M. Coppetti

Aritmética

(PRIMER AÑO)

ESTUDIANTE ....

DOMICILIO .... N.º .....

PROVINCIA ....

Ing. MARIO COPPETTI

ARITMETICA

(PRIMER AÑO)

CONTIENE 500 EJERCICIOS Y PROBLEMAS

TEXTO AJUSTADO A LOS NUEVOS PROGRAMAS DE MATEMATICAS PARA LOS COLEGIOS NACIONALES

BUENOS AIRES
"LIBRERIA DEL COLEGIO"
ALSINA Y BOLIVAR
1937

PREFACIO

En los fundamentos que acompañan el actual programa de matemáticas, se establece claramente: " Que los programas vigentes siguen un método intuitivo y razonado que se apoya en imágenes reales y concretas, adoptado con éxito, entre otros países, en Francia, Alemania e Italia. "

Aplaudimos sin reservas la adopción de esta nueva orientación, con el convencimiento del óptimo resultado que esperamos se logrará entre nuestra juventud estudiosa.

Ateniéndonos, pues, a la orientación establecida, nos hemos ajustado a los siguientes criterios:

Hemos precedido las definiciones, de alguna explicación sencilla, a fin de aclarar el concepto.

Con igual finalidad hemos precedido los enunciados de propiedades y reglas, de algún ejemplo concreto, y, en lo posible, sacado de la vida práctica.

Hemos impreso los enunciados de propiedades y reglas con letra gruesa, a fin de que el alumno pueda distinguir inmediatamente cuáles son las partes que debe estudiar y repetir con toda exactitud, de cuáles podrá simplemente leer y retener lo principal.

Hemos impreso con letra chica, las demostraciones de las propiedades cuya lectura se podrá transferir, sin inconveniente, para el repaso. Al respecto, y por ser muy alpicable a nuestro medio, diremos, como lo expresa en el prefacio de una de sus obras didácticas elementales el insigne pedagogo y matemático italiano SEVERI: " Teoremas más o teoremas menos, poco importa para la finalidad formativa de la enseñanza. El tiempo dedicado a hacer comprender el espíritu de una definición es, por el contrario, siempre óptimamente empleado. El niño tiene una infinita curiosidad por ver cómo están hechos los juguetes y las cosas que caen entre sus manos; si lo queremos interesar, es necesario análogamente que le mostremos cómo está hecha la Ciencia, antes que ofrecerle, sin preámbulos, definiciones e ideas bien compuestas y pulidas. Las definiciones debe construirlas él por sí mismo, partiendo de las nociones de sentido común que posee".

Es posible que esta obrita tenga no pocas imperfecciones; pero, desde ya, agradecemos a los colegas toda indicación que al respecto se sirvan trasmitirnos a fin de mejorar las futuras ediciones, si es que ésta tuviese favorable aceptación.

EL AUTOR.

Buenos Aires, marzo de 1937.

ÍNDICE DE CAPÍTULOS
Y
PROGRAMA OFICIAL
PARA EL PRIMER AÑO DE LOS COLEGIOS NACIONALES.

ARITMÉTICA

NOTA. — El cálculo mental deberá hacerse desde comienzo del curso.

CAPITULO I

NUMERACION

Sucesión natural de los números

1. Conjuntos. — Consideramos intuitivo el concepto de *conjunto, grupo* o *colección* de objetos; así, por ejemplo, todo estudiante sabe qué se entiende por *grupo de alumnos, conjunto de casas, de flores, colección de monedas*, etc.

Obsérvese que en un conjunto figuran objetos de la *misma especie.*

Uno cualquiera de los objetos de un conjunto, se llama **unidad** del mismo.

2. Números enteros. — Desde el primer año de la escuela, el estudiante sabe **contar** las unidades de un conjunto. Esta operación consiste en pronunciar las palabras:

uno, dos, tres, cuatro, cinco, etc., etc.

a medida que se consideran, *uno por uno,* los objetos del conjunto, sin omitir alguno ni considerar un objeto más de una vez.

Así, por ejemplo, podemos contar las monedas que se encuentran en una caja colocándolas una por una sobre una mesa y pronunciando sucesivamente las palabras: *uno, dos, tres,...* etc. Si la última palabra pronunciada fuera, por ejemplo, *dieciocho,* se dirá que *el número de monedas es dieciocho.*

Si la caja está vacía y se pregunta cuántas monedas contiene, se contesta: *ninguna.* En lugar de usar esta palabra, se dice que *el número de monedas es cero.*

Las palabras *cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, ...* que sirven para expresar *cuántos* son los objetos de un conjunto se llaman **números enteros** o **números naturales**, o simplemente, **números**.

Se indican con los signos bien conocidos:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Al número 1 se le llama también **unidad**.

3. Sucesión natural de los números. — Un número entero o natural se llama *sucesivo* o *consecutivo* de otro, si se obtiene de éste contando después de él una sola unidad.

Llamamos *sucesión natural de los números*, al conjunto de números naturales ordenados de modo que a cada número siga el consecutivo.

De las definiciones anteriores deducimos que:

La sucesión natural de los números está limitada en un sentido e ilimitada en el otro. En efecto: ella debe empezar por cero, y no tiene límite superior, porque cada número natural tiene su consecutivo.

4. Principio fundamental. — Cuando contamos los objetos de un conjunto, cada uno de ellos tiene una *posición determinada*: decimos que los objetos se cuentan en *determinado orden.*

Contando nuevamente los objetos en otro orden, es evidente que el resultado no altera. Admitiremos, pues, como cierto, el siguiente PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA ARITMETICA.

El número de objetos de un determinado conjunto es el mismo, cualquiera que sea el orden en que se cuenten aquellos objetos.

5. Objeto de la Aritmética. — *La Aritmética es la ciencia de los números.* — Para su estudio, hacemos abstracción de todas las propiedades de las cosas que se estudian en las otras ciencias.

Ella comprende: 1.º La manera de formar, enunciar y escribir los números.

2.º La manera de efectuar las operaciones con los números.

3.º El estudio de las propiedades de los números.

Igualdad y desigualdad

6. Axiomas fundamentales. — La Aritmética, como todas las ciencias de razonamiento, utiliza algunas proposiciones relacionadas entre sí, que se llaman **definiciones**, **axiomas, postulados, teoremas,** etc.

a) La **definición** es la proposición que establece el significado de una palabra o la naturaleza de una cosa.

b) **Axioma** es una verdad evidente por sí misma; basta enunciarla para que todos la comprendan.

Los axiomas principales son:

1.° *Toda cantidad puede reemplazarse por su igual.*

2.° *Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.*

3.° *El todo es igual a la suma de sus partes y mayor que cualquiera de ellas.*

4.° *Si con cantidades iguales hacemos operaciones iguales, obtenemos resultados iguales.*

c) **Postulado** es una proposición cuya verdad se admite sin pruebas y es necesaria para servir de base en ulteriores razonamientos.

d) **Teorema** es una proposición que contiene una verdad, pero que es necesario probar mediante un razonamiento que se llama *demostración.*

En el enunciado de un teorema se distinguen normalmente dos partes: la *hipótesis,* es el conjunto de relaciones que se admiten; la *tesis,* es la propiedad que es necesario demostrar.

Si en el enunciado de un teorema se cambia la hipótesis por la tesis y viceversa, se obtiene un nuevo teorema que se llama *inverso* o *recíproco* del primero.

e) **Corolario** es una consecuencia que se deduce de una o más verdades demostradas.

f) **Problema** es una proposición a resolver.

7. Notaciones. — Cuando queramos dar más generalidad a las cuestiones que trataremos en lo sucesivo, representaremos los números mediante letras del alfabeto latino.

Así, representaremos con a y b los números que expresan cuántos son los objetos de dos conjuntos. Si quitamos de éstos, al *mismo tiempo y sucesivamente,* un objeto, puede suceder que los dos conjuntos se agoten simultáneamente, o bien, que uno de ellos, por ejemplo, el primero, se agote antes que el otro. En el primer caso, decimos que los dos conjuntos tienen el mismo número de objetos, o que *a es igual a b*, y se escribe:

$$a = b \qquad [1]$$

En el segundo caso, *a es menor que b*, o lo que es lo mismo, *b es mayor que a*, y se escribe:

$$a < b \quad \text{o bien} \quad b > a \qquad [2]$$

La [1] se llama *igualdad;* el signo $=$ se llama *signo de igualdad,* y se lee: *es igual a* o bien, *igual a.*

Las [2] se llaman *desigualdades;* los signos $<$, $>$ se leen respectivamente *menor que, mayor que.*

El número que está delante del signo de igualdad o de desigualdad, se llama *primer miembro* de la misma; el que está después, *segundo miembro.* Así, en la igualdad [1], el primer miembro es a, y el segundo es b.

8. Propiedades de las igualdades. — Admitiremos como evidentes las siguientes propiedades, que se llaman *leyes* o *caracteres formales de las igualdades:*

1.ª *Todo número es igual a sí mismo* (ley reflexiva).

$$a = a$$

2.ª *Si un número es igual a otro, éste lo es al primero* (ley simétrica).

Si $a = b$, tenemos $b = a$.

3.ª *Si un número es igual a otro y éste, a su vez, es igual a un tercero, el primero es igual al tercero* (ley transitiva).

Si $a = b$ y $b = c$, tenemos $a = c$.

En este caso podemos escribir: $a = b = c$.

9. Postulado de las igualdades. — *Efectuando con los dos miembros de una igualdad una determinada operación con un mismo número, se obtiene otra igualdad.*

10. Propiedades de las desigualdades. — Las desigualdades tienen las siguientes propiedades:

1.ª	Si $a < b$,		tenemos	$b > a$.
2.ª	Si $a = b$	y $b > c$,	tenemos	$a > c$.
	Si $a = b$	” $b < c$,	”	$a < c$.
3.ª	Si $a > b$	” $b = c$,	”	$a > c$.
	Si $a < b$	” $b = c$,	”	$a < c$.
4.ª	Si $a > b$	” $b > c$,	”	$a > c$.
	Si $a < b$	” $b < c$,	”	$a < c$.

11. Postulado de las desigualdades. — *Efectuando con los dos miembros de una desigualdad una determinada operación, se obtiene otra desigualdad en el mismo sentido que la primera.*

Numeración decimal

12. Sistema de numeración. — Desde los primeros años de la escuela primaria, el alumno ya sabe que es posible, mediante pocos vocablos y pocos signos convenientemente relacionados, expresar cualquier número.

También ha aprendido a usar el método generalmente adoptado desde hace mucho tiempo, que se llama **sistema de numeración decimal.** Nos limitaremos, pues, a su rápida revisión.

Los signos suficientes para escribir cualquier número, son:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

que se llaman *cifras arábigas* (llamadas así, porque se atribuye su origen a los árabes). Se les llama también *números dígitos,* porque los conjuntos que representan, pueden contarse con los dedos de ambas manos. (*)

13. El criterio en que se basa el sistema de numeración decimal se evidencia con el ejemplo siguiente.

Propongámonos contar las naranjas contenidas en un cajón.

1.° Se reúnen en grupos de a *diez;* cada grupo se llamará **una decena** (de naranjas). Supongamos que, terminada la operación, nos sobren 6 naranjas.

2.° Si las decenas son más de 9, las reunimos en grupos de *diez decenas* cada uno; cada grupo se llamará **una centena** (de naranjas). Supongamos que después de esta operación, nos sobren 2 decenas.

3.° Si las centenas son más de 9, las reunimos en grupos de *diez centenas cada uno;* cada grupo se llamará **un millar.** Supongamos que se hayan obtenido 4 millares sin que hayan sobrado centenas. Diremos que el cajón contiene 4 millares, 2 decenas y 6 naranjas, o más brevemente, *cuatro mil veintiséis naranjas;* dicho número se expresa con cifras arábigas escribiendo 4026, y habiendo colocado la cifra cero para dar a entender que faltan los grupos de centenas de naranjas. Por esta razón, se llama *cifra no significativa,* mientras que a las otras nueve se les llama *cifras significativas.*

14. Valor de una cifra en la numeración decimal. — Del ejemplo del párrafo anterior, deducimos que en la escritura de los números del sistema decimal, una cifra significativa tiene un valor que depende del signo con que se representa y del lugar que ocupa respecto de las otras cifras.

(*) La palabra **dígito** proviene del latín **digitus**, que significa **dedo.**

Ejemplo. — Si escribimos que una población tiene 8628 habitantes, el primero y el último lugar están ocupados por la misma cifra 8; pero el 8 que ocupa el lugar de la izquierda, indica 8 millares de personas, y el que está a la derecha, 8 personas.

Cada cifra significativa tiene, pues, dos valores: el **valor absoluto** es el que se le asigna por convención a la forma de la cifra; el **valor relativo** que depende del lugar que la cifra ocupa en el número escrito.

Ejemplo. — La cifra 6 del número 8628 tiene el valor absoluto de 6 unidades simples; el valor relativo de la misma es de 6 centenas, o sea de 600 unidades simples.

15. Téngase presente el siguiente PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA NUMERACION DECIMAL ESCRITA, que se llama también *principio del valor relativo*.

Cada cifra colocada inmediatamente a la izquierda de otra, representa unidades diez veces mayores que la que le sigue a la derecha.

16. **Nomenclatura.** — Es probable que el empleo del sistema de numeración decimal por casi todos los pueblos, se deba a que, al principio, los hombres contaron con los dedos; la división de cada dedo en tres falanges, es probable también que haya dado la idea de división en los tres órdenes (unidades, decenas y centenas), que componen cada clase.

En el cuadro siguiente resumimos la sucesión de las unidades de los diversos órdenes y clases que forman el sistema decimal:

1.ª clase	unidades simples	1.er orden
	decenas ”	2.º ”
	centenas ”	3.er ”
2.ª clase	unidades de millar	4.º ”
	decenas ” ”	5.º ”
	centenas ” ”	6.º ”
3.ª clase	unidades de millón	7.º ”
	decenas ” ”	8.º ”
	centenas ” ”	9.º ”
4.ª clase	unidades de millar de millón	10.º ”
	decenas ” ” ” ”	11.º ”
	centenas ” ” ” ”	12.º ”
5.ª clase	unidades de billón	13.º ”
	decenas ” ”	14.º ”
	centenas ” ”	15.º ”

. . . .

Nota. — Un millón de millones se llama *billón;* un millón de billones se llama *trillón;* un millón de trillones, *cuatrillón,* y así sucesivamente. No confundir con el *billón* francés (o *millard*), que vale mil millones.

17. **Base del sistema.** — El número *diez,* que, de acuerdo con el *principio del valor relativo* (N.° 15), indica que cada diez unidades de un orden forman diez unidades del orden inmediatamente superior, se llama **base** *del sistema de numeración.*

Por ser *diez* la base de nuestro sistema de numeración, le llamamos *sistema decimal.*

Nota. — Como cualquier número podría ser elegido por base de un sistema, se podrían, en consecuencia, formar otros sistemas de numeración, análogos al decimal.

18. **Modo de escribir un número.** — En virtud del principio fundamental de la numeración escrita (N.° 15), deducimos la siguiente

Regla. — *Para expresar con cifras un número enunciado o escrito con letras, se procede de izquierda a derecha, escribiendo primeramente la cifra que representa las unidades del orden más elevado; luego, sucesivamente, las cifras de los órdenes inmediatamente inferiores, y recordando emplear la cifra cero para los órdenes que faltan.*

Ejemplos. — 1.° El número *trescientos diecisiete,* que contiene 3 centenas, 1 decena y 7 unidades simples, se escribe: 317.

2.° El número *cuarenta mil quinientos treinta,* que contiene 4 decenas de mil, 5 centenas y 3 decenas, faltando las unidades de mil y las simples, se escribe: 40 530.

19. **Modo de leer un número.** — 1.° *Si el número tiene a lo sumo 3 cifras,* no estimamos necesario enunciar regla alguna, porque entendemos que todo estudiante sabrá leer muy bien dicho número, con los conocimientos adquiridos en la escuela.

Ejemplos. — El número 16 se lee: *dieciséis.* El número 58 se lee: *cincuenta y ocho.* El número 23 se lee: *veintitrés.* (Los números compuestos de dos decenas, se leen mediante una sola palabra. a fin de evitar la repetición del diptongo *ei*).

2.° *Si el número tiene a lo sumo 6 cifras,* se separan las tres de la derecha y se lee el primer grupo de la izquierda, agregando la palabra mil, y luego se lee el grupo de la derecha.

EJEMPLO. — El número 38 508 se lee: *treinta y ocho mil quinientos ocho.* El número 965 216 se lee: *novecientos sesenta y cinco mil doscientos dieciséis.*

3.° *Si el número tiene más de* 6 *cifras,* se agrupan de 6 en 6 a partir de la derecha, y se enuncian sucesivamente los trillones, billones, millones y unidades, aplicando a cada grupo de seis cifras, la regla anterior.

EJEMPLO. — El número 8 570 243 se lee: *ocho millones, quinientos setenta mil doscientos cuarenta y tres.* El número 2 072 507 910 se lee: *dos mil setenta y dos millones, quinientos siete mil novecientos diez.* El número 1 216 307 000 500 se lee: *un billón, doscientos dieciséis mil trescientos siete millones, quinientos.*

20. Números ordinales. — Estimamos conveniente recordar los adjetivos ordinales; ellos son:

Primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno (o nono).

Décimo, undécimo, duodécimo, décimotercero, décimocuarto,... décimonono.

Vigésimo, vigésimoprimero, vigésimosegundo, vigésimotercero,...

Cuadragésimo, cuadragésimoprimero,...

Quincuagésimo,...

Como estos adjetivos resultan algo complicados para números grandes, en estos casos se prefiere usar el número natural, excepto para los adjetivos sencillos, como *centésimo, milésimo,* etc. Así, por ejemplo, se dirá: "N N es el número 54 de la lista", en vez de "N N es el quincuagésimocuarto de la lista".

Numeración romana

21. Cifras romanas. — La numeración escrita de los Romanos aun se emplea en algunos casos, como ser en la inscripción de fechas en los monumentos, para indicar las horas en los cuadrantes de los relojes, etc. Resulta útil, pues, su conocimiento.

Los signos representativos de las cifras romanas son letras mayúsculas, de valores respectivos:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Los signos I, X, C, M se llaman *fundamentales,* y los otros, *secundarios.*

22. Escritura de números (*). — Para la escritura se establecieron las siguientes *convenciones*:

1.ª *Toda cifra escrita a la derecha de otra mayor o igual, se suma con ésta.*

EJEMPLOS. —	II	significa	*uno y uno*	o sea,	2
	VI	”	*cinco y uno*	” ”	6
	XII	”	*diez y uno y uno*	” ”	12
	CLV	”	*cien y cincuenta y cinco*	” ”	155

2.ª *Toda cifra colocada a la izquierda de otra mayor, se resta a ésta.*

EJEMPLOS. —	IV	significa	*cinco menos uno,*	o sea	4
	XC	”	*cien menos diez,*	” ”	90
	LM	”	*mil menos cincuenta,*	” ”	950

3.ª *Toda cifra con una rayita horizontal en la parte superior, significa unidades de millar de esa cifra; con dos rayitas, unidades de millón; con tres rayitas, unidades de millar de millón, etc.*

EJEMPLOS. — $\overline{\text{XII}}$ significa 12 *mil;* $\overline{\overline{\text{XL}}}$ significa 40 *millones.*

A fin de que un mismo número no pueda representarse por dos símbolos diferentes, se ha convenido, también, que:

La I sólo se antepone a la V y a la X; la X sólo se antepone a la L y a la C; la C, a la D y a la M.

Los símbolos secundarios no se anteponen ni se repiten.

Los símbolos fundamentales sólo pueden repetirse tres veces, a lo sumo.

23. De acuerdo con las convenciones anteriormente establecidas, los treinta primeros números de la sucesión natural son:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X;
XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX;
XXI, XXII, XXIII, XIV, XXV, XXVI, XXVII, ...

Los signos siguientes significan:

XL,	L,	LX,	LXX,	LXXX,	XC,	C.
40	50	60	70	80	90	100

(*) Como en este párrafo se emplean las operaciones de sumar y restar, que se estudiarán en los párrafos que siguen, podría transferirse, pues, su lectura, para después de haber estudiado dichas operaciones.

CC,	CCC,	CD,	D,	DC,	DCC,	DCCC,	CM,	M.
200	300	400	500	600	700	800	900	1000

Las unidades de millar se escriben así:

MM,	MMM,	$\overline{\text{IV}}$,	$\overline{\text{V}}$,	$\overline{\text{VI}}$,	etc.,	$\overline{\text{X}}$,	$\overline{\text{XX}}$
2000	3000	4000	5000	6000		10 000	20 000

Análogamente, tenemos:

$\overline{\overline{\text{I}}}$,	$\overline{\overline{\text{II}}}$, ...	$\overline{\overline{\text{V}}}$,	$\overline{\overline{\text{X}}}$;	
1,	2, ...	5,	10	millones;

$\overline{\overline{\overline{\text{I}}}}$,	$\overline{\overline{\overline{\text{X}}}}$, ...	$\overline{\overline{\overline{\text{V}}}}$, ...	
1,	10, ...	5	millares de millones

Ejemplos. — 709 se escribe en cifras romanas así: DCCIX. — El año de la fundación de Buenos Aires (1536) se escribe así: MDXXXVI. — El año actual (1937) se escribe: MCMXXXVII.

La suma

24. Operaciones fundamentales.—El conjunto de procedimientos y reglas que nos enseñan a obtener, partiendo de dos o más números dados llamados cantidades *conocidas* o *datos,* otro número desconocido llamado *resultado,* es lo que se llama *operación aritmética.*

Las operaciones aritméticas se clasifican en *directas* e *inversas.*

Si con dos números dados (a) y (b) se efectúa determinada operación aritmética obteniendo como resultado el número (c), la operación que debe realizarse con (c) y con uno de los dos números dados para obtener el otro, se llama INVERSA de la primera.

Las operaciones directas son: la *adición* (o suma), la *multiplicación* y la *potenciación;* las operaciones inversas: la *sustracción* (o resta), la *división,* la *radicación* (o extracción de raíz), y la *logaritmación.*

La *sustracción* y la *división* son las operaciones inversas respectivamente de la *adición* y de la *multiplicación;* la *radicación* y la *logaritmación* son operaciones inversas de su *potenciación.*

La adición, sustracción, multiplicación y división, constituye el grupo de las CUATRO OPERACIONES FUNDAMENTALES.

25. Definiciones. — Trataremos de la primera de las operaciones fundamentales, *la suma*, iniciando su estudio con la imagen concreta del siguiente

EJEMPLO. — *En un canasto tengo 6 manzanas y en otro 5. ¿Cuántas manzanas tendré si las pongo todas en un canasto?* Para contestar a esta pregunta, puedo reunir todas las manzanas, *formando de los dos conjuntos uno solo*, y luego contar: obtengo 11 manzanas. Pero también puedo proceder tomando una manzana de uno de los conjuntos y agregándola al otro; por ejemplo, tomando una del conjunto de 5 y agregándola al de 6, y decir 6 y 1, 7; repito la misma operación 4 veces más diciendo sucesivamente: 7 y 1, 8; 8 y 1, 9; 9 y 1, 10; 10 y 1, 11. Hemos hecho una primera operación aritmética: Decimos que el *número de manzanas de este único grupo es la* **suma** *de los números de manzanas de los conjuntos considerados.*

La segunda de las operaciones descriptas para hallar la suma de los dos conjuntos, facilita la comprensión de la siguiente

DEFINICIÓN. — **Se llama SUMA de dos números al que se obtiene contando sucesivamente después del primero, tantos números como unidades tenga el segundo.**

Por ejemplo, la suma de 8 con 4 es el número que se obtiene contando *cuatro* números consecutivos al número 8; se llega así al número 12, que se llama suma de 8 con 4. En este ejemplo, el número 12 es el *resultado* de la operación.

Para indicar que *la suma de* 8 *con* 4 *es* 12, se escribe:

$$8 + 4 = 12$$

que se lee, 8 *más* 4 *es igual a* 12, o más brevemente: 8 *y* 4, 12. Como vemos, la palabra *más* se abrevia con el signo $+$.

Por definición tenemos: $0 + 5 = 5$; $5 + 1 = 6$, vale decir, que 6 es el número *consecutivo* de 5.

Convenimos, también, que: $5 + 0 = 5$; $8 + 0 = 8$, etc., es decir, que *la suma de un número con cero es el mismo número.*

26. La SUMA de varios números se obtiene sumando los dos primeros, luego sumando el resultado con el tercero, el nuevo resultado con el cuarto, y así sucesivamente, hasta que se hayan considerado todos los números.

Así, la suma de los números 5, 3, 13 y 24 es el número que se obtiene sumando 5 con 3, el resultado con 13, y el nuevo resultado con 24. Pero, en lugar de escribir

$$5 + 3 = 8 \; ; \quad 8 + 13 = 21 \; ; \quad 21 + 24 = 45 \, ,$$

se escribe $5 + 3 + 13 + 24 = 45$

Los números cuya suma hay que hallar, se llaman **sumandos** o **términos de la suma.**

La ADICION es la operación aritmética mediante la cual hallamos la suma de varios números.

Las palabras: *adicionar, sumar, agregar,* son sinónimas, y todas significan: *efectuar la adición.*

Ejemplo I. — En una casa de tres pisos habitan: 18 personas en la planta baja, 15 en el primer piso, 12 en el segundo y 14 en el tercero. ¿Cuál es el número de habitantes de la casa?

El número pedido es: $18 + 15 + 12 + 14 = 59$, obtenido efectuando la suma de los cuatro números dados.

Ejemplo II. — Para indicar la suma de \$ 5, con \$ 3, con \$ 13 y con \$ 24, se escribirá indiferentemente:

$\$\,5 + \$\,3 + \$\,13 + \$\,24 = \$\,45$, o bien: $\$(5 + 3 + 13 + 24) = \$\,45$

Obsérvese en los ejemplos anteriores, que los términos de una suma y el resultado de la operación son cantidades de la misma especie; no tendría sentido una suma de cantidades de distinta especie.

27. Paréntesis. — Obsérvese en el último ejemplo, que se ha empleado el símbolo ( ) que se llama *paréntesis.* Generalmente, al encerrar una operación dentro de un paréntesis, significa que se desea calcular previamente el resultado de esa operación, para luego operar sucesivamente.

Así, por ejemplo, si ponemos

$$(5 + 3) + (13 + 24)$$

significa que debemos calcular separadamente las sumas $5 + 3 = 8$ y $13 + 24 = 37$, y luego sumar los resultados: $8 + 37 = 45$.

Cuando un paréntesis debe encerrar otro, se le reemplaza por un *paréntesis recto* o *corchete* [ ].

Así, por ejemplo, si ponemos

$$[5 + (3 + 13)] + 24$$

significa que debemos calcular primeramente la suma $3 + 13 = 16$, la que se agregará a 5, obteniendo $5 + 16 = 21$; luego se agregará 24 a este resultado, obteniendo $21 + 24 = 45$.

También se emplean las *llaves* $\{\ \}$ en lugar del paréntesis, cuando éste debe encerrar corchetes.

Propiedades fundamentales de la suma

28. **Propiedad conmutativa.** — Supongamos, por ejemplo, que disponemos de tres bolsas, que contienen: la primera, 6 manzanas, la segunda 3 y la tercera 4; nos proponemos reunir todas las manzanas en una sola caja; evidentemente, cualquiera que sea el orden en que se viertan las bolsas, obtenemos siempre el mismo número de manzanas en la caja.

Podemos expresar este hecho escribiendo:

$$6 + 3 + 4 = 3 + 6 + 4 = 6 + 4 + 3 = \ldots = 13$$

Como este razonamiento puede repetirse para cualesquiera que sean los números, podemos, pues, representarlos con letras (N.º 7), y poner

$$\boxed{a + b + c + d = c + b + d + a = d + c + a + b = \ldots}$$

Esta igualdad origina el siguiente enunciado general:

El valor de una suma no cambia, si se altera el orden de los sumandos.

La denominación de *conmutativa* para esta propiedad, proviene de la palabra *conmutar*, o sea, cambiar entre sí los sumandos.

NOTA. — Esta propiedad se justifica también fácilmente teniendo presente el principio fundamental de la Aritmética (N.º 4); en efecto: alterando el orden de los sumandos, lo único que hacemos es alterar el orden en que están dispuestas las unidades del total, y sabemos que su número es independiente del orden en que se cuentan esas unidades.

29. Propiedad asociativa. — Supongamos, por ejemplo, que disponemos de cuatro bolsas que contienen: la primera, 7 manzanas, la segunda 2, la tercera 8, y la cuarta 9; nos proponemos reunir todas las manzanas en un solo cajón.

Podemos proceder de distintos modos:

1.° Verter en el cajón, sucesivamente, las manzanas de cada bolsa; esta operación se indica así: $7 + 2 + 8 + 9$

2.° Verter en la segunda bolsa, las manzanas de la tercera, luego verter en el cajón, sucesivamente, las manzanas de la primera, segunda y cuarta bolsa; esta operación se indica así: $7 + (2 + 8) + 9$

3.° Verter en la primera bolsa las manzanas de la tercera, y en la cuarta bolsa las manzanas de la segunda, luego verter en el cajón, sucesivamente, las manzanas de la primera y cuarta bolsa; esta operación se indica:

$$(7 + 8) + (9 + 2)$$

Así, sucesivamente, podríamos continuar variando la forma de reunir las manzanas de cada bolsa.

Evidentemente, cualquiera de los modos adoptados u otro que se empleare, daría como resultado, que en el cajón se encontraría siempre el mismo número de manzanas. Podemos expresar este hecho escribiendo la igualdad de los valores expresados anteriormente:

$$7 + 2 + 8 + 9 = 7 + (2 + 8) + 9 =$$
$$= (7 + 8) + (9 + 2) = \ldots = 26$$

Como podemos repetir el razonamiento con otros números, empleando el lenguaje abreviado de las letras, tenemos:

$$\boxed{a + b + c + d = a + (b + d) + c = \ldots = (a + c + d) + b = \ldots}$$

que origina el siguiente enunciado general:

El valor de una suma no altera si se sustituyen dos o más sumandos por su suma efectuada.

La denominación de *asociativa* para esta propiedad, proviene de la palabra *asociar*, o sea, reunir varios sumandos.

30. Propiedad disociativa. — La igualdad

$$a + b + c + d = a + (b + d) + c$$

que expresa la propiedad anterior, puede escribirse invertida, en virtud de la ley simétrica (N.º 8-2.ª), y tenemos:

$$\boxed{a + (b + d) + c = a + b + c + d}$$

que nos permite enunciar aquella propiedad de este otro modo:

Si dos o más sumandos están encerrados dentro de paréntesis, se pueden quitar dichos paréntesis; en otros términos:

El valor de una suma no cambia si se sustituyen dos o más sumandos por otros, cuya suma sea igual a la de los primeros.

EJEMPLO. — Por ser $7 = 3 + 4 = 2 + 5 = \ldots$; $9 = 1 + 8 = 4 + 5 = \ldots$ la suma $7 + 9$ podrá escribirse así:

$$7 + 9 = (3 + 4) + 9 = 7 + (1 + 8) = \ldots$$
$$= (3 + 4) + (1 + 8) = \ldots = 16$$

La denominación de *disociativa* para esta propiedad, proviene de la palabra *disociar,* o sea, en este caso, descomponer un sumando en otros.

APLICACIÓN. — Esta propiedad recíproca de la asociativa, conjuntamente con ésta y con la conmutativa, se aplican frecuentemente en el *cálculo mental,* que trataremos con detalle en el último Capítulo; no obstante, desde el comienzo del curso, haremos aplicaciones del cálculo mental, como lo establece el programa vigente.

Así, por ejemplo, debiendo sumar 46 + 69, se efectúa más fácilmente la suma descomponiendo (disociando) los dos sumandos como sigue:

$$45 + 69 = (40 + 5) + (60 + 9) = (40 + 60) + (5 + 9) =$$
$$= 100 + 14 = 114$$

En la práctica no se escriben todas estas igualdades, sino que se opera mentalmente así:

decenas	unidades	
4	5	
6	9	
10	14,	es decir, 100 + 14 = 114.

En resumen, *se adicionan separadamente los números enteros de las decenas, se reducen a unidades, y a éstas se le agrega la suma de las cifras de las unidades.*

31. **Expresiones aritméticas.** — Una o más operaciones con números, indicadas mediante los signos convencionales respectivos, constituyen una expresión aritmética. Así, por ejemplo, lo son las siguientes:

$$3 + 5 + (6 + 2) + 1 \; ; \quad [5 + (2 + 1)] + 3$$

Justificación de la regla operatoria de la suma

32. Si para hallar la suma de varios números de varias cifras, aplicáramos el procedimiento indicado en la definición de suma (N.° 25), tendríamos que *contar sucesivamente después del primero, las unidades del segundo, a continuación de este resultado las unidades del tercero,* y así sucesivamente; la operación resultaría excesivamente larga, por lo cual, en la práctica se usa un procedimiento abreviado, que explicaremos mediante algunos ejemplos.

33. **Suma de dos números de una cifra.** — Desde los primeros años escolares, el alumno ya sabe sumar mentalmente dos números de una cifra cada uno, sin tener necesidad de aplicar la definición de suma (N.° 25). Ya ha aprendido de memoria los resultados de las sumas de los nueve primeros números, los que se indican en una tabla, llamada *tabla de sumar*.

TABLA DE SUMAR

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

La suma de dos números se encuentra en la casilla de intersección de la columna encabezada con uno de los sumandos dados, y la fila que empieza por el otro sumando.

EJEMPLO. — Se suma $5 + 8$, se encuentra en la casilla de intersección de la columna encabezada con el número 5, y la fila que empieza con el número 8. En dicha casilla leemos el número 13, que es la suma que buscábamos.

34. Suma de un número cualquiera con otro de una cifra. — Sea, por ejemplo, la suma $46 + 7$. Agregando, como en el caso anterior, las 7 unidades del segundo número a las 6 del primero, se obtiene 13 unidades, o sea 1 decena y 3 unidades. Esta decena, sumada con las 4 decenas del primer número, da 5 decenas. La suma es, pues, 5 decenas y 3 unidades, o sea, 53.

35. Suma de varios números cualesquiera. — Todo número de varias cifras, puede considerarse como la suma de los valores relativos de las mismas; es decir, como la suma de las unidades de los distintos órdenes contenidas en el mismo número. Así, por ej., $5764 = 5000 + 700 + 60 + 4$.

Según esto, propongámonos sumar los números 5764, 492, 4786.

Descomponiendo cada uno en las unidades de los distintos órdenes, tenemos:

$$\begin{aligned} 5764 &= 5000 + 700 + 60 + 4 \\ 492 &= \phantom{5000 + {}} 400 + 90 + 2 \\ 4786 &= 4000 + 700 + 80 + 6 \end{aligned}$$

Es natural que (N.º 11, 3.º), sumando las once partes en que se han descompuesto los números dados, tendremos todas las unidades contenidas en los mismos, es decir, que tendremos la suma. Pero estas partes pueden sumarse en cualquier orden (N.º 28); sumaremos, pues, primeros las unidades, luego las decenas, después las centenas, luego los millares.

Disponemos la operación como se indica al lado, y empezando por la derecha, decimos: 4 unidades y 2 son 6, y 6 son 12, es decir, 1 decena y 2 unidades; escribo éstas en el orden de las unidades, y llevo una decena para sumarla con las decenas de los números dados.

$$\begin{array}{r} 5\,764 \\ 492 \\ 4\,786 \\ \hline 11\,042 \end{array}$$

Pasando a las decenas, decimos: 1 decena que llevaba y 6 son 7, y 9 son 16, y 8 son 24 decenas, es decir, 2 centenas y 4 decenas; escribo las 4 decenas en su orden, y llevo 2 centenas para sumarlas con las de los números dados.

Pasamos a la columna de las centenas diciendo: 2 centenas que llevaba y 7 son 9, y 4 son 13, y 7 son 20 centenas, es decir, 2 millares; escribo *cero* en el orden de las centenas, y llevo los 2 millares.

Pasando a los millares, decimos: 2 millares que llevaba y 5 son 7, y 4 son 11, es decir, 1 millar y 1 decena de millar; las escribo en el orden respectivo.

La suma es, pues: 11 042.

De este ejemplo podemos enunciar la siguiente

REGLA. — **Para sumar varios números, se escriben ordenadamente cada uno debajo del anterior, de modo que las unidades del mismo orden se encuentren en la misma columna. Debajo de estos sumandos se traza un segmento de recta para separarlos del resultado que se escribirá debajo. Se suman primeramente todas las cifras de la última columna de la derecha; si el total no excede de 9, se escribe debajo de esta columna; si excede de 9, se escriben solamente las unidades y se llevan mentalmente las decenas a la columna siguiente. Se opera análogamente con cada una de las otras columnas hasta la última, cuya suma se escribirá íntegra a la izquierda de la cifra anteriormente hallada. El número formado por todas estas cifras, es el resultado.**

NOTA. — Se empieza la adición por la columna de la derecha, a fin de llevar a la columna siguiente las decenas provenientes de la suma de la columna anterior. Si la suma de las cifras de cada columna no excediera de 9, podrían sumarse las columnas en cualquier orden.

36. Prueba de la suma. — Se llama *prueba* de una operación, una segunda operación que sirve para *verificar* la primera.

La prueba de la suma puede realizarse de varios modos; citaremos dos:

1.° *Prueba por inversión.* — Se efectúa otra vez la adición pero en sentido inverso, es decir, sumando de abajo para arriba (si la primera operación se hizo en la forma habitual, es decir, sumando de arriba para abajo). Los dos resultados deben ser iguales, en virtud de la propiedad conmutativa de la suma.

2.º *Prueba por sumas parciales.* — Con todos los sumandos se forman dos o más grupos, hallando las sumas de los términos que forman cada grupo; luego se halla el total de estas sumas parciales y su resultado debe ser igual al de la primera operación, en virtud de la propiedad asociativa de la suma.

EJEMPLO:

3 856	
9 023	
417	13 296
8 709	
39 162	
297	48 168
61 464	61 464

37. Notas prácticas. — 1.ª Cuando los números a sumar son muchos, en la práctica se acostumbra sumarlos en grupos, y luego se suman los resultados de dichos grupos, como ya lo hicimos en la prueba de la suma (N.º 36-2.ª).

2.ª Cuando los sumandos no se hallan escritos en columna, no es necesario esta última disposición para hallar su suma. Basta con empezar a sumar las últimas cifras de la derecha de cada número, pasar luego a las penúltimas, y así sucesivamente como indicamos en la regla (N.º 35). Para evitar que las cifras no se consideren en su justo orden, es conveniente, cuando se considera cada cifra, poner sobre ella una marca, por ejemplo, un punto.

Presentamos a continuación un ejemplo, en que los números están escritos en cualquier orden:

$$\dot{2}\dot{4}\dot{5} \qquad \dot{5}\dot{6}\dot{9} \qquad \Big| \quad 7\,573$$
$$\dot{3}\dot{8}\dot{7} \qquad \dot{6}\,\dot{3}\dot{7}\dot{2}$$

Sumo las cifras: 7, 12, 14, 23; escribo 3 (a la derecha) y llevo 2; las penúltimas 10, 14, 21, 27; 7 y llevo 2; 5, 7, 10, 15; 5 y llevo 1; 7.

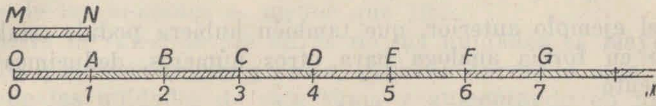
3.ª En los cuadros estadísticos, presupuestos, etc., generalmente interesa conocer las sumas de los números colocados en cada columna y las de cada fila. Las sumas de los números de las columnas se escriben en la última fila, y las de las filas en la última columna. El *total general* se obtiene sumando los números de la última fila, o bien los de la última columna. En la práctica, se calcula este total general por los dos procedimientos, a fin de verificar todas las adiciones efectuadas. A continuación presentamos un ejemplo.

Obsérvese que, en este ejemplo, para obtener las sumas de los números de cada fila, conviene emplear el punteado de cada cifra, como lo indicamos en la nota anterior.

CENSO GANADERO NACIONAL DEL AÑO 1930

Provincias y Territ.	Vacunos	Lanares	Porcinos	Yeguarizos	Caprinos	Asnales y mulares	Totales por Provs. y Territorios
Buenos Aires . .	11.639.442	14.086.741	1.838.494	2.989.964	15.832	14.276	30.584.749
Santa Fe. . . .	3.641.804	532.600	542.940	1.273.923	89.184	22.314	6.102.765
Córdoba	3.074.697	1.109.783	513.528	1.778.596	745.184	169.312	7.391.100
Entre Ríos . . .	2.534.729	3.396.295	118.705	842.474	17.839	19.394	6.929.436
Corrientes. . . .	3.832.556	3.298.657	55.479	570.650	20.991	31.123	7.809.456
Salta	845.348	383.686	70.434	133.402	410.461	63.846	1.907.227
Santiago del Estero	869.981	1.108.714	109.762	354.883	1.232.822	154.805	3.830.967
San Luis	721.235	529.812	22.801	224.652	457.406	80.116	2.036.022
Tucumán	469.863	136.707	95.684	142.195	158.354	102.631	1.105.434
Catamarca. . . .	292.845	176.536	15.777	55.984	439.478	61.908	1.042.528
Mendoza.	237.097	184.025	53.241	112.653	197.980	42.974	827.970
La Rioja	224.440	124.421	11.468	40.081	386.793	55.604	842.807
Jujuy.	170.740	741.469	13.286	41.817	125.617	86.318	1.239.436
San Juan. . . .	69.711	80.719	21.494	41.568	185.806	38.383	377.492
Chaco.	1.178.371	150.491	64.676	140.353	98.921	13.655	1.646.467
Formosa.	984.974	88.265	8.984	44.750	76.153	4.549	1.207.675
La Pampa	894.174	2.253.070	114.553	464.118	115.165	23.370	3.864.450
Misiones	117.626	9.613	62.705	39.443	4.018	7.660	241.065
Chubut	112.241	5.004.173	9.270	180.555	176.972	8.343	5.491.554
Santa Cruz . . .	17.982	6.880.392	3.095	87.761	9.023	1.998	7.000.251
Tierra del Fuego	4.194	843.339	155	5.869	16	3	853.576
Los Andes. . . .	694	57.372	18	147	26.250	15.140	99.621
Neuquén.	156.591	914.366	4.458	83.798	413.433	10.701	1.583.347
Río Negro. . . .	110.920	2.315.985	13.821	160.886	241.556	8.188	2.851.356
Capital Federal .	9.600	5.990	3.860	47.589	2.142	2.810	71.991
Total en la Repúb	32.211.855	44.413.221	3.768.738	9.858.111	5.647.396	1.039.421	96.938.742

38. Representación gráfica de la suma. — Supongamos que un segmento de recta (MN) represente cierta *unidad*. Si sobre una semirrecta Ox, que se acostumbra colocar horizontalmente y con el origen O a la izquierda, llevamos a partir de O el segmento (MN), una o más veces, obtendremos segmentos compuestos de aquel segmento unidad.



Por ejemplo, el segmento (OC) se compone de 3 unidades; el segmento (OE) de 5, etc.

Al punto O llamamos *origen*, y a los puntos C, E, F, ... *extremos* de los segmentos OC, OE, OF, ...

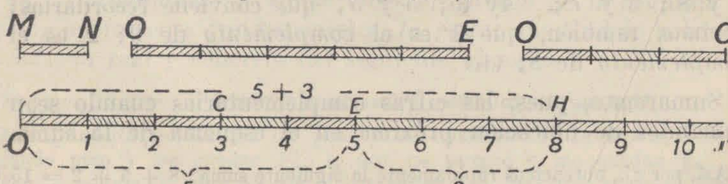
La semirrecta Ox se llama *eje orientado* (en el caso de la figura, la orientación es de izquierda a derecha).

Numerando los extremos de los segmentos como lo hicimos en la figura, es decir, empleando la sucesión natural de los números, decimos por ejemplo, que al punto C corresponde el número natural 3; al punto D corresponde el número 4, etc. Al origen le corresponderá el número cero.

Recíprocamente, dado un número cualquiera, queda fijada la posición de un punto sobre el eje; en consecuencia, queda fijado también un segmento de origen O, cuyo extremo es aquel punto; aquel segmento se llama **segmento representativo** del número.

Hemos visto, pues, cómo se representan gráficamente los números naturales.

Ejemplo. — Al número 3 corresponde el punto C, siendo su segmento representativo, el (OC). Al número 5 corresponde el punto E, siendo su segmento representativo el (OE).



Para hallar gráficamente la **suma de números**, sean, por ej., los números 5 y 3 que deseamos sumar.

Si sobre el eje orientado Ox, a continuación del segmento (OE) llevamos 3 veces el segmento unidad (MN), o sea, llevamos un segmento $(EH) \doteq (OC) = 3$, obtenemos el segmento (OH), a cuyo extremo corresponde el número 8, es decir, la suma $5 + 3$.

El segmento (OH) representa, pues, gráficamente, la suma $5 + 3$.

Del ejemplo anterior, que también hubiera podido establecerse en forma análoga para otros números, deducimos la siguiente

Regla. — *Para sumar gráficamente dos números se emplea un eje orientado* (por ejemplo hacia la derecha) ; *a continuación del segmento representativo de uno de los sumandos, se lleva* (siempre hacia la derecha), *un segmento igual al representativo del otro sumando; el segmento que tiene por origen el del eje orientado y por extremo el del segundo sumando, representa, gráficamente, la suma pedida.*

Si fueran más de dos los sumandos, procederíamos como indicamos en el (N.º 25).

Como ejercicio, demuéstrese gráficamente la propiedad conmutativa de la suma.

Cálculo mental en la adición

39. Para el cálculo rápido, es muy conveniente acostumbrarse a efectuar, desde un principio, algunas operaciones numéricas *mentalmente*, es deci,r sin emplear lápiz, ni papel.

40. Suma de cifras. — Más adelante veremos que, dos cifras son *complementarias* cuando su suma es igual a 10.

Los pares de cifras complementarias son, pues: 1 y 9 ; 2 y 8 ; 3 y 7 ; 4y 6 ; 5 y 5, que conviene recordarlas; decimos también, que 1 es el *complemento* de 9; 2 es el *complemento* de 8; etc.

Sumaremos, pues, las cifras complementarias cuando sean sumandos de ubicación próxima en el esquema de la suma.

Así, por ej., obtenemos rápidamente la siguiente suma: $8 + 5 + 2 = 15$ observando que 8 y 2 son cifras complementarias.

Análogamente: $6 + 7 + 4 + 3 + 8 = 28$ observando que 6 y 4 son cifras complementarias, así como 7 y 3.

41. **Suma de dos números de dos cifras.**—Sumamos mentalmente por un lado las decenas y por otro las unidades, reuniendo luego los resultados.

Así, por ej., decimos: $34 + 52 = 86$. Mentalmente hemos efectuado $30 + 50 = 80$; $4 + 2 = 6$; $80 + 6 = 86$.

Este procedimiento es ventajoso cuando la suma de las cifras de las unidades es menor que 10.

Cuando la suma de las cifras de las unidades es mayor que 10, procedemos como antes, pero conservando sólo la cifra de las unidades de esta suma y aumentando en una unidad la cifra de las decenas.

Así, por ej., decimos $85 + 67 = 152$. Mentalmente hemos efectuado $80 + 60 = 140$; $5 + 7 = 12$; $140 + 10 + 2 = 152$.

42. **Suma de dos números cualesquiera.** — Descomponemos mentalmente cada número en las unidades de sus distintos órdenes; efectuamos las sumas de esas unidades empezando por las de orden más elevado y sumamos luego los resultados parciales.

Así, por ej., decimos: $743 + 285 = 1028$. Mentalmente hemos efectuado $700 + 200 = 900$; $40 + 80 = 120$; $3 + 5 = 8$. Luego: $900 + 120 = 1020$; $1020 + 8 = 1028$.

NOTA. — Conviene no pasar de un ejercicio al siguiente sin haber antes practicado bastante con el anterior. Es necesario que el estudiante logre operar mentalmente con rapidez y sin mayor esfuerzo, efectuando, podríamos decir, simultáneamente las distintas operaciones.

Para el estudiante que posea algo de *memoria visual*, le resultará más fácil el cálculo mental, imaginándose los números escritos en una pizarra imaginaria; en otros términos, *viendo* los números sobre los que opera.

La resta

43. **Definiciones.** — Iniciaremos el estudio de la segunda de las operaciones fundamentales, *la resta,* apoyándolo sobre la imagen real y concreta del siguiente ejemplo.

Si tengo 12 pesos y presto 3 a un amigo, ¿cuántos me quedan?

Primeramente le entrego un peso y me quedan 11; le entrego un segundo peso y me quedan 10; le doy un tercero y me quedan 9.

Por consiguiente, después de haber entregado los tres pesos a mi amigo, me quedan 9. La operación realizada se llama **sustracción** o **resta**, y lo que me queda, es decir, los 9 pesos, se llama **diferencia** entre 12 y 3.

Observemos que, si mi amigo me devuelve los 3 pesos, éstos, agregados a los 9 que tengo, forman los 12 pesos que tenía; resulta, pues, justificada la siguiente

DEFINICIÓN. — **Se llama DIFERENCIA entre dos números (*no siendo el segundo mayor que el primero*), aquel número que sumado al segundo, da como resultado el primero.**

Así, para indicar que la diferencia entre 12 y 3 es 9, se escribe:

$$12 - 3 = 9$$

que se lee, 12 *menos* 3 *es igual a* 9, o más brevemente, 12 *menos* 3, 9, queriendo con esto expresar que *sumando* 9 *con* 3 *se obtiene* 12. Como vemos, la palabra *menos* se abrevia con el signo —.

El número mayor (o a lo sumo igual al segundo número), se llama *minuendo;* el número que se resta (número que se sustrae), se llama *sustraendo;* ambos números son los *términos de la diferencia.*

Por definición tenemos:

$$8 - 8 = 0 \quad \text{puesto que} \quad 8 + 0 = 8\;;$$

$$5 - 0 = 5 \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 0 + 5 = 5\,.$$

La SUSTRACCION es la operación aritmética mediante la cual hallamos la diferencia entre dos números.

Las palabras: *sustraer, quitar, restar* son sinónimas, y todas significan **efectuar la sustracción.**

Para indicar que restando 25 kilogramos de 38 kilogramos, obtenemos 13 kilogramos, se escribirá indiferentemente:

Kg. 38 — Kg. 25 = Kg. 13; o bien, Kg. (38 — 25) = Kg. 13

Obsérvese que los términos de una sustracción y la diferencia son cantidades de la misma especie; no tendría sentido una diferencia entre cantidades de distinta especie.

Propiedades fundamentales de la resta

44. Propiedad 1.ª — Recordando el ejemplo que precede a la definición de diferencia (N.º 43), vimos que si de $ 12 que tenía, prestaba a un amigo $ 3, me quedaban $ 9, lo que se expresaba así: 12 — 3 = 9.

También vimos que volvía a poseer los $ 12 cuando el amigo me devolvía los \$ 3 prestados, puesto que los adicionaba a los \$ 9 que me habían quedado, o sea:

$$12 = 3 + 9$$

En general, podemos decir:

El minuendo es igual a la suma del sustraendo, con la diferencia.

Una expresión literal de esta propiedad la tendríamos llamando, por ejemplo, m al minuendo, s al sustraendo y d a la diferencia; en consecuencia, podemos escribir

$$\boxed{m = s + d}$$

De aquí que podamos dar también la siguiente definición:

La SUSTRACCION es la operación mediante la cual, dado el valor de la suma de dos números, hallamos uno de ellos conociendo el valor del otro.

45. **Propiedad 2.** — Supongamos, por ejemplo, que de una caja que contiene 30 pesos, tengo que sacar 13 pesos para pagar: 3 a un primer acreedor, 4 a un segundo, 6 a un tercero. Puedo, en *una sola vez,* sacar los 13 pesos y pagar 3 al primero, 4 al segundo y 6 al tercero; el número de pesos que quedan en la caja resulta así:

$$30 - (3 + 4 + 6) = 17$$

o bien, puedo sacar de la caja, sucesivamente, primero 3 pesos que pago al primer acreedor, luego 4 que pago al segundo, y en último término 6 que pago al tercero; el número de pesos que quedan en la caja es:

$$30 - 3 - 4 - 6 = 17$$

Evidentemente, los resultados de operar con ambos procedimientos son iguales; por tanto, podemos escribir:

$$30 - (3 + 4 + 6) = 30 - 3 - 4 - 6$$

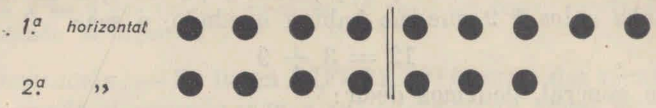
Como el mismo razonamiento podríamos repetir para números cualesquiera, tendríamos la siguiente expresión literal:

$$\boxed{a - (b + c + d) = a - b - c - d}$$

que origina el siguiente enunciado general:

Para restar de un número una suma de otros, se puede restar del número sucesivamente los términos de la suma.

46. Propiedad 3.ª — Observemos la figura adjunta:



y supongamos que todos esos puntos representen objetos de la misma especie. Imaginemos, por un momento, que no existan los puntos situados a la izquierda de la doble línea de división; la diferencia entre el número de puntos de la primera horizontal (que contiene 5), y el número de puntos de la segunda horizontal (que contiene 3), es 2, que representamos escribiendo:

$$5 - 3 = 2$$

Supongamos ahora que no exista la doble línea de división; la diferencia entre el número de puntos de la primera horizontal (que ahora contiene $5 + 4$), y el número de puntos de la segunda (que contiene $3 + 4$), como se ve, es aun 2; por consiguiente, podemos escribir:

$$(5 + 4) - (3 + 4) = 2$$

Repitiendo el razonamiento para números cualesquiera, representando con *m, s, d,* respectivamente al minuendo, sustraendo y su diferencia, y siendo n un número cualquiera, tendremos que

$$\boxed{m - s = d, \quad \text{de donde} \quad (m + n) - (s + n) = d}$$

Se origina, pues, el siguiente enunciado general:

Agregando un mismo número al minuendo y al sustraendo de una sustracción, la diferencia no altera.

47. Análogamente, se verifica que si $9 - 7 = 2$, tenemos: $(9 - 4) - (7 - 4) = 2$, y, en general, con la convención de letras anteriormente establecida, tendremos que:

$$\boxed{(m - n) - (s - n) = d}$$

Como ejercicio, enuncie el estudiante la propiedad para este último caso.

48. Análogamente dejamos como ejercicio, que el alumno pruebe, mediante un ejemplo numérico, y escriba luego las expresiones literales de las propiedades siguientes:

4.ª *Aumentando o disminuyendo en un número al minuendo sin alterar el sustraendo, la diferencia resulta respectivamente aumentada o disminuída en aquel número.*

5.ª *Aumentando o disminuyendo en un número al sustraendo sin alterar el minuendo, la diferencia resulta respectivamente aumentada o disminuída en aquel número.*

6.ª *Para restar un número a una suma, basta restarlo a uno cualquiera de los sumandos.*

Justificación de la regla operatoria de la resta

49. Para hallar la diferencia entre dos números, podríamos aplicar uno de los dos procedimientos indicados en el ejemplo del (N.º 38). Aplicando el primero, tendríamos que *contar sucesivamente, pero en orden inverso* (o sea descontar), *a partir del número mayor, tantas veces como unidades tiene el número menor;* el último número contado sería la diferencia. Así, la diferencia entre 12 y 3 la obtendríamos contando en la forma indicada, tres veces a partir de 12, o sea: 11, 10, 9; el último número 9 es la diferencia que buscábamos.

Aplicando el segundo procedimiento, tendríamos que *contar sucesivamente, a partir del número menor de los números dados hasta obtener el mayor;* el número de veces contadas sería la diferencia que buscábamos.

Así, la diferencia entre 12 y 3 la obtendríamos contando: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; como son 9 las veces contadas, este número es la diferencia.

La operación realizada con cualquiera de los dos procedimientos anteriores, resultaría excesivamente larga; por consiguiente, en la práctica se usa un procedimiento abreviado (como lo usamos también en la suma), que explicaremos mediante algunos ejemplos.

50. Caso que el menor de los números y la diferencia tengan sólo una cifra. — En este caso podría aplicarse cualquiera de los procedimientos indicados en el párrafo anterior; es lo que hacen los niños, en sus primeras operaciones de cálculo, contando con los dedos. Pero, es preferible ejercitarse para obtener los resultados mentalmente, que también los proporciona la tabla de sumar.

Así, por ejemplo, la diferencia 15 — 7 se obtiene buscando en la tabla cuál es el número que sumado con 7 da 15; se encuentra 8.

51. Caso general. — 1.° *Cada cifra del sustraendo es menor que la del mismo orden del minuendo.* Por ejemplo, en la sustracción de los números 9485 y 3172.

Para ello restamos: las unidades de las unidades; las decenas de las decenas, y así sucesivamente.

Disponemos la operación como se indica al lado, escribiendo el sustraendo debajo del minuendo, y de modo que las unidades del mismo orden se encuentren en la misma columna; luego decimos: 5 unidades menos 2 son 3 unidades; 8 decenas menos 7 es 1 decena; 4 centenas menos 1 son 3 centenas; 9 unidades de mil menos 3 son 6 unidades de mil. La diferencia es, pues: 6 313.

$$\begin{array}{r} 9\,485 \\ -\,3\,172 \\ \hline 6\,313 \end{array}$$

2.° *Algunas cifras del sustraendo son mayores que las del mismo orden del minuendo.*

Por ejemplo, en la sustracción de los números 8 532 y 6 479.

En éstos, la sustracción de las unidades y de las decenas no es posible. Razonamos entonces así:

No pudiendo restar 9 de 2, agrego 10 unidades al 2, y tengo 12; la sustracción resulta entonces posible y nos quedan 3 unidades, las que escribo en la columna de las unidades, debajo de la raya. Pero, por haber aumentado el minuendo en 10 unidades, compenso el error aumentando tambien el sustraendo en 10 unidades (N.° 46), es decir, aumentando en 1 decena las 7 del sustraendo, lo que da 8 decenas.

$$\begin{array}{r} 8\,532 \\ -\,6\,479 \\ \hline 2\,053 \end{array}$$

Paso a la segunda columna: de 3 decenas no puedo restar 8; agrego 10 decenas al 3, y tengo 13; 8 al 13 van 5. Pero, por haber aumentado el minuendo en 10 decenas, compenso el error aumentando en 1 centena las 4 del sustraendo, lo que da 5 centenas.

Paso a la tercera columna, y digo: 5 al 5, 0; luego a la cuarta: 6 al 8 van 2.

La diferencia es, pues, 2 053.

De aquí la siguiente

Regla. — **Para restar dos números se escriben ordenadamente el menor debajo del mayor, de modo que las unidades del mismo orden se encuentren en la misma columna. Debajo del sustraendo se traza un segmento de recta para separar el resultado que se escribirá debajo. Luego se restan sucesivamente las unidades, las decenas, las centenas, etc., del minuendo, y se escribe cada diferencia debajo de las cifras de donde provienen. Si alguna de las sustracciones resultara imposible, se aumenta en 10 la cifra del minuendo; luego, hecha la sustracción, se agrega una unidad a la cifra del orden siguiente del sustraendo antes de restarla de la cifra correspondiente del minuendo.**

EJEMPLOS:

38 592	253 407
— 19 265	— 8 061
19 327	245 346

52. Prueba de la resta. — En el (N.° 36), ya indicamos qué se entendía por prueba de una operación. Para la sustracción, indicaremos dos:

1.° *Prueba por suma.* — Se realiza aplicando la primera de las propiedades fundamentales de la resta (N.° 44), o sea, sumando el sustraendo con la diferencia; nos debe dar como resultado el minuendo.

No es necesario efectuar aparte esta suma; se utiliza el mismo esquema de la resta, y se suma de abajo para arriba la diferencia con el sustraendo.

2.° *Prueba por diferencia.* — Se realiza restando la diferencia al minuendo y nos debe dar el sustraendo.

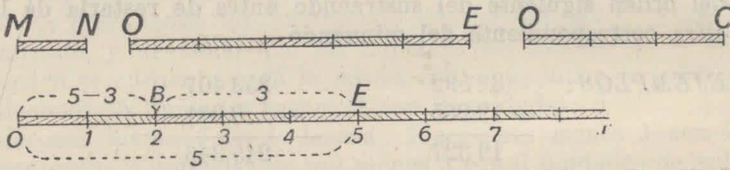
Esto se justifica también mediante la propiedad (N.° 44). Como ejercicio, dejamos que el estudiante haga esta demostración.

Nota. — Por ser más fácil sumar que restar, en la práctica, se opta por la primera de las pruebas indicadas.

53. Nota práctica. — Cuando los términos de una diferencia no se hallan escritos en columna, puede efectuarse la operación sin cambiar disposición: basta para ello, con seguir el procedimiento indicado para la suma (N.° 37-2.ª), es decir, de poner un punto sobre cada una de las cifras consideradas.

54. Representación gráfica de la diferencia. — Sean los números 5 y 3 cuya diferencia nos proponemos hallar gráficamente.

Como en el caso de la suma (N.° 37), sea $(O E)$ el segmento representativo del número 5, y $(O C)$ el del número 3. Si sobre un eje orientado Ox, a partir del extremo E del minuendo llevamos 3 veces el segmento unidad $(M N)$, pero hacia atrás (es decir, hacia la izquierda en un eje orientado hacia la derecha), o sea, llevamos un segmento $(E B) = (O C) = 3$, obtenemos el segmento $(O B)$ a cuyo extremo corresponde el número 2, es decir, la diferencia 5 — 3.



El segmento $(O B)$ representa, pues, gráficamente la diferencia 5 — 3.

Del ejemplo anterior, que también hubiera podido establecerse en forma análoga para otros números, deducimos la siguiente

Regla. — *Para restar gráficamente dos números se emplea un eje orientado; a partir del extremo del segmento representativo del minuendo, se lleva el segmento representativo del sustraendo, pero hacia atrás (es decir, en sentido contrario al del eje orientado); el segmento que tiene por origen el del eje orientado y por extremo el extremo libre del sustraendo representa, gráficamente, la diferencia pedida.*

Complemento de un número

55. Definición. — **Se llama COMPLEMENTO de un número a la diferencia entre dicho número y la unidad del orden decimal inmediata superior.**

Así, por ej., el complemento de 8 es (10 — 8) = 2 ; el de 537 es 1000 — 537 = 463 ; el complemento de 301785 es 1000000 — 301785 = 698215.

Fácilmente se justifica la siguiente

Regla. — **Para hallar el complemento de un número se resta de 10 la última cifra significativa y las restantes de 9.**

Así, el complemento de 406 es 594 ; el de 8740 es 1260.

56. Aplicaciones. — 1.ª En el (N.º 40) ya aplicamos al *cálculo mental*, el complemento de una cifra.

2.ª Se llama número *redondo*, el que termina en cero (puede terminar también en más de un cero).

Redondear un número, significa sumarle un número tal, que la suma sea un número redondo.

Se comprende fácilmente que, *para redondear un número basta sumarle el complemento de la cifra de sus unidades.*

Así, por ej., para redondear 48, se le suma 2, obteniendo 50. Para redondear 583, se le suma 7, obteniendo 590.

3.ª Cuando es necesario efectuar un conjunto de sumas y restas, pueden reemplazarse por una sola suma, empleando la *sustracción por el complemento*, que indicaremos en el párrafo siguiente.

Sustracción por el complemento

57. Regla. — **Para restar dos números por el método del COMPLEMENTO, se escriben ordenadamente el minuendo y debajo el complemento del sustraendo, de modo que las unidades del mismo orden se encuentren en la misma columna; luego se efectúa la suma, pero en el resultado será necesario restar 1 a la cifra de las unidades de orden inmediato superior a la más alta del sustraendo.**

Ejemplos. — 1.º Para calcular la diferencia de los números 26 738 y 549, como el complemento del sustraendo 549 es 451, disponemos la operación como indica el primero de los dos esquemas que siguen:

	PRIMER EJEMPLO	SEGUNDO EJEMPLO
Minuendo	26 738	547
Complemento del sustraendo	451	796
Suma	27 189	1 343
Diferencia que buscábamos.	26 189	343

2.º Para calcular la diferencia de los números 547 y 204, como el complemento de 204 es 796, disponemos la operación como indica el segundo de los esquemas adjuntos. La diferencia que buscábamos resulta 343.

58. La regla anterior se justifica, para el primero de los ejemplos tratados, por la serie de igualdades siguientes, y, análogamente para otros.

$$26738 - 451 = (26738 + 1000) - (451 + 1000) =$$
$$(26738 + 1000) - 451 - 1000 = 26738 + (1000 - 451) - 1000 =$$
$$\textit{minuendo} + \textit{compl. del sustraendo} - 1000\,.$$

El pasaje del primero al segundo miembro se justifica por la propiedad del (N.° 46); el del segundo al tercero, en virtud de la propiedad del (N.° 45); el del tercero al cuarto, en virtud de la propiedad del (N.° 48-6.ª).

Cálculo mental en la sustracción

59. Sumar un número que difiere muy poco de 100, 1 000, 10 000, etc. — Para ello sumamos 100, 1 000, 10 000, etc., restando luego el exceso del número agregado sobre el número dado.

Por ejemplo, si tenemos que sumar $97 = 100 - 3$, sumamos 100 y restamos 3. Así, decimos: $538 + 97 = 635$; mentalmente hemos efectuado $538 + 100 - 3 = 638 - 3 = 635$.

Obsérvese que, en cada uno de los dos ejemplos tratados, la cifra que restamos es el complemento de la de las unidades del número que deseamos sumar.

60. Restar un número que difiere muy poco de 100, 1 000, 10 000, etc. — Para ello restamos 100, 1 000, 10 000, etc., sumando luego el exceso del número restado sobre el número dado.

Por ejemplo, para restar $996 = 1000 - 4$, restamos 1000 y sumamos 4; así efectuaremos $35872 - 996 = 35872 - 1000 + 4 = 34872 + 4 = 34876$.

61. Resta de dos números cualesquiera. — Según la Propiedad 2.ª (N.° 45), para restar a un número otro, podemos restar sucesivamente al primero las unidades de los diversos órdenes del segundo.

Así, por ej., para efectuar la sustracción $826 - 354$, efectuamos

$$826 - 300 = 526;\ 526 - 50 = 476;\ 476 - 4 = 472.$$

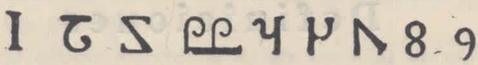
NOTAS HISTORICAS

La numeración. — Los pueblos primitivos contaban los objetos que cambiaban entre sí para sus usos, marcando signos sobre los troncos de árboles y sobre los huesos de animales.

Los chinos contaban los objetos mediante nudos que hacían en cuerdas especiales, y también mediante piedrecillas que coleccionaban convenientemente.

Los babilonios usaban un sistema de numeración bastante perfeccionado, como lo atestiguan tablas que datan de más de 2000 años antes de J. C.

En la época del romano *Boecio* (siglo V), ya se aplicaba el principio del valor relativo de nuestro sistema de numeración decimal. Se utilizaba en los cálculos un dispositivo que se llamaba *Mesa pitagórica,* que más tarde fué llamado "*ábaco*". Cada ficha del ábaco llevaba escrito, en carácter especial, un signo representativo de cada uno de los nueve primeros números; a continuación reproducimos dichos signos.



Se dejaba vacía la ranura correspondiente al orden de unidad que faltase. Hubiera bastado con agregar a los nueve símbolos, otro que representase el cero, para llegar así a nuestra numeración escrita.

El sistema de numeración moderna, basado en la colocación de las cifras y en el uso del cero, se empleó inicialmente en la India; en el siglo VIII llegó a conocimiento de los árabes, quienes lo trasmitieron a Europa en el siglo XIII por intermedio del matemático italiano *Leonardo de Pisa.*

En cuanto a los signos 4, 5, 6, 7, 9, y aun el 8, parece que han derivado de las letras iniciales de las palabras correspondientes del alfabeto indio, usado por el año 150 a J. C., mientras que los signos para los números 1, 2, 3, parecen derivarse de uno, dos, tres trazos de pluma escritos en cursivo.

En cuanto al cero, parece que, inicialmente, los órdenes se indicaban con puntos; por ej.: 3. = 30; 5.·. = 5 000, etc.; es probable, pues, que se hayan transformado dichos puntos en pequeños círculos.

Los signos. — Los actuales signos se adoptaron después de conocerse el cálculo aritmético. El signo de igualdad = fué empleado inicialmente por el matemático inglés *Roberto Recorde* a mediados del siglo XVI, justificándole así: "Nada hay más igual que dos rayas iguales y paralelas". Los signos de desigualdad, > y <, fueron empleados por primera vez por el inglés *Harriot,* a mediados del siglo XVI.

FRANCISCO VIETA
(1540-1603)

Los paréntesis fueron empleados inicialmente por el holandés *Alberto Girard,* en el siglo XVII.

El empleo de las letras para representar los números en la forma sistemática actual, se debe al matemático francés *Francisco Vieta* (siglo XVI), creando con el ello el Algebra elemental.

Los signos + y — aparecen por el siglo XV, reemplazando las antiguas iniciales *p* y *m,* de *plus* (más) y *minus* (menos). Esos signos fueron empleados por el matemático alemán *Juan Widman,* luego por *Stifel* y adoptados más tarde por *Vieta.*

* * *

CAPITULO II

MULTIPLICACION

Definiciones

62. Producto de dos números. — Ilustraremos este concepto con un ejemplo:

Dispongo de 4 canastos que contienen cada uno 12 manzanas, y vierto los 4 canastos en un cajón. ¿Cuántas manzanas contendrá el cajón?

El número que buscamos es evidentemente la suma

$$12 + 12 + 12 + 12$$

que tiene la siguiente particularidad: *todos los sumandos son iguales. Una suma de varios sumandos iguales se llama* **producto**; más concretamente, *la suma anteriormente indicada se llama producto de 12 por 4.* Resulta, pues, aclarada la siguiente

DEFINICIÓN. — **Se llama PRODUCTO de dos números el que se obtiene efectuando la suma de tantos sumandos iguales al primero como unidades tenga el segundo.**

Por ejemplo, en lugar de escribir

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$$

se escribe

$$3 \times 5 = 15 \quad \text{o bien} \quad 3 \,.\, 5 = 15$$

que se lee, tanto en un caso como en el otro, *el producto de* 3 *por* 5 *es* 15, o bien 3 *multiplicado por* 5 *es igual a* 15, o más brevemente: 3 *por* 5, 15.

63. El número que se suma con sí mismo, se llama **multiplicando**; el que indica cuántas veces debe tomarse el multiplicando como sumando, se llama **multiplicador**; ambos se llaman **factores**.

Podemos decir, pues, que *la multiplicación es una suma abreviada.*

NOTA. — Con cualquiera de las notaciones

$$(\text{Kg. } 3)\ 5 = \text{Kg. } 15\ ; \quad \text{Kg. } (3 \times 5) = \text{Kg. } 15\ ;$$

$$\text{Kg. } 3 \times 5 = \text{Kg. } 15$$

con las que indicamos el *producto de Kg.* 3 *por* 5, se conviene en abreviar la suma

Kg. 3 + Kg. 3 + Kg. 3 + Kg. 3 + Kg. 3 = Kg. 15

Obsérvese, pues, que el **producto** *es de la misma especie que el* **multiplicando**, *mientras que el multiplicador debe ser un número abstracto, puesto que indica cuántas veces debe sumarse el multiplicando con sí mismo.*

64. Producto de varios números. — Ilustraremos este concepto con un ejemplo:

Es necesario colocar los vidrios de las ventanas de un edificio de 5 plantas, con 18 ventanas en cada planta y 2 vidrios en cada ventana. ¿Cuántos vidrios se necesitan para todo el edificio?

Podemos razonar así: empecemos por calcular el número de vidrios para cada planta. Siendo 18 las ventanas de una planta y llevando 2 vidrios cada una, su número estará representado por el producto

$$2 \times 18$$

Para todo el edificio, es decir, para las 5 plantas, será necesario un número de vidrios igual al producto por 5 del número de vidrios necesarios para cada planta. Efectuando el producto encontramos:

$$(2 \times 18) \times 5 = 36 \times 5 = 180$$

y contestamos que el número de vidrios necesarios para todo el edificio es de 180.

Si omitimos el paréntesis que hemos usado en el ejemplo anterior para indicar que debe multiplicarse por 5 el resultado de la multiplicación de 2 por 18, tendremos la expresión:

$$2 \times 18 \times 5$$

que se llama **producto indicado**, o simplemente **producto de tres números** 2, 18, 5. En general:

Se llama PRODUCTO DE VARIOS NUMEROS el que se obtiene multiplicando el primero por el segundo número, el producto obtenido por el tercero, el nuevo producto por el cuarto, y así sucesivamente, hasta considerar todos los números.

Así, por ejemplo, el producto de 5 por 2 y por 8 es el número que se obtiene multiplicando 5 por 2 y el resultado por 8. Pero, en lugar de escribir

$$5 \times 2 = 10 \ , \quad 10 \times 8 = 80$$

se escribe: $5 \times 2 \times 8 = 80$

que se lee brevemente: **5 por 2, por 8, igual a 80.**

La MULTIPLICACION es la operación aritmética mediante la cual hallamos el producto de varios números.

65. El producto de dos o más números se llama también **MULTIPLO de aquellos números.** Así, en lugar de decir 35 es el producto de 7 por 5 o de 5 por 7, podemos decir: 35 *es múltiplo de* 7, y también *es múltiplo de* 5.

En general, si al producto de dos números b y m lo representamos con la letra a, tendremos:

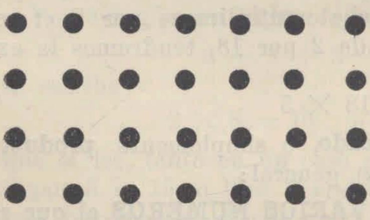
$$a = b \times m$$

igualdad ésta que nos dice que a es *múltiplo* de b según m; o bien, que a es múltiplo de m según b.

Un número se llama **par** *si es múltiplo de* 2; *de lo contrario, es* **impar.**

Propiedades fundamentales de la multiplicación

66. Propiedad conmutativa.— *Producto de dos factores.* — Siendo la multiplicación una suma, y como ésta se efectúa contando los objetos sumados, el resultado será el mismo, aunque se varíe el orden con que se cuenten los objetos (N.º 4).



Así, por ejemplo, propongámonos contar los bancos del salón de clase, que representamos con puntos en la figura de al lado.

Si contamos los bancos por filas horizontales, encontramos 4 filas de 7 bancos cada una, o sea

$$7 + 7 + 7 + 7 = 7 \times 4$$

Contándolos por columnas verticales, encontramos 7 columnas de 4 bancos cada una, o sea

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 7$$

Pero, como indicamos anteriormente, siendo evidentemente siempre el mismo el número de objetos, cualquiera que sea el modo de contarlos, tendremos:

$$7 \times 4 = 4 \times 7$$

Como el razonamiento podría repetirse para cualesquiera que sean los números de filas y de columnas, y aun para otros objetos, representando los números por letras, podemos establecer la igualdad

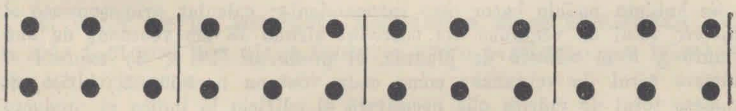
$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

que origina el siguiente enunciado general:

El valor de un producto de dos factores no cambia, si se altera el orden de los mismos.

Producto de varios factores

67. La propiedad conmutativa también se cumple para el producto de más de dos factores. En efecto: en la figura siguiente se representa también un conjunto de bancos dispuestos en dos filas y divididos en grupos mediante las barras verticales.



Cada par de barras comprende un número de bancos igual al producto 3×2. Como los pares de barras son 4, tendremos un número total de bancos igual a $3 \times 2 \times 4$.

Pero como el número de bancos comprendidos entre cada par de barras puede representarse también con 2×3, el número total de bancos será: $2 \times 3 \times 4$.

Podemos, pues, escribir:

$$3 \times 2 \times 4 = 2 \times 3 \times 4$$

(cambio de los 2 primeros factores).

Si ahora contamos por filas, en cada una tenemos 3×4 bancos, y puesto que son 2 filas, el total será $3 \times 4 \times 2$, que igualado con la primera de las expresiones anteriores, nos da:

$$3 \times 2 \times 4 = 3 \times 4 \times 2$$

(cambio de los dos últimos factores).

Aplicando sucesivamente uno u otro de los dos cambios anteriores, podemos llevar los factores a cualquier posición.

La propiedad puede generalizarse para cualquier número de factores.

Podemos, pues, en todos los casos, establecer la igualdad

$$\boxed{a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e = b \,.\, d \,.\, a \,.\, e \,.\, c = c \,.\, d \,.\, a \,.\, b \,.\, e = \ldots}$$

que origina el siguiente enunciado general:

El valor de un producto no cambia, si se altera el orden de los mismos.

68. **Propiedad asociativa.** — Volvamos al ejemplo citado en el (N.º 64), al ilustrar el concepto de producto de varios factores:

Es necesario colocar los vidrios de las ventanas de un edificio de 5 plantas, con 18 ventanas en cada planta y 2 vidrios en cada ventana. ¿Cuántos vidrios se necesitan para todo el edificio?

Ya hemos resuelto este problema, calculando primeramente el número de vidrios que necesitaba cada planta, encontrando finalmente el producto:

$$(2 \times 18) \times 5$$

Se hubiera podido hacer otro razonamiento: calcular primeramente el número total de ventanas del edificio: siendo 18 las ventanas de una planta y 5 el número de plantas, el producto (18×5) expresa el número total de ventanas; como cada ventana necesita 2 vidrios, el número total de vidrios que necesitará el edificio lo indica el producto

$$2 \times (18 \times 5)$$

Podemos, pues, escribir la siguiente igualdad:

$$(2 \times 18) \times 5 = 2 \times (18 \times 5)$$

que nos expresa la *propiedad asociativa de la multiplicación.*

El producto de tres números es el mismo, ya que se multiplique el producto de los dos primeros por el tercero, o ya que se multiplique el primero por el producto de los otros dos.

Consideraciones análogas a las del ejemplo anterior, nos permiten extender la propiedad asociativa al caso de más de tres factores, y recordando también que, mediante la propiedad conmutativa, podemos, en un producto de varios factores, disponer consecutivamente de cualesquiera de ellos, estableceremos, pues, la siguiente igualdad:

$$\boxed{a \times b \times c \times d = a \times (b \times d) \times c}$$

y el siguiente enunciado general:

El valor de un producto no altera si se sustituyen dos o más factores cualesquiera por su producto efectuado.

Al sustituir dos o más factores por su producto efectuado, decimos que hemos *asociado* esos factores, vocablo que justifica la denominación de *asociativa* para esta propiedad.

EJEMPLO. $25 \times 637 \times 4 = 637 \times (25 \times 4) = 637 \times 100 = 63700$ (Se calculó mentalmente el producto de 25 por 4, y luego también el producto final).

69. **Propiedad disociativa.** — La igualdad

$$a \times b \times c \times d = a \times (b \times c) \times d$$

que expresa la propiedad asociativa del producto, puede escribirse invertida, en virtud de la ley simétrica (N.º 8), y tenemos:

$$\boxed{a \times (b \times c) \times d = a \times b \times c \times d}$$

que nos permite enunciar aquella propiedad de este otro modo: *Si dos o más factores están encerrados dentro de paréntesis, se pueden quitar dichos paréntesis;* en otros términos:

El valor de un producto no cambia si se sustituyen dos o más factores por otros factores cuyo producto sea igual al de los primeros.

Así, por ejemplo, tendremos:

$$6 \times 8 = (2.3)8 = 6(2.4) = 6(2.2.2) = (2.3)(2.4) = \ldots = 48$$

Como *corolario* de la propiedad anterior, tenemos que: *Para multiplicar un producto indicado por un número, basta multiplicar uno de los factores por ese número, conservando los restantes factores.*

EJEMPLO. — El producto de $(5 \times 2 \times 6)$ por 3, que es igual a $60 \times 3 = 180$, puede obtenerse también así:

$(5 \times 3) \times 2 \times 6 = 15 \times 2 \times 6 = 180$, o bien

$5 \times (2 \times 3) \times 6 = 5 \times 6 \times 6 = 180$; etc.

Multiplicación de una suma o diferencia por un número

70. **Propiedad distributiva.** — *Cuando se quiere indicar el* **PRODUCTO DE UNA SUMA POR UN NUMERO** *se encierra la suma dentro de paréntesis.* Así, por ejemplo, queriendo indicar el producto de la suma $3 + 2$ por 4, se escribe indiferentemente:

$$(3 + 2) \times 4 \quad \text{o bien} \quad (3 + 2) \,.\, 4, \quad \text{o aun} \quad (3 + 2)\, 4.$$

Efectuando la suma y multiplicando el resultado por 4, tenemos:

$$(3 + 2)\ 4 = 5 \times 4 = 20$$

Observemos ahora cómo podemos llegar al mismo resultado por otro procedimiento:

○ ○ ○ ● ●

○ ○ ○ ● ●

○ ○ ○ ● ●

○ ○ ○ ● ●

El esquema de al lado contiene 4 filas, de (3 + 2) círculos cada fila, y comprende en total, un número de círculos igual a $(3 + 2) \times 4$.

Pero teniendo en cuenta los colores de esos círculos (blancos y negros), y contando primero los blancos y luego los negros, tenemos 4 filas de 3 círculos blancos, y 4 filas de 2 círculos negros, o sea un número total de círculos de $(3 \times 4) + (2 \times 4)$.

Igualando ambos números, resulta:

$$(3 + 2) \times 4 = (3 \times 4) + (2 \times 4) \qquad [a]$$

Haciendo operaciones, tenemos:

$$(3 + 2) \times 4 = 12 + 8 = 20$$

resultado éste igual al obtenido por el primer procedimiento.

El razonamiento empleado para obtener la igualdad [a] podría aplicarse a números cualesquiera, y establecer en general la igualdad

$$\boxed{(a + b + c) \,.\, m = a \,.\, m + b \,.\, m + c \,.\, m}$$

Como en virtud de la propiedad conmutativa tenemos tambien que

$$(a + b + c) \,.\, m = m \,.\, (a + b + c)$$

podemos, pues, establecer el siguiente enunciado general:

Para multiplicar una suma, no efectuada, por un número o un número por una suma, puede multiplicarse cada término de la suma por el número, y sumarse los productos parciales.

Esta regla constituye la *propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.*

Otra demostración de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, es la siguiente:

Por definición de producto (N.º 62), tenemos, por ejemplo:

$$(8 + 5 + 2) \times 3 = (8 + 5 + 2) + (8 + 5 + 2) + (8 + 5 + 2)$$

En virtud de la propiedad disociativa de la suma (N.º 30), podemos suprimir los paréntesis del segundo miembro de la igualdad anterior; luego, aplicando a ese miembro la propiedad conmutativa de la suma (N.º 28), tenemos:

$$(8 + 5 + 2) \times 3 = 8 + 8 + 8 + 5 + 5 + 5 + 2 + 2 + 2$$

Finalmente, aplicando la propiedad asociativa de la suma (N.º 29) y luego la definición de producto de dos factores (N.º 62), resulta:

$$(8 + 5 + 2) \times 3 = 8 \times 3 + 5 \times 3 + 2 \times 3$$

igualdad ésta que demuestra la propiedad.

71. *Recíprocamente*: $3 \times 4 + 2 \times 4 = 4 \times (3 + 2)$.

Es decir: *La suma de varios productos que tienen un* **factor común**, *es igual al producto de este factor por la suma de los otros.*

Decimos entonces, que se *pone en evidencia un factor*, o bien que *se saca un factor común.*

72. Si se trata del **PRODUCTO DE UNA DIFERENCIA POR UN NUMERO**, puede también procederse como en el (N.º 71), pero en lugar de sumarse los productos parciales, se *restan*. Así, por ejemplo, tendremos:

$$(8 - 6) \times 3 = 8 \times 3 - 6 \times 3$$

Como ejercicio, enuncie el estudiante la regla general en este caso, que constituye la *propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la diferencia.*

Recíprocamente, se comprende fácilmente que:

$$12 \times 613 - 12 \times 40 = 12\ (613 - 40)$$

En este caso decimos, también, que hemos *sacado el factor común* 12.

73. Una expresión compuesta de sumas y restas, por ej., $8-5+1-3$, se llama *suma algebraica* o *polinomio;* para multiplicarla por un número, se procede análogamente que en los (N.ºs 71 y 73), es decir, multiplicando cada término por el número y luego sumando los productos parciales, *excepto cuando el término multiplicando es un sustraendo, que será entonces necesario restar el producto parcial respectivo.*

Ejemplos

$$(8 - 5 + 1 - 3)\ 2 = 8 \times 2 - 5 \times 2 + 1 \times 2 - 3 \times 2 =$$
$$= 16 - 10 + 2 - 6 = 2$$

APLICACIONES. — Vimos que existen dos procedimientos para multiplicar una suma o una diferencia, por un número; se aplicará uno u otro de ellos, según los casos.

Por ejemplo, si se desea conocer el importe total de la siguiente venta: 18 m. de una mercadería a \$ 3 el metro; 15 m. de otra a \$ 3 el metro, y 21 m. de una tercera a \$ 3 el metro; dicho importe será de \$ $(18 \times 3 + 15 \times 3 + 21 \times 3)$. Pero, observando que el precio unitario es el mismo, la operación resultará más breve sacando el número 3 como factor común, y tendremos $(18 + 15 + 21) \times 3 = 54 \times 3 = 162$, o sea, que el importe de la venta es de \$ 162.

Otro caso es el siguiente: Si se desea multiplicar 253 por 99, es preferible poner el número 99 en la forma $(100 - 1)$, y se tendrá entonces: $253 \times 99 = 253\ (100 - 1) = 25300 - 253 = 25047$

Volveremos sobre este caso al tratar el "Cálculo mental".

Multiplicación por uno y por cero

74. Factor uno. — Como el producto 1×5 o sea $1 + 1 + 1 + 1 + 1$, es igual a 5, análogamente se *conviene* que 5×1 sea igual a 5. A la expresión 5×1 le llamamos producto de 5 por 1, si bien a ella no podemos aplicarle la definición de multiplicación (porque la suma no puede constar de un solo sumando).

Teniendo, pues, $1 \times 5 = 5 \times 1 = 5$, diremos que:

Si uno de los dos factores de un producto es igual a 1, el producto es igual al otro factor.

Podemos decir también que *la unidad tomada como factor no altera un producto.*

75. Factor cero. — Como el producto 0×5 o sea $0 + 0 + 0 + 0 + 0$, es igual a cero, análogamente se *conviene* que 5×0 sea igual a 0. A la expresión 5×0 le llamamos producto de 5 por 0, si bien a ella no podemos aplicarle la definición de multiplicación (puesto que, siendo 0 el multiplicador, tendríamos una suma sin sumandos, lo que carece de sentido).

Teniendo, pues, $0 \times 5 = 5 \times 0 = 0$, diremos que:

Si uno de los factores de un producto es cero, el producto es cero. Recíprocamente:

Si un producto es igual a cero, debe ser cero por lo menos uno de los factores.

De lo anterior, deducimos:

La condición necesaria y suficiente para que un producto sea cero, es que sea cero por lo menos uno de los factores.

Justificación de las reglas operatorias de la multiplicación

76. Si para multiplicar dos números tuviéramos que recurrir siempre al procedimiento indicado por la definición de la operación (N.º 62), es decir, en transformar la multiplicación en una suma, en la mayoría de los casos resultaría una operación algo larga. Así, por ejemplo, para multiplicar 425 por 397, tendríamos que escribir el número 425 como sumando, 397 veces y luego sumar.

En la práctica se abrevia la operación con los procedimientos que veremos a continuación.

77. Producto de un número por 10, 100, 1000, etc. — *Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, basta colocar a la derecha del número tantos ceros como siguen a dicha unidad.*

Por ejemplo, el producto de 12 por 100 es igual al de 100 por 12 (según la prop. conmutativa del producto). Pero 100×12 es la suma de 12 números iguales a 100, o sea 12 centenas, vale decir, 1 200.

78. Producto de dos números de una sola cifra. — Sea, por ejemplo, la multiplicación de 8 por 5. Según la definición (N.º 62), tendríamos que efectuar la suma de 5 números iguales a 8; tendremos, pues:

$$8 \times 5 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40.$$

No es posible dar otra regla para obtener los productos de dos factores de una sola cifra. Conviene, por consiguiente, aprender dichos productos de memoria, para lo cual se emplea la *Tabla de multiplicación,* o *de Pitágoras,* que figura al lado, ya muy conocida por el estudiante desde la Escuela Primaria.

TABLA DE MULTIPLICAR

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

En ella, por ejemplo, el producto 8×5 se encuentra en el cruce de la columna encabezada con el 8 y la fila que empieza con el 5, o al revés.

Pasemos ahora al procedimiento de la multiplicación, distinguiendo tres casos, además del referente al de dos factores de una sola cifra.

79. PRIMER CASO. — **Producto de un número cualquiera por otro de una sola cifra.** — Sea, por ejemplo, la multiplicación de 5768 por 4.

El multiplicando equivale a la suma

8 unidades + 6 decenas + 7 centenas + 5 millares

por consiguiente, se obtendrá el producto aplicando la propiedad distributiva (N.º 70), y usando la tabla de multiplicación. Tendremos, pues:

$$5768 \times 4 = (8 \text{ unid.} + 6 \text{ dec.} + 7 \text{ cent.} + 5 \text{ mill.}) \times 4 =$$
$$= 32 \text{ unid.} + 24 \text{ dec.} + 28 \text{ cent.} + 20 \text{ millares.}$$

En la práctica, se efectúa la suma de estos resultados parciales al mismo tiempo que la multiplicación, operando como sigue: 4 veces 8 son 32 unidades, o sea 3 decenas y 2 unidades; escribo éstas en el orden de las unidades y llevo 3 decenas. 4 veces 6 decenas son 24 decenas, y 3 que llevaba son 27 decenas, o sea 2 centenas y 7 decenas; escribo 7 decenas y llevo 2 centenas; etc.

$$\begin{array}{r} 5\,768 \\ \times\ 4 \\ \hline 23\,072 \end{array}$$

Del ejemplo anterior podemos enunciar la siguiente

REGLA. — **Para multiplicar un número cualquiera por otro de una sola cifra, se multiplican por ésta cada una de las cifras del multiplicando, empezando por la derecha, y se escribe cada producto en el orden respectivo, si no excede de 9. Si un producto excede de 9, sólo se escriben las unidades, y se llevan las decenas para agregarlas al producto siguiente.**

Prácticamente, la operación se dispone en la forma ya conocida por los estudiantes, que indicamos al margen.

Si bien esta disposición es *cómoda, no es necesaria;* ejercítese el alumno en efectuar multiplicaciones con los factores *en línea,* y aun con otra disposición. (Empléese un procedimiento análogo al de la segunda Nota del N.º 37).

80. SEGUNDO CASO. — **Producto de un número cualquiera por otro formado por una sola cifra significativa seguida de ceros.**

Sea, por ejemplo, el producto de 2385 por 700. Como 700 es igual a 7×100, podemos escribir, aplicando en su orden las propiedades disociativa y asociativa:

$$2385 \times 700 = 2385 \times (7 \times 100) = 2385 \times 7 \times 100 =$$
$$= (2\,385 \times 7) \times 100 = 16\,695 \times 100 = 1\,669\,500$$

es decir, que basta multiplicar 2385 por 7 y agregar dos ceros a la derecha del resultado (N.º 77).

Del ejemplo anterior deducimos la siguiente

REGLA. — **Cuando el multiplicador consta de una sola cifra significativa seguida de ceros, se multiplica el multiplicando por dicha cifra como en el (N.º 79); luego se escriben a la derecha del producto tantos ceros como tenga a su derecha el multiplicador.**

81. TERCER CASO. — (Caso general). **Producto de dos números cualesquiera.**

Sea, por ejemplo, el producto de 782 por 943. Siendo el multiplicador igual a $(3 + 40 + 900)$, el producto se obtendrá multiplicando 782 sucesivamente por 3, 40, 900, y sumando luego los productos parciales (N.º 70). Pero, como cada una de estas multiplicaciones pertenece a uno de los casos anteriores, no estimamos necesario más detalles. Generalmente se dispone la operación como indicamos al lado. En la práctica no se escriben los ceros terminales de los productos parciales, dejando su lugar en blanco, como indicamos en la segunda de las operaciones de al lado.

$$\begin{array}{r} 782 \\ \times\ 943 \\ \hline 2\,346 \\ 31\,280 \\ 703\,800 \\ \hline 737\,426 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 782 \\ \times\ 943 \\ \hline 2\,346 \\ 31\,28 \\ 703\,8 \\ \hline 737\,426 \end{array}$$

Podemos, pues, establecer la siguiente

REGLA. — **Para multiplicar dos números cualesquiera se escribe el multiplicador debajo del multiplicando y se traza debajo de los factores un segmento de recta. Luego se multiplica el multiplicando ordenadamente por cada cifra del multiplicador, empezando por la de la derecha, y escribiendo estos productos parciales uno debajo del otro, pero desplazando cada uno de un lugar hacia la izquierda respecto del precedente. La suma de los productos parciales así escritos, nos da el producto total.**

82. **Notas prácticas.** — 1.ª Si alguna cifra del multiplica-

dor es 0, es inútil efectuar el producto del multiplicando por esa cifra; se pasa, en ese caso, a la cifra inmediata de la izquierda (a no ser que ella también sea 0) y el respectivo producto parcial se escribe desplazado en *dos* lugares hacia la izquierda respecto del anterior. Si en el multiplicador existen dos ceros seguidos, el producto parcial de la primera cifra significativa que le precede, se escribe desplazado en *tres* lugares hacia la izquierda, respecto del anterior; y así sucesivamente. Véase el ejemplo de al lado.

$$\begin{array}{r} 3\,257 \\ \times\ 6\,004 \\ \hline 13\,028 \\ 19\,542 \\ \hline 19\,555\,028 \end{array}$$

2.ª En la multiplicación de dos números, por comodidad y en virtud de la propiedad conmutativa, se toma como multiplicador el número que tiene menos cifras significativas.

3.º *El producto de dos números, uno de los cuales o ambos terminan con ceros, se efectúa multiplicando los números obtenidos suprimiendo los ceros finales y escribiendo a la derecha del producto los ceros que se habían suprimido.*

Fácilmente se justifica esta regla mediante el siguiente ejemplo:

$$43700 \times 260 = 437 \times 100 \times 26 \times 10 =$$
$$= 437 \times 26 \times 100 \times 10 = (437 \times 26) \times 1000$$

que nos indica que es necesario primeramente multiplicar 437 por 26, y el producto obtenido multiplicarlo por 1000, es decir, agregarle tres ceros (N.º 77).

83. **Prueba de la multiplicación.** — La *prueba* de la multiplicación se realiza aplicando la propiedad conmutativa (N.º 66); vale decir, *tomando como multiplicando el factor que antes era multiplicador, e inversamente.* No existiendo error en la operación, el nuevo producto debe ser igual al primero.

Potencia

84. **Definiciones.** — Sean los productos:

7×7 se indica con el símbolo 7^2 que se lee *segunda potencia de* 7; 7 es la *base* de la potencia y 2 el *exponente* o *grado* de la potencia.

$5 \times 5 \times 5$ se indica con el símbolo 5^3 que se lee *tercera potencia* de 5; 5 es la *base* y 3 el *exponente* de la potencia.

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$; $15 \times 15 \times 15 \times 15 = 15^4$; etc.

De estas igualdades resulta que *el exponente indica cuántos son los factores del producto, todos iguales a la base.*

Diremos, pues, que

Una potencia es un producto de varios factores iguales.

La notación, por ej., 15^4 se lee también: 15 *elevado a* 4, o 15 *a la cuarta.*

En general, si a y n representan números cualesquiera, a^n representa el producto de n factores iguales al número a.

A la segunda potencia de un número se le llama, también, *cuadrado* del número; a la tercera potencia, *cubo,* y a la cuarta, *bicuadrado.* Las denominaciones de cuadrado y cubo, provienen de las figuras geométricas cuadrada o cúbica que se pueden formar con a^2 o a^3 objetos, respectivamente.

Se llaman *potencias semejantes* las que tienen el mismo exponente. Las potencias semejantes son, pues, del mismo grado. Por ej., 7^4 y 5^4 son potencias semejantes de 7 y de 5. También lo son: 2^3, 15^3, 42^3.

La POTENCIACION es la operación aritmética mediante la cual hallamos la potencia de un número.

Por definición, *cualquier potencia de* 0 *es igual a* 0.

En efecto: $0^4 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$.

Análogamente, *cualquier potencia de* 1 *es igual a* 1.

En efecto: $1^6 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$.

Se conviene, además, en que *cualquier número elevado a* 1 *es igual al mismo número* (aun cuando la idea de producto requiere por lo menos dos factores).

Por ejemplo: $12^1 = 12$; $426^1 = 426$; etc.

También se conviene en que *cualquier número (diferente de* 0) *elevado a* 0 *es igual a* 1.

Por ejemplo: $5^0 = 1$; $432^0 = 1$; etc.

85. Obsérvese también en las igualdades

$10^1 = 10$; $10^2 = 10 \times 10 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10000$; etc.

que *toda potencia de* 10 *es igual a un número formado por la unidad seguida de tantos ceros como unidades tenga el exponente.*

Recíprocamente: *un número formado por la unidad seguida de ceros es igual a una potencia de* 10 *que tiene por exponente aquel número de ceros.*

86. Obtención de potencias.—Por definición, para hallar la potencia de un número, no hay más que calcular el producto de tantos factores iguales al número como indica el exponente.

Así, por ej., la tercera potencia de 5 se obtendrá calculando el producto $5 \times 5 \times 5 = 125$; $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Conviene que el estudiante recuerde los cuadrados de los doce primeros números; ellos son:

Números:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12
Cuadrados:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	121,	144

Al final del libro presentamos una tabla de cuadrados y cubos de números enteros. Ejercítese el estudiante en su manejo.

Así, por ej., el cuadrado y el cubo del número 57 se encuentran en la fila que empieza por 57, y en las columnas encabezadas con n^2 y n^3, respectivamente, encontrando 3 249 y 185 193.

Cálculo mental en la multiplicación

87. Multiplicación por 2, 4, 8, 16, etc. — Cuando multiplicamos un número por 2, se dice también que lo *duplicamos*. Puede efectuarse la duplicación de un número agregándolo a sí mismo.

Así, por ej., para duplicar el número 324, efectuamos mentalmente la suma $324 + 324$, que nos da 648.

Para multiplicar un número por 4, se le duplica 2 veces.

Análogamente, para multiplicar por $8 = 2 \times 2 \times 2$, se le duplica 3 veces.

Así, por ejemplo, el producto de 413 por 8, lo obtenemos duplicando 3 veces. Decimos: el doble de 413 es 826; el doble de 826 es 1652; el doble de 1652 es 3304. El producto que buscábamos es 3304.

88. Multiplicación por 11. — *a*) Si el multiplicando consta de una sola cifra, ésta se repite dos veces.

Así, tendremos: $8 \times 11 = 88$.

b) Si el multiplicando tiene dos cifras, se suman esas dos cifras y luego se escribe el resultado entre aquellas dos cifras. Si dicha suma tiene más de una cifra, se llevan sus decenas para sumarlas a la cifra de la izquierda.

Así, para hallar el producto 34×11, efectuamos: $3 + 4 = 7$, y luego escribimos el 7 entre el 3 y el 4; el producto será 374.

Análogamente, para el producto 58×11, efectuamos $5 + 8 = 13$; escribimos el 3 entre el 5 y el 8, pero aumentamos una unidad al 5. El producto será 638.

c) Si el multiplicando tiene más de dos cifras, se le multiplica primeramente por 10 y a este resultado se le suma el número primitivo.

Así, el producto $8\,574 \times 11$ se obtendrá sumando 85 740 y 8 574, obteniendo 94314.

Como ejercicio, justifique el estudiante este procedimiento; para ello tenga presente que $11 = 10 + 1$, y luego aplique al producto la propiedad distributiva.

89. Multiplicación por 9, 99, 999, etc. — Para efectuar estos productos se multiplica por 10, 100, 1 000, etc., al multiplicando, y al resultado se le resta el número primitivo.

Así, por ej., el producto de 573×99 se obtendrá efectuando la diferencia $57300 - 573 = 56727$.

Se justifica el procedimiento observando que $9 = 10 - 1$; $99 = 100 - 1$; $999 = 1000 - 1$; etc.

90. Otras multiplicaciones. — *a*) Para multiplicar un número por otro compuesto de varios factores, se le puede multiplicar sucesivamente por cada factor (N.º 69).

Así, por ej., para multiplicar por $15 = 5 \times 3$, multiplicaremos por 5 y el resultado por 3, o viceversa.

Análogamente, para multiplicar por 6, multiplicamos por 2 y por 3.

b) Para multiplicar por un número que difiera poco de un número redondo (es el que termina en uno o varios ceros), se multiplica por el número redondo, y al resultado se le suma o resta, según los casos, el producto del número dado por la diferencia entre el número redondo y el multiplicador.

Este procedimiento ya lo hemos aplicado en el (N.º 88, c).

Así, para multiplicar por 19, 29, 39, etc. por ser $19 = 20 - 1$; $29 = 30 - 1$; $39 = 40 - 1$; etc., podemos multiplicar por 20, 30, 40, etc., y restar al producto el número dado. Por ejemplo: $36 \times 39 = 36 \times 40 - 36 = 1440 - 36 = 1404$.

Análogamente, por ser $98 = 100 - 2$, tendremos, por ej., el siguiente producto: $23 \times 98 = 2\,300 - 23 \times 2 = 2\,300 - 46 = 2\,254$.

91. Multiplicación de dos números de dos cifras cada uno. — Estimamos interesante exponer el método de multiplicación cruzada, usado desde épocas remotas (siglo XII).

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times \\ 57 \\ \hline 3\,648 \end{array}$$

Se multiplican las cifras de las unidades y se escribe la última cifra de este producto llevando las decenas; luego se multiplican en cruz las cifras de los factores y se efectúa la suma de los dos productos, agregando a esta suma las decenas que llevábamos; se escribe la última cifra del resultado y se llevan sus decenas; finalmente, se multiplican las cifras de las decenas, al producto se le agrega lo que llevábamos y el número que se obtiene se antepone a las dos cifras ya escritas.

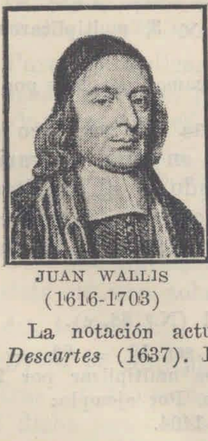
Con un poco de práctica, el método resulta fácil y útil. De la *cruceta* colocada entre los dos factores, proviene el actual signo de multiplicación.

NOTAS HISTORICAS

El signo $\times$ de la multiplicación, se debe al matemático inglés *Oughtred* (siglo XVII); empleado por *Wallis, Newton*, etc., se hizo universal. *Leibniz* simplificó este signo reduciéndolo a un punto.

Cardan (1637), no usó signo alguno interpuesto entre dos factores, colocándolos uno al lado del otro (*Lucas* lo atribuye a *Stiefel* en 1544).

Los egipcios multiplicaban mediante adiciones y duplicaciones. Los griegos ya conocían la tabla de multiplicar, debiéndose a *Pitágoras* (siglo VI a. J. C.), la disposición de la tabla a *doble entrada* que lleva su nombre.



JUAN WALLIS
(1616-1703)

El actual procedimiento de multiplicación se debe a los indios, que lo transmitieron a Europa por intermedio de los árabes.

La noción de potencia apareció desde muy antiguo en los problemas geométricos, como lo indican las palabras *cuadrado* y *cubo*, esta última de origen griego.

Las potencias y raíces de grado superior aparecieron más tarde con *Diofanto* (siglos III y IV y los árabes del siglo XII.

La notación actual de potencia mediante el exponente, se debe a *Descartes* (1637). El símbolo de raíz se debe a *Rudolff* (1526).

* * *

CAPITULO III

DIVISION

Cociente exacto

92. Definiciones. — Ilustraremos este concepto con un ejemplo:

Con 15 litros de vino, ¿cuántos recipientes de 5 litros se pueden llenar? Puedo proceder así: lleno un recipiente y me sobran 10 litros; repito la operación dos veces más, y veo así que con los 15 litros puedo llenar 3 de aquellos recipientes. He efectuado, pues, las tres restas sucesivas siguientes:

$$15 - 5 = 10 \ ; \quad 10 - 5 = 5 \ ; \quad 5 - 5 = 0$$

El número 3 se llama **cociente** entre 15 y 5. Resulta, pues, establecida para el cociente una *primera*.

DEFINICIÓN. — **Se llama COCIENTE entre dos números, dados en cierto orden, al número que indica cuántas veces se puede restar sucesivamente el segundo del primero.**

Podemos decir, pues, que *la división es una resta abreviada.*

93. El cociente tiene también *otro significado*, que ilustraremos con un ejemplo:

Dispongo de 15 cuadernos para distribuirlos en partes iguales entre 5 alumnos. ¿Cuántos les tocará a cada uno? Para contestar a esta pregunta, puedo comenzar por dar un cuaderno a cada alumno, en total 5 cuadernos, y me quedan 10; repito aun la operación otras dos veces más. De esta manera veo que los 15 cuadernos se han distribuído a los 5 alumnos dándole 3 a cada uno.

El número 3 determinado en la forma indicada, se llama **cociente** entre 15 y 5. Resulta, pues, establecida para el cociente una *segunda*

DEFINICIÓN. — **Dados dos números en cierto orden, si con las unidades del primero se forman tantos grupos como unidades tenga el segundo, el número que indica cuántas unidades componen cada grupo, se llama COCIENTE entre los dos números.**

94. Para indicar que *el cociente entre* 15 *y* 5 *es* 3, se escribe:

$$15 : 5 = 3$$

que se lee, 15 *divido por* 5 *es igual a* 3, o más brevemente: 15 dividido 5, 3.

El número 15 se llama **dividendo,** el 5 **divisor**; ambos son los **términos** del cociente.

La DIVISION es la operación aritmética mediante la cual hallamos el cociente de dos números.

La operación realizada en los ejemplos anteriores se llama **división exacta,** y es *inversa* de la multiplicación, puesto que el producto del divisor por el cociente es igual al dividendo:

$$\underset{\text{divisor}}{5} \times \underset{\text{cociente}}{3} = \underset{\text{dividendo}}{15}$$

El cociente de una división exacta se llama COCIENTE EXACTO.

NOTA. — Del concepto de división dado en el párrafo anterior, o sea el de *distribución,* deriva el nombre de *división* dado a esta operación.

Resto

95. **Cociente entero.** — Ilustremos el concepto con un ejemplo:

Supongamos que se desea dividir $ 17 entre 5 personas: en este caso la división no puede realizarse *exactamente,* puesto que a cada persona le corresponderían $ 3 y sobran $ 2. En estos casos se dice que 5 es el **cociente entero** entre 17 y 5 y que 2 es el **resto** de la división.

Obsérvese que 3 es el mayor número cuyo producto por 5 no supera 17. Podemos establecer, pues, para el cociente, una *tercera*

DEFINICIÓN. — **Se llama COCIENTE entre dos números, dados en cierto orden, al mayor número cuyo producto por el segundo no supere al primero.**

La operación realizada en el ejemplo anterior, se llama división inexacta o entera.

96. DEFINICIÓN. — **Se llama RESTO a la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente.**

Así, por ej., el resto de 17 : 5 es 2, porque $17 - 5 \times 3 = 2$.

De la definición se deduce que *el resto debe ser menor que el divisor.*

97. Hallar el **cociente** entre dos números, **dividir** un número por otro, hallar cuántas veces un número está **contenido** en otro, son frases sinónimas.

En lugar de decir, por ej., el cociente de 17 por 5 es 3 y el resto es 2, se dice también: 5 *está contenido* 3 *veces en* 17 *con un residuo de* 2.

98. NOTAS. — 1.ª Obsérvese que

$$5 : 1 = 5, \quad \text{porque} \quad 1 \times 5 = 5$$

Tendremos, pues:

El cociente de un número por 1 es el mismo número.

2.ª Tenemos: $13 : 13 = 1$, porque $13 \times 1 = 13$ o **sea:**

El cociente de un número por sí mismo es igual a 1.

3.ª Tenemos: $0 : 26 = 0$, porque $26 \times 0 = 0$.

El cociente de 0 por un número (distinto de cero), **es igual a 0.**

4.ª Basándonos en la definición, *no tiene sentido dividir un número distinto de* 0 *por* 0. En ese caso, convenimos en decir que la *división es imposible*. Así, por ej., $42 : 0$ es una división imposible, o también diremos que es un **símbolo de imposibilidad.**

5.ª Por definición *cualquier número es el cociente* $0 : 0$, porque cualquier número multiplicado por 0 da 0. Diremos que $0 : 0$ es un *cociente indeterminado,* o bien, que es un **símbolo de indeterminación.**

6.ª Recordando lo indicado respecto de la naturaleza del producto (NOTA del N.° 63), podemos establecer lo siguiente:

a) Si el dividendo y el divisor son cantidades de la **misma** especie, el cociente es un número abstracto.

Así, por ejemplo, en el problema: Si se gastaron $ 63 en mercaderías a $ 7 el kilogramo, ¿cuántos kilogramos se compraron?

Se contesta con la indicación siguiente:

($ 63) : ($ 7) = 9 (número de kilogramos de mercadería).

b) Si el dividendo y el divisor expresan cantidades de **distinta** especie, el cociente es de la misma especie que el dividendo, y el divisor se considera como número abstracto.

Así, por ejemplo, en el problema: Si se gastaron $ 63 para comprar 9 kilogramos de mercaderías, ¿cuánto se pagó por cada kilogramo?

Se contesta con la indicación siguiente:

($ 63) : 9 = $ 7 (costo de cada kilogramo).

Con las notaciones:

$$(\$\ 15) : 3 = \$\ 5 \quad ; \quad m.(54 : 6) = m.9$$

expresamos que la **tercera parte** de $ 15 es $ 5, o bien que $ 15 es el **triplo** de $ 5; que la **sexta parte** de m.54 es m.9, o bien que el **séxtuplo de m.9 es m.54**.

c) El resto es, en todos los casos, de la misma naturaleza que el dividendo.

Fórmula fundamental

99. En la división, por ej., de 17 por 5, vimos que el cociente es 3 y el resto 2. De la definción de resto (N.º 96), tenemos, pues, la igualdad

$$17 - 5 \times 3 = 2$$

de la que, por definición de diferencia (N.º 43), podemos escribir

$$17 = 5 \times 3 + 2$$

Llamando D al dividendo, d al divisor, c al cociente y r al resto, en general tendremos:

$$\boxed{D = d \times c + r, \text{ siendo } r < d}$$

que constituye la **FORMULA FUNDAMENTAL** de la división, y puede enunciarse así:

El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el resto.

100. La división exacta puede considerarse como un caso particular de la inexacta en que el resto vale cero. La fórmula fundamental anterior origina, pues, para la división *exacta*, esta otra: $D = d \times c$.

Así, por ej., escribiremos:

$$42 : 7 = 6, \quad \text{porque} \quad 42 = 7 \times 6$$

En este caso, decimos que 42 *es divisible por* 7, o bien, por lo indicado en el (N.º 65), que 42 es *múltiplo* de 7.

También diremos que 7 es **submúltiplo** o **divisor** de 42.

Cuando *el resto es* 0, podemos decir que *el dividendo es divisible* (o bien, *múltiplo*) *tanto por el divisor como por el cociente* (N.º 65).

Propiedades fundamentales de la división

101. Propiedad distributiva. — (Nos referiremos en esta propiedad, así como en las cuatro siguientes, a la división exacta). Supongamos, por ejemplo, que un chacarero va al mercado con tres cajones de melones; un cajón contiene 90, otro 72 y el otro 54. De acuerdo con el precio de plaza, vende los melones a razón de 9 por $ 1. ¿Cuántos pesos cobra vendiendo todos los melones que llevó?

Es natural que, para contestar a esta pregunta podemos razonar de dos modos:

1.° Se calcula el número total de melones que el chacarero llevó al mercado, y el número que buscamos es el cociente de aquel total $(90 + 72 + 54)$, dividido por 9, que se indica así:

$$(90 + 72 + 54) : 9$$

2.° Se calcula cuántos pesos se han cobrado por la venta de los melones de cada cajón y se suman los tres ingresos; el número que buscamos resulta ahora representado mediante la suma

$$(90 : 9) + (72 : 9) + (54 : 9) .$$

Siendo evidentemente la misma la suma cobrada, ya se razone de uno u otro modo, podemos igualar las expresiones anteriores, y tendremos:

$$(90 + 72 + 54) : 9 = (90 : 9) + (72 : 9) + (54 : 9)$$

y, en general

$$\boxed{(a + b + c) : m = a : m + b : m + c : m}$$

que se puede expresar así:

Para dividir una suma indicada por un número, se puede dividir cada término de la suma por el número, y se suman los cocientes parciales.

102. Análogamente, para dividir una *diferencia* indicada por un número, tenemos:

$$\boxed{(a - b) : m = a : m - b : m}$$

Como ejercicio, enuncie el estudiante la regla respectiva.
Las dos reglas anteriores constituyen la propiedad *distributiva* de la división respecto de la suma y de la resta, respectivamente.

EJEMPLO. — El cociente de 21 — 15 por 3 es,

$$21 : 3 - 15 : 3 = 7 - 5 = 2 .$$

103. PROPIEDAD 1.ª — **Un número no altera cuando se le multiplica por otro y el resultado se divide por este último, o si se le divide por otro y el resultado se multiplica por el mismo número.**

Así, por ej., tendremos:

$$(5 \times 3) : 3 = 5 \; ; \quad (24 : 6) \times 6 = 24$$

y, en general

$$\boxed{(a \times n) : n = a \; ; \quad (a : n) \times n = a}$$

Esta propiedad puede considerarse como un *corolario* de la definición (N.º 95).

104. PROPIEDAD 2.ª — **Para dividir un producto de varios factores por el producto de algunos de los mismos factores, basta suprimir del dividendo los factores del divisor.**

Así, por ej., tendremos

$$(8 \times 5 \times 2 \times 3) : (8 \times 2) = 5 \times 3 .$$

Para justificar el cociente hallado, basta multiplicarlo por el divisor, y ver que se reproduce el dividendo (N.º 100). Efectuando operaciones y aplicando las propiedades disociativa y conmutativa de la multiplicación, resulta:

$$(5 \times 3) \times (8 \times 2) = 5 \times 3 \times 8 \times 2 = 8 \times 5 \times 2 \times 3$$

El último miembro es, precisamente, el dividendo.

En general, tendremos:

$$\boxed{(a \, . \, b \, . \, c \, . \, d) : (b \, . \, d) = a \, . \, c}$$

105. Como *corolario* de la propiedad anterior, tenemos:

Para dividir un producto de varios factores por uno de ellos, basta suprimir del producto este factor.

Así, por ej., tendremos:

$$(8 \times 12 \times 5 \times 9) : 5 = 8 \times 12 \times 9$$

En general: $\boxed{(a \, . \, b \, . \, c) : b = a \, . \, c}$

106. PROPIEDAD 3.ª — **Para dividir un producto por un número, basta dividir por ese número uno solo de los factores** (conservando los restantes).

Así, por ej., tendremos:

$$(4 \times 12 \times 7) : 6 = 4 \times (12 : 6) \times 7$$

Para demostrarlo, basta multiplicar el segundo miembro por el divisor y ver que se reproduce el dividendo. Indicando la multiplicación y aplicando propiedades ya demostradas (N.os 69, 67, 103), tendremos:

$$[4 \times (12 : 6) \times 7] \times 6 = 4 \times (12 : 6) \times 7 \times 6 =$$
$$= 4 \times (12 : 6) \times 6 \times 7 = 4 \times 12 \times 7$$

Reproduciéndose en el último miembro el dividendo de la división propuesta, queda, pues, demostrada la propiedad.

En general, tendremos

$$\boxed{(a \,.\, b \,.\, c \,.\, d) : n = a \,.\, (b : n) \,.\, c \,.\, d}$$

107. PROPIEDAD 4.ª — **Para dividir un número por un producto de varios factores, puede procederse dividiendo sucesivamente por cada uno de ellos.**

Vale decir que, para dividir un número N por el producto $(a \,.\, b \,.\, c \quad)$, decimos que el cociente se puede obtener dividiendo N por a, luego dividiendo el resultado $(N : a)$ por b, y finalmente dividiendo el nuevo resultado $[(N : a) : b]$ por c. Esto se indica mediante la igualdad general

$$\boxed{N : (a \,.\, b \,.\, c) = [(N : a) : b] : c}$$

Efectuemos directamente la demostración literal, en la que estimamos que el estudiante no tendrá dificultad alguna con la práctica ya adquirida a esta altura del curso.

Representando con q al cociente de la división de N por $(a \,.\, b \,.\, c)$, tendremos:

$$N : (a \,.\, b \,.\, c) = q \qquad [a]$$

de donde, $N = (a \,.\, b \,.\, c) \,.\, q$, o sea $N = a \,.\, b \,.\, c \,.\, q$

Dividiendo los dos miembros de la última igualdad por a, obtenemos otra igualdad (en virtud del Postulado del N.º 9); resulta, pues, aplicando también el (N.º 105):

$$N : a = b \,.\, c \,.\, q$$

Dividiendo ahora los dos miembros de esta última igualdad por b, resulta:

$$(N : a) : b = c \,.\, q$$

y dividiendo luego por c:

$$[(N : a) : b] : c = q \qquad [\beta]$$

De las igualdades $[\alpha]$ y $[\beta]$ resulta:

$$N : (a \,.\, b \,.\, c) = [(N : a) : b] : c$$

que constituye la propiedad que nos proponíamos demostrar.

Ejemplo. — Para dividir 180 por $3 \times 5 \times 6$ podemos proceder así:

$$180 : 3 = 60 \;;\quad 60 : 5 = 12 \;;\quad 12 : 6 = 2$$

El resultado es el último cociente hallado, o sea 2. Procediendo directamente, calcularíamos previamente el divisor $3 \times 5 \times 6 = 90$, y luego dividiríamos $180 : 90 = 2$.

108. Leyendo la propiedad anterior en orden inverso (ley simétrica del N.º 8), podemos decir que

Para efectuar varias divisiones consecutivas (supuestas posibles), **puede procederse dividiendo de una vez por el producto de los divisores empleados.**

En cada caso se optará por el procedimiento de cálculo que más convenga.

Nota. — Como en el divisor $(a \,.\, b \,.\, c)$ de la propiedad anterior podemor invertir el orden de los factores (N.º 67), también podremos, en consecuencia, invertir el orden de las divisiones sucesivas.

Ejemplo. — Considerando nuevamente el ejemplo anterior, en lugar de dividir sucesivamente por 3, 5, 6, podemos dividir, por ejemplo, primeramente por 5, luego por 3 y por 6. Así tendremos:

$$180 : 5 = 36 \;;\quad 36 : 3 = 12 \;;\quad 12 : 6 = 2$$

109. Propiedad 5.ª — **Si se multiplican o dividen los dos términos de una división por un mismo número, el cociente no altera, pero el resto queda multiplicado o dividido por el mismo número, respectivamente.**

Empezaremos verificando la propiedad mediante un ejemplo, para el caso que se multiplique. Sea la división de 43 por 5; obtendremos 8 como cociente y 3 como resto; por consiguiente, de acuerdo con la fórmula fundamental (N.º 99), podemos escribir:

$$43 = 5 \times 8 + 3$$

Multiplicando ahora tanto el dividendo 43, como el divisor 5 por un mismo número, por ej., 10 y efectuando la división de los números que resultan, es decir, efectuando 430 : 50, obtenemos el mismo cociente 8, pero el resto es 30 (o sea 3×10). En efecto

$$430 = 50 \times 8 + 30 .$$

En términos generales, si llamamos D al dividendo, d al divisor, c al cociente y r al resto de una división, sabemos que la fórmula fundamental (N.º 99), expresa:

$$D = d \times c + r, \text{ siendo } r < d$$

1.º *Multipliquemos* por m ambos miembros de la igualdad y de la desigualdad anteriores; obtendremos, respectivamente, otra igualdad y otra desigualdad (N.os 9 y 11). Pero observemos que el segundo miembro de la igualdad, por ser una suma de dos partes, será necesario multiplicar por m cada una de ellas (N.º 71); y que la primera parte $d \times c$ siendo un producto de dos factores, para multiplicarla bastará con multiplicar sólo el factor d. Tendremos, pues:

$$D \times m = (d \times m) \times c + r \times m \ ; \quad r \times m < d \times m$$

las que demuestran que dividiendo $(D \times m)$ por $(d \times m)$ se obtiene por cociente c y por resto $r \times m$.

Por tanto, las dos divisiones, la de D por d, y la de $(D \times m)$ por $(d \times m)$, dan el mismo cociente c; pero, mientras que en la primera el resto es r, en la segunda es $r \times m$.

Queda, pues, demostrada la propiedad.

2.º Para el caso que se *dividan* los dos términos de una división por un mismo número, será necesario emplear en la demostración la propiedad (N.º 101), luego la (N.º 106), y razonar como en el caso anterior. Como ejercicio, dejamos para el estudiante esta demostración.

Aplicación. — La propiedad anterior se aplica, por ejemplo, para simplificar las divisiones, cuando el dividendo y el divisor tienen un factor común que resulta fácil suprimir. Así, la división de 15 000 por 2 500 resulta más cómoda si se dividen previamente ambos términos por el factor común 100, presentándose entonces la división 150 : 25 que tiene el mismo cociente que la primitiva; si interesa conocer el resto de la primera, habrá que multiplicar el de la segunda por 100.

Justificación de las reglas operatorias de la división

110. Si para dividir dos números tuviéramos que recurrir al procedimiento indicado en el (N.º 95), tendríamos que formar los productos sucesivos del divisor por los números 1, 2, 3, 4, 5, etc., hasta encontrar un producto igual al dividendo, o bien, hasta obtener el mayor producto posible menor que el dividendo.

Así, por ejemplo, el cociente de 86 por 12 se obtendría calculando los múltiplos sucesivos de 12 que son:

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, ...

Vemos que el mayor múltiplo contenido en 86 es 84, que es 12 × 7; 12 está contenido al máximo 7 veces en 86; el cociente es, pues, 7; el resto será 86 — 84 = 2.

El procedimiento resulta, en la práctica, algo largo, sobre todo cuando el dividendo es grande, por lo cual se abrevia mediante las reglas que veremos a continuación.

Nota. — Téngase presente que, en este Primer curso de Aritmética, sólo nos ocuparemos de la parte entera del cociente, a la que llamaremos simplemente *cociente*. En el próximo curso volveremos sobre ello, al tratar las fracciones decimales, y veremos cómo se puede continuar la división para obtener un cociente más aproximado, en forma de número decimal.

Empecemos por calcular el número de cifras del cociente, sin efectuar la división.

111. **Número de cifras del cociente.** — Sea, por ej., la división de 22 372 por 34. Si a la derecha del divisor 34 agregamos un cero, obtenemos 340, que es menor que 22 372. Agregando otro cero, tenemos 3 400 que aun es menor que el dividendo. Finalmente, un tercer cero da 34 000 que es mayor que el dividendo. Por consiguiente, el dividendo contiene más de 100 veces y menos de 1 000 veces al divisor. Como el cociente es el número de veces que el dividendo contiene al divisor, este número estará comprendido entre 100 y 1 000: tiene, por consiguiente, *tres* cifras; podemos dar, pues, la siguiente

Regla. — **El número de cifras de un cociente es igual al menor número de ceros que es necesario agregar a la derecha del divisor, para que éste contenga al dividendo.**

Ejemplos. — Los cocientes 65 : 8 , 3926 : 472 , son de una cifra. El cociente 80536 : 95 tendrá tres cifras.

Distinguiremos en la división cuatro casos:

112. Primer caso. — **El divisor y el cociente tienen una sola cifra entera.**

En este caso procedemos como indicamos en el (N.º 110), buscando el mayor múltiplo del divisor contenido en el dividendo. Esta investigación se abrevia usando la tabla de multiplicar (N.º 78), que contiene en una misma columna todos los múltiplos de la cifra que encabeza dicha columna.

Así, por ej., sea la división de 56 por 9. Utilizamos la columna encabezada por 9 y buscamos en ella el mayor de los números inferiores a 56; encontramos 54. Este es el mayor múltiplo de 9 contenido en 56, y corresponde a 9 × 6. El número 6 es, pues, la parte entera del cociente; el resto de la división es 56 — 54 = 2.

Conviene acostumbrarse a efectuar esta operación mentalmente, es decir, sin recurrir a la tabla.

113. Segundo caso. — **El dividendo y el divisor son cualesquiera, y el cociente tiene una sola cifra entera.**

Este caso se reconoce porque tendremos que agregar *un cero* a la derecha del divisor para obtener un número mayor que el dividendo (N.º 111).

Sea, por ej., la división de 38169 por 7241.

Puesto que el cociente es de una sola cifra, para hallarla tendríamos que formar los productos sucesivos del divisor por los números 2, 3, 4, . . . 8 y 9 hasta encontrar el mayor producto menor que el divisor.

Pero estos ensayos se abrevian observando que el producto de la cifra 7 (de los millares) del divisor por 6, ya forma un número 7 × 6 = 42 mayor que los 38 millares del dividendo. Se comenzará, pues, ensayando por el 5.

Vemos, pues, que estos ensayos se simplifican *considerando provisionalmente sólo la primera cifra del divisor y las unidades del mismo orden del dividendo, y empezando el ensayo del cociente de la división así reducida.*

Se multiplica luego el divisor por la cifra así obtenida, y el producto se resta del dividendo.

Si puede efectuarse la sustracción, la cifra ensayada es válida, y la diferencia es el resto de la operación. De lo contrario, se disminuye en una unidad aquella cifra y se efectúa un nuevo ensayo, hasta que el producto pueda restarse del dividendo. La cifra correspondiente al último ensayo es el cociente que buscábamos.

En la práctica se abrevian estas operaciones, efectuando al mismo tiempo el producto del divisor por el cociente y la sustracción.

Así, por ej., en la división de 38 169 por 7 241, se dispone la operación como sigue:

dividendo	38 169	7 241	*divisor*
resto	1 964	5	*cociente*

Decimos: 5 por 1 es 5, al 9 van 4; 5 por 4 son 20, al 26 van 6 y *llevo* 2; 5 por 2 son 10, y 2 que llevaba son 12, al 21 van 9 y llevo 2; 5 por 7 son 35 y 2 son 37, al 38 va 1. Las cifras 1964 forman el resto.

Como puede verse en el ejemplo anterior, para efectuar al mismo tiempo ambas operaciones (multiplicación y sustracción), hemos multiplicado sucesivamente las unidades de los diversos órdenes del divisor por el cociente, y restado los productos de las unidades correspondientes del dividendo. Cuando se nos ha presentado una resta imposible, como por ejemplo las 20 decenas que no podían restarse de 6, se han agregado al minuendo las unidades necesarias del orden inmediatamente superior, agregándolas también al sustraendo en el producto siguiente, con lo cual la resta no altera (N.º 51; 2.º).

Podemos dar, pues, la siguiente

REGLA. — **Cuando el cociente es de una sola cifra, se obtendrá ésta empezando por ensayar la que resulta de dividir por la primera cifra del divisor las unidades del mismo orden del dividendo. Si el producto de esta cifra por todo el divisor puede restarse del dividendo, esta cifra es el cociente, de lo contrario, se disminuirá en una unidad dicha cifra y se ensayará otra vez, y así sucesivamente, hasta obtener un producto inferior al dividendo.**

La diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente es el resto.

114. TERCER CASO. — **El divisor es un número de una sola cifra, y el cociente es un número cualquiera.**

Sea, por ej., la división del número 968 por 7.

Descomponemos el dividendo en las unidades de los diversos órdenes, y tendremos:

$$968 = 9 \textit{ centenas} + 6 \textit{ decenas} + 8 \textit{ unidades}$$

Empezamos por dividir las 9 centenas (que llamamos *primer dividendo parcial*), por 7: nos da 1 centena como cociente, y un resto de $9 - 7 \times 1 = 2$ centenas; la cifra 1 es la de las centenas del cociente, es decir, la primera.

El resto de 2 centenas, o sea 20 decenas, lo sumamos con las 6 decenas del dividendo, obteniendo 26 decenas (que llamamos *segundo dividendo parcial*), que dividido por 7 nos da 3 decenas como cociente, y un resto de $26 - 7 \times 3 = 5$ decenas; la cifra 3 es la de las decenas del cociente, o sea la segunda.

El resto de 5 decenas, o sea 50 unidades, lo sumamos con las 8 unidades del dividendo, obteniendo 58 unidades (*tercer dividendo parcial*), que dividido por 7 nos da 8 unidades como cociente, y un resto de $58 - 7 \times 8 = 2$; la cifra 8 es la de las unidades del cociente, o sea la última. El cociente total es, pues, 138 y el resto 2.

Dispondremos la operación del ejemplo anterior en la forma acostumbrada, y efectuaremos las multiplicaciones y sustracciones para hallar los restos o dividendos parciales, en la forma abreviada en que lo hicimos para el caso anterior.

dividendo	968	7	*divisor*
segundo dividendo parcial	26	138	*cociente*
tercer dividendo parcial	58		
resto	2		

Decimos: 9 entre 7 es 1; 1 por 7 es 7, al 9 van 2. Se baja la cifra siguiente 6; 26 entre 7 son 3; 3 por 7 son 21, al 26 van 5. Se baja la cifra siguiente 8; 58 entre 7 son 8; 8 por 7 son 56, al 58 van 2. El cociente total es 138 y el resto 2.

Estimamos que, con el ejemplo anterior y la práctica que en esta operación ya tendrá el alumno de la Escuela Primaria, resultará suficientemente justificada la siguiente

REGLA. — **Si el divisor es un número de una sola cifra, se empieza separando de la izquierda del dividendo tantas cifras como sean necesarias y suficientes para obtener un número mayor que el divisor. Luego se divide el número así formado, llamado primer dividendo parcial, por el divisor, de acuerdo con la regla del Primer caso (N.º 112); el cociente obtenido es la primera cifra del cociente total,**

Agréguese a la derecha del resto, la cifra siguiente del dividendo, y con el número así formado, llamado segundo dividendo parcial, se procede como con el primero, escribiendo la cifra cociente a la derecha de la anterior, y agregando a la derecha del resto, la cifra siguiente del dividendo, formando así el tercer dividendo parcial; se continúa así hasta agotar todas las cifras del dividendo.

Las cifras de los cocientes parciales sucesivos forman el cociente total; el último resto es el de la operación. Cuando algún dividendo parcial resulte menor que el divisor, se escribe un cero en el lugar de la cifra correspondiente del cociente y se continúa la operación bajando una cifra más del cociente.

Ejemplo. — Sea la división de 18 165 por 6. El primer dividendo parcial es 18 que contiene a 6 tres veces; la primera cifra del cociente es, pues, 3. El primer resto parcial es 0. Bajamos la cifra siguiente 1 del dividendo; el segundo dividendo parcial es 1, que no contiene al divisor. La segunda cifra del cociente es, pues, 0. Bajamos la cifra siguiente del dividendo 6; el segundo dividendo parcial es ahora 16 que contiene 2 veces al 6, con un resto 4. La tercera cifra del cociente es, pues, 2. Bajamos la cifra siguiente 5 del dividendo; el tercer dividendo parcial es 45, que contiene 7 veces al 6, con un resto 3. La última cifra del cociente es 7. El cociente total es 3027, y el resto 3.

```
18 165 | 6
 0 16  | 3 027
    45
     3
```

115. CASO GENERAL. — Divisor y cociente de varias cifras. — Sea, por ej., la división de 37569 por 82.

Según la regla del (N.º 111) el cociente tendrá 3 cifras, es decir, que constará de centenas, decenas y unidades. Descompongamos entonces el dividendo en la suma de sus centenas, decenas y unidades:

$$37569 = 375 \textit{ centenas} + 6 \textit{ decenas} + 9 \textit{ unidades}$$

En general, el primer sumando de esta descomposición se obtendrá separando en el dividendo, a partir de la izquierda, tantas cifras como sean necesarias y suficientes para obtener un número mayor que el divisor.

Luego procedemos como en el caso anterior, empezando por dividir el primer grupo de cifras 375 por el divisor 82; da 4 de cociente y 47 de resto, según la regla del (N.º 113). Tanto el cociente como el resto obtenido, son de la misma especie que el dividendo parcial, es decir, centenas; la cifra 4 representa, pues, las centenas del cociente, o sea la primera cifra del cociente que buscamos. (Sígase el ejemplo de la página siguiente).

Al resto obtenido de 47 centenas se le agregan las 6 decenas del dividendo, formando así el número 476, que llamamos segundo dividendo parcial; etc.

La operación se continúa aplicando la regla del caso anterior, de acuerdo con el esquema siguiente:

dividendo	37 569	82	*divisor*
segundo dividendo parcial	4 76	458	*cociente*
tercer dividendo parcial	669		
resto	13		

El cociente total es 458, y el resto 13.

La REGLA, en este caso, es la misma que en el caso anterior.

116. Prueba de la división. — La prueba de la división se efectúa aplicando la fórmula fundamental (N.º 99); vale decir, *multiplicando el cociente por el divisor y agregándole el resto al producto obtenido.* No existiendo error en la operación, *el resultado debe ser igual al dividendo.*

Así, en la división del ejemplo anterior, tenemos:

$$82 \times 458 + 13 = 37\,556 + 13 = 37\,569$$

NOTAS. — Como casos particulares de la división, dejamos para el estudiante la verificación de las siguientes reglas:

1.ª Para dividir un número cualquiera por la unidad seguida de ceros, se tachan a la derecha del número tantas cifras como ceros tenga el divisor. El resto lo forman las cifras tachadas, y el cociente las que quedan.

2.ª Para dividir un número cualquiera por otro terminado en ceros, se suprimen éstos, y se tachan a la derecha del dividendo tantas cifras como ceros tenía el divisor, hallando luego el cociente de los números así reducidos. El resto se forma con el que resulta de esta división colocándole a la derecha aquellas cifras tachadas.

Así, por ej., el cociente de la división de 25384 por 100 es 253, y el resto es 84. El cociente de la división de 934675 por 5200 es el mismo que el de 9346 por 52, o sea 179. El resto de esta última división es 38; por tanto, el de la primera será 3875.

Cálculo mental en la división

117. División por 2. — Conviene que el estudiante recuerde el doble de los 50 primeros números, que serán los 50 primeros números pares: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 100. (N.º 65).

Recordando esa colección de números, podemos, pues, contestar en seguida cuánto es la mitad de un número menor que 100; si el número es par, recordando cuál es el número cuyo duplo es el número dado; si el número es impar, se le resta una unidad y se toma la mitad del número par que resulta.

Así, por ej., se contestará sin titubeos: la mitad de 58 es 29; la mitad de 67 es 33 con el resto 1.

La división por 2 de un número cualquiera es una operación que puede efectuarse, sin dificultad, mentalmente. Para mayor rapidez, pueden considerarse dos cifras a la vez.

Así, por ej., para hallar la mitad de 6431, decimos: la mitad de 64 es 32, la de 31 es 15 y el resto 1; la mitad que buscamos es, pues, 3215 y el resto 1.

118. Multiplicación por 5. — Como $5 = 10 : 2$, para multiplicar por 5, podemos multiplicar por 10 y dividir por 2; vale decir que, agregamos un cero a la derecha del número y luego tomamos la mitad del resultado.

Así, para multiplicar 5317 por 5, tomamos la mitad de 53170, que es 26585.

119. División por 5.— Para dividir por 5, podemos dividir por 10 y multiplicar por 2; esto se logra suprimiendo la última cifra de la derecha y duplicando el número así obtenido, al que se le suma 1 si la cifra suprimida es igual o mayor que 5.

Así, el cociente de 3872 por 5 se obtiene duplicando 387, logrando 774 y el resto es 2.

Análogamente, el cociente de 8627 por 5, se obtiene duplicando 862, o sea 1724 y agregando 1, lo que da 1725; el resto será $7 - 5 = 2$.

120. División por 4, 8, 16, etc. — Para dividir por $4 = 2 \times 2$, dividimos dos veces consecutivas por 2.

Para dividir por $8 = 2 \times 2 \times 2$, dividimos tres veces consecutivas por 2, etc.

Así, por ej., la cuarta parte de 5732, tomo primeramente la mitad: 2866; luego la mitad de esta mitad: 1433.

121. Multiplicación o división por 25. — Como $25 = 100:4$, para multiplicar por 25, podemos multiplicar por 100 y dividir por 4; vale decir que agregamos dos ceros a la derecha del número y luego tomamos la mitad dos veces.

Así, por ej., el producto de 321 por 25 lo obtendremos tomando primeramente la mitad de 32100, o sea 16050, y luego la mitad de esta mitad, resultando 8025.

Para dividir por 25, podemos dividir por 100 y multiplicar por 4.

122. Otras divisiones. — Para dividir un número por otro compuesto de varios factores, se le puede dividir sucesivamente por cada factor (N.º 107).

Así, para dividir por $15 = 5 \times 3$, dividimos por 5 y luego por 3. Por ej., el cociente de 345 por 15 lo obtenemos dividiendo primero por 5, obteniendo 69, y luego por 3, resultando 23.

Para dividir por 6, dividimos por 2 y por 3.

Para dividir por 12, dividimos por 4 y por 3.

Para multiplicar por $125 = 1\,000:8$, multiplicamos por 1 000 y dividimos por 8.

Análogamente, para dividir por 125, dividimos por 1 000 y multiplicamos por 8.

NOTAS HISTORICAS

La notación de cociente mediante la raya de quebrado la utilizaron los indios. El matemático italiano *Leonardo de Pisa* (en 1202), introdujo en Europa dicha notación llamándole *númerus ruptus* (número *roto, quebrado*). Posteriormente se utilizaron las iniciales M y D para indicar la multiplicación y división, respectivamente.

GUILLERMO OUGHTRED
(1575-1660)

El signo : de la división fué empleado por primera vez, en 1657, por el matemático inglés *Oughtred.*

Es probable que el signo ÷ que a veces se emplea para indicar la división, resulte de la combinación de la raya de quebrado —, y del símbolo : que expresa la *razón* entre dos números.

* * *

CAPITULO IV

DIVISIBILIDAD

123. Fundamentos. — Supongamos que nos proponen el siguiente problema:

"Disponiendo de una pieza de género de 126 metros, ¿es posible cortarla en trozos de 9 m. cada uno sin que haya sobrante? ¿Sucedería lo mismo si los trozos fueran de 10 m. cada uno? ¿Y si la pieza tuviera 127 metros?"

A estas preguntas podemos contestar hallando el cociente, en cada caso, según la definición del (N.° 95); pero, en estos casos no interesa conocer el valor del cociente, sino que interesa, sobre todo, saber si la división es *exacta* o *inexacta*, vale decir, si el dividendo *es o no divisible* por el divisor dado, denominaciones estas ya empleadas anteriormente (N.° 100).

Se puede saber si un número es divisible por otro sin efectuar la división, mediante el conocimiento de ciertas condiciones que se llaman **criterios o caracteres de divisibilidad**.

Múltiplos y divisores

124. Definiciones. — Recordemos (N.° 100) que si tenemos, por ej., $42 : 7 = 6$, por ser esta división exacta, podemos escribir, $42 = 7 \times 6$; decimos entonces que 42 es **divisible** por 7, o bien que 42 es **múltiplo** de 7.

En general, si un número N es el producto de dos factores a y b, o sea si tenemos

$$N = a \times b$$

decimos que N es **MULTIPLO** de a, y también de b.

Los números a y b se llaman **SUBMULTIPLOS**, o bien **DIVISORES**, o **factores**, o una **parte alícuota** de N.

Propiedades fundamentales

125. Propiedad 1.ª — **Todo número es divisible por cualquiera de sus factores.**

Esta propiedad es una *consecuencia* inmediata de las definiciones dadas en el párrafo anterior.

Así, por ej., el número $24 = 8 \times 3$, es divisible por 3, porque este último número es factor de 24; por análoga razón decimos que 24 es divisible por 8. Si escribimos $24 = 2 \times 4 \times 3$, podemos decir que 24 es también divisible por 2 y por 4, etc.

126. Propiedad 2.ª — **El producto de un múltiplo de un número por cualquier factor es también múltiplo de dicho número.**

Así, 42 es múltiplo de 7, porque $42 = 7 \times 6$.

Si multiplicamos a 42 por otro número cualquiera, por ej., por 3, tendremos: 42×3. Sustituyendo 42 por su valor ($= 7 \times 6$), resulta $7 \times 6 \times 3$; vemos que este producto es también múltiplo de 7 (porque 7 figura como factor). Como el razonamiento podría realizarse para números cualesquiera, queda, pues, probada la propiedad.

Puede enunciarse, también, así:

Si un número divide a otro, divide también a cualquier múltiplo de éste.

Por ej., 2 divide a 6, por consiguiente dividirá a cualquier múltiplo de 6, es decir, a 12, 18, 24, etc.

127. Propiedad 3.ª — **La suma de varios múltiplos de un número es también un múltiplo de este número.**

Así, por ej., 12, 9, 18 son múltiplos de 3; decimos que la suma $12 + 9 + 18 = 39$ es también un múltiplo de 3.

Esta propiedad resulta inmediatamente de la operación de "sacar un factor común" (N.º 71). En efecto, si los números 12, 9, 18 son múltiplos de un mismo número 3, equivale a decir que este número es factor común; sacándolo, tendremos:

$$12 + 9 + 18 = 3 \times (4 + 3 + 6)$$

Vemos, pues, que la suma $(12 + 9 + 18)$ tiene el factor 3, o sea, es también un múltiplo de 3.

Puede enunciarse, también, así:

Si un número divide a otros, divide también a la suma de éstos.

Por ej., 2 divide a 6, 14, 16; por consiguiente dividirá a la suma $6 + 14 + 16 = 36$.

NOTA. — Se comprende fácilmente que esta propiedad es válida aun en el caso de que en lugar de una suma se tenga la diferencia de dos números (N.° 72).

Por ej., 5 divide a 60 y a 35; por consiguiente, dividirá a la diferencia 60 — 35 = 25.

128. PROPIEDAD 4.ª — **Si en una suma de dos sumandos, uno de ellos es múltiplo de un número y el otro no lo es, la suma tampoco es múltiplo de ese número.**

A fin de no apartarnos del carácter elemental de este curso, admitiremos sin demostración esta propiedad, que el alumno podrá comprobar mediante ejemplos.

Así, por ej., 12 es múltiplo de 3, y 16 no lo es; la suma 12 + 16 = 28 no es múltiplo de 3.

Puede enunciarse también así:

Si un número divide a uno de los dos sumandos de una suma y al otro no, la suma no es divisible por aquel número.

NOTA. — Obsérvese también que el resto de la división de la suma por el número es el mismo que el de la división del segundo sumando.

Así, en la suma 28 del ejemplo anterior, el resto de la división por 3 es 1; el resto de dividir el segundo sumando 16 por 3 es también 1, es decir, el mismo.

Caracteres de divisibilidad

Ya indicamos en el N.° 123 qué se entendía por caracteres o criterios de divisibilidad. Trataremos ahora los de algunos números particulares.

129. Divisibilidad por 10, 100, 1000, etc. — Sea un número cualquiera que termina en cero; por ej., 270. Podemos descomponerlo en el producto de dos números: el formado por sus decenas, y el otro el número 10. Análogamente, para cualquier otro número que termine en cero. Así, tendremos:

$$270 = 27 \times 10$$

Siendo 10 factor de 270, este número resulta, pues, divisible por 10, en virtud del (N.º 125).

En forma análoga podemos establecer las igualdades:

$$85\,700 = 857 \times 100 \; ; \quad 4\,000 = 4 \times 1\,000; \text{ etc.}$$

que nos conducen al siguiente criterio general:

Un número será divisible por una potencia de 10 (*es decir,* 10, *o* 100, *o* 1 000, ...) *cuando termine en tantos ceros como unidades tenga el exponente de la potencia.*

NOTA. — Hubiéramos podido llegar al mismo resultado teniendo presente la Nota 1.ª del (N.º 116), que establece que el resto de la división de un número por la unidad seguida de ceros, es el formado por tantas cifras de la derecha del número como ceros tenga el divisor.

130. Divisibilidad por 2 y 5. — En el párrafo anterior vimos que, un número que termina en cero tiene el factor 10. Pero como $10 = 2 \times 5$, vemos, pues, que todo número que termina en cero tiene los factores 2 y 5; en consecuencia, será divisible por estos últimos números.

Por otra parte, cualquier número podemos descomponerlo en dos partes separando las decenas de las unidades, por ejemplo:

$$3\,875 = 3\,870 + 5$$

La primera parte, por terminar en cero, es siempre divisible por 2 y por 5. La segunda parte es la cifra de las unidades del número dado; si ésta es cero o una de las cifras pares, el número será divisible por 2, en virtud de la propiedad 3.ª (N.º 127). Diremos, pues:

Un número será divisible por 2 *cuando termine en* 0 *o en cifra par.*

Razonando análogamente para investigar la divisibilidad por 5, resulta:

Un número será divisible por 5 *cuando termine en cero o en* 5.

En el ejemplo numérico anterior, 3875 no es divisible por 2, porque 5 no es cifra par; en cambio es divisible por 5 por terminar en 5.

131. Divisibilidad por 4 y 25. — Un número que termine en dos ceros tiene el factor $100 = 4 \times 25$, en virtud del (N.º 129). Razonando como en el párrafo anterior, veríamos, pues, que el número dado es divisible por 4 y por 25.

Sea ahora un número cualquiera; podemos descomponerlo en dos partes: sus centenas por un lado, y sus decenas y unidades por otro. Así, tendremos, por ej.:

$$796 = 700 + 96 \;;\; 3\,675 = 3\,600 + 75 \;; \text{etc.}$$

La primera parte, por terminar en dos ceros, es siempre un múltiplo de 4 y 25; para que también lo sea el número dado, bastará, pues, que lo sea la segunda parte, es decir, el número formado por las cifras de las decenas y unidades. Diremos, pues:

Un número será divisible por 4 *o* 25, *cuando las dos últimas cifras sean ceros, o formen un número múltiplo de* 4 *o* 25, *respectivamente.*

Así, en los últimos ejemplos, el número 796 es divisible por 4, porque $96 = 4 \times 24$ es un múltiplo de 4; no es divisible por 25, porque 96 no es múltiplo de 25. El número 3675 no es divisible por 4, porque 75 no es múltiplo de 4; en cambio es divisible por 25 porque $75 = 3 \times 25$ es múltiplo de 25.

Ejemplo. — Un conjunto de 136 alumnos de un colegio podrán formar filas de a 4, porque 36 es múltiplo de 4.

132. Divisibilidad por 8 y 125. — Un número que termina en tres ceros tiene el factor $1\,000 = 8 \times 125$.

También, cualquier número puede descomponerse así, por ejemplo:

$$68\,375 = 68\,000 + 375$$

En consecuencia, razonando como en el caso anterior, tendríamos el siguiente criterio:

Un número será divisible por 8 *o* 125, *cuando las tres últimas cifras sean ceros, o formen un número múltiplo de* 8 *o* 125, *respectivamente.*

En el ejemplo propuesto, 68375 es divisible por 125 porque $375 = 125 \times 3$ es múltiplo de 125.

133. Divisibilidad por 9 y 3. — Dividiremos esta demostración en tres partes:

1.ª *La unidad seguida de ceros es igual a un múltiplo de 9, más la unidad.*

(Abreviaremos las palabras "múltiplo de" con la inicial M).

Así, tendremos, por ej.:

$$1\,000 = 999 + 1 = 9 \times 111 + 1 = M\,9 + 1$$

2.ª *Una cifra significativa cualquiera seguida de ceros, es igual a un múltiplo de 9, más el valor absoluto de dicha cifra.*

En efecto, tenemos, por ej.:

$$4\,000 = 4 \times 1\,000 = 4 \times (M\,9 + 1) = 4 \times M\,9 + 4$$

(en la última transformación hemos aplicado la propiedad distributiva de la multiplicación).

Pero $4 \times M\,9$ es otro múltiplo de 9, en virtud de la propiedad 2.ª (N.º 126), y que representamos con M' 9; por consiguiente, tendremos:

$$4\,000 = M'\,9 + 4$$

3.ª *Cualquier número es igual a un múltiplo de 9, más la suma de sus cifras* (consideradas en sus valores absolutos).

En efecto, tomando, por ej., el número 4 863, tenemos:

$$4\,863 = 4\,000 + 800 + 60 + 3$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{Pero} & 4\,000 = & M'\,9 + & 4 \\ & 800 = & M''\,9 + & 8 \\ & 60 = & M'''\,9 + & 6 \\ & 3 = & & 3 \end{array}$$

Sumando ordenadamente estas últimas cuatro igualdades, es decir, sumando por un lado los primeros miembros y por otro los segundos, obtenemos otra igualdad (en virtud del axioma 4.º del N.º 6):

$$4\,863 = (M'\,9 + M''\,9 + M'''\,9) + (4 + 8 + 6 + 3)$$

Pero la suma $(M'\,9 + M''\,9 + M'''\,9)$ de varios múltiplos de 9 es también un múltiplo de 9, que representamos con M 9; por consiguiente, tendremos: $4\,863 = M\,9 + 21$

Conclusión. — Para el estudio de la divisibilidad por 9 observemos que todo número es igual a la suma de dos sumandos: el primero es siempre un múltiplo de 9; si el segundo también lo es, entonces la suma, o sea el número dado, también será un múltiplo de 9, es decir, que será divisible por 9 (en virtud del N.º 127).

Si el segundo sumando no es un múltiplo de 9, la suma no será divisible por 9 (N.º 128).

Pero como el segundo sumando es la suma de las cifras del número, podemos, pues, enunciar el siguiente criterio:

Un número será divisible por 9 cuando lo sea la suma de las cifras que lo forman.

Para el estudio de la divisibilidad por 3, obsérvese que en la igualdad anterior podemos reemplazar M 9 por M 3, porque cualquier múltiplo de 9, por contener el factor $9 = 3 \times 3$, contiene también al factor 3, es decir, que es también un múltiplo de 3. Tendremos, pues:

$$4\,863 = \text{M } 3 + 21$$

Razonando con esta igualdad en forma análoga a la anterior, llegaríamos al siguiente criterio:

Un número será divisible por 3 cuando lo sea la suma de las cifras que lo forman.

En el ejemplo anterior, el número 4863 no es divisible por 9, porque 21 no es divisible por 9 (la suma de las cifras de 21 da 3, que es múltiplo de $3 = 3 \times 1$).

134. NOTA. — Obsérvese también que, *el resto de la división de un número cualquiera por 3 o por 9 es igual al resto de la división por 3 o por 9, respectivamente, de la suma de las cifras significativas del número* (Nota del N.º 128).

Así, por ej., el resto de la división de 4863 por 9, que es 3 en virtud de la igualdad $4863 = 9 \times 540 + 3$, es el mismo que el de la división de $4 + 8 + 6 + 3 = 21$ por 9.

Para hallar ese resto, prácticamente decimos: 4 y 8 son 12; de 12 resto 9 y me quedan 3; 3 y 6 son 9; 9 menos 9 es 0; 0 y 3 son 3; este último número es el resto que buscábamos. (Véase que para hallar el resto de la división por 9 de la suma de las cifras del número dado, hemos restado al dividendo, sucesivamente, el divisor 9; la última diferencia es el resto de la división).

135. Divisibilidad por 11. — La demostración de este criterio es análoga a la de la divisibilidad por 9. Se divide también en tres partes:

1.ª *Una cifra significativa cualquiera seguida de un número PAR de ceros, es igual a un múltiplo de* 11, *MAS el valor absoluto de dicha cifra.*

En efecto, tendremos, por ejemplo:

$$100 = 99 + 1 = 11 \times 9 + 1 = M\,11 + 1$$

$$10\,000 = 100 \times 100 = (M\,11 + 1) \times 100 = M'\,11 + 100 =$$
$$= M'\,11 + M\,11 + 1 = M''\,11 + 1$$

$$700 = 100 \times 7 = (M\,11 + 1) \times 7 = M'\,11 + 7$$

$$50\,000 = 10\,000 \times 5 = (M\,11 + 1) \times 5 = M'\,11 + 5$$

2.ª *Una cifra significativa cualquiera seguida de un número IMPAR de ceros, es igual a un múltiplo de* 11, *MENOS el valor absoluto de dicha cifra.*

Así, por ej., tendremos:

$$10 = 11 - 1$$

$$1\,000 = 100 \times 10 = (M\,11 + 1) \times 10 = M'\,11 + 10 =$$
$$= M'\,11 + 11 - 1 = M''\,11 - 1$$

$$40 = 10 \times 4 = (11 - 1) \times 4 = M\,11 - 4$$

$$3\,000 = 1\,000 \times 3 = (M\,11 - 1) \times 3 = M\,11 - 3$$

3.ª *Cualquier número es igual a un múltiplo de* 11, *más la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan el lugar par y la suma de làs que ocupan el lugar impar.*

Consideremos un número cualquiera, por ejemplo, 853 946; podemos descomponerlo así:

$$853\,946 = 800\,000 + 50\,000 + 3\,000 + 900 + 140 + 6 =$$
$$= (M\,11 - 8) + (M\,11 + 5) + (M\,11 - 3) +$$
$$+ (M\,11 + 9) + (M\,11 - 4) + 6 = M\,11 + M\,11 + M\,11 +$$
$$+ M\,11 + M\,11 + 5 + 9 + 6 - 8 - 3 - 4$$

Tendremos, pues:

$$853\,946 = M\,11 + [(5 + 9 + 6) - (8 + 3 + 4)]$$

Razonando como en la "Conclusión" del (N.º 133), llegaríamos al siguiente criterio:

Un número será divisible por 11 *cuando la diferencia entre la suma de las cifras de lugar par y la de las cifras de lugar impar sea cero,* 11 *o un múltiplo de* 11 (se efectúa la resta en el sentido que sea posible).

Así, por ej., el número 853946 no es divisible por 11, porque $(5 + 9 + 6) - (8 + 3 + 4) = 20 - 15 = 5$ no es 0, 11 ni múltiplo de 11.

El número 85624 es divisible por 11 porque

$$(8 + 6 + 4) - (5 + 2) = 18 - 7 = 11$$

Prueba por 9 de la multiplicación y división

136. Para cada una de las cuatro operaciones fundamentales, hemos visto cómo se efectúa la prueba; pero, para la multiplicación y división se prefiere, en la generalidad de los casos, la prueba por 9, que expondremos a continuación. (No damos la de la suma y resta, por no exigirlo el programa, dado su escaso interés práctico).

NOTA. — La prueba por 9 de las cuatro operaciones, no da la seguridad de que el resultado de la operación sea exacto, puesto que si el error cometido en la operación es un múltiplo de 9, la prueba resulta igual.

137. Multiplicación. — *La prueba por* 9 *de la multiplicación se efectúa hallando los restos por* 9 *de los factores. El producto de los dos números dados y el producto de los restos, divididos por* 9, *deben dar restos iguales.*

EJEMPLO:

473	El resto de 473 : 9 es	5
× 52	” ” ” 52 : 9 “	7
946	Producto,	35. El resto de 35 : 9 = 8
23 65		
24 596	El resto de 24 596 : 9 = 8	

En la práctica, resulta cómodo disponer los resultados de las divisiones por 9, en la forma como indicamos al lado.

$$\begin{array}{c|c} 5 & 7 \\ \hline 8 & 8 \end{array}$$

138 División. — *La prueba por 9 de la división se efectúa hallando los restos por 9 del divisor, del cociente y del resto, y al producto de los dos primeros se le agrega el tercero. La suma que se obtiene y el dividendo, divididos por 9, deben dar restos iguales.*

3 675	214	El resto de 214: 9 es	7
1 535	17	” ” ” 17: 9 “	8
37			—
			56 (producto)
		” ” ” 37: 9 “	1
			—
			57 (suma)

El resto de 3675: 9 es 3 ; el resto de 57: 9 es 3.

Como en la multiplicación, en la división también se omiten todas las indicaciones hechas para hallar los restos, escribiéndolos únicamente en un esquema análogo a aquél.

Nota. — Para recordar más fácilmente esta prueba, obsérvese que con los restos (de la división por 9), se efectúan las mismas operaciones que se tendrían que efectuar con los números enteros, para comprobar la operación mediante la otra prueba de la división (N.º 116).

NOTAS HISTORICAS

BLAS PASCAL
(1623-1662)

Los indios ya conocían la divisibilidad por 3 y por 9. La divisibilidad por 11 recién se descubrió varios siglos después (XVII y XVIII).

El matemático francés *Pascal* (siglo XVII) dió la regla para hallar los caracteres de divisibilidad por cualquier número.

Desde muy joven, Pascal se perfiló como un gran matemático; a la edad de 14 años ya era admitido en las sesiones de eminentes geómetras, de donde surgió la famosa Academia Francesa.

* * *

CAPITULO V

DIVISORES Y MULTIPLOS COMUNES

Números primos entre sí

139. *Un número puede tener varios divisores, o no tener ninguno, excepto sí mismo y la unidad.*

Así, por ej., el número 12 que tiene los divisores 1, 2, 3, 4, 6, 12, se llama **número compuesto**; mientras que el número 5, que *solamente* tiene como divisores 1 y 5, se llama **número simple** o **primo.**

140. Divisores comunes. — Un número se llama **divisor común de varios números dados,** cuando es *divisor* de cada uno de ellos. Los números 15 y 18 tienen como *divisor común* el número 3. Los números 24 y 180 tienen como divisores comunes, 2, 3, 4, 6, 12.

141. Definición. — **Dos o más números se llaman PRIMOS ENTRE SI cuando no admiten otro divisor común que la unidad.**

Así, por ej., son primos entre sí los números 15 y 16; también lo son 10, 21, 11.

Máximo común divisor

142. En el segundo de los ejemplos del (N.º 140), vimos que los divisores comunes de los números 24 y 180 son: 2, 3, 4, 6, 12. Observemos que el *mayor* es 12, que se llama *máximo común divisor* de los números 24 y 180 (se abrevia M. C. D.). Podremos establecer, pues, la siguiente

Definición. — **Se llama MAXIMO COMUN DIVISOR de dos o más números, al mayor de sus divisores comunes.**

Para expresar que el M. C. D. de dos números a y b es igual a c, escribimos: $D(a, b) = c$

Para el ejemplo anterior, tendremos: $D(24, 180) = 12$.

Determinación del M. C. D. por divisiones sucesivas — Su justificación

143. **M. C. D. de DOS números.** — Para justificar el método que emplearemos para hallar el M. C. D. de dos números, es necesario el conocimiento de las dos *propiedades* siguientes.

PROPIEDAD I. — **Si dos números son tales que el más pequeño divida al más grande, su M. C. D. es el número más pequeño.**

Esta propiedad resulta casi evidente. Así, por ej., sean los números 72 y 12; observemos primeramente que 12 es divisor de 72, y como es también divisor de sí mismo, es, pues, divisor *común* de 72 y 12.

Luego observemos que, cualquier número mayor que 12, no dividiendo a 12, ya no puede ser divisor común de 72 y 12.

NOTA. — Por razón análoga: *Si de varios números, el más pequeño divide a todos los otros, él es el M. C. D. de todos.*

144. PROPIEDAD II. — **Si dos números son tales que el más pequeño no divide al más grande, su M. C. D. es el mismo que el del número más pequeño y del resto de la división.**

Así, por ej., sean los números 210 y 45. El cociente de dividir 210 por 45 es 4 y el resto 30. Decimos que el M. C. D. de 210 y 45 es el mismo que el de 45 y 30.

En efecto, en virtud de la relación fundamental de la división (N.º 99), tenemos:

$$210 = 45 \times 4 + 30 \qquad [\alpha]$$

de donde

$$30 = 210 - 45 \times 4 \qquad [\beta]$$

Todo número que divida a 210 y a 45 divide también a 45 × 4, porque sabemos que *si un número divide a otro divide también a cualquier múltiplo de éste* (N.º 126). Pero dividiendo dicho número a los dos términos de la diferencia del segundo miembro de la [β] dividirá, pues, a la diferencia, o sea al número 30. (Nota del N.º 127).

Vemos, pues, que todos los divisores comunes del dividendo (210) y del divisor (45), son también divisores comunes del divisor (45) y del resto (30).

Inversamente, todo número que divida a 45 y a 30 divide también a 45 × 4 (N.º 126). Pero dividiendo dicho número a los dos sumandos del segundo miembro de la [α] dividirá también a la suma, o sea al número 210 (N.º 127).

Vemos, pues, que todos los divisores comunes del divisor (45) y del resto (30), son también divisores comunes del dividendo (210) y del divisor (45).

Como los dos pares de números (210 , 45) (45 , 30) tienen los mismos divisores comunes, tendrán también el mismo máximo común divisor.

Como el razonamiento sería análogo para cualquier par de números, resulta demostrada la propiedad.

145. Máximo común divisor de DOS números. — Propongámonos hallar, por ej., el M. C. D. de los números 210 y 45.

1.° Divido 210 por 45. Si la división resultara exacta, 45 sería el M. C. D. (N.º 144). Pero se obtiene el cociente 4 y resto 30; por consiguiente, el M. C. D. que buscamos es el mismo que el de 45 y 30 (N.º 145).

2.° Divido 45 por 30. Si la división resultara exacta, 30 sería el M. C. D. (N.º 144). Pero se obtiene el cociente 1 y resto 15; por consiguiente, el M. C. D. que buscamos es el mismo que el de 30 y 15 (N.º 145).

3.° Divido 30 por 15. Ahora la división resulta exacta; por consiguiente, 15 es el M. C. D. de 30 y 15, y por tanto, también de los números dados 210 y 45.

En la práctica, la operación se dispone como en el esquema siguiente:

	4	1	2
210	45	30	15
30	15	0	

D (210 , 45) = 15

Del proceso anterior se deduce la siguiente

Regla. — **Para hallar el M. C. D. de dos números, se divide el mayor por el menor; si la división resulta exacta, el menor es su M. C. D.; si la división resulta inexacta, se divide el número menor por el resto de la división, el primer resto por el segundo, el segundo por el tercero, y así sucesivamente hasta llegar a una división exacta; el divisor de esta última división es el M. C. D. de los dos números dados.**

146. Nota. — Como consecuencia de la definición de números primos entre sí, resulta:

Si el M. C. D. de dos números es igual a la unidad, los números son primos entre sí.

Ejemplo. — Los números 84 y 65 son primos entre sí, porque D (84 , 65) = 1.

	1	3	2	2	1	2
84	65	19	8	3	2	1
19	8	3	2	1	0	

147. M. C. D. de MAS de dos números. — Para justificar el procedimiento, es necesario el conocimiento de las cuatro *propiedades* siguientes.

Propiedad I. — **Si se multiplican dos números por un tercero, su M. C. D. resulta multiplicado por este tercer número.**

Volvamos al ej. del (N.º 145); vimos que D (210, 45) = 15. La propiedad expresa que, si multiplicamos los dos números dados por un número cualquiera, por ej., por n, tendremos: D $(210 \times n,\ 45 \times n) = 15 \times n$.

En efecto, observando el esquema correspondiente (N.º 182) de las divisiones sucesivas, vemos que el M. C. D. de 210 y 45 se obtuvo dividiendo

210 por 45 con resto 30
45 " 30 " " 15
30 " 15 " " 0

Pero en virtud de la propiedad (N.º 109), que expresa: *si se multiplican los dos términos de una división por un mismo número, el cociente no altera, pero el resto queda multiplicado por dicho número,* tendremos que el M. C. D. de $210 \times n$ y $45 \times n$ se obtiene dividiendo

$210 \times n$ por $45 \times n$ con resto $30 \times n$
$45 \times n$ " $30 \times n$ " " $15 \times n$
$30 \times n$ " $15 \times n$ " " 0

Como vemos, el M. C. D. de $210 \times n$ y $45 \times n$ es $15 \times n$, vale decir que es igual al de 210 y 45 multiplicado por n.

148. Propiedad II. — **Todo divisor común de dos números es divisor de su M. C. D.**

Vimos que D (210 , 45) = 15. Decimos que todo divisor de 210 y 45 es también divisor de 15.

En efecto, observando el esquema correspondiente del (N.° 145) y aplicando sucesivamente la Propiedad II (N.° 144), resulta que, todo número que divida a 210 y 45 divide también al resto de la división, es decir, a 30. El mismo número dividiendo a 45 y 30 divide al resto de su división, es decir a 15, que es el M. C. D. de 210 y 45.

149. Recíprocamente:

Todo divisor del M. C. D. de dos números, es divisor de aquellos dos números.

En efecto, volviendo al ejemplo numérico anterior, todo divisor de 15, es decir, del M. C. D. de 210 y 45, es también divisor de estos dos números, por ser ellos múltiplos de 15, y sabemos que *si un número divide a otro, divide también a cualquiera múltiplo de éste* (N.° 126).

150. Como *corolario* de la Propiedad II (N.° 148), tenemos:

Si dos números se dividen por un divisor común, su M. C. D. resulta dividido por dicho divisor.

Ejemplo. — D (210 , 45) = 15 ; si dividimos a 210 y 45 por 5 obtenemos 42 y 9 ; cuyo M. C. D. será entonces 15 : 5 = 3 ; es decir que tendremos D (42 , 9) = 3 .

151. Propiedad III. — **Si dos números se dividen por su M. C. D. los cocientes que se obtienen son números primos entre sí.**

En el ejemplo anterior, si dividimos 210 y 45 por su M. C. D., es decir por 15, obtendremos dos cocientes, 210 : 15 = 14 y 45 : 15 = 3, cuyo M. C. D. es, en virtud de la propiedad anterior, 15 : 15 = 1 ; pero *si el M. C. D. de dos números es la unidad, dichos números son primos entre sí* (N.° 146).

152. Propiedad IV. — **El M. C. D. de varios números es igual al M. C. D. del grupo de números que se obtiene reemplazando dos cualesquiera de ellos por su M. C. D.**

Para facilitar la demostración, consideremos un caso numérico: sean los cuatro números 210 , 45 , 90 , 175 .

El M. C. D. de dos cualesquiera de ellos, por ej., de 210 y 45 es 15. Pero sabemos que todo divisor común de 210 y 45 es divisor de 15 (N.° 148) ; por consiguiente, todo divisor común de los cuatro números dados 210 , 45 , 90 , 175 , es también divisor común del grupo de tres números 15 , 90 , 175 .

Recíprocamente: todo divisor de 15 , es divisor común de 210 y 45 (N.° 149) ; por consiguiente, todo divisor común de 15, 90 , 175 es también divisor común de 210 , 45 , 90 , 175 .

El grupo de cuatro números 210 , 45 , 90 , 175 , tiene los mismos divisores comunes que el grupo de tres números 15 , 90 , 175 ; por consiguiente, ambos grupos tendrán el mismo M. C. D.

153. De la propiedad anterior deducimos la siguiente

REGLA. — **Para hallar el M. C. D. de varios números, se halla primeramente el de dos cualesquiera de ellos; luego se halla el M. C. D. del número hallado y de uno de los restantes números dados, y así se continúa hasta considerar todos los números. El último M. C. D. hallado es el que buscábamos.**

En el ejemplo numérico tratado en el párrafo anterior, tendremos:

$$D\ (210\ ,\ 45\ ,\ 90\ ,\ 175) = 5$$

NOTA. — En virtud de la Propiedad V, se comprende fácilmente que las propiedades del M. C. D. de tres o más números son las mismas que las del M. C. D. de dos números.

Definición y propiedades del M. C. M.

154. Múltiplo común. — Consideremos, por ej., el número 12; es un múltiplo de 3, 4 y 6. El número 12 es, pues, un *múltiplo común* de estos tres números.

Un número se llama MULTIPLO COMUN de dos o más números, cuando es múltiplo de cada uno de ellos.

155. Mínimo común múltiplo. — Volviendo al ejemplo anterior, observemos que, además del número 12, también 24 es un múltiplo común de 3, 4 y 6; así como lo son también: 36, 48, ... etc. El número 12, por ser el *menor* de los múltiplos comunes, se le llama el *Mínimo común múltiplo* de los números 3, 4 y 6 (se abrevia M. C. M.). Podremos establecer, pues, la siguiente

DEFINICIÓN. — **Se llama MINIMO COMUN MULTIPLO de dos o más números, al menor de sus múltiplos comunes.**

Para expresar que el M. C. M. de los números a y b es igual a m, escribiremos: $M\ (a,\ b) = m$.

Para el ejemplo anterior, tendremos: $M\ (3\ ,\ 4\ ,\ 6) = 12$.

156. Propiedades del M. C. M.

Si m es el M. C. M. de dos números a y b, los productos

$$m \times 1\ ,\ m \times 2\ ,\ m \times 3\ ,\ m \times 4\ ,\ m \times 5,\ \ldots$$

de m por los números naturales, son los infinitos múltiplos comunes de a y b (y lo son también de m). Cualquier otro número que no forme parte de aquel conjunto de productos, no puede ser múltiplo común de a y b. Deducimos, pues, la siguiente

PROPIEDAD I. — **Un múltiplo común de dos o más números, es múltiplo de su M. C. M.**

157. PROPIEDAD II. — **Si un número es divisible por otro, su M. C. M. es el mayor de dichos números.**

Sean, por ejemplo, los números 36 y 12; el mayor, 36, es divisible por 12. Por consiguiente, 36 es su M. C. M., porque un número menor que 36 podrá ser múltiplo de 12, pero no de 36.

158. PROPIEDAD III. — **El M. C. M. de dos números es igual al producto de dichos números dividido por su M. C. D.**

Así, por ej., siendo D (45, 63) = 9, tendremos

$$M\,(45\,,\ 63) = (45 \times 63) : 9 = 315\,.$$

En general, sean a y b los dos números dados, d su M. C. D. y m su M. C. M. Demostraremos que $m = (a \times b) : d$.

En efecto, la división $(a \times b) : d$ puede efectuarse (N.° 106) de dos modos:

$$(a \times b) : d = a \times (b : d), \quad \text{o bien,} \quad (a \times b) : d = b \times (a : d)$$

El cociente $(a \times b) : d$ resulta, pues, múltiplo común de a y de b, y, en virtud del (N.° 157) será también múltiplo de su M. C. M., es decir, de m.

Por consiguiente, podremos escribir

$$(a \times b) : d = m \times k \qquad [\alpha]$$

siendo k un número entero.

Dividiendo los dos miembros de la igualdad $[\alpha]$ por a, tenemos

$$[(a \times b) : d] : a = (m \times k) : a$$

Aplicando al primer miembro sucesivamente los (N.^{os} 108 y 109), y al segundo el (N.° 106), resulta:

$$b : d = (m : a) \times k$$

Dividiendo los dos miembros de la $[\alpha]$ por b, y procediendo como antes, resulta:

$$a : d = (m : b) \times k$$

Estas dos últimas igualdades nos muestran que los cocientes $(b : d)$ y $(a : d)$ tienen un factor común k; pero dichos cocientes *tienen que ser primos entre sí* (N.° 151); por consiguiente, tendremos que tener $k = 1$ (N.° 141). La igualdad $[\alpha]$ se transforma entonces en la siguiente

$$(a \times b) : d = m$$

que constituye la tesis que nos proponíamos demostrar.

159. Como *corolario* de la propiedad anterior, tenemos: *El M. C. M. de dos números primos entre sí, es igual a su producto.* (Puesto que $d = 1$).

160. Propiedad IV. — **Si se multiplican dos números por un tercero, su M. C. M. resulta multiplicado por ese tercer número.**

En efecto, con las notaciones de las propiedades anteriores, tenemos

$$(a \times b) : d = m .$$

Multiplicando los números dados a y b por un mismo número n, en virtud de la Propiedad I (N.° 147), tendremos:

$$\mathrm{D}\ (a \times n \cdot b \times n) = d \times n .$$

Por consiguiente, el M. C. M. de $a \times n$ y $b \times n$ es, en virtud de la propiedad anterior:

$$\mathrm{M}\ (a \times n , b \times n) = (a \times n \times b \times n) : d \times n = (a \times n \times b) : d =$$
$$= [(a \times b) : d]\ n = m \times n .$$

161. Propiedad V. — **Si se dividen dos números por un divisor común, su M. C. M. resulta dividido por dicho divisor.**

Como ejercicio, dejamos para el estudiante esta demostración que realizará en forma análoga a la anterior; aplicará el (N.° 150).

162. Propiedad VI. — **El M. C. M. de más de dos números, es igual al M. C. M. de dos de ellos y de los restantes números.**

Sean a, b, c, d, los números dados y m el M. C. M. de a y b. En virtud de la propiedad del (N.° 156) sabemos que, todo múltiplo común de a y de b, es múltiplo de m; por consiguiente, todo múltiplo común de a, b, c, d, será también múltiplo común de m, c, d.

Recíprocamente, todo múltiplo de m, es múltiplo común de a y de b, y, por consiguiente, todo múltiplo común de m, c, d, es también múltiplo común de a, b, c, d.

En resumen, los conjuntos de números a, b, c, d, y m, c, d, que tienen los mismos múltiplos comunes, tendrán, pues, el mismo M. C. M.

La propiedad anterior justifica la siguiente

Regla. — *Para calcular el M. C. M. de tres o más números, se halla el de dos cualesquiera de ellos; luego, el M. C. M. del número hallado y de un tercero de los números dados, y así se continúa hasta agotar los números dados. El último M. C. M. hallado es el M. C. M. de los números dados.*

Las propiedades de M. C. M. de más de dos números, son las mismas que las del M. C. M. de dos números.

CAPITULO VI

NUMEROS PRIMOS

Divisores primos

163. Definiciones. — Al principio del Capítulo anterior (N.° 163), vimos que, un número puede tener *varios* divisores, por ej., el número 12 tiene como divisores: 1, 2, 3, ..., 12; mientras que otros *sólo* tienen como divisores sí mismos y la unidad, por ej., el número 5, que cuyos únicos divisores son 1 y 5.

Se llama NUMERO PRIMO el número entero que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad.

En los otros casos, se llama **NUMERO COMPUESTO.**

Por ej. son *primos* los números 2, 3, 5, 7, 11, ..., 97, ...; son *compuestos*: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, ..., 36, ...

NOTA. — Excluiremos à la unidad de la sucesión de números primos, por motivo de que algunas propiedades de dichos números no se cumplirían si se la considerara entre los números primos.

164. Números primos menores que 100. — Conviene que el estudiante *recuerde* los números primos menores que 100; ellos son:

1, 2, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

165. PROPIEDAD I. — **Si un número no es primo, el más pequeño de sus divisores es un número primo.**

Así, por ej., 45 tiene por divisores: 3, 5, 9, 15 y 45; vemos que el más pequeño de estos divisores, o sea 3, es un número primo.

En general, llamemos N al número dado; no siendo éste un número primo, admite por definición uno o más divisores distintos de sí mismo y de la unidad. Si llamamos d *al más pequeño* de esos divisores, demostraremos que d es *primo*.

En efecto, si d no fuera primo, admitiría un divisor d' menor que d y mayor que 1, resultando entonces que el número d' sería también divisor de N, en virtud de la conocida propiedad de que, si un número divide a otro divide también a cualquiera de sus múltiplos (N.º 126); en este caso N tendría, pues, un divisor menor que d, lo que es imposible, desde que habíamos supuesto que d era el más pequeño de los divisores de N. No admitiendo el número d otro divisor más que sí mismo y la unidad es un número primo, y por consiguiente resulta demostrada la propiedad.

166. PROPIEDAD II. — **Si un número no es primo, admite como divisor un número primo, cuyo cuadrado no supera aquel número.**

Así por ej., el número 3 es el más pequeño de los divisores primos de 15; por consiguiente, $3^2 = 9$ no supera a 15. El número 7 es el único divisor primo de 49; por consiguiente $7^2 = 49$ no supera a 49, sino que lo iguala.

Sea N un número no primo, y d el más pequeño de sus divisores que, como sabemos, es un número primo (N.º 165). Decimos que d^2 tiene que ser menor, o a lo sumo igual a N, es decir que

$$d^2 \leq N$$

En efecto, llamando c al cociente de dividir N por d, tendremos:

$$N : d = c \text{ , de donde, } N = c.d$$

y de esta última tenemos también, $N : c = d$, la que significa que c es un divisor de N; pero habíamos supuesto que d era el más pequeño de los divisores de N, por consiguiente tendremos:

$$d < c$$

Multiplicando los dos miembros por d, resulta:

$$d.d < c.d \text{ , o sea , } d^2 < N$$

Como **corolario** de la propiedad anterior, tenemos:

Si un número no admite ningún divisor primo cuyo cuadrado no lo supere, aquel número es primo.

Forma de reconocer si un número es primo

167. Si el número verifica alguno de los caracteres de divisibilidad de los números estudiados en el capítulo IV, podemos contestar que el número es compuesto. De lo contrario, parece que tendríamos que efectuar las divisiones por todos los números menores que él. Pero no es así, porque esta investigación se abrevia aplicando la Propiedad anterior (N.º 166). Según ella, tendremos la siguiente

REGLA. — *Para reconocer si un número es primo, basta investigar su divisibilidad por cualquiera de los números primos cuyos cuadrados no superen al número dado; si no es divisible por ninguno de ellos, afirmamos que aquel número es primo.*

Así, por ej., el número 269 no es divisible por ninguno de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13. (El cuadrado de 13 es menor que 269). El número primo siguiente a 13 es 17. Pero siendo $17^2 = 289$ mayor que 269, podemos afirmar, pues, que 269 es un número primo (N.º 166).

Para reconocer que 17^2 es mayor que 269, se puede observar que 17 está contenido en 269, menos de 17 veces, o sea que el cociente de 269 por 17 es menor que 17. Según esto, para *reconocer si un número es primo* resulta más práctico emplear esta otra

REGLA. — **Para reconocer si un número es primo o compuesto, se divide por los números primos sucesivos, 2, 3, 5, 7, 11, etc.; si se llega a un cociente igual o menor que el divisor sin haber obtenido ninguna división exacta, el número es primo; de lo contrario, compuesto.**

EJEMPLOS. — Propongámonos averiguar si 1037 es primo o compuesto. No es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5. Dividiéndolo por 7, encontramos el resto 1. No es tampoco divisible por 11, ni por 13. Finalmente, 17 da una división exacta con 61 como cociente. Tenemos, pues, $1037 = 17 \times 61$. El número 1037 es, pues, compuesto.

Sea ahora el número 1059. No es divisible por 2, 3, 5; 7 da el resto 3; no es divisible tampoco por 11, 13, 17, 19, 23, 29; por 31 da el cociente 34 y resto 5; por 37 da el cociente 28 y resto 23; siendo este último cociente menor que el divisor, podemos afirmar que el número 1059 es primo.

Tabla de números primos

168. Criba de Eratóstenes. — Propongámonos formar una *tabla de números primos* menores que cierto número, por ej., que 100. Se aplica, para ello, la siguiente regla, llamada *Criba de Eratóstenes*: (*)

TABLA DE NUMEROS PRIMOS DE 1 A 1000

2	43	103	173	241	317	401	479	571	647	739	827	919
3	47	107	179	251	331	409	487	577	653	743	829	929
5	53	109	181	257	337	419	491	587	659	751	839	937
7	59	113	191	263	347	421	499	593	661	757	853	941
11	61	127	193	269	349	431	503	599	673	761	857	947
13	67	131	197	271	353	433	509	601	677	769	859	953
17	71	137	199	277	359	439	521	607	683	773	863	967
19	73	139	211	281	367	443	523	613	691	787	877	971
23	79	149	223	283	373	449	541	617	701	797	881	977
29	83	151	227	293	379	457	547	619	709	809	883	983
31	89	157	229	307	383	461	557	631	719	811	887	991
37	97	163	233	311	389	463	563	641	727	821	907	997
41	101	167	239	313	397	467	569	643	733	823	911	—

Se escribe, empezando por 2, *la sucesión natural de los números, suprimiendo los números pares mayores que* 2 (puesto que éstos, siendo divisibles por 2, no son primos).

De los números restantes, el que sigue a 2 *es* 3; *se suprimen luego todos los números múltiplos de* 3, *excluyendo el* 3.

(Para ello se tachan los números contando de *tres en tres,* a partir de $3^2 = 9$, puesto que los múltiplos de 3 menores que 9 ya habían sido suprimidos).

(*) *Eratóstenes,* célebre filósofo y matemático griego del siglo III a. J. C. Se le atribuye el empleo de un procedimiento análogo al que usamos actualmente para la construcción de una tabla de números primos, pero grabando en una placa de cobre los números y agujereando los lugares de los números compuestos; después de esta operación, la placa resultó una verdadera criba.

De los números restantes, el que queda sin suprimir después de 3 es el 5; *se suprimen luego todos los números múltiplos de* 5, *excluyendo el* 5 (se empieza suprimiendo $5^2 = 25$, puesto que los múltiplos de 5, menores que 25, ya habían sido suprimidos en las operaciones anteriores).

Procediendo análogamente, se suprimen los múltiplos de 7, *excluyendo el* 7, *y empezando la supresión a partir de* $7^2 = 49$.

Después de la operación anterior, el primer múltiplo de 11 *que quedaría, es* $11^2 = 121$, *puesto que mediante las operaciones anteriores, resultan suprimidos todos los múltiplos de* 11 *menores que* 121. *Pero como* 121 *está fuera del límite de la tabla que deseamos construir, la operación resulta, pues, terminada.*

Los números primos menores que 100, figuran en las dos primeras columnas de la tabla anterior, son los 25 primeros números primos que, como ya lo indicamos en el (N.° 164), conviene recuerde el estudiante.

La sucesión de los números primos

169. Propiedad. — **La sucesión de números primos es ilimitada.**

Equivale decir que, por grande que sea un número primo, existe siempre otro mayor que él.

Por ser ilimitada la sucesión natural de los números (N.° 3), nos induciría a admitir que también es ilimitada la sucesión de números primos, en virtud del procedimiento empleado en el párrafo anterior para su obtención. No obstante, daremos su demostración rigurosa.

En efecto, llamemos p a un número primo cualquiera, que podemos suponer tan grande como queramos.

Efectuemos el producto de *todos* los números primos hasta p; agreguemos a este producto el número 1, y llamemos S a la suma. Tendremos la igualdad:

$$(2.3.5.7\ldots\ p) + 1 = S$$

Si S resultara un número primo, siendo mayor que p, ya quedaría demostrada la propiedad.

Si S no es primo, el más pequeño de sus divisores, que llamamos d, es un número primo (N.° 177 c). Este número d no puede ser uno de los encerrados dentro del paréntesis, porque si lo fuera, sería un factor del producto $(2.3.5.7\ldots\ p)$, y por tanto dividiría a este producto; pero entonces dividiendo a la suma S y al primero de sus dos sumandos $(2.3.5.7\ldots\ p)$, tendría que dividir también

(N.º 155) al otro sumando, o sea al número 1, lo que es absurdo. No siendo el número primo d uno de los encerrados dentro paréntesis es, por consiguiente, mayor que p.

Resulta demostrado, pues, que la serie de números primos no tiene límite superior.

Descomposición de un número en sus factores primos

170. Definición. — En el capítulo II referente a la multiplicación (N.º 64), vimos que se llama *producto de varios factores* al número que se obtiene multiplicando los dos primeros factores, el resultado por el tercero, el nuevo resultado por el cuarto, etc.

Así, por ej., $2 \times 5 \times 7 = 10 \times 7 = 70$; el primer miembro, $2 \times 5 \times 7$, es el *producto indicado*, y el último, 70, es el producto *efectuado*.

171. PROPIEDAD I. — **Si un número no es primo, es un producto de factores primos.**

Así, por ej., 70 es el producto de los factores primos 2, 5, 7, o sea: $70 = 2 \times 5 \times 7$.

En general, sea N un número no primo; admitirá como divisor un número primo a. Llamando q al cociente, tendremos:

$$N : a = q, \quad \text{de donde,} \quad N = a \times q. \qquad [\alpha]$$

Si q es un número primo, la propiedad ya quedaría demostrada, porque N es el producto de dos números primos a y q.

Si q no es primo, admite como divisor un número primo b, y llamando q' al cociente, tendremos:

$$q : b = q', \quad \text{de donde,} \quad q = b \times q'.$$

Sustituyendo este último valor de q en la $[\alpha]$, resulta:

$$N = a \times b \times q' \qquad [6]$$

Si q' es un número primo, la propiedad ya quedaría demostrada; de lo contrario, procediendo como antes, llegaríamos a la igualdad:

$$N = a \times b \times c \times q'' \qquad [\mu]$$

en la que a, b, c, son números primos y q'' es el cociente de la división de q' por c. Si q'' no fuera primo, continuaríamos razonando como antes, obteniendo otras igualdades de forma análoga a las $[\alpha]$, $[6]$, $[\mu]$.

Pero, de las divisiones sucesivas efectuadas, vemos que q es menor que N, que q' es menor que q, q'' menor que q' y así sucesivamente; es decir, que los cocientes sucesivos q, q', q'', ... van siempre disminuyendo, y como no hay sino un número limitado de números menores que uno dado, también se limitará el número de divisiones sucesivas. Se llegará, pues, a un último cociente que será primo, y entonces N resultará un producto de factores primos.

Esta propiedad justifica la descomposición de un número en sus factores primos, que trataremos a continuación.

172. *La DESCOMPOSICION DE UN NUMERO EN SUS FACTORES PRIMOS significa hallar los números primos que multiplicados entre sí, dan por resultado el número dado.*

Sea, por ej., el número 300 que nos proponemos descomponer en factores primos. El menor número primo que lo divide es 2, y el cociente es 150; tendremos, pues: $300 = 2 \times 150$. Este número 150 admite también el menor divisor 2, y el cociente es 75; tendremos, pues: $300 = 2 \times 2 \times 75$. Este número 75 admite el menor divisor que le sigue a 2, que es 3, y el cociente es 25; tendremos, pues, $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 25$. El número 25 ya no es divisible por 3, pero sí por 5, y el cociente es 5; tendremos, pues

$$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

Los factores primos del número 300 son: 2, 2, 3, 5, 5.

El proceso anterior, aplicable a cualquier número compuesto, nos conduce a la siguiente

REGLA. — **Para descomponer un número en sus factores primos, se empieza ensayando si es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, ..., hasta que resulte una división exacta, obteniéndose así el menor divisor primo del número; el cociente obtenido se divide a su vez por su menor divisor primo, y así se opera sucesivamente con cada cociente, hasta llegar a otro igual a 1.**

EJEMPLOS. — Descompongamos los números 300 y 4410.

En la práctica, la operación se dispone así:

$$\text{cocientes sucesivos}\left\{\begin{array}{r|l}300 & 2\\ 150 & 2\\ 75 & 3\\ 25 & 5\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}\right\}\text{divisores primos} \qquad \begin{array}{r|l}4410 & 2\\ 2205 & 3\\ 735 & 3\\ 245 & 5\\ 49 & 7\\ 7 & 7\\ 1 & \end{array}$$

Tendremos, pues:

$$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

$$4410 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$$

173. NOTA. — Obsérvese que, mediante la aplicación de la regla anterior, obtenemos los factores primos de un número en forma ordenada, de menor a mayor. Pero no es indispensable seguir el orden indicado en las divisiones sucesivas; en ciertos casos conviene alterar dicho orden, que el resultado es el mismo (nota del N.° 108).

Así, por ej., tendremos:

$$2400 = 24 \times 100 = 8 \times 3 \times 10^2 = 2^3 \times 3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^5 \times 3 \times 5^2$$

Cualquiera que sea el orden que se siga, el resultado es siempre el mismo.

Como ejercicio, descompóngase el número 2400 siguiendo otro orden en las divisiones sucesivas, y constátese la igualdad de resultados. Hágase lo mismo con otros números compuestos.

En el párrafo siguiente demostraremos esta propiedad de los números compuestos.

174. PROPIEDAD II. — **La descomposición de un número en sus factores primos sólo es posible de una manera.**

Supongamos que un número N pueda descomponerse de dos maneras; por ej.,

$$N = a \times b \times c \text{ , y } N = a' \times b' \times c'$$

siendo a, b, c, a', b', c' todos factores primos. Tendremos:

$$a \times b \times c = a' \times b' \times c'$$

Como el factor a divide al primer miembro de la igualdad anterior, debe dividir también al segundo miembro, es decir, que debe dividir por lo menos a uno de los factores a', b', c'; pero como estos últimos son números primos, el número a no podrá dividir a ninguno de ellos sin serle igual, es decir que $a = a'$.

Simplificando la igualdad anterior, tendremos:

$$b \times c = b' \times c'$$

Razonando como antes en esta última igualdad, obtendríamos $b = b'$; análogamente, llegaríamos a $c = c'$. El razonamiento sería el mismo cualquiera que fuera el número de factores primos supuestos para N.

Las dos descomposiciones $N = a.b.c$ y $N = a'.b'.c'$ son, pues, idénticas.

Propiedades

175. PROPIEDAD I. — **Si un número divide al producto de dos factores, y es primo con uno de ellos, divide al otro factor.**

Así, por ej., 3 divide a $48 = 8 \times 6$, y es primo con 8; divide, pues, al otro factor 6.

En general, sea n un número que divide al producto $a \times b$, y es *primo* con a; demostraremos que n debe dividir al otro factor b.

En efecto, por ser n y a primos entre sí, tenemos

$$D(n, a) = 1$$

Pero, por la Propiedad I del (N.° 147), resulta

$$D(n \times b, a \times b) = 1 \times b = b$$

El número n divide al producto $n \times b$ (por ser factor del mismo), y divide también al producto $a \times b$ (por hipótesis); por consiguiente, divide al número b, que es su M. C. D. (N.° 182 c).

176. Propiedad II. — **Si un número primo divide al producto de varios factores, divide a uno de los factores.**

Esta propiedad es una consecuencia inmediata del (N.° 125).

Así, por ej., 3 divide a $420 = 4 \times 7 \times 15$; el número 3 divide también a 15, que es uno de los factores de 420.

177. Corolario. — **Si un número primo divide a una potencia de un número, divide a dicho número.**

Demostraremos la propiedad para los casos de dos o más factores:

1.° Si se trata del producto de *dos* factores $a \times b$, y un *número primo* n divide a dicho producto, dividirá también, por lo menos, a uno de los dos factores, en virtud de la propiedad anterior.

2.° Si se trata de un producto de *tres* factores, $a \times b \times c$, y un *número primo* n divide a dicho producto, dividirá también, por lo menos, a uno de los tres factores. En efecto, aquel producto puede escribirse así: $a \times (b \times c)$, en virtud de la propiedad asociativa de la multiplicación (N.° 68); si n no divide al primer factor a, debe dividir al producto $(b \times c)$, estando, pues, en el caso anterior.

Análogamente se demostraría para mayor número de factores.

178. Propiedad III. — **Si dos números son primos entre sí, lo son también dos de sus potencias con exponentes cualesquiera.**

Sean a y b dos números *primos entre sí;* demostraremos que dos potencias cualesquiera, a^m, b^n, de dichos números, son también primos entre sí

En efecto, si no lo fueran, admitirían un divisor común primo p, el que dividiendo a a^m dividiría también al número a (N.° 177), y dividiendo a b^n dividiría al número b; pero entonces los dos números a y b admitirían un divisor común, lo que es absurdo, por ser contrario a la hipótesis.

Determinación del M. C. D. mediante la descomposición en factores primos

179. Divisores comunes. — Para formar *divisores* de un número, se le descompone en sus factores primos (N.º 170), y luego se multiplican algunos de dichos factores con exponente que no exceda del que tiene cada factor en el número.

Así, por ej., serán divisores de $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, los números:

$$2^2 \times 5 = 20;\ 2^3 \times 5 = 40;\ 2 \times 3 = 6;\ 3 \times 5 = 15;$$

$$2^2 \times 3 \times 5 = 60;\ \text{etc., etc.}$$

Para hallar los *divisores comunes* a varios números, es decir, los divisores *de todos ellos* al mismo tiempo, se formarán los productos de los factores primos contenidos en todos ellos (los factores comunes), y afectando cada factor de un exponente que no exceda al que tiene en ninguno de los números dados.

EJEMPLO. — Para hallar los divisores comunes de los números $24 = 2^3 \times 3$ y $180 = 3^2 \times 2^2 \times 5$, hallamos primeramente los divisores primos comunes, que son 2 y 3, y los elevamos a exponentes que no excedan de 2 y 1, respectivamente.

Los divisores comunes serán, pues: 2; $2^2 = 4$; 3; $2 \times 3 = 6$; $2^2 \times 3 = 12$.

Prescindiremos del divisor común 1, que lo es de todos los números.

180. Máximo común divisor. — En el ejemplo anterior hallamos que los divisores comunes de los números 24 y 180 eran: 2, 3, 4, 6, 12. Observemos que el *mayor* es 12; este número es, pues, el M. C. D. (N.º 142).

Para hallar el M. C. D. de dos o más números, no es necesario hallar todos los divisores comunes de dichos números (operación que generalmente resulta algo larga), para luego elegir el mayor; se halla **directamente mediante la** siguiente

REGLA. — **Para hallar el M. C. D. de varios números descompuestos en sus factores primos, se forma el producto de los factores primos comunes, tomados una sola vez, con el menor de los exponentes que tenga en los números dados.**

En efecto: no podría obtenerse un divisor común mayor, porque tendría que tener los mismos factores primos con exponentes mayores, o bien, tendría que tener un nuevo factor primo, lo que es imposible, porque entonces, en cualquiera de los dos casos, ya no sería divisor de alguno de los números dados.

A continuación presentamos dos ejemplos de cálculo del M. C. D. de dos grupos de números:

$$\left.\begin{array}{r}126 = 2.3^2.7 \\ 180 = 2^2.3^2.5\end{array}\right\} \text{M. C. D.} = 2.3^2 = 18$$

$$\left.\begin{array}{r}400 = 2^4.5^2 \\ 1\,400 = 2^3.5^2.7 \\ 520 = 2^3.5.13\end{array}\right\} \text{M. C. D.} = 2^3.5 = 40$$

181. Téngase presente (N.^{os} 143 y 152) que:

Si un número de un grupo es divisor de los otros, él es también el M. C. D. de los números del grupo.

EJEMPLOS. — D (10, 20) = 10, porque 10 es divisor de 20. D (12, 60, 84) = 12, porque 12 es divisor de los otros dos números.

182. Múltiplos comunes. — En el (N.º 154) indicamos qué se entendía por *múltiplo común* de dos o más números.

Obsérvese que *el producto de dos números es múltiplo de ambos.*

Así, por ej., para hallar los múltiplos de 7 basta multiplicar este número por los enteros sucesivos 1, 2, 3, 4, ..., obteniendo dichos múltiplos: 7, 14, 21, 28, ...

Obsérvese también que, para que un número sea *múltiplo de otro,* basta que contenga los factores primos de este último con exponentes, respectivamente, iguales o mayores. Así, por ej., $2^5.3^4.7$ es múltiplo de $2^3.3^4$.

Para hallar *múltiplos comunes* de varios números, se formarán los productos de los factores primos comunes y no comunes, y afectando cada factor de un exponente que no sea inferior al que tiene en ninguno de los números dados.

Se comprende fácilmente que, así como un número tiene infinidad de múltiplos, un grupo de números tiene también una infinidad de múltiplos comunes.

EJEMPLO. — Para hallar múltiplos comunes de $24 = 2^3 \times 3$ y de $180 = 3^2 \times 2^2 \times 5$, hallamos primeramente todos los divisores primos, que son 2, 3, 5, y los elevamos a exponentes que no sean inferiores a 3, 2, 1, respectivamente. Múltiplos comunes serán, pues:

$$2^3 \times 3^2 \times 5 = 360; \; 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720; \; 2^3 \times 3^3 \times 5 = 1080;$$
$$2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 1800; \text{ etc., etc.}$$

183. Mínimo común múltiplo. — En el ejemplo anterior hallamos los primeros múltiplos comunes de los números 24 y 180, encontrando que eran: 360, 720, 1080, 1800, etc., etc. Observemos que el *menor* es 360; este número es, pues, el M. C. M. (N.° 155).

En la práctica no se procede así para hallar el M. C. M. de dos o más números, sino que se aplica la siguiente

REGLA. — **Para hallar el M. C. M. de varios números descompuestos en sus factores primos, se forma el producto de los factores primos comunes y no comunes, tomados una sola vez con su mayor exponente.**

En efecto: no podría obtenerse un múltiplo común menor, porque tendríamos que suprimir algún factor primo, o bien, tendríamos que disminuir algún exponente; pero entonces dejaría de ser múltiplo del número o números de que procede dicho factor o exponente.

Así, por ej., sean los números 120, 132, 1350.

$120 = 2^3.3.5$; $132 = 2^2.3.11$; $1350 = 2.3^3.5^2$.

$$M\ (120,\ 132,\ 1350) = 2^3.3^3.5^2.11 = 59400$$

Cálculos mentales

184. M. C. D. y M. C. M. de números pequeños. — En estos casos conviene acostumbrarse a descomponer los números dados en factores primos, *mentalmente*, y luego determinar el M. C. D. o el M. C. M. mediante las reglas respectivas (N.os 180, 183).

Así, por ej., para los números 10 y 42 tendremos: $10 = 2 \times 5$; $42 = 7 \times 3 \times 2$. Por consiguiente,

$D\ (10\ ,\ 42) = 2$; $M\ (10\ ,\ 42) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$.

185. Cálculo rápido del M. C. D. — El procedimiento establecido por la regla del (N.° 180) para calcular el **MAXIMO COMUN DIVISOR** de varios números, se puede abreviar *buscando solamente los factores primos comunes a los números dados*, como se indica en el esquema siguiente (los números dados son los mismos del segundo ejemplo del (N.° 180), o sea: 400 , 1 400 , 520 .

2	400	1400	520
2	200	700	260
2	100	350	130
5	50	175	65
	10	35	13

Los factores primos comunes se encuentran a la izquierda de la línea; tendremos, pues:

$$D\ (400\ ,\ 1400\ ,\ 520) = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$$

186. Cálculo rápido del M. C. M. — Téngase presente que, como consecuencia de la definición de números primos entre sí, y de la Propiedad del (N.º 158), tenemos:

El M. C. M. de dos números primos entre sí es su producto.

Así, por ej., tendremos:
$M(35, 6) = 35 \times 6 = 222$; $M(8, 15, 11) = 8 \times 15 \times 11 = 1320$.

Téngase presente, también, que:

a) *Si un número de un grupo es múltiplo de los otros, él es también el M. C. M. de los números del grupo.*

EJEMPLOS. — $M(48, 12) = 48$, porque 48 es múltiplo de 12; $M(45, 15, 9) = 45$, porque 45, es múltiplo de los otros dos números.

b) *En la investigación del M. C. M. de varios números, pueden suprimirse aquellos que sean* **divisores** *de uno cualquiera de los números dados.*

Así, por ej., si nos proponemos hallar el $M(48, 12, 36, 9)$ tendremos: $M(48, 12) = 48$, y $M(36, 9) = 36$, en virtud de la propiedad anterior (*b*). Por consiguiente, se hallará solamente el $M(48, 36)$, que es 144. Tendremos, pues:

$$M(48, 12, 36, 9) = M(48, 36) = 144$$

NOTAS HISTORICAS

La teoría de los números primos, así como la demostración de que la serie de números primos es ilimitada, ya se encontraba en los famosos ''Elementos'' de *Euclides,* obra del célebre matemático griego del siglo III a J. C.

Las primeras tablas de números primos fueron publicadas por *Kruger*. Las tablas más difundidas son las de *Chernac* y de *Burkhardt,* llegando las últimas hasta el número 3 035 000.

Existen tablas de números primos hasta 9 millones.

El número primo más grande que se conoce es:

$$2^{61} - 1 = 2\ 305\ 843\ 009\ 213\ 693\ 951$$

* * *

CAPITULO VII

FRACCIONES

Definiciones

187. Concepto de fracción. — Una hoja de papel, un montón de arena, una barra de hierro, etc., son magnitudes que se pueden dividir o imaginar divididas en tantas *partes iguales* como queramos.

Si una magnitud se divide en dos partes iguales, cada parte es *la mitad* o *un medio* de la magnitud; si se divide en tres partes iguales, cada parte es *un tercio* de la magnitud; si se divide en cuatro ..., diez, catorce ..., mil ... partes iguales, cada parte es *un cuarto, un décimo, un catorceavo, un milésimo,* etc., de la magnitud.

Las frases *un medio, un tercio, un cuarto, un décimo, un catorceavo, un milésimo,* etc., se indican, respectivamente, con los símbolos

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10} \dots \frac{1}{14} \dots \frac{1}{1000} \dots$$

que se llaman *unidades fraccionarias.* La unidad fraccionaria $\frac{1}{5}$ indica que se considera la *quinta parte de la unidad entera;* $\frac{1}{4}$ indica que se *considera la cuarta parte de la unidad entera.* Por comodidad tipográfica, dichas unidades se indican también así: 1/5, 1/4, o bien $^1/_5$, ¼.

Los números 5, 4, ... indican en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad, y se llaman *denominadores* de las unidades fraccionarias.

188. Es evidente que la *cuarta parte* de una manzana es mayor que la *sexta parte* de la misma manzana, es decir, $1/4 > 1/6$.

También *medio peso* ($ 0.50) es mayor que un *quinto de peso* ($ 0.20), es decir, $1/2 > 1/5$.

En general, se comprende fácilmente que, *cuanto mayor sea el número de partes en que se divide una misma magni-*

tud, tanto menor será cada una de estas partes; tendremos, pues, que

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \ldots > \frac{1}{1000} > \ldots\ ;$$

es decir: **de varias unidades fraccionarias, es mayor la que tiene menor denominador.**

189. Si una magnitud se divide, por ej., *en 4 partes iguales,* tres de éstas forman *tres veces un cuarto* de la magnitud; si se divide *en 7 partes iguales,* cinco de estas partes forman *cinco veces un séptimo* de la magnitud; etc.

En lugar de la frase *tres veces un cuarto,* decimos más brevemente *tres cuartos,* que se indica así: $\frac{3}{4}$, o 3/4, o ¾. Análogamente decimos *cinco séptimos,* etc.

Los números 0, 1, 2, 3, ... se pueden indicar también con los símbolos

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \ldots$$

que se leen: *cero unidades, una unidad, dos unidades, tres unidades,* ...

190. Las expresiones

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1}\ \ldots\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2}\ \ldots\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{4},\ \ldots\ \frac{9}{10},\ \frac{10}{10},\ \frac{11}{10}\ \ldots$$

se llaman **fracciones o números racionales.** (*)

Las expresiones anteriores se llaman también **quebrados,** o **fracciones ordinarias** (esta última denominación, para distinguirlas de las ''fracciones decimales'' que se estudiarán en el próximo curso).

Nótese, pues, que *los números racionales son el conjunto de los números enteros y fraccionarios.*

(*) Consideremos un conjunto de manzanas iguales que dividimos cada una en *cuartos;* supongamos que reunimos un cierto número de estos cuartos; por ej., 15. Decimos entonces que hemos contado 15 cuartos de manzana, y escribimos así: $^{15}/_{4}$.

Nótese que, así como un número entero sirve para contar las unidades de un conjunto (N.º 2), también una fracción desempeña papel análogo; el conjunto que cuenta está formado por partes iguales de una magnitud (o de magnitudes iguales). Por esta razón es que, una fracción se considera como un ''número'', y se le llama *número racional.*

En la fracción $\frac{5}{7}$, los dos números 5 y 7 que la forman, se llaman **términos de la fracción**; el número 7 se llama **denominador,** porque *denomina* la fracción e indica en *cuántas partes iguales se dividió una magnitud o puede imaginarse dividida;* el 5 se llama **numerador,** porque *numera* las partes que se consideran.

En general, diremos, pues, que:

Una fracción es un símbolo con el cual se expresa que una magnitud se ha dividido (o que se piensa dividir) en cierto número de partes iguales y que se han reunido algunas de estas partes.

Así, por ej., la fracción $^4/_9$ significa el conjunto de cuatro unidades fraccionarias iguales a $^1/_9$, o sea

$$(^1/_9 + {}^1/_9 + {}^1/_9 + {}^1/_9).$$

Son fracciones de la *misma especie* las que tienen igual denominador. Así, por ej., lo son: $^3/_7$, $^2/_7$, $^8/_7$, etc.

191. Equivalencia entre la raya de quebrado (—) y el signo de división (:). — *Una fracción es igual al cociente de su numerador por su denominador.*

Sea, por ej., la fracción $^4/_9$; decimos que $^4/_9 = 4:9$.

En efecto: por la definición de fracción tendremos

$$^4/_9 = {}^1/_9 + {}^1/_9 + {}^1/_9 + {}^1/_9$$

Pero siendo $^1/_9$ una de las nueve partes en que dividimos a la unidad, expresa (N.° 85) el cociente de 1 por 9; por consiguiente podremos escribir:

$$^4/_9 = (1:9) + (1:9) + (1:9) + (1:9)$$

Pero dividir separadamente cuatro unidades por 9 y sumar los cocientes, equivale (N.° 91), a dividir por 9 la suma de las cuatro unidades. Tendremos, pues:

$$^4/_9 = (1 + 1 + 1 + 1) : 9 = 4:9$$

La fracción, por ej., $^4/_9$ se lee también así: 4 *dividido* 9; 4 *sobre* 9.

192. Clasificación. — Comparando entre sí los términos de una fracción, establecemos la siguiente clasificación:

FRACCION PROPIA es aquella cuyo numerador es menor que el denominador.

Así, por ej., son propias las facciones: $^3/_5$, $^2/_7$, $^9/_{100}$, $^8/_{25}$.

NOTA. — *Una fracción propia es menor que* 1.

FRACCION IMPROPIA es la que tiene el numerador no menor del denominador.

Así, por ej., son impropias las fracciones: $\frac{8}{2}, \frac{27}{27}, \frac{100}{8}$.

NOTA. — *Una fracción impropia es igual o mayor que* 1.

FRACCION APARENTE es aquella cuyo numerador es múltiplo del denominador.

Así, por ej., son fracciones aparentes: $\frac{5}{5}, \frac{8}{8}, \frac{10}{5}, \frac{6}{3}, \frac{30}{6}$.

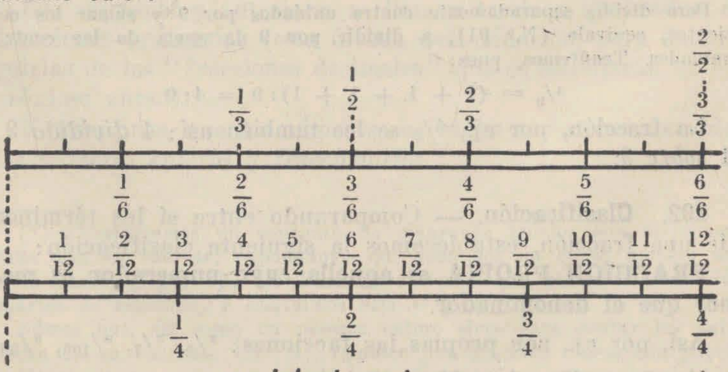
NOTA. — *Una fracción aparente es igual a un número entero.*

193. Como vimos en el (N.º 189), tenemos:

Un número entero es siempre igual a una fracción aparente que tiene por denominador la unidad, y por numerador el mismo número.

Transformación de fracciones

194. **Fracciones equivalentes.** — Mediante la figura adjunta, podemos ver que, dividir una magnitud en 2 partes iguales y considerar una de esas partes *es lo mismo* que dividirla en 4 partes iguales y considerar 2, o bien, dividirla en 6 partes y considerar 3, o en 12 y considerar 6, etc. Esto significa que las fracciones $^1/_2$, $^2/_4$, $^3/_6$, $^6/_{12}$, ... tienen el *mismo valor*.



Análogamente podemos ver en la figura que

$^1/_3 = {}^2/_6 = {}^4/_{12} = \ldots$; $^9/_{12} = {}^3/_4 = \ldots$

Se justifica, pues, que:

Se llaman FRACCIONES EQUIVALENTES las que tienen el mismo valor y términos diferentes.

195. Propiedades fundamentales. — 1.ª Obsérvese que los términos de las fracciones $^2/_4$, $^3/_6$, $^6/_{12}$, ... se obtienen de los correspondientes términos de la fracción $½$, multiplicándolos ambos por 2, 3, 6, ..., respectivamente. Tenemos, pues, la siguiente *propiedad* de las fracciones:

Multiplicando los dos términos de una fracción por un mismo número (diferente de 0), **se obtiene una fracción equivalente.**

Mediante esta propiedad, *toda fracción puede transformarse en infinidad de fracciones equivalentes.*

Así, por ejemplo, de la fracción $^2/_3$, tenemos:

$$^2/_3 = {}^4/_6 = {}^6/_9 = \ldots = {}^{20}/_{30} = \ldots$$

196. 2.ª Obsérvese que los términos de las fracciones ... $^3/_6$, $^2/_4$, $^1/_2$, se obtienen de los términos correspondientes de la fracción $^6/_{12}$, dividiéndolos ambos por ... 2, 3, 6, respectivamente. Tenemos, pues, la siguiente *propiedad.*

Diviendo los dos términos de una fracción por un divisor común, se obtiene una fracción equivalente.

Así, por ej., tendremos: $^{10}/_{60} = {}^5/_{30}$; hemos obtenido la segunda fracción dividiendo los dos términos de la primera por 2.

197. Transformar una fracción en otra equivalente de denominador dado (múltiplo del de la fracción primitiva). —Sea, por ej., la fracción $^7/_4$, que queremos transformar en otra equivalente de denominador 20.

Basta notar que, si 20 debe ser el nuevo denominador, es necesario multiplicar el denominador 4 por 5 (cociente de 20 por 4) y que, por otra parte, para obtener una fracción equivalente, es necesario entonces multiplicar también por 5 el numerador (N.º 195).

Tendremos, pues: $\dfrac{14}{8} = \dfrac{7}{4} = \dfrac{7 \times 5}{4 \times 5} = \dfrac{35}{20}$

De aquí que podamos establecer la siguiente

REGLA. — **Para transformar una fracción en otra equivalente de denominador dado, se divide este denominador por el de la fracción primitiva y se multiplican por el cociente obtenido los dos términos de la fracción primitiva.**

NOTA. — Para que esta transformación sea posible, es necesario que, previa *reducción de la fracción a su más simple expresión* (operación que veremos en el N.° 200), el denominador dado sea *múltiplo* del de la fracción primitiva.

Así, por ej., la fracción $^7/_4$ no podría transformarse en otra equivalente de denominador 10, o 18, o 25, etc., porque estos números *no son múltiplos de* 4.

Simplificación de fracciones

198. Definición. — De dos fracciones iguales, decimos que una de ellas tiene *forma más simple* que la otra cuando se presenta con términos más pequeños.

Así, en el ejemplo anterior, $^{10}/_{60} = {}^5/_{30}$, decimos que $^5/_{30}$ tiene forma más simple que $^{10}/_{60}$.

La transformación de una fracción en otra equivalente, pero con términos más pequeños, se llama **simplificación**. Tendremos, pues, que:

Una fracción se puede simplificar dividiendo (cuando es posible) sus dos términos por un divisor común.

Así, por ej., la fracción $^5/_{30}$ puede simplificarse dividiendo sus dos términos por 5, y tendremos $^5/_{30} = {}^1/_6$.

199. Fracciones irreducibles. — Si una fracción no se puede simplificar, significa que sus términos no tienen divisores comunes, es decir, que son números primos entre sí. En ese caso, la fracción se llama *irreducible*, o también, se dice que está *reducida a su mínima expresión.*

Así, por ej., la fracción $^{85}/_{41}$ es irreducible, porque D(85, 41) = 1, vale decir, por ser 85 y 41 números primos entre sí. Análogamente son irreducibles: $^{24}/_{35}$, $^{10}/_{33}$.

200. Para **REDUCIR UNA FRACCION A SU MAS SIMPLE EXPRESION**, pueden seguirse dos métodos:

EMPLEO DE LOS DIVISORES COMUNES. — *Se dividen los dos términos de la fracción sucesivamente por sus divisores comunes hasta agotarlos.*

En esta operación aplicaremos los criterios de divisibilidad tratados en el capítulo IV.

EJEMPLO. — Para reducir la fracción $^{42}/_{48}$, diremos: 42 y 48 son ambos divisibles por 2, porque terminan en cifra par; por tanto, efectuando las divisiones por 2 de los términos de la fracción tendremos

$$\frac{42}{48} = \frac{21}{24}$$

21 y 24 son ambos divisibles por 3; efectuando el par de divisiones tenemos: $\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$. Por consiguiente, tendremos: $\frac{42}{48} = \frac{7}{8}$.

201. EMPLEO DEL M. C. D. — *Se dividen los dos términos de la fracción por su máximo común divisor.*

Con este método se obtiene directamente, con un solo par de divisiones, la forma irreducible de la fracción (N.° 151).

EJEMPLO. — Sea $^{252}/_{336}$ la fracción dada. Tenemos: D(252, 336)=84; dividiendo los dos términos de la fracción dada por 84, obtenemos la forma reducida $^{3}/_{4}$.

NOTA IMPORTANTE. — *En general, resulta siempre conveniente reducir una fracción a su mínima expresión antes de operar con ella.*

Reducción de fracciones a un común denominador

202. Pronto veremos (al comparar, sumar y restar fracciones), que es necesario saber transformar los números racionales (fraccionarios y enteros) en fracciones equivalentes que tengan todas el *mismo denominador*, transformación que se llama **reducción a común denominador**. Para ello basta, pues, hallar un múltiplo común de todos los denominadores de las fracciones dadas y transformar cada una de éstas en una fracción que tenga por denominador dicho múltiplo común (N.° 197).

Ahora bien, como un múltiplo común de los denominadores es su producto (N.° 65), tendremos, pues, la siguiente

REGLA. — **Para reducir fracciones a un COMUN DENOMINADOR, basta multiplicar los dos términos de cada una de ellas por los denominadores de las otras.**

Recuérdese (N.° 201), que es conveniente reducir previamente las fracciones a su mínima expresión.

EJEMPLO I. — Reduciremos a común denominador las fracciones $^6/_8$ y $^5/_7$.

Simplificamos previamente la primera fracción: aquéllas se transforman entonces en $^3/_4$ y $^5/_7$. Aplicando la regla anterior, tenemos:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}\,; \quad \frac{5}{7} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = \frac{20}{28}$$

EJEMPLO II. — Reduciremos a común denominador $^7/_4$, 5, $^1/_2$.

Tendremos:

$$\frac{7}{4} = \frac{7 \times 2}{4 \times 2} = \frac{14}{8}\,; \quad 5 = \frac{5 \times 4 \times 2}{4 \times 2} = \frac{40}{8}\,; \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$$

203. Empleo del M. C. M. — Los denominadores de las fracciones 2/3, 7/6, 5/9 admiten los múltiplos comunes 18, 27, 36, ... etc. Por consiguiente, dichas fracciones pueden reducirse de modo que tengan por denominador común uno cualquiera de estos múltiplos.

Siendo 12 el M. C. M. de los denominadores, será, pues, el *mínimo común denominador*.

Reduciendo las fracciones al denominador 12, decimos que *reducimos las fracciones al mínimo denominador común*. Podemos enunciar la siguiente

REGLA. — **Para reducir varias fracciones irreducibles al MINIMO DENOMINADOR COMUN, se transforman en otras equivalentes que tengan por denominador el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas.** Podemos decir también que:

Para reducir varias fracciones al mínimo denominador común, se reducen primeramente a su más simple expresión; luego se toma como nuevo denominador común el M. C. M. de los denominadores. Los numeradores se obtienen multiplicando cada uno de los anteriores por el cociente de dividir dicho M. C. M. por el denominador respectivo.

EJEMPLO. — Sean las fracciones: $^2/_3$, $^7/_6$, $^5/_9$

M. C. M. de los denominadores: $= 18$

Cocientes por los denominadores: $18 : 3 = 6$, $18 : 6 = 3$, $18 : 9 = 2$

Fracciones transformadas: $\frac{2 \times 6}{3 \times 6} = \frac{12}{18}$, $\frac{7 \times 3}{6 \times 3} = \frac{21}{18}$, $\frac{5 \times 2}{9 \times 2} = \frac{10}{18}$

Igualdad y desigualdad de fracciones

204. Fracciones de igual denominador. — Todos sabemos que $\frac{3}{4}$ de Kg. es más que $\frac{1}{4}$ de Kg.; que $\frac{9}{10}$ de metro es más que $\frac{5}{10}$ de metro; que $\frac{5}{2}$ de litro es más que $\frac{3}{2}$ de litro, etc. Podemos, pues, escribir

$$\frac{3}{4} > \frac{1}{4}\ ;\ \frac{9}{10} > \frac{5}{10}\ ;\ \frac{5}{2} > \frac{3}{2}\ ;\ \text{etc.}$$

y establecer la siguiente propiedad:

De dos o más fracciones de IGUAL DENOMINADOR, es mayor la que tiene mayor numerador.

Por otra parte la definición misma de fracción (N.º 189), justifica esta propiedad. En efecto: sabemos que las fracciones de la misma especie, es decir, de igual denominador n se forman con la unidad fraccionaria $1/n$, de la misma manera como se forman los números enteros con la unidad entera. Por consiguiente, para comparar dos fracciones de igual denominador, bastará, pues, comparar los numeradores entre sí.

205. Fracciones de igual numerador. — Como ya lo indicamos en el (N.º 188), se comprende fácilmente que así como $\frac{1}{4}$ de manzanas es más que $\frac{1}{6}$ de la misma manzana, también $\frac{3}{4}$ de manzana será más que $\frac{3}{6}$ de la misma; análogamente que $\frac{3}{2}$ de metro es más que $\frac{3}{10}$ de metro; que $\frac{4}{5}$ de Kg. es más que $\frac{4}{8}$ de Kg., etc. Podemos, pues, escribir

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{6}\ ;\quad \frac{3}{4} > \frac{3}{6}\ ;\quad \frac{3}{2} > \frac{3}{10}\ ;\quad \text{etc.}$$

y establecer la siguiente propiedad:

De dos o más fracciones de IGUAL NUMERADOR, es mayor la que tiene menor denominador.

206. Fracciones cualesquiera. — Para comparar fracciones que no tienen ni los numeradores ni los denominadores iguales, es necesario reducirlas previamente a común denominador y luego aplicar la propiedad del (N.º 204).

Así, por ej., para comparar las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$, reduciéndolas a común denominador, tenemos:

$$\frac{3}{5} = \frac{21}{35}\ ,\quad \frac{4}{7} = \frac{20}{35}\ ;\quad \text{como}\ \frac{21}{35} > \frac{20}{35}\ ,\quad \text{resulta}\ \frac{3}{5} > \frac{4}{7}$$

* * *

CAPITULO VIII

OPERACIONES CON FRACCIONES

Justificación de las reglas operatorias

207. La adición. —*Caso de fracciones de igual denominador.* Así como para sumar unidades enteras de la misma especie, por ej., 2 Kg., 1 Kg., 4 Kg., decimos:

$$2 \text{ Kg.} + 1 \text{ Kg.} + 4 \text{ Kg.} = (2 + 1 + 4) \text{ Kg.}$$

análogamente, para sumar unidades fraccionarias de la misma especie, por ej., 2 *novenos,* 1 *noveno,* 4 *novenos,* decimos:

$$2 \textit{ novenos} + 1 \textit{ noveno} + 4 \textit{ novenos} = (2 + 1 + 4) \textit{ novenos}$$

que se escribe así:

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2+1+4}{9}$$

En general, podremos escribir

$$\boxed{\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{d}}$$

que origina la siguiente

REGLA. — **Para SUMAR dos o más fracciones de IGUAL DENOMINADOR, se suman los numeradores y a esta suma se le pone el denominador común.**

EJEMPLO. $^6/_5 + {}^8/_5 + {}^2/_5 + {}^1/_5 = {}^{17}/_5$.

208. *Caso de fracciones de distintos denominadores.* — Si las fracciones no tienen igual denominador, se suman aplicando la siguiente

REGLA. — **Para SUMAR dos o más fracciones de DISTINTOS DENOMINADORES, se reducen previamente a común denominador y luego se suman aplicando la regla anterior.**

EJEMPLO. — Sea la suma $^1/_3 + {^5/_4} + {^7/_{18}}$.

Reduciendo previamente las fracciones a común denominador, tenemos:

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{4} + \frac{7}{18} = \frac{12}{36} + \frac{45}{36} + \frac{14}{36} = \frac{71}{36}$$

209. *Caso de un número entero con una fracción.* — Para sumar un número entero con una fracción, se reduce el entero a fracción (N.° 189), y se procede luego como en el caso anterior.

EJEMPLO. $$3 + \frac{2}{5} = \frac{3}{1} + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$$

210. Números mixtos. —*Se llama número mixto a la suma de un número entero con una fracción propia.*

En un número mixto, por ej., $2 + {^4/_5}$, que se acostumbra escribir así: $2\frac{4}{5}$, y se lee: 2 y $^4/_5$. El número 2 es la *parte entera* y $^4/_5$ la *parte fraccionaria.*

Por lo indicado en el (N.° 209), vemos que un número mixto puede reducirse a fracción impropia equivalente, para lo cual conviene aplicar la siguiente

REGLA. — **Para REDUCIR UN NUMERO MIXTO A QUEBRADO, se multiplica la parte entera del número mixto por el denominador del quebrado, al resultado se le suma el numerador, y a la suma obtenida se le pone como denominador el del quebrado.**

Así, por ej., tendremos: $$4\frac{2}{5} = \frac{4 \times 5 + 2}{5} = \frac{20 + 2}{5} = \frac{22}{5}$$

211. Inversamente, veamos cómo podemos reducir un quebrado a número mixto. Sea, por ej., la fracción 23/7. Dividiendo el numerador por el denominador, obtenemos el cociente entero 3 y el resto 2; por consiguiente, en virtud de la fórmula fundamental de la división (N.° 99), podemos escribir

$$23 = 7 \times 3 + 2\,, \quad \text{de donde} \quad \frac{23}{7} = \frac{7 \times 3 + 2}{7}$$

La fracción 23/7 puede considerarse, pues, como suma de las dos fracciones $\frac{7 \times 3}{7}$ y $\frac{2}{7}$; la primera es una fracción aparente de valor 3, y la segunda es propia. Por consiguiente, podemos escribir $\frac{23}{7} = 3 + \frac{2}{7} = 3\frac{2}{7}$

Podemos, pues, establecer la siguiente

REGLA. — **Para TRANSFORMAR UNA FRACCION IMPROPIA EN NUMERO MIXTO, se divide el numerador por el denominador; el cociente entero obtenido es la parte entera del número mixto que se busca; el resto de la división es el numerador de la parte fraccionaria, la que tiene por denominador el de la fracción dada.**

Así, por ej., para transformar $^{17}/_3$ dividimos 17 por 3; nos da el cociente entero 5, y resto 2; por consiguiente, tendremos: $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$

212. Recordando el (N.° 191), vemos, pues, que esta regla permite *completar un cociente* cuando la división es inexacta (N.° 95); *se agrega al cociente entero una fracción que tiene por numerador el resto y por denominador el divisor.*

Así, por ej., la división de 48 por 5 da por cociente entero 9 y resto 3; por consiguiente, podremos escribir $48 : 5 = 9 + \frac{3}{5} = 9\frac{3}{5}$

213. La sustracción. — Procediendo análogamente que en la suma, sea, por ej., el siguiente problema: Si de una barra metálica de $^9/_{10}$ de m. de longitud, cortamos un trozo $^7/_{10}$ de m., ¿cuánto nos queda?

Diremos: 9 décimos de m. — 7 décimos de m. = 2 décimos de m.; en términos abstractos escribiremos:

$$\frac{9}{10} - \frac{7}{10} = \frac{2}{10}$$

Como ejercicio, enuncie el estudiante la REGLA correspondiente, que será análoga a la de la suma para fracciones de igual denominador (N.° 207).

Si las fracciones tienen distinto denominador, se empieza por reducirlas a común denominador, y luego se efectúa la sustracción como antes.

EJEMPLO. $\frac{8}{5} - \frac{3}{7} = \frac{8 \times 7}{5 \times 7} - \frac{3 \times 5}{7 \times 5} = \frac{56}{35} - \frac{15}{35} = \frac{41}{35}$

214. Multiplicación de una fracción por un entero. — Al definir la multiplicación en el (N.º 63), vimos que, con la notación, por ej., (Kg. 3) $\times$ 5, se indicaba el producto de Kg. 3 por 5, que abreviaba la suma

Kg. 3 + Kg. 3 + Kg. 3 + Kg. 3 + Kg. 3

Análogamente, el producto (3 *séptimos*) por 5 abrevia la suma 3 *séptimos* + 3 *séptimos* + 3 *séptimos* + 3 *séptimos* + 3 *séptimos*; esto se puede escribir así:

$$\frac{3}{7} \times 5 = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7}$$

Pero la suma indicada en el segundo miembro de esta igualdad se efectúa con la regla del (N.º 207), y resulta:

$$\frac{3}{7} \times 5 = \frac{3+3+3+3+3}{7} = \frac{3 \times 5}{7}.$$

En general, tendremos:

$$\boxed{\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}}$$

REGLA. — **Para MULTIPLICAR una fracción por un entero, se multiplica el numerador por el entero y se conserva el mismo denominador.**

215. Leyendo en orden inverso la última igualdad, podemos enunciar la siguiente *propiedad*:

Si se multiplica el numerador de una fracción por un número, el valor de la fracción resulta multiplicado por ese número.

Así, por ej., si tenemos la fracción $\dfrac{4}{5}$, la fracción $\dfrac{4 \times 2}{5} = \dfrac{8}{5}$ será doble de la primera; $\dfrac{4 \times 3}{5} = \dfrac{12}{5}$ será triple de la primera, etc.

216. Cuando el denominador de la fracción es *divisible* por el entero, y sólo en este caso, puede efectuarse la multiplicación *dividiendo el denominador por el entero,* sin alterar el numerador.

Así, por ej., tendremos: $\dfrac{5}{12} \times 3 = \dfrac{5}{12:3} = \dfrac{5}{4}$

Este procedimiento se basa en la siguiente *propiedad*:

Si se divide el denominador de una fracción por un número, el valor de la fracción resulta multiplicado por ese número.

Esta propiedad se evidencia también mediante la figura del (N.º 194). Así, en el ejemplo anterior, establecimos que $^5/_4$ es el triplo de $^5/_{12}$. En efecto: puede verse que la unidad fraccionaria $^1/_4$ es el triplo de la unidad fraccionaria $^1/_{12}$, porque $^1/_4 = {^3/_{12}} = (^1/_{12}) \times 3$, por consiguiente, 5 veces $^1/_4$ será también el triplo de 5 veces $^1/_{12}$, o sea que $^5/_4$ es el triplo de $^5/_{12}$.

Como ejercicio, enuncie el estudiante la REGLA correspondiente para efectuar la multiplicación.

217. División de una fracción por un entero. — Sean por ej., las divisiones siguientes

$$\frac{15}{7} : 5 \quad \text{y} \quad \frac{5}{6} : 2$$

En el primer caso, siendo el numerador de la fracción *divisible* por el entero, *dividimos el numerador* por el entero, conservando el mismo denominador, y resulta:

$$\frac{15}{7} : 5 = \frac{15:5}{7} = \frac{3}{7}$$

Es evidente que $^3/_7$ es efectivamente el cociente, es decir, la quinta parte del dividendo $^{15}/_7$, porque ambas fracciones tienen igual denominador, y comparando los numeradores (N.º 204), vemos que 3 es la quinta parte de 15, porque $3 \times 5 = 15$.

Podemos, pues, enunciar la siguiente propiedad:

Si se divide el numerador de una fracción por un número, el valor de la fracción resulta dividido por ese número.

Como ejercicio, enuncie el estudiante la REGLA correspondiente para efectuar la división.

218. En el segundo caso, no siendo el numerador *divisible* por el entero, *multiplicamos el denominador* por el entero conservando el mismo numerador, y resulta:

$$\frac{5}{6} : 2 = \frac{5}{6 \times 2} = \frac{5}{12}$$

La fracción $^5/_{12}$ es, efectivamente, el cociente, es decir, la mitad del dividendo $^5/_6$. En efecto: en la figura del (N.º 194), vemos que $^1/_{12}$ es la mitad de $^1/_6$ porque $^1/_6 = {}^2/_{12} = ({}^1/_{12}) \times 2$; por consiguiente, 5 veces $^1/_{12}$ será también la mitad de cinco veces $^1/_6$, o sea que $^5/_{12}$ es la mitad de $^5/_6$.

Ejemplos análogos justifican, pues, la siguiente igualdad:

$$\boxed{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \times c}}$$

que origina la siguiente

REGLA. — **Para DIVIDIR una fracción por un entero, se multiplica el denominador por el entero y se conserva el mismo numerador.**

219. **Multiplicación de fracciones.** — Esta operación se origina en los problemas concretos de multiplicación y división combinadas.

Supongamos, por ej., que nos proponen la siguiente cuestión: Si un auto emplea $^4/_5$ de minuto en recorrer 1 Km., ¿cuánto empleará en recorrer $^9/_{10}$ de Km.?

El problema se reduce a hallar los $^9/_{10}$ de $^4/_5$, operación que indicamos con la multiplicación de fracciones, o sea: $({}^9/_{10}) \times ({}^4/_5)$.

Razonaremos así: Si 1 Km. lo recorre en $^4/_5$ de minuto, $^1/_{10}$ de Km. lo recorrerá en 10 veces menos, o sea en $\frac{4}{5} : 10 = \frac{4}{5 \times 10}$

de minuto, y $^9/_{10}$ de Km. en 9 veces más, o sea en

$$\frac{4}{5 \times 10} \times 9 = \frac{4 \times 9}{5 \times 10} = \frac{9 \times 4}{10 \times 5}$$

Tendremos, pues:

$$\frac{9}{10} \times \frac{4}{5} = \frac{9 \times 4}{10 \times 5}$$

Ejemplos análogos para otras unidades, nos conducen a establecer la siguiente igualdad general:

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}}$$

que origina la siguiente

Regla. — **Para MULTIPLICAR dos fracciones, se forma otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.**

220. Si los factores son más de dos, es fácil verificar que la regla también se cumple en ese caso.

Así, por ej., tendremos: $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{2 \times 3 \times 4}{5 \times 7 \times 9} = \frac{24}{315} = \frac{8}{105}$

221. División de fracciones. — Sea, por ej., la división de $^2/_3$ por $^5/_7$. Tenemos que encontrar una fracción que, multiplicada por el divisor $^5/_7$, nos dé el dividendo $^2/_3$. El cociente se obtiene con la siguiente

Regla. — **Para dividir dos fracciones, se multiplica la fracción dividendo por la fracción divisor invertida.**

Es decir, que:

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$$

En general: $\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}}$

La fracción $\dfrac{a \times d}{b \times c}$ es, efectivamente, el cociente, porque multiplicada por el divisor c/d, nos da:

$$\frac{a \times d}{b \times c} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times d \times c}{b \times c \times d} = \frac{a}{b}$$

es decir, que nos reproduce el dividendo.

222. La división de un entero por una fracción es un caso particular del anterior, dando al entero la forma fraccionaria (poniéndole por denominador 1).

Así, por ej., tendremos:

$$5 : \frac{2}{3} = \frac{5}{1} : \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{1 \times 2} = \frac{15}{2}$$

Como ejercicio, enuncie el estudiante la REGLA correspondiente en este caso.

223. Números recíprocos o inversos.—*Dos números se llaman recíprocos o inversos, si su producto es* 1.

Por ej., son recíprocos los números 5 y $^1/_5$; 12 y $^1/_{12}$, etc.

224. Observaciones. — 1.ª Téngase presente que, antes de efectuar el producto indicado de números racionales, conviene dividir los factores del numerador y del denominador por los divisores comunes que tuvieran.

2.ª Para efectuar operaciones en la que intervengan números mixtos, generalmente conviene reducir previamente estos últimos a números fraccionarios.

Aplicaremos las dos observaciones anteriores en el siguiente

EJEMPLO:

$$2\frac{3}{4} \times 5 \times \frac{4}{3} = \frac{11}{4} \times 5 \times \frac{4}{3} = \frac{11 \times 5 \times 4}{4 \times 3} = \frac{11 \times 5}{3} = \frac{55}{3}$$

225. Extensión de las propiedades fundamentales a las cuatro operaciones. — Como ya vimos al tratar algunas operaciones con fracciones, razonamos con las unidades fraccionarias como con las enteras.

Admitiremos, pues, que *las propiedades de las operaciones con números enteros son válidas para los números fraccionarios.*

Nos referimos a las propiedades expresadas mediante igualdades literales.

Así, por ej., la suma y producto de números racionales gozarán de las propiedades conmutativa, asociativa, disociativa, etc.

Demostraremos una de esas propiedades, por ej., la conmutativa de multiplicación. Para las otras se sigue un procedimiento análogo que, como ejercicio, dejamos lo desarrolle el estudiante.

Demostraremos que $^2/_3 \times {^4/_5} = {^4/_5} \times {^2/_3}$. Para ello, aplicando sucesivamente los (N.^{os} 219, 66) y la regla inversa del (N.º 219) al primer miembro de la tesis, obtenemos el segundo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$$

Como el razonamiento sería el mismo para otros números cualesquiera, queda demostrada la generalidad de la propiedad.

Producto y cociente de una suma o diferencia por un número

226. En los Capítulos II y III hemos tratado de la *propiedad distributiva* de la multiplicación y de la división respecto de la suma y de la diferencia, para los casos que los términos de la suma o diferencia, así como el multiplicador o divisor respectivos, fuesen *números enteros.*

Veremos ahora que dicha *propiedad es general;* vale decir, que se cumple aunque aquellos términos, o multiplicador o divisor, sean *números racionales* cualesquiera.

227. Producto de una suma o diferencia por un número. — Sea, por ej., la suma $^2/_5 + {^3/_7}$ que multiplicaremos por $^4/_9$. Demostraremos que

$$({^2/_5} + {^3/_7}) \times {^4/_9} = {^2/_5} \times {^4/_9} + {^3/_7} \times {^4/_9}$$

En efecto, aplicando al primer miembro de la tesis, sucesivamente, los (N.^{os} 208, 219, 71), las reglas inversas de los (N.^{os} 207, 219), y el (N.º 198), tenemos:

$$\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right) \times \frac{4}{9} = \frac{2 \times 7 + 3 \times 5}{5 \times 7} \times \frac{4}{9} = \frac{(2 \times 7 + 3 \times 5) \times 4}{5 \times 7 \times 9} =$$

$$= \frac{2 \times 7 \times 4 + 3 \times 5 \times 4}{5 \times 7 \times 9} = \frac{2 \times 7 \times 4}{5 \times 7 \times 9} + \frac{3 \times 5 \times 4}{5 \times 7 \times 9} =$$

$$= \frac{2 \times 7}{5 \times 7} \times \frac{4}{9} + \frac{3 \times 5}{5 \times 7} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{9}$$

Como el razonamiento empleado podría aplicarse a números cualesqiera, podemos establecer, pues, la igualdad general y regla siguientes:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)\times\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\times\frac{m}{n}+\frac{c}{d}\times\frac{m}{n}+\frac{e}{f}\times\frac{m}{n}}$$

Regla. — **Para multiplicar una suma de fracciones por otra fracción, puede multiplicarse cada término de la suma por la fracción, y sumarse los productos parciales.**

228. Para el caso del producto de una *diferencia* de fracciones por otra fracción, se procede análogamente, llegando al siguiente resultado general:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\times\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\times\frac{m}{n}-\frac{c}{d}\times\frac{m}{n}}$$

Como ejercicio, enuncie el estudiante la *regla* correspondiente.

Así, por ej., tendremos, $({}^4/_3-{}^2/_5)\times{}^6/_7={}^4/_3\times{}^6/_7-{}^2/_5\times{}^6/_7$.

229. Cociente de una suma o diferencia por un número. — Sea, por ej., la *suma* ${}^2/_5+{}^3/_7$ que dividiremos por ${}^9/_8$
Se demuestra que

$$({}^2/_5+{}^3/_7):{}^9/_8={}^2/_5:{}^9/_8+{}^3/_7:{}^9/_8$$

Para ello se sigue un procedimiento análogo al empleado en el (N.° 227); es decir, que se aplican al primer miembro de la tesis, sucesivamente, los (N.^{os} 208, 217, 101), las reglas inversas de los (N.^{os} 207, 217), y el (N.° 198).

Como ejercicio, dejamos que el estudiante efectúe las transformaciones correspondientes. Se llega al siguiente resultado general:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right):\frac{m}{n}=\frac{a}{b}:\frac{m}{n}+\frac{c}{d}:\frac{m}{n}}$$

Enuncie el estudiante la *regla* correspondiente.

230. Para el caso del producto de una *diferencia* por una fracción, se procede análogamente, llegando a un resultado análogo al de la última fórmula, pero reemplazando los signos de *sumar* por los de *restar*.

Así, por ej., tendremos que, $(4/5 - 1/2) : 3/4 = 4/5 : 3/4 - 1/2 : 3/4$.

Como ejercicio, enuncie el estudiante las *reglas* correspondientes a este caso y al anterior.

Potencia de una fracción

231. La potencia de una fracción tiene el mismo significado que la de un número entero (N.º 84).

Así, por ej., $3/5 \times 3/5$ es el *cuadrado* de $3/5$; se indica $(3/5)^2$. La fracción $3/5$ es la *base* y 2 el *exponente*.

Análogamente diríamos para las otras potencias.

232. Por definición tenemos, por ejemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3.3.3.3}{5.5.5.5} = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$$

de la que se deduce la igualdad general y regla siguientes:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

REGLA. — **Para elevar una fracción a un exponente, se forma otra fracción cuyos términos sean los de aquélla elevados al mismo exponente.**

233. PROPIEDAD. — *Cualquier potencia de una fracción irreducible, es otra fracción irreducible.*

En efecto, elevando la fracción irreducible a/b a la potencia n, obtenemos la igualdad literal del párrafo anterior.

Pero, en virtud de la Propiedad del (N.º 178), si a y b son *primos entre sí*, lo son también a^n y b^n; por consiguiente, la fracción a^n/b^n es irreducible.

* * *

CAPITULO IX

CALCULO MENTAL

Ejercicios y problemas de recapitulación general

234. Preliminares. — Los ejercicios y problemas que proponemos en este Capítulo, deberán resolverse *desde el comienzo del curso* (como lo establece el programa vigente), y a medida que se estudie la operación correspondiente. Al efecto, al tratar las diversas operaciones, ya dimos algunas normas generales y presentamos algunos ejemplos, que deberán tenerse presentes para la resolución de los ejercicios de la colección que sigue.

No deberá perderse la oportunidad de hacer frecuentes y numerosas aplicaciones del cálculo mental durante todo el curso, que, además de contribuir a afirmar los conocimientos matemáticos adquiridos, y a facilitar las aplicaciones prácticas de la matemática a cuestiones de la vida corriente, constituyen también una excelente gimnasia para el desarrollo intelectual.

Hemos creído útil incluir también en este Capítulo, una pequeña colección de ejercicios sobre "Matemática recreativa", que esperamos despertarán la curiosidad del alumnado.

CALCULO MENTAL EN LA SUMA

1-6. Empleando la propiedad de las cifras complementarias, efectuar las siguientes sumas:
$3 + 6 + 7$; $5 + 4 + 5$; $2 + 7 + 8 + 3$; $6 + 6 + 4$; $2 + 4 + 8 + 6 + 1 + 9$; $7 + 1 + 2 + 4 + 6 + 3 + 5 + 7 + 5$.

7-9. Efectuar las siguientes sumas: $46 + 10$; $235 + 20$; $30 + 75 + 10$.

10-13. Idem: $35 + 21$; $47 + 52$; $185 + 300 + 12$; $430 + 13 + 25$.

14-18. Contar: de 2 en 2, a partir de 2 ; de 2 en 2, a partir de 1 ; de 5 en 5, a partir de 5 ; de 5 en 5, a partir de 3 ; de 9 en 9, a partir de 4 .

19-21. Usando las propiedades asociativa y conmutativa, calcular las siguientes sumas:
9998 + 574 + 2 ; 1875 + 125 + 4602 ; 999 + 997 + 53 + 3 + 1.

22. ¿Cuántos son los alumnos de un Colegio que en primer año tiene 54 alumnos, en segundo 45, en tercero 10, en cuarto 44, y en quinto 42?

23. La distancia por ferrocarril desde Buenos Aires a Quilmes es de 17 kilómetros; de Quilmes a Pereyra de 20 kilómetros y de Pereyra a La Plata de 16 kilómetros. ¿Cuál es la distancia Buenos Aires-La Plata (Vía Quilmes)?

24. Una obra científica se compone de 4 volúmenes: el primero consta de 456 páginas; el segundo 368; el trecero 512 y el cuarto 480. ¿De cuántas páginas se compone la obra?

25. Un recipiente contiene 485 litros de agua y se necesitan 315 para llenarlo. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

26. Se adquirieron mercaderías por valor de $ 1450 y, al revenderlas, se ganaron $ 268. ¿Cuál es el precio de venta?

27. La distribución étnica de la población de la Argentina, según el último censo (año 1933), era: nativos de sangre europea 9 100 000; mestizos 300 000; extranjeros 2 600 000. ¿Cuál era el total de la población?

28. El destino actual de la explotación del suelo argentino, expresado en millones de hectáreas, es el siguiente: tierras bajo cultivo 30; campos de pastoreo 124; montes y bosques 50; superficie yerma, poblaciones, montañas, lagos y ríos 75. ¿Cuál es el total?

CALCULO MENTAL EN LA RESTA

1-8. Efectuar las siguientes restas: 75 — 35 ; 88 — 15 ; 80 — 30 ; 7590 — 6400 ; 83 — 31 ; 264 — 70 ; 425 — 35 ; 852 — 42.

9-15. Efectuar las siguientes operaciones: 628 + 98; 5678 + 97; 73 000 + 9 999 ; 688 — 98 ; 87 886 — 998 ; 780 — 60 + 130 ; 815 + 135 — 150.

16. El kilometraje ferroviario en Córdoba es 695 y en Alta Gracia 743. ¿Cuál es la distancia kilométrica entre Córdoba y Alta Gracia?

17. La línea aérea Buenos Aires a Santiago tiene el siguiente horario: B. Aires 6,30 h. — Mendoza 11,00 h. — Santiago 13,30 h. ¿Qué tiempo se emplea en cada una de las dos etapas del viaje?

18. ¿Qué edad tenía Belgrano al fallecer, si nació en 1770 y murió en 1820?

19. Isaac Newton, insigne matemático inglés, nació en 1642 y murió en 1727. ¿Qué edad tenía al fallecer?

20. De una pieza de género de 40 metros de longitud se cortan primeramente 8 metros, luego 5 y finalmente 4. ¿Cuánto queda de la pieza?

21. El censo de la población argentina en el año 1900 fué de 8 250 000 y el de 1933 de 12 000 000. ¿Cuál fué el crecimiento de la población argentina en el período indicado?

CALCULO MENTAL EN LA MULTIPLICACION

1-3. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

3×100 ; $49 \times 1\,000$; 650×10 .

3-7. Duplicar los siguientes números: 11; 36; 108; 2136; 6432.

3-7. Duplicar los siguientes números:

11 ; 36 ; 108 ; 2 136 ; 6 432 .

8-10. Multiplicar por 4 , 8 , y 16 los siguientes números:

12 ; 15 ; 52 .

11-13. Efectuar las multiplicaciones siguientes:

$45 \times 2\,000$; 58×800 ; $62 \times 4\,000$.

14-18. Multiplicar por 11 los siguientes números:

6 , 25 , 86 , 7 426 ; 1 420 .

19-22. Multiplicar por 9 , 99 y 999 los siguientes números:

46 ; 58 ; 542 ; 1 964 .

23-24. Efectuar las multiplicaciones siguientes: 15×90; 536×907.

25-36. Idem, 46×19 ; 74×22 ; 154×39 ; 206×101 ; $86 \times 1\,001$; $6\,850 \times 402$.

31-36. Aplicando oportunamente la propiedad conmutativa y asociativa, calcular los siguientes productos:

$634 \times 25 \times 4$; $2653 \times 125 \times 8$; $25 \times 15 \times 4 \times 6$;
$11 \times 2 \times 5 \times 5$; $14 \times 4 \times 5$; $25 \times 12 \times 4$.

37. ¿A cuántos días equivalen 52 semanas?

38. ¿Cuántos minutos contienen 1 , 2 , 3 , ... , 10 horas?

39. ¿Qué cantidad forman 30 billetes de $ 50?

40. ¿Qué suma percibirá en un año, un empleado que cobra $ 160 mensuales?

41. La luz recorre aproximadamente. 300 000 kilómetros por segundo; si la luz del Sol emplea 493 segundos en llegar a la Tierra, ¿cuál es la distancia de la Tierra al Sol?

42-45. Aplicando la propiedad distributiva, efectuar las siguientes multiplicaciones:

$(18 + 4) \times 2$; $(5 + 6 + 1) \times 4$; $(16 - 12) \times 10$; $(25 - 10) \times 8$.

46. Un día se compone de 24 horas, cada hora contiene 60 minutos, y cada minuto 60 segundos. ¿Cuántos segundos contiene un día?

47. En el sistema antiguo español de medidas de longitud, que se usaba entre nosotros, teníamos: una legua equivalente a 40 cuadras; una cuadra equivalente a 150 varas. ¿Cuántas varas medía una legua?

48. Idem, una vara equivalía a 3 pies; un pie 12 pulgadas. ¿Cuántas pulgadas medía un pie?

49. Entre las medidas antiguas de capacidad teníamos: una pipa, equivalente a 6 barriles; un barril, equivalente a 32 frascos. ¿Cuántos frascos contenía una pipa?

50. ¿Cuánto es el cuadrado del cubo de 2?

CALCULO MENTAL EN LA DIVISION Y EN LA DIVISIBILIDAD

1-5 ¿Cuánto es la mitad de cada uno de los N.os 24, 56, 57, 82, 83?

6-11. Hallar la mitad de los números 200, 148, 846, 467, 1008, 2746.

12-16. Multiplicar por 5 los N.os 48, 106, 420, 44, 126, 145, 1023.

16-24. Dividir por 5 los números 105, 260, 4830, 185, 2005, 1835.

25-30. Dividir por 4 los números 144, 368, 1072, 2008, 552, 1892.

31-36. Dividir por 8 los números 248, 360, 152, 2504, 1264, 8560.

37-41. Multiplicar por 25 los números 12, 24, 124, 352, 1016.

42-47. Dividir por 25 los números 175, 2300, 750, 1025, 5975, 1000.

48-53. Dividir por 15 los números 120, 180, 105, 165, 330, 575.

54-58. Multiplicar por 125 los números 96, 160, 54, 134, 2046.

59-63. Dividir por 125 los números 375, 1375, 1125, 1500, 1750.

64. Un obrero recibe $ 42 en 7 días de trabajo. ¿Cuál es el jornal?

75. Una familia gastó en un año $ 4800. ¿Cuál es el promedio mensual de gastos?

66. ¿Cuántos metros de paño se pueden adquirir con $ 150 si cada metro cuesta $ 6?

67. Una cuadrilla de 15 obreros ejecuta 120 metros de cierta obra. ¿Cuántos metros hace cada obrero?

68-73. Calcular los siguientes cocientes:

$25 \times 12 : 12$; $427 \times 48 \times 15 : (15 \times 48)$; $48 \times 31 : 8$.

$(9.6.7) : 6$; $(12.3.5) : (3.5)$; $(15.18.20) : (5.6.10$.

74-79. Aplicando la propiedad distributiva, calcular los siguientes cocientes:

$(35 + 50) : 5$; $(12 + 18) : 3$; $(275 - 125) : 25$;

$(8 + 4 + 10) : 2$; $(15 + 10 - 5) : 5$; $(20 - 16) : 4$.

80-82. Decir los diez primeros números divisibles por 2; los primeros diez divisibles por 3 y los primeros diez divisbiles por 5.

83-85. Decir los cinco primeros números divisibles al mismo tiempo por 2 y por 3; análogamente por 2 y por 5; ídem por 3 y por 5.

86. Decir todos los números comprendidos entre 100 y 200 divisibles por 4 y que terminan con la cifra 8.

87-89. Reconocer cuáles de los números del siguiente grupo, son divisibles por 4; cuáles por 25, y cuáles por 4 y 25 al mismo tiempo:

63508 ; 38750 ; 8412 ; 6360 ; 35700 ; 1075.

90. Díganse tres números divisibles por 2, 3 y 5 al mismo tiempo.

91. Se dispone de tres piezas de género de longitudes respectivas 96 m., 108 m. y 72 m. y se desea saber si es posible cortarlas en trozos iguales de 3 m. de longitud, y en cuántas partes se podrán cortar.

92. Un año es bisiesto cuando es divisible por 4 (excepto los años "seculares", como 1 500, 2 000...). Indíquese cuáles de los siguientes años fué o será bisiesto: 1924, 1930, 1936, 1940, 1952, 1978.

CALCULO MENTAL EN EL M. C. D., EN EL M. C. M. Y EN LOS NUMEROS PRIMOS

1. Descomponer en factores primos los siguientes números:

15 , 12 , 28 , 33 .

2-7. Sin efectuar las operaciones, indicar el M. C. D. de los siguientes números: 24 , 12 ; 9 , 45 ; 60 , 30 , 15 ; 2 , 3 , 4 , 5 ; 8 , 12 , 24 , 32 .

Sin efectuar operaciones, indicar el M. C. M. de los seis grupos de números del ejercicio anterior.

14. Indicar cuáles de los grupos de números siguientes, son primos entre sí: (6 , 21) ; (6 , 35) ; (4 , 9 , 35) ; (12 , 25 , 21).

15. Se desea embaldosar un piso rectangular de 21 dm. de ancho por 33 dm. de largo, con baldosas cuadradas del mayor lado posible. ¿Cuál es la dimensión de la baldosa?

16. Tres viajeros se dirigen a Buenos Aires en intervalos regulares; el primero cada 10 días, el segundo cada 15 y el tercero cada 20 días. ¿Después de cuántos días se encontrarán nuevamente juntos en Buenos Aires, empezando a contar los días desde la última vez que se encontraron en el mismo día?

17. Un almacenero dispone de tres cajas que contienen respectivamente 24 Kg., 32 Kg. y 18 Kg. de café. Desea empaquetar el café en bolsas que contengan todas la misma cantidad de café y que ella sea la máxima posible. ¿Cuánto contendrá cada bolsa?

MATEMATICA RECREATIVA

1. Tabla misteriosa. — Con las cinco filas de números siguientes, podemos adivinar el número que habrá pensado una persona, desde 1 a 31, sabiendo solamente en cuáles de las filas se encuentra.

1.ª) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, ...
2.ª) 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31, ...
3.ª) 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31, ...
4.ª) 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, ...
5.ª) 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, ...

El número pensado es la suma de los primeros números de las filas donde se encuentra. Así, por ej., si dicen que se encuentra en las filas 1.ª, 3.ª y 4.ª, será: $1 + 4 + 8 = 13$; si dicen que está en la 3.ª y 5.ª, será: $4 + 16 = 20$.

La tabla que limitamos en el número 31, se construye así: la 1.ª fila está formada por la sucesión de números impares; cada fila de las siguientes empieza con las potencias sucesivas de 2 .

La 2.ª fila se obtiene sumando al primer número de ella, sucesivamente, el primero de la fila siguiente, o sea, sumando 4 , obteniendo $2 + 4 = 6$, $6 + 4 = 10$, ..., 14 , 18 , 22 , 26 , 30 , y disponiendo estos números en lugares de dos en dos, para intercalar luego el número consecutivo a cada uno de ellos, hasta completar los lugares disponibles; es decir, al 2 seguimos el 3 ; al 6 el 7 , etc.

La 3.ª fila se obtiene sumando al primer número de ella, sucesivamente, el primero de la fila siguiente, o sea sumando 8, obteniendo $4 + 8 = 12$, $12 + 8 = 20$, ..., y disponiendo estos números en lugares de cuatro en cuatro, para intercalar luego los números consecutivos a cada uno de ellos, hasta completar los lugares disponibles; es decir, al 4 seguimos el 5, 6, 7; al 12 seguimos el 13, 14, 15; ...

La 4.ª fila se obtiene análogamente, es decir, sumando sucesivamente 16, obteniendo así 24, 40, e intercalando los consecutivos al 8, al 24, ...

La 5.ª fila se forma análogamente; como ejercicio, enuncie el estudiante la regla correspondiente. Como otro ejercicio, prolongue el estudiante la tabla más allá del número 31, debiendo entonces agregar también nuevas filas.

2. **Producto de dos números comprendidos entre 5 y 10.** — Como curiosa aplicación del "complemento" de un número, multiplicaremos dos números comprendidos entre 5 y 10 procediendo así: Cerrar tantos dedos de una mano como lo indique el complemento del multiplicando, y tantos de la otra como lo indique el complemento del multiplicador; efectuar el producto de los números de los dedos cerrados en cada mano, y al producto sumar tantas decenas como dedos quedaron sin cerrar. La suma que se obtenga es el producto que buscábamos.

3. **Adivinar el número pensado.** — EJEMPLO. — Digo a un amigo: *Piensa un número, multiplícalo por 2, súmale 5, multiplica la suma por 5, agrégale 10, multiplica por 10, y dime el resultado.* Si de éste quito 350 y suprimo los dos ceros finales, tendré el número pensado.

(La justificación del procedimiento, así como la de los problemas análogos que siguen, no correspondería a este primer año de Aritmética, debido a que es necesario el empleo de "paréntesis superpuestos", que se estudiarán en el segundo; no obstante, las expondremos, a fin de satisfacer la curiosidad del buen estudiante).

Si llamamos n al número pensado, el procedimiento se justifica con la serie de operaciones que indicamos a continuación:

$$([(n \times 2 + 5) \times 5 + 10] \times 10 - 350) : 100 = n$$

4. EJEMPLO. — Digo a un amigo: *Piensa un número par. Toma la mitad. Agrega 1 al resultado. Multiplica el resultado por 6. Divide el resultado por 3. ¿Cuánto te dió?* (Restaré 2 al número que me dirá el amigo y ese será el número que él pensó).

En efecto, sabemos que la expresión $n \times 2$ representa siempre un número par, cualquiera que sea n. Por tanto, indicando las operaciones enunciadas anteriormente, tenemos la expresión

$$\left(\left\{[(n \times 2) : 2 + 1] \times 6\right\} : 3\right) - 2$$

y efectuando operaciones se transforma así:

$$\left(\left\{[n + 1] \times 6\right\} : 3\right) - 2 = \left(\left\{n \times 6 + 6\right\} : 3\right) - 2 =$$
$$= (n \times 2 + 2) - 2 = n \times 2$$

Como vemos, el resultado de las operaciones es el número par $n \times 2$ que pensó el amigo.

5. Ejemplo. — Piensa un número y triplícalo. Agrégale 1 al resultado. Triplica el nuevo resultado y agrégale el número pensado. ¿Cuánto te dió? (Se resta 3 al resultado que dictará el amigo, y la cifra de las decenas del resto será el número pensado).

Si llamamos a al número pensado, este juego numérico se justifica con la expresión

$$\left[\left(\left\{[(a \times 3) + 1] \times 3\right\} + a\right) - 3\right] : 10 = a$$

6. Ejemplo. — Piensa un número y triplícalo. Agrégale uno cualquiera de los números 1, 2, 3. Triplica el resultado y agrégale el número pensado. ¿Cuánto te dió?

Si m es el resultado, el cociente entero de la división de m por 10 es el número pensado.

7. **Problemas capciosos.** — Se denominan así algunos problemas cuya verdadera solución no es la primera que se le ocurre a la generalidad de las personas.

Problema. — Se hallan alineados 16 soldados, siendo la distancia entre dos consecutivos de 3 metros. ¿Cuál es la distancia del primero al último soldado?

Respuesta: 3 m. $\times$ 15 = 45 metros (y no 3 m. $\times$ 16).

8. Problema. — Un caracol trepa por una pared de 6 metros de altura. Cada día sube 3 metros y cada noche baja 2 metros. ¿Cuántos días empleará en llegar a la cima del muro?

Respuesta: después de 4 días (y no después de 6).

9. Problema. — Cada minuto sale de la Plaza del Congreso un ómnibus que va a la Estación Retiro en 6 minutos y luego regresa. ¿Con cuántos ómnibus se encontrará uno cualquiera de ellos en el viaje de la Plaza a la Estación?

Respuesta: 11; porque 12 son los ómnibus que realizan el servicio, y uno de ellos encontrará los otros 11.

10. Problema. — Dos embarcaciones, A y B, partieron en el vuelta a Río de Janeiro, distante 1200 mismo momento, del Puerto de Buenos Aires, para realizar un viaje de ida y

millas, aproximadamente. La embarcación A mantiene una velocidad de 8 millas por hora en el viaje de ida y 12 millas por hora en el de vuelta; la embarcación B mantiene una velocidad constante de 10 millas por hora en los dos viajes. ¿Llegarán juntas al regreso a Buenos Aires?

Respuesta: B regresa 10 horas antes que A.

11. Problema. — Un comerciante aumenta en un 20 por ciento los precios marcados en sus mercaderías; luego, anuncia a sus clientes que hará un descuento del 20 por ciento sobre los precios marcados. ¿Qué descuento hizo, en realidad, sobre los prcios primitivos?

Respuesta: el 4 por ciento.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS
para resolver

(Presentamos los resultados de algunos ejercicios, a fin de que el estudiante pueda contralorear su propia preparación).

CAP. I. — NUMERACION. — SUMA Y RESTA.

1. La longitud del meridiano terrestre es, aproximadamente, de 40 millones de metros; escríbase con cifras este número.

2. La distancia máxima de la Tierra al Sol es, aproximadamente, 152 millones de kilómetros, y la mínima 146 millones de kilómetros; escríbanse con cifras dichos números.

3. Léanse los números 876543 ; 20202002 ; 1000462904 ; y escríbanse las palabras correspondientes.

4. Escríbanse con cifras los números: *quinientos mil millones treinta mil quince; quince billones ocho mil veinte; dos millones ochocientos tres.*

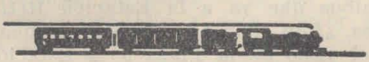
5. Leer el número 35 975 542 106 , y clasificar las unidades de sus diversos órdenes.

6. ¿Cuál es el mayor número que se puede escribir con las cifras 3 , 6 , 8 , 1 ?

7. Escribir en cifras arábigas los siguientes números escritos en cifras romanas:
VIII , XL , XLIII , IC , LXXIV , DC , MCD , CCXXII , MDCC

8. Escribir en cifras romanas los siguientes números:
25, 146 , 503 , 714 , 999 , 1054 , 4266 . 5089 , 8754

9. El viaje por ferrocarril de Buenos Aires a Mendoza, se realiza con los siguientes recorridos (indicaremos dentro de paréntesis la distancia en kilómetros de cada recorrido): Est.



Retiro-Mercedes (112), Mercedes-Alberdi (224), Alberdi-J. Daract (318), Daract-La Paz (269), La Paz-Mendoza (140). ¿Cuál es la longitud total del recorrido?

10. Los ferrocarriles de la Argentina se clasifican así: Ferrocarriles del Estado 9 417 Km.; Ferrocarriles particulares de jurisdicción nacional 30 821 Km.; Ferrocarriles de jurisdicción provincial 1 292 Km.; Líneas secundarias 3 044 Km. Hallar el total general, sin disponer los sumandos en columna.

11. Durante el año 1933, dictaron clases en todo el territorio de la Nación, en los establecimientos de enseñanza oficial, los siguientes números de profesores: Colegios nacionales 2 535; Escuelas normales 3 207; Institutos especiales 1 913; Escuelas de orientación rural 118. Hallar el total general.

12. Hallar la suma total invertida en la enseñanza oficial durante el año 1932, que se distribuye así: Universidades 20 264 995; Colegios nacionales 10 609 143; Escuelas normales 12 445 645; Escuelas industriales 2 816 936; Escuelas profesionales de mujeres 1 839 215; Escuelas de comercio 2 477 718; Otros institutos de enseñanza 2 016 738; Establecimientos varios 839 925; Escuelas de orientación rural 369 300; Gastos varios 379 000.

13. El arrendamiento de un campo cuesta $ 850; en su preparación se gastaron $ 123, y en mano de obra $ 387. Habiéndose obtenido un beneficio de $ 924, ¿cuál es el precio de venta de la cosecha?

Resultado, $ 2 284

14. Un comerciante compró mercaderías por valor de $ 649 y las vendió con una pérdida de $ 153, por avería. ¿Cuál es el precio de venta?

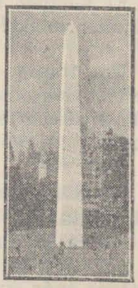
Resultado, $ 496

15. Tres personas se dividen cierta suma de dinero: la primera recibe $ 836, la segunda $ 469 más que la primera, y a la tercera le tocan $ 95 más que a las dos primeras juntas. ¿A cuánto asciende la suma de dinero distribuída?

Resultado, $ 4 377

16. Una persona depositó en un Banco cinco sumas diferentes: la 1.ª de $ 8450; la 2.ª equivalente a la 1.ª y 5.ª; la 3.ª equivalente a la 2.ª y 5.ª; la 4.ª de $ 6 000, y la 5.ª equivalente a la 1.ª y 4.ª. ¿Qué suma depositó en total?

Resultado, $ 89 150



OBELISCO DE Bs. AIRES

17. El obelisco de la Plaza de la República, de la ciudad de Buenos Aires, tiene 69 metros de altura; el obelisco de Wáshington, 169 m.; la torre Eiffel de París, 300 m.; y la pirámide más alta de Egipto, 142 m. Calcular la diferencia de alturas entre cada una de las construcciones indicadas y cada una de las siguientes en esta nómina.

18. Calcular la edad de los siguientes hombres célebres, de los que se dan las fechas del nacimiento y de la muerte: *San Martín* (1778-1850); *Cervantes* (1549-1616); *Pericles* (499-429 *a. J. C.*); *Julio César* (100-44 *a. J. C.*); *Beethoven* (1770-1827).

19. Calcular la duración de los períodos históricos comprendidos entre las siguientes fechas: *Descubrimiento de América* (1492) *y descubrimiento del Estrecho de Magallanes* (1520); *Fundación de Buenos Aires* (1536), *e Instalación del Cabildo Abierto* (1810); *Batalla de Chacabuco* (1817), *y Declaratoria de la Independencia* (1816).

20. La duración del viaje aéreo Río de Janeiro-Porto Alegre-Buenos Aires es de 12 horas, y la de Río de Janeiro-Porto Alegre es de 7 horas. ¿Cuál será la duración del viaje Porto Alegre-Buenos Aires?

21. Verificar que la diferencia entre un número formado por tres cifras consecutivas y el número que resulta de invertir las cifras, es siempre 198. (Ej.: 765 — 567 = 198).

22. Escríbase un número formado por tres cifras decrecientes; inviértanse de lugar sus cifras, efectúese la diferencia de los dos números, y a esta diferencia agréguese la misma con las cifras invertidas. Se hallará siempre 1089. Así, por ej., 852 — 358 = 495; 495 + 594 = 1 089.

23. Luis XIV nació en el año 1638; empezó su reinado a los 5 años de edad, y murió en 1715. ¿Qué edad tenía al morir, y cuánto tiempo reinó?

24. Completar las siguientes igualdades y decir qué propiedad se aplica en la resolución del ejercicio:

... — 352 = 874 ; 8736 — ... = 1382 ; 1253 + ... = 2739.

25. Tres personas A, B, C, tienen, en conjunto, $ 30467; las sumas de B y C forman un total de $ 18265, y las de A y C $ 21604. ¿Cuánto tiene cada una?

Resultado: A = $ 12 202 ; B = $ 8 863 ; C = $ 9 402

CAP. II. — MULTIPLICACION.

1. El alquiler trimestral de un apartamento es de $ 240. ¿Cuál es el alquiler anual?

Resultado, $ 960

2. Dos trenes que marchan en sentido contrario por vías paralelas, recorren, respectivamente, 845 y 775 metros por minuto. ¿A qué distancia se encontrarán las locomotoras después de 18 minutos de haberse cruzado?

Resultado, 29 160 metros

3. Una obra consta de 12 tomos; cada tomo tiene 240 páginas: cada página 52 líneas y cada línea 48 letras. ¿Cuántas letras contiene toda la obra?

4. El Sol es 1 384 472 veces más grande que la Tierra, y ésta 49 veces más grande que la Luna. ¿Cuántas veces más grande es el Sol que la Luna?

5. Un auto marcha con la velocidad constante de 15 metros por segundo. ¿Cuánto recorrerá en una hora? (o sea, cuál es su velocidad horaria).

6. Un auto parte de cierto lugar con una velocidad de 750 metros por minuto y después de 10 minutos trata de alcanzarlo otro auto que marcha con una velocidad de 950 metros por minuto. ¿Qué distancia separará aun los dos autos media hora después de la salida del segundo, suponiendo que hayan marchado regularmente?

7. Un obrero gana $ 6 por día de trabajo y gasta $ 120 por mes. Sabiendo que trabaja, término medio, 25 días por mes, ¿cuánto habrá economizado en un año?

8-10. Calcular los valores de las siguientes expresiones aplicando la propiedad distributiva y verificar el ejercicio por otro procedimiento:

$(5 + 2) \times 3$; $(8 + 4 + 13) \times 5$; $(15 - 3) \times 2$.

11-12. Transformar en una suma los siguientes productos: 245×3 ; 10009×12.

13. Sin efectuar la operación, decir en cuánto aumenta el producto 14×3 si se suma el número 5 a uno de los factores.

14. ¿En cuánto disminuye el producto 25×15, si se disminuye el número 3 al multiplicando?

15. Una cuadrilla está formada por 8 obreros, y cada uno de ellos ejecuta 10 metros diarios de una obra; otra cuadrilla está formada por 12 obreros y cada uno de ellos ejecuta 9 metros dia-

rios de la obra. Si cada metro de obra se paga $ 2, ¿cuál será el gasto diario para pagar a todos los obreros?

16. Verificar, efectuando la multiplicación, que si el número 12 345 679 se multiplica por 9 o por cualquiera de sus múltiplos hasta 81, cada producto se compondrá de cifras iguales entre sí.

17. Una persona se encuentra alineada entre dos poblaciones A y B, cuyos relojes están perfectamente regulados con el suyo. Observa que, cuando el reloj de A da las horas, su reloj marca 3 segundos más, y que, después de 5 segundos, percibe las horas del reloj de B. Calcular la distancia entre las dos poblaciones, sabiendo que el sonido recorre 340 metros por segundo.

Resultado, 2 720 metros

18. Una canilla vierte en un depósito 8 litros de agua por minuto, otra 16 litros, y una tercera deja salir del depósito 10 litros. ¿Cuántos litros contendrá el depósito después de 2 horas, si antes que las canillas empezaran a funcionar contenía 350 litros?

Resultado, 2 030

19. Sabemos que un día tiene 24 horas; cada hora 60 minutos, y cada minuto 60 segundos. ¿Cuántos segundos contiene un día?

Resultado, 86 400

20. En el año 1934, las Provincias de Buenos Aires y Santa Fe tenían, en conjunto, 4 663 160 habitantes; Buenos Aires y Córdoba, 4 392 592; Santa Fe y Córdoba, 2 569 516. Calcular la población de cada una de las tres provincias indicadas.

21. Un comerciante compró 315 metros de tela a $ 5 el metro; vendió 145 metros a $ 6 el metro, 93 metros a $ 7 y el resto a $ 4. ¿Cuánto ganó en la venta?

Resultado, 254

22. Se estima que la superficie del cuero cabelludo humano es de 775 centímetros cuadrados, y que cada centímetro contiene a lo sumo 165 cabellos. Demostrar que en una ciudad de 150 mil habitantes existen, por lo menos, dos personas que tienen igual número de cabellos. (*El mayor número de cabellos que puede tener una persona es* $775 \times 165 = \ldots$ *por consiguiente, ...*).

23-26. Escribir los siguientes productos introduciendo el símbolo de potencia:

$5 \times 5 \times 5 \times 5$; $3.3.3.3.3$; $1 \times 1 \times 1$; $3.3.2.3.2.2$

27-30. Calcular las potencias: 1^3 ; 2^5 ; $(5 - 3)^4$; $(1 + 4)^2$.

31. ¿Qué diferencia existe entre el cubo del doble de 2 y el doble del cubo de 2?

32. Una "docena" es un conjunto de 12 objetos; una "gruesa" es un conjunto de doce docenas. Indicar en forma de potencia el número de objetos de una gruesa, y calcular su valor.

33. Al final de un primer año, una rama de una planta se bifurca; al final del segundo año, se bifurcan cada una de estas nuevas ramas y así sucesivamente. Expresar en forma de potencia, el número de ramas que habrá producido la primera, al final del décimo año.

CAP. III. — DIVISION.

1. ¿Cuál es el menor número que es posible restar a 537 para obtener un número divisible por 24?

Resultado, 9

2. ¿Cuál es el mayor número de veces que se puede restar sucesivamente 128 a 1440?

Resultado, 11

3. El cociente de dos números es 14 y el resto 21. ¿Cuál es el dividendo si el divisor es 24?

Resultado, 357

4. Dividir 7845 por 74 y decir qué número debe agregarse al dividendo para obtener un cociente exacto.

Resultado, 73

5-7. Completar las siguientes expresiones, y decir la propiedad que se aplica en cada una:

$... : 835 = 210$; $4165 : ... = 49$; $... \times 64 = 4672$.

8. Dos ruedas dentadas de 12 y 72 dientes respectivamente, se hallan engranadas. ¿Cuántas vueltas dará la menor para cada vuelta que dé la mayor?

Resultado, 6

9. La Tierra da una vuelta alrededor de su eje en 24 horas. ¿Cuántos metros por segundo recorrerá un objeto colocado en el Ecuador, si éste mide 40 003 200 metros?

Resultado, 463

10. La superficie total de la República Argentina es de 2 797 113 kilómetros cuadrados y su población de 12 300 000 habitantes. ¿Cuál es la población por kilómetro cuadrado?

11. Calcular la longitud en metros de una milla marina, sabiendo que es la longitud de un minuto de circunferencia máxima terrestre, teniendo esta última 40 millones de metros aproximadamente.

Resultado, 1852

12. Con igual número de monedas de 20, 10 y 5 centavos, se formó la cantidad de 840 centavos. ¿Cuántas monedas se emplearon?

Resultado, 24

13. En un viaje en ferrocarril desde Santa Fe a San Francisco, se emplean 5 horas. Si los kilometrajes respectivos son de 480 y 717, ¿cuál es la velocidad horaria del ferrocarril? (es decir, el número de kilómetros recorridos en una hora).

14. Un obrero ejecutó un trabajo en dos meses, ganando en total $ 369. ¿Cuánto ganó en el primer mes y cuánto en el segundo, si el número de días que trabajó en el segundo es doble de los que trabajó en el primero?

15. Un auto recorrió 810 kilómetros. Durante la tercera parte de su recorrido, anduvo a 45 kilómetros por hora. ¿Con qué velocidad habrá tenido que recorrer el resto del camino para realizar el viaje completo en 16 horas?

16-17. Calcular los valores de las siguientes expresiones:

$(513.276):12$; $(300:12).5$; $492:3.5:4$; $420:5:3:2:7$.

Resultados: 11 799 ; 125 ; 205 ; 2

18. Multiplicando un número por 6, el resultado por 7, y el nuevo resultado por 11, se obtiene como producto 2310. ¿Cuál es el número?

Resultado, 5

19. Deben dividirse $ 25 700 entre cuatro personas, con la condición de que, a la más anciana, debe corresponderle $ 1 600 más que a cada una de las otras. ¿Cuánto recibió cada persona?

Resultado: 1.ª = 2.ª = 3.ª = $ 6 205 ; 4.ª = $ 7 625

20. Multiplíquese un número cualquiera por 11, al producto agréguese el mismo número, divídase el resultado primero por 6, y luego divídase el cociente por el número primitivo; se obtendrá siempre 2. Indíquense qué propiedades se aplican para justificar este juego.

21. En una comida participaban 12 personas. Habiéndose alejado 4 de ellas sin pagar, cada una de las otras tuvo que pagar $ 5 de más. ¿A cuánto ascendía el costo de la comida?

22. Un contratista de obras compró 24 millares de ladrillos a $ 18 el millar, y los hizo transportar con un carro que carga 800 por viaje. ¿Cuál es el costo total, si cada viaje de carro le cuesta $ 3?

23. La distancia entre dos ciudades es recorrida por un tren en 18 horas con una velocidad media de 48 kilómetros. ¿Cuántas horas necesitaría para recorrerla otro tren que viajara con una velocidad media de 36 kilómetros por hora?

24. Para efectuar un pago de $ 728 se emplearon billetes de $ 1, $ 5 y $ 10; en igual número los billetes de a $ 1 y $ 10, y en número triple los de $ 5. ¿Cuántos billetes se emplearon de cada clase?

25. ¿Cuál es la densidad de la población de la provincia de Santa Fe que, según el último censo, tiene 1 392 467 habitantes, sobre una superficie de 134 827 kilómetros cuadrados? (Calcúlese solamente el cociente entero).

CAP. IV. — DIVISIBILIDAD.

1. Escribir tres números de cuatro cifras cada uno que sean divisibles al mismo tiempo por 2 y por 3.

2. Escribir tres números de cuatro cifras cada uno que sean divisibles al mismo tiempo por 4 y por 5.

3. Escribir tres números: uno de 5 cifras, otro de seis y otro de siete, que sean divisibles por 11.

4. Sin efectuar la división, calcular los restos de dividir los siguientes números por 2, por 3, por 5, por 9, por 11:

535 ; 144; 1470 ; 5640 ; 8371 ; 26364.

5. ¿Por qué, si se escriben dos cifras iguales antes o después de un número divisible por 11, se obtiene otro número también divisible por 11?

6. El número 2061 es divisible por 3. Hallar otros números formados con las mismas cuatro cifras y que sean divisibles por 3 y por 5 ; por 2 y por 5 ; por 2 , por 3 y por 5 .

7. En el número 1406 sustitúyase el cero con una cifra tal que resulte un número divisible por 4 .

8. Verificar mediante algunos ejemplos numéricos, que restando a un número cualquiera la suma de sus cifras, el resultado es siempre divisible por 9 .

9-15. Efectúense las siguientes operaciones y las pruebas por 9 respectivas:

$$3\,021 \times 43 \;;\quad 1\,111 \times 532 \;;\quad 837 \times 543 \;;\quad 45 \times 37 \times 58 \;;$$
$$76440 : 245 \;;\quad 825307 : 123 \;;\quad (642)^2 .$$

16. Si a un número formado por un número par de cifras se le suma el número invertido, verificar que la suma es siempre divisible por 11 (por ej., lo será la suma 3529 + 9253).

17. Indíquese qué cifras se pueden colocar en el lugar del punto en cada uno de los números siguientes, para que resulten divisibles por 4: 54. ; 30. ; 17.6 ; 27.2 ; 15.8

18. Indíquese qué cifras se podrían colocar a la derecha de cada uno de los números siguientes, para obtener números divisibles por 9: 345 ; 107 ; 7536 ; 1084 ; 2118

19. Verificar, mediante algunos ejemplos, que un número es divisible por 4 , si la cifra de las unidades más el doble de la cifra de las decenas, da una suma divisible por 4 .

20. Idem, verificar que un número es divisible por 8 , si la cifra de las unidades agregadas al doble de la cifra de las decenas y al cuádruplo de la de las centenas, da una suma divisible por 8 .

21. Si del cubo de un número se resta el mismo número, verificar que la diferencia es siempre divisible por 3 .

22. Verificar que el cuadrado de un número impar, disminuído en 1 , es siempre divisible por 8 .

23. Reemplazando la letra n por un número entero cualquiera en la expresión $n \times (n + 1) \times (2 \times n + 1)$ verificar que se obtiene siempre un número divisible por 6 .

CAPS. V y VI. —

DIVISORES, MULTIPLOS COMUNES Y NUMEROS PRIMOS

1. Indicar tres pares de números primos entre sí.

2. De los grupos de números que siguen, indicar cuáles son primos entre sí: (12 , 35) ; (16 , 25 , 15) ; (10 , 21 , 143).

3-5. Calcular, por el método de las divisiones sucesivas, el M. C. M. de los siguientes grupos de números: (1050 , 840) ; (1620 , 2184) ; (5040 , 3600).

6-8. Idem para los grupos de números: (1800 , 2016 , 2610) ; (2520 , 1800 , 4200) ; (350 , 252 , 396 , 1296).

9-11. Calcular el M. C. M. de los números de los siguientes grupos, aplicando la Propiedad III de la página 84: (48 , 16) ; (840 , 720) ; (12 , 51).

12-18. Averiguar si son primos o compuestos los siguientes números: 221 ; 361 ; 769 ; 2047 ; 3577 ; 8403 ; 4739.

19-24. Descomponer en sus factores simples los siguientes números:

4320 ; 6480 ; 12540 ; 4050 ; 81000 ; 67375 .

25-30. Mediante la descomposición en sus factores primos, calcular:

D(16 , 48 , 72) ; D(1040 , 300) ; D(1232 , 4532 , 5632).

M(15 , 40 , 60) ; M(90 , 180 , 945) ; M(2970 , 1485) .

Resultados: 8 ; 20 ; 44 ; 120 ; 3 780 ; 2 970

31-32. Determinar, mediante la descomposición simultánea en factores primos, el M. C. D. de las dos ternas de números siguientes: (288 , 432 , 576) ; (648 ; 1260 ; 1680) .

33-37. Hallar todos los divisores simples y compuestos de los números: 12 ; 56 ; 192 ; 336 ; 1080 .

38. Hallar el mayor número que divida a los números 2538 , 3107 , 2211 , y dé por restos 18 , 20 y 6 , respectivamente.

Resultado: 63

39. Se desea embaldosar el piso de un salón rectangular de 2520 cm. de largo por 410 cm. de ancho, con baldosas cuadradas del mayor lado posible. ¿Cuánto medirá el lado de dichas baldosas, y cuántas se necesitarán?

Resultado: lado = 10 cm. ; n = 10 332

40. Un comerciante cobra cierto crédito cada 15 días de parte de A, cada 20 de B, cada 30 de C y cada 45 de D. ¿Cada cuántos días se realizarán los cobros de los créditos en el mismo día?

Resultado, 180

41. Un propietario de tres terrenos cuyas áreas son: 1680 m.^{2}, 1920 m.^{2}, 2400 m.^{2}, desea venderlos subdividiéndolos en fracciones todas iguales y de la mayor área posible. ¿Cuál será el área de cada fracción y cuántas podrá hacer?

Resultado: 240 m.^{2} ; n = 25

42. El número de alumnos de un colegio no llega a 500. Contándolos de 4 en 4, o de 5 en 5, o de 6 en 6, o de 7 en 7, siempre sobra 1. ¿Cuántos son los alumnos?

43. Un campo de forma rectangular tiene 220 metros de largo por 180 de ancho. ¿Cuál será la longitud de la mayor cinta métrica que mida exactamente las dos dimensiones?

44. Alrededor de una plaza deben colocarse lámparas eléctricas a la mayor distancia posible una de la otra, y de modo que entre dos consecutivas exista siempre la misma distancia. Si los lados de la plaza son, respectivamente, 120 m., 140 m., 160 m. y 180 m., calcular el número de lámparas que se necesitan.

45. Una campana suena con 10 segundos de intervalo entre dos repiques, otra con 15 y una tercera con 18 segundos de intervalo. Si dan el primer golpe simultáneamente, ¿después de cuántos segundos volverán a coincidir los repiques?

46. Sabiendo que el M. C. D. de dos números es 60, su M. C. M. 1800, y el menor de los dos números 180, calcular el número mayor.

47. Verificar que el número de los divisores de un número cualquiera es par, excepto que dicho número sea un cuadrado.

48. Verificar que el cuadrado de un número primo (mayor que 3) disminuído en 1, es siempre divisible por 12.

CAPS. VII y VIII. — FRACCIONES.

1. Indicar cuáles de las fracciones siguientes son propias, cuáles impropias y cuáles aparentes:

8/3 ; 9/12 ; 35/7 ; 5/4 ; 9/7.

2. Ordenar por valores crecientes las fracciones: 5/8, 3/8, 9/8.

3. Ordenar por valores decrecientes las fracciones: 9/4, 9/5, 9/2.

4. ¿Cuáles son las fracciones con denominador 4 comprendidas entre los números 7 y 10?

Resultado: entre 28/4 y 40/4

5. Expresar: 8 *en tercios; 12 en quintos;* 5 en *catorceavos.*

6-13. Reducir a su más simple expresión las fracciones: 9/15 ; 20/16 ; 12/36 ; 140/350 ; 540/918 ; 5005/605 ; 27036/76032 ; 120076/30008.

14. Un grado del termómetro centígrado vale $^{80}/_{100}$ de un grado Réaumur. Expresar esta relación mediante una fracción irreducible.

Resultado. 4/5

15. Transformar la fracción $^{7}/_{5}$ a otra que tenga por denominador uno de los números 20, 100, 215.

Resultados: 28/20 ;; 140/100 ; 301/215

16-23. Simplificar las siguientes fracciones antes de efectuar las operaciones que se indican en ellas:

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{7 . 4 \cdot 5}; \quad \frac{8 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 25}; \quad \frac{12 \cdot 18 \cdot 21}{7\,(2 \cdot 3)^2}; \quad \frac{42 \cdot 33 \cdot 5}{9 \cdot 7 \cdot 11};$$

$$\frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5}{3^2 \cdot 4 \cdot 5^2} \quad \frac{8 \cdot 12 \cdot 25}{(2 \cdot 5)^4 \cdot 3} \quad \frac{3 \cdot 7^2 \cdot 22}{49 \cdot 3^2 \cdot 11}. \quad \frac{48 \cdot 15}{16 \cdot 9 \cdot 7}.$$

Resultados: 6/7 ; 4/5 ; 18 ; 10 ; 3/5 ; 2/25 ; 2/3 ; 5/7

24-31. Completar las siguientes igualdades:

$$\frac{3}{5} = \frac{}{35}; \quad \frac{36}{48} = \frac{}{28}; \quad \frac{5}{12} = \frac{}{48}; \quad \frac{5}{23} = \frac{}{253};$$

$$\frac{42}{54} = \frac{7}{} \quad \frac{7}{6} = \frac{}{72}; \quad \frac{9}{16} = \frac{}{144}. \quad \frac{77}{56} = \frac{}{80}.$$

32-37. Reducir a común denominador, después de efectuar las simplificaciones, los siguientes grupos de fracciones:

$$\frac{1}{2}, \frac{6}{3}, \frac{10}{4}; \quad \frac{2}{10}, 3, \frac{1}{2}; \quad \frac{39}{10}, \frac{3}{11}, \frac{4}{20};$$

$$\frac{1}{3}, 5, \frac{3}{4}. \quad \frac{125}{100}, 9, \frac{3}{4}. \quad \frac{7}{100}, \frac{11}{9}, \frac{14}{15}.$$

38-39. Reducir al mínimo común denominador los siguientes grupos de fracciones: 15/4 , 3 , 21/27 , 40/30 ; 15/30 , 70/45 , 4 , 126/90 .

40. En el juego del "tiro al blanco", Eduardo erró 4 tiros en 27; Adolfo 1 en 7. ¿Quién fué más hábil?

Resultado, Adolfo

Adición y sustracción.

41-46. Calcular mentalmente, y reducir los resultados a su mínima expresión:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{2}; \qquad \frac{1}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}; \qquad \frac{6}{8}-\frac{3}{8};$$

$$\frac{4}{7}+\frac{2}{7}. \qquad \frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}. \qquad \frac{4}{5}-\frac{3}{5}.$$

47-51. Efectuar las siguientes operaciones y simplificar los resultados: $^1/_3 + {^1/_5}$; $^5/_4 + {^2/_7}$; $^8/_7 - {^{11}/_{12}}$; $^9/_8 - {^5/_4}$; $^1/_2 + {^3/_5} - {^7/_{15}}$.

52. Un obrero hace un trabajo en 8 días, otro lo haría en 6, y un tercero en 12 días. ¿En cuánto tiempo lo harían trabajando juntos?

Resultado, 2 días y 2/3

53. En cierto momento se hallan en la clase, estudiando, $^2/_5$ del número de alumnos que forman el grupo, $^1/_3$ leyendo y $^1/_5$ escribiendo. ¿De cuántos alumnos se compone el grupo, teniendo presente que faltan 4?

Resultado, 60

54-57. Efectuar las siguientes operaciones y simplificar:

$$\frac{15}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{7}{5}; \qquad \left(\frac{5}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right);$$

$$\frac{6}{9}-\frac{4}{5}+\frac{14}{3}-\frac{7}{8}. \qquad \frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{20}\right)+\frac{7}{8}.$$

Resultados: 49/15 ; 97/60 ; 439/120 ; 107/40

58. Transformar mentalmente en números mixtos: $^{17}/_5$; $^{23}/_{12}$.

59-65. Efectuar las siguientes operaciones y simplificar:

$$2\frac{1}{4}+3\frac{2}{5}; \qquad 6\frac{2}{7}-\frac{1}{3}; \qquad \frac{5}{6}+2\frac{3}{4}.$$

$$7\frac{1}{2}+5-4\frac{1}{5}. \qquad 6\frac{4}{7}-\left(2\frac{5}{6}+\frac{3}{8}\right)+4\frac{2}{5}.$$

$$2\frac{3}{4}-\left(\frac{6}{7}+\frac{2}{3}\right). \qquad 9\frac{7}{12}-\left(5\frac{2}{3}-\frac{3}{7}-\frac{4}{5}\right).$$

Resultados: 113/20 ; 125/21 ; 43/12 ; 83/10 ; 6521/840 ; 103/84 ; 2161/420

Multiplicación y división

66. Hacer 5 veces mayor la fracción 4/15: 1.º) sin alterar el denominador; 2.º) sin alterar el numerador. Idem tomar la mitad de la fracción.

67. Si un metro de una tela cuesta \$ 5, ¿cuánto cuestan 2 $^3/_5$ metros de la misma tela?

Resultado, \$ 13

68. El sonido recorre, aproximadamente, 340 metros por segundo. ¿A qué distancia se produjo una descarga eléctrica, si se oyó el trueno después de 7 $^2/_3$ segundos de haberse visto el relámpago?

Resultado, 2 606 m.

69-79. Efectuar las siguientes operaciones:

$$\frac{4}{9}\times\frac{5}{6};\qquad \frac{11}{4}\times 1\frac{2}{3};\qquad 2\frac{1}{2}\times 3\frac{11}{4};$$

$$\frac{3}{10}\times\frac{7}{12}.\qquad \frac{33}{5}\times 3\frac{1}{2}.\qquad 5\frac{2}{3}\times 7\frac{52}{5}.$$

$$\frac{13}{5}\times 1\frac{1}{4}\times\frac{8}{52};\qquad 2\frac{1}{3}\times\frac{52}{5}\times\frac{15}{14}.$$

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right);\qquad \left(3\frac{1}{2}-\frac{15}{10}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\right).$$

$$\frac{3}{2}\cdot\left(2+\frac{3}{5}+\frac{1}{6}-2\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}.$$

$$\left(1\frac{2}{3}+\frac{6}{7}-\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{9}+2\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{14}.$$

80-83. Calcular los valores de las siguientes expresiones:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{5};\qquad \left(\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)+\frac{3}{4}.$$

$$\left(4+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{3}{7}\right)+\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{8}\right)-\frac{4}{5}\cdot\frac{35}{8}-\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{3}.$$

$$\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{10}\right)\frac{1}{1+{}^1/_{10}}+\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2+{}^5/_8}.$$

Resultados: 9/20 ; 3/2 ; 31/12 ; 37/12

84.-93. Efectuar las siguientes operaciones:

$$\frac{3}{5}:\frac{4}{3};\qquad \frac{3}{11}:6\frac{4}{5};\qquad 2\frac{31}{4}:5\frac{4}{5};$$

$$\frac{6}{7}:\frac{1}{8}.\qquad 4\frac{7}{13}:\frac{7}{9}.\qquad 7\frac{53}{3}:8\frac{62}{7}.$$

$$\left(72:\frac{1}{2}\right)\times 1\frac{3}{4};\qquad \left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right):\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right);$$

$$4\frac{2}{3}\times 6\frac{1}{4}:3\frac{1}{5}.\qquad \left(3\frac{1}{2}-\frac{15}{10}\right):\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\right).$$

94-99. Calcular los valores de las siguientes expresiones:

$$\frac{\frac{47}{6}}{\frac{3}{2}+1\frac{1}{4}+\frac{7}{12}}\,; \quad \frac{\left(3+\frac{1}{2}\right)\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}}\,; \quad \frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{15}}{3\frac{5}{6}-\left(\frac{2}{3}-\frac{25}{100}\right)}\,.$$

$$\left[\frac{\frac{3}{8}}{1+\frac{1}{4}}+\frac{7}{10}\left(1+\frac{1}{14}\right)\right]:\frac{3}{5}+\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\,.$$

$$\frac{\left(3+\frac{2}{7}\right)\left(5+\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{23}{14}-1\right):\left(1-\frac{15}{23}\right)}\,; \quad \frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{9}:\frac{5}{18}+\frac{3}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{5}{2}+1\frac{1}{20}-3\right):\left(1-\frac{4}{5}\right)}\,.$$

Resultados: 47/20 ; 14/3 ; 48/205 ; 39/20 ; 92/9 ; 73/55

100. En los exámenes de fin de curso, la mitad de los alumnos de cierto Colegio fueron reprobados, pero, de éstos, sólo $^1/_3$ se presentó a los exámenes de reparación y sólo $^4/_5$ de estos últimos fueron aprobados. Calcular el número total de alumnos examinados a fin de curso, sabiendo que en los dos períodos de exámenes fueron aprobados en total 76 alumnos.

Resultado, 120

101. Calcular el cuadrado y el cubo de 1/2 , 5/4 , 3 $^1/_5$.

102-110. Efectuar las siguientes operaciones:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3; \quad \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3; \quad \left(\frac{5}{3}\right)^4:25^2\,;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4:\frac{3}{8}; \quad \left(\frac{3}{4}\right)^5:\left(\frac{9}{16}\right)^2; \quad 27:\left(\frac{3}{2}\right)^3;$$

$$\left(3+\frac{1}{2}\right)^3-\left(2+\frac{1}{4}\right)^2; \quad \left(\frac{35}{8}-3\right):\left(2+\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$\frac{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right):2+\left[\left(1-\frac{1}{2}\right):2\right]^2}{2+\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right):2}\,.$$

Resultados: 1/32 ; 729/15625 ; 1/81 ; 1/6 ; ¾ ; 8 ;
213/16 ; 11/50 ; 11/4

111. El sueldo mensual de cierto empleado es \$ 360, y el mes próximo pasado ahorró $^2/_{15}$ del mismo. ¿Cuánto ahorró en dicho mes?

112. Leí un libro en 4 días. En el primero leí $^1/_5$, en el segundo $^1/_3$ y en el tercero $^3/_{10}$. ¿Qué parte leí en el cuarto día?

113. Un surtidor vierte 9 litros de agua en 5 minutos, y otro 12 litros en 7 minutos. ¿Qué cantidad de agua vierten juntos en un minuto?

114-117. Efectuar las siguientes operaciones:

$$2\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\left(3-\frac{6}{7}\right)-2\left(1\frac{1}{5}-\frac{2}{10}\right).$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{13}-\frac{1}{2}\left(2+\frac{4}{5}-1\frac{3}{5}\right)+6\frac{1}{4}.$$

$$\left(108\frac{5}{6}+20\frac{11}{36}-126\frac{7}{24}\right)\times\left(11\frac{3}{4}-9\frac{7}{8}\right):\frac{205}{576}.$$

$$\left(\frac{11\frac{5}{8}-9\frac{3}{16}}{25-24\frac{7}{32}}-\frac{43}{75}+\frac{4-\frac{15}{4}}{6\frac{5}{8}-5\frac{17}{12}}\right)\times\left(\frac{1512}{2808}-\frac{5}{39}\right):\frac{281}{2925}.$$

118. Se ha dibujado un objeto reduciéndolo de 50 a 3. De este dibujo se hizo otra reducción de 5 a 1. ¿Qué longitud tendrá una línea en esta segunda reducción, si tenía 75 metros de tamaño natural?

119. La duración del año, según Julio César, era de 365 $\frac{1}{4}$ días; hoy, se considera de 365 $^{6}/_{25}$. ¿Qué error cometía JulioCésar?

120. Un depósito de agua recibe cada minuto 12 $^{3}/_{5}$ litros de agua y pierde 3 $^{1}/_{4}$. ¿Cuántos litros tendría que recibir de más para que por cada minuto pudiera retener el depósito 12 litros?

121. Qué cantidad de harina se necesita para fabricar 228 kilogramos de pan, si el peso de la harina es los $^{5}/_{6}$ del del pan que se fabrica?

122. Un tren recorre 60 kilómetros en 1 $\frac{1}{4}$ hora. ¿Cuánto empleará para hacer un viaje de 422 $^{2}/_{5}$ kilómetros, si en las paradas en las estaciones pierde en conjunto $^{3}/_{4}$ de hora?

123. De un capital se emplean $^{3}/_{8}$ en la compra de terrenos, $^{2}/_{7}$ en la compra de títulos industriales. Quedan aun $ 1900. ¿A cuánto ascendía el capital?

124. Por descuido, en lugar de agregar un cero al numerador de la fracción $^{3}/_{25}$, lo agregué al denominador. La fracción $^{3}/_{250}$ resultante en cuanto difiere de la otra $^{30}/_{25}$ que debía de haber obtenido.

125. Cuatro socios fueron electos en tres distintas sesiones. El primero tuvo 26 votos sobre 38; el segundo 32 sobre 47, y el tercero 34 sobre 55. ¿Cuál de los socios ha sido mejor votado?

126. Un premio de $ 2340 debe repartirse entre un coronel, un mayor, un capitán y un teniente, de modo que para cada grado la cuota aumente en la mitad de la anterior. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

127. Para resolver cierto problema, un estudiante emplea $^{2}/_{7}$ del tiempo prefijado para meditarlo, $^{1}/_{2}$ para resolverlo, y el resto del tiempo para corregirlo y pasarlo en limpio. Luego observa que para corregirlo y pasarlo en limpio, empleó 16 minutos menos que para meditarlo. ¿Cuál era el tiempo prefijado?

TABLA DE CUADRADOS Y CUBOS
de los números 1 a 200

n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3
1	1	1	51	2601	132651	101	10201	1030301	151	22801	3442951
2	4	8	52	2704	140608	102	10404	1061208	152	23104	3511808
3	9	27	53	2809	148877	103	10609	1092727	153	23409	3581577
4	16	64	54	2916	157464	104	10816	1124864	154	23716	3652264
5	25	125	55	3025	166375	105	11025	1157625	155	24025	3723875
6	36	216	56	3136	175616	106	11236	1191016	156	24336	3796416
7	49	343	57	3249	185193	107	11449	1225043	157	24649	3869893
8	64	512	58	3364	195112	108	11664	1259712	158	24964	3944312
9	81	729	59	3481	205379	109	11881	1295029	159	25281	4019679
10	100	1000	60	3600	216000	110	12100	1331000	160	25600	4096000
11	121	1331	61	3721	226981	111	12321	1367631	161	25921	4173281
12	144	1728	62	3844	238328	112	12544	1404928	162	26244	4251528
13	169	2197	63	3969	250047	113	12769	1442898	163	26569	4330747
14	196	2744	64	4096	262144	114	12996	1481544	164	26896	4410944
15	225	3375	65	4225	274625	115	13225	1520875	165	27225	4492125
16	256	4096	66	4356	287496	116	13456	1560896	166	27556	4574296
17	289	4913	67	4489	300763	117	13689	1601613	167	27889	4657463
18	324	5832	68	4624	314432	118	13924	1643032	168	28224	4741632
19	361	6859	69	4761	328509	119	14161	1685150	169	28561	4826809
20	400	8000	70	4900	343000	120	14400	1728000	170	28900	4913000
21	441	9261	71	5041	357911	121	14641	1771561	171	29241	5000211
22	484	10648	72	5184	473248	122	14884	1815848	172	29584	5088448
23	529	12167	73	5329	389017	123	15129	1860867	173	29929	5177717
24	576	13824	74	5476	405224	124	15376	1906624	174	30276	5268024
25	625	15625	75	5625	421875	125	15625	1953125	175	30625	5359375
26	676	17576	76	5776	438976	126	15876	2000376	176	30976	5451776
27	729	19683	77	5929	456533	127	16129	2048383	177	31329	5545233
28	784	21952	78	6084	474552	128	16384	2097152	178	31684	5639752
29	841	24389	79	6241	493039	129	16641	2146689	179	32041	5735339
30	900	27000	80	6400	512000	130	16900	2197000	180	32400	5832000
31	961	29791	81	6561	531441	131	17161	2248091	181	32761	5929741
32	1024	32768	82	6724	551368	132	17424	2299968	182	33124	6028568
33	1089	35937	83	6889	571787	133	17689	2352637	183	33489	6128487
34	1156	39304	84	7056	592704	134	17956	2406104	184	33856	6229504
35	1225	42875	85	7225	614125	135	18225	2460375	185	34225	6331625
36	1296	46656	86	7396	636056	136	18496	2515456	186	34596	6434856
37	1369	50653	87	7569	658503	137	18769	2571353	187	34969	6539203
38	1444	54872	88	7744	681472	138	19044	2628072	188	35344	6644672
39	1521	59319	89	7921	704969	139	19321	2685619	189	35721	6751269
40	1600	64000	90	8100	729000	140	19600	2744000	190	36100	6859000
41	1681	68921	91	8281	753571	141	19881	2803221	191	36481	6967871
42	1764	74088	92	8464	778688	142	20164	2863288	192	36864	7077888
43	1849	79507	93	8649	804357	143	20449	2924207	193	37249	7189057
44	1936	85184	94	8836	830584	144	20736	2985984	194	37636	7301384
45	2025	91125	95	9025	857375	145	21025	3048625	195	38025	7414875
46	2116	97336	96	9216	884736	146	21316	3112136	196	38416	7529536
47	2209	103823	97	9409	912673	147	21609	3179523	197	38809	7645373
48	2304	110592	98	9604	941192	148	21904	3241792	198	39204	7762392
49	2401	117649	99	9801	970299	149	22201	3307949	199	39601	7880599
50	2500	125000	100	10000	1000000	150	22500	3375000	200	40000	8000000

Este libro se terminó de imprimir
el 15 de marzo de 1937, en
los Talleres Gráficos de
Sebastián de Amorrortu
e Hijos - Ayacu-
cho 774 - Bue-
nos Aires