen a 75 ovejas comiendo 1 día.

90 ovejas comiendo 1 día consumen el pasto original más el crecimiento de 30 días.

75 ovejas comiendo 1 día consumen el pasto original más el crecimiento de 15 días.

Luego se deduce que:

15 ovejas comiendo 1 día consumen el crecimiento de pasto de 15 días.

Y que 1 oveja comiendo 1 día, consume el crecimiento del pasto de 1 día.

Como ahora se trata de 12 días en vez de 30, hay una pérdida de $30 - 12 = 18$ ovejas, debida al crecimiento de los 18 días de diferencia.

Luego pues, si 90 ovejas comen, en 1 día, todo el pasto más el crecimiento de éste en 30 días, se necesitarán $90 - 18 = 72$ ovejas para comer en un día todo el pasto, más el crecimiento de éste en 12 días, y $\frac{72}{12} = 6$ ovejas para comer la misma cantidad en 12 días.

EjemPlo 2.º — Si 32 bueyes comen el pasto de un prado en 42 días, y 29 bueyes pueden hacerlo en 49 días, ¿cuántos días tardarán 25 bueyes para comer todo el pasto, suponiendo que éste crezca uniformemente. Diremos:

32 bueyes comiendo 42 días equivalen a 1344 bueyes comiendo 1 día.

29 bueyes comiendo 49 días equivalen a 1421 bueyes comiendo 1 día.

Luego:

El alimento de 7 días corresponde a 77 bueyes comiendo 1 día.

Y el alimento de 1 día corresponde a 11 bueyes comiendo 1 día.

Ahora bien, 1344 bueyes comiendo 1 día comen el pasto primitivo más 42 días de crecimiento de pasto; pero el crecimiento de 42 días es comido por $42 \times 11 = 462$, luego $(1344 - 462)$ bueyes, o sea 882 bueyes comiendo en 1 día, comen todo el pasto primitivo. Pero, 25 bueyes comen, en el tiempo buscado x , el pasto original más el crecimiento durante ese tiempo. Luego:

$$25x = 882 + 11x \quad \therefore \quad 14x = 882 \quad \therefore \quad x = \frac{882}{14} = 63.$$

EJERCICIOS

422. Un prado de 3,57 áreas ha costado 1785 \$, ¿cuál es, en m.² el área de un prado de igual calidad pagado 49285 \$?

423. Si cierto peso puede ser llevado a 184 km. por 23,80 \$, ¿cuánto costará su acarreo a 82 km. 8 hm?

424. 1323 kg. de trigo han sido comprados por 490 \$. El hectolitro cuesta 30 \$, ¿cuál es el peso del hectolitro?

425. Si 31 m. de cable pesan 62,346 kg., ¿cuál será la longitud de un cable idéntico cuyo peso es 3250 kg.?

426. Un tonel encierra 304 botellas de 75 centilitros, ¿cuántas botellas de 95 centilitros contiene?

427. Si 75,346 m. de género cuestan 57 £ 14 s. 7 $\frac{1}{4}$ d., ¿cuál será el costo de 115,84 m. del mismo género?

428. Dos cuadrillas de obreros podrían ejecutar el mismo trabajo, una en 12 días, otra en 16 días. Se toma $\frac{1}{3}$ de la primera y $\frac{1}{7}$ de la segunda, ¿en cuántos días se efectuará la obra?

429. Un constructor ha emprendido la construcción de 97 $\frac{1}{2}$ km. de vía de ferrocarril en 40 semanas. Empleó 2160 hombres y al finalizar las 13 semanas, 32 $\frac{1}{2}$ km. de vía estaban colocadas, ¿cuánta gente debe poner entonces para terminar en el plazo fijado?

430. Una ciudad tiene víveres de reserva para sostener un sitio de 6 semanas, siendo su población de 20000 habitantes, ¿cuánta gente debe desapa-

recer de la ciudad para que siendo la ración por cabeza la misma duren los víveres 8 semanas?

431. Si 35 hombres pueden hacer una obra en 45 días y si 7 hombres se retiran cada quince días, ¿cuánto tiempo transcurrirá antes que terminen la obra?

432. Si 6 hombres y 2 niños construyen un muro en 27 días, ¿en cuántos días lo construirán 27 hombres y 9 niños?

433. Un fuerte tiene provisiones para 200 soldados durante 30 días; después de 5 días, 50 hombres más entran en el fuerte, ¿cuánto tiempo durarán los víveres?

434. Una guarnición de 2000 hombres tiene víveres para 54 días; después de 15 días llega un refuerzo debido al cual los víveres sólo alcanzan para 20 días más, ¿de cuántos hombres se componía el refuerzo?

435. Una plaza fuerte de 1800 hombres tiene víveres para 12 semanas, ¿cuánto tiempo durarán los víveres si 600 hombres más se introducen en la plaza y la ración diaria de cada hombre es disminuída en una tercera parte?

436. Se ha pagado 1200 \$ para hacer transportar 30 toneladas de mercaderías a una distancia de 85 km., ¿cuánto deberá pagarse para transportar 17 toneladas a 97 km.?

437. Si 7 hombres pueden efectuar un trabajo en 710 días, ¿cuánto tiempo emplearán 70 hombres para efectuarlo, descansando un día cada 15?

438. Si 8 obreros, trabajando 5 días, han segado un campo de 95 m. de longitud por 12 de ancho, ¿cuántos días necesitarán 10 obreros para segar un campo de 50 m. de longitud por 20 de ancho, suponiendo las demás condiciones análogas?

439. Si 33 hombres ganan 288 £ 15 s. en 25 días, cuánto ganarán 17 mujeres en 12 días, siendo el salario de la mujer $\frac{2}{3}$ del de un hombre?

440. Una plaza fuerte de 4500 hombres tiene víveres para 15 semanas, siendo la ración diaria de cada hombre de 13 onzas inglesas, ¿cuánta gente debe salir de la plaza para que los víveres duren 27 semanas, disminuyendo a 10 onzas la ración diaria?

441. Un obrero debe recibir por un trabajo de 3 semanas, la suma de 144 \$; sólo ha trabajado 6 días y 5 horas, ¿cuánto recibirá? Se supone 10 horas de trabajo diario, y 6 días semanales.

442. Una fortaleza tiene 1140 hombres y víveres para 40 días; después de 16 días, queda disminuído el personal en 152 hombres, pero se ha introducido víveres en una cantidad equivalente al $\frac{1}{12}$ de los existentes en ese momento. ¿Para cuántos días más hay víveres en la fortaleza?

443. Si 12 hombres, trabajando 8 horas diarias, emplean 15 días en efectuar una obra, ¿cuánto tiempo emplearán 16 niños, trabajando 10 horas diarias, para efectuar la misma obra? El trabajo de dos niños se supone equivalente al de un hombre.

444. Una ciudad defendida por 1200 hombres, con víveres para 42 días a razón de 18 onzas (inglesas) por día, recibe un aumento de 200 hombres, ¿cuál debe ser la ración de cada hombre a fin de que existan víveres para 54 días?

445. Si 1200 hombres sitiados en una ciudad tienen víveres para 7 semanas con una ración diaria de 12 onzas para cada hombre y reciben un

refuerzo de 600 hombres, y si la ración diaria es entonces reducida a 7 onzas, ¿para cuánto tiempo habrá víveres en la ciudad?

446. Dos obreros han empleado 44 días para construir una muralla de 110 m. de longitud, 8 de altura y 3 de ancho, ¿cuánto tiempo emplearían los mismos obreros para construir un muro análogo de 150 m. de longitud, 10 de altura y 4 de ancho?

447. Si 18 bombas levantan 2150 toneladas de agua en 10 días trabajando 7 horas diarias, ¿en cuántos días 16 bombas levantarán 1634 toneladas trabajando 9 horas diarias? Expresar también la contestación en horas.

448. Si 75 hombres pueden terminar una obra en 12 días de 10 horas de trabajo cada uno, ¿cuántos hombres terminarán una obra dos veces mayor en la décima parte de tiempo, admitiendo que trabajen el mismo número de horas diarias y que dos hombres de estos últimos hagan, en el mismo tiempo, tanto trabajo como 3 de los primeros?

449. 12 hombres pueden hacer un trabajo en 9 días de 10 horas. ¿cuántos hombres se necesitarán para hacer el mismo trabajo en 15 días de 8 horas, si 3 hombres deben ayudarlos al principiar el cuarto día y 4 hombres más al empezar el décimo?

450. Cada página de un libro de 560 páginas contiene 40 líneas y cada línea contiene término medio 41 letras, ¿cuántas páginas debe haber en otra edición de la obra siendo las páginas de ésta de 60 líneas y cada línea una cuarta parte mayor que las primitivas, sabiendo también que el tipo de imprenta usado es mayor que el empleado en la primera edición según la razón de 6 : 5?

451. Un copista puede transcribir 3 páginas de cierta obra en $1\frac{1}{2}$ horas, ¿cuánto tiempo emplearán 3 hombres, trabajando con la mitad de rapidez, para copiar 36 páginas de otra obra; las páginas de ésta contienen $\frac{1}{3}$ más material que la primera citada?

452. Para suministrar a 400 hombres, durante 144 días, 840 gramos de pan a cada uno diariamente, se ha necesitado 30 sacos de harina de 100 kg., ¿cuántos sacos de harina de 125 kg. se necesitará para suministrar a 500 hombres, durante 320 días, 900 gramos de pan a cada uno diariamente?

453. Si 7 hombres plantan 945 hileras de papas en 3 días de 9 horas de trabajo cada uno, ¿cuántas mujeres se necesitarán para plantar 1200 hileras en 5 días de 8 horas, si 4 mujeres hacen el trabajo de 3 hombres?

454. Si 6 cajistas de imprenta, en 16 días de $10\frac{1}{2}$ horas cada uno, componen 720 páginas de 60 líneas cada una con 40 letras en cada línea, ¿en cuántos días de 7 horas, pondrán 9 cajistas 960 páginas, cada una de 45 líneas y de 50 letras por línea?

455. Un empresario se compromete a hacer una obra en cierto tiempo empleando 15 hombres trabajando 9 horas diarias. Después de transcurrir $\frac{2}{3}$ del tiempo convenido resulta haber hecho sólo $\frac{3}{5}$ de la obra. Si 3 hombres más se emplean entonces, ¿cuántas horas diarias deberán trabajar para terminar la obra en el plazo fijado?

456. 5 hombres deben trabajar a razón de 7 horas por día para hacer una obra. Después de 4 días de trabajo resultan haber hecho $\frac{1}{12}$ de trabajo. Se emplean entonces 6 hombres más y se les hace trabajar a todos $7\frac{1}{2}$ horas

diarias, ¿cuándo estará terminado el trabajo, suponiendo todas las demás condiciones iguales?

457. El precio del diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Un diamante vale 3600 \$, se le rompe en dos pedazos uno de los cuales es el $\frac{2}{5}$ del primitivo, ¿cuál es el valor de ambos trozos y cuál la pérdida sufrida?

458. Si 5 mulas y 2 caballos pueden mover 50 toneladas de pasto en cierto tiempo, ¿cuántas toneladas podrán mover 4 caballos y 3 mulas, siendo 3 caballos equivalentes para el caso a 4 mulas?

459. Si 10 cm.³ de oro y 16 cm.³ de plata pesan 361 g., y si 7 cm.³ de oro y 22 cm.³ de plata pesan 366,1 g., hallar el peso de una placa rectangular de plata de 12 cm. de longitud, 7 cm. de ancho y 0,5 mm. de espesor, dorado de un lado, siendo de 0,04 mm. el espesor de la capa de oro?

460. Si 3 bueyes emplean 30 días y 5 bueyes 15 días en comer el pasto de un prado, ¿cuántos bueyes comerán éste en 6 días, suponiendo que crece uniformemente?

461. Si 20 bueyes comen el pasto de un prado en 30 días y 16 en 45 días, cuántos bueyes lo comerán en 60 días?

462. Si 23 bueyes consumen 8 ha. de pasto en 26 días y 25 consumen 7 ha. del mismo en 20 días, cuántos bueyes comerán 3 ha. en $5\frac{1}{2}$ días.

463. Un estanque que contiene ya cierta cantidad de agua recibe una entrada suplementaria uniforme de agua por medio de un caño. Si puede ser vaciada por 8 canillas de desagüe en 16 minutos o por 10 en 12 minutos, ¿cuántas canillas se necesitará para vaciarlo en 8 minutos?

§ 2. — INTERESES. DESCUENTOS

a) *Interés simple*

178. Definiciones. — Cuando el dueño de una suma de dinero la facilita a otra persona, exige, en general, de parte de ésta y a título de alquiler o de remuneración, una cierta suma llamada **interés**. La suma de dinero **prestada o colocada** se llama entonces el **capital**.

De acuerdo con convenciones generalmente admitidas, el interés llamado **simple** se hace proporcional al capital y a la duración del préstamo.

Llámase **tanto por ciento**, al interés devengado por una suma de 100 pesos en un año.

El tanto por ciento se designa usualmente con el símbolo %, que significa **por ciento** (*). Así, la expresión 6 % se lee *6 por*

(*) De igual manera el símbolo ‰ se usa para significar *tanto por mil*.

ciento y significa que cien pesos prestados producen 6 pesos de intereses en un año.

Llábase **renta** de un capital, al interés producido por este capital en un año.

Tratándose de cálculos de intereses, se considera únicamente el año que hemos llamado comercial (n.º 85), es decir constituido por doce meses de treinta días, lo que equivale a considerar el año de 360 días. Sin embargo, en el comercio y en los bancos, sucede frecuentemente que la duración de los préstamos de dinero no alcanzan a un año. Para avaluar la duración se atribuye entonces a cada mes el número real de días que tiene, contando el día del préstamo y no contando el del *vencimiento*, es decir aquel en que el capital debe devolverse al prestamista.

179. Regla de interés simple. — Esta regla suministra una expresión o fórmula que liga entre sí el capital prestado, el interés devengado, el tiempo en que ha durado el préstamo y el tanto por ciento.

Designemos con las letras c , r , t , i , respectivamente, al capital, al tanto por ciento (o *renta* de 100 pesos), al tiempo y al interés del capital.

Si cien unidades de dinero producen r unidades de dinero en una unidad de tiempo, una unidad de dinero, en estas mismas condiciones, producirá 100 veces menos renta, es decir $\frac{r}{100}$, y en

t unidades de tiempo t veces más interés, es decir, $\frac{rt}{100}$. Luego

una unidad de dinero, en t unidades de tiempo, produce $\frac{rt}{100}$ unidades de dinero, luego c unidades de dinero producirán c veces más, es decir, $\frac{crt}{100}$; se tiene, por consiguiente:

$$i = \frac{crt}{100} \quad (1)$$

que es la fórmula buscada.

180. La fórmula anterior permite hallar una cualquiera de las cantidades i , c , r , t , conociendo las restantes; debe tenerse muy en cuenta las unidades adoptadas como lo indican claramente los ejemplos que damos a continuación.

Si se busca c se usará la fórmula:

$$c = \frac{i \times 100}{rt}. \quad (2)$$

Si se busca r se usará la fórmula:

$$r = \frac{i \times 100}{ct}. \quad (3)$$

Si se busca t se usará la fórmula:

$$t = \frac{i \times 100}{cr}. \quad (4)$$

Ejemplo 1.º — *Hallar el interés que devenga de 10 años un capital de 5000 pesos impuesto al 5 por ciento anual.*

Aquí, la unidad de dinero es el peso, y la de tiempo el año, aplicaremos la fórmula (1) y tendremos:

$$c = 5000, \quad r = 5, \quad t = 10.$$

Resulta:

$$i = \frac{crt}{100} = \frac{5000 \times 5 \times 10}{100} = 2500.$$

Luego, el interés buscado es 2500 pesos.

Ejemplo 2.º — *Hallar el interés que devenga en 4 meses un capital de 25000 pesos impuesto al 6 por ciento anual.*

La unidad de dinero es el peso y la de tiempo el mes.

Entonces, según la fórmula (1):

$$c = 25000, \quad t = 4, \quad r = \frac{6}{12},$$

puesto que si en un año, 100 pesos producen 6 de renta, en 1 mes producirán $\frac{6}{12}$ de peso. Por consiguiente,

$$i = \frac{25000 \times \frac{6}{12} \times 4}{100} = \frac{25000 \times 6 \times 4}{1200} = 500.$$

Luego el interés es 500 pesos.

*Ejemplo 3.º — Hallar el interés que devenga 25712 pesos im-
puestos al 3 1/2 por ciento durante 2 años, 6 meses, 17 días.*

Tomemos como unidad de tiempo el día; entonces

$$c = 25712, \quad r = \frac{3 \frac{1}{2}}{360},$$

$$t = 2 \text{ años } 6 \text{ meses } 17 \text{ días} = \\ (2 \times 360 + 6 \times 30 + 17) \text{ días} = 917 \text{ días},$$

$$i = \frac{25712 \times \frac{3 \frac{1}{2}}{360} \times 917}{100} = \frac{25712 \times 3 \frac{1}{2} \times 917}{36000} = 2292,30$$

pesos, aproximadamente.

*Ejemplo 4.º — ¿Qué capital, colocado al 4,5 por ciento anual,
durante 228 días, produce 50 pesos de intereses?*

Aplicaremos la fórmula (2), tomando como unidad de tiempo
el día, tenemos

$$i = 50, \quad r = \frac{4,5}{360}, \quad t = 228.$$

Luego

$$c = \frac{50 \times 100}{\frac{4,5}{360} \times 228} = \frac{50 \times 100 \times 360}{4,5 \times 228} = 1754,38.$$

El capital buscado es 1754,38 pesos.

*Ejemplo 5.º — ¿A qué tanto por ciento ha sido impuesta una su-
ma de 23600 pesos que ha devengado 3245 pesos en 45 meses?*

Tenemos, tomando como unidad de tiempo el año y aplicando la fórmula (3):

$$r = \frac{3245 \times 100}{23600 \times \frac{45}{12}} = 3,66.$$

Ejemplo 6.º — *¿Durante cuánto tiempo debe prestarse una suma de 6500 pesos impuesta al 4,5 por ciento anual para obtener un interés de 500 pesos?*

Adoptemos como unidad de tiempo el año. Aplicando la fórmula (4) resulta:

$$t \text{ años} = \frac{500 \times 100}{6500 \times 4,5} \text{ años} = 1 \frac{415}{585} \text{ años} = 1 \text{ año } 8 \text{ meses } 15 \text{ días.}$$

181. Observaciones. — Si sólo se quiere conocer la renta de un capital, el tiempo debe tomarse entonces igual a 1 año.

Si quiere saberse en qué se convierte al terminar el tiempo t unidades, un capital c unidades, impuesto al r por ciento, tendremos que, representando por C la suma del capital prestado c y de los intereses devengados en los t años:

$$C = c + i = c + \frac{crt}{100} = c \left(1 + \frac{rt}{100} \right) \quad (5)$$

De cuya fórmula puede obtenerse también, c , r o t conociendo las otras tres cantidades; así:

$$c = \frac{100 C}{100 + rt} \quad (6)$$

$$r = \frac{(C - c)100}{ct} \quad (7)$$

$$t = \frac{(C - c)100}{cr} \quad (8)$$

182. EJEMPLO 1.º — *¿Conviene más colocar 15000 pesos al 5 por ciento, que colocar 9000 pesos al 5,25 por ciento y el resto a 4,75 por ciento?*

En la primera forma de colocación la renta obtenida es, tomando como unidad de tiempo el año:

$$i = \frac{cr}{100} = 15000 \times \frac{5}{100} = 750,$$

es decir, 750 pesos.

En la segunda forma, la renta es

$$9000 \times \frac{5,25}{100} + (15000 - 9000) \frac{4,75}{100} = 472,50 + 285 = 757,50 \$.$$

Luego, la segunda forma de colocación es más ventajosa.

EJEMPLO 2.º — *Hallar en qué se convierten al cabo de 7 años 8500 pesos impuestos al 6 por ciento de interés simple. Tendremos, aplicando la fórmula (5):*

$$C = 8500 \left(1 + \frac{6 \times 7}{100} \right) = 8500 \times 1,42 = 12070.$$

Luego, se convierten en 12070 pesos.

EJEMPLO 3.º — *¿Qué capital se transforma en 1804,38 pesos impuesto al 4,5 por ciento anual, durante 228 días?*

Apliquemos la fórmula (6), tomando por unidad de tiempo el día:

$$c = \frac{100 \times 1804,38}{100 + \frac{4,50}{360} \times 228} = 1754,38.$$

Luego el capital buscado es 1754,38 pesos.

EJERCICIOS

464. ¿Qué vale una casa de la que se saca 3000 \$ de alquiler anual y produce el 4,5 %.

465. Calcular el interés de 6000 \$ colocados al 4 % durante un año.

466. Calcular el interés de 2260,30 \$ colocados al $4\frac{3}{4}$ % durante un año.

467. Calcular el interés de 35300 \$ colocados al 3 % durante 10 años.

468. Calcular el interés de 1440 \$ colocados al $4\frac{3}{8}$ % durante 8 meses.

469. Calcular el interés de 9685,75 \$ colocados al 4 % durante 3 meses.

470. Calcular el interés de 7500 \$ colocados al $4\frac{1}{2}$ % durante 88 días.

471. Calcular el interés de 6508,67 \$ colocados al 4 % durante 17 días.

472. Calcular el interés de 7500 \$ colocados al $6\frac{3}{4}$ % durante 83 días.

473. Calcular al $4\frac{3}{8}$ % la suma de los intereses de los capitales:

7461,85 \$ desde el 7 de octubre al 10 de noviembre;

1239,34 \$ desde el 10 de marzo al 5 de junio;

4321,50 \$ desde el 5 de junio al 10 de agosto.

Se atribuirá a cada mes el número de días que fija el calendario y se contará, sin embargo, un año como de 360 días.

474. En enero 1.º de 1870 una persona pidió en calidad de préstamo una suma de dinero al 5 % de interés. Al año, el tanto de interés quedó reducido al $4\frac{1}{4}$ %. El importe total de los intereses abonados al fin de 1875 importaban 1760 £, ¿cuál es la suma prestada?

475. Una suma de 1200 \$ es prestada de manera a producir un tanto por ciento de renta, y 1600 \$ se prestan de manera a producir un tanto de interés de $1\frac{1}{2}$ % anual más que la otra. Si el interés anual del segundo capital es doble del del primero, ¿cuál es el interés de cada uno?

476. Una persona que ha colocado en un banco, a interés simple, cierta suma, obtiene a los 10 meses, 12600 \$ por capital e intereses. La persona deja aún la suma, en las mismas condiciones, durante $2\frac{1}{2}$ años. Saca su dinero y cobra 14490 \$. ¿Cuál es el tanto por ciento del interés y cuál es la suma primitivamente colocada?

477. Los $\frac{4}{5}$ de una suma, colocados a 4,5 %, deben producir 1200 \$ de interés en 8 meses. ¿Durante cuánto tiempo debe colocarse el resto de la suma al 5,5 % para obtener en total 1500 \$ de intereses?

478. Dos capitales producen juntos 2640 \$ de intereses anuales. Uno es colocado al 6 %, el otro al 4 %; éste produce 290 \$ más que el otro, ¿cuáles son los capitales?

479. Se coloca cierto capital al 4 % durante 130 días. Vencido este término, el capital y los intereses reunidos se vuelven a colocar al 6 % durante 120 días. Se ha obtenido así 365,2 \$ de intereses, ¿cuál era el capital primitivo?

b) Descuentos

183. Definiciones. — En el comercio de cierta importancia, el pago de las mercaderías no se hace en general *al contado*, es decir en dinero efectivo en seguida de realizada la compra; al contrario,

se efectúa por lo que se llaman **efectos de comercio**, pagaderos en el plazo de 1 a 6 meses. Existen dos especies de efectos de comercio, según que sea el comprador o el vendedor quien lo extienda. La **letra de cambio** es extendida por el vendedor; por ella, éste ruega al comprador que se sirva pagarle a él personalmente o a toda persona que se presentara a su nombre (**a su orden**) la suma adeudada en una fecha dada, llamado el **vencimiento** de la letra.

El **pagaré**, en cambio, es extendido por el comprador, el cual se compromete a abonar al vendedor el importe de la venta en una fecha fija, llamada el **vencimiento** del pagaré.

Un comerciante poseedor de una letra o de un pagaré, puede ceder su propiedad a otra persona. Es lo que se llama **endosar** el pagaré o la letra.

Para efectuar esa operación, escribe al reverso del documento la siguiente fórmula:

Páguese a la orden de N. (nombre del nuevo dueño); luego, pone la fecha y su firma. La letra puede así servir como dinero para pagar un crédito, puede circular por varias manos antes del día del vencimiento. El dueño de un efecto de comercio se llama el **tenedor** del efecto; el que cede a otro, dicho efecto, se llama el **endosante** del mismo.

Atendiendo a su vencimiento, los efectos de comercio pueden ser: **a la vista** o **a la fecha**, y **a tantos días, vista o fecha**. En los dos primeros casos, el pago debe efectuarse en el día que se presente la letra o en el que fija la fecha; en los dos últimos, debe efectuarse el día que terminan los tantos que se consignan en el texto de la letra, contados desde el siguiente a su presentación o al que indica la fecha de la misma.

Si el dueño o tenedor de un efecto de comercio quiere hacerlo efectivo, es decir, cobrar antes de su vencimiento y encuentra quien le tome, recibe en el acto una cantidad de dinero, menor que el valor escrito en la letra o pagaré, valor que es llamado **monto** o **valor nominal** del efecto. Este valor recibido se llama **valor actual** o **efectivo** del efecto de comercio.

La diferencia entre el valor nominal y el efectivo se llama **descuento**; **descontar** una letra o pagaré es hallar su valor efectivo en un día anterior al de su vencimiento. Generalmente, el tenedor

de un efecto de comercio pagadero en cierto plazo, cuando quiere cobrarlo en seguida, endosa el efecto a la orden de un **banquero**.

Se dice entonces que **negocia** el efecto o que lo **descuenta**. El descuento que hace el banquero es a título de interés por el adelanto de dinero que hace al **endosante**.

El descuento de las letras, pagarés y demás documentos mercantiles análogos, se regula en un tanto por ciento que fija el comercio, o por el convenido entre el tenedor de la letra y el tomador; ese tanto se llama el **tanto por ciento de descuento**.

Se distingue dos clases de descuento, el **comercial** y el **racional** o **matemático**.

184. Descuento comercial. — El descuento comercial, usado en la práctica, es el interés que produciría el valor nominal de la letra en el tiempo que falta para su vencimiento. Se calcula, por consiguiente, mediante la fórmula (1) (n.º 179) en la que c representará ahora el valor nominal del efecto de comercio, y t el tiempo que falta para el vencimiento. Si llamamos d al descuento, tendremos en consecuencia.

$$d = \frac{crt}{100}.$$

Es claro que, restando del valor nominal el descuento, se tiene el valor efectivo. Luego, si v indica el valor efectivo de la letra

$$v = c - d = c - \frac{crt}{100} = c \left(1 - \frac{rt}{100} \right). \quad (1)$$

Igualmente se tiene que

$$c \text{ (valor nominal)} = \frac{v \text{ (valor efectivo)}}{1 + \frac{rt}{100}}. \quad (2)$$

Los ejemplos siguientes aclaran la cuestión.

EJEMPLO 1.º — ¿Cuál es el descuento de una letra de 3170 pesos, pagadera a 90 días, siendo el tanto de descuento 5 por ciento?

Tendremos tomando como unidad el día:

$$d = \frac{3170 \times \frac{5}{360} \times 90}{100} = \frac{5 \times 90 \times 3170}{360 \times 100} = \frac{5 \times \cancel{90} \times 317\cancel{0}}{\cancel{360} \times 10\cancel{0}} =$$

$$= \frac{1585}{40} = 39,625, \$.$$

El valor efectivo de la letra es, por consiguiente,

$$3170 - 39,625 = 3130,375 \text{ pesos.}$$

EJEMPLO 2.º — *¿Cuál es el monto de una letra, pagadera a los 45 días, por la cual un banquero ha cobrado un descuento de 6,40 pesos al 6 por ciento?*

Aplicando la fórmula (2) (n.º 180), se tiene, tomando como unidad de tiempo el día:

$$c = \frac{100d}{rt} = \frac{100 \times 6,40}{\frac{6}{360} \times 45} = \frac{36000 \times 6,40}{6 \times 45} = 853,35.$$

El monto es 853,35 pesos.

EJEMPLO 3.º — *Una letra de 1698,60 pesos, pagadera a los 14 meses, sólo vale actualmente 1579,70 pesos, ¿cuál es el tanto de descuento?*

Aplicando la fórmula (3) (n.º 180) y tomando como unidad de tiempo el año, tendremos:

$$r = \frac{100d}{cf} = \frac{100(1698,60 - 1579,70)}{1698,60 \times \frac{14}{12}} = 6.$$

185. Descuento matemático. — Cuando el plazo del vencimiento es algo largo, el descuento comercial se vuelve abusivo y hasta puede ser mayor que el capital; lo justo sería que se entregase, al descontar una letra, la suma que, al cabo del tiempo que falta para el vencimiento de ella, se convierta en el valor nominal; el des-

cuento efectuado en esta forma se llama, y con razón, **descuento matemático o racional**.

Si c es el valor nominal de la letra, v_1 el valor real, y t el tiempo que falta para que venza la letra, v_1 debe ser el capital que, en el tiempo t , se convierte en c . Aplicando la fórmula (6) (n.º 181), resulta que entre c , v_1 , t y r existe la siguiente relación:

$$v_1 = \frac{100c}{100 + rt};$$

luego, si llamamos d_1 al descuento $c - v_1$ tendremos:

$$d_1 = c - v_1 = c - \frac{100c}{100 + rt} \equiv \frac{crt}{100 + rt} \quad (3)$$

$$d_1 = c - v_1 = v_1 \frac{100 + rt}{100} - v_1 \equiv \frac{v_1 rt}{100}; \quad (4)$$

fórmulas que permiten hallar una de las cantidades d_1 , c , v_1 , r , t , conociendo tres de las otras convenientemente elegidas.

Para recordar rápidamente las fórmulas anteriores, basta hacer el raciocinio siguiente: si r es el tanto por ciento de descuento en la unidad tiempo, y t el número de unidades de tiempo que falta para el vencimiento, diremos: 100 pesos de valor efectivo en este momento se transforman en $100 + rt$ al cabo de t tiempo; luego, si el valor nominal de la letra fuera de $100 + rt$, el real sería 100; si el valor nominal de la letra fuera 1 peso, el efectivo sería $100 + rt$

veces menor, es decir $\frac{100}{100 + rt}$, y siendo c el valor nominal, el

efectivo sería $c \frac{100}{100 + rt}$,

$$\therefore v_1 = c \frac{100}{100 + rt}.$$

EJEMPLO.— *Descontar comercialmente y matemáticamente al 5 por ciento una letra de 25.000 pesos que vence a los 40 días.*

$$d = \frac{25000 \times 5 \times \frac{40}{360}}{100} = 138,90 \text{ \$}.$$

$$d_1 = \frac{25000 \times 5 \times \frac{40}{360}}{100 + 5 \times \frac{40}{360}} = 132,43 \text{ \$}.$$

EJERCICIOS

480. Calcular, al 4 % anual, el descuento y el valor actual de un efecto de comercio de 9725,19 \$, pagadero a los 90 días.

481. Descontar el 2 de abril una letra de 1500 \$ pagadera al 24 de abril, al 4 ½ % anual.

482. Se pregunta cuál es el valor colectivo, el 15 de junio, de las letras siguientes:

10614,87 \$, pagadera el 10 de julio;

1234,75 \$, pagadera el 15 de julio;

984,20 \$, pagadera el 12 de agosto.

El tanto por ciento anual de descuento es 3 ½.

483. ¿Cuál es el valor nominal de una letra, pagadera a los 60 días y que produciría 1000 \$ si fuera descontada al 6 % anual?

484. Un pagaré cuyo vencimiento tiene lugar a los 57 días, ha sido descontado al 3 % anual; ha producido un valor actual de 8214,40 \$, cuál es su valor nominal?

485. Un corresponsal debe a un comerciante, en cierto día, 8229,50 \$. Este le envía una letra cuyo vencimiento se verificará a los 69 días y cuyo descuento podrá hacerse al 4 ¾ % cobrándole además el valor del sello que es de ½ ‰ (4,5 \$), ¿cuál es el valor nominal de esa letra?

486. Un corresponsal debe, en el día de la fecha, 11923,16 \$ a cierta persona, ¿cuál será el valor nominal de una letra enviada por ésta, siendo el vencimiento a los 63 días, descontable al 4 ½ %, agregando el valor del sello del ½ ‰ (6,50 \$) y ⅓ % de su valor nominal de comisión?

487. Hallar el valor que tiene el 1.º de marzo una letra de 3724 £ 10 s. 5 d., pagadera el 30 de noviembre con el descuento del 5 % anual.

488. Una letra de 1698,60 \$, pagadera a los 14 meses, vale actualmente 1579,70 \$, ¿cuál es el tanto del descuento?

489. Hallar el valor del descuento comercial de una letra de 364 £ 3 s. 5 d., pagadera el 17 de julio y descontada al 4 % el 5 de marzo.

490. Un comerciante lleva a un banquero una letra de 1272 \$, pagadera a los 90 días; el banquero entrega por ella \$ 1256,10, ¿cuál es el tanto del descuento?

491. Hallar el valor del descuento de una letra de 329 £ 13 s. 3 d., pagadera el 11 de julio 1893 y descontada al $2\frac{1}{4}\%$ el 2 de febrero 1892.

492. Se presenta a un banquero, el 19 de junio, una letra de 900 \$ y el banquero entrega al portador 884,55 \$, ¿cuál es la fecha del vencimiento, siendo el descuento de 6 %?

493. ¿Qué suma podrá pedirse prestada al 3 % de interés anual durante 96 días, comprometiéndose a pagar al fin de ese tiempo 9000 \$ por el capital a devolver, aumentado de sus intereses?

494. Calcular el valor actual y el descuento racional de 21625,40 \$, pagaderos a los 90 días, al tanto de $4\frac{5}{8}\%$ anual.

495. Demostrar que la razón entre el descuento comercial y el racional es igual al valor adquirido por la unidad monetaria colocada a interés hasta el día del vencimiento.

496. Demostrar que la diferencia entre el descuento comercial y el racional es el interés simple del descuento racional.

497. Hallar la diferencia entre los dos descuentos de un capital c , siendo el tanto de 4 % y la duración 90 días.

498. Una letra de 3397,20 \$ es pagadera a los 7 meses, ¿qué suma debiera entregar el banquero al portador de la letra en cambio de ésta siendo el tanto de descuento racional 6 %? ¿Cuál será el valor actual de la letra calculada por el método de descuento comercial?

499. Si una suma de dinero es 19 veces mayor que su descuento racional en cierto tiempo, y si el interés de esa misma suma por ese tiempo, al mismo tanto por ciento, es 2 £ 3 s. 4 $\frac{1}{2}$ d., ¿cuál es esa suma?

500. Una letra cuyo valor nominal es de 3397,20 \$ se descuenta al 6 % y su valor actual racional es de 3282,30 \$, ¿en qué tiempo debe pagarse la letra?

501. Hallar el descuento racional de 386 *dol.* 25 *c.*, por 9 meses al 4 %.

502. Un negociante tiene 80 barriles de azúcar a 57 \$ cada uno pagaderos a los 8 meses de plazo, pero con un descuento del 6 % anual si paga al contado, qué suma debe pagar sabiendo que se le otorga 5 % de tara (véase ejercicio 505) y que el descuento se hace matemáticamente?

503. ¿A que tanto por ciento de descuento racional, debe hacerse el descuento de 357 £ 17 s. 8 d. en 2 años para que ese descuento resulte ser 29 £ 11 s.

504. ¿Cuál es el valor nominal de una letra pagadera a los 7 meses y cuyo valor actual matemático es 3292,30 \$? El tanto de descuento es 6 %.

§ 3. — CUESTIONES DE PORCENTAJES

186. Descuento al contado, rebajas. — Hemos ya indicado (n.º 183) que en el comercio al por mayor, se paga raras veces *al contado*, es decir, al recibir la mercadería; generalmente se paga a los 30, 60, 90 días después de la entrega; pero si el comprador

ofrece pagar al contado, el vendedor le acuerda lo que se llama *una rebaja o descuento*, que se calcula a razón de un tanto por ciento.

Por ejemplo, si una persona ha comprado un objeto que cuesta c pesos y al pagar al contado recibe una rebaja o descuento de r por ciento, pagará $c - \frac{cr}{100}$.

Existen otras muchas cuestiones análogas.

EJEMPLO. — *Una obra que cuesta al público 3,50 pesos, es pagada al autor, por el librero, 2,80 pesos, ¿cuál es el descuento acordado a los libreros por el autor?*

Tenemos aquí:

$$c = 3,50, \quad c - \frac{cr}{100} = 2,80 \quad \therefore \quad c \left(1 - \frac{r}{100} \right) = 2,80$$

$$\therefore \quad r = 100 \left(1 - \frac{2,80}{c} \right) = \left(1 - \frac{2,80}{3,50} \right) \times 100 = 20.$$

Luego el descuento es de 20 por ciento.

187. Vencimientos comunes. — El problema llamado del **vencimiento común** consiste en reemplazar varios efectos de comercio por uno solo conveniente. Los ejemplos siguientes dan una idea clara del mismo.

EJEMPLO. — *Se tiene cuatro letras: la primera de 2000 pesos, pagadera a los 10 días; la segunda de 1500 pesos, pagadera a los 20 días; la tercera de 1800 pesos, pagadera a los 35 días; la cuarta 2400 pesos, pagadera a los 60 días. Quiere reemplazarse esas cuatro letras por una única de 7700 pesos, siendo 6 por ciento el tanto del descuento, ¿en qué tiempo debe vencer esa única letra?*

El valor actual de la letra única debe ser igual a la suma de los valores actuales de las cuatro letras a las que debe reemplazar; en otras palabras, el descuento de la letra única hasta el día de su vencimiento debe ser igual a la suma de los descuentos de las cuatro letras hasta los respectivos vencimientos.

Tenemos:

descuento de la primera letra:

$$x = 6 \times \frac{10}{360} \times \frac{2000}{100} = 3,33 \$;$$

descuento de la segunda letra:

$$y = 6 \times \frac{20}{360} \times \frac{1500}{100} = 5 \$;$$

descuento de la tercera letra:

$$z = 6 \times \frac{35}{360} \times \frac{1800}{100} = 10,50 \$;$$

descuento de la cuarta letra:

$$u = 6 \times \frac{60}{360} \times \frac{2400}{100} = 24 \$.$$

La suma de los cuatro descuentos será:

$$3,33 \$ + 5 \$ + 10,50 \$ + 24 \$ = 42,83 \$.$$

Es menester ahora determinar en cuánto tiempo una suma de 7700 pesos produce 42,83 pesos. Ese tiempo es igual (fórmula 4, n.º 180):

$$t = 360 \times \frac{100}{7700} \times \frac{42,83}{6} = 33 \text{ días.}$$

188. Fondos públicos. — Cuando un Estado necesita dinero, hace un **empréstito público** emitiendo **papeles del Estado**.

Toda persona que facilita al Estado una suma de dinero, recibe en cambio un papel de Estado en el que está consignado su **valor nominal** igual o superior al facilitado. Este papel viene a ser, en definitiva, un recibo dado por el Estado, en el que éste se compromete a entregar al poseedor del papel una renta anual determinada o a reembolsarle el capital nominal del papel.

El prestamista no tiene derecho a exigir el reintegro del capital, pero el Estado tiene derecho a hacerlo en cualquier momento. Existen dos clases de papeles de Estado.

El **perpetuo** o **consolidado**, que el Estado no tiene obligación de reembolsar, y el **amortizable**, que el Estado reembolsa poco a poco devolviendo anualmente el importe de un cierto número de papeles **a la par** hasta devolver todo el empréstito en un número determinado de años fijado de antemano.

Los problemas más frecuentes relativos a la renta del papel del Estado son los siguientes:

1.º Hallar la renta que produce un determinado valor nominal de papeles del Estado;

2.º Hallar el valor efectivo que corresponde a un valor nominal dado;

3.º Hallar el valor efectivo de papeles del Estado que habrá que adquirirse para obtener una renta dada;

4.º Hallar el tanto por ciento anual que produce el capital que se ha invertido en papeles del Estado.

Para resolver los tres últimos problemas se requiere conocer el **cambio** del papel en el día en que se hace la operación. Efectivamente, un papel del Estado, siendo impersonal, constituye una verdadera mercadería que se compra y vende, y tiene, por consiguiente, un precio variable llamado el **cambio**. Así, cuando se dice que el cambio del 3 por ciento amortizable es 98,75, se entiende que un papel de Estado que produce 3 pesos de renta anuales para un capital **nominal** de 100 pesos, se compra o se vende en la Bolsa por 98,75 pesos.

Cuando el **cambio** es igual al valor nominal, se dice que el papel está *a la par*. Si es inferior o superior se dice respectivamente que está **debajo** o **encima** de la par.

Los ejemplos siguientes dan una idea suficiente de la manera de resolver los problemas usuales relativos a los fondos públicos.

EJEMPLO 1.º — ¿Qué renta anual produce 35000 pesos nominales del 4 por ciento? Aplicando la fórmula (n.º 179) tenemos

$$x = 4 \times \frac{35000}{100} = 1400 \text{ \$}.$$

EJEMPLO 2.º — Hallar el valor efectivo de 25.000 pesos nominales del 5 por ciento amortizable al cambio de 95,70.

Diremos: si 100 pesos nominales se compran por 95,70 efec-

tivos, 1 peso nominal se comprará por $\frac{95,70}{100}$ pesos efectivos; luego

25.000 pesos nominales se comprarán por $\frac{95,70 \times 25000}{100} = 23925$ \$.

EJEMPLO 3.º — *¿Qué capital hay que invertir en papeles del 4 por ciento al cambio de 75,40 para obtener una renta de 3000 pesos?*

Diremos: si 75,40 pesos efectivos producen 4 pesos de renta, 1 peso de renta se obtendrá con $\frac{75,40}{4}$ pesos efectivos, y 3000 \$ de

renta con $\frac{75,40 \times 3000}{4} = 56550$ \$.

EJEMPLO 4.º — *¿Qué tanto por ciento produce un papel de 4 por ciento comprado a 75,40?*

Diremos: si 75,40 pesos efectivos produce 4 pesos, 100 pesos efectivos, producirán $4 \times \frac{100}{75,4} = 5,28$.

EJEMPLO 5.º — *¿Cuál debería ser el cambio de los papeles de estado Otomanos del 4 por ciento, para que el tanto de colocación fuera $5\frac{1}{2}$ por ciento?*

Es cuestión de buscar qué capital al $5\frac{1}{2}$ por ciento produce 4 pesos por año; este capital resultará ser

$$100 \times \frac{4}{5,5} = 72,72.$$

Luego el cambio es 72,72.

EJERCICIOS

505. 30 sacos de café comprados en Hamburgo pesan, al desembarcar, 1986 kg.; la aduana acuerda una tara legal (llámase tara la bonificación acordada a un comprador por el peso del embalaje y del continente, en general, de la mercadería) de 3 % y calcula los derechos de entrada a razón de 10 \$ cada 100 kg., ¿a cuánto se elevan esos derechos?

506. Buscar el descuento al 2 % correspondiente a una factura cuyo importe es de 7874,82 \$.

507. El precio de un libro es fijado en 5 \$ el ejemplar. El editor acuerda a los libreros 13 ejemplares por 12 y concede una rebaja de 20 %. Avaluar a qué tanto por ciento del precio establecido alcanza el importe de las rebajas acordadas por el editor.

508. ¿A cuánto se eleva una factura de 470 cajones de vidrio para puertas, encerrando cada uno 100 pies cuadrados ingleses, de acuerdo con las siguientes notas y especificaciones:

130 cajones a 30 fr. los 100 pies cuadrados franceses (3 pies franceses valen, más o menos, 0,975 m. o 3 pies ingleses, 1 yarda, o sea 0,914 m.);

330 cajones a 32 fr. los 100 pies cuadrados franceses;

10 cajones a 36 fr. los 100 pies cuadrados franceses;

A deducir 6 % para las medidas inglesas;

Rebaja 70 %, descuento 3 %, gastos de embalaje 2 fr. por cajón.

509. Se propone arreglar por un pago único, con fecha 10 de agosto 1936, las siguientes deudas:

3000 \$	pagaderos el 5 de agosto 1936		
2000	»	7	»
1500	»	20	»

al 5 % de interés anual.

510. Una persona debe 9522,38 \$ pagaderos el 7 de mayo; 4251,26 \$ pagaderos el 15 de junio; 32357,75 \$ pagaderos el 10 de agosto. El acreedor consiente en recibir 20000\$ el 1.º de julio, y lo restante el 31 de agosto siguiente. Calcular ese saldo, teniendo en cuenta los intereses de 4 ½ por ciento anual.

511. Dados varios capitales:

3000 \$	pagaderos el 5 de agosto		
2000	»	7	»
1500	»	20	»

hallar el vencimiento de un capital único igual a su suma, 6500 \$, de tal manera que a la fecha del primer pago, el 5 de agosto, el valor descontado del capital único sea igual a la suma de los valores descontados de los primitivos capitales.

512. Una persona debe: 8971,85 \$ al 12 de mayo, 419,31 \$ al 4 de junio; 23651,43 al 9 de julio; paga 20000 \$ el 1.º de junio, ¿en qué época debe abonar el saldo?

513. ¿Cuáles son los valores nominales de dos letras cuyos vencimientos son el 8 de abril y el 31 de mayo y cuyo pago podrá extinguir una deuda de 3421,50 \$ pagadera el 10 de mayo. La suma de los valores nominales desconocidos debe ser igual al importe del capital único.

514. Una persona que debe 24613,40 \$ el 15 de julio, pagará: 5000 \$ el 15 de mayo; 5000 \$ el 30 de junio; 5000 \$ el 31 de julio. Para librarse completamente propone abonar el saldo en dos pagos que se harán el 10 de agosto y el 31 de agosto. Hallar el importe de ambos pagos.

515. Una persona compra mercaderías por valor de 850 \$; las paga al contado con un descuento de 2 %; las vuelve a vender por 1000 \$ ofreciendo ella misma un descuento de 2 %, ¿cuál es su ganancia?

12
37

516. Si un papel del estado produce $\frac{4}{37}$ de intereses efectivos ¿cuál es el cambio, sabiendo que el interés nominal es de 4 %?

517. Una persona al pagar una factura, entrega 63,70 \$ después de beneficiar de una rebaja de 2 %, ¿cuál era el monto de la factura?

518. Un librero ha comprado 84 tomos, cuyo precio marcado es de 1,50 \$, con una rebaja de 15 % y además obtiene 13 tomos por 12. Los vuelve a vender al precio marcado, ¿cuál es su beneficio total?

519. Una escuela tiene 380 alumnos; 5 % tienen una edad comprendida entre 12 y 14 años, 10 % entre 10 y 12 años; 35 % entre 8 y 10 años; los demás tienen menor edad, ¿cuántos alumnos hay de cada categoría de edades?

520. La población de una comarca aumenta de 3 % anualmente, pero decrece por emigración en $\frac{1}{2}$ % anual. ¿Cuál será el aumento en tanto por ciento a los tres años?

521. Si el precio del carbón aumenta en un 10 %, ¿de cuánto por ciento debe, un consumidor, reducir el consumo para no tener aumento en su gasto?

522. El costo por tonelada de los dos principales cuerpos usados en la preparación de un producto, están en la razón 5 : 4; las cantidades de ellos usadas están en la razón 4 y 3; la mano de obra y otros gastos resultan ser 6 £ por tonelada del artículo terminado, el cual es vendido con un descuento de 8 % de su precio nominal de venta. Las cantidades vendidas son iguales a la suma de los dos principales componentes, por despreciarse los otros productos secundarios. La utilidad está calculada en 25 %, pero si los precios de los dos principales componentes aumentan en 10 % y si el precio de venta descendiende de 10 % la utilidad resulta ser $3\frac{1}{2}$ %, ¿cuál es el precio nominal de venta de la tonelada del producto?

523. El agua de mar contiene más o menos 2,5 % de su peso en sal; un litro de agua de mar pesa 1,026 kg., ¿cuántos litros de agua debe evaporarse para obtener 400 g. de sal?

524. Hallar el 28 % de 8569 £ 17 s. 6 d. y el $8\frac{1}{3}$ de 89 km. 58 dam.

525. Un vendedor tiene una comisión de 1,25 % sobre el importe de sus ventas, ha ganado cierto día 35 \$, ¿qué suma ha vendido?

526. Un hombre debe 235 £ a otro y le paga 110 £, ¿qué tanto por ciento de la deuda queda sin pagar?

527. En ciertas administraciones del Estado, el sueldo de los funcionarios sufre una merma de 5 %, ¿cuál es el sueldo mensual de un empleado que ha cobrado 3420 \$ al año?

528. ¿Cuál es el importe de una letra única pagadera a los 60 días destinada a reemplazar tres letras: una de 600 \$, pagadera a los 30 días; otra de 900 \$, pagadera a los 60; otra de 100 \$, pagadera a los 90, siendo el tanto del descuento 6 %?

529. Si la población de un país, en 1861, era de 20066224 habitantes y en 1891 de 29002165, ¿cuál es el aumento por ciento en 30 años?

530. Un comerciante compra por valor de 15000 \$ de mercaderías, de las que debe pagar la mitad a los 4 meses, la tercera parte a los 9 meses y el resto al año. Quiere hacer un solo pago, ¿en qué época debe efectuar ese pago?

531. Una persona compra un objeto y lo vende ganando el 5 %. Si lo

hubiera comprado al 5 % menos y vendido el mismo a 1 s. menos, hubiera ganado el 10 %, ¿cuál es el precio de compra?

532. ¿Es más conveniente comprar papeles de Estado del 3 % al cambio de 102,40 \$ o papeles del $3\frac{1}{2}$ % al cambio de 102,97?

533. Un especulador hizo cuatro operaciones con su fortuna; en la primera ganó 100 %; en cada una de las otras tres perdió 20 %, ¿cuál es la ganancia por ciento de su primitivo capital?

534. ¿Qué valor nominal de papeles de Estado del 3 % y al cambio de 102 se obtendrá por 15000 \$ (incluso gastos de sellos y de corretaje; 0,1275 \$ por 102 \$)?

535. Un comerciante ha comprado 120 kg. de mercaderías a razón de 2,40 \$ el kg. con una rebaja de 1 %; el embalaje ha costado 10 \$; los gastos de transporte son de 8,50 \$. Volviendo a vender la mercadería al menudeo a razón de 1,50 \$ los 500 g., ¿cuál es el tanto por ciento de ganancia?

536. Cierta número de manzanas fueron compradas a 4 por un penique, y un número igual de manzanas a 3 por un penique. El todo fué vendido a 7 por 1 penique, ¿cuál es la ganancia o la pérdida por ciento?

537. Una persona compra un terreno de 5 a. 62 ca. Vende los $\frac{3}{7}$ por 11250 \$ con un beneficio de $8\frac{2}{3}$ %, ¿a cuánto habrá pagado el m.²? Si el resto del terreno se ha vendido con un beneficio de $9\frac{3}{4}$ %, ¿cuánto por ciento se ha ganado en el negocio?

538. Si un papel de Estado del 3 % tiene un cambio de 91, y otro del $3\frac{1}{2}$ % el cambio de 106, ¿cuál es la diferencia entre los tantos por ciento de intereses efectivos obtenidos por ellos? ¿cuánto si se tiene en cuenta la comisión de $\frac{1}{8}$ % que debe pagarse al comprar el segundo título?

539. Una persona que quiere colocar 24600 \$ duda entre adoptar una de las tres soluciones siguientes: 1.ª, comprar una casa que le procurará 4,75 % de su valor pero en la que anualmente será menester efectuar reparaciones avaluada en 10 % de la renta; 2.ª, comprar un campo que le procurará 4,25 % después de verificados todos los gastos; 3.ª, comprar papeles de Estado del 3 % al cambio de 99,85. ¿Qué solución le conviene más desde el punto de vista de la renta?

540. Una persona invierte 14970 £ en comprar papeles del Estado del 3 % al cambio de 90 efectivo y otros al $3\frac{1}{2}$ % al cambio de 97. Si el interés total es de 500 £, ¿cuántos papeles de cada clase debe comprar?

541. Un agricultor tiene trigo para vender; se le ofrece 27,60 \$ por el quintal métrico; rehusa la venta y sólo puede efectuarla a los 7 meses al precio de 26,30 \$; en ese lapso se ha secado y perdido el 2 % de su peso, ¿cuál es la pérdida por quintal teniendo en cuenta los intereses al 4,5 %?

542. 144 acciones de una compañía se venden a 856 £ 16 s. cuando el dividendo es de 7 %, ¿cuántas acciones podrá comprarse con 1193 £ 8 s. cuando el dividendo sea de 9 %?

543. Una persona ha comprado papeles de Estado del $3\frac{1}{2}$ % de manera a tener 100 \$ de renta, y ha pagado, con gasto de sellos y corretaje comprendido, 4365,95 \$, ¿cuál es el cambio? El sello es de 0,50 \$ y el corretaje de $\frac{1}{800}$ del precio de adquisición del título.

§ 4. — REPARTICIONES PROPORCIONALES. MEZCLAS

189. Definición. — Repartir una magnitud M en partes proporcionales a los grandores o a los números $a, b, c, \dots$ significa descomponerla en tantas magnitudes parciales que llamaremos $A, B, C, \dots$ como grandores o números $a, b, c, \dots$ se dan, de manera que se verifiquen las igualdades

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d} = \dots$$

190. — Resolución. — De lo establecido en el n.º 154 se tiene que

$$\frac{A + B + C + D + \dots = M}{a + b + c + d + \dots} = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d} = \dots$$

Estas igualdades permiten hallar $A, B, C, \dots$ pues se tiene

$$A = \frac{M}{a + b + c + \dots} a; \quad B = \frac{M}{a + b + c + \dots} b; \quad \dots$$

Luego: Para repartir una magnitud M en partes proporcionales a varias otras $a, b, c, \dots$ basta multiplicar cada una de estas magnitudes $a, b, c, \dots$ por la razón entre la magnitud a repartir M y la suma $a + b + c + \dots$ de las magnitudes $a, b, c, d, \dots$

EJEMPLO. — Repartir 1740 en partes proporcionales a $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 0.7$; tendremos:

$$M = 1740; \quad a = \frac{1}{2}; \quad b = \frac{3}{5}; \quad c = 0.7.$$

Luego:

$$a + b + c = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{7}{10} = \frac{9}{5},$$

∴

$$A = \frac{1740}{\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + 0.7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1740}{\frac{9}{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1740 \times 5}{9 \times 2} = \frac{1450}{3}.$$

$$B = \frac{1740 \cdot 3}{\frac{5}{9}} = 580.$$

$$C = \frac{1740}{\frac{5}{9}} \cdot 0.7 = \frac{2030}{3}.$$

191. Aplicaciones. Regla de compañía o de sociedad. — *La regla de sociedad*, resuelve el problema de repartir beneficios (o pérdidas) entre socios que han puesto capitales comunes en un negocio.

192. Cuando varias personas reúnen sus capitales para explotar un negocio cualquiera, forman una **sociedad o compañía mercantil**. Cada uno de los individuos que forma parte de la sociedad, es un **socio**; el capital que aporta a la misma se llama su **imposición**, y la suma de todas ellas, es el **capital social**. La ganancia o pérdida obtenida por la sociedad se llama el **dividendo general**. La parte de ella que corresponde a cada socio es un **dividendo parcial**.

La regla de compañía enseña a distribuir las ganancias o pérdidas obtenidas en una sociedad, entre los socios que la componen, o sea hallar los dividendos parciales conociendo el dividendo general.

En las grandes empresas comerciales, el capital de la sociedad se reparte en un gran número de partes iguales llamadas **acciones**. El dividendo general es también repartido en tantas partes cuantas acciones hay y la parte de cada una se llama el **dividendo de la acción**.

Una acción tiene, como un papel de Estado, un valor comercial que puede comprarse o venderse; tiene, por tanto, un **cambio** que varía según la marcha de los negocios de la empresa que la ha emitido.

La regla de compañía se dice **simple**, cuando se aplica a socios que han aportado sus capitales durante un mismo tiempo. En ese caso, la repartición de los beneficios (o pérdidas) se hace, como es natural, proporcionalmente a los capitales aportados.

La regla en cuestión se dice **compuesta**, cuando se aplica a capitales colocados durante tiempos diferentes. Se reparten entonces las utilidades o las pérdidas proporcionalmente al producto de los números que indican la imposición de cada socio y el tiempo durante el cual ha cooperado en el negocio.

Este último caso sucede raras veces, pues cuando un socio se retira de una sociedad, se disuelve o **liquida** ésta, y se forma una nueva; sin embargo, como envuelve la resolución de un problema más general, indicaremos algunos ejemplos al respecto.

Ejemplo 1.º — *Una compañía mercantil de tres socios A, B y C ganó en tres años 45000 pesos. El socio A aportó a ella 30000 pesos durante los tres años; el socio B aportó 15000 pesos durante 2 años, y el socio C 20000 pesos durante año y medio. ¿Qué dividendo corresponde a cada socio?*

Tenemos que repartir 45000 pesos proporcionalmente, a los números $30000 \times 3 = 90000$; $15000 \times 2 = 30000$; $20000 \times 1\frac{1}{2} = 30000$. Luego:

$$\text{dividendo de A} = \frac{45000}{90000 + 30000 + 30000} \times 90000 =$$

$$= \frac{45000}{150000} \times 90000 = 27000;$$

$$\text{dividendo de B} = \frac{45000}{150000} \times 30000 = 9000;$$

$$\text{dividendo de C} = \frac{45000}{150000} \times 30000 = 9000.$$

Estos dividendos son, por consiguientes, 27000 \$, 9000 \$, 9000 \$.

Ejemplo 2.º — *Una sociedad comprende 500 accionistas. El dividendo total relativo a un año es 35600 pesos. ¿Cuál es el dividendo por acción?*

$$\text{Será, evidentemente, } \frac{35600}{500} = 71,20 \text{ \$}.$$

Ejemplo 3.º — *Repartir un beneficio de 30000 pesos entre dos socios, sabiendo que A ha aportado 150000 pesos y B 330000. Tendremos:*

$$A = \frac{30000}{150000 + 330000} \times 150000 = 9375 \text{ \$}.$$

$$B = \frac{30000}{150000 + 330000} \times 330000 = 20625 \text{ \$}.$$

193. **Prorratio.** — Existen muchas cuestiones tales como el reparto de contribuciones, socorros mutuos, etc., llamadas de prorratio o de distribución a prorrata, que se resuelven como la regla de compañía, es decir, dividiendo una cantidad dada en partes proporcionales a ciertos números.

Ejemplo. — *Los contribuyentes de las cuatro primeras clases de cierto pueblo convinieron en costear la construcción de un paseo presupuestado en 1400 pesos; de aquéllos, 7 pagan 180 pesos de contribución; 17 pagan 110 pesos; 20 pagan 80 pesos y 24 pagan 50 pesos, ¿con cuántos pesos debe contribuir cada uno para pagar dicha obra?*

Dividiremos 1400 pesos en partes proporcionales a 7×180 , 17×110 , 20×80 , 24×50 , es decir a 1260, 1870, 1600, 1200 y obtendremos para la cuota de cada clase:

$$\frac{1400}{1260 + 1870 + 1600 + 1200} \times \left\{ \begin{array}{l} 1260 = 297,47 \\ 1870 = 441,48 \\ 1600 = 377,74 \\ 1200 = 283,31. \end{array} \right.$$

Luego, a cada uno de los contribuyentes de la primera clase le corresponderá $\frac{297,47}{7} \$ = 42,50 \$$; a cada uno de los de la segunda $\frac{441,48}{17} \$ = 25,97 \$$, a cada uno de los de la tercera $\frac{377,74}{20} \$$

$= 18,89 \$$, y a cada uno de los de la cuarta $\frac{283,31}{24} \$ = 11,80 \$$.

194. Algunos casos particulares de repartición en partes proporcionales.

a) Se dan las razones pero no la suma a repartir.

A, B y C poseen un dominio; las partes de cada uno son proporcionales a 4, $2\frac{1}{2}$ y $1\frac{1}{2}$. A vende la mitad de su parte a C y C vende 100 hectáreas a B y resulta así que las partes de B y C salen iguales. ¿Cuántas hectáreas?

Sea x el número de hectáreas del dominio. Tenemos que:

$$4 + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 8,$$

es la suma de las partes proporcionales.

Los factores relativos a cada parte son:

$$\frac{4}{8}, \frac{2\frac{1}{2}}{8}, \frac{1\frac{1}{2}}{8}, \text{ es decir } \frac{8}{16}, \frac{5}{16} \text{ y } \frac{3}{16}.$$

Estas partes son, por consiguiente:

$$\frac{8}{16}x \text{ ha.}; \quad \frac{5}{16}x \text{ ha.}; \quad \text{y} \quad \frac{3}{16}x \text{ ha.}$$

Pero como A vende la mitad de su parte a C, tenemos como nuevas partes

$\frac{4}{16}x$ ha., $\frac{5}{16}x$ ha. y $\frac{7}{16}x$ ha. Pero C vende 100 ha. a B, luego esas partes se transforman en

$$\frac{4}{16}x \text{ ha.}, \left(\frac{5}{16}x + 100 \right) \text{ ha.}, \left(\frac{7}{16}x - 100 \right) \text{ ha.}$$

y por la hipótesis hecha

$$\left(\frac{7}{16}x - 100 \right) \text{ ha.} = \left(\frac{5}{16}x + 100 \right) \text{ ha.}$$

$$\therefore \quad \frac{2}{16}x = 200,$$

$$x \text{ ha.} = \frac{200 \times 16}{2} \text{ ha.} = 1600 \text{ ha.}$$

Luego, al principio, A, B y C tenían respectivamente:

$$\frac{8}{16} \times 1600 = 800 \text{ ha.}$$

$$\frac{5}{16} \times 1600 = 500 \text{ ha.}$$

$$\frac{3}{16} \times 1600 = 300 \text{ ha.}$$

b) Cantidades expresadas en base a distintas unidades.

Cuántos $\frac{1}{2}$ soberanos, $\frac{1}{2}$ coronas y 6 peniques valen juntos $579\frac{1}{2}$ £. El número de monedas están en la proporción de $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{4}$ y $5\frac{1}{3}$ respectivamente.

Tenemos que

$$3\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4} + 5\frac{1}{3} = \frac{7}{2} + \frac{17}{4} + \frac{16}{3} = \frac{42}{12} + \frac{51}{12} + \frac{64}{12}.$$

Luego, los números de cada clase de piezas de moneda están en la relación de 42, 51 y 64. Si hubiera este número de cada clase de piezas, el valor de ellas sería, en base a la unidad 6 peniques (*six pence*).

$$\begin{array}{l} 42 \times 20 = 840 \\ 51 \times 5 = 255 \\ 64 \times 1 = 64 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1159. \text{ Pero } 579\frac{1}{2} \text{ £} = 23180 \text{ veces 6 peniques.} \end{array} \right.$$

Luego:

el valor en $\frac{1}{2}$ soberanos es $\frac{23180 \times 840}{1159} = 16800$ veces 6 peniques; el valor

en $\frac{1}{2}$ coronas es $\frac{23180 \times 255}{1159} = 5100$ veces 6 peniques; el valor en 6 peni-

ques es $\frac{23180 \times 64}{1159} = 1280$ veces 6 peniques.

Pero 16800 *six pence* = 420 £ = 840 medios soberanos.

5100 „ = $127\frac{1}{2}$ £ = 1020 medias coronas.

1280 „ = 32 £ = 1280 veces 6 peniques.

La respuesta es, por consiguiente: 840 , 1020 y 1280 .

c) Caso en que figuran proporciones continuas.

Repartir 3900 \$ entre A, B, C, D, de tal manera que la parte de A y la de B sean proporcionales a los números 3 y 4; las partes de B y C proporcionales a 8 y 9; las de C y D a 9 y 16.

Tenemos:

$$A : B :: 3 : 4 \quad \text{o también} \quad A : B :: 6 : 8 \quad \text{o también} \quad \frac{A}{6} = \frac{B}{8}$$

$$B : C :: 8 : 9 \quad \text{„} \quad \frac{B}{8} = \frac{C}{9}$$

$$C : D :: 9 : 16 \quad \text{„} \quad \frac{C}{9} = \frac{D}{16}$$

Luego $\frac{A}{6} = \frac{B}{8} = \frac{C}{9} = \frac{D}{16}$, se trata, pues, de repartir 3900 \$ en partes proporcionales 6, 8, 9 y 16; se obtiene 600 \$, 800 \$, 900 \$, 1600 \$, respectivamente.

d) Partes proporcionales compuestas.

Un hombre, una mujer y un niño efectúan un trabajo por 15 £ 7 s.; el hombre trabaja 9 días, la mujer 10 y el niño 12. Los trabajos hechos por ellos están en la proporción de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, ¿cuánto le toca a cada uno?

Si los trabajos efectuados por un hombre, una mujer y un niño están en la proporción de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$, los trabajos efectuados por ellos en 9, 10 y 12 días están en la relación de $9 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$; $10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$; $12 \times \frac{1}{5} = \frac{12}{5}$.

Se trata, pues, de repartir 15 £ 7 s. en partes proporcionales a $\frac{9}{2}$, $\frac{10}{3}$ y

$\frac{12}{5}$; se obtiene 6 £ 15 d.; 5 £ y 13 £ 12 s. respectivamente para el hombre, la mujer y el niño.

EJERCICIOS

544. Repartir 124000 \$ en partes proporcionales a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$.

545. Un general levanta una contribución de 870 \$ entre 4 aldeas de 250, 300, 400 y 500 habitantes respectivamente, ¿qué suma debe pagar cada aldea proporcionalmente a su población?

546. Dividir 630 \$ en dos partes tales que la segunda sea los $\frac{3}{4}$ de la primera.

547. Dividir 180 \$ entre A, B y C de tal manera que A reciba 3 veces más que B; y B y C juntos la mitad de A.

548. La antigua pólvora de guerra era una mezcla de 75 % de natron, 12 $\frac{1}{2}$ % de azufre y 12 $\frac{1}{2}$ % de carbón, ¿cuál era el peso de cada una de estas substancias existentes en 1160 kg. de pólvora?

549. 2228 £ 16 s. deben repartirse entre un niño y dos niñas; el niño debe tener 3 partes y cada niña 2 partes, ¿cuánto deben recibir cada una?

550. Tres vecinos han alojado tropas de hombres y caballos; el primer vecino alojó 6 hombres y 4 caballos durante 15 días; el segundo 8 hombres y 3 caballos durante 12 días; el tercero 10 hombres durante 9 días. Se les acuerda una indemnización de 180 \$. Repartir ésta teniendo en cuenta que dos caballos deben contarse como si se tratara de 1 hombre.

551. Dividir 1690 \$ entre 4 personas, de tal manera que la primera pueda percibir $\frac{1}{11}$ más que la segunda, la segunda $2\frac{2}{3}$ más que la tercera y la cuarta tanto como la segunda y la tercera.

552. Un comisionista en mercaderías compra una pieza de género de 20 m. de longitud. Guarda la cuarta parte y cede el resto en tres partes cuyas longitudes son proporcionales a los números 11, 15 y 24. Sabiendo que esas partes han sido cedidas; la primera a razón de 24 \$ el metro, la segunda a razón a 18 \$ el m. y la tercera a razón de 25 \$ el metro y que el beneficio realizado es de 8 % del precio de compra, se puede calcular: 1.º,

cuál es el precio de compra; 2.º, a qué precio el comisionista debe vender el resto que le queda para obtener una utilidad de 33 % sobre el precio de compra de ese resto.

553. Un padre de tres hijos deja 9656 £ a dividir entre éstos proporcionalmente a las edades que tendrán el día del fallecimiento de aquél; habiendo resultado ser esas edades 25, 22 y 21 años respectivamente, ¿cuál es la parte de cada uno?, ¿cuál es la diferencia entre cada una de estas partes y la que le hubiera correspondido a cada hijo si el padre hubiera vivido un año más?

554. Una suma de 630 \$ es dividida entre 10 hombres, 32 mujeres y 48 niños. Cada hombre recibe dos veces más que una mujer; y 32 mujeres reciben tanto como 48 niños, ¿cuál es la parte de cada uno?

555. Si el trabajo efectuado por un hombre, una mujer y un niño está en la proporción de 3, 2, 1; y si 12 hombres, 15 mujeres y 15 niños pueden efectuar cierta obra en 270 días, ¿en qué tiempo 18 hombres, 12 mujeres y 12 niños podrán efectuarlo?

556. Seis monedas tienen el mismo peso y son de oro y plata aleadas. En una de ellas el oro y la plata están en la razón de 2 a 1; en otras dos en la razón de 3 a 5 y en las restantes en la razón de 7 a 5. Si se funden las seis monedas, ¿en qué razón estarán el oro y la plata del metal resultantes?

557. La población de cierta ciudad es tal que el número de hombres es el de las mujeres como 13 es a 15. De los hombres, el número de casados es al de los no casados como 6 es a 7; y los números análogos relativos a las mujeres están en la razón de 7 a 5. Sabiendo que hay 25 mujeres no casadas, ¿cuál es el total de la población adulta, cuántos hombres y mujeres?

558. Las rentas de dos personas son tales que si una fuera disminuida en 8 % y la otra aumentada en 15 %, resultarían iguales. El total de la renta es 671 $\frac{2}{5}$ \$, ¿cuales son esas rentas?

559. En las tres aulas de un colegio cursan 222 niños; el número de los alumnos de la primera aula es al de la segunda como 3 : 5; los relativos a la 2.ª y 3.ª aula están entre sí como 7 : 11; determinar el número de alumnos de cada aula.

560. Tres niños resuelven el mismo número de problemas durante el año, y entre los tres resuelven correctamente 1064. Uno de los niños resuelve 2 problemas bien entre 3, otro resuelve 3 bien entre 4, y el último 4 entre 5, ¿cuántos problemas resuelve correctamente durante el año cada niño?

561. Tres personas contribuyeron con 50000 \$, 7500 \$ y 2500 \$ respectivamente en un negocio. La ganancia es de 3000 \$, ¿cuál es la parte de cada uno?

562. Dividir 144 $\frac{1}{2}$ \$ entre tres personas en la proporción de .3, .33, y .3.

563. En un examen, un alumno tomó cinco temas escritos y obtiene en cada uno notas en la proporción de 6, 7, 8, 9, 10. A la nota superior de sobresaliente le correspondía el mismo número de puntos para cada tema y el alumno obtuvo en total $\frac{3}{5}$ del total máximo de puntos. Determinar en cuántos temas obtuvo más de la mitad del máximo de puntos.

564. Dividir 7872 en tres partes tales que la primera sea 4 veces la segunda y 3 veces la tercera.

565. Un padre tiene 3 hijos de 24, 16 y 8 años respectivamente y deja una herencia a repartir en razón directa de las edades. Ocho años después el segundo hijo falleció y dejó su parte de herencia para ser dividida entre los hijos sobrevivientes en razón inversa a sus edades, ¿qué parte de la primitiva herencia tocará a cada uno de los dos hijos vivientes?

566. A inició un negocio con 450 \$; después de cuatro meses tomó un socio B con 300 \$; dos meses después tomó otro socio C con 500 \$, pero tres meses después, C sacó 250 \$ de su capital. Al finalizar los doce meses resulta una ganancia de $2502\frac{1}{2}$ \$, ¿cuánto corresponderá a cada socio?

567. Dos personas A y B alquilaron un campo en sociedad por 54 £; A puso 23 caballos durante 27 días, B 21 caballos durante 39 días, ¿qué parte del alquiler debe pagar cada uno?

568. A y B entraron en una especulación, A puso 50 \$ y B 45 \$; después de 4 meses, A retiró la mitad de su capital y al finalizar los 6 meses B retiró a su vez $\frac{1}{3}$ de su capital. En esas condiciones otra persona C entra en el negocio con 70 \$. Después de 12 meses la ganancia resultó ser 254 \$, ¿cuánto le corresponde a cada socio?

569. Los dividendos aportados en un negocio por dos socios son 5500 \$ y 3000 \$, si el beneficio a los 9 meses es de 1275 \$, ¿cuál es la parte de cada socio y cuál es el tanto por ciento anual de ganancia?

570. A y B pusieron respectivamente 5000 \$ y 6000 \$ en un negocio. A es el único socio que se ocupa del negocio. Habiendo una ganancia de 770 \$, la parte que recibe A, es a la que recibe B como 3 es a 4, ¿cuánto se le paga a A por su trabajo?

571. A y B entran como socios en el siguiente negocio: B pone una vez y medio el capital de A. A, que es el socio encargado del negocio, debe recibir de los beneficios el 8 % de su capital y B el 4 % del suyo; el resto de los beneficios deben repartirse proporcionalmente a los capitales. Al finalizar el primer año A recibe 2456 \$ y B 3084 \$, ¿cuál es el capital puesto por cada socio en el negocio?

572. Dos negociantes se han asociado, el primero trajo 1500 \$ más que el segundo, éste, por ser el encargado, recibe 150 \$ al año en tal concepto. Después de 3 años, los beneficios brutos calculados en 15 % anuales resultan ser 2925 \$ una vez deducido el sueldo del segundo socio. Hallar el capital primitivo de cada socio y la parte que le corresponde de la ganancia.

573. A, B y C alquilan un campo por 279 \$. A pone 500 ovejas durante 4 meses; B, 600 durante 3 meses y C, 1200 durante 2 meses, ¿qué parte del alquiler deben pagar cada uno?

574. A y B forman una sociedad durante 1 año; A contribuye con 500 \$ desde el 1.º de enero; B contribuye desde el 1.º de mayo con una suma tal que al final le corresponde la misma ganancia que el primero, ¿con cuánto contribuye B?

575. Dos personas entran en un negocio con 3000 \$ y 4500 \$ respectivamente. Después de 8 meses, la primera adelanta 2500 \$ más. Siete meses después se concluye el negocio con una utilidad de 1040 \$, ¿cómo se repartirá ésta?

576. Una persona entra en un negocio con 2500 \$ en sociedad con otra que aporta 4000 \$. Después de un año resulta una pérdida de 250 \$ y los

capitales quedan reducidos proporcionalmente. En esas condiciones, entra en la sociedad una tercera persona con 4500 \$. Al año resulta una ganancia de 2358 \$, ¿cómo se repartirá?

577. A y B entran en un negocio; A pone 50 \$, B 45 \$. Después de 4 meses A retira la mitad de su capital; al fin de 6 meses B retira $\frac{1}{3}$ del suyo. En esas circunstancias entra C con 70 \$ de capital. Después de 12 meses el beneficio resulta ser 254 \$, ¿cómo se repartirá?

578. A entra en un negocio con 4000 £. Después de 3 meses toma a B como socio con 7000 £ de capital; 4 meses después entra C en la sociedad con 3000 £. Al finalizar el año el beneficio es tal que, por la parte que le corresponde, A debe pagar un impuesto sobre su ganancia (income-tax) de 6 £. Sabiendo que este impuesto es de 6 d. para cada £, hallar el beneficio total obtenido.

579. De dos socios A y B, B ha puesto $1\frac{1}{2}$ veces el capital de A; a los 8 meses B retira la mitad de su capital y dos meses después A retira $\frac{1}{4}$ del suyo. Siendo el beneficio del año de 530 \$, ¿cómo se repartirá?

580. A y B alquilan un potrero por 38 \$. A pone 30 caballos durante 6 meses; B, 20 caballos durante 10 semanas. Obtienen 57 \$ vendiendo pasto, ¿qué parte del alquiler y cuál de la ganancia debe pagar cada uno?

581. Los capitales de A, B y C son proporcionales a los números 2, 3 y 4. Se asocian y obtienen un beneficio de 7200 \$; A puso $\frac{1}{2}$ del capital durante 4 meses; B puso $\frac{1}{3}$ durante 3 meses; C $\frac{1}{4}$ durante 2 meses. La ganancia viene a ser de 20 %. Hallar los capitales respectivos y las ganancias de cada socio.

582. A y B forman una sociedad; A pone $\frac{3}{5}$ de su capital. Al fin del primer año obtienen un beneficio de $3\frac{1}{2}$ por ciento; al fin del segundo obtienen una utilidad de 5 %, y al fin del tercero quiebran y sólo pagan la mitad de la deuda. El dinero que poseen entonces es 16663 $\frac{1}{2}$ \$. ¿con cuánto debe contribuir cada socio?

583. A, B y C alquilan un prado por un año. A pone 500 ovejas durante la primera mitad del año; B, 750 durante la segunda mitad y C, 400 durante todo el año. El pasto se desarrolla dos veces más en la segunda mitad del año que en la primera. Determinar: 1.º, qué parte del alquiler deben pagar A, B y C; 2.º, qué parte debe pagar A, B y C cuando la parte de C es, 21 \$ más que la de A.

584. Dos personas se asocian, la segunda tiene un sueldo como encargado del negocio. A pone 30000 \$ y B 18000 \$. Las ganancias en el año son 11200 \$ de los cuales $\frac{1}{7}$ se invierten en gastos y 5 % en seguros. La primera persona recibe 5000 \$ por su parte de beneficio, ¿cuánto se le paga a B como sueldo por su trabajo?

585. Tres negociantes constituyeron una sociedad el 1.º de enero de 1890, y convinieron en acumular los beneficios durante 10 años. El primero cooperó con la quinta parte del capital y 1000 £ más; el segundo con $\frac{1}{4}$ del capital y el tercero con $\frac{1}{2}$ del capital. El primero retiró su capital el 31 de diciembre 1896, el segundo el suyo el 30 de junio 1898. ¿Cómo se repartirá el beneficio de 35500 £, obtenido en los 10 años y cuál era el capital?

§ 5. — MEZCLAS Y ALIGACIONES

195. Definiciones. — Llámase **media aritmética** entre dos cantidades o números, a la semisuma de ellos. La media aritmética entre varias cantidades es el cociente de la suma de ellas, dividida por el número de las mismas. Así, la media aritmética de los

números a y b es $\frac{a + b}{2}$; la media aritmética entre las cantidades

a, b, c, d , es $\frac{a + b + c + d}{4}$.

Llámase **mezcla** la reunión de dos o más sustancias en proporciones cualesquiera y conservando cada una su propia naturaleza. **Aleación**, como ya hemos visto, es la mezcla que se obtiene de la fusión de dos o más metales.

Llámase **precio** de una sustancia, la razón entre su valor o costo total y la cantidad de la misma; expresadas ambas cantidades en base a unidades determinadas.

Hemos ya indicado lo que se llama ley de la aleación.

La **regla de aligación** tiene por objeto resolver estos dos problemas:

1.º *Hallar el precio de una mezcla, conociendo las cantidades mezcladas y sus precios respectivos;*

2.º *Hallar las cantidades que deben mezclarse de dos o más sustancias cuyos precios conocemos para que la mezcla resulte a un precio dado.*

El primer problema suele llamarse **regla de aligación directa**, el segundo **regla de aligación inversa**.

196. Regla de aligación directa. — Sean $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_n$ los números que expresan las cantidades mezcladas en base a una unidad establecida.

El costo c de la cantidad obtenida en la mezcla es igual a $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n$.

Si llamamos respectivamente $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ los números que expresan los precios de las sustancias mezcladas en base a una unidad dada, el costo de la mezcla sería $c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + \dots + c_n p_n$.

Si llamamos p al precio de la mezcla, se debe tener:

$$cp = c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 + \dots + c_n p_n$$

$$p = \frac{c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 + \dots + c_n p_n}{c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n}$$

p indica el precio, en base a la unidad monetaria adoptada al expresar $p_1, p_2, p_3, \dots$, de la unidad a que se refiere $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$.

Luego: *El precio de la mezcla se obtiene sumando los valores de las cantidades mezcladas y dividiendo esta suma por la de dichas cantidades; es la media aritmética de los valores de los componentes.*

Ejemplo 1º. — *Un negociante de vinos ha mezclado 150 litros de vino de 0,45 pesos el litro con 40 litros de vino de 0,60 pesos el litro, y 60 litros de vino de 0,50 pesos el litro, ¿cuál es el precio del litro de la mezcla?*

Aquí la unidad monetaria es el peso y la de capacidad el litro:
 $c_1 = 150, \quad c_2 = 40, \quad c_3 = 60, \quad p_1 = 0,45, \quad p_2 = 0,60, \quad p_3 = 0,50,$
 $c = 150 + 40 + 60 = 250$

$$p = \frac{150 \times 0,45 + 40 \times 0,60 + 60 \times 0,50}{250} = 0,486.$$

Por lo tanto, el precio del litro de la mezcla es 0,486 \$.

Ejemplo 2º. — *Un persona posee 220 litros de vino que cuesta 0,60 pesos el litro, ¿cuánta agua debe agregar para obtener una mezcla de 0,50 pesos el litro?*

Aquí conocemos

$p = 0,50, \quad c_1 = 220, \quad c_2 = x, \quad p_1 = 0,60, \quad p_2 = 0,$
 pues suponemos que el agua no se paga.

$$0,50 = \frac{220 \times 0,60}{x + 220} \quad \therefore \quad x + 220 = \frac{220 \times 0,60}{0,50} = 264$$

$$\therefore \quad x = 264 - 220 = 44.$$

Habrà, por consiguiente, que agregar 44 litros de agua.

197. Regla de aligación inversa. — Consideremos una mezcla de dos substancias.

Las fórmulas halladas anteriormente: $cp = c_1p_1 + c_2p_2$,
 $c = c_1 + c_2$, conducen a esta otra:

$$(c_1 + c_2)p = c_1p_1 + c_2p_2,$$

o también

$$c_1p + c_2p = c_1p_1 + c_2p_2,$$

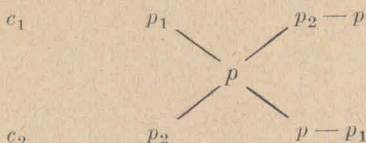
o también, suponiendo $p_2 > p_1$:

$$c_1(p - p_1) = c_2(p_2 - p),$$

∴

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{p_2 - p}{p - p_1}.$$

198. Generalmente se dispone la operación así:



La razón $\frac{p_2 - p}{p - p_1}$ es la que debe existir entre las cantidades de substancia de p_2 y de p_1 .

Es decir, que las cantidades de dos substancias mezcladas son inversamente proporcionales a las diferencias entre sus precios respectivos y el de la mezcla.

El ejemplo siguiente justifica también esa regla:

Ejemplo 1.º — ¿En qué proporción debe mezclarse vino de 0,45 pesos el litro con vino de 0,37 pesos el litro, para poder vender el litro de la mezcla a 0,40 pesos.

Tomando un litro de 0,45 pesos, se perderá, al vender un litro de la mezcla:

$$0,45 - 0,40 = 0,05,$$

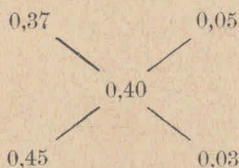
pero, para cada litro a 0,37 pesos se ganará

$$0,40 - 0,37 = 0,03.$$

Luego, tomando 5 litros de 0,37 pesos se ganará $0,03 \times 5 = 0,15$ pesos, pero tomando 3 litros a 0,45 pesos se perderá $0,05 \times 3 = 0,15$

pesos. Luego el beneficio iguala la pérdida y la mezcla debe efectuarse en la proporción de 3 litros de vino de 0,45 pesos por 5 litros de vino de 0,37 pesos. La razón así obtenida, $\frac{3}{5}$, es precisamente inversa de la existente entre las diferencias 0,45 — 0,40 y 0,40 — 0,37 del precio entre cada clase de vino y el precio del litro de la mezcla.

199. Usando la disposición indicada más arriba tendremos:



$\frac{0,05}{0,03} = \frac{5}{3}$ es la razón entre las cantidades de vino de 0,37 y de 0,45.

Como se ve, los problemas de esta especie son generalmente indeterminados, pues sólo nos permiten hallar la razón entre las cantidades a mezclar.

Para hacerlos determinados sería menester conocer también la cantidad de una de las sustancias a mezclar o la cantidad que debe resultar de la mezcla.

Ejemplo 2.º — *¿Qué cantidad de agua deberemos mezclar con 40 litros de vino de 0,80 pesos el litro para que la mezcla resulte de 0,50 pesos el litro?*

Representando por x el número de litros de agua a mezclar tendremos, según la regla enunciada:

$$\frac{x}{40} = \frac{0,80 - 0,50}{0,50 - 0} = \frac{3}{5} \quad \therefore \quad x = \frac{40 \times 3}{5} = 24.$$

Debe, pues, mezclarse 24 litros de agua con 40 de vino.

Ejemplo 3.º — *¿Qué cantidad de oro de ley 0,800, deberemos alejar con otro de ley 0,950 para que resulten 2 kilogramos de una aleación cuya ley sea 0,900?*

Representemos por x e y los números de kilogramos de oro de cada clase a mezclar, tendremos

$$\frac{x}{y} = \frac{0,950 - 0,900}{0,900 - 0,800} = \frac{1}{2}.$$

Luego debemos repartir 2 kilogramos en diez partes que están en la razón de 1 a 2; se tiene

$$\frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+2} \quad \therefore \quad \frac{x}{2} = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad x = \frac{2}{3} \text{ kg.} = 0,667 \text{ kg.}$$

$$\therefore \quad y = \frac{4}{3} \text{ kg.} = 1,333 \text{ kg.}$$

Cuando las sustancias a mezclar sean más de dos, se va comparando las sustancias dadas de dos en dos, de modo que entre los precios de cada par, quede comprendido el de la mezcla; aunque, para ello, sea necesario comparar una sustancia dada dos o más veces.

Ejemplo: *Se tienen lingotes de plata de 0,720, de 0,850 de 0,950, de 0,600, y uno de plata pura, ¿en qué proporción deberán alearse para que resulte plata cuya ley sea 0,900?*

	Ley de los lingotes	Ley de la aleación	Cantidad
1.º	720		50
2.º	850		50
3.º	950	900	180 + 50
4.º	600		100
5.º	1000		300

Comparando 1.º a 3.º, cuyas leyes comprenden la ley de la aleación, encontraremos como razón 50 : 180; comparando 2.º con 3.º encontramos 50 : 50; por último, comparando 4.º con 5.º obtenemos la razón 100 : 300. Luego debe alearse 50 unidades ponderables de 1.º, con 50 de 2.º, con 230 de 3.º, 100 de 4.º, 300 de 5.º.

Es decir que los pesos de los lingotes diversos a alearse en el orden indicado deben ser proporcionales a los números 50, 50, 230, 100 y 300.

Pero, podría haberse hecho la comparación en otro orden y por lo tanto el problema tiene diversas soluciones.

EJERCICIOS

586. Calcular el precio medio del litro de una mezcla compuesta de volúmenes iguales de vino de 0,70 \$ y de 0,80 \$ el litro.

587. Un almacenero mezcla 30 kg. de café de 2,80 \$ con kg. de café de 2,05 \$, ¿cuál es el precio medio del kg. de la mezcla?

588. En una familia se han hecho los gastos siguientes: enero, 460,50 \$; febrero 375,10; marzo 296,25 \$; abril 318,30 \$; mayo 275,50 \$; junio 436,40 \$; julio 310,05 \$; agosto 217,10 \$; septiembre 358,25 \$; octubre 302,15 \$; noviembre 247, 50 \$; diciembre 317,20 \$. Se pide: 1.º ¿cuál es el gasto medio mensual, semanal y diario? 2.º ¿qué economía ha realizado la familia sabiendo que sus recursos son 4800 \$ anuales?

589. Con vino de 0,90 \$ y de 0,76 \$ el litro, formar una mezcla de 336 litros a 0,80 \$ el litro.

590. Se han mezclado 60 litros de 0,50 \$ el litro con 80 litros de vino de 0,65 \$ y con 16 litros de agua, ¿cuánto vale el litro de la mezcla?

591. ¿Cuánta agua hay que agregar a 448 litros de vino de 1,20 \$ el litro para poder rebajar el precio hasta 0,75 y ganar aún 0,05 \$ por litro?

592. Un tonel de 228 litros de capacidad contiene 198 litros de vino que cuesta 120 \$. Se concluye de llenar el tonel con agua, luego se quita 15 litros de la mezcla y se reemplaza por agua, ¿qué cantidad de vino queda en un litro de la mezcla y cuál es el precio del litro de éste?

593. ¿Qué volumen de alcohol a 80° debe mezclarse con 108 litros de alcohol a 90° para obtener alcohol a 84°?

594. ¿Cuántos hectolitros de granos de a \$ el hl. debe mezclarse con n hl. de granos de b \$ el hl. para que el precio medio de la mezcla sea de c \$ el hl.

595. Una disolución de carbonato de potasio contiene 14 % de su peso en sal y pesa 228 kg., ¿cuánta agua debe agregarse para que sólo encierre 9 % de sal?

596. Un negociante tiene vino de 2 \$ el litro y de 1,60 \$ el litro, ¿cuántos litros de vino de la calidad inferior debe mezclar con 580 litros de la primera calidad, de tal manera que agregando a esta mezcla 5 % de agua se obtenga una mezcla definitiva de 1,80 \$ el litro.

597. ¿Cuántos litros de vino de b \$ debe mezclarse con m litros de a \$ para que, agregando a esta primera mezcla p por % de agua se forme una mezcla definitiva cuyo precio por litro sea de c \$? Determinar las condiciones de posibilidad.

598. Formar una mezcla de 360 litros con vino de 1,65 \$, de 1,50 \$, de 1,10 \$ y de 0,95 \$, de manera que un litro de la mezcla cueste 1,20 \$.

599. Hacer una mezcla de 3000 kg. de una mercadería cuyo precio medio será 0,82 el kg. con 3 calidades al precio de 0,70 \$, 0,80 \$ y 0,90 \$ el kg.

600. Se funde juntos un lingote de oro de 840 g., de ley 0,900, y otro de 720 g., de ley 0,835, ¿cuál es la ley de la nueva aleación?

601. Se tienen dos lingotes de oro, la ley del primero es 0,840 y la del otro de 0,750, ¿cuál es la razón entre los pesos que debe tomarse de ambos

lingotes para obtener una aleación nueva cuya ley sea 0,800?, ¿cuáles son esos pesos si se desea que la aleación pese 3600 gramos?

602. Un lingote se compone de 370 g. de oro y 30 g. de plata; otro tiene 252 g. de oro y 48 g. de plata. Quiere formarse con ellos una aleación conteniendo 459 g. de oro y 51 g. de plata, ¿cómo hacer?

603. Un lingote de oro y de cobre, de ley 0,850, pesa 8700 g., quiere *afinarse*, es decir, aumentarse su ley hasta 0,900; en este caso, ¿cuánto oro puro debe agregarse o cuánto cobre debe quitarse? Generalizar la cuestión.

604. Dado un lingote de 5 kg., de ley 0,945, quiere *rebajarse* su ley reduciéndola a 0,900, ¿cuánto oro debe quitarse o cuanto cobre agregarse? Generalizar la cuestión.

605. Se tiene dos clases de vinos; el hectolitro de la primera puede ser vendida al precio de 93,25 \$, pagadero en 80 días; el hectolitro de la segunda al precio de 65,50 \$ pagadero en 30 días, ¿cuánto debe tomarse de cada uno de ellos para formar una mezcla de 105 hl. pudiendo ser vendido sin ganancia ni pérdida a 75,20 \$ el hectolitro, pagadero a los 90 días. El tanto del descuento es 6 % anual.

606.Cuál es la ley de un lingote de una aleación de plata y cobre formada por la fusión de cinco lingotes cuyos pesos y leyes son los siguientes:

Un lingote de	17,525 kg.	de peso y	0,980	de ley.
"	6,125	"	0,910	"
"	3,005	"	0,820	"
"	10,300	"	0,850	"
"	9,900	"	0,870	"

Se pide también qué cantidad total de cobre habrá que agregar para que la ley de la aleación resulte ser 0,835.

607. En una casa de monedas se ha acuñado monedas de plata por un valor de 1000000 fr.; con los $\frac{19}{20}$ de esta fabricación se ha acuñado monedas de 5 fr. con ley de 0,900; lo restante es empleado en otras piezas de ley de 0,835. Se pide: 1.º, el peso de la plata pura empleada; 2.º, el importe de los gastos de fabricación de las monedas de 5 fr. siendo la tarifa de 1,50 £ el kg. de plata acuñada.

608. Se tiene una suma de 500 fr. en monedas de 5 fr. de plata. Añadiendo cierta cantidad de cobre, se consigue, por medio de la fusión, allear estas piezas con ley de 0,835 y se acuña piezas de 0,50 fr. ¿De cuánto la suma primitiva ha sido aumentada y cuánto cobre se ha agregado?, ¿cuántas piezas se pueden acuñar?

609. Se tiene 25 barricas de vino de 228 litros cada una; este vino acusa 10 grados de alcohol. 1.º, ¿cuánto alcohol de 90 grados debe agregarse para obtener un vino acusando 14 grados? 2.º, si el vino vale 35,50 \$ el hectolitro y el alcohol empleado 3,20 \$ el litro, ¿cuál es el precio de hectolitro de la nueva mezcla? (El grado de alcohol de un mezcla indica la cantidad de alcohol en volumen que entra en cien partes de dicha mezcla).

610. Se tiene dos clases de vino; el hectolitro de la primera clase debe venderse al precio de 78,50 \$, pagadero a 90 días; el hl. del segundo es avaluado a 63,25 \$, pagadero a 150 días, ¿cuánto debe tomarse de cada clase para obtener 87 hl. de una mezcla que puede cederse sin pérdida ni ganan-

cía al precio de 70,45 \$ el hectolitro, pagadero a seis meses? Descuento comercial.

611. La aleación usada para la fabricación de campanas se compone de 8 partes de cobre y 2 de estaño. El cobre vale 4,75 \$ el kg. y el estaño 3,25 \$. Los gastos de fabricación y de instalación importan el 10 % del precio del material, ¿qué suma gastará un municipio para adquirir una campana pesando 1345 kg.?

612. Se tienen dos lingotes de oro: el primero cuya ley es de 0,900, pesa 820 g. menos que el otro cuya ley es de 0,850, ¿qué peso tendrá cada uno, sabiendo que el segundo vale 1693,441 \$ más que el primero? Se despreciará el peso del cobre. El gramo de oro monetario cuya ley es 0,900 vale 3,10 fr., y los gastos de fabricación, cuyo importe es de 6,70 fr. cada kilogramo de oro a la ley 0,900, varían proporcionalmente a la ley.

613. Una aleación de oro y de cobre, cuya ley es de 0,910 pesa 4 veces más que otra aleación cuya ley es de 0,860; por otra parte, el valor del primero es mayor que el del segundo en 2866,458 \$. Se sabe que el kg. de oro puro cuesta 3437 \$ y que el valor de la aleación se reduce a la del oro puro que contiene. Hallar el peso de cada una de esas dos aleaciones y la ley del lingote resultante de la fusión de ellos.

CAPÍTULO X

OPERACIONES INVERSAS DE LA POTENCIACIÓN

200. Repaso de la potenciación. — En el Vol. I (n.^{os} 113 a 119, págs. 57 a 62) hemos hablado de la potenciación. Vamos a recordar lo esencial de lo allí expuesto.

Comenzaremos considerando números enteros.

Sea la operación:

$$a \times a \times a \times a \times a \times \dots$$

que expresa que debe reunirse a colecciones cada una de a unidades, y luego reunir otra vez a de las colecciones así obtenidas y así sucesivamente. Una operación así encarada está determinada dando el número a de unidades del conjunto primitivo y el número n de factores. El conjunto final obtenido se dice la **potencia** enésima del conjunto a , llamado **base**. El número n es el **exponente**.

Si la potencia tiene b unidades, se escribirá, convencionalmente

$$a^n = b$$

201. La segunda potencia se dice **cuadrado**, la tercera, **cubo**; la operación misma es la **potenciación**. Como caso particular de la multiplicación es una operación uniforme; no es conmutativa en el sentido de que no es igual a^b que b^a . Así $2^3 = 8$ mientras que $3^2 = 9$.

202. Si consideramos la expresión $(a.b)^n$, significa $a.b \times a.b \times a.b \times \dots$ (n veces); y atento a las propiedades conmutativas y distributivas de la multiplicación podremos escribir $(a.b)^n \equiv a.a.a \dots \times b.b.b.b \dots \equiv a^n.b^n$, de modo que

$$(a.b)^n \equiv a^n.b^n$$

y análogamente

$$(a.b.c.d \dots)^n \equiv a^n.b^n.c^n.d^n \dots$$

Lo mismo se tiene

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \equiv \frac{a^n}{b^n}$$

lo que se expresa diciendo que: *la potenciación es una operación distributiva respecto de la multiplicación y de la división (propiedad distributiva para diferentes bases).*

203. Pero *no es completamente distributiva* porque, para que lo fuese, sería menester que se tuviese $n^a \times b \equiv n^a \times n^b$, o que $\frac{n^a}{n^b} \equiv \frac{n^a}{n^b}$, lo que no es exacto debido a que la potenciación no es conmutativa, por ejemplo $3^1 \times 2 = 9$ y $3^1 \times 3^2 = 27$.

204. Consideremos la expresión $a^m \times a^n$.

Significa:

$a \times a \times a \times a \times \dots$ (m veces) $\times a \times a \times a \times \dots$ (n veces)
es decir

$$a \times a \times a \times a \times \dots [(m+n) \text{ veces}]$$

o sea

$$a^{m+n}$$

Lo mismo se verá que

$$a^m \times a^n \times a^p \times a^q \times \dots \equiv a^{m+n+p+q+\dots}$$

(Propiedad distributiva para una misma base).

Luego, *para multiplicar varias potencias de una misma base, se eleva dicha base común a una potencia igual a la suma de las potencias de los factores.*

Si se tratase de la operación:

$$\frac{a^m}{a^n}$$

se comprobará, análogamente, que es igual a a^{m-n} (pues $a^{m-n} \times a^n \equiv a^m$) es decir que para dividir dos potencias de una misma base, se eleva dicha base común a una potencia que sea la diferencia entre la del dividendo y la del divisor.

205. Sea $(a^m)^n$, tendremos

$$(a^m)^n \equiv a^m \times a^m \times a^m \times \dots \quad (n \text{ veces}) \\ \equiv a^{m+m+m+\dots} \quad (n \text{ veces}) = a^{mn}$$

(Propiedad asociativa).

206. Observaciones. — a) El exponente de una potencia puede ser otra potencia. Así

$$a^{(bc)}$$

Hay que tener cuidado de no confundir esta expresión con esta otra:

$$(a^b)^c = a^{bc}.$$

b) Una potencia de 10 puede representarse por 1 seguido de tantos ceros como indica el exponente:

$$\text{Así, } 10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000.$$

Como la unidad de orden p , es escribe 1 seguido de $p-1$ ceros, aquella unidad puede representarse así:

$$10^{p-1}.$$

Por consiguiente, un número n que tiene p cifras, $a, b, c, \dots, k, l$, leídos de izquierda a derecha, podrá expresarse así:

$$n = a10^{p-1} + b10^{p-2} + c10^{p-3} + \dots + k10 + l.$$

c) Es evidente que, para cualquier número n , se tiene: $0^n = 0$, $1^n = 1$.

d) Si $a > b$, resulta $a^n > b^n$.

e) Si $p > q$, resulta $a^p > a^q$.

f) Si en la expresión $\frac{a^m}{a^n} \equiv a^{m-n}$ fuese $m = n$ o $m < n$, el cociente

a^{m-n} carecería de sentido, pero como entonces tendríamos respectivamente

$$\frac{a^m}{a^m} = 1; \quad \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m a^p} = \frac{1}{a^p}$$

llegamos a la conclusión de que:

Si se quiere conservar las reglas del cálculo relativo a la división de dos potencias de una misma base, debe establecerse que las

expresiones a^0 y a^{-n} significarán, convencionalmente, 1 y $\frac{1}{a^n}$.

La expresión $\frac{1}{a^n}$ como cantidad fraccionaria ha sido ya interpretada.

Y cabe observar que si, como vimos antes, se conviene en que $\frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} \equiv \frac{1}{a^{m+n}} \equiv a^{-m-n}$, entonces este último resultado puede obtenerse directamente escribiendo los factores en la forma a^{-m} , a^{-n} pues entonces

$$a^{-m} \times a^{-n} \equiv a^{-m-n}$$

de modo que, desde el punto de vista del mecanismo del cálculo, se puede conservar las reglas establecidas para los productos de potencias de misma base aun en el caso de que se empleen símbolos con exponentes afectados del signo — delante. Como es a veces más cómodo escribir a^{-n} que $\frac{1}{a^n}$, las ventajas de esos exponentes afectados del signo — quedan, desde ese punto de vista, bien establecidas.

g) Tenemos, evidentemente, que

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right)^m \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{c}{d}\right)^m$$

y lo mismo

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^m \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{c}{d}\right)^m$$

h) El módulo de la potenciación es el número 1 ya que, en general, la única potencia de un número cualquiera que lo reproduce es 1.

207. Cuadrado y cubo de una suma indicada. — Multiplicando $(a + b)$ por sí mismo, se obtiene

$$a^2 + 2ab + b^2.$$

Tenemos, pues, la identidad

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{a)}$$

Análogamente se obtiene

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &\equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \text{b)} \\ &\equiv a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \end{aligned}$$

como casos particulares, sacamos:

$$\begin{aligned}(a+1)^2 &\equiv a^2 + 2a + 1 & \text{c)} \\ (a+1)^3 &\equiv a^3 + 3a^2 + 3a + 1; & \text{d)}\end{aligned}$$

o también:

$$\begin{aligned}(a+1)^2 - a^2 &\equiv 2a + 1 \equiv a + (a+1) & \text{e)} \\ (a+1)^3 - a^3 &\equiv 3a^2 + 3a + 1 & \text{f)}\end{aligned}$$

Igualmente se obtiene:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &\equiv a^2 - b^2 & \text{g)} \\ (a-b)^2 &\equiv a^2 - 2ab + b^2 & \text{h)}\end{aligned}$$

Puede comprobarse fácilmente que

$$(a+b)^2 \equiv (a-b)^2 + 4ab.$$

Si $a+b=s$, $a-b=d$ y $p=ab$, la identidad anterior se podrá escribir así:

$$s^2 \equiv d^2 + 4p. \quad \text{i)}$$

Por último:

$$(a-b)^3 \equiv a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{j)}$$

208. Todas estas consecuencias se enuncian abreviadamente así:

a) *El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero; más el doble producto del primero por el segundo; más el cuadrado del segundo.*

b) *El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero; más el triplo del producto del cuadrado del primero por el segundo; más el triplo del producto del cuadrado del segundo por el primero; más el cubo del segundo.*

O también:

El cubo de la suma de dos números es igual a la suma de los cubos de esos dos números, aumentada de tres veces el producto de su suma por su producto.

c) *El cuadrado de un entero es igual al del anterior en la serie natural más dos veces este último, más uno.*

d) *El cubo de un entero es igual al cubo del que le precede en la serie natural, más tres veces el cuadrado de este último, más tres veces ese mismo, más uno.*

e) *La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos, es igual al duplo del menor, más uno; o también, a la suma de esos números.*

f) *La diferencia entre los cubos de dos números consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo del menor, más uno.*

g) *El producto de la suma de dos números, por la diferencia de las mismas es igual a la diferencia entre los cuadrados de dichos números.*

h) *El cuadrado de la diferencia de dos números, es igual al cuadrado del primero menos el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.*

Ejemplos numéricos:

$$\text{a) } 13^2 = (10 + 3)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 3 + 3^2 = 100 + 60 + 9 = 169$$

lo que puede también enunciarse diciendo que el cuadrado de un número compuesto de decenas y de unidades, es igual al cuadrado de las decenas, más dos veces el producto de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades.

$$\begin{aligned} \text{b) } 12^3 &= (10 + 2)^3 = 10^3 + 2^3 + 3 \times (10 \times 2) \times (10 + 2) \\ &= 1000 + 8 + 60 \times 12 \\ &= 1000 + 8 + 720 = 1728. \end{aligned}$$

$$\text{c) } 4^2 = 3^2 + 2 \times 3 + 1$$

$$\text{d) } 5^3 = 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1$$

$$\text{e) } 6^2 - 5^2 = 2 \times 5 + 1 = 6 + 5$$

$$\text{f) } 6^3 - 5^3 = 3 \times 5^2 + 3 \times 5 + 1$$

$$\text{g) } (7 + 3)(7 - 3) = 7^2 - 3^2$$

$$\text{h) } (7 - 3)^2 = 7^2 - 3 \times 7 \times 3 + 3^2$$

$$\text{i) } (5 + 2)^2 = (5 - 2)^2 + 4 \times 5 \times 2$$

$$\text{j) } (7 - 2)^3 = 7^3 - 3 \times 7^2 \times 2 + 3 \times 7 \times 2^2 - 2^3.$$

209. Todo lo anterior se refiere a números enteros, pero vimos (Vol. I, n.º 265, pág. 143) que si $\frac{a}{b}$ es un número fraccionario, se tiene también:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \equiv \frac{a^m}{b^m}$$

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right)^m \equiv \left(\frac{ac}{bd}\right)^m \equiv \frac{a^m c^m}{b^m d^m} = \frac{a^m}{b^m} \cdot \frac{c^m}{d^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m.$$

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^m \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{c}{d}\right)^m.$$

Cuando un entero no es potencia de otro entero tampoco lo es de un fraccionario, porque la potencia de un número fraccionario irreducible es otro número fraccionario irreducible; y recíprocamente.

Cuando un número fraccionario irreducible es potencia de otro, sus dos términos son potencias exactas; y recíprocamente.

Los números mixtos pueden potenciarse como sumas. Así:

$$\left(4\frac{1}{3}\right)^2 = \left(4 + \frac{1}{3}\right)^2 = 4^2 + 2 \times 4 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

210. Práctica de la potenciación en el sistema decimal. — a) Cuadrados. — 1.º Cuadrado de un dígito. — Los cuadrados de los dígitos se encuentran en la tabla de multiplicación y tenemos:

<i>Dígitos</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Cuadrados de los dígitos</i> ...	1	4	9	16	25	36	49	64	81

2.º Cuadrado de una potencia de diez. — Hemos visto que para multiplicar un número por 10 basta agregarle un cero a la derecha. Luego:

$$10^2 = 100, (100)^2 = 100 \times 100 = 100 \times 10 \times 10 = 1000 \times 10 = 10000;$$

de igual manera

$$1000^2 = 1000000.$$

Luego: *El cuadrado de un número representado por 1 seguido de ceros se representa escribiendo 1 seguido de un número doble de ceros.*

3.º Cuadrado de un número representado por un dígito seguido de ceros. — Sea el número 4000. Tenemos:

$$4000 = 4 \times 1000; (4 \times 1000)^2 = 4^2 \times (1000)^2 \text{ (n.º 202).}$$

Según las reglas anteriores tendremos entonces:

$$(4000)^2 = 16 \times 1000000 = 16000000.$$

Luego: *El cuadrado de un número representado por un dígito seguido de ceros, se obtiene escribiendo, a la derecha del cuadrado del dígito, un número de ceros doble del que tiene el número dado.*

4.º Cuadrado de un número de dos cifras cualesquiera. — Sea el número 32. Tenemos: $32 = 30 + 2$. Pero del n.º 207 resulta:

$$32^2 = (30 + 2)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 2 + 2^2,$$

y de acuerdo a los casos anteriores tenemos:

$$30^2 = 900, \quad 2^2 = 4.$$

Luego

$$32^2 = 900 + 120 + 4 = 1024.$$

Podemos por consiguiente decir:

El cuadrado de un número de dos cifras es igual al cuadrado de las decenas más el duplo del producto de las decenas por las unidades más el cuadrado de las unidades.

5.º Cuadrado de un número cualquiera. — Sea el número 318. Tenemos:

$$318 = 310 + 8$$

y según el n.º 207:

$$318^2 = (310 + 8)^2 = (310)^2 + 2 \times 310 \times 8 + 8^2.$$

Pero

$$310 = 31 \times 10,$$

luego

$$310^2 = 31^2 \times 10^2 = 31^2 \times 100.$$

Como se ve, el cuadrado del número dado depende ahora del del número 31, que tiene una cifra menos que aquél; y siguiendo de esta manera queda reducido al caso 4.º. Así:

$$\begin{aligned} 2437^2 &= (2430 + 7)^2 = 2430^2 + 2 \times 2430 \times 7 + 7^2 \\ &= 243^2 \times 100 + 2 \times 2430 \times 7 + 7^2 \\ &= (240 + 3)^2 \times 100 + 2 \times 2430 \times 7 + 7^2 \\ &= (24^2 \times 100 + 2 \times 240 \times 3 + 3^2)100 + 2 \times \\ &\quad \times 2430 \times 7 + 7^2. \end{aligned}$$

b) **Tabla de cuadrados.**— Lo establecido en el n.º 208 c) permite obtener rápidamente los cuadrados de los números consecutivos. Escribamos la serie natural de los números enteros y, encima, la serie de los números impares de esta manera:

1	3	5	7	9	11	13...
1	2	3	4	5	6	7...

Si se considera un número cualquiera $a + 1$ de la serie 1, 2, 3, 4, ..., fuera del 1, se ve que el número escrito encima es precisamente $2a + 1$. El cuadrado de 1 es 1; el de $2 = 1 + 1$ se obtendrá según el n.º 208 c) agregando a 1 el número impar que está escrito encima y se obtendrá 4. El cuadrado de $3 = 2 + 1$ será igual al de 2 más el número impar escrito encima, esto es, $4 + 5 = 9$, etc. Se ve que el cuadrado de un número cualquiera a es la suma de los a primeros números impares. Así se ha confeccionado la tabla siguiente, que da los cuadrados de los 102 primeros números.

Tabla de cuadrados

Números	Cuadrados	Números	Cuadrados	Números	Cuadrados	Números	Cuadrados	Números	Cuadrados	Números	Cuadrados
1	1	18	324	35	1225	52	2704	69	4761	86	7396
2	4	19	361	36	1296	53	2809	70	4900	87	7569
3	9	20	400	37	1369	54	2916	71	5041	88	7744
4	16	21	441	38	1444	55	3025	72	5184	89	7921
5	25	22	484	39	1521	56	3136	73	5329	90	8100
6	36	23	529	40	1600	57	3249	74	5476	91	8281
7	49	24	576	41	1681	58	3364	75	5625	92	8464
8	64	25	625	42	1764	59	3481	76	5776	93	8649
9	81	26	676	43	1849	60	3600	77	5929	94	8836
10	100	27	729	44	1936	61	3721	78	6084	95	9025
11	121	28	784	45	2025	62	3844	79	6241	96	9216
12	144	29	841	46	2116	63	3969	80	6400	97	9409
13	169	30	900	47	2209	64	4096	81	6561	98	9604
14	196	31	961	48	2304	65	4225	82	6724	99	9801
15	225	32	1024	49	2401	66	4356	83	6889	100	10000
16	256	33	1089	50	2500	67	4489	84	7056	101	10201
17	289	34	1156	51	2601	68	4624	85	7225	102	10404

Observando esta tabla se comprueba que los cuadrados de los números aumentan rápidamente en valor. Los cuadrados escritos en ella expresan números llamados **cuadrados perfectos**; los números comprendidos entre éstos no son cuadrados perfectos y no tienen, por consiguiente, raíz cuadrada exacta.

c) **Cubos.** — 1.º **Cubo de dígitos.** — Efectuando las multiplicaciones se obtienen como cubos de los dígitos, los siguientes números:

<i>Dígitos</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Cubos</i>	1	8	27	64	125	216	343	512	729

2.º **Cubo de potencias de 10.** — De lo dicho en el n.º 27 (Vol. I, pág. 16), resulta que para elevar al cubo una potencia de 10 se escribe a la derecha del número 1 tres veces tantos ceros cuantos tiene el número dado. Así:

$$10^3 = 10^2 \times 10 = 100 \times 10 = 1000$$

$$100^3 = 100^2 \times 100 = 10000 \times 100 = 1000000.$$

3.º **Cubo de un número representado por un dígito seguido de ceros.** — Tenemos que, por ejemplo:

$$400^3 = (4 \times 100)^3 = 4^3 \times 100^3 = 64 \times 1000000 \\ = 64000000$$

$$500^3 = 5^3 \times 100^3 = 125000000; \text{ etc.}$$

Luego, para obtener el cubo, basta elevar a esta potencia el dígito y agregarle a su izquierda tres veces más ceros que los que tiene el número dado.

4.º **Cubo de un número de dos cifras.** — Sea el número 34, tenemos según el n.º 208 b):

$$34^3 = (30 + 4)^3 = 30^3 + 3 \times 30^2 \times 4 + 3 \times 30 \times 4^2 + 4^3 \\ = 2700 + 3 \times 900 \times 4 + 3 \times 30 \times 16 + 64.$$

Luego: *El cubo de un número de dos cifras se obtiene sumando al cubo de las decenas, el triplo del cuadrado de las decenas multiplicado por las unidades, más el triplo del producto de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades.*

5.º **Cubo de un número cualquiera.** — Sea el número 327. Tenemos:

$$327 = 320 + 7.$$

Luego

$$327^3 = 320^3 + 3 \times 320^2 \times 7 + 3 \times 320 \times 7^2 + 7^3.$$

Pero

$$320 = 32 \times 10,$$

luego

$$320^3 = 32^3 \times 10^3.$$

Como se ve, el cubo del número buscado depende del de otro que tiene una cifra menos, de suerte que, en resumen, podrá ese cubo hacerse depender del cubo de un número de dos cifras (caso 4.º).

Para elevar al cubo un número, se puede, de varias maneras, descomponer éste en la suma de otros dos de menos cifras, facilitando así la operación haciéndola depender de la elevación al cubo de números de menos cifras. Por ejemplo para efectuar la operación 34672^3 , podría escribirse

$$34672^3 = (34000 + 762)^3$$

$$34672^3 = (34700 + 62)^3.$$

d) **Tabla de cubos.** — La identidad f establecida en el n.º 208 permite construir fácilmente una tabla de los cubos de los números. Efectivamente, la tabla de los cuadrados permite calcular los valores de $3a^2 + 3a + 1$ reemplazando a por 1, 2, 3, 4, ...

Escribamos los valores de $3a^2 + 3a + 1$ para los nueve primeros números en la forma siguiente:

Valores de $3a^2 + 3a + 1$ 7 19 37 61 91 127 169 217 271 ...

Números 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...
esto es, escribiendo el valor de $3a^2 + 3a + 1$ encima del número siguiente a aquel a que correspondería.

El cubo de 1 es 1; el cubo de 2 se obtiene sumando al de 1 el valor $3a^2 + 3a + 1$ correspondiente a 1, esto es, el número escrito encima de 2, se obtiene 8; el cubo de 3 se obtiene sumando al de 2, esto es a 8, el número escrito encima de 3, se halla 27, y así sucesivamente.

Se ha formado de esta manera el cuadro siguiente que da los cubos de los 102 primeros números:

Tabla de cubos

Números	Cubos	Números	Cubos	Números	Cubos	Números	Cubos	Números	Cubos	Números	Cubos
1	1	18	5832	35	42875	52	140608	69	328509	86	636056
2	8	19	6859	36	46656	53	148877	70	343000	87	658503
3	27	20	8000	37	50653	54	157464	71	357911	88	681472
4	64	21	9261	38	54872	55	166375	72	373248	89	704969
5	125	22	10648	39	59319	56	175616	73	389017	90	729000
6	216	23	12167	40	64000	57	185193	74	405224	91	753571
7	343	24	13824	41	68921	58	195112	75	421875	92	778688
8	512	25	15625	42	74088	59	205379	76	438976	93	804357
9	729	26	17576	43	79507	60	216000	77	456533	94	830584
10	1000	27	19683	44	85184	61	226981	78	474552	95	857375
11	1331	28	21952	45	91125	62	238328	79	493039	96	884736
12	1728	29	24389	46	97336	63	250047	80	512000	97	912673
13	2197	30	27000	47	103823	64	262144	81	531441	98	941192
14	2744	31	29791	48	110592	65	274625	82	551368	99	970299
15	3375	32	32768	49	117649	66	287496	83	571787	100	1000000
16	4096	33	35937	50	125000	67	300763	84	592704	101	1030301
17	4913	34	39304	51	132651	68	314432	85	614125	102	1061203

e) **Cuartas potencias.** — Elevando dos veces a la segunda potencia un número se obtiene la cuarta potencia del mismo. Así:

$$25^4 = 25^2 \times 25^2 = 390625.$$

f) **Potencias superiores.** — De igual manera las potencias superiores de un número pueden reducirse a cuadrados y cubos. Así:

$$276^7 = 276^3 \times 276^3 \times 276 = 276^2 \times 276^2 \times 276^2 \times 276.$$

EJERCICIOS

614. Elevar al cuadrado los números siguientes:

210, 520, 8400, 835, 1204, 14018.

615. Elevar al cubo los números siguientes:

190, 280, 6700, 139, 325, 506007.

616. Hallar dos números consecutivos sabiendo que la diferencia entre sus cuadrados es 27.

617. La diferencia entre los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 28731, hallar esos números.

618. El cuadrado de un número termina en la misma cifra que el cuadrado de sus unidades.

619. Todo número que termina en 2, 3, 7 u 8 no es cuadrado perfecto.

620. Todo número que termina en un cero o en un número impar de ceros no es un cuadrado perfecto.

621. Toda potencia de números terminados en 5 ó 6, termina también en 5 ó 6.

622. ¿Puede terminar en 125 el cuadrado de un número que termina en 5?

623. Sumar los cuadrados de los números 7666, 1298, 570 y 430. Expresar el resultado verbalmente y dividirlo por 6648.

624. Todo cuadrado de un número par es divisible por 4.

625. Todo cuadrado impar disminuído de 1 es un múltiplo de 8.

626. Todo cuadrado de un número impar disminuído de 1 es divisible por 4.

627. Todo cuadrado entero es un múltiplo de 5 ó se vuelve múltiplo de 5 sumando o restándole 1.

628. Todo cuadrado entero es un múltiplo de 3 ó se vuelve tal restándole 1.

629. Si la suma de dos números termina en cero, los cuadrados de dichos números terminan en la misma cifra.

630. La diferencia entre los cubos de dos enteros consecutivos dividida por 6 da por resto 1.

211. **Operaciones inversas de la potenciación.** — Como la potenciación no es una operación conmutativa, da lugar a dos operaciones inversas, una de ellas, llamada *radicación*, consiste en hallar la base de la potencia conociendo a ésta y al exponente. La otra,

llamada *logaritmación*, consiste en determinar el exponente conociendo la potencia y la base.

a) RADICACIÓN

212. Definición. — Según acabamos de ver, esta operación consiste en determinar la base de una potencia conociendo ésta y el exponente. Dadas una colección b y un número a , la extracción de raíces se propone hallar qué colección elevada a la potencia a origina b . Responde, por consiguiente, a la ecuación

$$x^a = b.$$

Carecerá de sentido si no hay colección que elevada a la potencia a origina b .

213. Se indica la operación de esta manera: $\sqrt[a]{b}$, y se lee **raíz a de b** ; el signo $\sqrt{}$ se llama **radical**, la colección b , **subradical**, y el número a se llama el **índice de la raíz**; cuando a es 2 se dice **raíz cuadrada** de b , si es 3 se dice **raíz cúbica** de b , y así se dice sucesivamente **raíz cuarta**, **quinta**, etc., **enésima** de b . Cuando $a = 2$, no se escribe; así, la expresión $\sqrt{9}$ se lee **raíz cuadrada de nueve**.

214. De las definiciones anteriores se deduce que

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Se convendrá que $\sqrt[1]{a} = a$, pues $a^1 = a$ (n.º 113, Vol. I, pág. 58).

215. Propiedades. — La extracción de raíces es, evidentemente, una operación unívoca. No es conmutativa, así, $\sqrt{2} = 2$; $\sqrt[2]{1} = 1$.

De la definición de esta operación y de las propiedades de la elevación a potencias se deducen las siguientes identidades:

216. De distribución:

$$\sqrt[n]{ab} \equiv \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \quad (1)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \equiv \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (2)$$

pues

$$\left(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}\right)^n \equiv \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \equiv ab \text{ (n.º 114, Vol. I, pág. 58).}$$

Luego $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ es la raíz buscada, desde que, elevada a la potencia n , origina la subradical ab .

De la misma manera se demostraría la identidad (2). Ambas fórmulas se expresan diciendo que la extracción de raíces es una operación **distributiva respecto de la multiplicación y de la división**. Pero no es completamente distributiva; por ejemplo:

$$1 \times 2 \sqrt[4]{4} = 2, \text{ y } \sqrt[4]{4} \times \sqrt[2]{4} = 8.$$

217. No es tampoco asociativa en el sentido de que, por ejemplo:

$$\sqrt[2]{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{4} = 2, \text{ y } \sqrt[4]{\sqrt[2]{4}} = \sqrt[4]{2} = 2^{1/4}$$

en tanto que

$$\sqrt[2]{\left(\sqrt[4]{\sqrt[2]{4}}\right)} = \sqrt[4]{4} = 2;$$

pero existen las siguientes propiedades de **asociación**:

$$\left(\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}\right)^q \equiv \sqrt[p]{a^q} \quad (3)$$

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} \equiv \sqrt[pq]{a} \equiv \sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}. \quad (4)$$

Efectivamente

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}\right)^q &\equiv \sqrt[p]{a} \sqrt[p]{a} \sqrt[p]{a} \dots \text{ (q veces)} \equiv \\ &\equiv \sqrt[p]{a \times a \times a \dots \text{ (q veces)}} \text{ [identidad (1)]} \equiv \sqrt[p]{a^q}. \end{aligned}$$

Designemos con la letra b a $\sqrt[pq]{a}$ tendremos:

$$\sqrt[pq]{a} = b$$

∴

$$a = b^{pq} \equiv (b^p)^q$$

∴

$$\sqrt[q]{a} = \sqrt[q]{(b^p)^q} \equiv \left(\sqrt[q]{b^p} \right)^q \equiv b^p$$

∴

$$\sqrt[p/q]{a} = b = \sqrt[pq]{a}$$

y análogamente

$$\sqrt[q/p]{a} \equiv \sqrt[pq]{a}$$

Por último, tenemos también

$$\sqrt[p]{a^q} \equiv \sqrt[np]{a^{nq}} \quad (5)$$

pues si

$$\sqrt[p]{a^q} = b$$

tendremos

$$a^q = b^p$$

∴

$$a^{qn} = b^{pn}$$

∴

$$\sqrt[pn]{a^{qn}} = b \equiv \sqrt[p]{a^q}$$

Tendríamos análogamente:

$$\sqrt[p]{a^q} \equiv \sqrt[n]{a^{\frac{q}{n}}}$$

suponiendo que p y q sean divisibles por n .

218. En todas las identidades anteriores se supone que las expresiones que figuran en ellas tengan sentido, para lo cual basta, evidentemente, que lo tengan los segundos miembros en las identidades (1) y (2), y los primeros en las (3) y (5). En la cuarta, si un miembro tiene sentido, deben necesariamente tenerlo también los otros dos.

Una expresión de la forma $\sqrt[a]{0}$ indica, evidentemente, la ausencia de cantidad; y otra de la forma $\sqrt[0]{a}$, un absurdo o imposibilidad,

puesto que debería tenerse $(\sqrt[0]{a})^0 \equiv a = 1$ (n.º 135, Vol. I, pág. 69).

El símbolo $\sqrt[-a]{b}$ debe interpretarse como $\frac{1}{\sqrt[a]{b}}$, si se quiere mantener

las reglas del cálculo; pues si llamamos x , a $\sqrt[-a]{b}$, tendremos:

$$\sqrt[-a]{b} = x \quad \therefore \quad (\sqrt[-a]{b})^{-a} = x^{-a} = b$$

$$\therefore \quad b = x^{-a} = \frac{1}{x^a} \quad (\text{n.º 206 f}).$$

$$\therefore \quad x^a = \frac{1}{b} \quad \therefore \quad x = \frac{1}{\sqrt[a]{b}}.$$

219. Módulo. — El módulo de la extracción de raíces es *uno*; pues $\sqrt[1]{a} \equiv a$.

220. Otra acepción de la extracción de raíces. — Puede darse otra acepción a esta operación diciendo que, dada una colección b y un número a , se propone hallar dos colecciones x e y tales que se tenga

$$b = x^a + y; \quad (x + 1)^a > b.$$

Si b es una potencia exacta de x , y se hace igual a 0 y caemos en la acepción anterior de la operación.

En esta nueva acepción la extracción de raíces tiene siempre un significado, cualesquiera que sean los datos b y a .

221. Si prescindimos de la noción de colección y sólo consideramos los números, podemos decir que *extraer la raíz n de un número a consiste en hallar otros dos b y r tales que satisfagan a la igualdad*

$$a = b^n + r; \quad (b + 1)^n > a.$$

b) **Logaritmación**

222. Definición. — La elevación a potencias admite, como vimos, otra operación inversa, que es la **logaritmación**. Llámase **logaritmo** de a en la base b (que se escribe $\log_b a$) al exponente de la potencia a que debe elevarse b para obtener a ; se tiene pues la identidad

$$b^{\log_b a} \equiv a.$$

La logaritmación tiene por objeto hallar esos exponentes y responde a la ecuación

$$b^x = a.$$

Este cálculo carecerá de significado si a no es una potencia de b .

223. Propiedades. — Las propiedades de la elevación a potencias conducen a las siguientes identidades:

$$\log_b (pq) \equiv \log_b p + \log_b q \quad (1)$$

$$\log_b \left(\frac{p}{q} \right) \equiv \log_b p - \log_b q \quad (2)$$

$$\log_b (p^m) \equiv m \log_b p \quad (3)$$

$$\log_b \sqrt[m]{p} \equiv \frac{1}{m} \log_b p \quad (4)$$

$$\log_b a \equiv \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad (5)$$

en las que se supone que las operaciones indicadas tienen sentido.

Efectivamente, supongamos que $p = b^m$ y $q = b^n$, entonces

$$pq = b^m b^n = b^{m+n}$$

lo que demuestra la identidad (1).

Supongamos ahora que $\frac{p}{q} = r$, entonces se tendrá

$$p = qr$$

luego

$$\log_b p = \log_b q + \log_b r$$

∴

$$\log_b p - \log_b q = \log_b r = \log_b \left(\frac{p}{q} \right);$$

lo que demuestra la identidad (2).

224. Igualmente

$$p^m = p \cdot p \cdot p \cdot p \dots (m \text{ veces})$$

∴

$\log_b (p^m) = \log_b p + \log_b p + \log_b p + \dots (m \text{ veces}) \equiv m \log_b p$
queda, pues, demostrada la identidad (3).

Supongamos ahora que $\sqrt[m]{p}$ sea igual a r ; se tiene

$$r^m = p$$

∴

$$m \log_b r = \log_b p$$

∴

$$\log_b r = \frac{1}{m} \log_b p$$

∴

$$\log_b \left(\sqrt[m]{p} \right) \equiv \frac{1}{m} \log_b p;$$

queda demostrada así, la identidad (4).

225. Por último, supongamos que $\log_c a = p$, entonces $c^p = a$, supongamos también que $\log_c b = q$, entonces $c^q = b$. Pero podemos escribir en vez de $c^p = a$ y $c^q = b$ respectivamente

$$c^{pq} = a^q \quad \text{y} \quad c^{pq} = b^p.$$

Luego

$$a^q = b^p \quad \therefore \quad \log_b a^q = p \quad \therefore \quad q \log_b a = p;$$

por consiguiente

$$\log_b a = \frac{p}{q} = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

226. Todas las identidades anteriores se enuncian verbalmente de la manera siguiente:

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de misma base de los factores.

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre los logaritmos de misma base del dividendo y del divisor.

El logaritmo de una potencia es igual al logaritmo de misma base de la base de la potencia multiplicado por el exponente de ésta.

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de misma base de la subradical dividido por el índice de la raíz.

El logaritmo de un número en cierta base, es igual al logaritmo del mismo número en otra base, dividido por el logaritmo de la primitiva base tomado en la segunda.

227. Antilogaritmos. — Llámase a veces **antilogaritmo** de c en la base b , al número cuyo logaritmo en la base b es c . Luego si se tiene $b^c = a$, resulta que a es el antilogaritmo de c en la base b . Y podemos escribir:

$$\text{antilog}_b c \equiv b^c = a$$

$$\text{antilog}_b (\log_b a) \equiv \log_b (\text{antilog}_b a) \equiv a.$$

228. Logaritmos de la base del sistema y del número uno. —

Representando, como vimos, las expresiones a^0 y a^1 , respectivamente 1 y a , se deduce que

$$\log_a 1 \equiv 0 \quad (1) \quad \text{y} \quad \log_a a \equiv 1. \quad (2)$$

Esto es, que cualquiera que sea la base de un sistema de logaritmos, el logaritmo de 1 es 0 y el de la base es 1.

229. Módulo. — La fórmula (2) nos hace ver que el módulo del cálculo de logaritmos es el número 1.

230. Rangos de la operaciones. — La adición y la substracción se dicen operaciones de rango primero; la multiplicación y la división se dicen de rango segundo; la potenciación y radicación, de rango tercero.

231. Práctica de la radicación en el sistema decimal.

a) Raíz cuadrada

Teoría. — Recordemos que el problema de hallar la raíz cuadrada de un número a , en su acepción más general, consiste en hallar dos números b y r que respondan a las condiciones

$$a = b^2 + r; \quad (b + 1)^2 > a.$$

1.º **El número es menor que 100.** — Basta recordar los cuadrados de los dígitos y restar del número dado el cuadrado inmediatamente menor que él, se obtendrá así los números b y r . Así, sea el número 57; este número está comprendido (véase pág. 178) entre los números 49 y 64, cuadrados respectivamente de 7 y 8, restando 49 de 57 obtenemos el resto 8. Luego $b = 7$, $r = 8$. Efectivamente

$$57 = 7^2 + 8, \quad 8^2 > 57.$$

2.º **El número es mayor que 100.** — En este caso la raíz b contiene decenas y unidades, luego b^2 contiene el cuadrado de las decenas de b , esto es, un número exacto de centenas, más el doble producto de las decenas por las unidades, esto es, un número exacto de decenas; más el cuadrado de las unidades; agregando a la suma anterior el resto debe obtenerse el número propuesto. De lo anterior resulta que el cuadrado de las decenas de la raíz está contenido en las centenas del número propuesto; *es el mayor cuadrado contenido en las centenas*; efectivamente, supongamos que la raíz cuadrada de a , o sea b , contenga 18 decenas sin alcanzar a tener 19 decenas, entonces a contiene el cuadrado de 18 decenas sin alcanzar a contener el de 19, pero el cuadrado de 18 decenas, esto es, 18^2 decenas, es un número exacto de centenas, y el cuadrado de 19 decenas o sea 19^2 decenas, es también un número exacto de centenas; luego, el número de centenas de a contiene 18^2 sin contener 19^2 . Como se ve, la proposición recién demostrada reduce el problema de hallar las decenas de a , a la investigación de la raíz cuadrada de un número que tiene dos cifras menos que el propuesto.

Supongamos hallado el número de decenas de a en cuestión, fácilmente se obtendrá entonces el de unidades. Efectivamente, sean 18 el número de decenas de b , entonces, a es la suma de cuatro

números, a saber: 1.º, el cuadrado de 180; 2.º, el doble producto de 180 por el número de unidades de b ; 3.º, el cuadrado de este último; 4.º, el resto.

Luego la diferencia $a - 180^2$ viene a ser la suma sólo de los tres últimos sumandos y por lo tanto uno de estos sumandos es el doble producto de 180 por las unidades; luego, si se divide esa diferencia por el duplo de 180 se tiene un cociente que será igual o mayor que la cifra de las unidades de b . El duplo de 180 se obtiene multiplicando por 10 el duplo de 18; sale 36. Para obtener el cociente de $a - 180^2$ dividido por 36×10 , pueden (n.º 147, Vol. I, pág. 73), dividirse $a - 180^2$ primero por 10, lo que equivale a separar una cifra a la derecha de $a - 180^2$, y en seguida dividir el cociente así obtenido por 36. Luego: *Restando del número dado a el cuadrado de las decenas de su raíz cuadrada y separando una cifra a la derecha de la diferencia y dividiendo luego el número representado por las cifras de la izquierda por el doble del número de decenas, se obtiene como cociente un número igual o superior al de las unidades de esta raíz.*

Supongamos que el número así obtenido sea 5, para comprobar si es realmente el de las unidades de b , se formará el cuadrado de 185, presunta raíz hallada, si éste es igual o menor que a , 5 es realmente la cifra de las unidades y entonces el resto r es la diferencia entre a y 185^2 . Si 185^2 resultara mayor que a se probaría la cifra 4, elevando al cuadrado 184, etc., y así hasta obtener la cifra conveniente.

Para simplificar la ejecución de estos ensayos, se aprovecha el resto $a - 180^2$ ya hallado, pues tenemos

$$a - 185^2 \equiv a - (180 + 5)^2 \equiv a - 180^2 - (2 \times 5 \times 180 + 5^2)$$

de manera que $a - 185^2$ se obtiene restando del resto ya obtenido, $a - 180^2$, la suma $(2 \times 180 \times 5 + 5^2)$; esta suma se obtiene fácilmente así: escribamos 36, doble de 18, número de decenas hallado, y a su derecha 5, se obtiene 365; pero $365 = 360 + 5$ de suerte que multiplicando por 5 el número 365 se obtiene la suma $360 \times 5 + 5^2$, que es efectivamente la que debíamos substraer del resto $a - 180^2$ ya obtenido. Si esta última substracción es imposible, se ensayará el número 4, restando de $a - 180^2$ el producto 184×4 , y así sucesivamente hasta obtener el número conveniente; el resto de la substracción final que le corresponde es el r buscado. Es evidente que

si la primera cifra a ensayar resultara mayor que 9 se la reemplazaría por esta última.

Como la diferencia entre los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual al duplo del menor más 1 [n.º 119, c), Vol. I, pág. 60], podrá saberse si un número de unidades ensayado al acaso es el verdadero, pues entonces el resto que le corresponde será menor que el doble de la raíz obtenida más 1. Así, si en el ejemplo anterior quisiéramos ensayar el número 5 y resultara que la substracción ($a - 180^2$) — 185×5 es posible, será 5 el verdadero número, siempre que el residuo de aquella división fuera menor que $2 \times 185 + 1$; si el residuo fuera igual a esta diferencia significaría que el número buscado es 6, si fuera mayor, dicho número sería 6 u otro mayor.

Supongamos, como ejemplo, que se desea obtener la raíz cuadrada de 61375.

232. El número de decenas de la raíz será la raíz cuadrada del mayor cuadrado contenido en 613, número éste que expresa las centenas contenidas en el número dado. Queda, por lo tanto, reducida la cuestión a hallar la raíz cuadrada de 613, pero a su vez el número de decenas de esta raíz es la raíz cuadrada del mayor cuadrado contenido en 6, esta raíz es 2; en cuanto al número de unidades de la raíz de 613, se obtiene como quedó indicado, esto es, restando de 613 el cuadrado, 400, de las decenas halladas y se tiene $613 - 400 = 213$; se separa la cifra 3 de la derecha de 213, el número 21 que queda a la derecha se divide por el duplo, 4, del número de las decenas, se obtiene un cociente 5 que es igual o mayor que el número de las unidades de la raíz cuadrada de 613; para probarlo se multiplica 45 (esto es, el número formado por la cifra duplo de la de las decenas y por la que se prueba, escrita a la derecha) por 5 y se tiene 225, número mayor que 213, luego 5 es demasiado elevado; se ensaya 4, y se tiene $44 \times 4 = 176$, número menor que 213, luego 4 es la cifra de las unidades; en resumen, la raíz cuadrada de 613 contiene 24 unidades. Obtenido de esta manera el número de decenas de la raíz cuadrada del número propuesto 61375, para obtener el de las unidades, se repite el procedimiento indicado: se eleva al cuadrado 240 y el resultado, 57600, se resta de 61375, se obtiene 3775, se separa el 5 de la izquierda y el número 377 así originado se divide por el duplo, 48, del número de decenas hallado; se obtiene

7, para ensayarlo se resta de 3775 el producto $487 \times 7 = 3409$; como esta substracción es posible, 247 es la raíz hallada y el resto $3775 - 3409 = 366$ es el buscado, y en efecto, puede comprobarse que

$$61375 = 247^2 + 366; \quad 248^2 > 61375.$$

Las explicaciones anteriores justifican la siguiente:

233. Regla práctica general. — *Para extraer la raíz cuadrada de un número, se escribe éste, afectado del signo radical, en una línea horizontal, dejando espacio libre a la derecha y debajo de él. A la derecha del número se traza una raya vertical y luego una horizontal que parte de ésta un poco abajo del número, extendiéndose hacia la derecha, arriba de esta última raya y a la derecha de aquélla, esto es, o continuación del número escrito, es donde se escribirá la raíz. Se señala en el número escrito, secciones de dos cifras, a contar de la derecha, de suerte que la última sección de la izquierda podrá tener una o dos cifras. Se extrae la raíz cuadrada del mayor cuadrado contenido en el número indicado por la primera sección de la izquierda y esta raíz es el número de las más altas unidades de la raíz buscada, se resta de la primera sección de la izquierda el cuadrado de la raíz hallada y a la derecha del residuo obtenido se escribe la sección siguiente del número dado; se separa la primera cifra de la derecha de este residuo (llamado primer resto parcial) y se divide el número representado por las cifras restantes (primer dividendo parcial) por el duplo de la raíz hallada, el cociente se multiplica por el número originado escribiendo ese mismo cociente a la derecha del duplo de la raíz hallada; si el producto obtenido puede restarse del primer resto parcial, dicho cociente es la segunda cifra de la izquierda de la raíz buscada; si la substracción es imposible se reemplaza en todas las operaciones recién indicadas el cociente anterior por el número inmediatamente inferior a él y se repite la operación; si tampoco da resultado, se disminuye aún el número ensayado, y se continúa así hasta obtener una substracción posible y entonces la última cifra ensayada es la segunda de la izquierda de la raíz del número buscado. Se forma un segundo residuo parcial escribiendo a la derecha del resto de la última substracción de*

ensayo la sección siguiente (es decir la tercera a contar de la izquierda) del número propuesto y se divide el segundo resto, previa separación de la cifra de la derecha (segundo dividendo parcial), por el duplo del número constituido por las dos cifras ya halladas de la raíz y se continúa como antes hasta agotar todas las secciones. El último resto es el de la raíz. Al efectuarse los ensayos puede aprovecharse la observación hecha en el n.º 119c (Vol. I., pág. 60). Las operaciones auxiliares se efectúan debajo de la raya horizontal como se ve en los ejemplos siguientes:

$\sqrt{61\dot{3}7\dot{5}}$ 4 213 176 3775 3409 366	247 <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 33%;">45</td> <td style="text-align: center; width: 33%;">44</td> <td style="text-align: center; width: 33%;">487</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> </table> 225 176 3409	45	44	487	5	4	7
45	44	487					
5	4	7					

234. Observaciones prácticas. — En la práctica se efectúan mentalmente las operaciones de multiplicar y restar, disponiéndose la operación así:

$\sqrt{61\dot{3}7\dot{5}}$ 213 3775 366	247 44 487	$\sqrt{63917235}$ 1491 15072 77135 13199	7994 149 1589 15984
--	--	--	--

En las casillas de la derecha se escribe el duplo de la raíz parcial ya hallada y a la derecha la cifra siguiente de la raíz y se multiplica mentalmente por ésta el número así formado restando también mentalmente del residuo parcial correspondiente.

Consideremos la radicación siguiente:

$\sqrt{30275}$	173		
202	29	28	27
189	9	8	7
1375	261	224	189
1029	344		343
346	4		3
	1376	1029	

Como se ve, para hallar la segunda cifra han sido necesarios tres ensayos. Si se hubiera ensayado al acaso el número 7 se comprobaría que es el verdadero, porque $302 - 17^2 = 13$ es menor que $2 \times 17 + 1$. Pero si se hubiera ensayado el 6 la misma regla hubiera probado que sería demasiado bajo. El resto final debe ser, por las mismas causas, menor que el duplo de la raíz más 1. En este caso dicho resto es 346, duplo de la raíz, y es por consiguiente el valor máximo del resto; en efecto, si el número dado fuera 30276, su raíz cuadrada sería exactamente 174.

235. Número de cifras de la raíz. — La regla anterior prueba que la raíz de un número tiene tantas cifras cuantas secciones puede señalarse en éste, en la forma establecida para efectuar la operación, pues a cada sección corresponde una cifra de la raíz; luego, si el número propuesto tiene $2n$ o $2n - 1$ cifras, su raíz tiene n cifras. Así, un número de 7 cifras tiene una raíz cuadrada de 4 cifras.

236. Simplificación. — Disponiendo de la tabla (pág. 178), puede hallarse en seguida la raíz cuadrada del número formado por las dos primeras secciones de los números dados.

237. Prueba de la raíz cuadrada. — Elevando al cuadrado la raíz hallada y sumando el resto debe obtenerse el número dado. Así, en los ejemplos anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} 247^2 + 366 &= 61375 \\ 7994^2 + 13199 &= 63917235 \\ 173^2 + 346 &= 30275. \end{aligned}$$

b) *Raíz cúbica*

238. Teoría. — Si el número tiene tres cifras, su raíz cúbica es un dígito y bastará recordar los cubos de los dígitos (pág. 179) para efectuar en seguida la operación. Por ejemplo, sea extraer la raíz cúbica de 710. Como

$$8^3 = 512 \text{ y } 9^3 = 729$$

tendremos:

$$710 - 512 = 198.$$

Luego la raíz buscada es 8 y el resto 198; en efecto

$$710 = 8^3 + 198.$$

Si el número tiene más de tres cifras, su raíz cúbica contendrá decenas y unidades y entonces el cubo de ésta se compondrá del cubo de las decenas, esto es, un número exacto de millares, más el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, esto es, un número exacto de centenas, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, lo que da un número exacto de decenas, más el cubo de las unidades; agregando a la suma precedente el resto, debe obtenerse el número propuesto. De lo anterior resulta que el cubo de las decenas de la raíz está contenido en los millares del número propuesto. *Es el mayor cubo contenido en los millares* Efectivamente, sea a el número propuesto, b su raíz cúbica y r el resto. Debe tenerse

$$a = b^3 + r; \quad (b + 1)^3 > a.$$

Supongamos que la raíz cúbica de a , o sea b , contenga 23 decenas sin alcanzar a tener 24 decenas, entonces a contiene el cubo de 23 decenas sin alcanzar al de 24, pero el cubo de 23 decenas es un número exacto de millares, lo mismo que el de 24; luego, el número de millares de a contiene 23^3 sin contener 24^3 . Como se ve, lo anterior reduce el problema de hallar las decenas

de a a la investigación de la raíz cúbica de un número que tiene tres cifras menos que el propuesto.

Supongamos hallado el número de decenas de a , fácilmente se obtendrá el de las unidades. Efectivamente, sea 23 el número de decenas de b , entonces a es la suma de cinco números, a saber: 1.º, el cubo de 230; 2.º, el triplo del cuadrado de 230 multiplicado por el número de unidades de b ; 3.º, el triplo de 230 multiplicado por el cuadrado del número de unidades de b ; 4.º, el cubo de estas últimas; 5.º, el resto. Luego la diferencia $a - 230^3$ sólo contiene los cuatro últimos sumandos y entre otros el triplo del cuadrado de 230 multiplicado por el número de unidades de b . Luego, si se divide esa diferencia por el triplo del cuadrado de 230 se obtendrá un cociente que será igual o mayor que el número de unidades de b ; como $230 = 23 \times 10$, resulta que $3 \times 230^2 = 3 \times 23^2 \times 100$ y que debe dividirse $a - 230^3$ por $3 \times 23^2 \times 100$, y entonces, primero puede dividirse por 100, lo que equivale a separar dos cifras a la derecha de $a - 230^3$, y luego dividir el número formado por las cifras restantes por 3×23^2 . Por consiguiente:

Restando del número dado a el cubo de las decenas de su raíz cúbica, separando dos cifras a la derecha de la diferencia y dividiendo en seguida el número que queda a la izquierda por el triplo del cuadrado del número de decenas, se obtiene como cociente un número igual o superior al de las unidades de esta raíz.

Supongamos que la cifra hallada sea 7; para comprobar si es realmente la de las unidades de b , se formará el cubo de 237, presunta raíz cúbica hallada; si este cubo es igual o menor que a , 7 es realmente la cifra de las unidades y entonces el resto r es la diferencia entre a y 237^3 . Si $237^3 > a$ se probará la cifra 6 elevando al cubo 236, etc. y así hasta obtener la cifra conveniente.

239. Supongamos, por ejemplo, que se desea extraer la raíz cúbica de 17749863. El número de decenas de la raíz será la raíz cúbica del mayor cubo contenido en 17749, número que expresa los millares contenidos en el número dado. Queda, por lo tanto, reducida la cuestión a hallar la raíz cúbica de 17749, pero, a su vez, el número de decenas de esta última raíz es la raíz cúbica del mayor cubo contenido en 17, la cual es 2; en cuanto al número de unidades de la raíz cúbica de 17749, se obtiene como quedó indi-

cado, esto es, restando de 17749 el cubo, 8000, de 20 y se tiene $17749 - 8000 = 9749$, se separa las dos últimas cifras, 49, de la derecha de este resto y el número 97 que queda se divide por el triplo, 12, del cuadrado de la raíz hallada, se obtiene un cociente 8 que es igual o mayor que el número de unidades de la raíz cuadrada de 9749; para probarlo, se eleva al cubo, 28 (esto es el número formado por la cifra de las decenas y por la que se prueba) y se obtiene 21952, número mayor que 17749; probemos entonces el 7, tenemos que $27^3 = 19683$, número aún mayor que 17749; probando el 6 sale $26^3 = 17576$; como este número es menor que 17749, es el de las unidades de la raíz cúbica de 17749.

Obtenido de esta manera el número de decenas de la raíz cúbica del número propuesto, 17749863, para obtener el de las unidades se repite el procedimiento indicado: se busca el resto $17749 - 26^3 = 173$, se separan dos cifras a la derecha y el número 1, formado por la que queda a la izquierda, se divide por el triplo del cuadrado de 26, parte de la raíz ya obtenida, y el cociente es igual o mayor que la cifra de las unidades; como este número resulta ser cero, la raíz buscada es 260; si hubiéramos obtenido un número mayor que cero, se comprobaría elevando al cubo el número constituido por las cifras ya halladas de la raíz y por la que se ensaya colocada a la derecha de aquéllas; si este cubo resulta menor que el resto 173, dicho número será el buscado, sino, se repetiría la operación con el número inmediato inferior a aquél, y así hasta obtener la cifra conveniente. Elevando al cubo la raíz hallada y restándola del número dado se obtiene el resto de la operación. En nuestro caso se tiene como resto $17749863 - 260^3 = 173863$.

Prácticamente, en vez de elevar cada vez al cubo las raíces parciales obtenidas con el objeto de comprobar si la última cifra de éstas, que es la que se ensaya, es realmente la que corresponde, se simplifica la operación en la forma que se indica en el ejemplo siguiente, el cual hace ver también cómo puede disponerse la operación a fin de simplificarla en lo posible.

240. Sea hallar la raíz cúbica de 48723410. Véase la operación en la página siguiente:

$\sqrt[3]{48723410} \text{ (número dado).}$	$\sqrt[3]{48723410}$	Primera cifra de la raíz obtenida de la operación $\sqrt[3]{48}$.	Segunda cifra de la raíz obtenida dividiendo 217 (primer dividendo parcial) por 27, triplo del cuadrado de la primera cifra.	Tercera cifra de la raíz, obtenida dividiendo 20674 (segundo dividendo parcial) por 3888, triplo del cuadrado de 36, número constituido por las dos primeras cifras de la raíz.
$27 \text{ (cubo de la primera cifra, 3, de la raíz).}$	27	3	6	5
$21723 \text{ (primer resto parcial).}$	21723			
$19656 \text{ (producto de } 3276 \text{ por } 6, \text{ o sea } 3a^2b + 3ab^2 + b^3).$	19656	$96 \times 6 =$	576	$27 \text{ (triplo del cuadrado de 3, primera cifra de la raíz } 3 \times 3^2).$ $[\text{triplo del producto de 30 sumado con 6, segunda cifra de la raíz, multiplicado por esta última } (3 \times 30 + 6) \ 6 = 3 \times 30 \times 6 + 6^2].$
$2067410 \text{ (segundo resto parcial).}$	2067410	5074	36	$(\text{suma de la anterior y de 100 veces la primera: } 3 \times 30^2 + 3 \times 30 \times 6 + 6^2; \text{ multiplicando por 6 se obtiene } 19656, \text{ esto es, } 3 \times 30^2 \times 6 + 3 \times 30 \times 6^2 + 6^3).$ $(\text{cuadrado de 6, segunda cifra de la raíz, o sea } 6^2).$
$1971125 \text{ (producto de } 394225 \text{ por } 5).$	1971125	3888	36	$(\text{suma de } 576 + 3276 + 36, \text{ esto es, } 3 \times 30 \times 6 + 6^2 + 3 \times 30^2 + 3 \times 30 \times 6 + 6^2 + 6^2 = 3 \times 30^2 + 6 \times 30 \times 6 + 3 \times 6^2 = 3(30 + 6)^2, \text{ esto es, el triplo del cuadrado de } 36, \text{ es decir del número constituido por las dos primeras cifras de la raíz}).$
$96285 \text{ (resto de la operación).}$	96285	$1085 \times 5 =$	5425	$[\text{triplo del producto de } 360, \text{ sumado con } 5, \text{ tercera cifra de la raíz } (1085), \text{ multiplicando por esta última: } (3 \times 360 + 5) \times 5 = 3 \times 360 \times 5 + 5^2].$ $[\text{suma de la anterior y de 100 veces la ante anterior } (3888), \text{ o sea } 3 \times 360^2 + 3 \times 360 \times 5 + 5^2; \text{ multiplicando } 394225 \text{ por } 5 \text{ se tiene } 1971125, \text{ esto es, } 3 \times 360^2 \times 5 + 3 \times 360 \times 5^2 + 5^3].$

El número de decenas de la raíz es la raíz cúbica del mayor cubo contenido en 48723; a su vez, el número de decenas de aquel número es la raíz cúbica del mayor cubo contenido en 48, esto es 3, escribimos 3 a la derecha del número dado y, para obtener la segunda cifra de la raíz, debemos elevar al cubo 3, restar este cubo, 27, de 48, luego escribir a la derecha del resto, 21, la sección siguiente 723 y dividir 217 (número formado por las cifras que quedan a la izquierda de 21723 después de apartar las dos cifras de la derecha) por el triplo, 27, del cuadrado de 3, primera cifra de la izquierda de la raíz; dividiendo 217 por 27 se obtiene un cociente que debe ser mayor o igual al número indicado por la segunda cifra de la raíz, este cociente es 8; ensayemos el número 6: para esto debemos elevar al cubo el número 36 y ver si este cubo es igual o menor que 48723, pero podemos simplificar esta operación observando que $(36)^3 = (30 + 6)^3 = 30^3 + 3 \times 30^2 \times 6 + 3 \times 30 \times 6^2 + 6^3$ (n.º 210, pág. 179, 4.º), de suerte que el resto de $48723 - 36^3$ se obtiene restando sucesivamente de 48723, 30^3 , $3 \times 30^2 \times 6$, $3 \times 30 \times 6^2$, 6^3 , pero como ya hemos restado de 48723 el número 30^3 , habiendo obtenido 21723, nos basta, para hallar aquel resto, restar de 21723 la suma $3 \times 30^2 \times 6 + 3 \times 30 \times 6^2 + 6^3$; esta suma puede obtenerse de la siguiente manera: $3 \times 30 + 6$ se obtiene en seguida multiplicando 3, primera cifra hallada de la raíz, por 3, y agregando la segunda cifra 6 que se ensaya, se obtiene 96; multiplicando esta última cantidad por 6, cifra que se ensaya, se obtiene el número $(3 \times 30 + 6)6 = 3 \times 30 \times 6 + 6^2 = 576$; escribamos 576 debajo de 27 teniendo cuidado de correr las cifras de 576 dos lugares a la derecha, se obtiene así la suma 3276, que representa $3 \times 30^2 + 3 \times 30 \times 6 + 6^2$, multiplicando a su vez esta suma por 6, cifra que se ensaya, se obtiene 19656, que representa $(3 \times 30^2 + 3 \times 30 \times 6 + 6^2) \times 6 = 3 \times 30^2 \times 6 + 3 \times 30 \times 6^2 + 6^3$, que es precisamente el número que debíamos restar de 21723 para obtener el resto de $48723 - 36^3$. Efectuada esta operación, se obtiene como resto 2067, y si se hubiera ensayado 7 no hubiera sido posible efectuar dicha resta, pues hubiéramos obtenido

$$\begin{array}{r} 27 \\ 97 \times 7 = 679 \\ \hline 3379 \times 7 = 23653. \end{array}$$

Luego, 6 es efectivamente la segunda cifra de la izquierda de

la raíz y, como se ve, la comprobación se hace rápidamente. Obtenido el número de decenas, 36, de la raíz, para obtener el de las unidades debemos dividir 20674 (número obtenido agregando a la derecha del resto 2067 la sección de tres cifras, 410, marcada a la derecha del número dado, y separando luego las dos cifras a la derecha del número así obtenido) por el triplo del cuadrado de 36; el cociente es igual o mayor que el número indicado por la cifra buscada de las unidades; en vez de elevar al cuadrado 36 y multiplicarlo por 3, bastará agregar a los números ya obtenidos, 576 y 3276, el cuadrado de 6, es decir 36; la suma de ellos, 3888, será el triplo del cuadrado de 36; recordemos, en efecto, que 576 era $3 \times 30 \times 6 + 6^2$ y que 3276 era $3 \times 30^2 + 3 \times 30 \times 6 + 6^2$. Luego:

$$\begin{aligned} 576 + 3276 + 36 &= 3 \times 30 \times 6 + 6^2 + 3 \times 30^2 + 3 \times 30 \times 6 + 6^2 + 6^2 \\ &= 3(30^2 + 2 \times 30 \times 6 + 6^2) = 3(30 + 6)^2 = 3 \times 36^2. \end{aligned}$$

Luego, dividiendo 20674 por 3888, así obtenido, se halla el cociente 5; para ensayar éste, debemos efectuar la operación

$$48723410 - 365^3.$$

Como

$365^3 = (360 + 5)^3 = 360^3 + 3 \times 360^2 \times 5 + 3 \times 360 \times 5^2 + 5^3$, deberemos restar de 48723410, primero 360^3 , es decir $36^3 \times 10^3$; pero como el resto, 2067, era precisamente $48723 - 36^3$; el número 2067410 que se encuentra ya escrito, será evidentemente $48723410 - 360^3$; luego, bastará restar de 2067410 la suma $3 \times 360^2 \times 5 + 3 \times 360 \times 5^2 + 5^3$. Para obtener esta suma, se procederá de la manera siguiente: multiplicando por 3 la raíz parcial 36 hallada y agregando el número ensayado 5 a la derecha del producto y multiplicando el número 1085 así obtenido, por 5, se obtiene evidentemente $(3 \times 360 + 5)5 = 3 \times 360 \times 5 + 5^2$, sumando éste a 388800 se obtiene el número 394225, el cual expresa entonces $3 \times 360^2 + 3 \times 360 \times 5 + 5^2$, y multiplicando éste por 5 se tiene 1971125 o sea $3 \times 360^2 \times 5 + 3 \times 360 \times 5^2 + 5^3$, es decir la suma que debíamos restar de 2067410 para obtener el resto de la operación, sale 96285; luego 5 es efectivamente la cifra de las unidades de la raíz; ésta resulta ser 365 y el resto 96285. Puede comprobarse, en efecto, que

$$48723410 = 365^3 + 96285.$$

Las observaciones precedentes justifican la siguiente:

241. Regla práctica. — Para extraer la raíz cúbica de un número, se señala en éste secciones de tres cifras empezando por la derecha, de suerte que la primera sección de la izquierda puede tener una, dos o tres cifras; se traza una raya vertical a la derecha del número y otra horizontal en la misma forma que para extraer la raíz cuadrada; encima de esta raya horizontal se escribe la raíz a medida que se van determinando sus cifras. Se extrae la raíz cúbica del mayor cubo contenido en la primera sección de la izquierda; se escribe esta raíz y se obtiene así la primera cifra de la izquierda de la raíz buscada, se eleva al cubo la raíz hallada y se resta este cubo del número representado por la primera sección mencionada. A la derecha de este primer resto se escribe la sección siguiente; en el número así representado (primer resto parcial) se separan las dos cifras de la derecha, se divide el número expresado por las restantes (primer dividendo parcial) por el triplo del cuadrado del número indicado por la cifra hallada de la raíz; el cociente es igual o mayor que el número indicado por la segunda cifra de la izquierda de la raíz buscada; para ensayarlo se escribe debajo de la raya horizontal y un poco a la derecha de la vertical el triplo del cuadrado del dígito conocido de la raíz, y debajo, contra la raya vertical, se escribe el triplo de dicho dígito, escribiendo a su derecha la cifra que se ensaya; el número así representado se multiplica por dicha cifra de ensayo, escribiéndose el producto, que llamaremos p , debajo del triplo del cuadrado ya escrito teniendo cuidado de correr dos lugares a la derecha las cifras de p ; se suman ambos números suponiendo que el primero termina en dos ceros, y se multiplica la suma, que llamaremos s , por el número que se ensaya; si el producto es menor que el primer resto parcial, la cifra ensayada es efectivamente la segunda de la raíz, de lo contrario debe ensayarse de la misma manera la inmediata inferior y así sucesivamente hasta encontrar la conveniente; se halla la diferencia entre el primer resto parcial y el producto, s , conveniente, y se escribe a la derecha de esta resta la sección siguiente del número cuya raíz se busca, se separa del así obtenido (segundo resto parcial) las dos cifras de la derecha y se divide el número expresado por las restantes (segundo dividendo parcial) por la suma S de p , de s y del cuadrado de la segunda cifra recién hallada de la raíz, para lo cual se escribe convenientemente este cuadrado debajo de p y s y se traza una raya debajo para efectuar

la suma; el número representado por la tercera cifra de la izquierda de la raíz es igual o menor que el cociente hallado. Para ensayar éste, se escribe en la línea, debajo de S y contra la raya, el triplo del número representado por las dos primeras cifras halladas de la raíz, se escribe a la derecha de este triplo el número a ensayar, y el nuevo número así representado se multiplica por dicho número a ensayar; el producto, que llamaremos p_1 , se escribe debajo de S , teniendo cuidado de correr las cifras de p_1 dos rangos a la derecha de la S , se suma S con p_1 , suponiendo que S termina en dos ceros, y la suma, que llamaremos s_1 , se multiplica por el número representado por la cifra a ensayar, y si el producto es menor que el segundo resto parcial, dicha cifra es efectivamente la tercera de la izquierda de la raíz buscada, de lo contrario se ensaya la inmediata inferior y así hasta obtener la conveniente. Se subtrae del segundo resto parcial el producto final de ensayo y, a la derecha del nuevo resto, se escribe la sección siguiente del número dado, se obtiene el tercer resto parcial, del cual se separa las dos cifras de la derecha y se obtiene a la izquierda el tercer dividendo parcial. Se suma p_1 con s_1 y con el cuadrado de la tercera cifra de la raíz, el cual se escribe ordenadamente debajo de aquéllos, se traza una raya, se escribe la suma S_1 debajo de ésta y se divide por S_1 el tercer dividendo parcial; el cociente es un número igual o mayor que el representado por la cuarta cifra a contar de la izquierda de la raíz buscada. Para ensayarlo, se escribe en la línea debajo de S_1 y contra la raya vertical, el triplo del número representado por las tres primeras cifras halladas de la raíz, se escribe a la derecha de este triplo el número a ensayar, y el nuevo número así representado se multiplica por el de ensayo, obteniéndose un producto p_2 , que se escribe debajo de S_1 teniendo cuidado de correr las cifras de p_2 dos lugares a la derecha de las de S_1 ; se suma S_1 con p_2 , suponiendo que S_1 termina en dos ceros, y se multiplica la suma s_2 por el número representado por la cifra a ensayar, y si el producto es menor que el tercer resto parcial, dicha cifra es la buscada, de lo contrario, se ensaya la inmediata inferior hasta encontrar la conveniente. Se resta del tercer dividendo parcial el producto final del ensayo, y a la derecha del resto se escribe la sección siguiente, y se continúa de la misma manera hasta agotar todas las secciones que se han

señalado en el número dado: el último resto parcial es el de la operación.

A continuación se indican otros ejemplos:

$\sqrt[3]{183153661839}$	5679
125	
58153	75
50616	$156 \times 6 = 936$
7537661	8436
6668263	36
869398839	9408
869398839	$1687 \times 7 = 11809$
0	952609
	49
	964467
	$17019 \times 9 = 153171$
	96599871
$\sqrt[3]{103843282269754}$	47003
64	48
39843	$127 \times 7 = 889$
39823	5689
20282269754	49
19882269027	66270000
400000727	$141003 \times 3 = 423009$
	6627423009

En el primer ejemplo, el número dado es el cubo exacto de 5679. El segundo nos indica cómo se simplifica el cálculo cuando una o más cifras de la raíz son ceros; basta entonces agregar, para cada cero de la raíz, dos ceros a la derecha de la última suma

correspondiente, bajando entonces dos períodos simultáneos en los restos parciales.

242. Observaciones. — Se ve que la raíz de un número tiene tantas cifras como períodos de tres cifras puede formarse con él, en la forma indicada, y una más si sobran una o dos cifras, pues a cada sección corresponde una cifra en la raíz; luego, si un número tiene $3n$, $3n - 1$ ó $3n - 2$ cifras, su raíz cúbica tiene n cifras. Un número de 23 cifras tiene una raíz cúbica de 8 cifras.

243. Simplificación. — Si un número no tiene más de nueve cifras, la tabla del n.º 210 (pág. 180) permite obtener inmediatamente las decenas de la raíz y sólo se tiene que determinar una cifra.

244. Prueba de la raíz cúbica. — Elevando al cubo la raíz hallada y sumando el resto debe obtenerse el número dado. Así, en el último ejemplo, se comprobará que

$$47003^3 + 400000727 = 103843282269754.$$

245. Método analítico de Horner, para extraer la raíz cúbica. — Sea N el número cuya raíz se busca, e imaginemos que su raíz tenga tres cifras, por

ejemplo, $\frac{a}{100}$, $\frac{b}{10}$, c. los números de centenas, decenas y unidades que contiene la raíz, entonces $N - (a + b + c)^3 - R = 0$. Hemos visto ya cómo se obtiene inmediatamente a ; los cuadros siguientes hacen ver cómo puede obtenerse b y c .

$\left. \begin{array}{r} a \\ a \end{array} \right\} \text{ suma}$	$\left. \begin{array}{r} a^2 \\ 2a^2 \end{array} \right\} \text{ suma}$	$N = (a + b + c)$
$2a$	$3a^2 \text{ (div. de ensayo para obtener } b)$	$\frac{a^3}{N - a^3}$
a	$+ (3a + b)b$	$3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$3a + b$	$3a^2 + 3ab + b^2$	$N - (a + b)^3$
b	$+ 3ab + 2b^2$	$3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$
$3a + 2b$	$3(a + b)^2 \text{ (div. de ens. para obt. } c)$	$N - (a + b + c)^3 = 0.$
b	$+ \{3(a + b) + c\}c$	
$3(a + b) + c$	$3(a + b)^2 + 3(a + b)c + c^2$	

Obtenido a por los procedimientos generales, se forma $2a$, $3a$, $3a^2$, $N - a^3$; dividiendo $N - a^3$ por $3a^2$, primer dividendo de ensayo, se obtiene b , con el que se forma $3a + b$, $3(a + b)$, $3a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; si b es realmente el número relativo a las decenas, $N - a^3$ debe ser igual o mayor que $3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

en caso contrario, se ensaya otro mayor hasta encontrar el valor exacto de b . El nuevo dividendo de ensayo $3(a + b)^3$ permite encontrar c , dividiendo por él a $N - (a + b)^3$, etc.

Apliquemos los cuadros anteriores a un ejemplo numérico.

Sea extraer la raíz cúbica de 77308776.

Disposición práctica:

4	16	$\sqrt{77308776} \mid 426$
4	32	64
8	4800	13308
4	244	
122	5044	10088
2	248	3220776
124	529200	
2	7596	3220776
1266	536796	0

Explicaciones. — La operación exige tres columnas.

La primera se construye por vía de adición.

La segunda se construye por vía de adiciones y multiplicaciones por los elementos de la primera.

La tercera se construye por vía de sustracciones y multiplicaciones por los elementos de la segunda.

Cada dígito de la raíz exige tres adiciones en la primera columna, dos en la segunda y una sustracción en la tercera.

Para cada dígito, en la tercera adición de la primera columna, se agrega dicho dígito a la derecha, lo que equivale a multiplicar por 10 y agregar el dígito; así, 12 se vuelve $122 = (12 \times 10 + 2)$.

La segunda columna es una columna de cuadrados: así $16 = 4^2$, $4800 = (16 + 32) \times 100$ ó $(16 + 32) \times 10^2$, y así sucesivamente. Se tiene también: $244 = 122 \times 2$; $248 = 124 \times 2$; $7596 = 1266 \times 6$.

La tercera columna es de los cubos y se obtiene de la misma manera: $64 = 16 \times 4$; $10088 = 5044 \times 2$; $3220776 = 536796 \times 6$.

Los divisores de ensayo están en la segunda columna y son respectivamente $5a^2$ (4800), $3(a + b)^2$ (529200), etc.

Toda cifra innecesaria se suprime.

Los restos y divisores se toman por sus valores relativos y no por sus valores representativos y reales.

Los períodos se bajan a medida.

Si se usa el método italiano de división, se simplifica la operación de la manera siguiente:

4	16	77308776 426
8	4800	13308
122	5044	3220776
124	529200	0
1266	536796	

246. Método aproximado de Hutton. — Si N es el número dado, r una raíz cúbica aproximada y R el cubo de esta raíz, se tiene que $\frac{2N + R}{N + 2R} \times r$, es otro valor más aproximado aún de la raíz. Así:

Sea hallar la raíz cúbica de 77308776; una raíz cúbica aproximada es 400, pues $400^3 = 64000000$. Luego $r = 400$, $R = 64000000$.

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \frac{2N + R}{N + 2R} \times r &= \frac{154617552 + 64000000}{77308776 + 128000000} \times 400 = \\ &= \frac{218617552 \times 400}{205308776} = 426, \text{ más o menos.} \end{aligned}$$

247. Raíces de índice superior a 3. — Raras veces ocurre tener que extraer raíces de índice mayor que 3, por cuya razón sólo indicaremos que las raíces de índices 4, 8, 16, ... de un número, cuando estas raíces son exactas, pueden obtenerse buscando, primero la raíz cuadrada de dicho número, luego la raíz cuadrada de esta raíz cuadrada, etc. Así:

$$\sqrt[8]{6161} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6161}}} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3.$$

La raíz sexta de un número puede obtenerse buscando primero la raíz cúbica del mismo y luego la raíz cuadrada de dicha raíz cúbica, pues $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}$, etc.

El método de Horner puede extenderse a casos de índices más elevados, pero carece de utilidad práctica.

Puede también reemplazarse la expresión $\frac{2N + R}{N + 2R} \times r$ referente a la raíz cúbica por la

$$\frac{(n+1)N + (n-1)x^n}{(n-1)N + (n+1)x^n}$$

en la que n es el índice de la raíz y x una raíz n -ésima aproximada.

EJERCICIOS

Extraer la raíz cuadrada de los números siguientes:

631. 529, 1369, 6889, 9801, 961, 129600, 5793649, 903543481, 1002001.

632. 4040100, 5179, 49098652, 64609480 1748976, 7659999, 674541903025, 4160580062500, 17167550625.

633. Extraer la raíz cúbica de los números siguientes:

1728, 625, 15625, 18225, 2460975, 361201, 217081801, 1038361, 1058089859, 27394756, 143384152904, 2749884201000, 47824987, 1122334466, 99999999, 7645373, 58863869, 2571353.

634. Hallar un número entero n tal que $n(n+2) = 440$.

635. El producto de dos números es 978123; uno de estos números es el triplo del otro, ¿cuáles son estos dos números?

636. La suma de los cuadrados de dos números es 79250; y la diferencia de los cuadrados de esos mismos números es 78672. Hallar dichos números.

637. Hallar la raíz cuarta de 256, 6561, 14641, 38950081, 104976, 1500625.

638. Extraer la raíz sexta de 117649, 2985984, 11390625, 4826809.

639. Todo cuadrado perfecto terminado en 5 tiene su raíz cuadrada terminada también en 5; ningún número terminado en 5 puede ser un cuadrado perfecto si no termina en 25.

640. Extraer la raíz octava de 1679616, 2562890625, 214358881.

641. Extraer la raíz novena de 262144, 198359290368.

642. Extraer la raíz quinta de 59049, 16807, 7962624, 7776.

643. Extraer la raíz duodécima de 13841287201.

644. Extraer la raíz décimaoctava de 3814697265625.

248. Radicación de cantidades fraccionarias. — Se tiene, evidentemente, que

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} \equiv \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \quad \text{ya que}$$

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \frac{a}{b}$$

Luego

Para extraer la raíz de una cantidad fraccionaria se extrae la raíz del mismo índice del numerador y la del denominador y se divide la primera por la segunda.

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{1\frac{24}{25}} = \frac{7}{5}$$

249. En el n.º 11 hemos indicado cómo se realiza la potenciación en el caso de números fraccionarios decimales escritos en la forma especial. Fácilmente se comprende que, inversamente:

Para extraer la raíz n de un número, fraccionario decimal escrito en la forma especial, se supone que la coma no existe y se

extrae la raíz n como si se tratase de un número entero. Obtenida así, la raíz, que supondremos por ahora exacta, se separa tantas cifras a la derecha como indica el cociente del número de cifras decimales de la subradical, dividido por el índice de la raíz.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{0.00027} = 0.03$$

se han separado dos cifras porque

$$\frac{6 \text{ (numero de cifras de la subradical)}}{3 \text{ (índice de la raíz)}} = 2.$$

Este número tiene que resultar siempre entero y, por eso, hay que poner previamente, a la derecha del número dado, los ceros que sean necesarios.

Cuando en una operación, existen números fraccionarios ordinarios y otros decimales escritos con su notación especial, se da a éstos, la forma general. Así:

$$\frac{2}{3} + 3,52 + \frac{7}{6} = \frac{2}{3} + \frac{352}{100} + \frac{7}{5}.$$

EJERCICIOS

Extraer la raíz cúbica de los siguientes números
645. 129,559582830382343; 34,328125.

250. Raíces aproximadas. — Dado un número entero a , que supondremos no ser un cuadrado (o una potencia n) perfecto, existen siempre dos números enteros consecutivos entre cuyos cuadrados (o potencias n) se encuentra comprendida a . Estos dos números enteros consecutivos se llaman respectivamente las raíces cuadradas (o de índice n) de a , en menos de una unidad de aproximación por defecto o por exceso respectivamente; estos números se investigan, tratándose de raíces cuadradas o cúbicas, como quedó indicado en los n^{os} 233 y 241; pero puede uno proponerse determinar números fraccionarios cuyos cuadrados (o potencias n) se aproximen más que aquéllos a a . Así, 14 es la raíz cuadrada aproximada por exceso en menos de una unidad, de 175, pues $13^2 = 169$ y $14^2 = 196$, pero 13,2288 es un número fraccionario cuyo cua-

drado se aproxima por exceso más a 175 que el de 14, pues $14^2 = 196$ y $(13,2288)^2 = 175,000114944$.

251. Designando con α un número entero o fraccionario, se llama raíz n de a aproximada por defecto en menos de α , al mayor múltiplo de α cuya potencia n está contenida en a . Se obtiene esta raíz n aproximada, determinando la raíz n en menos de una unidad por defecto de la parte entera de $\frac{a}{\alpha^n}$ y multiplicando el resultado por α .

252. Efectivamente, sea $p\alpha$ la raíz n de a por defecto en menos de α , siendo p un entero desconocido; se deberá tener, según la definición dada, que

$$(p\alpha)^n < a < [(p+1)\alpha]^n;$$

o también

$$p^n \alpha^n < a < (p+1)^n \alpha^n; \quad p^n < \frac{a}{\alpha^n} < (p+1)^n.$$

Estas últimas desigualdades hacen ver que p es la raíz n , aproximada por defecto en menos de una unidad, de $\frac{a}{\alpha^n}$.

253. Si α es de la forma $\frac{1}{k}$, siendo k un número entero, $\frac{a}{\alpha^n}$ toma entonces la forma ak^n , y se ve que la raíz n de a , en menos de $\frac{1}{k}$ de aproximación por defecto, se obtiene extrayendo la raíz n de la parte entera de ak^n en menos de una unidad por defecto, y dividiendo el resultado por k . Así, la raíz cuadrada de 2 en menos de $\frac{1}{5}$ por defecto, se obtiene extrayendo la raíz cuadrada de 50, aproximada por defecto en menos de una unidad, y dividiendo el resultado por 5; se obtiene 7 como raíz, y entonces el número buscado es $\frac{7}{5}$; de igual manera se comprobaría que la raíz cuadrada de 2,

aproximada por defecto en menos de $\frac{1}{9}$, es $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Ejemplo.— Sea obtener la raíz cuadrada de 17 con un error menor que $\frac{1}{9}$. Tenemos:

$$\sqrt{17} = \sqrt{\frac{17 \times 9^2}{9^2}} = \sqrt{\frac{1377}{9^2}} = \frac{37}{9}.$$

254. Sea ahora obtener $\sqrt[3]{\frac{3}{14}}$ con un error menor que $\frac{1}{25}$.
Tenemos:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{14}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{14} \times 25^3}{25^3}} = \sqrt[3]{\frac{3348\frac{3}{14}}{25^3}} = \frac{14}{25}.$$

255. El caso más interesante es el de la investigación de la raíz de un número a aproximada por defecto en menos de 0.1, 0.01, 0.001, ...; siguiendo la regla general, para obtenerla, se multiplica a por 10^n , 100^n , 1000^n , ...; se extraerá luego la raíz n de la parte entera de ese producto aproximado en menos de una unidad por defecto y se dividirá el resultado por 10, 100, 1000, ...

Si a está escrito en forma de número fraccionario decimal, las multiplicaciones por 10^n , 100^n , .. se efectúan rápidamente, corriendo la coma n , $2n$, ... lugares hacia la derecha, agregando ceros si es necesario, obteniéndose así inmediatamente la parte entera del producto.

Supongamos que en la parte decimal de a se haya señalado secciones de n cifras de izquierda a derecha, designándolas respectivamente con el nombre de primera, segunda, tercera, ... sección decimal. Cada uno de los números que se forman colocando a la derecha de la parte entera de a la primera, luego la primera y segunda, luego la primera, segunda y tercera sección decimal, etc., contiene a la izquierda las mismas cifras que las anteriores y el número de decenas de la raíz de uno de esos números es precisamente la raíz n , aproximada en menos de una unidad por defecto, del número precedente; de suerte que si se quiere calcular sucesivamente la raíz n de a aproximadamente, por defecto, en

menos de 1, 0.1, 0.01, 0.001, ... cada operación servirá para la siguiente y sólo se tendrá que determinar la última cifra, operación que se efectúa entonces de acuerdo con las reglas de la radicación.

A continuación se indica algunos ejemplos.

256. Sea determinar las raíces cuadradas de 2 y de $\frac{1}{7000}$

$\sqrt{2}$	1,41421	$\sqrt{0,0001428571}$	0,01195
100	24	1	21
96	281	042	229
400	2824	21	2385
281	28282	2185	
11900	282841	2061	
11296		12471	
60400		11925	
56564		546	
383600			
282841			
110759			

Para efectuar la operación $\sqrt{2}$ nos hemos contentado con escribir los diez ceros a medida que se necesitaba. En cuanto al número fraccionario $\frac{1}{7000}$ se le ha substituído por el decimal 0,0001428571, que expresa el valor aproximado de aquél, por defecto en menos de $\frac{1}{10^{10}}$.

Vemos que las raíces cuadradas aproximadas de 2 en menos de 1, 0.1, 0.01, 0.001, ... por defecto y por exceso, son respectivamente:

1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, ...
 2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, ...

Estas dos series resuelven, en lo relativo a $\sqrt[3]{2}$, el problema de hallar números cuyas potencias n difieran de a^n tan poco como se desee. Se nota, en nuestro ejemplo, que las diferencias entre 2 y los cuadrados de los números 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.42421, ... son respectivamente 1, 0.04, 0.0119, 0.000604, 0.00003836, 0.0000100759, ... y disminuyen muy rápidamente.

Si se tratara de $\sqrt[3]{2}$ y de $\sqrt[3]{\frac{1}{7000}}$ tendríamos análogamente:

$\sqrt[3]{2}$	1,25992
1000	3
728	32 64
272000	364
225125	4
46875000	432
42491979	365 1825
4383021000	45025
4282778799	25
100242201000	46875
95242392488	3759 33831
4999808512	4721331
	81
	4755243
	37779 340011
	475864311
	81
	476204403
	377972 755944
	47621196244
	4
	47621952192

$\sqrt[3]{0,000142857100}$	0,0522
125	75
17857	152 304
15608	7804
2249100	4
1628648	8112
620452	1562 3124
	814324

257. Si se tratara de números fraccionarios, por ejemplo, de $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, podría siempre transformarse la operación en otra equivalente, en la que sólo se tendría que efectuar una radicación aproximada, pues, multiplicando ambos términos del número fraccionario por b^{n-1} , sale

$$\frac{a}{b} = \frac{ab^{n-1}}{b^n} \quad \therefore \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b};$$

también tendríamos, multiplicando por a^{n-1} , que

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{ba^{n-1}}}.$$

258. Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{27}{81}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{81}} = \frac{\sqrt{27}}{9} = \frac{5}{9} \quad \left(\text{raíz aproxim. en menos de } \frac{1}{9} \right).$$

$$\sqrt{\frac{1321}{8649}} = \frac{\sqrt{1321}}{\sqrt{8649}} = \frac{\sqrt{36}}{93} \quad \left(\text{raíz aproxim. en menos de } \frac{1}{93} \right).$$

$$\sqrt{\frac{25}{12}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{12}} = \frac{5}{\sqrt{12}} = \frac{5}{3} \left(\text{raíz aproxim. en menos de } \frac{5}{3} - \frac{5}{4} = \frac{5}{12} \right).$$

$$\sqrt{\frac{15}{27}} = \sqrt{\frac{15 \times 27}{27 \times 27}} = \sqrt{\frac{405}{27^2}} = \frac{20}{27} \left(\text{raíz aproxim. en menos de } \frac{1}{27} \right).$$

$$\sqrt{\frac{18}{23}} = \sqrt{\frac{18 \times 18}{23 \times 18}} = \frac{18}{12} \left(\text{raíz aproxim. en menos de } \frac{3}{70} \right).$$

EJERCICIOS

646. Extraer la raíz cuadrada aproximada, por defecto en menos de una unidad, de las cantidades expresadas por los números 5179; 49098652; 64609480; 12324,853.

647. Calcular la raíz cuadrada de 5 aproximada en menos de 0,01 por defecto.

648. Calcular la raíz cuadrada de 43789 aproximada en menos de 0,1 por defecto.

649. Calcular la raíz cuadrada de 78504 aproximado en menos de 0,01 por defecto.

650. Calcular la raíz cuadrada de 0,9 aproximada en menos de 0,1 por defecto.

651. Calcular la raíz cuadrada de $\frac{355}{113}$ aproximada en menos de 0,001 por defecto.

652. Calcular la raíz cuadrada de 3,141592 aproximada en menos de 0,01 por defecto.

653. Calcular la raíz cuadrada de 1975,30469136 aproximada en menos de 0,0001 por defecto.

654. Calcular la raíz cúbica de 103843282269754 aproximada en menos de 1 por defecto.

655. Calcular la raíz cúbica de 220,073 aproximada en menos de 0,1 por defecto.

656. Calcular la raíz cúbica de 0,00101202 aproximada en menos de 0,0001 por defecto.

657. Calcular la raíz cúbica de 0,92371951 aproximada en menos de 0,001 por defecto.

658. Calcular las raíces cuadradas de 1,96 y de 86,49 aproximadas en menos de 0,1 por defecto.

659. Calcular raíces cuadradas de 1,4161, 28,8369 y 331,24 aproximadas en menos de 0,01 por defecto.

660. Calcular las raíces cuadradas de 121,2201 y de 8,678916 aproximadas en menos de 0,001 por defecto.

661. Calcular las raíces cuadradas de 26,04469156 y 4,06506244 aproximadas en menos de 0,001 por defecto.

662. Calcular las raíces cuadradas de 206,5316768641 y de 25,3130740641 aproximadas en menos de 0,00001.

663. Calcular las raíces cuadradas de 0,00010201 y 0,00047961 aproximadas en menos de 0,0001.

664. Calcular las raíces cuadradas de 0,0000001849 y de 0,0000005184 aproximadas en menos de 0,00001.

259. Mecanismo del cálculo relativo a los llamados cantidades y números irracionales. — En los n.ºs 70 a 76 hemos definido las nociones de cantidades y números irracionales. Veamos, ahora, qué clase de cálculo pueden hacerse al respecto.

Sea hallar la raíz cuadrada de la cantidad a en el concepto de esta operación establecido en el n.º 220. Llamemos b a la raíz y r al resto. Debemos tener

$$a = b^2 + r; \quad (b + 1)^2 > a;$$

por consiguiente, tendremos:

$$a^2 = (b^2 + r)^2 \equiv b^4 + 2b^2r + r^2; \quad (b + 1)^4 > a^2;$$

luego, resulta que b es también la raíz cuarta de a^2 , siendo el resto $2b^2r + r^2$; luego, la raíz cuarta de a^2 , o sea $\sqrt[4]{a^2}$, es la misma que la raíz cuadrada de a , o sea $\sqrt{a}$, variando únicamente el resto.

Por consiguiente, refiriéndonos al n.º 250 y siguientes, obtendríamos las mismas series de valores, ya efectuando la operación $\sqrt{a}$, ya la $\sqrt[4]{a^2}$, ya en general, la operación $\sqrt[2n]{a^n}$, y más generalmente aún, tenemos que las series obtenidas mediante la operación $\sqrt[c]{a}$ son las mismas que las obtenidas con la operación $\sqrt[nc]{a^n}$; por consiguiente, la cantidad y número irracional (n.º 77) $\sqrt[c]{a \text{ unidades}}$ y $\sqrt[c]{a}$ son los mismos que $\sqrt[cn]{a^n \text{ unidades}}$ y $\sqrt[cn]{a^n}$. Luego, $\sqrt[c]{a} \equiv \sqrt[cn]{a^n}$

y de igual manera se tendría $\sqrt[c]{a^p} \equiv \sqrt[\frac{c}{n}]{\frac{p}{a^n}}$, suponiendo que c y p sean divisibles por n ; puede establecerse, por lo tanto, que:

Una cantidad irracional no altera si se multiplica o divide el

índice de ella y el exponente de la cantidad subradical por un mismo número.

260. Reducción de varios números irracionales de distinto índice a otros de igual índice.— Sean los números irracionales $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[r]{c}$, de distinto índice, pueden reducirse a otros del mismo índice aplicando el principio anterior, multiplicando el índice y el exponente del elemento subradical de cada número por el producto de los demás índices. Así se tendrá:

$$\sqrt[m]{a} \equiv \sqrt[mnr]{a^{nr}}; \quad \sqrt[n]{b} \equiv \sqrt[mnr]{b^{mr}}; \quad \sqrt[r]{c} \equiv \sqrt[mnr]{c^{mn}};$$

y ahora los nuevos números irracionales $\sqrt[mnr]{a^{nr}}$, $\sqrt[mnr]{b^{mr}}$, $\sqrt[mnr]{c^{mn}}$ tienen los mismos índices y son, como se dice, **homogéneos**; si los índices no son primos entre sí, admiten un mínimo múltiplo común más simple que el producto de ellos, en ese caso conviene adoptar dicho m. c. m. como índice común, multiplicando el índice de la raíz y el exponente de cada cantidad subradical por el cociente del m. c. m. en cuestión dividido por el índice correspondiente. Ejemplo: $\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$ son equivalentes a $\sqrt[24]{3^{12}}$, $\sqrt[24]{4^{12}}$, $\sqrt[24]{5^{12}}$, o también a $\sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[12]{4^6}$, $\sqrt[12]{5^6}$, pues el m. c. m. de 2, 3 y 4 es 12.

261. Simplificación.— Si el índice de la raíz y el exponente del elemento subradical admiten un factor común, puede simplificarse el símbolo del número irracional, sin alterar éste, dividiendo dichos índice y exponente por el factor común; se obtendrá la mayor simplificación posible dividiendo por el m. c. d.; en ese caso el símbolo se dice **irreducible**.

Se conocerá, por consiguiente, si un símbolo representativo de un número irracional es irreducible, comprobando que el índice de la raíz y el exponente de la cantidad subradical son primos entre sí. Ejemplo:

$\sqrt[16]{4^{12}}$ es equivalente a $\sqrt[8]{4^6}$
 expresión más sencilla; como el m. c. d. de 16 y de 12 es 4, el
 símbolo irreducible equivalente a $\sqrt[16]{4^{12}}$ es $\sqrt[4]{\frac{16}{4} \frac{12}{4}}$, es decir, $\sqrt[4]{4^3}$.

262. Cálculo. — Una cantidad irracional está definida por series de cantidades racionales (n.º 77), y está representada por el símbolo de radicación que constituye la ley de formación de aquéllas.

Ninguna dificultad existe en interpretar una suma o una diferencia de cantidades irracionales, así como el producto o el cociente de una cantidad irracional, por un número entero y, finalmente, el producto o el cociente de una cantidad irracional por un número fraccionario: basta hacer esas operaciones con las series que definen la cantidad irracional, se obtiene otras dos series que definan la nueva cantidad irracional resultado.

Nos toca, ahora, interpretar el concepto de multiplicadores y divisores irracionales. Veamos, por consiguiente, qué significado puede darse a la expresión 5 unidades $\times \sqrt{3}$. Si reemplazamos $\sqrt{3}$ por la serie de valores que la definen, se comprobaría, en virtud de la propiedad conmutativa de la multiplicación, la identidad siguiente:

$$5 \text{ unidades} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ unidades} \times 5;$$

y en general

$$a \sqrt[c]{b} \equiv \sqrt[c]{b} a.$$

De la misma manera se comprobaría que $\sqrt[m]{a}$ unidades $\times \sqrt[m]{b}$ tiene por valor $\sqrt[m]{ab}$ unidades, y en general

$$\sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \equiv \sqrt[pq]{a^q b^p} \equiv \sqrt[pq]{a^q b^p};$$

y más generalmente aún:

$$\sqrt[p]{a^n} \sqrt[q]{b^m} \sqrt[r]{c^l} \dots \equiv \sqrt[pqr\dots]{a^{nqr\dots} b^{mpr\dots} c^{lpq\dots} \dots}$$

263. Establecido el significado de los multiplicadores irracionales, queda de paso establecido el de los divisores. Como consecuencia, tenemos que

$$(\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}) \sqrt[m]{c} \equiv \sqrt[m]{a} (\sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c});$$

$$\left(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}\right)^n \equiv \sqrt[m]{a} \sqrt[m]{a} \dots \sqrt[m]{b} \sqrt[m]{b} \dots \equiv \left(\sqrt[m]{a}\right)^n \left(\sqrt[m]{b}\right)^n;$$

$$\left(\sqrt[p]{a} \pm \sqrt[q]{b}\right)^r \sqrt[c]{c} \equiv \sqrt[p]{a}^r \sqrt[c]{c} \pm \sqrt[q]{b}^r \sqrt[c]{c};$$

$$\frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[q]{b}} \equiv \frac{\sqrt[pq]{a^q}}{\sqrt[pq]{b^p}} \equiv \sqrt[pq]{\frac{a^q}{b^p}},$$

porque

$$\sqrt[pq]{\frac{a^q}{b^p}} \sqrt[q]{b} \equiv \sqrt[pq]{\frac{a^q}{b^p}} \times \sqrt[pq]{b^p} \equiv \sqrt[pq]{\frac{a^q b^p}{b^p}} \equiv \sqrt[pq]{a^q} \equiv \sqrt[p]{a};$$

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^m \equiv \sqrt[p]{a} \sqrt[p]{a} \dots \equiv \sqrt[p]{aaa \dots} \equiv \sqrt[p]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} \equiv \sqrt[mp]{a} \text{ pues } \left(\sqrt[mp]{a}\right)^m \equiv \sqrt[mp]{a^m} \equiv \sqrt[p]{a}.$$

Finalmente, de $\sqrt[m]{a^n} \equiv a^{\frac{n}{m}}$ se desprende que si n no es divi-

sible por m convendrá que la expresión $a^{\frac{n}{m}}$ represente $\sqrt[m]{a^n}$, para mantener las reglas del cálculo; el exponente fraccionario juega, como se ve, el rol de un *operador*.

Aplicando las propiedades distributivas de la multiplicación tenemos, por ejemplo, que

$$\begin{aligned} 2 \sqrt[p]{a^q} + \frac{3}{5} \sqrt[p]{a^q} - \frac{4}{3} \sqrt[p]{a^q} &\equiv \left(2 + \frac{3}{5} - \frac{4}{3}\right) \sqrt[p]{a^q} \equiv \\ &\equiv \frac{30 + 9 - 20}{15} \sqrt[p]{a^q} \equiv \frac{19}{15} \sqrt[p]{a^q}. \end{aligned}$$

Si quiere obtenerse el valor diremos (*) aproximado del número irracional que resulta de un cierto cálculo efectuado combinando

(*) Como por *número irracional* se entiende una ley procesal de cálculo, no cabría hablar de valores aproximados de un número de esa naturaleza, pero por una ficción de lenguaje puede usarse esa manera de hablar, máxime si se tiene en vista el concepto radicación definido en el n.º 220, y lo dicho en el nos. 250 y siguientes.

otros números irracionales, se substituyen éstos, en las operaciones, por sus valores convenientemente aproximados, según el grado de exactitud que se desee.

Por ejemplo, si se quiere obtener el número irracional $\sqrt{75} \pm \sqrt{8}$ aproximado, diremos, en menos de 0,001 por defecto, se reemplazará $\sqrt{75}$ y $\sqrt{8}$ por 8,660 y 2,828, valores de estos números aproximados por defecto en menos de 0,0005 en el concepto establecido en los n.ºs. 250 y siguientes; se obtendrá como resultado 11,488 o 5,832, números que expresan respectivamente los valores aproximados por defecto en menos de 0,001, de $\sqrt{75} + \sqrt{8}$ y de $\sqrt{75} - \sqrt{8}$.

Se tendría análogamente

$$\sqrt{75} = 8,6605 \text{ en menos de } 0,0005 \text{ por exceso.}$$

$$\sqrt{8} = 2,8285 \quad \gg \quad \gg \quad \gg$$

$$\sqrt{75} + \sqrt{8} = 11,489 \text{ en menos de } 0,001 \text{ por exceso.}$$

Para obtener mayor aproximación conviene calcular alternativamente un sumando por exceso y otro por defecto.

De igual manera tenemos:

$$\sqrt{75} \times 9 = 8,660 \times 9 = 77,940 \text{ aproximado por defecto.}$$

No insistimos sobre este punto por haber sido ya tratado en el n.º 59 y siguientes.

264. Caracteres de irracionalidad. — Si un número es divisible por otro primo y no por su potencia n , la raíz n de ese número es irracional, pues si fuera racional se tendría que el número dado, siendo potencia n de otro debería ser el producto de las potencias n de los factores primos en los que podría descomponerse este otro número. Luego, para saber si un número tiene una raíz n exacta, se descompone el número, si es entero, o el numerador y el denominador, si es fraccionario, en sus factores primos y éstos deben figurar todos elevados a la potencia n ; en caso que esto no suceda, la raíz n del número en cuestión no puede ser exacta y determina un número irracional.

265. Cantidades y números llamados logarítmicos. — Supongamos que se trata de interpretar la expresión $(\log_2 3)$ metros. Si

elevamos un conjunto de dos metros a la primera potencia, tendremos el mismo conjunto de dos metros; si lo elevamos al cuadrado tendremos uno de cuatro metros. Podemos, por consiguiente, escribir:

$$2^1 > 3 > 2^2.$$

De modo que, si $\log_2 3$ expresara algún número, éste estaría comprendido entre 1 y 2; luego el símbolo $(\log_2 3)$ metros, a representar algo, expresará una longitud intermedia entre 1 ó 2 me-

tros o sea entre $\frac{10}{10}$ metros y $\frac{20}{10}$ metros.

Ensayemos entonces las operaciones $2^{\frac{11}{10}}, 2^{\frac{12}{10}}, 2^{\frac{13}{10}}, 2^{\frac{14}{10}}, \dots, 2^{\frac{19}{10}}$, tal cual fueron interpretadas en el n.º 263. Notaremos que los valores así obtenidos crecen empezando por 2 y terminando por 4; habrá,

por consiguiente, dos consecutivos, que resultan ser $2^{\frac{15}{10}}$ y $2^{\frac{16}{10}}$, que llenen la condición.

$$2^{\frac{15}{10}} < 3 < 2^{\frac{16}{10}}.$$

Luego, podemos decir que la expresión $(\log^2 3)$ metros, si indica algo, indicará una longitud comprendida entre las cantidades

rationales $\frac{15}{10}$ metros y $\frac{16}{10}$ metros; hemos reducido así el trecho entre el cual se encuentra la longitud hipotética. Escribiendo estas dos

longitudes así: $\frac{150}{100}$ metros y $\frac{160}{100}$ metros y ensayando las opera-

ciones $2^{\frac{151}{100}}, 2^{\frac{152}{100}}, \dots, 2^{\frac{159}{100}}$, encontraremos de la misma manera que

hay dos consecutivas $2^{\frac{158}{100}}$ y $2^{\frac{159}{100}}$ que satisfacen a la condición

$$2^{\frac{158}{100}} < 3 < 2^{\frac{159}{100}}.$$

La longitud hipotética ($\log_2 3$) metros está ahora encerrada entre las dos longitudes $\frac{158}{100}$ metros y $\frac{159}{100}$ metros.

Igualmente hallaremos

$$\frac{1584}{2^{1000}} < 3 < \frac{1585}{2^{1000}}$$

y encontraremos que ($\log_2 3$) metros debe estar comprendido entre $\frac{1584}{1000}$ metros y $\frac{1585}{1000}$ metros; y así sucesivamente.

Si al continuar esta operación encontráramos alguna expresión

de la forma $2^q = 3$, entonces, la expresión $\log_2 3$ metros expresaría $\frac{p}{q}$ metros; pero puede suceder, como en este caso, que no encontremos tal expresión y consideremos entonces las dos series de cantidades siguientes:

2^1	metros	2^2	metros	Las cantidades que constituyen la primera serie aumentan constantemente, pero siempre son inferiores a una cualquiera de las de la segunda serie; un raciocinio análogo al efectuado en el n.º 73 nos hace conocer la existencia de un proceso definido por el símbolo ($\log_2 3$) metros. En resumen, una expresión de la forma ($\log_a b$) unidades, en el caso en que no existe potencia alguna de forma racional que origina el conjunto b , puede considerarse como indicando una cantidad o mejor dicho un proceso especial llamada logarítmico ; de suerte que la expresión $\log_a b$ que liga el concepto de unidad con el de esta cantidad, da nacimiento a un número logarítmico .
$\frac{15}{10}$	»	$\frac{16}{2^{10}}$	»	
$\frac{158}{2^{100}}$	»	$\frac{159}{2^{100}}$	»	
$\frac{1584}{2^{1000}}$	»	$\frac{1585}{2^{1000}}$	»	
....				

ma racional que origina el conjunto b , puede considerarse como indicando una cantidad o mejor dicho un proceso especial llamada **logarítmico**; de suerte que la expresión $\log_a b$ que liga el concepto de unidad con el de esta cantidad, da nacimiento a un **número logarítmico**.

266. Establecido esto, las adiciones y subtracciones con canti-

dades logarítmicas no ofrecen dificultad en la interpretación, lo mismo que las multiplicaciones con multiplicandos logarítmicos.

Por otra parte, reemplazando las cantidades o los números logarítmicos por los términos de las series que ellos definen, se interpretaría expresiones de la forma $c \times \log_a b$ y $\log_a b \times \log_c d$, y sus inversos en la división, potenciación y radicación.

Por una ficción de lenguaje podrá decirse que se obtendrán valores aproximados de cantidades y números logarítmicos tomando términos de las series que los definen; y el error cometido se apreciaría como quedó indicado en los n.ºs 59 y siguientes.

EJERCICIOS

Hallar los valores aproximados con 3 cifras decimales de los siguientes números irracionales (*racionalizarlos*):

$$665. \frac{1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{\sqrt{3}-1}, \frac{1}{\sqrt{5}+1}, \frac{1}{\sqrt{6}+1}.$$

$$666. \frac{1}{\sqrt{5}+2}, \frac{1}{\sqrt{6}-2}, \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

$$667. \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}+1}, \frac{2}{\sqrt{3}-1}, \frac{2}{\sqrt{5}-1}.$$

$$668. \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{2}}.$$

$$669. \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}, \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{2}+1}.$$

$$670. \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}.$$

$$671. \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}, \sqrt{5+2\sqrt{6}}, \sqrt{8+2\sqrt{7}}.$$

$$672. \sqrt{12+8\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}, \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}+2\sqrt{3}}}$$

Hallar números equivalentes a los siguientes con un denominador racional:

$$673. \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}}, \frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{10}-\sqrt{5}}.$$

$$674. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}},$$

$$\frac{2\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1} - \sqrt{2a} + \sqrt{a+1}},$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} + \sqrt{2})}.$$

$$675. \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}, \quad \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[6]{9}}, \quad \frac{\sqrt{8}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}-\sqrt[3]{4}}.$$

Hallar los valores de:

$$676. \frac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2}-38+5\sqrt{3}}, \quad \sqrt{\frac{6+2\sqrt{3}}{33-19\sqrt{3}}}.$$

$$677. \text{ Hallar el valor de } (28-10\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{(7+4\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}}.$$

$$678. \text{ Hallar el valor de } (26+15\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{(26+15\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}}.$$

679. Dado el valor de $\sqrt{5} = 2,23607$, hallar el valor de

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18} - \sqrt{3+\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{10} + \sqrt{18}}{\sqrt{8} + \sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

CAPÍTULO XI

INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA

267. El concepto de dirección en dos sentidos opuestos.—

Para precisar ese concepto empezaremos con un ejemplo.

Supongamos que la línea a (fig. 18) representa un camino (o una línea férrea) y que una persona (o un tren) se pasea (o

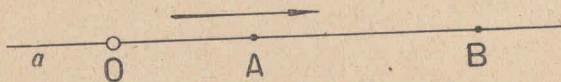


Fig. 18.

circula) por ella. A veces lo hará en la dirección de la flecha, que convendremos en llamar “hacia adelante” o en la dirección “positiva”, a veces en el sentido contrario o “hacia atrás” o en la dirección “negativa” (*).

268. Para ir de A a B, el pasajero caminará (o el tren marchará) hacia adelante, o en la dirección positiva; para ir de B a A lo hará hacia atrás, en la dirección negativa. Concretemos al caso del viajero y supongamos que camina dando pasos todos iguales; podrá, entonces, medir los caminos o las distancias recorridas contando el número de pasos que dé, llamando *pasos positivos* a los dados hacia adelante y *negativos* los dados hacia atrás. Si, por ejemplo, para ir de A a B requiere dar 50 pasos positivos, para ir de B a A tendrá que dar 50 pasos negativos.

269. Convendremos en designarlos respectivamente por $(+50)$ pasos y por (-50) pasos.

(*) Como se comprende, es indiferente considerar como positiva, o “hacia adelante”, a la dirección de izquierda a derecha o a la de derecha a izquierda. lo esencial es que, después de elegida como “positiva” la que se quiera, no debe ya variarse esa elección en todo el curso de la cuestión o problema que se trata.

Más adelante indicaremos el porqué del uso de los signos $+$ y $-$ que tienen ya, para nosotros, el significado de las operaciones de *adición* y *substracción*; pero desde ahora podemos observar que si se desea abreviar la escritura, puede convenirse en suprimir la dirección positiva $+$, estableciéndose que, cuando eso se hace, se trata de la dirección positiva; se tendrá entonces: de A a B, 50 pasos y de B a A (-50) pasos (*).

270. Y esos distingos son necesarios porque no es igual, en la práctica, ir de A a B que de B a A. Si sólo decimos que de A a B o de B a A hay 50 pasos, como se hace en aritmética, la distancia de A a B, que es la misma que la de B a A, está sin duda perfectamente determinada del punto de vista aritmético; pero no lo está la dirección seguida por el viajero o por el tren; mientras, en cambio, las dos cosas lo estarán agregando a 50 el signo convenido para indicar las direcciones; y así $(+50)$ pasos (o simplemente 50 pasos), significará el recorrido AB de A hacia B; y (-50) pasos, significará el recorrido BA, o sea de B hacia A.

271. Diremos también que, para evitar que estos signos de dirección $+$ y $-$ se confundan con los de adición y substracción, los primeros vendrán siempre acompañando la cantidad que afectan, encerrado el conjunto dentro de un paréntesis, como lo hemos hecho más arriba; con tal de que, naturalmente, no hagamos uso de la simplificación indicada en el n.º 269, que se aclarará mejor en el momento oportuno, para evitar las confusiones en cuestión.

272. En estas estipulaciones de caminos dirigidos en uno u otro de dos sentidos opuestos, AB y BA, cabe, entonces, distinguir lo que se llama el **valor absoluto o equivalente aritmético**, que es la longitud común de AB y BA (50 pasos en este ejemplo); y el equivalente *algebraico*, que es el valor absoluto acompañado o completado con el signo o la indicación de la dirección en que se le supone recorrido por un móvil. En el ejemplo considerado, el equivalente algebraico del camino AB recorrido de A hacia B es $(+50)$ pasos, mientras el de BA, recorrido de B hacia A, es (-50)

(*) Por el momento no haremos uso de esta simplificación, pero sí más adelante (n.º 286).

pasos. Naturalmente, es necesario fijar previamente la dirección considerada como *hacia adelante* o *positiva* (el de la flecha en la figura).

273. Estas distinciones se imponen para resolver o precisar ciertas cuestiones o problemas. Así, si se nos dice que en una línea de ferrocarriles hubo un choque a 5 km. de una determinada estación, no nos bastarían esos datos para precisar el lugar del siniestro y concurrir a ese lugar, pues debe también decirse en cual de los dos costados de la estación, recorriendo la línea férrea, se ha producido el hecho.

Lo mismo ocurre en el caso de la siguiente pregunta:

Un habitante de la ciudad de Dolores, viaja frecuentemente en la línea Buenos Aires - Bahía Blanca; a veces lo hace en dirección a la primera, a veces en la de la segunda; cada día apunta la distancia a que se encuentra de Dolores; el lunes esa distancia era de 40 km., el martes lo era de 60 km. ¿Qué distancia ha recorrido del lunes al martes?

Es obvio que tales datos son insuficientes para contestar a la pregunta, pues que si los dos puntos en que se encontraba el viajero el lunes y el martes, están ambos ya hacia Buenos Aires, ya hacia Bahía Blanca, con respecto a Dolores, le habrá bastado recorrer $(60 - 40 = 20)$ kilómetros para ir de un punto al otro; pero si un punto está hacia Buenos Aires y el otro hacia Bahía Blanca, siempre con respecto a Dolores, habrá tenido que recorrer $(60 + 40 = 100)$ kilómetros.

Luego pues, para resolver el problema, hay que asociar a los datos 40 km. y 60 km. la noción de dirección en uno u otro de los dos sentidos opuestos con respecto a Dolores, uno hacia Buenos Aires, otro hacia Bahía Blanca, siguiendo la considerada línea férrea que une esas dos ciudades pasando por Dolores.

El termómetro marcaba ayer 3° de temperatura, hoy marca 2°. ¿Cuándo hacía más frío, ayer u hoy?

Para saberlo nos falta conocer si esos grados están arriba o debajo de 0°; si ambos están arriba, hace más frío hoy; si ambos están debajo hacía más frío ayer; si los 3° estaban arriba y los 2° debajo, hace más frío hoy; y al revés si los 3° estaban debajo y los 2° arriba.

Luego este problema requiere también, para poder resolverse,

asociar a las dos cantidades 2º y 3º, la dirección o sentido respecto de la temperatura 0º que se toma como origen común para contar las temperaturas.

274. Los problemas relativos a la fijación de fechas en los diversos calendarios donde los años son contados a partir de un determinado acontecimiento histórico, siendo así que antes sucedieron otros, dan origen a las mismas observaciones; e igualmente los problemas del *debe* y *haber* de un comerciante.

275. Vamos a ver, pues, qué clase de operaciones son compatibles con esta asociación de los conceptos de cantidad y de dirección en uno u otro de dos sentidos opuestos; y de cómo esas operaciones afectan ambos conceptos. Por lo demás, se comprende que el estudio de esta clase de operaciones puede reducirse, en todos los casos y por analogía, al que cabe efectuar con longitudes, tomadas en una línea y, en particular, en una línea recta, esto es la que dibuja un hilo bien estirado: basta equipar la unidad de la cantidad que se estudia, con la unidad de longitud tomada en la línea, y repetir, luego, todos los raciocinios hechos con las longitudes, cambiando la *unidad de longitud* por la de *unidad de la cantidad* que se considera.

276. Si la recta es la *a* de la fig. 18, y en ella elegimos un punto u *origen* O a partir del cual tomamos o consideramos longitudes en uno u otro de los dos sentidos opuestos en esa recta, todo camino recorrido, por ejemplo el AB, tiene, como vimos, dos extremidades bien diferenciadas, una, el punto de partida del móvil que lo recorre en determinado sentido; y, el otro, el punto de llegada del móvil cuando ha recorrido el camino.

Un segmento de recta así orientado se llama *un vector*, se le designa indicando, primero, el punto de partida y, después, el de llegada. El vector AB no es el mismo, pues, que el vector BA; el primero se supone recorrido partiendo de A y llegando a B; el otro, partiendo de B y llegando a A. Ambos tienen la misma longitud o equivalente aritmético, pero son de signos contrarios. A esta clase de vectores así dispuestos, AB y BA, se les dice *opuestos* o *simétricos*.

277. Definición del Álgebra. — Esta ciencia tiene esencialmente por objeto el estudio de las operaciones matemáticas compatibles con la asociación de los conceptos de cantidad aritmética y de dirección en uno u otro de dos sentidos opuestos. *Es la ciencia de los vectores dirigidos en uno u otro de dos sentidos opuestos.*

278. Cantidades o vectores algebraicos. Números relativos o algebraicos. — Una cantidad afectada, como se ha explicado, con una dirección en uno u otro de dos sentidos opuestos, se dice una *cantidad (o vector) algebraico*. Para individualizarla debe darse la *unidad* y el *número de unidades* componentes, como en aritmética, pero además, la *dirección* correspondiente. Es decir que, a la determinación de la *unidad*, debe agregarse *algo* que afecta a la vez al número de unidades y a la dirección.

Ese algo que resulta así de la fusión de los conceptos de número aritmético y de dirección, y que liga la unidad con el vector algebraico, se le llama *número relativo o número algebraico*.

Por ejemplo, cuando se dice (-15) km., el agente que hace pasar la unidad kilómetro al vector (-15) km., es el número algebraico, negativo en este caso, y que está representado por el símbolo (-15) ; corresponde a lo que hemos designado en el n.º 272 con el nombre de *equivalente algebraico*.

Veamos ahora las operaciones fundamentales que pueden realizarse con esas cantidades algebraicas y la justificación de las mismas en la práctica.

279. Adición algebraica. — Supongamos que el viajero que se pasea sobre el camino a (fig. 19) hace 5 pasos adelante o sea

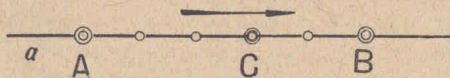


Fig. 19.

$(+5)$ pasos y luego 2 hacia atrás, o sea (-2) pasos. Primero, llegó, digamos, de A a B; luego de B a C; es obvio que hubiese llegado de A a C directamente dando 3 pasos adelante $[(+3)$ pasos].

Expresamos el hecho diciendo que el camino AC es la **suma**

algebraica de los caminos AB y BC cada uno de los cuales son los *sumandos* de dicha suma, se escribe ya sea así:

$$AC = AB + BC,$$

o con los equivalente algebraicos

$$(+3) \text{ pasos} = (+5) \text{ pasos} + (-2) \text{ pasos}.$$

280. Se ve de inmediato, que la suma algebraica es muy distinta de la aritmética. Aritméticamente, el viajero que nos ocupa ha dado $5 + 2 = 7$ pasos, pero como los 2 pasos fueron dados en dirección contraria a los 5 pasos, en definitiva sólo se avanzó de 3 pasos, y ésta es la suma algebraica, que sólo se preocupa de relacionar el punto de partida con el de llegada sin preocuparse de otras cosas, por ejemplo del cansancio del viajero, el cual hubiera podido dar 1003 pasos adelante seguidos de 1000 para atrás sin haber, por eso, adelantado más que antes respecto del punto de partida.

Análogamente, tendríamos que:

$$\begin{array}{ll} (+5) \text{ pasos} + (+2) \text{ pasos} = (+7) \text{ pasos} & \text{a)} \\ (-5) \text{ pasos} + (+2) \text{ pasos} = (-3) \text{ pasos} & \text{b)} \\ (-5) \text{ pasos} + (-2) \text{ pasos} = (-7) \text{ pasos} & \text{c)} \end{array}$$

expresiones que significan lo siguiente:

a) Cinco pasos hacia adelante, seguidos de dos hacia adelante equivalen a siete pasos positivos.

b) Cinco pasos hacia atrás, seguidos de dos hacia adelante equivalen a tres pasos hacia atrás.

c) Cinco pasos hacia atrás, seguidos de dos hacia atrás, equivalen a siete pasos hacia atrás.

281. Deducimos la siguiente regla:

Para obtener la suma de dos cantidades dirigidas en el mismo sentido, se suman sus valores absolutos y se afecta esta suma del signo de la dirección común; si están dirigidas en sentido contrario, se resta el de menor valor absoluto, del mayor, y al resultado se afecta del signo de la dirección que tiene el sumando de mayor valor absoluto.

Ejemplos (prescindiendo de la unidad):

$$\begin{aligned} (+3) + (-4) &= (-1) \\ (+125) + (-200) &= (-75) \\ (-3250) + (-3) &= (-3253) \\ (-1000) + (+2) &= (-998) \\ (-1010) + (+2000) &= (+990) \\ (+134) + (-134) &= 0. \end{aligned}$$

282. Este último resultado expresa la suma de dos vectores algebraicos *opuestos* o *simétricos* (n.º 276) cuya suma algebraica es siempre, evidentemente, *nula*.

283. Adición de varias cantidades dirigidas. — Se suman las dos primeras, luego, a esta suma, se le adiciona la tercera, etc.

284. Propiedades conmutativa y asociativa de la adición algebraica. — Sea, por ejemplo, ejecutar la adición

$$(+12) \text{ pasos} + (-5) \text{ pasos} + (-28) \text{ pasos} + (+13) \text{ pasos.}$$

Si primero se dieron 12 pasos hacia adelante y luego 5 hacia atrás, se dieron, en definitiva, 7 hacia adelante: lo mismo ocurre invirtiendo el orden de esos dos sumandos, ya que, cinco pasos hacia atrás, seguidos de 12 hacia adelante, siempre nos conducen a 7 hacia adelante. Luego

$$(+12) \text{ pasos} + (-5) \text{ pasos} = (-5) \text{ pasos} + (+12) \text{ pasos.}$$

Del mismo modo veríamos que:

$$(-28) \text{ pasos} + (+13) \text{ pasos} = (+13) \text{ pasos} + (-28) \text{ pasos.}$$

Esto nos demuestra la propiedad *conmutativa* de la adición algebraica.

285. Por otra parte: La suma de varios grandores algebraicos no altera reemplazando varios de los sumandos por la suma parcial de ellos (propiedad asociativa).

Así, en el ejemplo que estamos considerando, podemos observar que ya que 12 pasos hacia adelante seguidos de 5 hacia atrás equivalen a 7 hacia adelante; si estos son seguidos de 28 hacia atrás nos resultará un total de 21 hacia atrás; pero, de igual manera, 12 pasos hacia adelante seguidos de $[(-5) + (-28)]$ o sea de 33 pasos hacia atrás, nos conduce siempre a un total de 21 pasos hacia atrás. Luego:

$[(+12) + (-5)] \text{ pasos} + (-28) \text{ pasos} = (+12) \text{ pasos} +$
 $[(-5) + (-28)] \text{ pasos}$
 que es la expresión de la propiedad asociativa para el caso.

286. De ahí resulta que: *Para calcular la suma algebraica de varios sumandos, puede sumarse, primero, todos los sumandos positivos, como en aritmética; luego, de igual manera, todos los negativos. Se resta luego, como se indicó en el n.º 281, del mayor valor absoluta, el menor; y al resultado se le afecta del signo de dirección de aquél.*

Ejemplos (siempre prescindiendo de la unidad):

$$\begin{aligned} (+2357) + (-324) + (+325) + (-1024) + (+1004) \\ = (+[2357 + 325 + 1004]) + (-[324 + 1024]) = \\ = (+3686) + (-1348) = (+2338). \end{aligned}$$

Si se utilizase la notación abreviada apuntada en el n.º 269, el ejemplo anterior podría haberse escrito así:

$$\begin{aligned} 2357 + (-324) + 325 + (-1024) + 1004 = \\ = [2357 + 325 + 1004] + (-[324 + 1024]) = \\ = 3686 + (-1348) = 2338. \end{aligned}$$

En algunas de las expresiones anteriores hemos, para simplificar la escritura, prescindiendo de indicar la unidad, pero por las mismas razones invocadas en Aritmética (Vol. I, n.º 39, pág. 24), se puede, aunque impropriamente y sólo por simplificación de lenguaje, hablar de la *adición algebraica* de números relativos y comprobarse que el único número que, sumado con otro, no lo altera, es el número cero; o sea que el módulo (Vol. I, n.º 42, pág. 26) de la adición algebraica, lo mismo que el de la adición aritmética, es el número cero.

287. Resulta, en definitiva, que la adición algebraica tiene exactamente las mismas propiedades características de la adición aritmética, y que satisface, por consiguiente, a lo que el matemático German Hankel llamaba *principio de conservación de las reglas formales*; y esa es la razón porque a una y otra de esas operaciones se les designa con el mismo nombre de *adición*.

288. **Substracción algebraica.** — Consiste en hallar uno de los sumandos de una suma algebraica conociendo ésta y el otro su-

mando. Al sumando buscado se le llama *resto*, al conocido, *substraendo* y a la suma dada, *minuendo*.

Así, substraer $(+3)$ pasos de $(+5)$ pasos es hallar cuántos pasos hay que dar después de haber dado $(+3)$ pasos, para obtener un total de $(+5)$ pasos. Se obtiene $(+2)$ pasos ya que efectivamente

$$(+3) \text{ pasos} + (+2) \text{ pasos} = (+5) \text{ pasos.}$$

Análogamente tendremos que, substraer

$$(-3) \text{ pasos de } (+5) \text{ pasos, es dar } (+8) \text{ pasos}$$

ya que efectivamente

$$(-3) \text{ pasos} + (+8) \text{ pasos} = (+5) \text{ pasos.}$$

Se usan, como vemos, los mismos términos que en aritmética, o sea *minuendo*, *substraendo*, *residuo*; y el mismo signo, $-$, para indicar la substracción.

289. Regla. — *Para substraer (o restar) una cantidad dirigida de otra, se adiciona al minuendo, el substraendo dirigido en sentido contrario (o sea, se le suma la cantidad o vector, simétrico u opuesto a dicho substraendo).*

Así para restar $(+3)$ km. de $(+5)$ km. se agrega el minuendo $(+5)$ km. el vector (-3) km. simétrico u opuesto al substraendo.

Es una consecuencia de la propiedad apuntada en el n.º 282 relativa a que la suma de dos vectores algebraicos opuestos es nula, de modo que si, a una cantidad algebraica dada, por ejemplo $(+8)$ km. se le suman simultáneamente, dos de esos vectores simétricos, ella no altera.

Pongamos que los vectores agregados sean $(+3)$ km. y (-3) km., resulta entonces

$$(+8) \text{ km.} + (+3) \text{ km.} + (-3) \text{ km.} = (+8) \text{ km.}$$

Sea, entonces, efectuar la substracción

$$(+8) \text{ km.} - (-3) \text{ km.}$$

decimos que el resto es

$$(+8) \text{ km.} + (+3) \text{ km.} = 11 \text{ km.}$$

Pues, efectivamente, si ese es el resto buscado, se conocerá

esa circunstancia, sumándolo con el substraendo (+ 3) km., debe dar el minuendo, y es lo que resulta, según la fórmula

$$\begin{array}{ccccccc} (+8) \text{ km.} & + & (+3) \text{ km.} & + & (-3) \text{ km.} & = & (+8) \text{ km.} \\ \text{resto} & & & & \text{substraendo} & & \text{minuendo} \end{array}$$

Y lo mismo tendríamos que

$$(+8) \text{ km.} - (+3) \text{ km.} = (+8) \text{ km.} + (-3) \text{ km.} = (+5) \text{ km.}$$

290. Viceversa, puede la adición cambiarse en substracción, invirtiendo la dirección de un sumando.

La operación que consideramos es evidentemente uniforme, no conmutativa ni asociativa y de módulo cero como la homónima de la aritmética; y de ahí, precisamente, esa homonimidad. Pero aquí, a diferencia de la substracción aritmética, la operación, por su naturaleza, es siempre teóricamente posible ya que se la puede reducir a una adición.

291. Por eso, la combinación de la adición con la substracción algebraica no ofrece el interés que tenía en aritmética, pudiéndose concretar las observaciones relativas a esa combinación, sólo a las relativas a la adición.

292. Un polinomio algebraico puede, por esa causa, escribirse en la misma forma y con las mismas notaciones, que un polinomio aritmético (Vol. I, n.º 57, pág. 35). Y efectivamente, con la convención hecha en el n.º 269, puede eliminarse el signo (+) de dirección positiva; y en cuanto a la dirección negativa, la podemos, cambiando la adición en substracción o viceversa, hacerla positiva.

(El primer término del polinomio puede siempre suponerse sumado con 0).

293. Quedan así, en suma, eliminados todos los signos de dirección, y dado al problema algebraico el aspecto de un polinomio aritmético; pero no hay que olvidar las convenciones que para ello ha sido necesario establecer.

Si, por ejemplo, apareciese una expresión de la forma 3—7 imposible en aritmética, aquí expresaría (+3) — (+7) o sea (+3) + (—7) = (—4). Si el primer término fuese —3, expresaría el número algebraico (—3).

En suma hay que tener en cuenta, al eliminar así todos los signos de dirección, que:

294. Si al efectuar esa eliminación resultaran subtracciones aritméticamente imposibles por ser el minuendo menor que el substraendo, habrá que invertir estos términos a fin de hacer la operación aritméticamente posible y afectar al resto de la dirección negativa. El signo (—) colocado delante de cualquier cantidad aislada expresará que está orientada en el sentido negativo.

La ausencia de signo, o el signo (+) delante de una cantidad aislada significa que está orientada en el sentido positivo. Finalmente, una expresión de la forma $-p - q$, significa $-(p + q)$.

295. Resulta así que, tratándose de cantidades algebraicas, no existen casos de imposibilidad de subtracciones como sucede en las cantidades aritméticas, cuando el minuendo es menor que el substraendo.

La subtracción $(a + b - c + \dots) - (p + q - r + s - t + \dots)$ es igual a $a + b - c + \dots - p - q + r - s + t - \dots$, pues que este resultado, sumado con el substraendo, origina el minuendo, y así debe ser por la misma razón invocada en el n.º 289.

Es decir que, para restar algebraicamente un polinomio de otro, basta sumar a éste, el polinomio, diremos opuesto o simétrico, del substraendo.

296. Y viceversa, una suma algebraica de dos polinomios puede transformarse en una diferencia algebraica, substituyendo al sumando que se quiere transformar en substraendo, el opuesto o simétrico; es decir, por el que se obtiene dando dirección opuesta a cada uno de los términos que lo componen. Y eso puede ejecutarse teniendo en cuenta la propiedad conmutativa y asociativa de la suma algebraica.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} & (a + b - c + d) + (p + q - r + s) \equiv \\ & \equiv a + b - c + d - (-p - q + r - s); \\ & \quad a + b - c + d - e + f - g \equiv \\ & \equiv a - c - e - (-b - d - f + g). \end{aligned}$$

Ejemplos varios

297. EJEMPLO 1. — *Un pasajero domiciliado en un punto situado en el trayecto recorrido por una línea de tranvía que une la plaza de Mayo con la de Flores, toma frente a su casa un coche de dicha línea y hace 20 cuadras hacia Flores; vuelve hacia la plaza de Mayo y recorre 30 cuadras; hace nuevamente 15 cuadras hacia Flores. ¿En qué punto se encuentra respecto de su casa?*

Considerando como dirección positiva el trayecto recorrido de la plaza Mayo hacia la de Flores, la solución resulta de la siguiente adición algebraica:

$$20 - 30 + 15 = 5.$$

El viajero se encuentra, pues, a cinco cuadras de su casa hacia Flores.

298. EJEMPLO 2. — *Un inspector de ferrocarriles tiene orden de encontrarse en un punto de la línea situado a 60 km. a la izquierda de cierta estación. El inspector en cuestión sale de la estación y antes de trasladarse a ese punto, inspecciona 80 km. de vía a la derecha de dicha estación; regresa luego y recorre 120 km., y disponiendo aun de tiempo, vuelve hacia la derecha recorriendo 50 km. ¿Qué camino debe hacer para concurrir al punto que se le indicó al principio y en qué sentido debe moverse?*

Si el camino positivo se supone ser el izquierdo a derecha de la estación, el camino que se busca es la diferencia entre el total de la estación al punto señalado, o sea -60 km. y lo que ya recorrió o sea

$$\begin{aligned} (-60) - (80 - 120 + 50) &= -60 - 80 + 120 - 50 \\ &= 120 - 190 = -70. \end{aligned}$$

Debe pues recorrer 70 km. de derecha a izquierda.

299. EJEMPLO 3. — *Dos viajeros marchan en el camino Buenos Aires - La Plata; el primero, que está 15 km. más cerca de Buenos Aires, hace 5 km. hacia La Plata, el otro hace 8 en dirección a Buenos Aires. ¿Qué distancia los separa en ese momento?*

Consideremos positiva la dirección Buenos Aires - La Plata y convengamos en llamar *distancia del primer viajero al segundo*, la

distancia aritmética del camino que debe regresar el primero para alcanzar al segundo juntamente con su signo de dirección; esa distancia era al principio $(+15)$ km. ya que el primero estaba 15 km. más cerca de Buenos Aires. Al andar el primer viajero 5 km. hacia La Plata, su distancia al segundo, supuesto inmóvil, quedó en $15 - 5 = 10$ km., pero como el otro avanzó 8 km. en dirección a Buenos Aires, la distancia que les separa quedó en definitiva siendo

$$(15 - 5 - 8) \text{ km.} = 2 \text{ km.}$$

estando en ese momento el primer viajero hacia el lado de Buenos Aires y el otro hacia el lado de La Plata.

Si el cálculo hubiera dado 0 km. se desprendería que los viajeros se han encontrado; si hubiese salido $(-a)$ km. significaría que el segundo viajero pasó al primero, encontrándose ahora más cerca que éste de Buenos Aires en a km.

300. EJEMPLO 4. — *Tiempo positivo y tiempo negativo. Un acontecimiento ha tenido lugar 50 años antes del descubrimiento de América (1492); otro tuvo lugar 70 años después de ese descubrimiento; un tercero 80 años antes del segundo acontecimiento. ¿Qué lapso separa el primer acontecimiento del tercero?*

Considerando positivo el tiempo en el sentido pasado-futuro, y tomando como origen el primer acontecimiento, la solución está evidentemente dada por el polinomio algebraico

$$+50 + 70 - 80 = 40$$

es decir que el último acontecimiento tuvo lugar 40 años después del primero, o sea, diez años antes de 1492 (en 1482).

En este ejemplo podría decirse que -50 años es la suma algebraica de todos los lapsos, incluso el que se busca, de modo que, esta es la diferencia algebraica entre -50 y la suma $70 + (-80)$, que son los sumandos conocidos, sacamos efectivamente:

$$-50 - 70 + 80 = -40.$$

301. EJEMPLO 5. — *Debe y Haber.*

a) *Un comerciante tiene 1000 \$ en caja, compra mercaderías por valor de 500 \$, vende por valor de 800 y compra nuevamente por valor de 700. ¿Cuál es el estado de su caja?*

Afectando con signo negativo los gastos, es evidente que el estado pedido, de su caja, resulta del polinomio algebraico

$$1000 \$ - 500 \$ + 800 \$ - 700 \$ = 600 \$.$$

b) *Juan poseía 100 \$, recibió 12, gastó 25, cobró 7 y gastó 50. ¿Cuánto tiene actualmente?*

$$\text{R.: } 100 \$ + 12 \$ - 25 \$ + 7 \$ - 50 \$ = 44 \$.$$

c) *Pedro tenía 100 \$, firmó un pagaré por 125, recibió 10. ¿Qué le queda?*

$$\text{R.: } 100 - 125 + 10 = - 15 \$$$

es decir, tiene una *deuda* de 15 \$.

d) *Diego debe 25 \$, recibe 50 y gasta 10, ¿qué le queda?*

$$\text{R.: } - 25 \$ + 50 \$ - 10 \$ = 15 \$.$$

302. NOTA. — Generalmente, los comerciantes emplean para resolver los problemas de esta especie, el método indicado en el n.º 281.

Al efecto, inscriben en dos columnas diferentes las sumas de dinero positivas y negativas, las que llaman respectivamente *Debe* y *Haber*. No tienen entonces sino sumar separadamente las dos columnas y restar la de menor valor absoluto de la otra, dando al resultado el signo de la columna a que corresponde la de mayor valor absoluto.

303. Para terminar con la adición y substracción algebraicas, repitamos que, a esas operaciones, no vienen unidas las nociones de aumento o disminución del valor absoluto de los datos, como sucede en las operaciones homónimas relativas a la aritmética; y eso porque la introducción de la noción de dirección modifica los valores absolutos de los datos en sentido distinto al correspondiente a las operaciones aritméticas homónimas (n.º 280).

PROBLEMAS DE ADICIÓN Y SUBTRACCIÓN ALGEBRAICAS

680. El 1.º de enero, Juan debía 60 \$ a Diego; el 5 del mismo mes, Diego recibió 50 \$ de Juan; el 10, Diego remitió a Juan 38 \$ de mercaderías; el 15 Diego ha encargado a Juan de pagar por su cuenta 43 \$ a Pedro; el 20, Juan pidió 10 \$ a Diego; el 25, Diego recibió 100 \$ de Juan, ¿cómo debe arreglar las cuentas al fin del mes?

681. Un alpinista sale de una estación cuya altura es 320 m.; sube en tren 50 m., en coche 200 m., a pie 2350, baja a pie 2240 m., sube nuevamente en coche 50 m. y vuelve a bajar en tren 412 m., ¿a qué altura se encuentra?

304. Multiplicación algebraica. — Multiplicar una cantidad algebraica (multiplicando) por un número algebraico (multiplicador), es hallar otra cantidad algebraica (producto) cuyo valor absoluto sea el producto (aritmético) de los valores absolutos de los factores (multiplicando y multiplicador), y cuya dirección sea positiva si los factores tienen igual dirección, o negativa en caso contrario.

Se emplean los mismos signos que en Aritmética. Así se tiene:

$$\begin{aligned} (+4) \text{ pasos} \times (+3) &= (+12) \text{ pasos} \\ (+4) \text{ pasos} \times (-3) &= (-12) \text{ pasos} \\ (-4) \text{ pasos} \times (+3) &= (-12) \text{ pasos} \\ (-4) \text{ pasos} \times (-3) &= (+12) \text{ pasos.} \end{aligned}$$

Convencionalmente se habla también, impropriamente, del producto de dos números algebraicos y se escribe:

$$\begin{aligned} (+4) \times (+3) &= (+12); (+4) \times (-3) = (-12) \\ (-4) \times (+3) &= (-12); (-4) \times (-3) = (+12). \end{aligned}$$

O también simplificadamente, como se indicó en el n.º 269:

$$\begin{aligned} 4 \times 3 &= 12 & 4 \times (-3) &= -12 \\ -4 \times 3 &= -12 & -4 \times (-3) &= 12. \end{aligned}$$

305. Puede comprobarse sin dificultad, que la operación es uniforme y conmutativa, interpretando esa frase en el mismo sentido que se hizo en Aritmética (Vol. I, n.º 85, pág. 45), es decir, sin olvidar que el multiplicando es una cantidad y el multiplicador un número.

Puede también comprobarse que se trata de una operación distributiva respecto de la adición y, por lo tanto, de la sustracción (*). Y si se combina esta propiedad con la propiedad conmu-

(*) Los alumnos pueden, a título de ejercicio, desarrollar esa demostración. Gráficamente la cosa es sencilla. Consideremos, por ejemplo, la operación $(3u - 4u + 5u) \times (-2)$. Para probar que el producto es $[3u \times (-2)]$



Fig. 20.

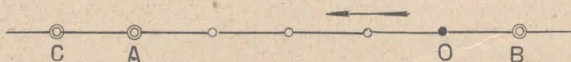


Fig. 21.

$+ [(-4u) \times (-2)] + [+5u \times (-2)]$ basta considerar la figura 20, en la que, a partir del origen O y en la dirección de la flecha, supuesto que es la

tativa, se ve que la multiplicación algebraica es una operación *completamente distributiva* respecto de la adición y, por lo tanto, de la sustracción, ya que ésta se reduce a aquella. Es decir que tenemos, en suma, que por ejemplo,

$$(3u - 4u + 5u) \times (-2) = (-2u) \times (3 - 4 + 5) = -6u + 8u - 10u = -8u.$$

Puede igualmente comprobarse que es también una operación asociativa, o sea que cumple la condición

$$a.(b.c) \equiv (a.b).c (*).$$

El módulo de la multiplicación resulta ser $(+1)$.

Resulta así que la multiplicación algebraica reúne todas las propiedades fundamentales de la multiplicación aritmética, satisface al recordado principio de Hankel; y de allí que se le haya dado el nombre de *multiplicación*.

306. La multiplicación de un polinomio algebraico por otro, no ofrece dificultad después de lo ya dicho. Sea, por ejemplo, multiplicar

$$\begin{array}{r} (3 - 4 + 2 - 8) \\ (-1 + 5 - 6). \end{array}$$

por

positiva, se ha tomado: primero, el segmento OA que corresponde a $3u$, luego el AB que corresponde a $(-4u)$; luego el BC, que corresponde al $+5u$.

El multiplicando es entonces el segmento OC $= +4u$.

Para multiplicar ese segmento OC, por el multiplicador (-2) , podemos suponer mirada la figura con un lente de aumento que la duplique e invierta, (fig. 21), entonces el segmento OC resulta así duplicado y dirigido en sentido inverso, o sea efectivamente multiplicado por (-2) ; pero la misma figura nos hace ver que ese nuevo segmento OC, es siempre la suma de los tres segmentos OA, AB, BC, cada uno de los cuales resulta respecto de la fig. 20 duplicados y de sentido inverso, o sean multiplicados por (-2) , lo que demuestra así, físicamente diremos, la propiedad distributiva de la multiplicación algebraica.

La demostración puramente analítica consistiría a examinar todas las combinaciones de signos posibles en los casos de sólo dos sumandos en el multiplicando, y efectuar cada vez las operaciones a fin de comprobar que efectivamente, siempre se cumple la regla.

No habrá, después, dificultad en extenderse al caso de un número cualquiera de sumandos en el multiplicador.

(*) Ejercicio que pueden realizar los alumnos; basta observar que la propiedad asociativa existe para los valores absolutos, ya que es cuestión de aritmética (Vol. I, n.º 91, pág. 47); y en cuanto a los signos de dirección ocurre la misma propiedad pues que, simbólicamente, se tiene siempre:

$$[(+) . (-)] . (-) \equiv (+) . [(+) . (-)] = +, \text{ etc.}$$

Tenemos, sucesivamente, que designando por m al multiplicador
 $-1 + 5 - 6$

la operación toma la forma

$$(3 - 4 + 2 - 8) m \equiv 3 m - 4 m + 2 m - 8 m$$

o sea

$$\begin{aligned} &+ 3(-1 + 5 - 6) - 4(-1 + 5 - 6) + \\ &+ 2(-1 + 5 - 6) - 8(-1 + 5 - 6) = \\ &= -3 + 15 - 18 + 4 - 20 + 24 - 2 + 10 - 12 + 8 - 40 + 48. \end{aligned}$$

307. Complementos sobre las operaciones con polinomios aritméticos. — Antes de seguir adelante con la multiplicación algebraica, es conveniente recordar y completar lo dicho sobre las operaciones con polinomios aritméticos en el Vol. 1 (pág. 37) n.^{os} 61 a 63.

a) *Substracción de polinomios aritméticos.*

Consideremos la substracción de dos polinomios aritméticos.

Sea, por ej., restar de

$$a + b - c + d - e + f \pm \dots$$

el polinomio

$$m - n + p - q - r + s \pm \dots$$

Recordemos que, según la definición de substracción, el residuo, *que es único*, sumado con el substraendo, debe originar el minuendo. Cumple esta condición el conjunto representado cuando se escribe, primero, el minuendo, y a continuación cada uno de los conjuntos parciales que componen el substraendo, sumados o restados, según que, en el substraendo, figuren como cantidades a restar, o cantidades a sumar. En el caso anterior obtendríamos:

$$\begin{aligned} &(a + b - c + d - e + f \pm \dots) - (m - n + p - q - r + s \pm \dots) \equiv \\ &\equiv a + b - c + d - e + f \pm \dots - m + n - p + q + r - s \mp \dots \end{aligned}$$

Si este último conjunto, segundo miembro de la igualdad, es realmente el residuo buscado, bastará comprobarlo sumándolo con el substraendo, se debe originar el minuendo. Así ocurre evidentemente, dada la forma cómo se ha formado el presunto residuo. Luego:

308. *Para expresar el residuo de la substracción de dos polinomios aritméticos, se escribe el minuendo y, a continuación, cada uno de los conjuntos parciales que componen el substraendo, el primero restado y los demás sumados o restados, según que en el substraendo figuren respectivamente restados o sumados.*

Se ve así la notable simplificación que aporta en la escritura ese signo Σ , extensivo del signo $+$, y usado por el matemático Lagrange en 1772.

De las fórmulas a) y b) resulta la siguiente regla que ya hemos enunciado en aritmética:

310. Para multiplicar la suma indicada de varios conjuntos por una suma indicada de varios números, se multiplica cada uno de los sumandos del multiplicado, por cada uno de los sumandos del multiplicador, y se suman los productos parciales así obtenidos.

De igual manera se comprueba la identidad

$$\begin{array}{ccccccc} r=n & s=m & t=p & r=n & s=m & t=p \\ \Sigma_{r=1} & a \times & \Sigma_{s=1} & b_s \times & \Sigma_{t=1} & c_t \equiv & \Sigma_{r=1} \Sigma_{s=1} \Sigma_{t=1} a_r b_s c_t \dots (c) \end{array}$$

que puede extenderse.

Supongamos ahora que el conjunto $a - b$ debe repetirse $(p \pm q)$ veces como sumando (las subtracciones se suponen posibles). Efectuemos la operación $p \pm q$ y designemos con m al resultado, se tiene así

$$\begin{aligned} (a - b) (p \pm q) &\equiv (a - b) m = am - bm \\ (a - b) (p \pm q) &= a (p \pm q) - b (p \pm q) = ap \pm aq - bp \mp bq. \end{aligned}$$

Observando este resultado se deduce la siguiente regla:

311. Para multiplicar un conjunto de la forma $a \pm b$, por un número $p \pm q$, se multiplica cada uno de los conjuntos parciales (o términos del multiplicando) por cada uno de los números componentes del multiplicador; se suman los productos parciales, en los que el conjunto y el número figuran, en los factores, como ambos a sumar o ambos restar; y se restan de la suma anterior todos los demás productos parciales. Se obtiene así el producto buscado.

Por ejemplo:

$$(6u - 3u) (7 + 4) = 6u \times 7 + 6u \times 4 - 3u \times 7 - 3u \times 4$$

Los productos parciales $6u \times 7$ y $6u \times 4$, se suman porque el conjunto $6u$ y los números 7 y 4, figuran en los factores como términos a sumar; los productos parciales $3u \times 7$ y $3u \times 4$, se restan porque el conjunto $3u$ y los números 7 y 4 figuran en los factores dados, el primero como conjunto a restar y los otros como números a sumar.

Esta regla puede extenderse a polinomios aritméticos de cualquier número de términos.

Así sea la operación:

$$(a + b - c + d - e + f \pm \dots) \times (m - n + p - q - r - s \pm \dots).$$

Efectuando, primero, la operación parcial

$$(a + b - c + d - e + f \pm \dots)$$

y designando con k al resultado, tendremos:

$$\begin{aligned} k(m - n + p - q - r + s \pm \dots) &\equiv (m - n + p - q - r + s \pm \dots)k \equiv \\ &\equiv (m - n + p - q - r + s \pm \dots) + (m - n + p - q - r + s \pm \dots) + \dots \\ &\quad (k \text{ veces}) \\ &\equiv m + m + m + \dots - (n + n + n \dots) + (p + p + p \dots) - \\ &\quad (q + q \dots) - (r + r \dots) + (s + s \dots) \pm \dots \equiv \\ &\quad = mk - nk + pk - qk - rk + sk \pm \dots \end{aligned}$$

Y reemplazando ahora k por $a + b - c + d - e + f \pm \dots$, sale

$$\begin{aligned} (a + b - c + d - e + f \pm \dots) (m - n + p - q - r + s \pm \dots) &\equiv \\ &+ (a + b - c + d - e + f \pm \dots) m + \\ &- (a + b - c + d - e + f \pm \dots) n + \\ &+ (a + b - c + d - e + f \pm \dots) p + \\ &- (a + b - c + d - e + f \pm \dots) q + \\ &\dots \end{aligned}$$

Observando atentamente este resultado se ve que, en el producto definitivo figuran todos los productos parciales (am , bp , $\dots$, cq , $\dots$) obtenidos multiplicando cada uno de los sumandos del multiplicando, por cada uno de los sumandos del multiplicador; y que cada producto parcial figurará en el producto final como cantidad a sumar o a restar según que, en los factores iniciales, los dos elementos que componen ese producto parcial figuren *ambos* como entidades a sumar o a restar, o que uno lo sea a sumar y el otro a restar.

Por ejemplo, los productos parciales am y en figuran en el producto total como cantidades a sumar, porque sus elementos componentes a y m , e y n figuran en los factores iniciales como cantidades *simultáneamente* a sumar o simultáneamente a restar, y entonces al efectuar las operaciones, les toca tener delante el signo de adición de acuerdo con las reglas anteriores para la adición y substracción de conjuntos (n.º 308).

En cambio, los productos parciales *an* y *cp* figuran restando porque *a* y *n*, así como *e* y *p* figuran en los factores dados, el uno como cantidad a sumar y el otro como número a restar, o viceversa, y entonces la regla recién recordada les hace asignar el signo de substracción en el resultado final.

De aquí la siguiente regla mnemotécnica general:

312. *Para multiplicar dos polinomios aritméticos, se multiplica cada uno de los términos del multiplicando, por cada uno de los términos del multiplicador; se suman aquellos productos parciales que resultan de multiplicar dos elementos que figuran en los factores dados ambos sumando o ambos restando (es decir, ambos precedidos del signo + o del signo —) y de esta suma se restan aquellos productos parciales que resultan de multiplicar dos elementos que figuran en los factores dados, precedidos de signos distintos; el polinomio aritmético así obtenido es el producto buscado.*

313. **Multiplicación de dos polinomios algebraicos.** — Refiriéndonos ahora al ejemplo tomado en el n.º 306 el cual puede generalizarse tomando otro cualquiera, cabe comprobar sin dificultad que, en la multiplicación de dos polinomios algebraicos, rige exactamente la misma regla anterior en base a la convención hecha en el n.º 269 y a la regla de los signos de dirección establecida por la definición de la multiplicación algebraica.

314. También puede encararse la cuestión desde otro punto de vista, observando que si, como sabemos, una substracción algebraica puede cambiarse en una adición, un polinomio algebraico puede también siempre encararse como una adición de conjuntos; por lo tanto el producto de dos polinomios algebraicos puede realizarse de acuerdo con las reglas y las fórmulas de los n.ºs 309 y 310, o sea:

$$\sum_{r=1}^n a_r \sum_{s=1}^n b_s = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a_r b_s, \dots$$

en las que $a_r b_s$ representan el producto de dos conjuntos parciales, uno del multiplicando, el otro, del multiplicador, afectados de los signos de dirección correspondientes, de modo que el signo del producto parcial en cuestión será + si aquellos signos son los mismos, y del signo — si son diferentes.

315. División algebraica. — Esta operación tiene por objeto hallar uno de los factores (cociente), de un producto algebraico, conociendo a éste (dividendo), y al otro factor (divisor).

De esta definición se desprende que el valor absoluto del cociente, es el cociente del valor absoluto del dividendo, dividido por el del divisor; y que, el signo de dirección del cociente sigue idéntica ley que en la multiplicación. Así, usando los mismos signos de división que en aritmética, tendremos:

$$\frac{(+8) \text{ pasos}}{(+2)} = (+4) \text{ pasos}; \quad \frac{(+8) \text{ pasos}}{(-2)} = (-4) \text{ pasos}$$

$$\frac{(+8) \text{ pasos}}{(+2) \text{ pasos}} = (+4); \quad \frac{(+8) \text{ pasos}}{(-2) \text{ pasos}} = (-4)$$

$$\frac{(-8) \text{ pasos}}{(+2)} = (-4) \text{ pasos}; \quad \frac{(-8) \text{ pasos}}{(-2)} = (+4) \text{ pasos}$$

$$\frac{(-8) \text{ pasos}}{(+2) \text{ pasos}} = (-4); \quad \frac{(-8) \text{ pasos}}{(-2) \text{ pasos}} = (+4)$$

Si prescindimos de la unidad, podemos escribir

$$\frac{[+(ab)]}{(+a)} \equiv (+b) \quad ; \quad \frac{[-(ab)]}{(+a)} \equiv (-b)$$

$$\frac{[-(ab)]}{(-a)} \equiv (+b) \quad ; \quad \frac{[+(ab)]}{(-a)} \equiv (-b).$$

$$\frac{[-(ad)] + [+(bd)] - [-(cd)]}{(-d)} \equiv (+a) + (-b) - (+c)$$

316. Todo ello es una consecuencia de las propiedades de la multiplicación algebraica. Puede verificarse la exactitud de los resultados multiplicando el presunto cociente por el divisor; se comprobará que, por fuerza, debe obtenerse el dividendo. La división algebraica es, en suma, una operación uniforme, incompletamente distributiva respecto de la adición (y, por tanto, de la substracción); de módulo (+ 1). De ahí su nombre.

Si usamos la convención hecha en el n.º 269, podemos escribir las expresiones anteriores así:

$$\frac{ab}{a} = b ; \quad \frac{-ab}{a} = -b ; \quad \frac{-ab}{-a} = b ; \quad \frac{ab}{-a} = -b ;$$

$$\frac{-ad + bd + cd}{-d} = a - b - c.$$

317. Cantidades fraccionarias y números fraccionarios dirigidos.

—Acabamos de ver que, en la división de dos cantidades algebraicas, o de una cantidad algebraica por un número algebraico, debe atenderse a la división aritmética de sus valores absolutos y luego asignar al resultado el signo positivo si el dividendo y el divisor tienen el mismo signo de dirección; y del signo negativo un caso contrario. Pues bien, en lo relativo a la división de los valores absolutos, estamos en aritmética y, por tanto, si el cociente no es entero, existe siempre un número fraccionario que satisface a ese cociente tratándose de grandores continuos. Podemos escribir pues,

$$\frac{(+a)}{(\pm b)} \equiv \left[\pm \left(\frac{a}{b} \right) \right] ; \quad \frac{(-a)}{(\pm b)} = \left[\mp \left(\frac{a}{b} \right) \right]$$

o simplemente

$$\frac{a}{\pm b} \equiv \pm \frac{a}{b} \quad \frac{-a}{\pm b} \equiv \mp \frac{a}{b}$$

318. Una cantidad fraccionaria algebraica no altera si se multiplica (o divide) simultáneamente el numerador y el denominador por una misma cantidad (o número) algebraico. Es una consecuencia de la misma propiedad aritmética y de la regla de los signos de dirección.

$$\text{Así, sea } \frac{a}{-b}; \text{ expresa } \left(-\frac{a}{b} \right).$$

Multiplicando el numerador, $+a$, y a la vez el denominador, $(-b)$, por $(\pm c)$, tendremos

$$\frac{(\pm ac)}{(\mp bc)} \equiv \left(-\frac{ac}{bc} \right) \equiv \left(-\frac{a}{b} \right)$$

Como antes. Lo mismo sucedería si, en vez de multiplicar como se ha hecho por $(\pm c)$, se hubiese dividido por $(\pm c)$.

Establecido esto, ninguna dificultad ofrece la interpretación de la adición, sustracción, multiplicación y división algebraica de cantidades o números fraccionarios dirigidos en uno u otro de dos sentidos opuestos, ya que los valores absolutos de los resultados de estas operaciones son los mismos de la Aritmética, y en cuanto a la dirección de estos resultados, está ella dada por las reglas de los signos pertinentes a cada una de esas operaciones.

Tenemos así:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{-b} + \frac{-c}{d} - \frac{-e}{-f} \right) \left(\frac{-g}{-h} - \frac{i}{-j} \right) \equiv \\ & \equiv \left(-\frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f} \right) \left(\frac{g}{h} + \frac{i}{j} \right) \equiv \\ & \equiv \frac{-adf - cbf - ebd}{bdf} \times \frac{gj + ih}{hj} \equiv \\ & \equiv \frac{(-adf - bcf - ebd) (gj + ih)}{bdfhj} \end{aligned}$$

319. Utilidad práctica de la multiplicación y división algebraicas.

— a) *Definición del movimiento uniforme.* — Volvamos a considerar la fig. 19 (pág. 228): Un móvil representado por A , se desplaza en el camino indicado con la línea a ; si ese móvil, en tiempos iguales, recorre siempre caminos de igual longitud y en el mismo sentido, o, en otros términos, si recorre longitudes algebraicas iguales, en tiempos iguales, se dice que su movimiento es uniforme. Por ejemplo, si durante una hora se ha desplazado de $(+ 15)$ km. o de $(- 15)$ km., ocurrirá que en cualquier otro lapso de una hora habrá recorrido también $(+ 15)$ km. o $(- 15)$ km., respectivamente.

Cuando una persona se pasea, avanza más o menos de cantidades iguales en tiempos iguales, y si camina siempre en la misma dirección, su movimiento será, aproximadamente, uniforme.

Llábase *velocidad* de un movimiento uniforme, la cantidad, algebraica, siempre igual, recorrida en la unidad de tiempo; si ésta ha sido fijada en una hora y un tren recorre 20 km. en una hora en la dirección fijada como positiva, la velocidad de ese tren en

esa marcha se indicará con $(+ 20)$ km./hora o simplemente con 20 km./hora; la marcha idéntica en sentido contrario, se expresará entonces por $(- 20)$ km./hora.

De lo anterior resulta que, para especificar exactamente la velocidad de un movimiento uniforme, deben indicarse:

- 1.º Su valor absoluto numérico (20 en el ejemplo anterior).
- 2.º El sentido $[(+)$ en el ejemplo].
- 3.º La unidad de longitud (el km. en el ejemplo).
- 4.º La unidad de tiempo (la hora en el ejemplo).

Claro está que, en el movimiento uniforme, el sentido del movimiento corresponde al signo de la velocidad.

b) *Ecuación del movimiento uniforme.* — Pongamos que el móvil considerado en el ejemplo, recorre la línea a en sentido positivo y en cierto instante pasa por el punto A ; se quiere saber dónde se encuentra el móvil en un tiempo t , contado antes o después de su pasaje por A , conociendo su velocidad que indicamos con la letra v incluyendo en esa letra el signo de dirección positivo o negativo y la unidad.

Al efecto buscaremos a qué distancia e de A se encuentra el punto buscado B , y de qué costado; es decir, especificaremos el vector algebraico AB .

Si con la letra t indicamos a la vez su valor numérico y su signo de dirección, podremos decir para todos los casos que si en la unidad de tiempo el móvil se desplaza de la cantidad algebraica v , en t unidades de tiempo se desplazará de la cantidad algebraica vt , producto de la cantidad algebraica v por el número algebraico t . Luego,

$$e = vt.$$

Esta es la expresión llamada *ecuación del movimiento uniforme*.

c) *Discusión de la fórmula del movimiento uniforme.* — *Discutir* una fórmula es examinar los diferentes valores especiales que pueden tomar los elementos constitutivos de dicha fórmula, siempre que aquéllos merezcan llamar la atención.

En la ecuación $e = vt$, los datos son v y t ; veamos, pues, qué valores interesantes pueden tener y cómo influyen en e .

1.º v y t son ambos positivos, es decir, que el tren marcha en sentido positivo o sea, dada la dirección adoptada, de izquierda

a derecha, y el tiempo es futuro; claro está, entonces, que el punto B se halla a la derecha de A ; e es positivo.

2.º v es positivo y t negativo. La pregunta significa, pues, ya que el tren marcha de izquierda a derecha y el tiempo es pasado respecto del instante de paso por A , que el punto buscado B está situado a la izquierda de A ; es decir, e es negativo.

3.º v es negativo y t positivo.

El tren marcha de derecha hacia la izquierda y el tiempo es futuro. B se halla entonces, evidentemente, a la izquierda de A ; e es negativo.

4.º v y t son negativos. Un raciocinio análogo nos evidencia que B está a la derecha de A y e es positivo.

Vese, pues, satisfechas las reglas de la multiplicación algebraica: factores de mismo signo de dirección, producto positivo. Factores de direcciones distintas, producto negativo. Valor absoluto del producto, producto de los valores absolutos de los factores.

Y así podría tratarse cualquier otro ejemplo.

320. Potenciación algebraica.— Es un caso particular, como en aritmética, de la multiplicación algebraica. Se usan los mismos términos. Si la base es $(+a)$ o $(-a)$, y el exponente p ó $2n$ ó $2n+1$, ($2n$ indica un número par: $2n+1$, uno impar), se deduce: $(+a)^p \equiv (+a^p)$; $(-a)^{2n} \equiv (+a^{2n})$; $(-a)^{2n+1} \equiv (-a^{2n+1})$ lo que se enuncia diciendo que: *toda potencia de una cantidad (o impropriadamente de un número) positiva, es positiva; que toda potencia par de una cantidad (o número) negativa, es positiva; y que toda potencia impar de una cantidad (o número) negativa, es negativa.*

Resultan también las siguientes expresiones.

$$[(-ab) \cdot (-c)]^d \equiv (-a)^d \cdot b^d \cdot (-c)^d \equiv -a^d \cdot b^d \cdot (-c^d) \quad a)$$

$$\left(\sum_{r=1}^{r=n} a_r \right)^2 = \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=n} a_r a_s \quad b)$$

$$\left(\sum_{r=1}^{r=n} a_r \right)^m = \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{t=1}^{t=n} \dots a_r a_s a_t \dots \text{(con } m \text{ } \Sigma \text{ y } m \text{ letras)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad c)$$

esta última expresión significa que: *la suma de dos cantidades algebraicas multiplicada por la diferencia de las mismas es igual a la*

diferencia de sus cuadrados los que, como tales, están siempre dirigidos en el sentido positivo. Esta regla se aplica evidentemente aun cuando las cantidades fuesen fraccionarias, irracionales o logarítmicas

321. Análogamente tenemos:

$$[\pm (a + b)]^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$[\pm (a - b)]^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

La potenciación algebraica es uniforme, no comunicativa, distributiva respecto de la multiplicación y división, lo mismo que la potenciación aritmética; y por eso la homonimidad de ambas.

322. Ninguna dificultad, dijimos, ofrece la interpretación de potencias de cantidades algebraicas fraccionarias. Así:

$$\left[\frac{(-a)}{(+b)} \right]^{2n} \equiv \left(-\frac{a}{b} \right)^{2n} \equiv \frac{a^{2n}}{b^{2n}}$$

$$\left[\frac{(+a)}{(-b)} \right]^{2n+1} \equiv \left(-\frac{a}{b} \right)^{2n+1} \equiv -\frac{a^{2n+1}}{b^{2n+1}}$$

Es claro que la noción de exponente excluye la de dirección, de suerte que las expresiones

$$(+a)(+b) \quad ; \quad (-a)(-b)$$

carecen de sentido en álgebra (*)

323. Radicación algebraica. — Como su homónima de aritmética, esta operación se propone hallar la base de una potencia (algebraica) conociendo ésta y el exponente. Se usan los mismos términos; *subradical*, *índice*, *raíz*, y los mismos signos.

Según ha podido notarse en las tres operaciones anteriores, la cuestión se reduce a efectuar la misma operación de aritmética en lo relativo al valor absoluto de la raíz buscada, o sea a hallar la raíz del índice dado, del valor absoluto de la cantidad subradical, y luego asignar una dirección al resultado. Esta última determi-

(*) Vimos que, en aritmética, desde otro punto de vista, independientemente del concepto de dirección, la expresión a^{-b} se interpreta como significando $\frac{1}{a^b}$.

nación es, pues, lo único nuevo a estudiar aquí. La regla de los signos de dirección de la potenciación nos informará respecto de los de la radicación. Así de las fórmulas n.º 320 se desprenden las siguientes:

$$\begin{aligned} \sqrt[p]{(+a)^p} &\equiv \sqrt[p]{(+a^p)} \equiv a \\ \sqrt[2n]{(-a)^{2n}} &\equiv \sqrt[2n]{a^{2n}} \equiv \pm a \text{ [pues } (\pm a)^{2n} = a^{2n}] \\ \sqrt[2n+1]{(-a)^{2n+1}} &\equiv \sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} \equiv -a \end{aligned}$$

Resulta así que:

324. Las raíces de índice impar de una cantidad algebraica positiva, es también positiva.

Las raíces de índice par de una cantidad algebraica positiva, puede ser tanto positivas como negativas. Las raíces impares de cantidades negativas son siempre negativas.

325. No puede haber raíces pares de cantidades negativas, ya que toda cantidad positiva o negativa elevada a una potencia par da un resultado siempre de dirección positiva.

La expresión $\sqrt[2n]{-a^{2n}}$ importa pues, algebraicamente, una contradicción, un contrasentido, una pregunta imposible de satisfacer.

Se desprende de lo anterior que la radicación algebraica no es siempre uniforme; a veces es biforme, y otras imposible. Su módulo es 1 ya que $\sqrt[1]{\pm a} = \pm a$ y es el único índice que satisface esa condición como es fácil darse cuenta. Se le llama “*radicación*” por ser operación inversa de la potenciación, como en aritmética.

326. Naturalmente, la noción de índice no admite el carácter algebraico; es siempre un número aritmético por su misma esencia.

Así que las expresiones $\sqrt[(+a)]{b}$ o $\sqrt[(-a)]{b}$ importan contrasentidos (*).

327. Ninguna dificultad existe en la consideración de cantidades irracionales dirigidas algebraicamente; así $\sqrt[a]{(+b)}$ cuando no

(*) Aritméticamente vimos antes (n.º 218) que, desde otro punto de vista,

la expresión $\sqrt{-a}$ se interpreta como indicando $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

existe ninguna base que, elevada a la potencia a origina b ; expresa entonces la cantidad irracional dirigida $+\sqrt[a]{b}$; y $+\sqrt[2a+1]{(-b)}$ expresa: $-\sqrt[2a+1]{b}$.

Hemos visto que $\sqrt[2a]{(-b)}$ expresa una contradicción.

328. Consideremos las expresiones

$$(-a)^{\frac{c}{\sqrt{b}}} \quad \text{y} \quad \frac{c}{\sqrt{b}} \sqrt[2n]{-a}$$

Si repetimos los raciocinios del n.º 259, encontramos que para que sean aquellos raciocinios válidos, es necesario que los denominadores de los números

fraccionarios que se ponen en vez de los irracionales $\sqrt{b}$ sean impares, para no caer en las expresiones absurdas $(-a)^{\frac{2p+1}{2n}}$, esto es en $\sqrt[2n]{(-a)^{2p+1}}$. Tomada

esa precaución, observamos que las expresiones $(-a)^{\frac{2p}{2n+1}}$ y $(-a)^{\frac{2p+1}{2n+1}}$ que son valores correspondientes de las dos series cuyo límite común fué inter-

pretado como representando una cantidad correspondiente a $(-a)^{\frac{c}{\sqrt{b}}}$ y $\frac{c}{\sqrt{b}} \sqrt[2n]{-a}$ tiene distinta dirección, de suerte que cada valor sucesivo de los elementos de una de las series cambia constantemente de dirección. Luego no es posible asignar interpretación a los símbolos encarados.

329. Logarithmación algebraica. — Esta operación consiste en hallar el índice (logaritmo) de una potencia y la *base* de dicha potencia. Rige la misma notación que en aritmética.

De las fórmulas:

$$\begin{aligned} [(+a)]^p &= (+a^p) = (+b) \\ [(\pm a)]^{2p} &= (+a^{2p}) = (+c) \\ [(-a)]^{2p+1} &= (-a^{2p+1}) = (-d) \end{aligned}$$

se desprende que

$$\begin{aligned} \log_{(+a)} (+b) &= p; \quad \log_{(+a)} (+c) = 2p; \quad \log_{(-a)} (+c) = 2p; \\ \log_{(-a)} (-d) &= 2p+1, \end{aligned}$$

o simplemente

$$\log_a b = p; \quad \log_{(\pm a)} c = 2p; \quad \log_{(-a)} (-d) = 2p+1.$$

La expresión $\log_{(+a)}(-b)$, que implicaría el absurdo $(+a)^n = (-b)$, constituye un contrasentido.

Lo mismo ocurre con las expresiones $\log_{(+1)} a$ y $\log_{(-1)} a$ siendo a distinto de la unidad.

La expresión $\log_{(-a)}(+b)$ puede resultar absurda si en la expresión $(-a)^x = (+b)$, x fuese impar porque entonces se debiera tener $(-a)^{2n+1} = (+b)$. Igual cosa ocurre con la expresión $\log_{(-a)}(-b)$ si en la igualdad $(-a)^x = (-b)$, x es par.

330. Las tablas de logaritmos de que hablaremos oportunamente y que se suponen de base positiva pueden, sin embargo, aprovecharse para simplificar los cálculos en todos los casos, según veremos más adelante, pues ellas contribuyen a facilitar la ejecución de los cálculos relativos a la determinación de los valores absolutos; la cuestión de los signos de dirección debe resolverse con las correspondientes reglas en cada caso.

331. La logaritmación es generalmente uniforme; pero no siempre. Así las expresiones

$$\log_{(+1)}(+1), \log_{(-1)}(+1), \log_{(-1)}(-1)$$

tienen una infinidad de valores.

Aceptado el concepto de número logarítmico, ninguna dificultad habría en interpretar cantidad logarítmicas dirigidas por ejemplo en el sentido algebraico o sea, en uno u otro de dos sentidos opuestos.

332. La expresión $\log_{(-a)} c$, o su equivalente $(-a)^x = c$, cuando ninguna potencia entera de $(-a)$ origine c , debe interpretarse como en el n.º 70 y siguientes.

Y teniendo en cuenta lo expuesto, se está en condiciones de poder interpretar cualquier expresión o de reconocer si admite una interpretación o si es un contrasentido.

333. Recapitulación. — Terminaremos con una recapitulación relativa a las operaciones aritméticas y algebraicas fundamentales (*).

a) **Operaciones aritméticas.** Las cantidades están especificadas aquí mediante la unión de dos conceptos: el de *número* de objetos y el de *unidad*. En los grandores discontinuos, la unidad es impuesta por la naturaleza misma de la cantidad; la especulación versa entonces exclusivamente sobre el concepto de número.

334. En los grandores continuos, en cambio, la elección de la unidad es libre, y por tanto, agrega a la teoría de los grandores discontinuos todo lo relativo a la partición de la unidad.

Algunas de las operaciones compatibles con los grandores matemáticos vinculan datos constituídos por conjuntos (adición, sustracción, división (caso a), logaritmación); otras vinculan conjuntos con números; así, en la multiplicación, división (caso b), potenciación y radicación, los multiplicadores, divisores, exponentes índices, son números.

335. Las operaciones inversas (*), en cambio, no siempre son realizables y entonces constituyen contrasentidos, tratándose de cantidades discontinuas. En cambio, tratándose de cantidades continuas, se puede en algunas llegar a darles una interpretación, introduciendo se puede, en algunas, llegar a darles una interpretación, introduciendo expresadas en función de la unidad de medida primitiva, se designan con el nombre de *cantidades fraccionarias* o, por convención y abreviación en lenguaje figurado, *inconmensurables* (irracionales y logarítmicas).

Estas cantidades implican pues el concepto de *unidad inicial* y de algo que, por una ficción, desempeña el papel del primitivo concepto de número entero y que por eso se denomina, *número fraccionario* o *número irracional*.

(*) Una *operación* es, en general, un acto consistente en combinar de cierta manera lo que se llaman *datos* a fin de obtener, por ese hecho, cierto resultado. Si los datos son a y b , la operación que los liga se expresa genéricamente así: $a \widehat{} b$.

(*) Dada una operación $a \widehat{} b = c$, llámase *operación inversa* la que consiste en hallar a o b de la primera, conociendo el resultado c y el otro elemento, b o a , respectivamente.

336. Pero esos números, por su naturaleza, son incompatibles con las nociones de multiplicadores, divisores, exponentes e índices, los que, por su misma definición, sólo se avienen con la noción de número entero; por eso, cuando se quieren introducir aquéllos en los elementos en cuestión, deben modificarse las definiciones de las operaciones así afectadas (que son todas, menos la adición, sustracción, división (caso a) y logaritmación), cuidando de que las nuevas definiciones permitan conservar las propiedades o *las leyes formales* (principio de Hankel) de las primitivas operaciones homónimas a fin de que no se alteren las reglas del cálculo.

337. Por eso es que hemos buscado considerar todos los casos de combinaciones de los conceptos que se indican en estas dos columnas.

Multiplicador	número entero
Divisor (caso b) ...	número fraccionario
Exponente	número irracional
Índice	

A fin de dar a cada una de esas combinaciones de un elemento de una de las columnas, con uno cualquiera de la otra, una interpretación que permita conservar las citadas reglas del cálculo.

338. Es menester no confundir la *unidad*, que es una cantidad, con *uno*, que es un *número*, es decir un vocablo.

En un ejército, la unidad es un *soldado*, en una colmena es la *abeja*. El número *uno*, en cambio, es algo abstracto, siempre idéntico; es una palabra que, por sí sola, nada significa. Podría decirse que el *uno* sirve de punto de partida a los números llamados *enteros*; la *unidad*, partida en partes iguales, da lugar, por el contrario, a los conceptos de números fraccionarios, irracionales.

339. Dado un conjunto o cantidad continua, y fijada arbitrariamente la *unidad*, existen partes de estos conjuntos que se componen de una, dos, tres, etc., unidades. Estas cantidades se expresan mencionando dicho número y el nombre de la unidad, por ejemplo: *tres metros*.

Son las cantidades *enteras*: los números que, con la unidad, determinan esas cantidades, son los *números enteros*.

340. Otras cantidades no contienen un número entero de las unidades prefijadas, pero entonces deberán contener un número entero de partes de esas unidades, previa partición de éstas en porciones iguales; para determinar aquéllas, deben acompañarse a la indicación de la unidad primitiva, dos números enteros dados en cierto orden, el segundo de los cuales expresa en cuantas partes iguales se ha dividido o fraccionado la unidad inicial y el primero cuantas de esas partes contiene la cantidad encarada. Ese conjunto de dos números así ordenados y con ese significado, constituyen lo que se llama *número fraccionario*, y la cantidad correspondiente que, con el concurso de dicho número fraccionario y de la unidad inicial, queda así determinado, es una *cantidad fraccionaria*.

341. Las operaciones inversas de la potenciación dan lugar a procesos de cálculos de los que resultan dos series indefinidas de cantidades fraccionarias vinculadas de cierta manera y que aparentan representar una cantidad imposible de ser expresada en base a la unidad inicial por pequeñas que sean las partes en que ésta se subdivide. Por una ficción de lenguaje se designa ese proceso con el nombre de *cantidad incommensurable*, y se habla de *número irracional* el cual, unido al concepto de *unidad*, determinaría aquella cantidad.

342. Con esto quiere significarse que, en general, el concepto de número es el de *algo* que liga o enlaza una unidad dada con la cantidad encarada, aun cuando ésta sea meramente un proceso de cálculo como el referido en el n.º precedente. Primero se definió el número entero, que importa un concepto familiar, luego el número fraccionario que comporta mayor sutileza, y por último el número irracional que supone un grado aun superior de refinamiento.

343. Recordemos, para terminar, que cuando se habla de sumas, restas, productos, cocientes, potencias, raíces o logaritmos de *números*, se entienden, en lo relativo a la adición y a la substracción, a los números que indican cuantas unidades existen en la suma o resta de conjuntos que tienen tantas unidades como expresan los números dados. Y en lo relativo a las restantes operaciones,

por ejemplo a la multiplicación, se entienden los números que expresan cuantas unidades existen en los productos de conjuntos, que tienen tantas unidades como indica el número multiplicando, multiplicado por el número que hace de multiplicador. Es decir, en definitiva, que con esas expresiones, se entiende los números que afectarían los resultados de operaciones hechas correctamente con conjuntos, si después de verificadas las operaciones, se prescinde de la unidad dejando sólo los números dados en el orden establecido.

344. El resumen de las propiedades de las operaciones fundamentales son (*):

Adición: Uniforme, conmutativa, asociativa. Módulo 0.

Substracción: Uniforme. Módulo 0.

Multiplicación: Uniforme, conmutativa, asociativa, completamente distributiva respecto de la adición y substracción. Módulo 1.

División: Uniforme, distributiva pero no completamente respecto de la adición y de la substracción. Módulo la *unidad*, o 1.

Potenciación: Uniforme, distributiva, pero no completamente respecto de la multiplicación y de la división. Módulo 1.

Radicación: Uniforme, distributiva, no completamente respecto de la multiplicación y división. Módulo 1.

Logaritmación: Uniforme. Módulo la *unidad*.

b) Operaciones algebraicas.

345. En Álgebra, a todo lo que acaba de resumirse, debe agregarse la noción de dirección en uno u otro de dos sentidos opuestos.

(*) La operación $\widehat{a \ b}$ se dice ser *conmutativa* si se tiene que $\widehat{a \ b} = \widehat{b \ a}$; se dice ser *asociativa* con otra c si $\widehat{(a \ b) \ c} = \widehat{a \ (b \ c)}$. Se dice que $\widehat{ab}$ es *distributiva respecto de otra operación* que indicaremos con $\uparrow$, si $\widehat{(a \ \uparrow b) \ c} = \widehat{(a \ c) \ \uparrow (b \ c)}$ o si $\widehat{(b \ \uparrow c)} = \widehat{(a \ b) \ \uparrow (a \ c)}$. Si estas dos igualdades se verifican simultáneamente, se dirá que la operación $\widehat{}$ es *completamente distributiva* respecto de la operación $\uparrow$.

La introducción de esta nueva noción no modifica las propiedades fundamentales de las operaciones que se acaba de resumir, pero las operaciones de adición y substracción no van necesariamente unidas a las ideas de un aumento o disminución de lo que hemos llamado el *valor absoluto* o *equivalente aritmético* de las cantidades, que es el número de unidades que estas contienen. La substracción es siempre posible; pero la introducción del concepto de dirección algebraica en la multiplicación revoluciona los resultados al punto de que se producen, para las operaciones inversas de la potenciación, casos de contradicción en que no es posible dar una interpretación a esas operaciones, análogamente a lo que sucede en aritmética cuando el substraendo es mayor que el minuendo. La radicación tiene a veces dos soluciones: una positiva y otra negativa ambas de igual valor absoluto, y lo mismo ocurre con la logaritmicación; y así otras anomalías. El número algebraico, como siempre conserva el carácter de algo que, unido al concepto de unidad, determina la cantidad algebraica.

CAPÍTULO XII

CÁLCULO LITERAL

346. Uso de letras para indicar cantidades y números.— En el Vol. I (pág. 26, n.º 43), hemos, por primera vez, aludido a la conveniencia, en ciertos casos, de usar letras alfabéticas para indicar un número cualquiera.

Así se generalizan las cuestiones, ya que, indicado un número por medio de una letra, esta expresa que dicho número es cualquiera. A veces conviene indicar con esa letra la cantidad misma o sea el número y a la vez la unidad que determina dicha cantidad; en este caso se entiende que la cantidad representada es cualquiera, naturalmente dentro de las convenciones hechas en cada caso.

347. Vamos a insistir ahora sobre ese particular ya que, si bien el empleo de letras en esas condiciones no es de la exclusividad del álgebra, esta última hace, diremos así, un uso permanente de las mismas, pues busca siempre las generalizaciones.

348. La Aritmética, en sus operaciones, hace casi siempre cálculos numéricos utilizando cifras y números escritos en un sistema de numeración; las operaciones vienen ejecutándose sin quedar rastros de las mismas, de modo que si se presenta un caso análogo, no puede aprovecharse lo que ya se hizo en el otro. Eso no ocurre utilizando letras para representar los datos, es decir si se hace un cálculo literal en vez de hacerse uno numérico.

349. Veamos algunos ejemplos.

Consideremos los dos enunciados siguientes:

Veinte cuadernos han costado 10 \$, ¿cuánto costarán diez y seis cuadernos iguales a aquéllos?

Quince cuadernos han costado 9 \$, ¿cuánto costarán doce cuadernos como esos?

En realidad, estas dos preguntas si bien no idénticas, consti-

tuyen, sin embargo, *un mismo problema* con datos numéricos distintos; para resolverlos habrá que hacer los *mismos raciocinios y* análogas operaciones.

Las operaciones darán lugar a resultados numéricos diferentes en cada caso; sin que pueda sacarse ningún partido de la identidad de los raciocinios que habrá que hacer, porque estos no se expresan con números. Habría, sin embargo, ventajas en utilizar de una vez por todas tal identidad, por cuanto, si es menester resolver a menudo problemas como estos, es fastidioso y poco acertado repetir en cada caso el mismo proceso mental para llegar a las soluciones.

350. Al contrario, conviene establecer lo que se llama **una fórmula**, es decir algo que ligue directamente los datos con los resultados buscados y que *permita obtener inmediatamente esos resultados cualesquiera que sean los datos.*

Así, en vez de los dos problemas particulares enunciados más arriba, se procurará resolver el siguiente, de carácter general:

Sabiendo que cierto número de cuadernos cuestan determinada suma de dinero, encontrar el costo de otro cierto número de cuadernos iguales a aquéllos.

Para eso usaremos letras y cambiaremos el enunciado anterior por el siguiente:

Si a cuadernos cuestan p pesos, ¿cuánto costarán b cuadernos iguales a aquéllos?

El raciocinio es sencillo; diremos: si *a* cuadernos cuestan *p* pesos, un cuaderno costará *a* veces menos, o sea $\frac{p}{a}$; y *b* cuadernos,

b veces más, o sea, $\frac{p}{a} \cdot b$.

Esta es, pues, la *fórmula* buscada.

Para resolver el primero de los enunciados numéricos del n.º 349, cambiaremos en la fórmula recién hallada, *a*, por 20, *b*, por 16 y *p* por 10; sacamos

$$\frac{10 \times 16}{20} = 8.$$

Los 16 cuadernos valen, pues, 8 \$.

Para el segundo enunciado sacaremos, análogamente:

$$\frac{9 \times 12}{15} = 7.20.$$

Los 12 cuadernos costarán 7.20 \$.

Y así cualquiera que fueran los problemas numéricos que tengan ese tipo de enunciado; la fórmula hallada nos suministran inmediatamente la solución de una manera automática, cosa que no hubiera sucedido diferentemente.

351. En Aritmética Elemental se hace relativamente poco uso de las fórmulas, pero ese uso es casi enteramente general en Álgebra, aun elemental, y es importante, pues, *enseñar cómo pueden hallarse esas fórmulas en cada caso, es decir, cómo se puede suministrar un lenguaje abreviado que permita efectuar fácilmente raciocinios generales y enunciar de una manera sencilla reglas generales.*

352. Alcance del cálculo algebraico. — Es claro de que la teoría de los grandores comprende la de los grandores algebraicos: basta suponer que las cantidades estén dirigidas todas en el mismo sentido. Luego, si se desea generalizar, conviene siempre tratar los problemas en toda su extensión (limitada aquí a las cantidades susceptibles de ser dirigidas en uno u otro de dos sentidos opuestos). Se supone, por eso mismo, que los grandores indeterminados de que esos problemas encaran están, si son susceptibles de ello, dirigidos en uno u otro de dos sentidos opuestos. Si al proceder así se obtuviera, al final, para uno de esos grandores indeterminados, algo imposible, eso significaría que el problema es absurdo en la forma como se le enuncia, pero se habrá siempre ganado de no tener que rehacer los raciocinios — como se verá en los ejemplos que oportunamente serán dados.

353. Observaciones respecto del cálculo algebraico. — Debiendo el mecanismo del cálculo ser lo más simple posible a fin de evitar errores y pérdida inútil de tiempo, se elimina de él todo aquello que no sea estrictamente necesario. Así, el signo $\times$ que en la teoría de las operaciones hemos empleado muchas veces a los efectos únicos de facilitar la comprensión de las demostraciones, se elimina por completo en la práctica. Igualmente, los paréntesis, listones y

corchetes, sólo se ponen cuando sean estrictamente indispensables, suprimiéndose en caso contrario (por ejemplo, no se escribe $(a.b)c$ sino, simplemente, abc). Tampoco se escribe $\pm$ ($\pm a$) sino directamente a o $(-a)$ según se tenga $+(+a)$, $-(-a)$ o $+(-a)$, $-(+a)$.

354. En el cálculo, las letras son supuestas indicando grandores dirigidos, es decir, afectados de su signo de dirección incluido en la letra; así la letra a puede significar lo mismo 5 km., que (-5 km.) ; por eso, cuando se quiere expresamente indicar una cantidad dirigida en el sentido positivo, se escribe a^{2n} ya que toda potencia par es siempre positiva; y se escribe $(-a^{2n+1})$ para expresar una cantidad esencialmente negativa (n.º 320, pág. 249); en esos ejemplos, podrá ser a positivo o negativo pero siempre a^{2n} será positivo y $(-a^{2n+1})$, negativo.

355. Ya sabemos que toda cantidad esencialmente par se representa por $2n$ (múltiplo de 2), y que una cantidad impar, en consecuencia, por $2a + 1$ (múltiplo de 2 más 1, impar).

356. **Expresión literal.** — Llámase *expresión literal algebraica*, o simplemente *expresión literal* a un conjunto de números, letras, signos de operaciones (escritos o sobre entendidos), de tal manera que pueda hallarse el valor de dicha expresión cuando se atribuyan a las letras valores determinados; las letras representan, como dijimos, cantidades algebraicas.

357. Una expresión literal se llama *racional* cuando las operaciones a efectuar con las letras no comportan radicaciones o logaritmicaciones.

Así, las expresiones

$$3a; \frac{a}{b}; \sqrt{2} mn + 7d^3 + \frac{3c^2}{\sqrt[3]{12}}$$

Son *racionales* a pesar de que figuran en algunas de ellas radicaciones, porque estas afectan a números y no a letras. Si ocurre esto último, las expresiones son *irracionales* (radicales o logarítmicas). Por ejemplo

$$c + 3\sqrt{a}; \sqrt[3]{a+b}; \sqrt[m]{a} + \sqrt[n]{c}; \log b + \log_e b.$$

358. Cuando una expresión literal no tiene denominadores literales, se dice ser *entera*; caso contrario, es *fraccionaria*. Ejemplo: $3a^3b + \frac{4}{5}a^2b^2$ es una expresión literal entera, $\frac{a+b+c}{c-a}$, lo es fraccionaria.

359. — **Valor numérico de una expresión literal.** — Es el valor numérico que toma la expresión cuando se reemplaza cada letra que en ella figure por valores numéricos y se ejecutan las operaciones.

Ejemplo: Sea la expresión literal

$$a + bc.$$

Si se hace en ella $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$, la expresión considerada tiene el valor

$$2 + 3 \times 4 = 2 + 12 = 14.$$

14 es, pues, el *valor numérico* de dicha expresión para los referidos valores dados a las letras que la componen.

Hay que tener cuidado de no efectuar las operaciones numéricas equivocadamente. Así, en el ejemplo anterior, sería un error escribir

$$2 + 3 \times 4 = 5 \times 4 = 20,$$

que correspondería a la expresión

$$(a + b)c$$

y no a la dada.

La regla general a seguir es la siguiente:

360. *Para hallar el valor numérico de una expresión literal que no contiene paréntesis, listones o corchetes, no existiendo tampoco en ella expresiones literales parciales figurando como numeradores, denominadores, cantidades subradicales o logarítmicas, se efectúan, primero, las potencias, multiplicaciones y divisiones indicadas, y finalmente las adiciones y sustracciones. Si existen paréntesis, listones, corchetes o expresiones figurando como numeradores o denominadores, cantidades subradicales o logarítmicas, se empieza por calcular a éstas, cada una por separado, así como las operaciones encerradas por los paréntesis, listones y corchetes, aplicando al efecto lo dicho precedentemente, y luego, de la misma manera, las operaciones restantes.*

Ejemplos. Determinar los valores numéricos de las siguientes expresiones literales:

$$\text{I.} \quad a^2b - ab^3 + \frac{c}{b}$$

para $a = 1$; $b = 2$; $c = 4$.

Primero calcularemos los productos a^2b , ab^3 y la división $\frac{c}{b}$; obtendremos:

$$a^2b = 1^2 \times 2 = 2 \quad ; \quad ab^3 = 1 \times 2^3 = 8 \quad ; \quad \frac{c}{b} = \frac{4}{2} = 2;$$

luego efectuaremos las adiciones y restas

$$2 - 8 + 2 = -4.$$

El valor numérico buscado es, consecuentemente, (-4) .

$$\text{II.} \quad \left(a + \frac{m}{n}b\right)\left(m + \frac{n^2}{b}\right) + (a + 12)(m - 3) + \frac{n}{b}(a + 3) \quad \text{para}$$

$$a = 1 \quad ; \quad b = 2 \quad ; \quad m = 8 \quad ; \quad n = 4.$$

Calcularemos, primero, cada una de las expresiones encerradas dentro de paréntesis:

$$a + \frac{m}{n}b = 1 + \frac{8}{4}2 = 1 + 4 = 5$$

$$m + \frac{n^2}{b} = 8 + \frac{16}{2} = 8 + 8 = 16$$

$$a + 12 = 13 \quad ; \quad m - 3 = 5 \quad ; \quad a + 3 = 4.$$

Luego procederemos como en el ejemplo anterior y resulta

$$5 \times 16 + 13 \times 5 + \frac{4}{2}4 = 80 + 65 + 8 = 153.$$

$$\text{III.} \quad [(a + b)^2 + c]^3 - [(d - e)^3 + f]^2$$

para $a = 2$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$, $f = 6$ obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= (2+3)^2 = 5^2 = 25 \\
 (d-e)^3 &= (4-5)^3 = (-1)^3 = -1 \\
 [(a+b)^2 + c]^3 &= (25+3)^3 = 28^3 = 21952 \\
 [(d-e)^3 + f]^2 &= (-1+5)^2 = 5^2 = 25.
 \end{aligned}$$

El valor numérico buscado es, por consiguiente:

$$21952 - 25 = 21927.$$

IV.
$$\frac{a+b}{c^2} d + \frac{a+c}{\log _a -(b+d)} + \sqrt{a^2+21}$$

para $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=5$.

Tenemos:

$$a+b=5 \quad ; \quad a+c=6$$

$$\log _a -(b+d) = \log _2 (-8) = 3 \quad [\text{pues } (-2)^3 = -8]$$

$$\sqrt{a^2+21} = \sqrt{4+21} = 5.$$

El valor numérico buscado resulta así:

$$\frac{5}{16} 5 + \frac{6}{3} + 5 = \frac{137}{16}.$$

361. Expresiones literales equivalentes. Identidades.—Dos expresiones literales se dicen *equivalentes* cuando tienen siempre el mismo valor numérico cualesquiera que sean los números o cantidades representadas por las letras que contienen.

Es evidente que esas dos expresiones literales son en realidad una misma escrita de otro modo por transformaciones hechas de acuerdo con las reglas del cálculo.

Ejemplos:

$$\begin{array}{lcl}
 a+b & \text{y} & b+a \\
 a+(b-c) & \text{y} & a+b-c \\
 a-(b-c) & \text{y} & a-b+c \\
 \frac{a^3b}{a^2} & \text{y} & ab \\
 (a+b)^2 & \text{y} & a^2+2ab+b^2
 \end{array}$$

Nos hemos referido ya (Vol. I, n.º 43, pág. 26), varias veces a

estas clases de expresiones y sabemos que, reunidas por un signo de igualdad, constituyen una *identidad*; y que el signo de igualdad se transforma aquí en el de *identidad*. Ejemplo:

$$(a - b)(a + b) \equiv a^2 - b^2$$

EJERCICIOS (*)

682. $a^3 + 5a^2 + 7a - 6$ para $a = 2$.

683. $a^4 + ab^3 - a^2b^2 + a^3b - b^4$ para $a = 5$, $b = 3$.

684. $\frac{5a^2 - 3b^2}{4a^3 - 9a^2b - 7ab^2 - 20b^3}$ para $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$.

685. $a(b + c) + b(c + a) + c(a + b)$ para $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

686. Y para $a = 2,135$, $b = 3,125$, $c = 4,005$.

687. Y para $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{5}{6}$, $c = \frac{12}{11}$.

688. $a \left(\log_b c + \sqrt[m]{m} \right) + b \left(a - a^{\frac{m}{m}} - \frac{c}{b} \right) - \left[\frac{-m}{c} b^a + (-a)^b \right]$
para $a = 2$, $b = 3$, $c = 9$, $m = 4$.

689. $\frac{5a^2 + 48a - 18}{-2a^2 + 15a - 27}$ para $a = 6$.

690. $\frac{-9a^3 + 8a^2b + 12ab^2 + 5b^3}{-3a^2 + 7ab + 4b^2}$ para $a = 2$, $b = 3$.

691. $\log_a b \left[\sqrt[c]{d} (\log_c f - d^c) + b \log_{-c} (-fc) \right] +$
 $+ \left(\frac{a}{\sqrt{b}} - \frac{-d}{e} \right) \left[\frac{e}{\sqrt{d}} \log_e (fd) + (-a)^{\frac{d}{e}} (ab)^{-1} \right]$
para $a = 3$, $b = 27$, $c = 2$, $d = 16$, $e = 4$, $f = 64$.

692. $(a + b) \sqrt{a - 2b} + c \sqrt{a + c} + \log_c \left(a - \frac{b}{2} \right)^2 \sqrt{a - c}$
para $a = 13$, $b = 2$, $c = 12$.

693. $[m \sqrt{a^2 + 1} + (m + 1) \sqrt{a^2 + 3}]^2$ para $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$,

694. $[n \sqrt{b^2 + 1} + (n + 1) \sqrt{b^2 + 3}]^2$ $\left\{ \begin{array}{l} m = \frac{2}{3}, \\ n = 0.03, \\ p = \sqrt{2}. \end{array} \right.$

695. $[p \sqrt{c^2 + 1} + (p + 1) \sqrt{c^2 + 3}]^2$

(*) La resolución de estos ejercicios debe hacerse sin introducir para nada el mecanismo del cálculo literal, es decir, sin transformar las expresiones literales dadas.

Dados los números u_0 y u_1 , se supone que se determinan otros números $u_2, u_3, u_4, u_5, \dots$ por las fórmulas:

$$u_2 = 2u_1 + u_0$$

$$u_3 = 2u_2 + u_1$$

$$u_4 = 2u_3 + u_2$$

$$u_5 = 2u_4 + u_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$$

Calcular los 10 primeros números suponiendo que

696. $u_0 = 1$; $u_1 = 1$.

697. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$.

698. $u_0 = \frac{1}{2}$; $u_1 = 1$.

699. Si se tiene:

$$x_0 = \frac{1}{1 + u_0} \quad ; \quad x_1 = \frac{1}{1 + u_1}$$

$$x_2 = \frac{1}{1 + u_2} \quad ; \quad \dots ; \quad x_n = \frac{1}{1 + u_n}$$

Calcular estos valores $x_0, x_1, x_2, \dots$ teniendo $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ los valores del ejercicio anterior.

Calcular u_2, u_3, u_4, u_5 , suponiendo que:

700. $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$; $u_0 = 1$; $u_1 = 1$.

701. $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$; $u_0 = -1$; $u_1 = -1$.

702. $y_n = \sqrt{u_n^2 + 1}$ para valores de n desde 0 a 5, teniendo u los valores del ejercicio precedente.

703. $u_3 = u_2 + u_1 + u_0$,

$u_4 = u_3 + u_2 + u_1$,

$u_{n+1} = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$

Calcular $u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}$, siendo $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1$.

704. El mismo ejercicio para $u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 2$.

705. $z_n = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$ (n comprendido desde 1 a 5, teniendo u los valores del ejercicio precedente).

706. $s_n = \frac{z_n + u_{n+1} + u_{n+2}}{n + 3}$ (n comprendido desde 1 hasta 5 teniendo z y u los valores del ejercicio precedente).

362. Observaciones relativas a las fórmulas literales. Elección de las unidades. — Toda vez que, con una letra, puede lo mismo entenderse en esta ciencia un número que una cantidad (por ejemplo, a puede significar tanto 3, como 3 metros), al hallar valores numé-

ricos por aplicación de fórmulas a casos particulares, hay que tomar ciertas precauciones ya que algunas cuestiones afectadas por la teoría de las operaciones se relacionan exclusivamente con el concepto de *número* y otras con el de *unidad*, de modo que cuando se nos da una expresión literal, no siempre han de representar las letras exclusivamente números como lo hemos supuesto en los ejemplos que acabamos de dar; muchas letras pueden afectar al concepto de unidad y para hallar el valor numérico no bastará dar el número sino que también habrá que tener en cuenta la unidad elegida.

363. En la mayor parte de los problemas se especula, sin embargo, con una sola clase de cantidades; se trata, por ejemplo, de longitudes de áreas o volúmenes, de pesas, de dinero, etc.; entonces, la fórmula se presenta de tal manera que las diversas cantidades que en ella figuran están todas expresadas en base a una única unidad que debe indicarse junto con la fórmula. Pero si existen dos o más clases de unidades, entonces es menester indicar cuáles letras se relacionan con tal unidad, y cuáles con tal otra. Tomada esa precaución se comprueba entonces *que las fórmulas expresan únicamente operaciones a efectuar con números como se indicó en los n^{os}. 279 y 360; estos números cuando correspondan a cantidades, indicarán entonces cuántas unidades (de la especie que se indica juntamente con la fórmula) componen dichas cantidades. El número que así resulte definitivamente como valor numérico de la fórmula, acompañado de la unidad que debe también indicarse con la fórmula, expresará la cantidad buscada. Claro está que una fórmula de esta especie NO DARÁ el resultado exacto si, al hallar su valor numérico, en determinado caso, no se reemplaza cada letra por el número que corresponde a la unidad para la cual está la fórmula establecida y que debe indicarse como repetimos, junto con ella.* Por ejemplo:

La longitud de una barra constituida por dos barras parciales de metales diferentes, está expresada por la fórmula

$$x = a(1 + \alpha t) + b(1 + \beta t)$$

en la que a y b indican las longitudes de dichas barras parciales cuando están colocadas en el hielo; t es un número que sirve para expresar la temperatura a que está sometida la barra; α y β repre-

sentan dos longitudes especiales que tienen un valor fijo conocido para cada metal.

Supongamos que se quiere hallar la longitud de una barra de dicha especie formada por dos barras parciales una de hierro y otro de cobre sometidas a una temperatura dada; debemos substituir a , b , t , α y β por los valores numéricos correspondientes al caso, pero ¿cuáles son esos valores numéricos? Si en la fórmula precedente a y b se refieren a metros, bastará poner en vez de a y b los números que expresan cuántos metros de largo tiene cada barra parcial sumergida en el hielo. Si esas longitudes fuesen de 1 m. y 2 m., respectivamente, reemplazaremos a por 1 y b por 2; pero si a y b se refieren a centímetros, habrá que reemplazar a por 100 y b por 200. Claro está que no se va a obtener el mismo valor numérico para la fórmula poniendo 1 y 2 en vez de a y b , que poniendo 100 y 200; forzoso es, pues, que junto con la fórmula, se diga en qué unidades están en ella expresados a y b . Lo mismo cabe decir de t , de α y β . Si t está expresado en grados centígrados, su valor numérico será distinto que si le está en grados Fahrenheit o Réaumur; si α y β están expresados en metros no serán, análogamente, iguales su valores numéricos que expresados en milímetros.

En suma, la fórmula anterior deberá expresarse con más indicaciones, por ejemplo, así:

$$x = a(1 + \alpha t) + b(1 + \beta t)$$

estando dados x , a , b , α y β en metros, y t en grados centígrados.

Ahora toda dificultad ha desaparecido. Supongamos que $a = 1$ m., $b = 2$ m., $t = 30^\circ$, los números que afectan α y β relativos al hierro y al cobre son, respectivamente, 0,000012204 y 0,000017182 según resulta de las experiencias físicas; luego la longitud en metros de la barra a la temperatura de 30° resulta ser

$$x = 1(1 + 0,000012204 \times 30) + 2(1 + 0,000017182 \times 30) = 3,0139.$$

La barra tiene, pues, 3,0139 metros.

Damos, a continuación, un segundo ejemplo:

Consideremos un depósito de agua en forma de cajón; si el alto, ancho y largo de éste están indicados por a , b , c , el peso p del agua que cabe dentro del depósito esté expresado por la fórmula

$$p = abc.$$

Pero, para poder aplicar esta fórmula es menester, evidentemente, acompañarla de una indicación relativa a las clases de unidades en que debe tomarse a , b , c y p .

Si a , b , c , están expresadas en decímetros, p resultará expresado en kilogramos; si a , b , c , están expresados en metros, p lo estará en toneladas.

EJERCICIOS

I. Un capitalista coloca a intereses simples tres sumas s_1 , s_2 , s_3 , expresadas en pesos moneda nacional, a los tantos por ciento anuales r_1 , r_2 , r_3 , respectivamente; estas sumas han quedado colocadas, t_1 , t_2 , t_3 años. El total de intereses producidos está dado por la fórmula

$$x = \frac{s_1 r_1 t_1 + s_2 r_2 t_2 + s_3 r_3 t_3}{100}$$

en la que x representa el número de pesos m/n. Calcular este total suponiendo:

$$\begin{array}{lll} 707. & s_1 = 10.000 \text{ \$} & r_1 = 5 \quad t_1 = 2 \\ & s_2 = 30.000 \text{ \$} & r_2 = 6 \quad t_2 = 3 \\ & s_3 = 50.000 \text{ \$} & r_3 = 7 \quad t_3 = 4. \end{array}$$

708. Las tres sumas son 5.000 \$ oro, 6.000 \$ oro, 10.000 \$ oro; los tres tantos por ciento anuales son 3, 4, 5, respectivamente (el oro se supone al cambio de 230); los tres tiempos, 10 meses, 25 meses y 36 meses, respectivamente.

709. Las tres sumas son 7.000 argentinos, 8.000 francos oro, 10.000 marcos oro; las tres rentas 1 % mensual, 10 % anual, $\frac{1}{2}$ % mensual; los tres tiempos, 18 meses, 2 años y tres meses, 500 días.

II. La cantidad q de agua que sale por un orificio practicado en el fondo del recipiente que la contiene, está dada por la fórmula siguiente llamada de Toricelli:

$$q = s \sqrt{2gh}$$

en la que q expresa el número de m^3 por segundo, s el área del orificio en m^2 , g es 9.81 metros, h la altura del agua en metros dentro del recipiente.

Calcular la cantidad de agua que sale de un recipiente, suponiendo el nivel del agua fijo, en el siguiente tiempo y con los siguientes datos:

710. Tiempo: una hora; área del orificio: 1 dm^2 ; altura del agua: 50 cm.

711. Tiempo: medio día; área: 30 mm^2 ; alt.: 427 mm.

712. Tiempo: 47 minutos; área: 5 cm^2 ; alt.: 7 dm.

III. Una vasija de cierta substancia, de forma cilíndrica, está llena de un líquido hasta cierta altura a . Al calentar esta vasija, la altura en cuestión varía debido a la dilatación de la vasija y de la del líquido. La diferencia $d = a - x$ entre estas dos alturas, expresada en metros, viene dada por la fórmula:

$$d = a \left(\frac{1 + \alpha t}{1 + 2\beta t} - 1 \right)$$

en la que a indica la altura primitiva en metros; β y α son, respectivamente, dos números relativos a longitudes expresadas en metros y característicos del material de la vasija, y al líquido; t es el aumento de temperatura en grados centígrados.

Calcular la fórmula anterior para los siguientes datos:

713. Altura primitiva, 1 m.; variación de temperatura, 50 grados; coeficiente de dilatación del líquido $\alpha = 0,0011$ (ácido nítrico), coeficiente de dilatación del vidrio $\beta = 0,000008613$.

714. Altura, 776 mm.; variación de temperatura, -25° ; α : relacionado a centímetros 0,07 (esencia de trementina); β relacionado a milímetros 0,029417 (cinc).

715. Altura, 2 varas; variación de temperatura 30° Réaumur; $\alpha = 0,001543$ (mercurio); $\beta = 0,00091466$ (oro fino).

364. Observaciones respecto de las notaciones literales. — La elección de tal o cual letra para expresar cantidades es, desde luego, arbitraria, pero hay conveniencia en guardar cierto orden, ya consagrado por el uso, y destinado a facilitar el recuerdo y la aplicación de las fórmulas.

Una primera convención es, como vimos, la de designar con las primeras letras del alfabeto latino a, b, c, d, e, f, g, h , las cantidades conocidas; con las últimas, en el orden x, y, z, u, v, w , las desconocidas o incógnitas.

Conviene también asociar las letras siguiendo cierto orden cuando existen en una misma cuestión cantidades análogas. Así, si se habla de tres cantidades análogas, se las designará con a, b, c ; con f, g, h ; o con l, m, n ; o con p, q, r ; o con x, y, z ; o con u, v, w . Pero raras veces con n, o, p , o con c, f, g .

Por ejemplo, si se tienen tres sumas de dinero colocadas a intereses simples a tres tantos por ciento diferentes, se designarán preferentemente las tres sumas, con a, b, c ; los tres tantos por ciento anuales, por p, q, r ; y los tres intereses de las mismas, al cabo de un año por x, y, z . Se tendrá así:

$$x = a \frac{p}{100} \quad ; \quad y = b \frac{q}{100} \quad ; \quad z = c \frac{r}{100}$$

expresiones más fáciles de retener que si estuviesen escritas de este otro modo:

$$z = a \frac{q}{100} \quad ; \quad x = b \frac{d}{100} \quad ; \quad y = r \frac{c}{100}$$

365. En general, para expresar cantidades se usan letras minúsculas del alfabeto; a veces, sin embargo, se usan las mayúsculas y también las del alfabeto griego introducidos por grupos, α , β , γ , (alfa, beta, gamma), correspondientes a a , b , c ; λ , μ , ν , (lambda, mu, nu), correspondientes a l , m , n ; ξ , η , ζ , (ksi, eta, dzeta), correspondientes a x , y , z .

366. Cuando, en una cuestión, es necesario introducir muchas letras, quedaría el alfabeto pronto agotado. En esos casos las cantidades análogas se expresan con una misma letra afectada de diversos índices, es decir, como ya vimos, a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , ... que se leen a sub-cero, a sub-uno, a sub-dos, etc. Si no trae confusión puede leerse también abreviadamente, a cero, a uno, a dos, ... etc., sólo que como en esa misma forma se leen las expresiones a^0 , a^1 , a^2 , ..., podría haber confusión y es preferible enunciarlas de la otra manera. También pueden usarse las notaciones, por otra parte no tan recomendables, a^I , a^{II} , a^{III} , a^{IV} , ... que se leen a prima, a segunda, a tercera, a cuarta, ... etc.

Finalmente, se combinan, a veces, ambas notaciones en la forma a_0^I , a_0^{II} , a_0^{III} , ... a_1^I , a_1^{II} , a_1^{III} , ... que se leen a cero prima, a cero segunda, a cero tercera; a sub-uno prima; a sub-uno segunda, ... etc.

Ejemplo:

Se tienen varias sumas de dinero a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n colocadas a intereses, a los tantos por uno p_1 , p_2 , p_3 , ..., p_n , anuales; si se busca el interés total de esas sumas al cabo de un año, se tendrá:

$$x = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \dots + a_n p_n \quad \begin{matrix} m = n \\ = \sum_{m=1}^n a_m p_m \\ m = 1 \end{matrix}$$

PROBLEMAS DE RECAPITULACIÓN GENERAL

716. Determinar con cuatro cifras decimales el valor de $2\sqrt{3} - 12\sqrt{12} + \sqrt{27}$.

717. El área de un cuadrado es 5 % mayor que la de otro. ¿Qué números, cada uno menor que 100, representarán con la mayor aproximación posible, la razón entre los lados de esos dos cuadrados?

718. Calcular: $\sqrt{2} \times \sqrt{2 - \sqrt{3}} (1 + \sqrt{3})$

719. Calcular: $2\sqrt{2-\sqrt{3}}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})$

720. ¿Cuántos números fraccionarios irreducibles menores que 1 y de denominador 900 pueden haber, y cuántos de éstos son cuadrados perfectos?

721. No existe número fraccionario de términos enteros que, agregando $36\frac{1}{4}$ a ambos términos, resulte igual a $\frac{7}{11}$.

722. Sean a y b dos números enteros: se divide $a-1$ por b ; luego $ab-1$ por b^2 ; ab^2-1 por b^3 , etc. ¿Qué relación existe entre los cocientes obtenidos?

724. Si n es un entero mayor que 3, se tiene $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$.

724. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se tendrá $(ab+cd)^2 = (a^2+c^2)(b^2+d^2)$.

725. Si un número es irracional, queda irracional sumándolo, restándolo, multiplicándolo por un número racional distinto de cero, o dividiéndolo por un número racional.

726. Si x es un número irracional y si a, b, a_1, b_1 , son números racionales, el número $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$ es irracional, a menos que se tenga $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$.

727. Si a, a_1, b, b_1 , son números racionales de los cuales los dos últimos no son cuadrados perfectos, no se puede tener $a \pm \sqrt{b} = a_1 \pm \sqrt{b_1}$ sino cuando $a = a_1, b = b_1$; no se puede tener $a + \sqrt{b} = a_1 - \sqrt{b_1}$.

728. En una elección, 10 % de la lista de votantes se abstuvo de votar y 60 votos fueron rechazados por falsos o ilegales. La mayoría de votos a favor del candidato triunfante fué de 308 y resulta ser el del 47 % del número total de la lista. ¿Cuál fué el número legal afectado a cada uno de los candidatos?

729. Tres viajeros desean trasladarse en el menor tiempo posible a un punto distante 25 km. Disponen únicamente de un coche con dos asientos y convienen que dos de ellos saldrán en coche mientras el tercero irá a pie. El coche abandonará a cierta distancia los dos primeros y regresará para recoger al tercero, el cual deberá llegar simultáneamente con los otros dos, que efectuarán a pie el restante del viaje, ¿cuál es la duración total del viaje y cuál es la fracción del recorrido hecha a pie por cada uno de los viajeros, sabiendo que el coche anda 12 km. por hora y los peatones tres veces más despacio?

730. Dos personas distantes una de otra 27 km. se ponen en marcha simultáneamente; marchando en el mismo sentido se encuentran a las 9 horas de marcha; marchando en sentido opuesto se encuentran a las 3 horas, ¿cuántos km. recorre cada persona por hora?

731. Dos ciclistas A y B efectúan el trayecto entre dos ciudades M y N, distantes 405 km., mientras un tercero C recorre la misma distancia en sentido inverso. Salen simultáneamente, se supone que A anda más ligero que B. Sabiendo que, después de 9 horas, A está a igual distancia de B y C; que B recorre en 36 minutos lo mismo que A en 30 minutos y que C en 22

minutos 30 segundos, determinar: 1.º, cuánto recorren A, B y C por hora; 2.º, el momento en que B está a igual distancia de A y C.

732. Dos ciudades A y B distan 900 km. Dos trenes salen simultáneamente, uno de A hacia B, otro de B hacia A; el primero llega a B 4 horas después de haberse cruzado con el otro y el segundo llega a A 16 horas después del cruzamiento, ¿a que distancia de A se han cruzado y cuánto recorre cada uno por hora?

733. Dos canillas pueden verter agua en un estanque. El primero llenaría dicho estanque en 50 horas, el segundo en 40 horas. Se deja primeramente correr el agua por la primera canilla durante 15 horas, luego la segunda canilla durante 16 horas. Se quita luego 900 litros de agua del estanque y se deja abiertas ambas canillas. Se comprueba que el estanque acaba de llenarse a las 10 horas, ¿cuál es su capacidad?

734. Una persona posee 366000 \$. Invierte una parte de esta suma para adquirir una casa y compra una propiedad que le cuesta los $\frac{5}{8}$ del precio de la casa; lo restante, colocado a intereses la mitad al 5 % y la otra al 4,5 %, produce 8740 \$, ¿cuál es el precio de la casa y cuál el de la propiedad?

735. En un campo de 78 áreas, 56 centiáreas, el espesor de la capa arable es, término medio, de 0,35 m. Quiere introducirse $\frac{1}{300}$ de su volumen de cal. El precio de compra de la cal es de 3,05 \$ los 100 kg.; el transporte cuesta 0,45 \$ la carretilla de 8 hl. y el sembrado 0,45 \$ el dam.². Calcular el gasto a efectuar sabiendo que el m.³ de cal pesa 1750 kg. ¿De cuánto debe aumentarse el valor medio por área cosechada durante 3 años para que este aumento cubra los gastos?

736. Un negociante ha comprado 27 barricas de vino cuyo peso total es de 24453 kg. por 2945 fr. El peso de las barricas vacías es la doceava parte del peso del vino, cuya densidad es 0,99. El negociante vende 26 hl. con un beneficio bruto de 12 %. El comprador paga con un letra firmada el 1.º de noviembre, día de la compra, siendo el vencimiento el 1.º de marzo del año siguiente. Hallar el monto de la letra sabiendo que el vendedor exige un interés de $5\frac{2}{3}$ % anual.

737. ¿En qué día de la semana cayeron el 1.º de enero de 1897 y de 1900?

738. ¿En qué día una persona nacida el 1.º de junio de 1897, habrá vivido 4000 días?

739. Demostrar que el mismo cuanto del mes cae el mismo día de la semana en marzo y noviembre.

740. Una lámpara quema durante 36720 minutos; habiéndose apagado a las 3 a. m. del lunes 1.º de enero 1900, ¿qué día de la semana y a qué hora de la mañana o de la tarde se ha encendido?

741. Un año solar contiene 365,242218 días; hallar hasta el segundo exacto, el error cometido en 2000 años en nuestro calendario, el cual, por medio de los años bisiestos, intercala 97 días en 400 años.

742. Un año sideral, que se subdivide en la misma forma que el ordinario, equivale a 23 horas 56 minutos 4,09 segundos de tiempo medio ordinario. Demostrar que la diferencia entre 100 segundos siderales y 100 segundos de tiempo medio ordinario es algo menor que un cuarto de segundo ordinario.

743. En mayo 15 de 1872 una persona ha vivido 30000 días. ¿Cuál es el año y día del mes de su nacimiento?

744. El teniente general Bartolomé Mitre nació el 26 de junio de 1821 y falleció el viernes 19 de enero de 1906, ¿qué día de la semana nació?

745. En qué día de la semana tuvieron lugar los siguientes acontecimientos históricos:

- a) Independencia argentina (25 de mayo 1810);
- b) Toma de la Bastilla (14 de julio 1789);
- c) Jura de la libertad argentina (9 de julio 1816).

746. No puede un número ser simultáneamente un cuadrado y un cubo perfecto si no es una sexta potencia exacta.

747. Una fábrica ha consumido en un año, 4836470 kg. de hulla. ¿Qué volumen ocupaba esa hulla en la mina, sabiendo que el m.³ de hulla en trozos representa sólo $\frac{6}{11}$ de m.³ de la hulla en la roca; el peso de la hulla en trozos es de 81 kg. el hl.?

748. Un comerciante ha comprado 350 litros de aguardiente a 1.35 \$ el litro. ¿Cuánta agua debe agregarle para venderlo a 1.75 \$ el litro y ganar 30 %?

749. Se quiere preparar una mezcla de 663 litros de vino al precio de 0.50 \$ y 0.63 \$ el litro para venderlos a 0.60 \$ el litro y ganar 10 %. ¿Cómo se hará la mezcla?

750. Un comerciante adquiere por 2000 \$, 216 hl. 08 de trigo; vende 160 hl. al por mayor, mediante la suma de 1490 \$, y lo demás al por menor al precio medio de 9 \$ 45 el hl. ¿Cuál es su utilidad en la venta al por mayor y cuál en su venta al por menor.

751. Una substancia cuesta 865 \$ la tonelada; las preparaciones que se le hace experimentar para revenderla, cuestan 0.18 \$ el kg. y motivan un desperdicio de 3.5 %. ¿A cuánto hay que vender el kg. para ganar 12 %?

752. Demostrar que la suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos fracciones periódicas simples son siempre fracciones periódicas simples.

753. El producto de tres números enteros consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.

754. Calcular con cuatro cifras exactas las expresiones siguientes:

$$\frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \qquad \frac{2,7182818 \times 3,4589567}{\sqrt{3}}$$

755. Calcular con aproximación de 0,01, la expresión $\frac{18}{1 + \sqrt{2}}$.

756. Un alumno, al efectuar una división, ha tomado el dividendo por el divisor y viceversa. Ha encontrado como cociente 0,658. ¿Cuál es el verdadero cociente?

757. 23 m. de género cuestan tanto como 17 hl. 4 l. de vino; 15 decalitros de vino cuestan tanto como 2530 gr. de cierta mercadería y 100 decagramos de esta como cinco jornales de un obrero. Este recibe 58,50 \$ por trece jornales de trabajo. ¿Cuántos metros de género podría adquirirse con 935,20 \$?

758. Los numeradores de varios quebrados iguales, son equimúltiplos, respectivamente, de los cocientes hallados diviendo los denominadores por su m. c. d.

759. Hallar una fracción ordinaria tal que si después de agregarle su denominador a sus dos términos se les resta del resultado, el resto es igual a la primera fracción.

760. Si a es un entero cualquiera, demostrar que la fracción $\frac{2a + 1}{3a + 1}$ es

irreducible.

761. ¿En qué condiciones una raíz cúbica está aproximada en menos de $\frac{1}{2}$ unidad?

762. El producto de cuatro enteros consecutivos no puede ser cuadrado perfecto.

763. Hallar dos números tales que la diferencia de sus cuadrados sea igual a la suma de esos dos números.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

1. 0,002035; 3028009,000087; 0.023400009.
2. Ciento siete millonésimos, cuarenta y tres millones siete mil quinientos enteros, ciento veintisiete mil quince diez millonésimos; un millón uno enteros, un millón un diez millonésimos.
3. $6\frac{574}{1000}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{2000}$; $101\frac{9}{10000}$; $430000\frac{101}{1000}$.
4. 40000.5, 0.0400005; 3100, 0.0031; 1224310, 1.22431; 3.45, 0.00000345; 959413.267, 0.959413267.
5. 73.0000. 6. 15. 7. 10,0126.
8. $4\frac{6}{10}$; $157\frac{9}{10}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{60}{10} + \frac{5}{1000} + \frac{2}{10000}$; $\frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{9}{10000}$;
 $\frac{20}{10} + \frac{6}{1000}$; $\frac{11}{10} + \frac{3}{10000}$; $\frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} + \frac{6}{100000} + \frac{7}{1000000}$; $\frac{30}{10} + \frac{7}{1000}$;
 $+ \frac{5}{10000}$; $\frac{30}{10} + \frac{6}{1000}$.
9. 0.6541; 0,000006; 0,90009. 10. 815, 8331.
11. 1103. 12. 100. 13. 365,055291; 5.0232.
14. 52.25, 92.25, 184. 15. 53, 497,25.
16. 46,48; 280,131; 3928,681.
17. 0,0001; 0,01235; 19.189475.
18. 0,0075; 458,998996. 19. 92,17.
20. 401.40. 21. 19.50. 22. 1244.30.
23. 287.477. 24. 4.49. 25. .275.
26. 1.28433; 1720,6; 2477.97.
27. 81046,17; 0.68704741; 0,000002300228.
28. .00004352, .000013056; 40.292, 36.2628, 2,901024.
29. .01092347, 1.092347, .0000001092347; 13.110653369.
30. 239.40. 31. 3240 \$. 32. 16.60 \$.
33. 198.15 \$ 34. 3,83644963.
35. 0.000001; 0.103125. 36. 0,003366; 40,09128184096.
37. 8.46894125. 38. 80, 58, 42.05, 43.732.
39. 32,756; 0,0437; 108.
40. 29,05; 630,4; 0,00000554.
41. 0.002002; 0,0004004; 0,00008008; 0,000016016; 0,00038; 0,000076.
42. 1.2096; 0,0576; 0.0288; 0.0192.
43. 3,249; 1,083; 1,6245.
44. 0.3785; 500000; 1604,01.
45. 120; 0.112; 0,0112; 0.00112; 11200.

46. 0.25. 47. 0.15. 48. 5. 49. 630. 50. 144.
 51. 15, 105, 180, 375. 52. 37, 0.0005.
 53. 124 y 0,00123.
 54. 0,0016; 0,00005184; 5.76; 0,0001; 2070.25; 0.9801; 98,01;
 49.070025.
 55. 32.768; 0,125; 0,000343; 0,000000001; 1157,625.
 56. 675,2. 57. 2166,8. 58. 675,2.
 59. 160,232. 60. 64,765. 61. 37,071.
 62. 0.333333; 0,166666; 0,428571; 0,555555; 0,272727.
 63. 0,681818; 0,269231; 0,309524; 2,916667; 24,846154.
 64. 8,642857; 24,352941; 2,037037; 3,088889; 3,385417.
 65. Sí, no, sí, no, sí. 66. Sí, sí, no, sí, sí.
 67. No, sí, sí, sí, sí. 68. Sí, sí, sí, no, sí.
 69. Sí, sí, no, no, no. 70. 0.15, 0.35, 0.72, 0.076.
 71. 0,888, 4,48, 0,425, 0,3125 0.5625.
 72. 0,0005859375, 9,1875, 2,171875, 3,59375, 105,071875.
 73. 33,1; 8,428571; 10,769230; 0,073738; 0,27; 0,432; 0,26.
 74. 0.28, 0.08, 0,0648, 0,1776, 0,04375, 0,1923076, 0,1142857.
 75. .26, .06, .86, 10.38, 51.56, .583, .107, 3.135.
 76. .093, .590, .10, .11115, .02439, .31707, 3.1714285, .02027,
 .089285714, .168831.
 77. $\frac{4}{11}, \frac{7}{11}, \frac{1}{3}, \frac{14}{33}, \frac{24}{37}$.
 78. $\frac{4}{37}, \frac{23}{37}, \frac{8}{37}, \frac{2557}{3333}, \frac{19}{101}$. 79. $5\frac{2}{7}, 10\frac{4}{7}, \frac{28}{495}, \frac{31}{198}$.
 80. $\frac{1}{300}, \frac{13}{15}, \frac{1}{88}, \frac{2557}{33330}$.
 81. $2\frac{253}{675}, \frac{24664}{24975}, \frac{128881}{330000}$.
 82. $15\frac{485551}{249750}, 3\frac{25339}{133200}, 1\frac{26819}{133200}$. 83. $6\frac{47}{468}, 5\frac{327}{2020}$.
 84. 986; 2; 76. 85. 21,43.
 86. 198,125; 66,0416; 15,24; 2,17. 87. 69.
 88. 3. 89. 87. 90. 15,25. 92. 468.
 93. 73. 94. 53,865. 95. 388,80; 113,40.
 96. 103. 97. 90,75; 0,22.
 98. 565,50; 313,20; 29. 99. $\frac{1}{733}, \frac{23}{73300}$.
 100. 26,72; 240. 101. 11160,4747. 102. 230, 115.
 103. 4. 104. 6 y 7; 11 y 12; 18 y 19; 17 y 18; 220 y 221; 567
 y 568; 85 y 86. 105. 745 y 746; 1001 y 1002; 10 y 11; 999 y 1000.

106. 3,46; 6,15; 18,43; 24,38.
 107. 2,18; 0,06; 3,90; 0,92; 18,76.
 108. 37,143; 13,205; 24,364; 8,417 u 8,418.
 109. 4,574; 21,363; 57,711; 19,894.
 110. 7,638; 23,423 ó 23,424; 47,384; 10,296.
 111. 3,597; 20; 400.
 112. 36000; 134000; 92000; 79000.
 113. 45000; 274000; 98000; 147000.
 114. 57000; 240000; 190000; 198000.
 115. 31000; 125000; 375000; 400000.
 116. 44,12. 117. 10,46. 118. 2,31; 3,10. 119. 3,12; 1,95.
 120. 1,12. 121. 1,0189. 122. 0,6116. 123. 8,7194.
 124. 94,2124. 125. 47,71783. 126. 6,7876. 127. 8,14740.
 128. 38 25534. 129. 4,08535. 130. 34,01; 0,8; 6,9725.
 131. 0,23679; 2,00731; 9,75049.
 132. 7,72137; 1,59044. 133. 0,00126.
 134. 1,03; 0,91; 1,72. 135. 4,25; 14,08; 221,26.
 136. 369,95; 5989,57; 4528,02. 137. 18,07667; 0,00222.
 138. 0,01849; 0,52806. 139. 10,75188; 27,02898.
 140. 24,32769; 0,00008. 141. 0,945775; 142. 846.
 143. 103. 144. 331. 145. 23; 38,3; 53,6; 0,30; 0,90; 1,21; 4125,785.
 146. 6,383; 0,002; 1291,507.
 147. 160289,966; 30319,381.
 148. $0,00001925$; $5,3162$; $0,246913580 = \frac{20}{81}$; $0,0006 = \frac{1}{1650}$.
 149. 1,09; 2,22. 150. 0,63; 24,87.
 151. 0,41; 1,91. 152. 2,7846; 1,1902.
 153. 254,4285; 2115,1922. 154. 0,0733; 129,7322.
 155. 1077872000 kilómetros.
 156. 4,7. 157. 0,1; 0,06; 0,048; 0,067; 0,013; 0,003.
 158. 7,417; 4,121; 0,824; 12689,823; 1522,778.
 159. 0,006; 280,584; 0,020; 0,200; 19,990.
 160. 0,478; 45,620.
 161. 3,171; $0,857142$; 2,45.
 162. $0,00999$; $2,1648$; $0,4125$.
 163. 1,71828. 164. $\pm 0,012$. 165. $\pm 0,015$.
 166. 0,14286. 167. 1,41069. 168. 0,49182.
 169. 0,04167. 170. 0,78540.
 171. 2 cifras; producto = 19, exacto en menos de una unidad;
 3 cifras; producto = 3930, exacto en menos de una decena;
 3 cifras; producto = 2150, exacto en menos de una decena.
 172. 1 cifra; producto = 6100, exacto en menos de una centena;

- 4 cifras; producto = 14267, exacto en menos de una unidad.
173. 4 cifras; producto = 13231, exacto en menos de una decena;
1 cifra; el verdadero valor está comprendido entre 2,39 y 2,57;
0 cifra, cociente = 7, exacto en menos de una unidad.
174. 2 cifras; el cociente está comprendido entre 29 y 30;
1 cifra; el cociente = 70,000, exacto en menos de 10000;
3 cifras; el cociente = 22,4, exacto en menos de 0,1.
175. 3 cifras; el cociente = 25,2, exacto en menos de 0,1; 2; 4000; 100.
176. 4320. 177. 9465033600. 178. 17640.
179. 148. 180. 7884300. 181. 146070.
182. 2190. 183. 106747200. 184. 9460800420.
185. 2 años 27 días; 8 semanas 4 días 12 horas; 5 días 4 horas 24 minutos
17 segundos; 28 siglos 15 lustros 4 semanas 6 días 21 horas 28 minutos; 16
días 20 horas 58 minutos 10 segundos.
186. 56 días 20 horas 27 minutos 13 segundos.
187. 6 días 14 horas 34 minutos 51 segundos.
188. 231 siglos 8 años 120 días 14 horas 8 minutos 41 segundo.
189. 145 siglos 45 años 2 días 3 horas 6 minutos 2 segundos.
190. 6 siglos 97 años 4 días 23 horas 59 minutos 35 segundos.
191. 5 semanas 6 días 6 horas 47 minutos 3 segundos.
192. 13 siglos 10 años 28 días 23 horas 59 minutos 1 segundo.
193. 4 siglos 33 años 359 días 17 horas.
194. 6 días 1 hora 2 minutos.
195. 22 siglos 32 años 168 días.
196. 106 siglos 50 años 2 horas 15 minutos.
197. 998 siglos 86 años 114 días 7 horas 21 minutos.
198. 4 años 209 días 22 horas 54 minutos 3 segundos.
199. 70 años 1 día 2 horas. 200. 10.
201. 1 siglo 1 minuto.
202. 57. 203. 3430000000 pesos.
204. 2031 siglos 79 años 250 días 23 horas 1 minuto 1 segundo.
205. 1000000. 206. 1000. 207. 0,1.
208. 0,00001; 0,00001; 0,01.
209. 440,8; 5207; 0,75; 16122; 500809; 30000; 1; 6254,8; 63034,44.
210. Cuarenta y siete metros veinte y tres milímetros; seiscientos ochenta
metros siete decímetros; cincuenta y cuatro metros ochenta y dos centímetros;
trescientos metros cuatro milímetros; siete metros diez y siete milímetros;
dos mil doscientos veinte metros un milímetro; mil seiscientos setenta metros;
dos mil quinientos treinta metros, veinte y cinco centímetros; cuatro metros
naventa y tres centímetros; ciento sesenta y dos metros ochenta y dos centí-
metros; treinta y dos mil cien metros.
211. 26,5875. 212. 14,9; 348,66.
- 3527
213. 8 horas 20 minutos. 214. 813 $\frac{3527}{7821}$.
- 7821
215. 0,27.
216. 67 días 12 horas, 270 km.; 75 días; 67 días 12 horas, 270 km.
217. 250000. 218. 10000000000.
219. 100000000.

220. 800,22; 328; 70800,80; 9051620; 610,85; 0,0025; 9124159,8725.
 221. 14,05; 4,170033; 80000,07; 480,25; 123500,25; 0,006.
 222. 176300; 579; 7; 64879; 16,25; 470000.
 223. 27840,08. 224. 150. 225. 18 cm.²; 18750 cm.².
 226. 5242. 227. 92. 228. Se ha ganado 77200 \$.
 229. 1781172. 230. 592 $\frac{1}{8}$ m.².
 231. 6482 \$; 8296,70 \$.
 232. 10⁶. 233. 10⁹. 234. 10⁸. 235. 10⁴.
 236. 34,355480315.
 237. 9268 dm.³; 17347200 cm.³; 60 dm.³; 9 dm.³; 53748723 cm.³;
 99 mm.³. 238. 210 \$. 239. 117,21 \$.
 240. 437824 : 391870. 241. 34613. 242. 5000.
 243. 10; 158,35. 244. 3,83, 383; 14,82, 1482; 0,09, 9; 128,98, 12898.
 245. 20, 2000, 20. 246. 66300 \$.
 247. 20. 248. 12. 249. 17,5; 175; 35; 87,5.
 250. 100; 1000. 251. 0,1; 0,001; 0,01; 1; 0,0001; 0,1.
 252. 3085,62. 253. 4,702; 60,07; 7,602; 0,9; 207,5; 0,99; 23,5;
 0,019; 28,028; 100,11.
 254. 5,47; 2,1; 36,75; 8905,7; 0,00029; 0,000004.
 255. 49. 256. 300. 257. 25. 258. 220 días.
 259. 729. 260. 51282,8901 kg.
 261. 100000; 5000; 0,000005.
 262. g.; Mg.; hg.; dg.; quintales; dag.; t.; cg.; mg.
 263. 13044596,13. 264. 21899,0361 kg.
 265. 20g. + 5g.; 2hg. + 50g.; 10g. + 2g. + 1g.; 5g. + 2g.; 5g. + 2g.
 + 2g.; 20g. + 20g. + 5g. + 2g.; 500g. + 2hg. + 20g. + 20g. + 5g.
 + 2g. + 2g.; 2hg. + 1hg. + 50g. + 10g.; 500g. + 2hg. + 2hg. + 1
 hg.; 500g. + 2hg. + 2hg. + 50g. + 20g. + 20g. + 5g. + 2g. + 2g.
 266. 270,5 kg. 267. 5151,2 kg. 268. 28,5 l.
 269. 7,7. 270. 352. 271. 33,01375 kg.
 272. 314,894 litros; 538,644 litros.
 273. 10,5 g. 274. 2014,246 kg.
 275. 1,125 dg. 276. 1 kg., 2 kg., 1 hg., 5 dg., 2 dg.; 1,370 dm.³.
 277. 75,330; 97,929 g.; 1,0958.
 278. 4,25; 14,57. 279. 18,75. 280. 31.
 281. 200 fr. 282. 200000. 283. 100 g.
 284. 1,067. 285. 1,1161268 kg.
 286. 232500 fr.; 15,000 fr. 287. 0,728 l.
 288. 98,71 gr. de oro y 10,97 de cobre. 289. 28; 78,20 fr.
 290. 17 monedas de 5 fr.; 2 de 2 fr.; 1 de 0,5 fr.; 2 de 0,20 fr.
 291. 1,28 mm.; 2,7 mm.; 320 km.; 2700 km.
 292. 1,07 \$. 293. 97,5 l. 294. 3,25 kg.; 14,5 l.
 295. 740. 296. 69 m. 297. 1180 kg. 298. 0,0285 m.
 299. 332 g., 560 fr. 300. 2,25 l. 301. 540, 585.
 302. 80 y 20. 303. 0,6798 m.²; 1,10 \$.
 304. 2,28. 305. 82,5 cm. 306. 73,656.
 307. 329,516 g. 308. 720 \$. 309. 0,850. 310. 0,9; 0,835.
 311. 7788215 £, 10 s., 7 $\frac{1}{2}$ d.; 24414 £, 9 s., 4 $\frac{1}{2}$ d.

312. 106 £, 17 s., 6 d. 313. A, 11 s., 4 d.; B, 1 s., 4 d.; C, 7 s., 4 d.
 314. 63 £, 15 s. 315. 1.^a, 122; 2.^a, 366; 3.^a, 524.
 316. 1 £, 2 s., 6 d. 317. 476 £, 0 s., 10 d.
 318. 116 lbs., 8 ozs. troy. 319. 3916. 320. 168 ft.
 321. 1592 £, 14 s., 4 $\frac{1}{2}$ d. aproximadamente.
 322. 32500 sq. lks.
 323. 20526 cub ft, 171 cub in. 324. 3 $\frac{1}{2}$ d.
 325. 448. 326. 4 horas, 3 minutos, 52 segundos.
 653
 327. 11 $\frac{1077}{1077}$. 328. 18 gals. 329. 160 oz.
 330. 3 ft., 3 in. 331. 1 $\frac{1}{2}$ d.
 332. 32 £, 4 s., 7 d. 333. 116 yds., 1 ft., 11 in.
 334. 20 £, 12 s., 6 d. 335. 1 £, 2 s., 6 d.; 1 £, 16 s.; 1 £, 4 s.
 336. $\frac{4}{423}$. 337. $1\frac{2}{5}$. 338. $\frac{1}{6}$. 339. 0.39375.
 340. 7 tons., 17 cwt., 1 gr., 12 lbs., $12\frac{5}{42}$ oz.
 341. 1 £, 13 s., 5 $\frac{1}{7}$ d. 342. 253 poles. 343. $\frac{725}{846}$.
 344. 5597,67927472 \$ oro; 1109 £, 15 s., 4.7712 d.
 345. 84 £. 346. 50.
 347. 8350 gramos oro. 348. 2940. 349. 4 s., 1 $\frac{1}{4}$ d.
 350. Gana 5 s., $\frac{15}{16}$ d. 351. Pierde 1 £. 352. 25,2. 353. $25\frac{11}{19}$ fr.
 354. 22,27..... 355. 20 gulden.
 356. 1900. 357. $\frac{103}{198}$. 358. $\frac{12}{5}$. 359. 3.
 360. 3 qq., 1 @, 9 lbs., 2 onzas. 361. 3 varas, 1 pie, 8 pulgs. $6\frac{6}{7}$ líneas.
 362. $\frac{97}{320}$ @. 363. 4935. 364. 4 fr., 2 cuartos.
 365. 21 qq., 3 @, 4 lbs., $4\frac{2}{3}$ onz. 366. 15 varas, 7 pulgadas.
 367. 27 pesos fuertes. 368. 63 @, 9 libras, 2 onzas.
 369. 2 pesos fuertes $2\frac{5}{6}$ reales. 370. 2 pesos fuertes $4\frac{4}{25}$ reales.
 371. $2\frac{119}{134}$ reales. 372. 6 @.
 373. 284 v., 2 pies, 3 pulg., 3 líneas, 2 puntos.
 374. 528 v., 1 pie, 11 pulg., $3\frac{1}{64}$ líneas.
 375. 29 v., 10 pulg., 4 líneas, 4 puntos.

376. 40. 377. 2,10 \$.
378. 36987. 379. 11°6'27".
380. 364°37'30"; 40°30'50"; 1 día, 7 horas, 2 minutos; 182°6'; 48'12"; 16 minutos, 28 $\frac{1}{5}$ seg. 381. 89 años, 4 meses, 2 días.
382. 224,88 m; 6 v., 8 pulg., 6 líneas, 8 puntos; 17 lbs., 13 onz., 11 ad., 35 gramos; 1 pipa, 3 barriles, 10 frascos. 383. 76. 384. 9377,048.
385. 2.50 \$. 386. 6 \$ las 25 manzanas; 2 \$ las 5 peras; 9 \$ las 10 naranjas.
387. 6 días desde el principio. 388. 14.831 días.
389. 1 s., 3 d. 390. $\frac{8008}{937}$. 391. 5. 392. $\frac{1}{7}$.
393. $\frac{196}{169}$. 394. $\frac{1}{5}$. 395. $\frac{113}{468}$. 396. 144,180.
397. $\frac{30}{91}$. 398. $\frac{1}{56782,314}$; 3. 399. 252. 400. 108,228.
401. 3136; 25. 402. 204; 16640. 403. 25; $\frac{27}{64}$; 0.656.
404. 17 cwt., 1 qr., 14 lbs., 4 ozs.
405. 0,0005; 1428 $\frac{4}{7}$; $\frac{16}{45}$; 13 $\frac{5}{7}$. 406. 18 $\frac{73}{130}$.
407. 54. 409. $\frac{36}{54}$. 410. $\frac{28}{36}$.
411. 12; 24; 54; 25. 412. 558,80 \$. 413. 3 $\frac{9}{10}$ días. 414. 122.50.
415. 8 segundos. 416. 221 $\frac{1}{2}$ días. 417. 128. 418. 1 $\frac{1}{3}$.
419. 0.375 m.
422. 9857. 423. 10,71 \$. 424. 81 kg. 425. 1616. 426. 240.
427. 88 £., 15 s., 1 $\frac{3}{4}$ d. 428. 15 $\frac{3}{4}$. 429. 80. 430. 5000.
431. 75 días. 432. 6 días. 433. 20 días. 434. 1900. 435. 13 $\frac{1}{2}$ semanas.
436. 776 \$. 437. 75 días. 438. 3 días $\frac{29}{57}$. 439. 51 £. 440. 1250.
441. 52. 442. 30 días. 443. 18. 444. 12 onzas. 445. 8 semanas.
446. 100 días. 447. 6 $\frac{13}{20}$ días, 59 $\frac{17}{20}$ horas. 448. 1000. 449. 5.
450. 358,4. 451. 16 horas. 452. 921 $\frac{3}{7}$. 453. 8. 454. 20. 455. 10.
456. 18 $\frac{2}{3}$ días. 457. 576, 1296, 1728. 458. 80 $\frac{10}{23}$.
459. 50,5848 g. 460. 11. 461. 14. 462. 33.
463. 14. 464. 66666,67. 465. 240. 466. 107,37.
467. 10590. 468. 42. 469. 96,86. 470. 82,50.
471. 12,30. 472. 116,72. 473. 78,60. 474. 6704 £, 15 s., 2 $\frac{6}{7}$ d.
475. 36 y 72. 476. 6; 12000. 477. 196.
478. 19,583,35; 34,625. 479. 18000.
480. 9627,94. 481. 1495,87. 482. 12798,87.

483. 1010,10. 484. 8253,59. 485. 8305,11. 486. 12039,52.

487. 3589 £, 11 s., $11\frac{75}{83}$ d., descuento racional. 488. 6 %.

489. 5 £, 8 s., $5\frac{1367}{4500}$ d. 490. 5 %. 491. 10 £, 15 s., $11\frac{589}{4000}$ d.

492. 30 septiembre. 493. 8928,57. 494. 21378,22.

497. C: 10100. 498. 3282,30; 3278,30. 499. 39 £, 9 d. 500. 7 meses.

501. 11 d., 25 c. 502. 4165,38. 503. 4 $\frac{1}{2}$. 504. 3407,53.

505. 192,60 \$. 506. 157,50. 507. 26,15. 508. 4993,86.

509. 6500,83. 510. 26442,07. 511. 9 de agosto. 512. 26 julio.

513. 1335,69; 2065,81. 514. 7229,50 \$; 17383,90 \$. 515. 147 \$.

516. 92,50. 517. 65 \$. 518. 29,40. 519. 19, 38, 133, 190.

520. 7,689 %. 521. $9\frac{1}{11}$ %. 522. 62 £, 10 s. 523. 15,59 litros.

524. 2399 £, 11 s., 3,6 d.; 7 km., 465 m. 525. 2800.

526. $53\frac{1}{17}$. 527. 3600. 528. 2498,11.

529. 44,53. 530. 7 meses. 531. 1,10 £.

532. Conviene más el $3\frac{1}{2}$. 533. $2\frac{2}{5}$. 534. 14980,20.

535. 18,45. 536. pérdida $2\frac{2}{49}$. 537. 42,98 \$; $9\frac{2}{7}$.

538. El tanto por ciento obtenido para el segundo es $\frac{25}{4823}$ veces mayor

que el relativo al primero; $\frac{100}{77259}$ en favor del segundo.

539. La primera. 540. 10166 £ 13 s. 14 d.; 6000 £.

541. 2,5505 \$. 542. 156. 543. 152,60.

544. 60000, 40000, 24000. 545. 150, 180, 240, 300.

546. 360, 270. 547. 120, 40, 20.

548. 870 kg., 145 kg., 145 kg. 549. 955 £ 4 s.; 636 £ 16 s.

550. 66,67; 63,33; 50. 551. 480, 440, 165, 605.

552. 315 \$, 105 \$.

553. 3550 £, 3124 £, 2982 £; 3536 £, 3128 £, 2992 £.

554. 15; 7,5; 5. 555. 243 días. 556. 19:17.

557. 112; 24. 558. $373, 298\frac{2}{5}$. 559. 42,70; 110.

560. 320; 360, 384. 561. 1000, 1500, 500. 562. 45; 49,5; 50.

563. En los últimos cuatro.

564. 5904; 1476; 492.

565. $\frac{11}{18}$; $\frac{7}{18}$. 566. 270, 120, $112\frac{1}{2}$. 567. 23 £ 5 s. 9d.; 30 £ 14 s. 3 d.

568. 80, 90, 84. 569. 825, 450, 20 %. 570. 165.

571. 10000; 15000. 572. 4000; $1523\frac{1}{13}$; 2500; $951\frac{12}{13}$.

573. 90; 81; 108.

574. 750. 575. 500:540. 576. $517\frac{1}{2}$, $828, 1012\frac{1}{2}$.

577. 80, 90, 84. 578. 630. 579. 230, 300.

580. 18 \$ y 20 \$ el primero; 27 \$ y 30 \$ el segundo.

581. A: 24000 \$, 12000 \$, 3200 \$; B: 36000 \$, 12000 \$, 2400 \$; C: 48000 \$, 12000 \$, 1600 \$.

582. 18400, 12266 $\frac{2}{3}$. 583. $\frac{20}{59}$, $\frac{15}{59}$, $\frac{24}{59}$; A: 105, B: 78 $\frac{3}{4}$, C: 126.

584. 1040.

585. 7000; 8500; 20000; 20000.

586. 0,75. 587. 2,50 \$. 588. 326,19; 75,26; 10,72; 885,70.

589. 96 l.; 240 l.

590. 0,52 \$. 591. 320 l. 592. 0,81 l.; 0,49 \$. 593. 162.

$n(c-b)$
594. $\frac{a-c}{a-c}$. 595. 126,66 kg. 596. 220.

$m \left[a-c \left(1 + \frac{p}{100} \right) \right]$
597. $\frac{c \left(1 + \frac{p}{100} \right) - b}{c \left(1 + \frac{p}{100} \right) - b}$. 598. 100, 20, 60, 180.

599. 600, 1200, 1200. 600. 0,870. 601. 5 : 4; 2000; 1600.

602. 360, 150. 603. 4.350 kg.; 483 $\frac{1}{2}$ g. $\frac{P(ba)}{1-b}$, $\frac{P(b-a)}{b(1-a)}$.

604. 2,25 kg.; $\frac{1}{4}$ g.; $P \frac{a-b}{1-b}$, $P \frac{a-b}{a(1-b)}$.

605. 34, 86931 hl.; 70,13041 hl. 606. 0,9087; 4,139 kg.

607. 4483750 g.; 7125 fr. 608. 38,50 fr.; 194,61 g.; 1077.

609. 300 l.; 49,725 \$. 610. 37,7208 hl.; 49,2714 hl.

611. 6583,775 \$. 612. 4,085819 kg. (1er. lingote); 4,905819 kg. (2.º lingote).

613. 300 g. 1200 g. 0,9.

614. 44100; 270400; 70560000; 697225; 1449616; 196504324.

615. 6859000; 21952000; 300763000000; 2685619; 34328125.
129559592830382343.

616. 13, 14. 617. 14365, 14366. 622. No puede.

623. Sesenta millones novecientos sesenta y dos mil ciento sesenta; nueve mil, ciento setenta.

631. 23; 37; 83; 99; 31; 360; 2407; 30059; 1001.

632. 2010; 71, 138; 7007, 573; 8038, 36; 1322, 1292; 2767, 3710; 821305; 2039750; 131025.

633. 12; 8, 113; 25; 26, 649; 135, 600; 71, 3290, 601; 101, 8061; 1019; 301, 123855; 5234; 14010, 362, 387059; 1039, 712147; 464, 102655; 389; 137.

634. 20. 635. 571. 636. 17,281.

637. 4; 9; 11; 79; 18; 35. 638. 7; 12; 15; 13.

640. 6; 15; 11. 641. 4; 18. 642. 9; 7; 24; 6.

643. 7. 644. 5. 645. 5,06007; 3,25.

$$646. 5179 = 71^2 + 128; 49098652 = 7007^2 + 603; 64609480 = 8038^2 + 36; \\ 12324,853 = 111^2 + 3,853.$$

$$647. 5 = (2,23)^2 + 0,0271.$$

$$648. 209,2; \text{ resto } 24,36.$$

$$649. 280,18; \text{ resto } 3,1676. \quad 650. 0,9; \text{ resto } 0,09.$$

$$651. 1,77; \text{ resto } 0,0086. \quad 652. 1,772; \text{ resto } 0,001608.$$

$$653. 44,4444. \quad 654. 47003; \text{ resto } 400000727. \quad 655. 6; \text{ resto } 4,073.$$

$$656. 0,1003. \quad 657. 0,973. \quad 658. 1,4; 9,3.$$

$$659. 119; 5,37; 18,2. \quad 660. 11,01; 2,946.$$

$$661. 5,1034; 2,0162. \quad 662. 14,37121; 5,03121.$$

$$663. 0,0101; 0,0219. \quad 664. 0,00043; 0,00072.$$

$$665. 2,414; 1,366; 0,309; 0,290.$$

$$666. 0,236; 2,225; 3,146; 0,318.$$

$$667. 0,252; 0,732; 2,732; 1,618.$$

$$668. 1,809; 5,449; 0,564; 1,410.$$

$$669. 5,828; 0,268; 2,618; 0,098.$$

$$670. 9,899; 0,127; 1,336; 0,748.$$

$$671. 4,828; 4,051; 3,146; 3,646.$$

$$672. 4,828; 1,366; 1,932; 0,457.$$

$$673. \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}, \quad \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a} - \sqrt{ab(a+b)}}{2ab},$$

$$\frac{3\sqrt{30} + 5\sqrt{15} - 12 - 10\sqrt{2}}{7},$$

$$674. \frac{3 + \sqrt{6} + \sqrt{15}}{6}, \quad \frac{a - 1 + \sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{2a(a-1)}}{a - 1},$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2},$$

$$675. 1 - \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^3}; \quad \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3^6} - \frac{4}{3^6} + \frac{3}{3^6} - \frac{2}{3^6} + \frac{1}{3^6} - 1 \right)$$

$$\frac{\frac{31}{2^5} + \frac{26}{3^6} + \frac{21}{2^6} + \frac{16}{2^6} + \frac{11}{2^6} + 1}{31},$$

$$676. \frac{1}{3} \sqrt{3}; \quad 3\sqrt{3} + 5. \quad 677. 3. \quad 678. 8\sqrt{3}.$$

$$679. 3 + \sqrt{5} = 5,23607.$$

$$680. \text{Diego debe a Juan } 85 \$.$$

$$681. 318 \text{ m.}$$

$$682. 36. \quad 683. 829. \quad 684. \frac{13}{32}. \quad 685. 52. \quad 686. 55,46735$$

$$687. \frac{4}{44} \quad 688. 44. \quad 689. (-50). \quad 690. \frac{5}{22} \quad 15$$

$$691. -2356. \quad 692. 107. \quad 693. \frac{65}{3} + \frac{20\sqrt{35}}{9}$$

$$694. 12,7398 + 0,0618\sqrt{120}. \quad 695. 91 + 38\sqrt{2} + 4\sqrt{323} + 2\sqrt{646}.$$

$$696. 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985.$$

$$697. 0, -1, -2, -5, -12, -29, -70, -169, -408, -985.$$

$$698. -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 4, \frac{9}{2}, 23, \frac{55}{2}, 134, \frac{323}{2}, 781,$$

$$699. 2, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{21}, \frac{1}{24}, \frac{2}{113}, \frac{1}{135}, \frac{2}{649}, \frac{1}{782}$$

$$700. 1, 1, 2, 5, 13, 34.$$

$$701. -1, -1, -2, -5, -13, -34.$$

$$702. \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{26}, \sqrt{170}, \sqrt{1057}.$$

$$703. 0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44.$$

$$704. -1, 1, 2, 2, 5, 9, 16, 30, 55, 101.$$

$$705. \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{6}, \frac{11}{10}$$

$$706. \frac{11}{8}, \frac{5}{3}, \frac{23}{9}, \frac{157}{42}, \frac{471}{80}$$

$$707. 20400. \quad 708. 4887,50 \$ \text{ papel.}$$

$$709. 4199,041 \$ \text{ papel.} \quad 710. 112, 75524 \text{ m.}^3.$$

$$711. 3,7511424 \text{ m.}^3. \quad 712. 52,25319 \text{ m.}^3.$$

$$713. 54,09 \text{ mm.} \quad 714. -12,416 \text{ mm.} \quad 715. -19,05 \text{ mm.}$$

ÍNDICE GENERAL

	Pág.
Capítulo I. — CANTIDADES Y NÚMEROS FRACCIONARIOS DECIMALES	1
Ejercicios relativos a la adición y sustracción	5
Ejercicios relativos a la multiplicación	7
Ejercicios relativos a la división	9
Ejercicios relativos a la potenciación	10
Capítulo II. — CONVERSIÓN DE UN NÚMERO FRACCIONARIO EN OTRO DECIMAL Y CONSECUENCIAS	11
Ejercicios 15, 18, 25,	29
Capítulo III. — CÁLCULOS APROXIMADOS	31
Ejercicios	32
Ejercicios relativos a la adición y sustracción	33
Ejercicios relativos a la multiplicación	35
Ejercicios relativos a la división	38
Errores	39
Ejercicios 41 y	44
Capítulo IV. — EL CONCEPTO DE LÍMITE MATEMÁTICO	45
El número irracional	47
Capítulo V. — MEDIDA DE LOS GRANDORES MATEMÁTICOS	51
Medida del tiempo	52
Ejercicios de reducción de unidades	54
Ejercicios de adición	55
Ejercicios de sustracción	57
Ejercicios de multiplicación	57
Ejercicios de división y potenciación	58
Capítulo VI. — § 1. — SISTEMA MÉTRICO DECIMAL	59
Ejercicios	86
§ 2. — Extensión del sistema métrico	93
Otros sistemas en uso	93
Ejercicios	99
Regla conjunta	103
Ejercicios	105

	Pág.
Capítulo VII. — RAZONES Y PROPORCIONES	106
§ 1. — Razones	106
Ejercicios	109
§ 2. — Proporciones	110
Ejercicios	114
Capítulo VIII. — CANTIDADES DIRECTA O INVERSAMENTE PROPOR-	
CIONALES	115
Ejercicios	119
Capítulo IX. — Aplicaciones	121
§ 1. — Reglas de tres	121
Ejercicios	129
§ 2. — Intereses, descuentos	132
a) Interés simple	132
Ejercicios	138
b) Descuentos	138
Ejercicios	143
§ 3. — Cuestiones de porcentajes	144
Ejercicios	148
§ 4. — Reparticiones proporcionales. Mezclas	152
Aplicaciones. Regla de compañía	153
Prorrates	155
Algunos casos especiales	156
Ejercicios	158
§ 5. — Mezclas y aligaciones	162
Ejercicios	167
Capítulo X. — OPERACIONES INVERSAS DE LA POTENCIACIÓN ...	170
Repaso de la potenciación	170
Ejercicios	181
a) Radicación	182
b) Logaritmación	186
Práctica de la radicación en el sistema decimal	189
a) Raíz cuadrada	189
b) Raíz cúbica	195
Ejercicios	206
Radicación de cantidades fraccionarias	207
Ejercicios	208

	Pág.
Raíces aproximadas	208
Ejercicios	214
Mecanismo del cálculo relativo a los llamados cantidades y números irracionales	215
Caracteres irracionalidad	219
Cantidades y números llamados logarítmicos	219
Ejercicios	222
Capítulo XI. — INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA	224
Adición	228
Substracción	231
Ejemplos	235
Problemas	237
Multiplicación	238
División	245
Cantidades y números fraccionarios	246
Utilidad práctica	247
Potenciación	249
Radicación	250
Logaritmación	252
Recapitulación	254
a) Operaciones aritméticas	254
b) Operaciones algebraicas	257
Capítulo XII. — CÁLCULO LITERAL	259
Alcance del cálculo literal	261
Valor numérico de una expresión literal	263
Identidades	265
Ejercicios	266
Observaciones relativas a las fórmulas literales	267
Ejercicios	270
Problemas de recapitulación general	272
Soluciones de los ejercicios	277

