COLECCIÓN DIDACTICA
DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES
PUBLICADA POR

J. REY PASTOR

PARA LOS PROGRAMAS DE 1937 DE ENSEÑANZA SECUNDARIA

GEOMETRIA

SEGUNDA PARTE

BUENOS AIRES
1938

GEOMETRIA

SEGUNDO CURSO

COLECCIÓN DIDACTICA
DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES

PUBLICADA POR

J. REY PASTOR

PARA LOS PROGRAMAS DE 1937 DE ENSEÑANZA SECUNDARIA

GEOMETRIA

SEGUNDA PARTE

BUENOS AIRES
1938

PROLOGO

El nuevo programa oficial de Geometría del espacio se limita a reproducir con escasas alteraciones de ordenación (que seguramente tendrán alguna justificación, aunque la Comisión técnica no las ha explicado) el índice del Capítulo II del conocido epítome que hace un tercio de siglo publicó Emilio Borel para uso de las escuelas primarias y que después fué utilizado para los cursos elementales de Artes y Oficios, escuelas de institutrices y primer ciclo de bachillerato, como ampliación de la enseñanza de párvulos y preparación para el bachillerato propiamente dicho.

No dejará de producir sorpresa este descenso brusco desde una enseñanza matemática totalmente abstracta y con pretensiones críticas de índole universitaria, a otra de nivel netamente primario, singularizándose así el bachillerato argentino, ya por uno o por el otro extremismo. Se contestará quizás que aquella acción exagerada obliga a esta reacción igualmente exagerada y aun se aducirá el ejemplo del péndulo, que propende a alcanzar su posición de equilibrio oscilando alternativamente a uno y otro lado de ella; pero, ¿cuántas oscilaciones, esto es, cuántos cambios de planes y de programas de estudio serán necesarios para acercarse asintóticamente al bachillerato estable?, y aún ocurre preguntar si tantos y *tales cambios, ensayos y tanteos, serán beneficiosos; y si no habría sido quizá más conveniente informarse antes de las conclusiones universalmente admitidas acerca del carácter y finalidad del bachillerato, dotando así al país de una enseñanza secundaria digna del alto grado de cultura que ya tiene alcanzado.*

Empresa imposible es remediar la situación dentro del estrecho marco de los programas oficiales; pero, aun acatándolos literalmente, habría sido cobarde renunciación a principios doctrinales limitarse a diluir en algunas páginas más el contenido del escaso centenar de ellas que componen el capítulo II del epítome de Borel; materia que escasamente alcanza para un trimestre de enseñanza, ya que el libro entero está escrito para un solo curso.

MOSTRAR objetos, evocar imágenes y despertar intuiciones es provechosa labor educativa siempre que se cultive parejamente la razón pura y se aprenda a DEMOSTRAR; si no como sistema, al menos como modelo.

Conservando y aun acentuando el contacto con la realidad viva, multiplicando los ejemplos y ejercicios concretos, según hemos preconizado en varias ocasiones, hemos creido no obstante un deber de dignidad profesional contribuir en nuestra modesta esfera de acción a que los bachilleres tengan idea de lo que es una demostración geométrica, y adquieran alguna noticia de la génesis de los conocimientos científicos que les suministramos en las aulas bajo formas cristalizadas.

CAPITULO I

RECTAS Y PLANOS

1.—EL PLANO.

El tablero de la mesa o el pizarrón de la clase nos dan la idea de trozo de plano, prescindiendo de su espesor. Imaginándolo prolongado indefinidamente, tenemos la idea de *plano geométrico.*

En la **superficie** del pizarrón o del tablero de la mesa, es decir, **sobre** el pizarrón y **sobre** el tablero de la mesa, podemos señalar cuantos puntos se quiera.

Si también queremos dibujar rectas, empezaremos por apoyar la regla sobre el tablero o sobre el pizarrón; decimos que la **superficie del tablero** es **plana** cuando, aplicada sobre él una regla, coincide exactamente en **cualquier** posición que se coloque.

La propiedad característica del plano, que le sirve indirectamente de definición, es, por tanto ésta:

> **Cada plano tiene infinitos puntos y fuera de él hay infinitos puntos.**
>
> **La recta determinada por dos puntos cualesquiera del plano está situada en él.**

NOTA. — En la práctica se coloca la regla de canto, para evitar la flexión, inevitable por su poco espesor.

No basta que haya contacto en una sola posición, ni bastaría tampoco que lo hubiera en infinitas posiciones, para asegurar que la superficie es plana; por ejemplo: se puede aplicar de infinitos modos una regla sobre un caño cilíndrico obteniendo coincidencia perfecta y sin embargo no es plana esta superficie.

2.—INTERSECCION DE PLANOS.

Puesto que el plano contiene la recta completa si contiene dos de sus puntos, resulta que, si A y B son dos puntos comunes a dos planos, toda la recta AB está situada en ambos.

Cabe que dos planos carezcan de puntos comunes, como se ve por ejemplo en el piso y el techo de una habitación, si se suponen indefinidamente prolongados; pero si dos planos tienen un punto común, tienen algún otro y por tanto toda una recta común, que se llama **intersección** de ambos.

Enunciaremos esta observación diciendo: *La intersección de dos planos que se cortan es una recta.*

3.—POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS.

PLANO Y PLANO. — Puesto que sólo caben dos posiciones relativas de dos planos, conviene introducir dos términos para caracterizarlas.

Dos planos se llaman p a r a l e l o s cuando no tienen ningún punto común.

Dos planos se llaman s e c a n t e s cuando tienen una recta común.

EJEMPLOS: El cielo raso y el piso de una habitación son **paralelos**; el piso es **secante** de todas las paredes. Las paredes contiguas se **cortan** en una recta, pero en una habitación de planta rectangular las paredes opuestas son **paralelas.**

RECTA Y PLANO. — Este mismo ejemplo nos muestra las diversas posiciones de una recta respecto de un plano. Si en el pizarrón o en la pared dibujamos rectas, observamos que algunas de ellas *no cortan* al plano del piso; tales son, por ejemplo, los bordes superior e inferior del pizarrón; otras, en cambio, convenientemente prolongadas, cortan al piso *en un solo punto;* finalmente, la pared en que está el pizarón tiene una recta *situada* en el piso.

Estas observaciones nos muestran las tres posiciones de una recta respecto de un plano, que enunciaremos así:

Una recta y un plano se llaman paralelos si carecen de puntos comunes.

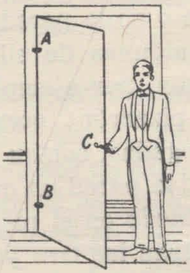
Una recta y un plano se dicen secantes si tienen un solo punto común.

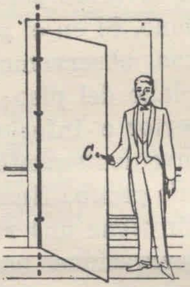
Además de estas dos posiciones, sólo cabe que la recta esté *situada* o *contenida* en el plano.

4.—DETERMINACION DE UN PLANO.

La frase "*determinar* un plano" mediante condiciones prefijadas, quiere decir que existe *un* plano, y *sólo uno,* que cumple dichas condiciones. La demostración debe, pues, constar de dos partes.

Una puerta lisa puede considerarse como un trozo de plano si se prescinde del espesor. Si la fijamos al marco por una sola bisagra, la puerta no queda fija, y girando alrededor de ese punto fijo puede tomar infinitas posiciones. Si la fijamos con dos bisagras A y B, el movimiento de la puerta queda ya menos libre, pues sólo puede girar alrededor de su arista; finalmente, si fijamos un tercer punto de la puerta, caben dos casos: si este punto se elige en la misma línea de las dos bisagras (p. ej., si se coloca una tercera bisagra bien alineada con las otras dos), la puerta sigue quedando libre en su movimiento; pero si ese tercer punto C que se fija no está alinea-





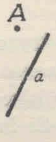
do, —por ejemplo: si se sujeta la manija del picaporte con la mano,— la puerta que tiene ya tres puntos fijos n o a l i n e a d o s no se puede mover, es decir, queda d e t e r m i n a d a su posición en el espacio.

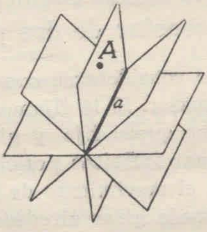
También queda determinada fijando la recta A B y el punto C. He aquí, pues, dos modos de fijar o determinar el plano, y podemos enunciar:

Por una recta pasan infinitos planos. Una recta y un punto no perteneciente a ella determinan un plano, al cual pertenecen.

Tres puntos no alineados determinan un plano, al cual pertenecen.

La primera figura representa una recta **a** y un punto A no situado en ella.





La segunda figura representa los infinitos planos que pasan por la recta **a**, los cuales forman un **haz de planos.**

La tercera figura representa el **único** de esos infinitos planos que pasa por el punto A. Éste es el significado de la **determinación** del plano por un punto y una recta..

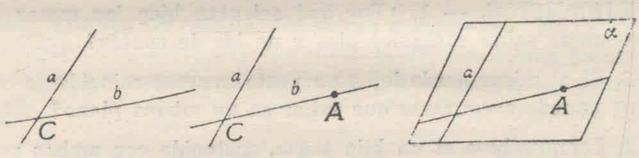
He aquí un tercer modo de determinar el plano, que puede justificarse por la observación o bien deducirse de los anteriores, es decir, cabe demostrarlo, como hacemos a continuación, a modo de ejemplo de método racional.

TEOREMA. — Dos rectas que se cortan determinan un plano, al cual pertenecen.

HIP.) a y b se cortan en C.

TESIS) 1.º Hay un plano a que contiene a y b.

2.º Si dos planos contienen a y b, coinciden.



Demostración.—1.º) La recta a y un punto cualquiera A de b distinto de C determinan un plano α

2º) Si otro plano β contiene a y b, también contiene a y A; luego coincide con α, según el primer mé-
que, además de contener la recta a, contiene la b, por pertenecer a él los dos puntos A y C.
todo de determinación del plano.

APLICACION: Según acabamos de ver, una recta que cor-

ta en puntos distintos a dos rectas secantes engendra un plano. Así hacen los pisos los albañiles, como indica la figura, apoyando una regla sobre dos listones fijos que tienen el punto común A, o bien un hilo tirante.

La definición de rectas paralelas exige que estén en un plano; y no puede haber otro que las contenga, en virtud del primer método de determinación del plano; luego resulta un cuarto método para la determinación del plano:

Dos rectas paralelas determinan un plano, al cual pertenecen.

APLICACION. — Los albañiles colocan dos reglas o dos hilos paralelos y engendran un plano mediante otro hilo tirante que se apoya en ambos.

EJERCICIOS. — 1. ¿Por qué asientan bien las mesas de tres patas sobre cualquier piso y no las de cuatro?

2. Si al mirar desde lejos un poste aparece coincidente con otro ¿puede asegurarse que están en un mismo plano?

3. Compruébese si un hilo tenso, sostenido con ambas manos, está o no en un plano con rectas trazadas en el suelo o en las paredes.

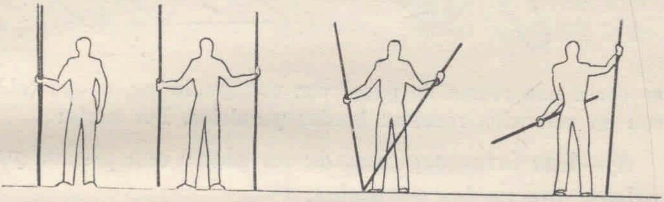
4. Mediante un hilo con un nudo intermedio, trazar por un punto del espacio (por ejemplo, una esquina de un mueble), la paralela a una recta trazada en el suelo.

5.—POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS.

Hemos visto en el 1er. curso que si dos rectas están en un plano, *se cortan* o *son paralelas;* cabe un tercer caso: que las dos rectas no estén en un mismo plano, y entonces diremos que *se cruzan* *.

(*) Nos parece esta momenclatura mejor que la de rectas **alabeadas**, pues la palabra arábiga **álabe** de que procede indica **curvatura**.

Así como en Geometría plana puede afirmarse el paralelismo de dos rectas cuando no se cortan, en Geometría del espacio cabe que se crucen. Para demostrar el paralelismo es preciso probar: que *no se cortan* y que *están* en un plano.



La 1ª figura representa dos rectas coincidentes, materializadas por dos jalones superpuestos; la 2ª, dos rectas **paralelas**; la 3ª, dos rectas **secantes**; la 4ª, dos rectas que se **cruzan**.

6.—PARALELISMO DE RECTAS Y PLANOS

La observación de objetos reales conduce a estas conclusiones evidentes, que no exigen demostración:

a)—*Dos planos paralelos a otro son paralelos entre sí.*

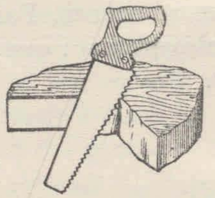
EJEMPLOS: Los diversos planos que forman los pisos de una casa. Las cartas de una baraja. Las hojas de un libro cerrado.

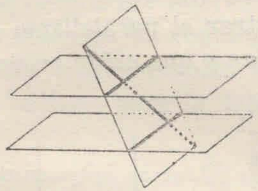
En estos ejemplos se observa, además:

b)—*Por cada punto pasa un plano paralelo a otro y sólo uno.*

c)—*Si una recta o plano corta a un plano, corta a todos sus paralelos.*

Fijémonos, por ejemplo, en una pared de un edificio la cual corta a todos sus pisos, siendo paralelas las intersecciones. Si





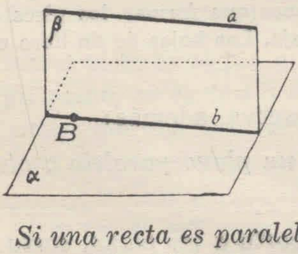
se corta una resma de papel con una guillotina, o una tabla con un serrucho, resultan bordes paralelos. Por tanto:

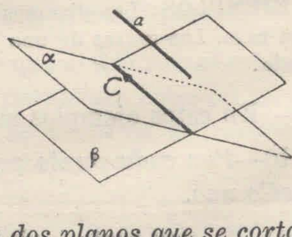
d)—*Las intersecciones de un plano con planos paralelos son rectas paralelas.*

Si una recta a es paralela a un plano, los diversos planos que pasan por ella determinan sobre éste rectas paralelas a aquélla; recíprocamente, basta que a sea paralela a una sola recta del plano para que sea paralela a éste. Ambas propiedades se reúnen en este enunciado:

e)—*La condición necesaria y suficiente para que una recta sea paralela a un plano es que sea paralela a una recta de éste.*

De otro modo: *Si* a *es paralela al plano* α, *y por un punto* B *de éste se traza la paralela a la recta* a, *está contenida en* α.

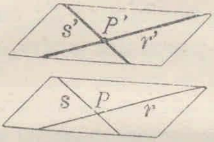




Si una recta es paralela a dos planos que se cortan, es paralela a la intersección de ambos.

En efecto: Si por un punto C de la intersección $\alpha\beta$ trazamos la paralela a la recta a, debe estar en α, en virtud de e), y por la misma razón debe estar en β luego es la intersección $\alpha\beta$.

No basta, como vemos, que un plano π', contenga una recta paralela a la recta del plano π para que sea paralelo a π, puesto que por r pasan infinitos pla-



nos secantes del π; pero si por el punto P' se traza la recta s' paralela a otra recta s secante de la r, el plano paralelo queda determinado. Es decir:

g) *Si por un punto exterior a un plano se trazan dos rectas paralelas a él, el plano que dichas rectas determinan es paralelo al primero.*

De otro modo:

Todas las rectas paralelas a un plano trazadas por un punto exterior al mismo, pertenecen al plano paralelo a aquel trazado por dicho punto.

EJERCICIOS — 1. Con una hoja de cartón suficientemente ancha, de bordes paralelos, trazar por un punto exterior al plano de la mesa la recta paralela a una recta trazada sobre este plano.

2. Comprobar si una recta trazada en la pared es paralela al suelo (o sea horizontal), sin otro instrumento que un hilo.

3. Con un hilo, en el cual se formarán nudos adecuados, trazar por un punto del espacio la recta paralela al suelo y a una pared.

7.—LA TRASLACION

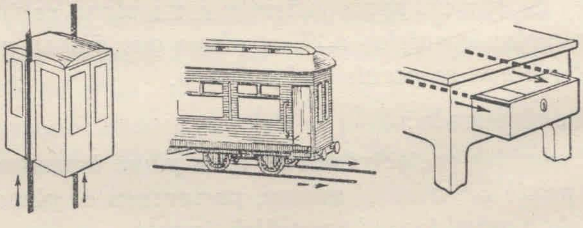
El movimiento de un ascensor, el del cajón de una mesa, el de un tren que recorre un trozo recto de vía, dan idea del *movimiento de traslación,* que puede caracterizarse así:

a)—*Los diversos puntos describen segmentos iguales de rectas paralelas.*

b)—*Las diversas posiciones de cada recta o plano en movimiento son paralelas entre sí.*

c)—*Por ser la traslación un movimiento, se conservan los segmentos y los ángulos.*

Entre las infinitas rectas descritas por los puntos del cuerpo que se traslada, se eligen dos como **guías** de la traslación;



tal se observa en el ascensor, en el tren, etc. También el cajón tiene sus guías, que son los bordes inferiores de las dos tablas laterales.

EJERCICIOS. — 1. Enumérense movimientos de traslación de la vida corriente, y diversos mecanismos para producir traslaciones.

2. ¿Depende el movimiento de traslación del par de guías que se elijan?

8.—ANGULO DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO.

La traslación nos permite comparar las direcciones de dos rectas que se cruzan, trasladando una de ellas hasta cortar a la otra, o bien trasladando ambas.

> **Angulo de dos rectas que se cruzan es el formado por dos paralelas a ellas trazadas por un mismo punto.**

Cualquiera que sea el origen elegido, el ángulo que resulta es el mismo. En efecto, si por P se trazan las paralelas r y s a las dos rectas dadas, y por P' se trazan las rectas r' y s' también paralelas a las mismas, los dos planos rs y r's' resultan paralelos en virtud de la propiedad g) y el par r's' puede considerarse como resultado de trasladar el par rs, siendo por tanto **iguales** ambos ángulos.

EJERCICIOS. — 1. Señalar en una habitación pares de aristas cruzadas y aplicar el método expuesto para determinar el ángulo que forman, utilizando aristas de la misma habitación.

2. Apreciar a simple vista el ángulo que forman dos hilos cruzados, notando que tal medida depende de la posición del punto de vista y es por tanto inadmisible. Trácese por un punto de uno de ellos un hilo paralelo al otro, determinando así el ángulo que forman.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

La enseñanza de la Geometría del espacio será, no solamente inútil, sino perjudicial, degenerando en estéril memorismo, si no logra educar el sentido de la visión tridimensional de las figuras representadas en proyección, sentido poco desarrollado en la mayoría de los hombres, que exige dotes especiales de imaginación.

Múltiples son los recursos ideados para ayudar al profesor en esta difícil tarea (haces luminosos proyectados sobre modelos de hilos, anáglifos, etc., etc.) pero los medios más eficaces son los más sencillos y por tanto más accesibles; y los mejores modelos geométricos son los construídos por el mismo escolar. Alambres, hilos y cartulinas son los elementos que bastan para realizar un eficaz aprendizaje de Geometría del espacio. Mediante ellos podrá el profesor construír sobre la mesa del aula toscos armazones, que evocarán en las mentes infantiles imágenes abstractas mucho más claras que las más perfectas figuras.

Orientados en el mismo sentido realista de la enseñanza están muchos de los ejercicios intercalados en el texto y agregados al final de cada capítulo.

1. Por un punto exterior a dos rectas que se cruzan, trazar una recta que corte a ambas. (Utilícense dos hilos tirantes atados por sus extremos con clavos o chinches de dibujo y un hilo clavado por un extremo y mantenido tirante con la mano).

2. ¿Cuántas secantes comunes tienen tres rectas cruzadas? (Constrúyanse varias, mediante el método arriba explicado e indúzcase la contestación).

3. ¿Cómo son los dos bordes, superior e inferior, de cada pared de una habitación?

4. Mediante dos hojas de cartón, que tengan dos bordes paralelos, construir el plano paralelo al tablero de una mesa, por un punto exterior.

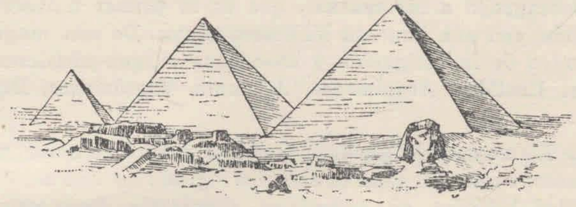
5. Compruébese con una tercera hoja de cartón que toda paralela al plano de la mesa, trazada por el punto, está en el plano paralelo.

6. ¿Son paralelas dos paredes no siéndolo sus intersecciones con el suelo?

7. Aun cumplida esta condición ¿pueden ser exactamente paralelas las paredes construídas con la plomada?

RESEÑA HISTORICA

LA GEOMETRIA EGIPCIA. — Aunque ya hemos expuesto en el primer curso los orígenes de la geometría y las características de cada civilización, parece obligado aludir siquiera en este libro de Geometría del espacio al más grande monumento geométrico que haya construído la humanidad, es decir, a las tres pirámides cuadrangulares de Cheops, Chefren



y Micerinos. Acerca de las singulares relaciones geométricas que se han notado en la **gran pirámide**, primera de las citadas, ya hemos dado noticia en el volumen anterior.

ESCUELA DE ATENAS. — La liberación del yugo persa en el año 479 a. C. señala el despertar de todas las actividades más nobles del pueblo heleno, que habían de inmortalizar el **siglo de Pericles**, pero el apogeo filosófico llega con retraso.

Hipócrates de Chios,, comerciante arruinado, abrió hacia el año 450 a. C. una escuela de Geometría con fines de enseñanza, redactando con tal objeto el primer tratado de Geometría que se conoce, el cual sirvió probablemente de base a Euclides. Por haber convertido la Geometría en fuente de ingresos, fué aislado y menospreciado por los pitagóricos, sus maestros, y este dato es buena muestra del admirable desinterés que caracteriza a la ciencia griega y a sus hombres.

Los descubrimientos geométricos de Hipócrates se refieren a la teoría de las áreas, que trataremos en otro curso, pero su máximo mérito es el de haber contribuído con sus enseñanzas pitagóricas al advenimiento ulterior de **Platón**.

ESCUELA DE ALEJANDRIA. — Bien justo es el dictado de **magno** con que se denomina al joven macedonio **Alejandro**, hijo de Filipo, que en un plazo de diez años funda un gran imperio que enlaza Oriente y Occidente; pero también lo merece por el alto espíritu con que protegió la ciencia. Discípulo de Aristóteles, lo subvencionó tan generosamente, que éste pudo disponer de un millar de colaboradores para sus exploraciones de naturalista; y a uno de sus generales (Tolomeo Soter) que le sucedió en la posesión de Egipto, se debe, hacia el año 300 a. C., la fundación del **Museo de Alejandría** (centro consagrado a las **musas**), que es la primer universidad conocida, con una inmensa biblioteca anexa. De este magnífico centro de investigación y enseñanza surgen altísimas figuras: **Euclides, Arquímedes, Apolonio, Eratóstenes, Hiparco,...**

Los **Elementos de Euclides,** escritos para la enseñanza en el Museo, contienen toda la cosecha lograda en tres siglos de actividad helénica, en **Aritmética, Geometría, Perspectiva** y **Música**; no solamente sistematizada de modo admirable, que ha resistido veinte siglos de crítica, sino también enriquecida con aportaciones de su autor. De obra tan excelsa, la más difundida después de la Biblia, se han hecho más de 1500 ediciones en todas las lenguas, y hasta hace pocos años era el texto de matemáticas en los colegios secundarios ingleses. En él está contenida toda la doctrina de Aritmética y Geometría que se estudia en el bachillerato y de su sistema deductivo proceden todos los libros actuales de Geometría elemental.

LOS CONCEPTOS DE EUCLIDES. — Las definiciones dadas por Euclides para los elementos geométricos son muy imperfectas, como era inevitable, por no ser posible reducir tales conceptos a otros más sencillos.

"**Punto** es lo que tiene partes". "Los extremos de una **línea** son puntos". "**Línea** es longitud sin anchura". "Los límites de las superficies son líneas". "**Recta** es una línea uniforme respecto de todos sus puntos". "**Superficie** es lo que tiene solamente longitud y anchura". "**Plano** es una superficie uniforme respecto de todos sus puntos".

"Punto es lo que no tiene partes". "Los extremos de una línea definir antes **longitud, anchura,** etc., empresa tan difícil como la de definir **punto, línea, superficie.** Modernamente se renuncia a tan imposible empeño, limitándose a poner ejemplos de la vida real que aproximadamente corresponden a tales elementos, y a estudiar sus relaciones.

CAPITULO II

RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES

1.—PLANOS PERPENDICULARES A UNA RECTA

Se ha demostrado en el curso anterior que, en un plano, cada recta admite una sola perpendicular en cada punto; pero si consideramos los infinitos planos que pasan por una recta, en cada uno hay una perpendicular. ¿Serán todas distintas? ¿Estarán todas en un plano?

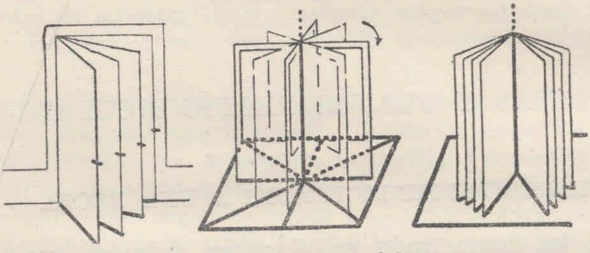
Observemos el movimiento de la puerta que **gira**; el borde inferior, que es perpendicular al eje de giro, describe un plano que sensiblemente coincide con el piso, es decir: **todas las perpendiculares a una recta en uno de sus puntos están situadas en un plano.**

Se llama plano perpendicular a una recta en uno de sus puntos, al plano formado por todas las perpendiculares a la recta en ese punto.

También se dice que *la recta es perpendicular al plano*, o que *la recta y el plano son perpendiculares.*

He aquí otro modo de enunciar la misma propiedad:

Si una recta corta a un plano y es perpendicular a otras dos rectas de éste que pasan por el punto de intersección, es perpendicular a cualquier otra recta del plano que pase por dicho punto.



EJERCICIOS. — 1. Si se coloca sobre una mesa un libro abierto de modo que se apoye en ella por los bordes inferiores de las hojas ¿qué posición ocuparán respecto del plano de la mesa las rectas que forman los dobleces de los diversos cuadernillos?

2. Con una hoja de papel que tenga un solo borde recto, construir la recta perpendicular al plano de la mesa en un punto dado.

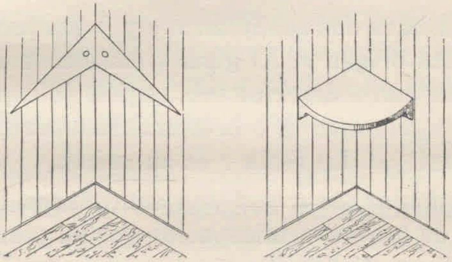
3. Si el borde inferior de una puerta toca el suelo en ciertas posiciones y no en otras ¿qué defectos puede tener la puerta?

HORIZONTALES Y VERTICALES. — La superficie de las aguas tranquilas es aproximadamente un plano, el cual se llama *horizontal;* los planos y rectas paralelas a él se llaman *horizontales;* las rectas perpendiculares a un plano horizontal se llaman *verticales.*

Para mantener vertical un mástil basta que sea perpendicular a dos rectas del suelo mediante dos puntales.

Las aristas de un biombo japonés se conservan verticales por esta misma propiedad.

APLICACIONES: Para colocar una rinconera horizontal, es decir, perpendicular a la arista en que se cortan las dos paredes, basta trazar en cada pared la perpendicular a dicha arista en el punto P en que se desea colocar la rinconera, lo que se consigue fácilmente mediante una escuadra, como indica la figura.



EJERCICIOS. — Cualquiera que sea el nivel de que disponga el profesor (aunque sea el de albañil, bien fácil de improvisar) convendrá que efectúe ejercicios de nivelación en el aula o en el patio, sirviéndose de una mira improvisada. Puede servir como tal una regla ordinaria de dibujo, o una varilla en la que se marquen centímetros con tinta, tiza o pintura.

Con el nivel de albañil, o mejor el de aire, se logrará un trozo de plano horizontal, bien con una mesa o una tabla apoyada sobre tarugos, ladrillos, libros; con esta base se determinarán las diferencias de nivel de diversos puntos del jardín, si lo hay, o de algún terreno accidentado, midiendo con un metro o cinta las distancias horizontales y con estos datos se construirá un **plano topográfico** donde figuren los niveles de los puntos más importanes.

Si el terreno tuviera ondulaciones, podrán trazarse bajo la dirección del profesor las **curvas de nivel.**

Se efectuarán también, teniendo a la vista un mapa de la República en que esté indicada la altitud de las diversas capitales y puntos importantes, los cálculos de las diferencias de nivel con la capital que darán al alumno una noción más clara de la topografía del país.

2.—ANGULOS DIEDROS

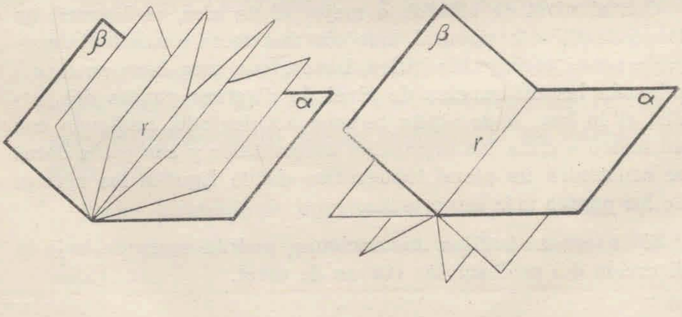
Se definen de modo completamente análogo al de los ángulos rectilíneos, considerando planos en vez de rectas y semiplanos en lugar de semirrectas..

Consideremos dos semiplanos α y β que tengan una misma recta origen r. Al girar α alrededor de r hasta coincidir con 6 describe una región de espacio que se llama *ángulo diedro,* o brevemente *diedro,* y se representa así: $\alpha\beta$. La recta r es su *arista.*

En particular, si α y β son semiplanos opuestos, cada uno de los dos semiespacios que su plano determina se llama *diedro llano.*

Como el movimiento puede efectuarse en dos sentidos, se definen así dos diedros y se sobreentiende que nos referimos al menor que un diedro llano; cuando haya peligro de confusión, lo llamaremos *convexo* al uno y *cóncavo* al otro.

NOTACION. — El diedro de caras $\alpha\beta$ y arista r



se designa por $\alpha\beta$ o simplemente por r, sin que haya peligro de confusión.

La figura 1ª. representa un diedro convexo, habiéndose dibujado con contorno grueso los semiplanos que lo forman. Los planos que pasan por r quedan divididos en dos semiplanos, y la figura representa algunos de los semiplanos contenidos en el diedro. La segunda figura representa el diedro cóncavo con algunos de los semiplanos que contiene.

Dos diedros $\alpha\beta$ y $\beta\gamma$ que tienen una cara común se llaman *consecutivos* si las otras dos están separadas por aquélla; por tanto, ambos diedros no tienen más puntos comunes que los de la cara α.

Varios diedros $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. . . . se llaman *consecutivos* cuando cada uno es consecutivo del siguiente. Señálense en las figuras anteriores los diedros consecutivos.

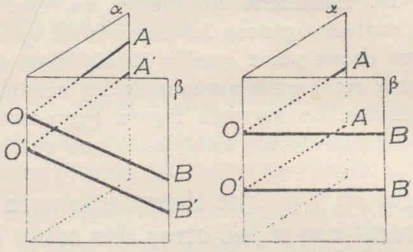
3.—ANGULO PLANO CORRESPONDIENTE AL DIEDRO.

Se llama así a la sección producida en el diedro por un plano cualquiera *perpendicular* a la arista.

Según (1) las intersecciones con ambas caras son rectas perpendiculares a la arista; y recíprocamente, las perpendiculares a la arista en cualquiera de sus puntos, trazadas en ambas caras, determinan un plano perpendicular a la arista; luego también se puede definir así:

Sección recta o normal de un diedro es el ángulo formado por dos perpendiculares a la arista, trazadas una en cada cara.

En la figura 2.ª se han dibujado dos secciones normales *AOB* y *A'O'B'* del diedro αβ. En la figura 1ª



las dos secciones son paralelas, pero no normales.

Efectuando un movimiento de traslación del diedro sobre sí mismo, hasta que *O* coincida con *O'*, se superponen las dos seciones normales de vértices *O* y *O'*, luego resulta:

Las secciones paralelas de un diedro son iguales.

Las secciones normales de un diedro son iguales.

EJERCICIOS. — 1. Indicar en un libro abierto los diedros cóncavos, los convexos, los consecutivos y las secciones rectas.

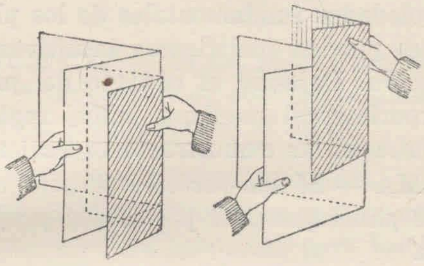
2. Trazar secciones normales del diedro formado por dos paredes contiguas.

3. Dibujar en dos paredes contiguas dos secciones paralelas del diedro y comprobar su igualdad con un hilo.

4.—IGUALDAD DE DIEDROS

Se dice que dos diedros son *iguales* cuando tienen iguales sus secciones normales.

Si se imaginan dos diedros materiales y se superponen sus secciones normales iguales, la arista de uno debe coincidir con la del otro, por ser perpendiculares al mismo plano; por tanto, las caras de uno coinciden con las del otro.



La figura representa dos diedros iguales, por serlo sus secciones rectas. Si se materializan construyéndolos de cualquier materia sólida (por ejemplo de madera), no es posible la superposición, pero se puede construir en cada uno su sección normal y medir éstas con instrumento adecuado; por ejemplo: el compás de ramas curvas; o bien se comparan ambos con un diedro de chapa, como indica la figura.

Como las secciones normales de dos diedros $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$ opuestos por la arista son ángulos opuestos por el vértice, resulta:

Dos diedros opuestos por la arista son iguales.

4.—PLANOS PERPENDICULARES.

Su definición es la misma dada para las rectas perpendiculares.

Planos perpendiculares son los que forman cuatro diedros iguales. Los planos que no son perpendiculares se llaman **oblicuos.**

En la figura siguiente se han dibujado dos planos perpendiculares, que forman cuatro diedros iguales, es decir, son perpendiculares.

Para asegurar la perpendicularidad basta que *dos* de los diedros adyacentes sean iguales, pues los otros son opuestos por la arista.

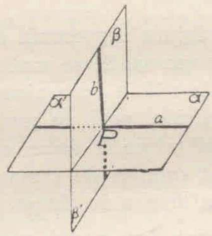
Las propiedades fundamentales de los planos perpendiculares pueden justificarse intuitivamente por la observación. Dejando al cuidado del profesor la prueba experimental mediante hilos, reglas, cartones, etc., he aquí las demostraciones racionales:

TEOREMA — *Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pase por ella es perpendicular al primero.*

HIP.) $b \perp \alpha$ en P.

β pasa por b.

TESIS) $\beta \perp \alpha$.



TEOREMA 1º. — *Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pase por ella es perpendicular al primero.*

Demostración. — Trazando en α la recta a perpendicular a la arista, como también lo es b, el ángulo ab es la sección recta del diedro $\alpha\beta$; y como $b \perp a$ por ser perpendicular a todas las rectas que pasan por su pie, resulta recto el ángulo ab, así como también los $a'b$, ab' y $a'b'$ luego $\alpha\beta$ es diedro recto, y lo mismo los otros tres.

COROLARIO. — *Por cada punto pasan infinitos planos perpendiculares a otro, que son todos los que pasan por la recta perpendicular trazada por dicho punto.*

Hemos formado los planos perpendiculares a otro mediante las rectas perpendiculares a éste; se prueba que así se obtienen todos demostrando el recíproco:

TEOREMA 2.º — *Si dos planos son perpendiculares, toda recta de uno de ellos perpendicular a la intersección es perpendicular al otro.*

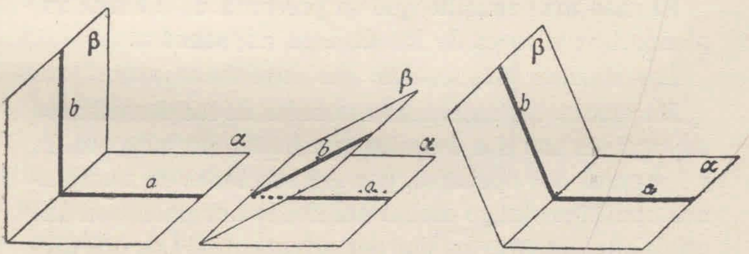
5.—CLASIFICACION DE LOS DIEDROS.

He aquí algunas definiciones que son completamente análogas a las ya conocidas para los ángulos planos.

Diedro **recto** es cada uno de los formados por dos planos perpendiculares.

Diedro **agudo** es el menor que un recto.

Diedro **obtuso** es el mayor que un recto, y menor que un llano.



La figura representa un diedro recto, uno agudo y uno obtuso.

Recordando las definiciones de diedro menor y mayor, resulta:

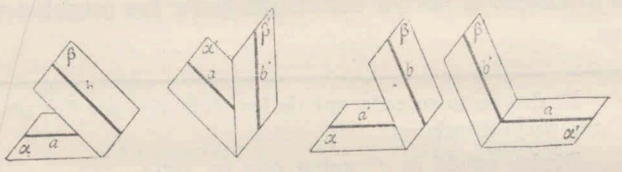
Un diedro es *recto, agudo* u *obtuso*, según que su sección recta sea un ángulo recto, agudo u obtuso.

Como los ángulos rectos son iguales, resulta:

Todos los diedros rectos son iguales.

Dos diedros se llaman **complementarios** o **suplementarios** entre sí, según que sus secciones normales sean ángulos complementarios o suplementarios.

De otro modo: son complementarios los diedros cuya suma es un diedro recto, y suplementarios los diedros cuya suma es un diedro llano.



En la figura son complementarios los dos primeros diedros, y suplementarios los otros dos.

El caso más sencillo que se presenta de diedros suplementarios es el de los diedros adyacentes.

Los diedros adyacentes son suplementarios.

En efecto, las secciones normales de los dos diedros adyacentes son dos ángulos que tienen un lado común y los otros dos opuestos, por ser secciones de semiplanos opuestos; luego dichas secciones normales son ángulos suplementarios por ser adyacentes. Los dos diedros son, pues, suplementarios.

EJERCICIOS. — 1. Clasificar los diedros que forman las paredes de una habitación irregular.

2.. Si dos paredes son paralelas ¿cómo son los diedros que forman con otra?

3. Construir con hoja de lata el diedro complementario de otro y el suplementario.

6.—TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES.

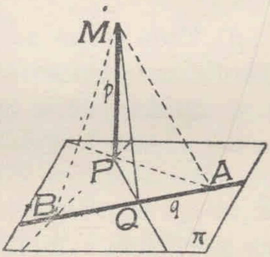
Puesto que una recta perpendicular a un plano lo es a todas las rectas que pasan por su pie, parece natural generalizar el concepto, diciendo que también es perpendicular a las rectas que no pasan por su pie, las cuales se cruzan con ella.

> Dos rectas cruzadas se llaman **perpendiculares** cuando **cada una** está en un plano perpendicular a la otra.

Esta definición exige demostrar que si una recta está en un plano perpendicular a otra, ésta tiene análoga propiedad, es decir, está en un plano perpendicular a la primera. Esta propiedad es la que demuestra el teorema llamado *de las tres perpendiculares*.

Si una recta es perpendicular a un plano que pasa por otra recta, ésta es perpendicular a un plano que pasa por la primera.

Supongamos que la recta p es perpendicular al plano π, en el cual está la recta q; y sea Q el pie de la perpendicular a q trazada por el pie P de p; vamos a probar que q es perpendicular al plano MPQ.



Demostración. — Tracemos por P las rectas PA y PB, siendo A y B dos puntos de q simétricos respecto a Q; por tanto, siendo PA y PB oblicuas que se apartan igualmente de la perpendicular PQ es: $PA = PB$.

Los triángulos MPA y MPB son rectángulos en P, por definición de plano perpendicular; y como tienen iguales dos catetos y común el otro, son iguales; luego $MA = MB$; por tanto, es MQ la mediatríz de AB, es decir: $AB \perp MQ$.

Resulta, pues, q perpendicular a MQ y además a PQ por construcción; luego es perpendicular al plano que determinan.

7.—PROPIEDADES DE LAS RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES.

Con apelaciones a la intuición, sirviéndose de varillas y cartones, podrá el profesor justificar las propiedades siguientes, alguna de las cuales podrá deducirse también racionalmente como útil ejercicio.

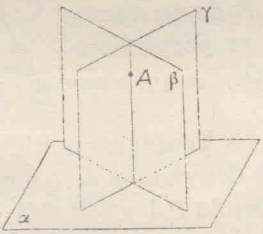
a) *Por cada punto de un plano pasa una recta perpendicular al plano y solamente una.*

b) *Por un punto exterior a un plano pasa una recta perpendicular al plano y solamente una.*

c) *Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas.*

d) *Todo plano perpendicular a una de dos rectas paralelas es perpendicular a la otra.*

e) *Si dos planos son perpendiculares, la perpendi-*



cular a uno de ellos trazada por un punto del otro está contenida en éste.

f) *La intersección de dos planos perpendiculares a un tercer plano, es perpendicular a éste.*

EJERCICIOS. — 1. Trazar en una habitación pares de rectas que ocupen las tres posiciones posibles.

2. Con dos hojas dobladas de papel trácense dos perpendiculares al plano de la mesa, y obsérvese, por visuales que están en un plano.

3.. Con un hilo en el que se formarán nudos convenientemente dispuestos, trazar por un punto prefijado del espacio la paralela a una recta trazada en el suelo o en la pared.

4. Trazada una perpendicular a un plano y dibujada en éste una recta cualquiera, trazar por la primera el plano perpendicular a la segunda. Elíjase, por ejemplo, una arista vertical de una habitación y una recta trazada en el suelo.

5. Trazar por un punto (la esquina de un mueble), las infinitas rectas perpendiculares a la recta del suelo determinada por una pared (Instrumento: un hilo el cual puede servir, además, de compás).

6. Comprobar si dos rectas que se cruzan son o no perpendiculares.

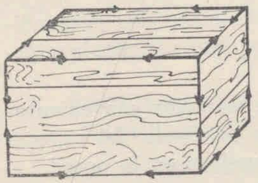
8.—TRIEDRO TRIRRECTANGULO.

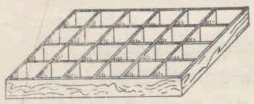
Si en un plano trazamos dos rectas perpendiculares entre sí x, y, y en su punto O de intersección se levanta la perpendicular z, la figura formada por estas tres rectas se llama *triedro trirrectángulo,* por formar estas tres rectas tres ángulos rectos xy, yz, zx.

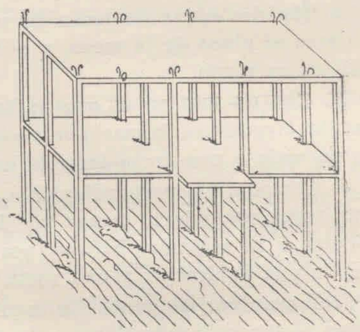
Más frecuente es adoptar esta otra definición que será la única usada en este curso:

> **Triedro trirrectángulo** es la figura formada por tres semirrectas del mismo origen perpendiculares dos a dos. Los tres ángulos que éstas determinan se llaman **caras** del triedro.

Los diedros que forman cada dos de estos planos son también rectos, puesto que cada plano contiene una perpendicular al otro.







El triedro trirrectángulo se presenta en multitud de objetos materiales que nos rodean. Las tres aristas que concurren en un rincón de una habitación corriente prolongadas indefinidamente, forman un triedro trirrectángulo por ser perpendiculares dos a dos.

En las cajas corrientes de madera aparecen asimismo porciones de ocho triedros trirrectángulos en sus vértices.

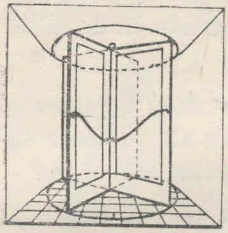
EJERCICIOS. — 1. Contar el número de triedros trirrectángulos que aparecen en la caja de huevos representada en la figura.

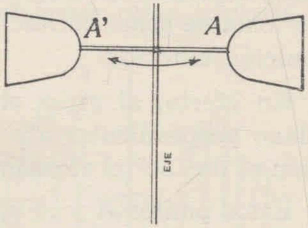
2. Idem en la estructura de hormigón para una casa, contando también el número de caras que aparecerán una vez construídos los tabiques.

9.—SIMETRIA RESPECTO DE UN EJE.

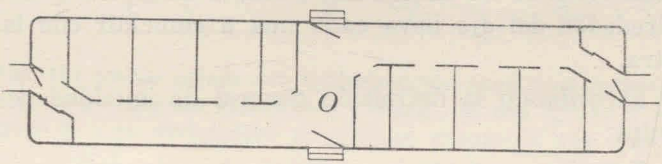
Algunos objetos materiales ofrecen la particularidad de que al girar 180º alrededor de una recta vuelven a coincidir consigo mismos. Esta propiedad se llama *simetría* respecto de esta recta.

EJEMPLOS. — Hágase girar 180º una puerta giratoria de cuatro hojas como la representada en la figura y no se notará el cambio si las cuatro hojas son exactamente iguales.





Si no fuera por la numeración de las cabinas del coche dormitorio sería imposible distinguir si en la maniobra le han dado vuelta, es decir, ha girado alrededor del eje vertical tra-



zado por el punto O. He aquí, por tanto, un cuerpo simétrico respecto de este eje vertical.

Si no fuera por las aberturas del obelisco de Buenos Aires, nadie notaría media vuelta al mismo, por tener eje de simetría. No lo tiene en cambio la Pirámide de Mayo, por causa de la figura que en ella tiene su pedestal y que carece de eje de simetría.

Un cuerpo se dice **simétrico** respecto de una recta llamada **eje de simetría**, si coincide consigo mismo después de girar 180º alrededor de esta recta.

Un par de puntos AA' es **simétrico** respecto del **eje e** si el segmento AA' corta perpendicularmente al eje e, y es bisecado por él.

Bisecar quiere decir: el punto de intersección es el punto medio del segmento.

Esta propiedad del par simétrico, que también puede tomarse como definición es consecuencia de la definición anterior.

En efecto, al girar el segmento *AA'* describe el plano perpendicular a *e* en el punto O y si la rotación es de 180º el segmento *OA* coincide con el *OA'*

Estos puntos *A* y *A'* que forman un *par simétrico* se llaman *puntos simétricos* respecto del eje *e*.

En general: dos figuras se dicen *simétricas* respecto de un eje, si cada una está formada por los puntos simétricos de los de la otra; o sea, si un giro de 180º alrededor del eje lleva cada una a coincidir con la otra.

Recordando la definición general de igualdad resulta:

Dos figuras simétricas respecto de un eje son iguales.

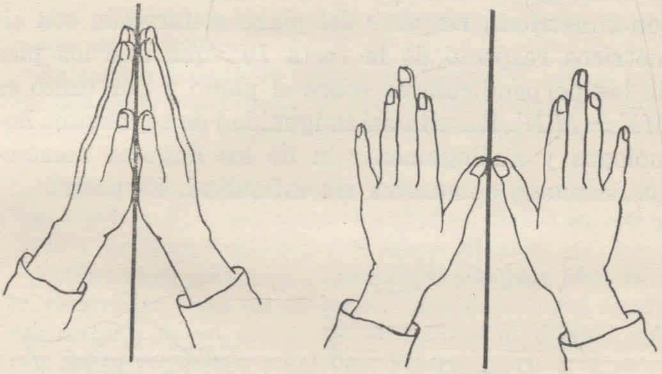
10..—SIMETRIA RESPECTO DE UN PLANO.

Dos puntos **A y A'** se llaman **simétricos** respecto de un plano si el segmento AA' es perpendicular a este y queda bisecado por él.

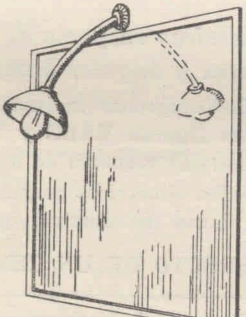
Dos figuras formadas por puntos simétricos, se llaman *simétricas*.

Obsérvese que en esta simetría no hemos utilizado el concepto de *movimiento*, por no ser posible. En efecto, dos figuras simétricas respecto de un plano no son iguales a pesar de tener como veremos todos sus elementos iguales. Los ejemplos aclararán esta sorprendente novedad.

EJEMPLOS. — Si juntamos las manos palma con palma

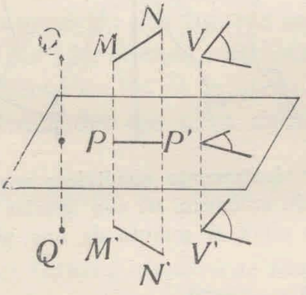


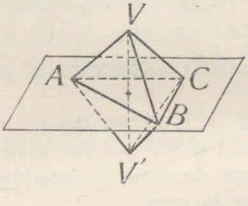
(fig. 1ª) ambas manos son evidentemente simétricas respecto del plano que las separa; sin embargo, no son iguales y a causa de esta desigualdad no sirve el guante de una mano para la otra.



Figuras simétricas respecto del plano de un espejo son un objeto cualquiera y su imagen reflejada en el mismo. Que ambas no son iguales es bien sabido; al mover la mano derecha, mueve la imagen su mano izquierda y todos los movimientos de la persona y de la imagen tienen sentido opuesto.

Aunque las figuras simétricas no sean superponibles, tienen todos sus elementos iguales, como resulta de la figura. En efecto, si los segmentos MN y $M'N'$ son simétricos, respecto del plano π, también son simétricos respecto de la recta PP' que une los pies de las perpendiculares sobre el plano y por tanto es $MN = M'N'$. Resulta así la igualdad de segmentos homólogos y análogamente la de los ángulos homólogos, como se demuestra sin dificultad. Es decir:





Dos figuras simétricas respecto de un plano tienen iguales los segmentos y ángulos homólogos.

EJERCICIOS. — 1. Comprobar la imposibilidad de la superposición de las dos figuras **VABC** y **V'ABC** representadas en la figura, simétricas respecto de un plano.

2. Citar objetos reales simétricos respecto de un plano, y enumerar todos los planos de simetría que tiene cada uno.

11.—SIMETRIA RESPECTO DE UN CENTRO.

Dos puntos se dicen **simétricos** respecto de un **centro** si el segmento que los une está bisecado por éste.

Dos figuras formadas por puntos simétricos se llaman **simétricas**.

Recordemos objetos corrientes que tienen centros de simetría.

EJEMPLOS. — En el esferoide (*) terrestre cada punto tiene su **antípoda** que es su simétrico respecto del centro de la tierra.

Una pelota de rugby, un melón, una naranja, tienen también centro de simetría.

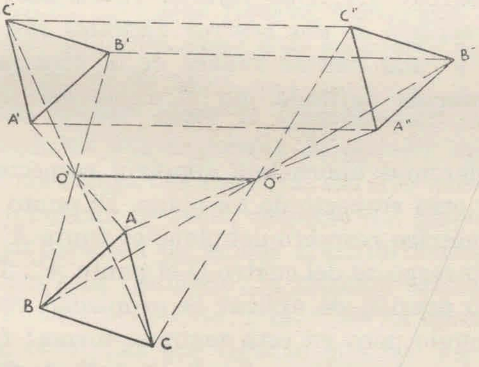
En cambio carecen de centro de simetría el cuerpo humano, una pera, una banana, un tomate, un trompo, a pesar de que tienen eje de simetría y planos de simetría, o ambos a la par.

EJERCICIOS. — Determinar todos los elementos de simetría (centros, ejes, planos) de los objetos citados en este párrafo y de otros elegidos por el mismo alumno.

NOTA: Tampoco hemos utilizado el movimiento para definir la simetría respecto de un centro, pues dos figuras simétricas respecto de un centro son en general desiguales. Sobre este punto volveremos en el Cap. VII.

12.—RELACIONES ENTRE LAS DIVERSAS SIMETRIAS.

Comencemos por comparar dos figuras simétricas de una misma figura respecto de dos centros distin-



(*) Sabe el lector que las mediciones de la Tierra conducen a atribuirle aproximadamente la forma de una esfera algo aplastada por los polos, la cual se llama **esferoide.**

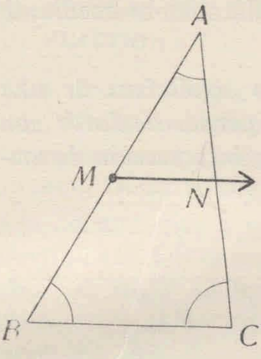
tos. En el dibujo se ha representado un triángulo ABC, su simétrico $A'B'C'$ respecto del centro O' y su simétrico ABC'' respecto del centro O'', y vamos a ver la sorprendente relación que existe entre estas dos figuras

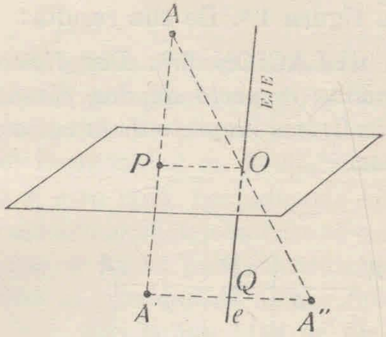
Recordemos con tal objeto esta propiedad demostrada en el curso anterior: *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.*

Según esta propiedad, aplicada al triángulo $AA'A''$, el segmento $A'A''$ *es paralelo al* $O'O''$ e igual al doble de éste; la misma conclusión vale para todos los puntos, es decir todos los segmentos $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$,... son paralelos al $O'O''$ y de longitud doble que éste, luego todos ellos son paralelos entre sí e iguales. Puesto que la figura $A''B''C''$... se deduce de la $A'B'C'$... mediante esta relación que hemos llamado *traslación*, resulta en definitiva:

RELACION 1.ª: *Dos figuras simétricas de una misma respecto de dos centros distintos son iguales entre sí y cada una se deduce de la otra mediante una traslación definida por el duplo del segmento* $O'O''$.

Consideremos ahora una simetría respecto de un centro y otra respecto de un plano. El punto A tiene como simétrico respecto del plano el punto A' y como simétrico respecto del centro O el punto A''. Tenemos de nuevo ocasión de aplicar la propiedad recordada del triángulo pero en esta segunda forma: *La recta trazada por el punto medio de un lado de un triángulo paralelamente a otro lado pasa por el punto medio del tercer lado.*





Aplicada esta propiedad al triángulo $A\ A'\ A''$ si trazamos por O la paralela al lado $A\ A'$ pasará por el punto Q, medio del lado $A'\ A''$ y como además es perpendicular a él por serlo a su paralela OP como lo es la AA', resulta en definitiva que los puntos A' y A'' son simétricos respecto del eje OQ.

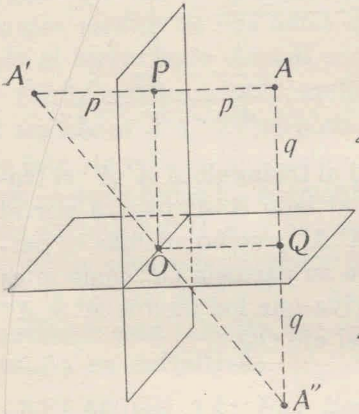
Resulta así:

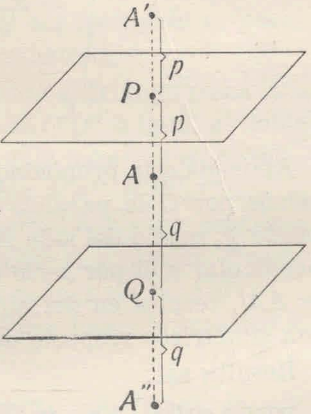
RELACION 2.ª: *Dos figuras simétricas de una misma respecto de un plano y de un centro son simétricas respecto de un eje.*

Conviene insistir sobre la trascendencia de estas dos propiedades que acabamos de deducir aplicando a una misma figura dos simetrías del tipo que no conserva la igualdad, es decir, respecto del plano o centro; la comparación de ambas transformadas da en ambos casos este resultado: la relación existente entre ellas es un *movimiento*; *traslación* en un caso, *rotación* en otro. Las dos figuras que son *desiguales* respecto de la figura inicial, resultan *iguales* entre sí.

¿Sucederá lo mismo si se aplican dos simetrías respecto de planos distintos? Así acontece en efecto como el lector demostrará inmediatamente mediante la figura 1.ª. De ella resulta:

RELACION 3.ª: *Dos figuras simétricas de una misma respecto de dos planos perpendiculares son simétricas respecto de la recta de intersección de ambos.*





Demuéstrese análogamente mediante la figura 2:

RELACION 4.ª: *Dos figuras simétricas de una misma respecto de dos planos paralelos son iguales y la relación existente entre ellas es una traslación.*

EJERCICIOS. — 1. Demostrar que dos figuras simétricas de una misma respecto de dos planos secantes cualesquiera son iguales y cada una se deduce de la otra mediante una rotación de amplitud igual al duplo del ángulo diedro que forman ambos planos.

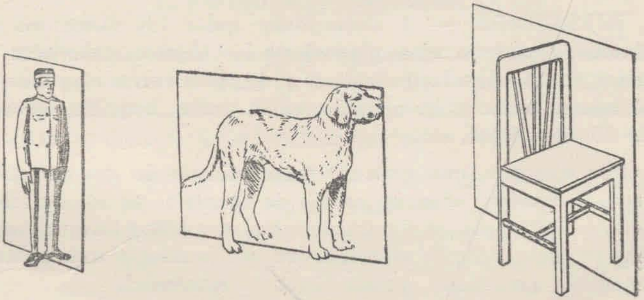
2. Demostrar que en el caso de planos paralelos la relación existente entre las dos transformadas de una misma figura es una traslación de amplitud doble que la distancia entre ambos planos.

13.—FIGURAS CON CENTRO, EJE O PLANO DE SIMETRIA.

La simetría tiene considerable importancia en la vida. Un barco, un tren, un aeroplano, un dirigible, tienen como condición ineludible un plano vertical de simetría, pues cualquier desigualdad en la distribución de material a uno y otro lado, perjudicaría su movimiento. Un barco cargado asimétricamente se escora (es decir se inclina) y hasta puede hundirse. Obsérvese que no interesa la igualdad de ambas mitades del cuerpo simétrico, sino la igualdad de distancias, la cual se conserva como hemos visto.

En un trasatlántico tienen igual precio los camarotes de *estribor* (derecha) o *babor* (izquierda) dentro de la misma categoría. La única causa de asimetría está en el curso del sol, que hace preferibles unos u otros según sea el viaje de ida o vuelta.

EJEMPLOS. — Cuando pedimos **medio** pollo, el mozo no pregunta si queremos del lado derecho o izquierdo, porque ambos tienen la misma cantidad y calidad de carne a causa de la simetría; pero si pedimos un **cuarto** de pollo debemos aclarar si deseamos de pierna o pechuga, por la falta de simetría.



Es la simetría respecto de un plano más importante y los ejemplos que hemos puesto de mecanismos giratorios muestran el interés que también tiene la simetría axial mientras que la simetría central por sí sola tiene menos importancia.

NOTA: En multitud de objetos materiales se observan ciertas relaciones que pueden caracterizarse brevemente así: hay un cierto movimiento del cuerpo que lo lleva a coincidir consigo mismo, sin que cada punto vuelva a su primitiva posición. Es decir, el cuerpo no varía respecto de ese movimiento.

EJEMPLOS. — Si un vaso corriente se hace girar de modo que ocupe la misma base que antes tenía, en su nueva posición ocupa el vaso la misma porción de espacio que antes. Diremos brevemente: el vaso **no varía** respecto de las rotaciones. Lo mismo acontece a multitud de vasijas, jarrones, etc., cuya superficie se llama de revolución y será estudiada más adelante.

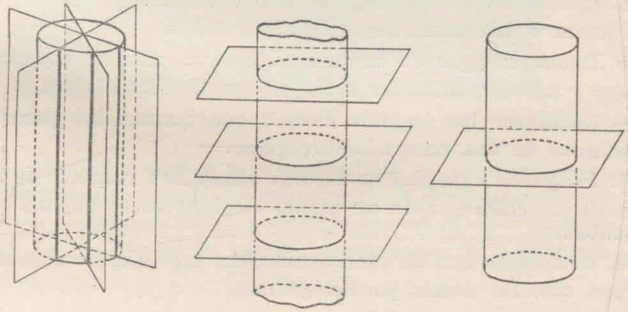
Análogamente un cajón cerrado puede colocarse de cuatro modos distintos, ocupando la misma porción de espacio. Si una cara y su opuesta son cuadradas, este número se eleva a 8. cara y su opuesta son cuadrados, este número se eleva a 8. Si también son cuadradas las otras caras es decir si tiene forma cúbica, el número de movimientos posibles sin variar la figura geométrica en forma ni posición alcanza a 24.

Compruébense estas afirmaciones a modo de ejercicio.

EJERCICIOS. — 1. Determinar todos los elementos de simetría (centros, ejes, planos) de los objetos materiales citados en los párrafos anteriores y de otros varios elegidos por el mismo alumno: p. ej. silla, cama, mate, boquilla, tinteros de diversos tipos, etc.

Por ejemplo: una naranja prescindiendo de sus pequeñas irregularidades, tiene un centro de simetría, un eje de simetría, infinitos planos de simetría que son todos los que pasan por su eje y además el plano que, por analogía con la denominación geográfica, puede llamarse **ecuatorial.**

2. Un paquete de algodón hidrófilo, una bolsa de yerba mate, y demás figuras análogas de forma cilíndrica, tienen los mismos elementos de simetría que la naranja, los cuales acabamos de enumerar. En cambio un cilindro infinito, es decir, un caño que se extiende indefinidamente en ambos sentidos, tiene infinitos centros de simetría, infinitos planos de simetría que pasan por el eje central, más infinitos perpendiculares a él e infinitos otros ejes que son todos los perpendiculares a éste en sus diversos puntos.



3. ¿Qué elementos de simetría tiene una bañadera ordinaria, una de un frente y una de dos frentes?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Las mismas consideraciones hechas en el capítulo anterior valen para éste. Además de los sencillos elementos allí indicados (cartones, hilos, alambres) convendrá disponer de una escuadra, un compás y un transportador de ángulos.

Altamente instructivas son las dificultades de orden práctico que se presentan al materializar las figuras geométricas abstractas. Así por ej. la comparación y medida de diedros debe hacerse de modo muy diferente según sean huecos o macizos; dicho más exactamente: según se opere dentro (como sucede en los diedros de una habitación) o fuera (p. ej. los diedros de las paredes externas de una casa). El modo de superar tales problemas por los alumnos dará la medida de su aprendizaje geométrico.

1. Medir los diedros que forman las paredes contiguas de una habitación.

2. Construir con una hoja de lata, diedros cuya medida sea un cierto número de grados.

3. ¿Qué diedros mide el teodolito? ¿Cuáles son sus secciones rectas?

4. Construir con una hoja de lata un diedro que sea suma de varios o diferencia de dos diedros dados.

5. Dados tarugos de madera de formas arbitrarias, comparar y ordenar de menor a mayor sus diversos diedros.

6. Comparar los ángulos diedros que forman las paredes contiguas de una habitación irregular.

7. Pónganse ejemplos de figuras simétricas respecto de un eje, de un centro, o de un plano, elegidas entre objetos corrientes.

8. Demostrar que un rectángulo tiene tres ejes de simetría y uno sólo los demás paralelógramos.

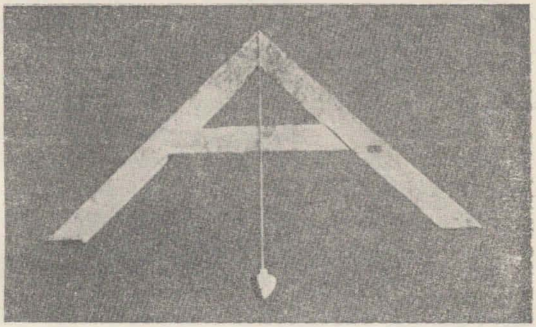
9. ¿Cuántos planos de simetría tienen los diversos paralelógramos?

RESEÑA HISTORICA

LA NIVELACION EN LA ANTIGÜEDAD. — Que los **Egipcios** dominaban perfectamente desde siglos muy remotos la técnica de la nivelación, esto es, el **trazado de verticales y horizontales**, está bien patente en sus grandiosos monumentos.

La construcción de obras de riego es uno de los problemas prácticos que dieron origen a la Geometría. Los niveles más antiguos que se conocen son **babilonios y egipcios** y coinciden exactamente con el actual **nivel de albañil** como se ve en la figura que reproduce uno de 4000 años de antigüedad, exhibido en el museo del Cairo.

Los conocimientos necesarios para las nivelaciones y mensuras, que primitivamente eran privilegio de los sacerdotes y



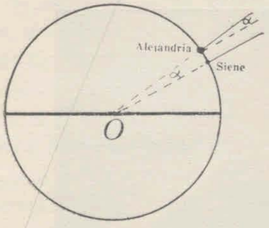
que después dieron origen a la especialidad de los **arpedonaptas** (tendedores de cuerdas) constituyeron la doctrina empírica en que se inspiraron **Tales** y otros contemporáneas, quienes después de sus viajes de estudio organizaron la **Geometría** griega.

Como las verticales de los diversos puntos de la superficie terrestres concurren en el centro de la Tierra, interesa medir el ángulo que dos de ellas forman entre sí. Si los dos puntos distan pocos metros, como acontece en la construcción de edificios, sería imposible medirlo por su pequeñez: pero en la medida de grandes distancias, interesa medir el ángulo de dos verticales. Tal problema fué resuelto por Eratóstenes, que determinó el ángulo formado por la vertical de **Siene** (hoy Azuán) y la de **Alejandría,** en Egipto.

El problema geométrico que se propuso era éste: **¿Cuál es el ángulo SOA que forman los radios terrestres de Siene y de Alejandría?** Tal medición era necesaria para averiguar el tamaño de la Tierra.

Sabía Eratóstenes que cierto día del año, el Sol iluminaba a medio día el fondo de los pozos de **Siene** (es decir, que el

Sol llegaba al **Zenit** o punto más alto de la esfera celeste, mientras que ese día el Sol quedaba algo más bajo mirado desde **Alejandría,** que aproximadamente está en el mismo meridiano. Le bastó, pues, medir en Alejandría el ángulo α formado por la vertical con la visual hacia el Sol; y por la igualdad de los ángulos correspondientes esa misma es la medida del ángulo **SOA**; la cual resultó ser, aproximadamente 1|50 de ángulo completo, es decir, 7º y 1|5 de grado.



ORIGEN DE LA GEOMETRIA DEL ESPACIO. — La verticalidad de todos los planos que pasan por una recta vertical parece conocida desde tiempo remoto; pero la verticalidad de la intersección de dos planos verticales es, probablemente, un descubrimiento griego. Estas sencillas relaciones quedan incluídas en la doctrina de las rectas y planos perpendiculares debida a ARKITAS de Tarento, figura prominente de la **Escuela de Atenas**, que es el creador de la geometría del espacio.

ARKITAS
(s. — IV)

Mientras los conocimientos de Geometría del espacio contenidos en el papiro de Ahmes son puramente empíricos y se refieren al cálculo de sencillos volúmenes, Arkitas inicia la teoría de los planos y superficies, estableciendo las propiedades fundamentales contenidas en estos dos primeros capítulos, y también las más importantes de los conos y cilindros, trabajos que más tarde utilizó Euclides.

CAPITULO III

LA ESFERA

1.—CENTRO, RADIO, DIAMETRO.

> Se llama **superficie esférica** de **centro O** y **radio r**, al lugar de todos los puntos cuya distancia a **O** es **r**.

Es decir: *superficie esférica* es la figura formada por los puntos que cumplen esta condición y sólo ellos.

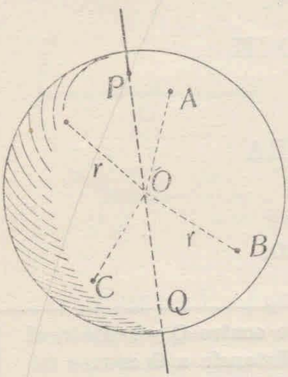
Se llaman *interiores* los puntos cuya distancia al centro es menor que r, y *exteriores* los que distan más de r.

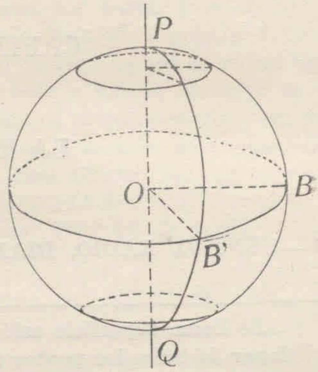
Los puntos de la superficie esférica de centro O y radio r, más los puntos interiores, forman un cuerpo llamado *esfera*.

Dos esferas se llaman *iguales* cuando son iguales sus radios, pues si se imaginan coincidentes sus centros coinciden las dos superficies esféricas, así como

Toda recta que pasa por el centro contiene dos puntos PQ, que distan r del centro, es decir, el seg-
también las dos esferas.

mento PQ es suma de dos radios opuestos y se llama *diámetro* de la superficie esférica o de la esfera.





2.—SUPERFICIES DE REVOLUCION.

Los puntos de la superficie esférica situados en un plano que pasa por el centro (plano diametral) forman una circunferencia de radio r en virtud de la definición dada en el primer curso. Si consideramos otro plano diametral produce como sección otra circunferencia igual, que tiene con aquella un diámetro común PQ, luego al girar uno de los planos alrededor de la recta PQ ambas cricunferencias coinciden. Por consiguiente:

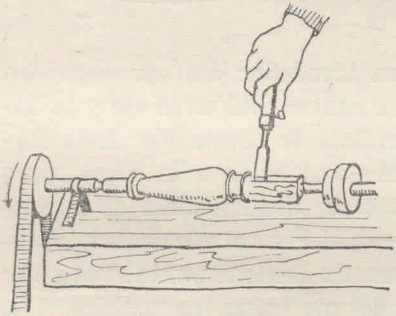
La superficie de radio r *puede engendrarse por una circunferencia de radio* r *que gira alrededor de uno de sus diámetros.*

Aparece así la superficie esférica incluida dentro de una categoría muy amplia de superficies que pueden engendrarse por la *rotación* o *revolución* de una curva, llamada *meridiano*, alrededor de una recta fija que se llama *eje* de la superficie y ésta recibe el nombre genérico de *superficie de revolución.*

> **Superficie de revolución** de eje **e** es la engendrada por una curva llamada **meridiano,** situada en un plano que pasa por él al girar una vuelta completa alrededor del eje.

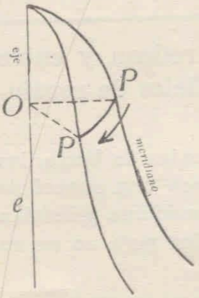
Examinemos los objetos que nos rodean y entre ellos encontramos multitud de superficies de revolución.

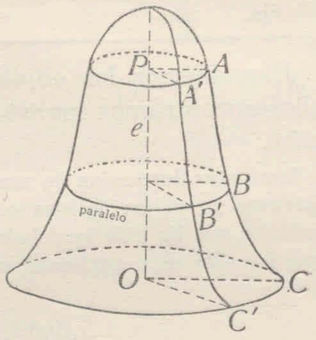
Las patas torneadas de una mesa, las tinajas de barro, los jarrones y vasijas de loza o porcelana tienen una superficie exterior que ha sido modelada en el torno, máquina primitiva que ha sido muy perfeccionada en su técnica pero no en su



esencia, la cual se reduce a ésto: el cuerpo que se desea moldear limitándolo por una superficie de revolución, se hace girar a gran velocidad y la curva que se elige como generatriz o meridiano de la superficie, se mantiene fija o bien mediante una plantilla, o mejor se va describiendo con una herramienta adecuada.

En el torno de carpintero se coloca el tarugo en un eje horizontal que gira rápidamente y la herramienta que traza la curva meridiana es una gubia afilada que se mueve a mano o automáticamente, siguiendo una plantilla. La segunda figura representa el torno de alfarero sobre el cual se coloca la masa plástica (arcilla, caolin,...) que la mano va moldeando, actuando como plantilla que forma la curva meridiana.



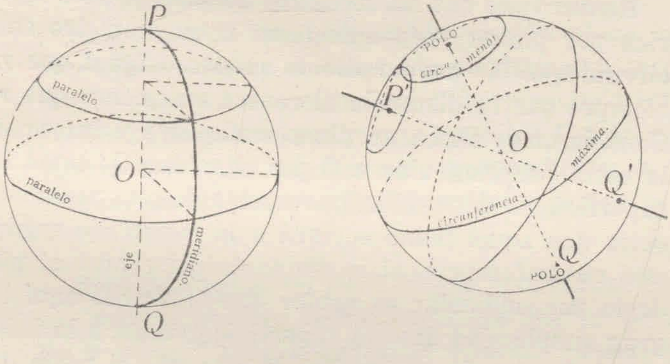


Cada punto que gira alrededor del eje engendra una circunferencia cuyo centro está en el eje y se llama *paralelo* de la superficie de revolución. Esta forma circular de los paralelos salta a la vista, pero también se puede *demostrar* deduciéndola de la propiedad II, 1 . En efecto, si P es el pie de la perpendicular sobre el eje, trazada desde el punto A al girar el plano Ae alrededor del eje todas las posiciones de la perpendicular AP al eje en los diversos planos están en el plano perpendicular a e trazado en el punto P; luego la curva engendrada por A es plana. Además son iguales las distancias $PA = PA' = PA'' = \ldots$; luego el paralelo es la circunferencia de centro P y radio r situada en el plano perpendicular al eje.

La superficie de revolución tiene, como vemos, infinitos paralelos, y el nombre de éstos está justificado como una abreviación de este otro más expresivo: *secciones de la superficie por planos paralelos.*

3.—LA ESFERA COMO SUPERFICIE DE REVOLUCION.

Volvamos a la superficie esférica sonsiderada como superficie de revolución: para engendrarla como dijimos mediante la rotación de la circunferencia de diámetro PQ basta en realidad un giro de media vuelta, es decir, de 180º. Si se desea engendrarla mediante la rotación *completa*, es decir de una vuelta (360º), basta tomar una de las semicircunferencias de diá-



metro PQ, puesto que al cabo de un giro de 180º vendrá a coincidir con la otra semicircunferencia. Resumiendo estas observaciones podemos enunciar:

La superficie esférica es una superficie de revolución respecto de cualquiera de sus rectas diametrales PQ.

Los meridianos de la superficie esférica son semicircunferencias de diámetro PQ *y los paralelos son* *las secciones por planos perpendiculares a la recta diametral.*

Obsérvese que esta propiedad distingue a la superficie esférica de todas las otras superficies de revolución, las cuales tienen un solo eje. El lector aficionado a la Geometría racional demostrará como útil ejercicio que si una superficie es de revolución respecto de dos ejes concurrentes en un punto O es una superficie esférica de centro O..

4.—INTERSECCION DE LA SUPERFICIE CON UN PLANO. CIRCUNFERENCIAS MAXIMAS Y MENORES.

Hemos visto que las secciones de la superficie esférica por planos perpendiculares a un diámetro son circunferencias cuyo radio es menor o igual que r, siempre que la distancia al centro sea menor que r. Consideremos ahora un plano cualquiera y tracemos la recta perpendicular a él por el centro O; como la superficie es de revolución respecto de esta recta resulta que aquel plano cortará a la superficie según una circunferencia, si la distancia del centro al pie de la perpendicular es menor que r. Vemos aquí la gran simplicidad de esta superficie gracias a la infinidad de ejes de revolución. Puesto que el radio de la circunferencia sección es la semicuerda de la circunferencia meridiana y entre ellas es máxima la que pasa por el centro, es decir, el radio, resulta:

Las secciones planas de la superficie esférica son circunferencias cuyo radio es el mismo de la superficie si el plano pasa por el centro y es menor si no pasa por él.

Queda justificada así la definición siguiente:

Circunferencias máximas de la superficie esférica son las secciones por planos diametrales. Las secciones por planos que no pasan por el centro se llaman circunferencias menores.

Con frecuencia se habla de *círculos máximos* y *círculos menores* refiriéndose a las circunferencias, pero convendrá mantener la esencial distinción entre ambos conceptos, aun en los casos en que se admita por la fuerza de la costumbre la citada sinonimia.

5.—POLOS CORRESPONDIENTES A UN CIRCULO DE LA ESFERA.

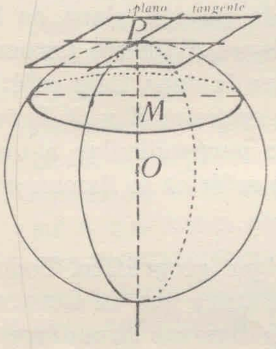
Acabamos de ver que a cada sección plana de la superficie esférica corresponde un diámetro perpendicular, el cual determina sobre la superficie esférica dos puntos diametralmente opuestos P y Q. Estos puntos extremos del diámetro perpendicular a una circunferencia de la superficie esférica se llaman *polos* de ésta.

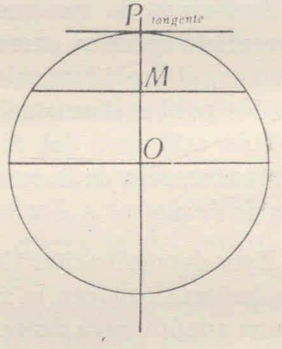
Esta denominación tiene origen geográfico. Todos los lectores conocen la nomenclatura que en Geografía se adopta para designar las diversas circunferencias y puntos de la superficie terrestre. La diferencia esencial está en que mientras en la superficie terrestre hay dos únicos polos y un solo sistema de circunferencias llamadas *paralelos terrestres,* en Geometría se llaman *polos* todos los pares de puntos diametralmente opuestos y les corresponden infinitos paralelos situados en planos perpendiculares.

También el nombre de semicircunferencia meridiana o brevemente *meridiano* tiene origen geográfico pues en cada punto de la superficie terrestre la dirección de la sombra al mediodía verdadero es la de la semicircunferencia meridiana.

6.—PLANO TANGENTE A UNA ESFERA. PROPIEDAD FUNDAMENTAL.

Si P es un punto cualquiera de la superficie esférica y consideramos los diversos planos perpendiculares a la recta PO del radio, en los diversos puntos de esta recta, hemos visto que el plano resulta secante de la superficie, a la que corta según una circunferencia si la distancia OM es menor que el radio.





En cambio, si el punto M es el mismo P, es decir, si se trazan las perpendiculares a PO en el punto P cada una es la tangente al respectivo meridiano por ser perpendicular al radio en su extremo, luego el plano que forman todas esas tangentes tiene común con la superficie esférica el único punto P. Por esta razón se llama *plano tangente* a la superficie o tangente a la esfera.

Plano tangente a una superficie esférica o a una esfera en uno de sus puntos es el plano perpendicular en ese punto al radio correspondiente.

La propiedad fundamental de tal plano es como hemos visto la de tener un solo punto común con la superficie siendo todos los demás exteriores a la superficie y también a la esfera.

7.—SIMETRIAS DE LA ESFERA—

Puesto que la rotación de 180º en torno de la recta diametral PQ hace coincidir la superficie esférica consigo misma, es un eje de simetría, según la definición que dimos en II.9.

Que el centro O es centro de simetría es consecuencia inmediata de la igualdad de radios $OP = OQ$.

Consideremos el plano perpendicular a PQ en el centro O. Este plano corta a cada plano meridiano según una recta que por ser diámetro es eje de simetría de la circunferencia meridiana; luego el plano perpendicular al diámetro en el centro es plano de simetría de la superficie esférica.

Resumiendo estos resultados tenemos:

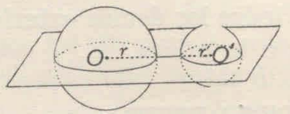
La superficie esférica tiene un centro de simetría que es su centro de figura; infinitos ejes que son las rectas diametrales; infinitos planos que son todos los planos diametrales.

8.—POSICIONES RELATIVAS DE DOS ESFERAS.

Si por la recta OO' determinada por los centros de dos esferas trazamos un plano cualquiera, corta a las dos superficies según dos circunferencias máximas.

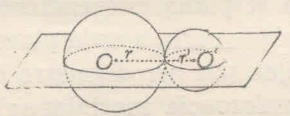
Recordando las posiciones relativas de dos circunferencias en un plano, resultan los siguientes casos según como sea la distancia d de los centros respecto de la suma de radios:

CASO 1º: $d > r + r'$



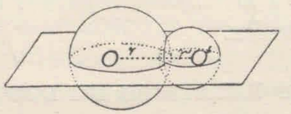
Cualquiera que sea el plano diametral, ambas circunferencias carecen de punto común; las dos esferas carecen, pues, de puntos comunes y se llaman *exteriores.*

CASO 2º: $d = r + r'$



Las dos circunferencias tienen un solo punto común situado en la recta *OO';* las dos esferas se llaman *tangentes exteriormente.*

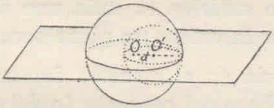
CASO 3º: $d < r + r'$; pero: $d > r - r'$



Las dos circunferencias máximas tienen dos puntos comunes; y la circunferencia cuyo centro es su punto medio y que pasa por ellos, tiene todos sus puntos distantes r de O y r' de O'; luego pertenece a ambas superficies esféricas.

Las dos esferas se llaman *secantes;* y las dos superficies esféricas tienen una circunferencia común, cuyo plano es perpendicular a la recta de los centros.

CASO 4º: $d = r - r'$



Las dos circunferencias diametrales son tangentes interiormente y las dos esferas se llaman *tangentes interiormente.*

CASO 5º: $d < r - r'$

De las dos circunferencias diametrales, una es interior a la otra y esto mismo sucede para todo plano diametral. Una de las esferas se dice *interior a la otra.*

EJERCICIOS. — 1. Enunciar las posiciones relativas de dos superficies esféricas de radios 3 y 5, cuyos centros disten 10, 8, 6, 2, ó bien 1.

2. Dado un triángulo, ¿qué posición relativa ocuparán dos superficies esféricas, cuyos radios sean dos de los lados y la distancia de los centros sea el tercer lado?

3. Construyáse la figura correspondiente al caso 5º, análoga a las del texto.

NOTAS Y COMPLEMENTOS

1.—FIGURAS ESFERICAS.

He aquí algunas de las porciones de esfera o de superficie esférica que han recibido nombre especial:

Casquete esférico es cada una de las dos partes en que divide a la superficie esférica un plano secante.

Análogamente:

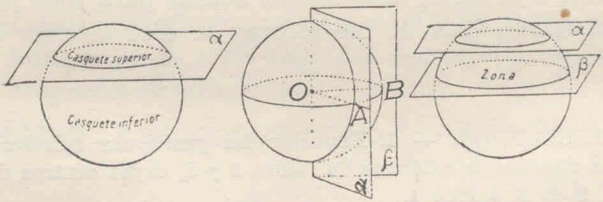
Segmento esférico es cada una de las dos partes en que divide a la esfera un plano secante.

La circunferencia (o el círculo) determinada por el plano secante se llama **base** del casquete (o del segmento); y **altura** del casquete y del segmento es el segmento de radio perpendicular al plano limitado por el segmento esférico.

Huso esférico es la parte de superficie esférica interior a un diedro cuya arista es una recta diametral.

Se llama **cuña esférica** a la parte de esfera interior a tal diedro.

Amplitud del huso o de la cuña es la medida del diedro.



Zona esférica es la parte de superficie esférica comprendida entre dos planos secantes paralelos.

Análogamente: Se llama **segmento esférico bibásico** a la parte de esfera comprendida entre dichos planos.

La distancia entre éstos se llama **altura** de la zona y del segmento, y las dos circunferencias o círculos determinados por los planos secantes son las **bases.**

EJERCICIOS. — Asignar los nombres geométricos que corresponden a las porciones siguientes de superficie terrestre:

Parte comprendida entre dos paralelos.

Parte comprendida entre dos meridianos.

Partes en que divide a la superficie un paralelo.

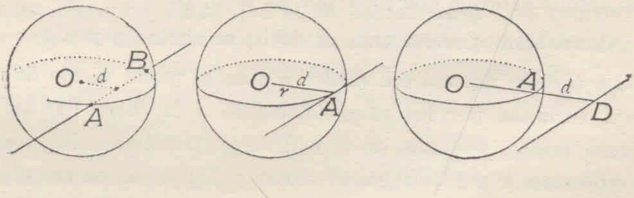
2.—RECTAS SECANTES, TANGENTES Y EXTERIORES.

Para obtener los puntos comunes a una recta y una superficie esférica dadas, basta trazar por la recta el plano diametral, es decir, el determinado con el centro el cual determina en la superficie esférica una circunferencia de centro **O** y radio **r.** Caben tres casos:

1º) Si la distancia **d** del centro a la recta es **menor** que **r,** la recta tiene dos puntos comunes con la circunferencia y se llama **secante** de la superficie esférica.

2º) Si la distancia **d** del centro a la recta es igual a **r,** la recta tiene un solo punto común llamado **de contacto** y se llama **tangente** a la superficie esférica.

3º) Si la distancia **d** es mayor que **r** la recta no tiene puntos comunes con la superficie esférica y se llama **exterior.**



3.—DETERMINACION DE LA SUPERFICIE ESFERICA.

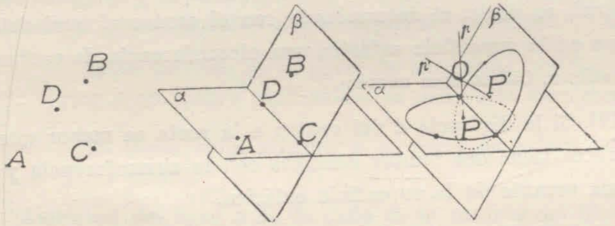
TEOREMA. — **Por cuatro puntos no pertenecientes a un mismo plano pasa una superficie esférica y solo una.**

HIP.) A, B, C, D puntos no situados en un mismo plano.

TESIS) 1º) Hay una superficie esférica uqe pasa por los cuatro puntos A, B, C, D.

2º) Sólo hay una.

DEMOSTRACION. — Los puntos A, B, C, no están alineados; pues entonces estarían los cuatro en el plano; sea α el plano ACD y análogamente β el BCD, siendo distintos ambos, por hipótesis.



Toda superficie esférica que contenga ABCD debe contener la circunferencia ACD y la BCD, y su centro debe estar en la perpendicular p a α en el centro P de ACD; y en la perpendicular p' a β en el centro P' de BCD; como estas rectas no pueden tener más de un punto común, no hay más de una superficie esférica que pase por A, B, C, D.

Ahora bien, ¿existe una, es decir, se cortan p y p'?

La sección normal del diedro $\alpha\beta$ en el punto medio de CD está formada por las perpendiculares a la recta CD en su punto medio, situadas en α y β respectivamente, las cuales contienen a P y P'; luego las rectas p y p' están en ese plano, y como son perpendiculares a dos rectas secantes, se cortan en un cierto punto O que equidista de todos los de la circunferencia ACD, por estar en p, y de todos los de la BCD por estar en p'; luego equidista de ABCD, y es el centro de la superficie esférica buscada.

EJERCICIOS. — 1. Calcular el radio de la circunferencia, sección de una superficie esférica de radio 5 por un plano que diste 4 del centro. Idem si la distancia es 2.

2.. Construir una superficie esférica que contenga una circunferencia y un punto exterior a su plano.

3. Construir la superficie esférica que pase por dos circunferencias que tienen dos puntos comunes y no están situadas en el mismo plano.

4. Estudiar la variación de la sección producida en una superficie esférica por un plano variable trazado por una recta tangente a la superficie.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Asignar los nombres geométricos que corresponden a las porciones siguientes de superficie terrestre:

Parte comprendida entre dos paralelos.

Parte comprendida entre dos meridianos.

Partes en que divide a la superficie de un paralelo.

2. Demostrar que las secciones de la superficie esférica equidistantes del centro son circunferencias iguales y recíprocamente.

3. Demostrar que las cuerdas de la superficie esférica equidistantes del centro son iguales; y recíprocamente.

4. Determinar un punto cuyas distancias a los tres vértices de un triángulo sean segmentos dados. Dibújense en el plano las circunferencias que tiene estos radios con centro en los respectivos vértices A, B, C, asegurando por la simple inspección de la figura si existe solución y cuántas hay.

5. Demostrar que las tangentes a la esfera por un punto exterior son iguales.

6. Demostrar que todo tetraedro tiene una esfera inscripta y otra circunscripta. Dar un método para determinar sus respectivos centros.

7. Construir un tetraedro de cartulina construyendo sus cuatro alturas con hilos, y compruébese que en general no concurren en un punto.

RESEÑA HISTORICA

GEOMETRIA DE LA ESFERA. — De igual modo que la agrimensura dió origen a la Geometría del plano, la Astronomía dió la pauta para la **Esférica**, o estudio geométrico de la esfera.

Se ignoran los conocimientos que sobre la esfera poseían los caldeos, pero se suponen bastante avanzados, sabiendo su elevada cultura astronómica. Corresponde a Grecia la investigación desinteresada y sistematización de estos conocimientos babilonios y egipcios.

El primer geómetra de la esfera es AUTOLYKOS (año -330); él dió le nombre de **círculos máximos**, que ha subsistido, mientras fracasaron otros más modernos, como **círculos fundamentales, grandes círculos, círculos magnos**, etc. También introdujo la denominación de **polos** (de polein=girar) y descubrió que las secciones planas son circunferencias, que dos círculos máximos se cortan en un diámetro, etc.

Poco después EUCLIDES (año -300) definía la esfera por rotación de una semicircunferencia y completaba las aportaciones de Autolykos.

TEODOSIO de Trípoli (año -55) dió tres siglos después la definición de la superficie esférica como lugar de puntos equidistantes del centro; demostró que el plano tangente sólo tiene un punto común con la esfera y es perpendicular al radio del punto de contacto; determinó el centro de la esfera; estudió la variación de las secciones planas según su distancia al centro y descubrió multitud de propiedades que salen del cuadro muy elemental de este libro.

En esta trinidad: **Autolykos, Euclides y Teodosio** tenemos los autores de la materia expuesta en este capítulo y de otros resultados importantes, que no caben en el mismo.

CAPITULO IV

CILINDRO DE REVOLUCION

1.—EJE, RADIO, GENERATRICES.

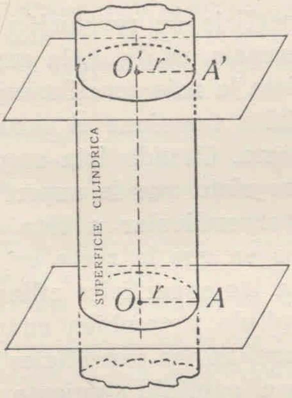
Hemos estudiado la superficie de revolución engendrada por una circunferencia, es decir, la superficie esférica; pero no es ésta la más sencilla superficie de revolución, pues falta examinar el caso en que la generatriz es una recta. Cuando ésta es perpendicular al eje, ya hemos visto que la superficie engendrada es un plano perpendicular a este eje, pero falta examinar el caso en que la recta es paralela al eje, que conduce a las superficies cilíndricas, estudiadas en este capítulo y también cuando sea oblicua, en cuyo caso resultan las superficies cónicas de que trataremos en el capítulo siguiente.

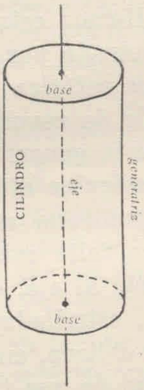
> **Superficie cilíndrica de revolución es la engendrada por una recta que gira alrededor de un eje paralelo.**

Cada punto de la generatriz engendra una circunferencia cuyo radio es la distancia al eje. Esta distancia es la misma para todos los puntos de la generatriz que son equidistantes del eje como hemos visto (1er. curso) y esta distancia entre la generatriz y el eje se llama *radio de la superficie cilíndrica.*

En lugar de hablar de revolución de la generatriz puede decirse también que se traslada apoyándose en una *directriz* que es una circunferencia de plano normal a ella.

Las secciones de una superficie cilíndrica por planos perpendiculares al eje son circunferencias iguales cuyos centros son los puntos de intersección con el eje.





En efecto por ser la generatriz a paralela al eje e es $OA = O'A'$ y al girar alrededor del eje estos segmentos iguales engendran circunferencias iguales.

EJEMPLOS. — Entre los objetos de uso corriente abundan los "limitados por trozos de superficie cilíndrica de revolución."

Los caños rectos de hierro, los cuerpos de bomba y sus émbolos, los alambres corrientes bien estirados, los palos de amasar, y multitud de varillas de usos diversos, son **cilíndri-**

cos; encerrando en esta sola palabra, la frase más expresiva, pero excesivamente larga, que arriba hemos destacado entre comillas.

Otros objetos de apariencia muy diversa, pero en esencia de la misma categoría desde el punto de visto geométrico, son las monedas, fichas del juego de damas y otros discos circulares, cuya superficie lateral es también cilíndrica.

Como todos los objetos de forma cilíndrica o limitados por una superficie cilíndrica suelen estar además limitados por dos círculos perpendiculares al eje, merece estudio especial este cuerpo geométrico que definiremos así:

Cilindro de revolución es el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica de revolución y dos planos perpendiculares al eje.

EJEMPLOS. — Los discos y monedas antes citados (prescindiendo del relieve de su cuño), los trozos de alambre bien cortado a sierra, perpendicularmente al eje, las bolsas de yerba mate prensada, son aproximadamente cilindros de revolución; o bien, como diremos brevemente en lo sucesivo, son **cilindros**, sobreentendiéndose que son de revolución.

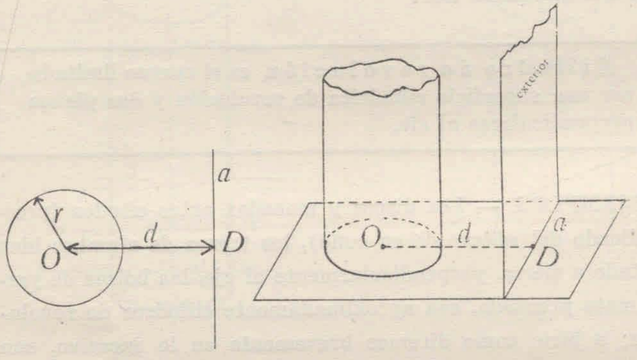
Conviene adaptar a los cilindros la nomenclatura adoptada para las superficies cilíndricas. Así diremos: *generatrices del cilindro* son los segmentos de recta generatriz de la superficie cilíndrica limitados entre los dos planos que la limitan.

Bases del cilindro son los dos círculos que estos planos determinan con la superficie.

2.—INTERSECCION CON PLANOS PARALELOS AL EJE.

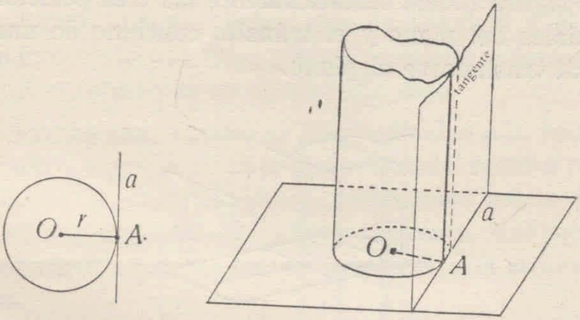
La superficie cilíndrica se puede engendrar también por traslación de una circunferencia paralelamente a su plano; el centro describe el eje, cada punto de la circuferencia describe una generatriz.

Si en el plano de la circunferencia móvil trazamos una recta y ésta se traslada al mismo tiempo que la circunferencia, engendra un plano paralelo al eje y la posición de este plano respecto de la superficie cilíndrica depende de la que tenga aquella recta respecto de la circunferencia móvil.

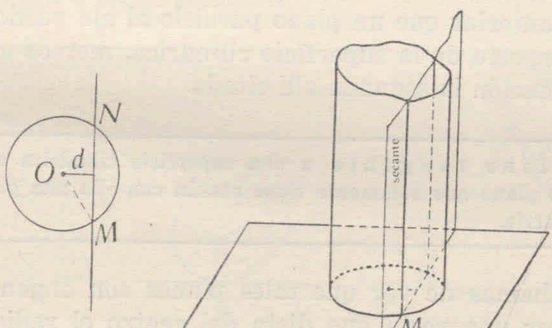


Si la recta es exterior a la circunferencia, es decir, si su distancia al centro es mayor que el radio, el plano resulta exterior a la superficie cilíndrica y también al cilindro que limita, el cual es interior a ella.

Si la recta es tangente a la circunferencia móvil, es decir si su distancia al centro es igual al radio, el plano tiene común con la superficie una sola generatriz que es la engendrada por el punto de contacto.



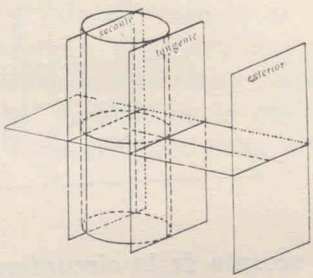
Si la recta es secante de la circunferencia, es decir, si dista de su centro menos que el radio, los dos puntos de intersección engendran dos generatrices de la superficie cilíndrica.



En resumen:

Los planos paralelos al eje de una superficie cilíndrica tienen común con ella dos generatrices, una *o ninguna, según que su distancia al eje sea menor, igual o mayor que el radio de la superficie.*

La figura indica sintéticamente las tres posiciones esenciales del plano y el tránsito continuo de una a otra al trasladarse el plano.



3.—PLANO TANGENTE. PROPIEDAD FUNDAMENTAL.

Entre las diversas posiciones estudiadas en el párrafo anterior que un plano paralelo al eje puede tener respecto de la superficie cilíndrica, merece especial atención la segunda allí citada.

Plano tangente a una superficie cilíndrica es todo plano que solamente tiene común con ella una generatriz.

Acabamos de ver que tales planos son engendrados por una recta que dista del centro el radio; y como la distancia entre el plano y el eje es esta misma, resulta:

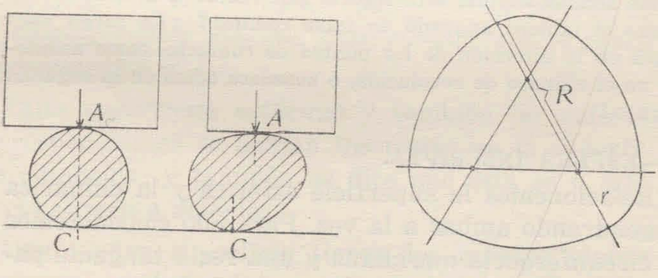
Son planos tangentes aquellos cuyas distancias al eje son iguales al radio.

Que éstos son los únicos planos tangentes resulta inmediatamente del análisis del párrafo anterior, pues el plano tangente debe ser paralelo al eje (por contener una generatriz que es paralela a él) y ya hemos visto que tales planos paralelos solamente resultan tangentes en el segundo caso.

Puesto que el radio es perpendicular a la recta tangente y también lo es a la generatriz, resulta perpendicular al plano tangente. Obtenemos así la propiedad fundamental del plano tangente, análoga a la que caracteriza las rectas tangentes a la circunferencia.

Los planos tangentes a la superficie cilíndrica son perpendiculares a los radios correspondientes a la generatriz de contacto.

EJEMPLOS. — Un rodillo cilíndrico que rueda sobre un plano se conserva siempre tangente a éste, al cual toca en todos los puntos de una generatriz.



Conviene subrayar la importancia de la propiedad de ser el plano tangente perpendicular al radio, que caracteriza los cilindros de revolución y los hace insustituíbles para el trasporte de objetos pesados. La primera figura indica cómo carga el peso sobre el rodillo de revolución, esto es normalmente al plano de apoyo y sobre el punto en que el rodillo toca al suelo; en cambio si el rodillo aun siendo cilíndrico no es de revolución, la carga tiende a hacer girar el rodillo y abandonada sobre éste no quedaría en reposo. Por estas razones, aparte de la extremada sencillez de su construcción, son los cilindros de revolución los únicos usados en casi todas las artes y por ello huelga el calificativo "de revolución" solamente necesario cuando haya que distinguirlos de algún otro.

EJERCICIOS. — 1. Determínense generatrices de un cilindro de madera, hierro u otro material consistente apoyándolo sobre un plano bien liso y señalando dos puntos de contacto.

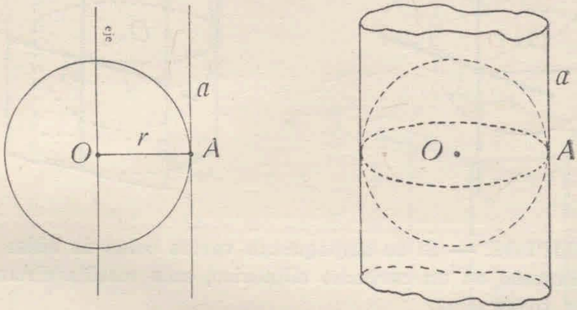
2. Demostrar que la curva dibujada en la fig. 3 mediante seis arcos de circunferencia con centros en los vértices de un triángulo equilátero tiene anchura constante, es decir, dos tangentes paralelas tienen la misma distancia $r+R$.

3. Constrúyase un disco de cartón con este perfil, observando que al girar dentro de un cuadrado cuyo lado sea esta anchura toca siempre a los cuatros lados.

4. Indíquense las características de un rodillo que tenga como sección normal esta figura. ¿Se conserva a altura constante el tablero apoyado en tales rodillos? ¿La carga apoyará en la dirección de los puntos de contacto, como acontece en el cilindro de revolución, o sucederá como en la segunda figura?

4.—ESFERA INSCRIPTA.

Relacionemos la superficie esférica y la cilíndrica engendrando ambas a la vez. Para ello consideremos la circunferencia meridiana y una recta tangente paralela al eje de revolución, es decir tangente y eje son perpendiculares al mismo radio como indica la figura 1ª. Al girar en torno del eje, la circunferencia engendra una superficie esférica y la recta una superficie cilíndrica del mismo eje, las cuales tienen solamente comunes los puntos de la circunferencia ecuatorial engendrada por el punto de contacto.

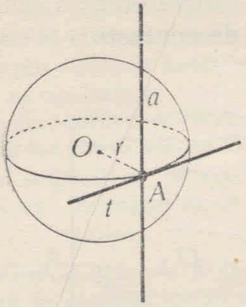


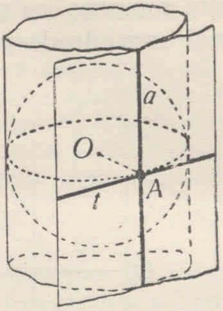
Como la superficie esférica está determinada por su radio y éste puede ser cualquiera de la cilíndrica, resulta:

Toda superficie esférica cuyo centro está en el eje de la superficie cilíndrica y tiene el mismo radio de ésta, tiene con ella comunes solamente los puntos de la circunferencia máxima determinada por el plano perpendicular al eje.

Tales superficies esféricas y también las esferas correspondientes se llaman inscriptas en la superficie cilíndrica; y también se dice que ésta es o está *circunscripta* a aquella.

Una y otra superficie tienen los mismos planos tangentes en todos los puntos de la circunferencia de contacto, pues en cada uno el plano tangente a la esfera es el perpendicular al radio correspondiente y este plano es también tangente a la superficie cilíndrica.





EJEMPLOS. — Si se empaquetan varias bolas de billar de igual tamaño en un cartucho cilíndrico, este resulta circunscripto a todas ellas.

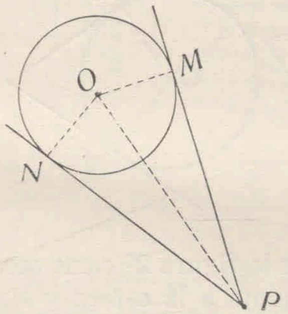
En los antiguos cañones de balas esféricas éstas quedaban inscriptas en el ánima del cañón, es decir, en la superficie cilíndrica interna al prepararlo para el disparo.

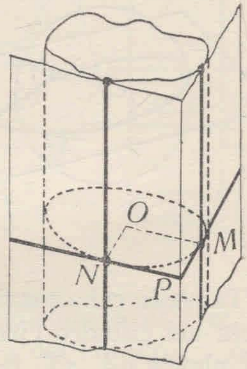
5.—PLANOS TANGENTES POR UNA RECTA PARALELA AL EJE.

Todo problema relativo a la circunferencia conduce a otro problema análogo para la superficie cilíndrica. Así, p. ej., sabemos trazar tangentes a una circunferencia por un punto exterior; al efectuar la traslación de la circunferencia resulta una superficie cilíndrica y en la misma traslación el punto engendra una recta paralela a las generatrices. Las dos tangentes engendran sendos planos tangentes a la superficie cilíndrica y los puntos de contacto engendran las generatrices de contacto.

Resulta así esta regla práctica:

Para trazar planos tangentes a una superficie cilíndrica por una recta exterior paralela al eje se *corta la recta y la superficie por un plano perpendicular al eje y se resuelve el problema de trazar tangentes a la circunferencia sección por el punto sección.*



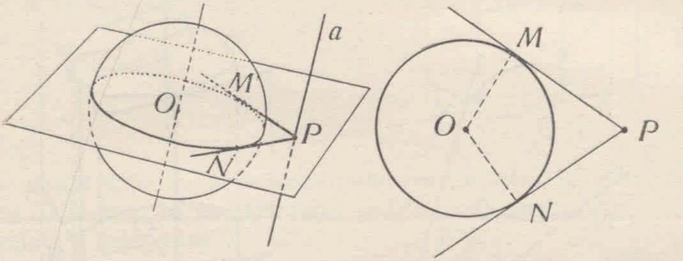


NOTA: Ocurre preguntar qué sucederá si la recta no es paralela al eje; pero como todas las rectas de cada plano tangente son tangentes a la superficie, solamente en este caso tendría solución el problema estando determinada por la recta y la generatriz del punto de contacto.

6.—PLANOS TANGENTES A UNA ESFERA POR UNA RECTA.

Si la superficie dada es esférica y la recta exterior a ella, el razonamiento es análogo. Basta trazar un plano diametral perpendicular a la recta, es decir se traza por O el plano perpendicular a ella y el problema se reduce a trazar tangentes a la circunferencia máxima así obtenida por el punto P de intersección con la recta. En efecto, si M es un punto de contacto, el radio OM es perpendicular a la tangente PM

y también es perpendicular a la recta *a*, puesto que ésta lo es a todas las situadas en el plano diametral perpendicular a ella, luego el plano *aM* es tangente y lo mismo el *aN*.



También cabe considerar la figura 2ª como sección recta del cilindro circunscripto a la esfera y siendo los planos *aA*, *aN*, tangentes al cilindro lo son también a la esfera.

EJERCICIOS. — ¿Qué resultado da la construcción anterior cuando la recta sea perpendicular a un radio en su extremo, es decir, cuando la distancia al centro sea igual al radio?

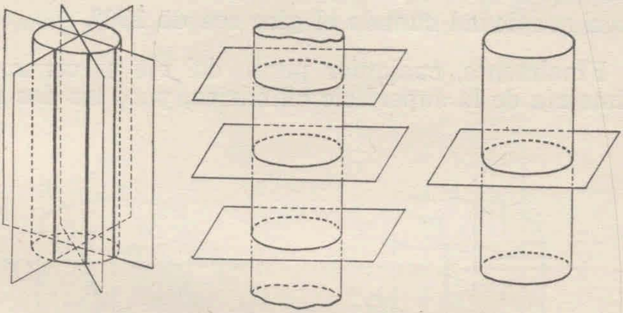
2. Razonar esta conclusión: Por una recta pasan **dos** planos tangentes a la esfera o **uno** o **ninguno** según que la distancia al centro sea **mayor, igual** o **menor** que el radio. .

3. Enúnciese la conclusión análoga para el cilindro.

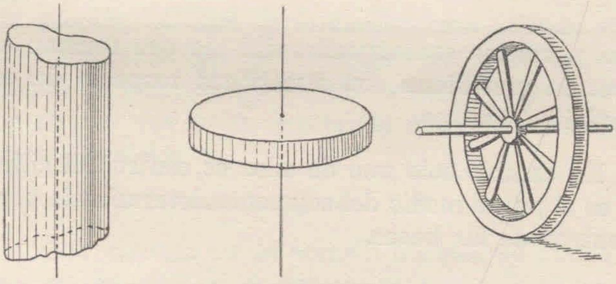
7.—PROPIEDADES DE SIMETRIA DE LA SUPERFICIE CILINDRICA Y DEL CILINDRO.

Por ser superficie de revolución son planos de simetría todos los que pasan por el eje, los cuales se llaman *planos meridianos*. Todos estos planos son también de simetría para el cilindro.

Además son planos de simetría de la superficie cilíndrica todos los perpendiculares al eje, puesto que cada generatriz es simétrica respecto de cada uno

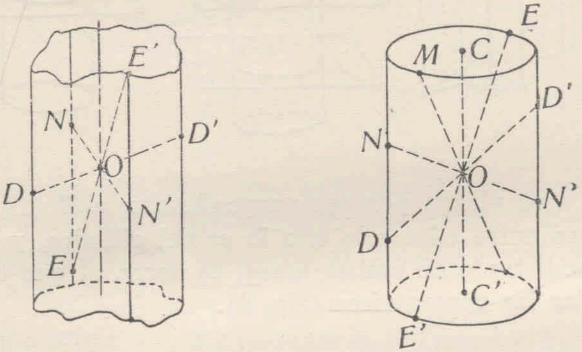


de esos planos por ser perpendicular a él (fig. 2); pero entre ellos solo uno lo es del cilindro, y es el equidistante de ambas bases, es decir, el que biseca todas las generatrices (fig. 3).



El eje del cilindro o de la superficie cilíndrica es eje de simetría de ambas figuras, puesto que cada plano trazado por él corta en dos rectas simétricas o dos segmentos simétricos, respectivamente. O bien, por ser superficie de revolución; pues si la superficie coincide consigo misma después de cualquier rotación alrededor del eje, en particular se verifica esta propiedad cuando el giro sea de 180º.

Finalmente, cualquier punto del eje es centro de simetría de la superficie cilíndrica, pues las dos rec-

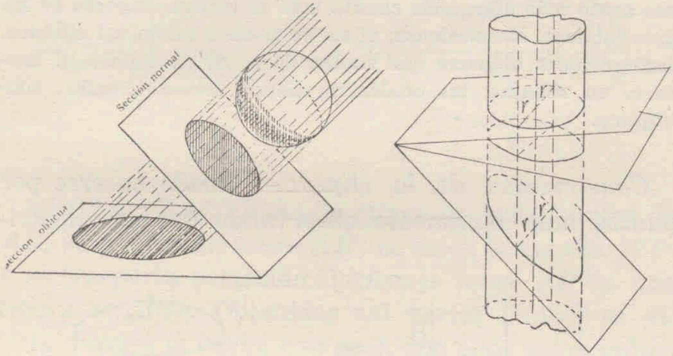


tas paralelas equidistantes del eje que forman cada sección meridiana son simétricas respecto de estos infinitos centros.

En cambio solo uno de ellos es centro del cilindro y es el punto medio del segmento determinado por los centros de las bases.

8.—INTERSECCION DE UN CILINDRO CON UN PLANO CUALQUIERA.

Mientras en el capítulo III hemos considerado secciones de la superficie esférica por planos cualesquiera, resultando circunferencias siempre que tales secciones existen, hemos eludido en cambio el problema análogo para el cilindro, considerando solamente planos normales al eje. ¿Qué sección producen los planos oblicuos? La figura 1ª indica claramente



que la sección, la cual es circunferencia cuando el plano es normal al eje, se va alargando a medida que el plano se inclina; mientras que su anchura es siempre igual a $2r$ por estar encerrada entre dos planos tangentes paralelos.

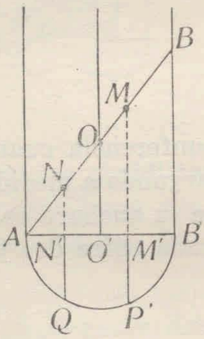
Tales curvas se llaman *elipses.*

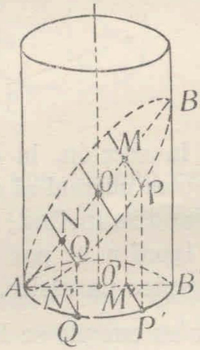
La forma circular de la sección normal no aparece muy claramente en el dibujo, porque siendo una proyección sobre el papel de la figura del espacio, también aparece la circunferencia en forma de elipse, pero pueden realizarse las experiencias siguientes que confirmarán el razonamiento anterior.

EJEMPLOS. — 1. Tómese una esfera, es decir, una bola cualquiera y al exponerla al sol o bien al iluminarla con una luz lejana, proyecta una sombra cuya forma depende de la inclinación de la pantalla. Si ésta es normal a los rayos luminosos la sombra es circular; pero se va alargando tanto más cuanto más se inclina el plano de la pantalla.

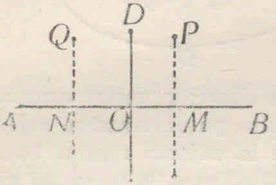
2. Tómese un cilindro de material blando y córtese con un cuchillo dando a éste inclinaciones variadas y resultarán elipses tanto más alargadas cuanto más se incline respecto de las generatrices. Recuérdense, si no se tiene a mano tal cilindro, las secciones oblícuas que suelen darse al salchichón al cortarlo en rodajas, las cuales no tienen forma circular, sino elíptica.

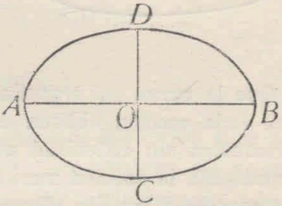
Construcción de la elipse: — Puede hacerse por puntos muy fácilmente observando que es simétri-





ca respecto del plano diametral que le es perpendicular. Adoptado éste como plano del dibujo, el plano secante se proyecta según la recta AB y las cuerdas perpendiculares a AB son iguales a las correspondientes de la sección normal, que es una circunferencia. Es decir $MP=M'P'$, $NQ=N'Q'$, como se ve en la segunda figura. Por tanto, basta llevar perpendiculares al segmento AB cuyas longitudes sean iguales a las correspondientes cuerdas de la circunferencia, las cuales se determinan como indica la figura 1.





REGLA PRACTICA: Se eligen diversos puntos de AB, se proyectan sobre AB', se mide la cuerda $M'P'$ y se trasporta perpendicularmente sobre AB en una figura auxiliar. Obtenidos así varios puntos se dibuja a pulso la curva que pasa por ellos como indica la figura final.

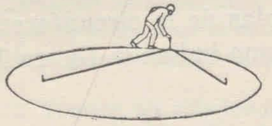
RESEÑA HISTORICA

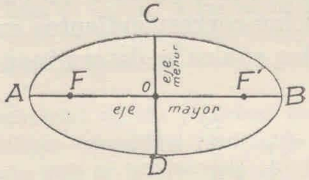
La palabra **cilindro** proviene del verbo griego **kilindein** = rodar, y ha perdurado en todos los idiomas.

Aunque Euclides define el cilindro por la rotación de un segmento y análogamente el cono, no introdujo nombre ninguno para designar al segmento que hoy llamamos **generatriz** (Herón lo llamaba **klima**=inclinación).

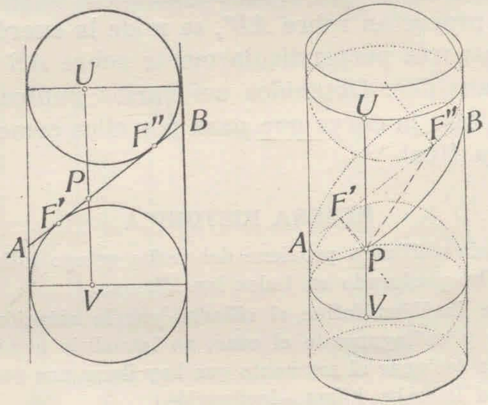
Cilindro y cono aparecen inseparablemente unidos en la Historia y las notas del próximo capítulo son la natural continuación de éstas.

ELIPSE. — He aquí la construcción llamada del jardinero por ser la usual para el trazado sobre el suelo. Fijado un hilo por sus extremos en dos puntos **F** y **F'**, llamados **focos** al estirarlo con una estaca moviendo ésta alrededor de los focos, resulta el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los focos es la longitud total del hilo.





Que la curva así trazada es una **elipse**; y, recíprocamente, que toda sección oblicua del cilindro puede trazarse así, se demuestra sin dificultad mediante la adjunta figura. La 1ª representa la sección meridiana del cilindro, la traza del plano secante y las dos circunferencias inscriptas. Hágase girar alrededor del eje y resulta la fig. 2ª. Aplicando la propiedad



de ser iguales las tangentes a la esfera por cada punto exterior (**Ejercicios y problemas III 5**) se demuestra fácilmente la identidad de ambas definiciones, uno de los más bellos descubrimientos anteriores a Euclides.

Gracias a él pudo Kepler formular las tres leyes inmortales del movimento de los planetas, que sirvieron después a Newton para descubrir la ley de la gravitación.

CAPITULO V

CONO DE REVOLUCION

1.—EJE. VÉRTICE. GENERATRICES.

Ya hemos advertido en el capítulo anterior que se definen y estudian estas superficies cónicas de revolución de modo muy análogo a las cilíndricas; pero conviene advertir que su importancia en la vida corriente es inferior a la de aquellas (*).

> **Superficie cónica de revolución es la engendrada por una semirrecta que gira alrededor de un eje oblícuo que pasa por su origen.**

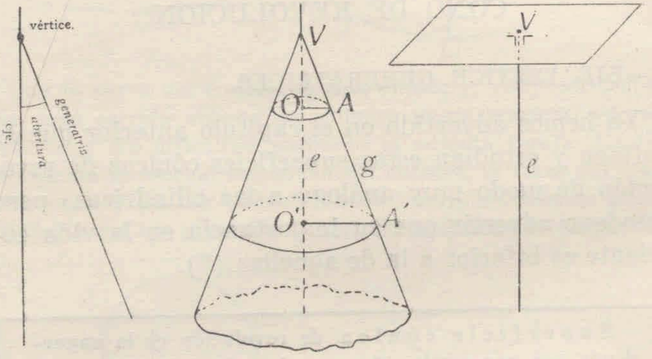
Cada punto de la generatriz engendra una circunferencia cuyo radio es la distancia de ese punto al eje. Esta distancia varía de punto a punto y por eso no existe en la superficie cónica ningún segmen-

(*) Su importancia especulativa reside sobre todo en haber dado origen a la **teoría de las secciones cónicas** de Apolonio. Estas son la **elipse** (ya conocida como sección cilíndrica), la **hipérbola** y la **parábola**. De estas tres la importante por su significado en Astronomía es la elipse, pero las tres han sido objeto de extensísimos estudios por los geómetras, prescindiendo de sus aplicaciones.

En cambio, las superficies cónicas en general son el fundamento de la Perspectiva y Teoría de sombras.

to constante notable, análogo al radio de las cilíndricas.

Los únicos elementos fijos que caracterizan la superficie cónica son: *vértice, eje, ángulo* de la generatriz con el eje.



Este ángulo, también llamado *abertura* de la superficie cónica, viene a sustituir al radio de las cilíndricas.

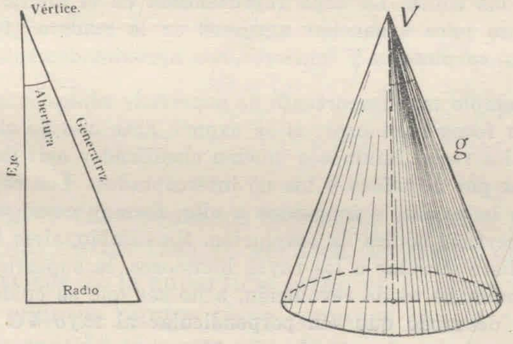
En las artes suele llamarse *abertura* de la superficie cónica al duplo de este ángulo, es decir, al ángulo que forman dos generatrices opuestas; pero es muy preferible conservar la definición anterior.

Si la abertura es 90º, es decir, si la generatriz es perpendicular al eje, engendra, como ya sabemos, un plano perpendicular al eje; como hemos excluído este caso en la definición, resulta que no consideramos al plano como superficie cónica; pero no hay inconveniente es incluirla entre ellas como caso extremo o límite de ellas (figura 3). El otro caso extremo será aquél en que la generatriz coincida con el eje, en cuyo caso no resulta superficie, pues al girar se tiene solamente la misma generatriz, es decir, la superficie se reduce a una semirecta.

Lo mismo que hicimos para los cilindros, omitiremos el calificativo "de revolución".

CONOS. — En las aplicaciones se usan cuerpos limitados por una superficie cónica y un plano perpendicular al eje. Son estos cuerpos llamados *conos* los que estudiaremos a continuación:

> **Cono** (de revolución) es el cuerpo limitado por una superficie cónica (de revolución) y un plano perpendicular al eje que corta a todas las generatrices según una circunferencia.

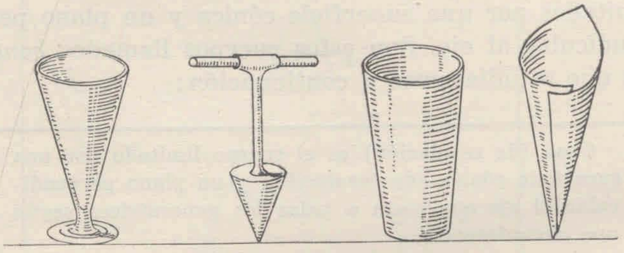


Base del cono es el círculo limitado por la circunferencia sección.

Generatriz del cono es el segmento de generatriz de la superficie limitado entre el vértice y la base.

Eje del cono es el segmento de eje de la superficie contenido en el cono; es decir, es el segmento que tiene como extremos el vértice y el centro de la base.

Para asegurar la condición de que el plano corte a todas las generatrices basta que corte a una y para ello es suficiente que no pase por el vértice y corte al eje del cono *VO* como se ve en la figura 1ª.



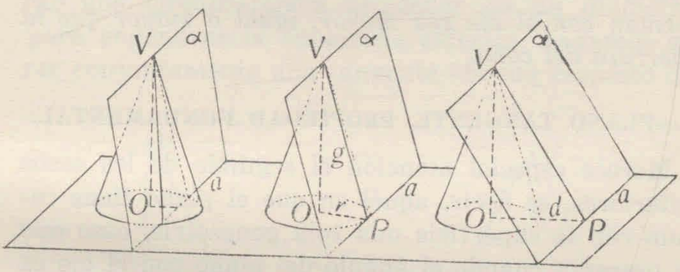
EJEMPLOS. — No abundan entre los objetos de uso corriente los conos. La copa representada en el dibujo, la herramienta para ensanchar agujeros en la madera (fig. 2ª), que usan carpinteros y toneleros, son aproximadamente conos.

El ejemplo más importante de superficie cónica lo suministran los focos luminosos; si se expone ante uno de ellos una esfera, los rayos luminosos quedan clasificados así: los interceptados por la esfera y los no interceptados. Los rayos que tocan a la esfera, o tangentes a ella, forman como veremos, una superficie cónica de revolución. En cambio, si se interpone un disco circular a los rayos luminosos, la superficie cónica obtenida no es de revolución, a no ser que se cuide de inclinarlo de modo que sea perpendicular al rayo **VO** correspondiente a su centro. En la pág. 95 se representa una lámina con un agujero circular dispuesta de modo que la superficie cónica sea de revolución y su sección por una pantalla paralela (es decir normal al eje), es también circular, mientras que en la fig. 1ª la pantalla es oblícua y la sección no es circular. Pronto veremos qué es elíptica. (V. figura de pág. 95).

2.—INTERSECCION CON PLANOS QUE PASAN POR EL VERTICE.

Como la superficie cónica está formada por semirrectas de origen V, y también el plano que pasa por V, basta cortar ambas por un plano perpendicular al eje y determinar los puntos comunes a la recta sección del plano con la circunferencia sección de la superficie cónica.

Como una recta y una circunferencia pueden tener dos puntos comunes o solo uno, o bien ninguno, así resultarán respectivamente dos generatrices comunes, o solo una, o ninguna.



La figura representa los tres casos posibles, y para saber cuál de los tres se verifica, es decir, cuántas generatrices de la superficie están en el plano bastará ver cuántos puntos tiene comunes con la circunferencia sección la recta a en que corta el plano considerado α; para ello basta ver si la distancia de O a dicha recta a es mayor, igual o menor que r.

La distancia d, por ser perpendicular a a determina con el eje el plano VOP proyectante del eje sobre el plano α; y basta medir el ángulo OVP que forma el eje con α; si este ángulo es menor que la abertura de la superficie, es $OP < r$ y a corta en dos puntos a la circunferencia generatriz; si el ángulo es igual a la abertura, resulta $OP = r$, y es a tangente a la circunferencia; si el ángulo es mayor que la abertura, es $OP > r$ y no hay puntos comunes.

El plano se llama *secante* en el primer caso, *tangente* en el segundo y *exterior* en el tercero.

Llegamos así a esta conclusión general:

Los planos que pasan por el vértice de una superficie cónica circular cortan a ésta en dos generatrices, en una o en ninguna, según que el ángulo que forman con el eje sea menor, igual o mayor que la abertura del cono.

3.—PLANO TANGENTE. PROPIEDAD FUNDAMENTAL.

Merece especial atención el segundo de los casos anteriores, es decir, aquél en que el plano tiene común con la superficie una sola generatriz, caso que se presenta cuando el ángulo del plano con el eje es igual a la abertura de la superficie cónica.

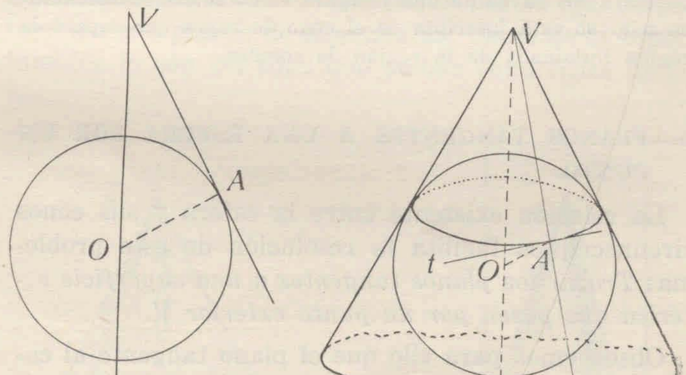
La propiedad fundamental de este plano tangente resulta inmediatamente observando lo siguiente: la tangente a a la circunferencia es perpendicular al radio del punto de contacto, como se sabe ya de Geometría plana; además, es perpendicular al eje, por estar situada en el plano perpendicular a él; luego por el teorema de las tres perpendiculares es a perpendicular a la generatriz g del punto de contacto P. Siendo, por tanto, a perpendicular a las rectas

OP y *VP* es perpendicular al plano *OVP* y también lo es por consiguiente el plano tangente por contener la recta *a* perpendicular a dicho plano *OVP*. Hemos demostrado, en resumen, la siguiente propiedad del plano tangente, análoga a la del plano tangente al cilindro:

El plano tangente a una superficie cónica a lo largo de una generatriz es el perpendicular al plano meridiano correspondiente a esta generatriz.

4.—ESFERA INSCRIPTA.

Sigamos el mismo método ya utilizado para la superficie cilíndrica. Al mismo tiempo que hacemos girar una circunferencia alrededor de un diámetro, para engendrar la superficie esférica, hagamos girar conjuntamente una tangente oblicua respecto del



mismo eje. Esta tangente oblicua engendrará, como sabemos, una superficie cónica, la cual tendrá común con la superficie esférica solamente la circunferencia engendrada por el único punto común a la circunferencia y su tangente. Diremos que la superficie esférica y la superficie cónica son *tangentes* a lo largo de esa circunferencia, que se llama de *contacto* ,o bien que la esfera está *inscripta* en la superficie, o también se dice que la superficie cónica está *circunscripta* a la esfera o a la superficie esférica.

Estos nombres están justificados, pues la esfera es *interior* a la superficie cónica y ésta *envuelve* a aquella, como se observa en la figura.

EJEMPLOS. — Introdúzcase una esfera en una copa como la representada en la figura de pág. 88 y se observará que toca al vidrio en una circunferencia, quedando inscripta en la superficie cónica que forma el interior de la copa. Lo mismo sucede en un vaso corriente, si la esfera tiene tamaño conveniente para entrar en él, sin llegar al fondo. La esfera expuesta a los rayos de una lámpara como se ha representado en pág. 95 está inscripta en el cono de rayos que separa la región iluminada de la región de sombra.

5.—PLANOS TANGENTES A UNA ESFERA POR UN PUNTO.

La relación existente entre la esfera y sus conos circunscriptos facilita la resolución de este problema: *Trazar los planos tangentes a una superficie esférica que pasen por un punto exterior V.*

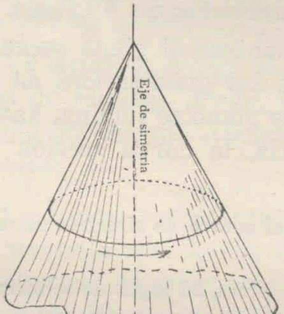
Observemos para ello que el plano tangente al cono circunscripto, es perpendicular al plano *OVA* y como el radio *OA* está en este plano y es perpendicular a la recta *VA*, traza del plano tangente al cono, es también perpendicular a éste, luego dicho plano tangente al cono es también tangente a la superficie esférica, y recíprocamente.

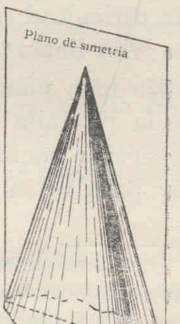
El problema de trazar los planos tangentes a la esfera (o a la superficie esférica) se reduce así al de trazar los planos tangentes al cono circunscripto cuyo vértice sea V.

El trazado de este cono circunscripto se hace así: Por el punto V se trazan las tangentes a la circunferencia meridiana determinada en la superficie esférica por un plano que pasa por la recta VO. Al girar ésta alrededor del eje VO resulta la superficie cónica circunscripta y todos los planos tangentes a ésta lo son a la superficie esférica.

6.—SIMETRIA DEL CONO. EJE Y PLANOS DE SIMETRIA.

Por ser la superficie cónica de revolución son planos de simetría todos los que pasan por su eje. Como también son planos de simetría del plano de la base, también lo son del cono que ambas superficies limitan.





También el eje de la superficie cónica es eje de simetría de ambas superficies y por tanto del cono.

Obsérvese la pobreza de simetrías que ofrece el cono comparado con los cilindros y precisamente es ésta la principal razón de sus escasas aplicaciones en la vida corriente. (*)

7.—INTERSECCION DEL CONO CON UN PLANO CUALQUIERA. CURVAS QUE RESULTAN.

La misma razón que nos hizo dejar de lado las secciones oblicuas del cilindro, hizo que Euclides dejara de considerar las secciones oblicuas del cono. Fué Apolonio quién más tarde abordó este problema que sale de la Geometría elemental y del cual daremos solamente ligeras nociones.

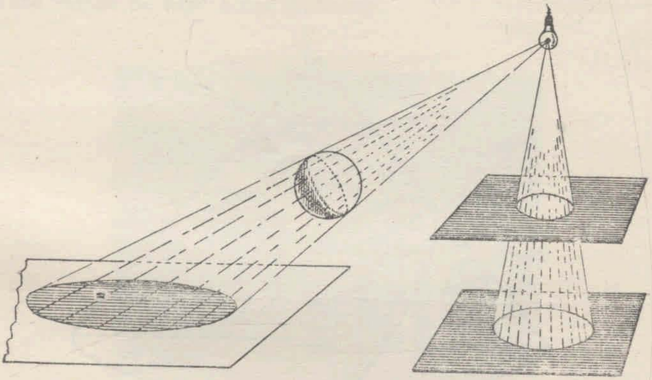
Vemos en la figura de página siguiente que la sombra proyectada por una esfera sobre una pantalla tiene forma parecida a la elipse, ya definida en el Cap. IV como sección oblícua del cilindro. ¿Será la misma curva? Esta identidad, que se demuestra sin dificultad (como en página 84) constituye uno de los más importantes descubrimientos de Apolonio.

No hay, pues, novedad, mientras el plano secante de la pantalla corta a todas las generatrices de la superficie cónica; pero si este plano se inclina, hasta ser paralelo a una generatriz, la curva sección se

(*) El programa cita también el centro de simetría del cono, que no existe.

Si se consideraran rectas generatrices, en lugar de semirrectas, se engendraría una figura cuyo centro de simetría sería el vértice.

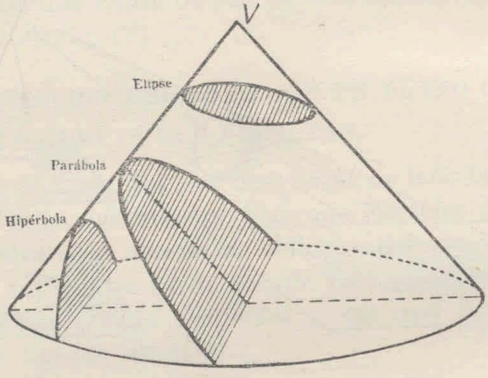
alarga infinitamente como indica la figura y recibe el nombre de *parábola.*



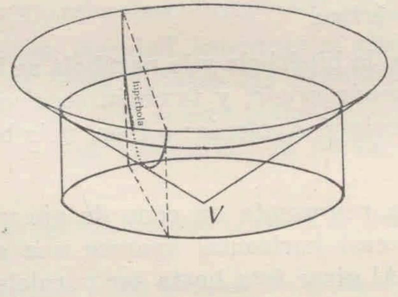
Cabe todavía hacer girar la pantalla, o plano secante de tal modo que corta a una porción de la superficie cónica y también a su opuesta por el vértice. La intersección se llama *hipérbola* y es una curva que tiene dos ramas separadas si se considera el cono llamado *completo,* es decir, los dos conos opuestos por el vértice.

La elipse, la hipérbola y la parábola se llaman curvas de *segundo grado,* y también *secciones cónicas,* como las designó Apolonio; o bien, más brevemente, *cónicas.*

La figura representa un cono de eje vertical. En la pantalla casi horizontal aparece una sombra casi *elíptica.* Al girar ésta hasta ser paralela a una generatriz, llega a prolongarse infinitamente y la sombra se dice *parabólica.* Si la pantalla se inclina más, por ejemplo si se coloca verticalmente, resulta una sombra *hiperbólica.* La otra rama de curva resultaría en el cono opuesto, o simétrico respecto de *V.*

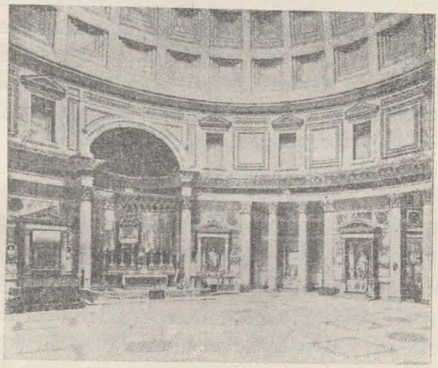


EJEMPLOS. — Caso análogo se presenta al fotografiar un circo desde su centro. Como las gradas son circunferencias horizontales (en otros circos como el de Verona son elípticas) el cono de rayos que la proyectan es de revolución con eje



vertical, tal como el representado en la figura. La placa fotográfica se coloca en la cámara verticalmente y sobre ella aparece una rama de hipérbola que es la fotografía de la grada circular.

Las diversas curvas que aparecen en la fotografía interior de una Plaza de toros o del Coloseum de Roma, son por tanto ramas de hipérbolas distintas.



El grabado representa en reproducción fotográfica el interior del famoso **Panteón** de Roma, el más bello y mejor conservado de los monumentos romanos. Obsérvese la línea de la cornisa, la cual, en virtud de lo explicado, es una rama de hipérbola. También son trozos de hipérbolas diversas las líneas de nivel del artesonado, de las que se alcanza a ver varias cuya verdadera forma es circular, y finalmente la línea del piso, que también es en la proyección una rama de hipérbola, pero dirigida en sentido contrario, por estar más baja que el objetivo de la cámara fotográfica.

RESEÑA HISTORICA

CONOS. — La palabra **cono** designa en griego el pino y también las piñas.

El estudio de conos y cilindros se remonta a Arkitas, iniciador de la Geometría del espacio.

A la figura formada por dos conos iguales con base común, la llamaba Arquímedes **rombo**, palabra que después se aplicó a la figura plana sección meridiana de este cuerpo de revolución.

CONICAS. — El descubridor de las cónicas o curvas de segundo grado no es, como suele creerse, Apolonio, sino MENECHMO (-370, -325) quien las estudió no como secciones cónicas, sino como lugares geométricos de segundo grado, así como también otras curvas más complicadas de grado superior. Parece ser que no llegó a darse cuenta de que tales curvas de segundo grado (que fueron llamadas algún tiempo **triada menechmiana**) pueden obtenerse como seciones de un cono. Esto fué visto por su discípulo ARISTEO (-320) pero durante mucho tiempo no progresó la teoría por empeñarse en engendrar tales curvas mediante secciones de un cono por planos normales a una generatriz, debiendo variarse la abertura del cono para obtener las tres curvas.

Euclides y Arquímedes no avanzan mucho en su estudio por esta causa y finalmente encuentra Apolonio el buen camino, engendrando las tres curvas mediante un solo cono al variar la inclinación del plano secante.

Los nombres impuestos por Apolonio a las tres curvas, que han perdurado definitivamente, proceden de las palabras: **parabole** = igualdad; **elipsis** = defecto; **hiperbole** = exceso; y están bien justificados por ciertas propiedades que caracterizan las tres curvas.

Tan completo fué el estudio de Apolonio que hasta Descartes en pleno siglo XVII, es decir, mil años después, no se encuentra progreso esencial. Y todavía podemos agregar que en las definiciones de Mechnemo y Apolonio como lugares geométricos de segundo grado está en germen la Geometría analítica.

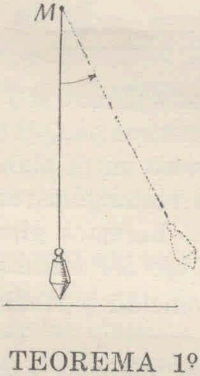
Euclides (-300), Arquímedes (-287, -212), Apolonio (-250, -200) y Eratóstenes (-250, -294), los cuatro grandes coetáneos que dieron fama a la Escuela de Alejandría, aparecen en este mismo orden, con pocos años de intervalo, y algo hemos dicho ya de sus aportaciones a la Geometría dejando para otro curso el magno descubrimiento de Arquímedes, que éste deseó fuera grabado sobre su tumba.

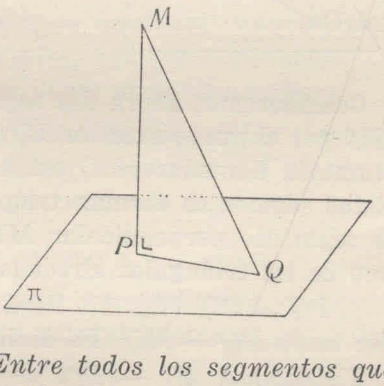
CAPITULO VI

PERPENDICULARES Y OBLICUAS A UN PLANO

1.—RELACIONES ENTRE LAS PERPENDICULARES Y OBLICUAS DESDE UN PUNTO EXTERIOR.

Si colgamos una plomada de modo que casi toque al suelo, se observa que al oscilar apartándose de su posición vertical, es decir, al dejar de ser la recta del hilo perpendicular al plano del suelo, la punta inferior se aleja del suelo. La misma observación puede hacerse en el péndulo de un reloj. Esto revela que entre todas las distancias de un punto exterior a los diversos puntos del plano la menor de todas es la perpendicular. Este hecho experimental puede demostrarse racionalmente como sigue:





TEOREMA 1º — *Entre todos los segmentos que tienen un extremo exterior a un plano y el otro si-*

tuado en éste el segmento perpendicular es menor que todos los oblicuos.

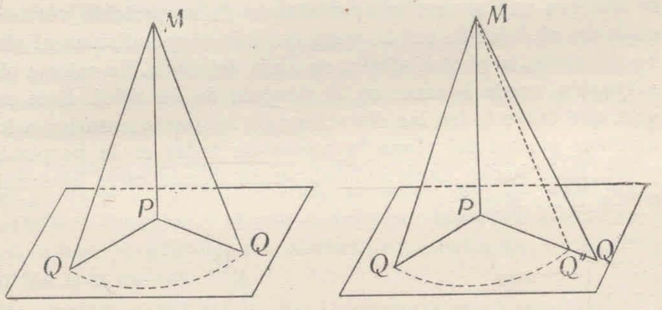
HIP.) $MP \perp \pi$; Q punto de π, distinto de P.

TESIS) $MQ > MP$.

Demostración. — El triángulo MPQ es rectángulo en P, por ser $MP \perp PQ$ (II,1) luego la hipotenusa es $MQ > MP$.

También resulta:

RECÍPROCO. — *Si un segmento* MP *es menor que todos los demás limitados entre el punto y el plano, es perpendicular al plano.*



Consideremos ahora dos segmentos oblícuos MQ y MQ' por el punto exterior M, cuyos extremos Q y Q' (también llamados *pies*) estén situados en el plano. Estos segmentos forman triángulos rectángulos con el segmento perpendicular MP y si hacemos girar uno de los triángulos alrededor del eje MP resulta:

Si $PQ = PQ'$ (fig. 1ª) llegan a coincidir y resulta por tanto $MQ = MQ'$. Es decir:

TEOREMA 2º. — *Dos segmentos oblicuos comprendidos entre un punto y un plano, y cuyos pies* *equidisten del de la perpendicular trazada por el punto al plano, son iguales.*

En cambio si es PQ < PQ' (fig. 2ª), al superponer por rotación los planos de ambos triángulos, el segmento oblicuo *MQ'* cuyo pie se aparta del pie de la perpendicular más que el *MQ* es mayor que el *MQ''* = *MQ* en virtud de lo demostrado en Geometría plana, luego podemos enunciar:

TEOREMA 3º. — *De dos segmentos oblicuos comprendidos entre un punto y un plano, es mayor aquél cuyo pie dista más del de la perpendicular trazada por el punto al plano.*

Analice el lector ambas propiedades y verá que son equivalentes a estas dos, que constituyen los teoremas llamados *recíprocos* de aquellos porque la hipótesis de cada uno es la tesis del otro: Se ve en efecto que demostrados aquellos dos resultan estos dos recíprocos; y si se admiten estos dos resulta como consecuencia aquel otro par.

Si dos segmentos oblícuos limitados entre un punto y un plano son iguales, sus pies equidistan del pie de la perpendicular desde el punto al plano.

De dos segmentos oblícuos comprendidos entre un punto y un plano, el mayor dista más del pie de la perpendicular trazada por el punto al plano.

2.—DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO.

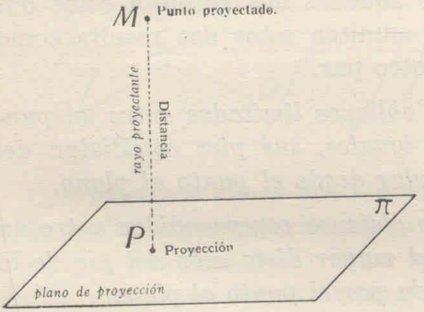
Puesto que la distancia perpendicular es menor que las oblícuas parece natural adoptarla como distancia del punto al plano ya que está bien determinada entre todas ellas.

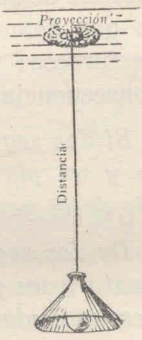
Distancia de un punto a un plano es el segmento de perpendicular a éste trazada por el punto y limitada entre el punto y el plano.

En virtud de la propiedad de mínimo que hemos demostrado puede adoptarse esta definición equivalente:

Distancia de un punto a un plano es la menor de las distancias del punto a los diversos puntos del plano.

Al caer una piedra al suelo sigue la trayectoria vertical, es decir, la distancia más corta al suelo. La lámpara que cuelga del techo hace adoptar a la cadena que la suspende la posición vertical, es decir, el segmento que forma es la distancia de la lámpara al techo.





EJERCICIOS. — 1. Comprobar experimentalmente los teoremas 1º, 2º y 3º.

2. Atese un hilo a un garfio del techo y determínese el pie de la perpendicular sobre el suelo, buscando la mínima distancia.

3. Obsérvese que a pesar de su exactitud teórica hay una gran indeterminación en este método y sustitúyase por éste: Se marcan en el suelo tres puntos A, B, C, equidistantes del punto M del techo ¿cómo encontrar ahora la proyección de M?

4. Para contestar a la pregunta anterior demuéstrese esta propiedad: El lugar geométrico de los puntos de un plano que distan de un punto exterior un segmento dado, es una circunferencia cuyo centro es el pie de la perpendicular desde el punto al plano.

3.—PROYECCION SOBRE UN PLANO.

La piedra M cae al suelo en el punto P, pie de la perpendicular al plano o extremo de la distancia, es decir, se **proyecta,** por la acción de la gravedad en el punto P, el cual se llama por esto **proyección** de M sobre el plano del suelo.

Este concepto se ha generalizado al caso en que el plano es cualquiera, adoptándose la definición siguiente:

Proyección de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular a este plano trazada por el punto.

En la figura es M el punto proyectado y P su proyección sobre el plano π, también llamado *plano de proyección.*

La proyección de la lámpara sobre el techo es el punto de donde está suspendida. La proyección de cualquier punto de un plano sobre este plano es el mismo punto.

El concepto de proyección es uno de los más importantes de la Geometría y como después se generaliza convendría precisar que solamente estudiamos aquí la proyección *ortogonal.* La palabra ortogonal deriva de *orto* (recto) y *gonei* (ángulo) y expresa que el rayo proyectante es perpendicular al plano de proyección.

Definida la proyección de un punto se define la proyección de una figura cualquiera como *conjunto de las proyecciones de todos los puntos de la figura proyectada.*

Apliquemos esta noción general de proyección a recta y a un segmento, en los diversos casos que pueden presentarse y resulta:

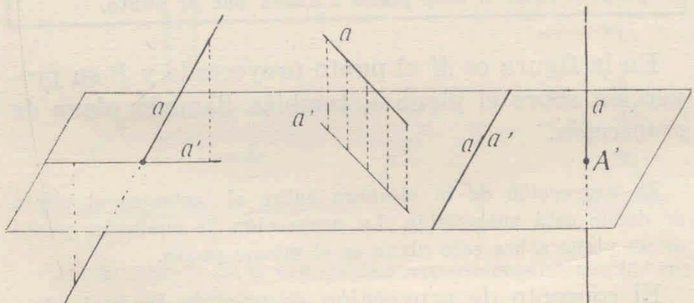
La proyección de una recta sobre un plano es:

1º Una recta que pasa por la traza o intersección de aquella con el plano si es secante.

2º Una recta paralela a la recta proyectada si ésta es paralela al plano de proyección o coincide con ella si está situada en el plano de proyección.

3º La misma recta, si está en el plano.

4º Se reduce a un punto si la recta proyectada es perpendicular al plano de proyección.



En efecto, las rectas proyectantes de los diversos puntos de la recta proyectada, están situadas en un plano perpendicular al plano de proyección en virtud de II, 7 y su intersección con éste es una recta que en el primer caso pasa por el pie, traza o intersección, cuya proyección es ella misma; y en el segundo caso es paralela a la recta proyectada en virtud de I, 6 y en el tercero coincide con ella y en el cuarto caso todos los rayos proyectantes coinciden con la recta proyectada, coincidiendo por tanto todas las proyecciones en un solo punto que es la traza de la recta sobre el plano de proyección.

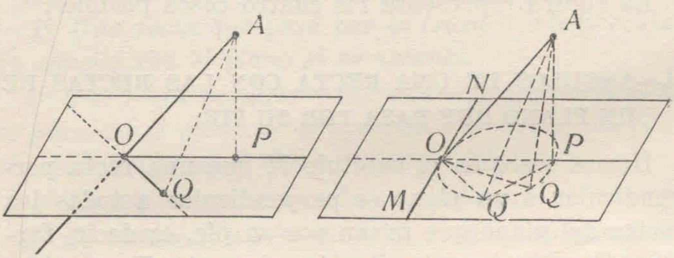
La figura representa los cuatro casos posibles.

4.—ANGULOS DE UNA RECTA CON LAS RECTAS DE UN PLANO QUE PASA POR SU PIE.

Hemos visto en el capítulo II que una recta perpendicular a un plano es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por su pie, es decir, forma con cualquiera de ellas ángulo recto. En cambio, si una recta es oblícua a un plano, forma ángulos diversos con las rectas que pasan por su pie.

Por lo pronto se observa que no siendo perpendicular a todas las rectas que pasan por su pie, es preciso considerar separadamente las dos semirrectas que componen cada una y los ángulos que con ellas forma son suplementarios.

Elijamos un punto arbitrario A en la semirrecta OA oblícua respecto del plano y proyectemos A sobre éste, es decir, tracemos la perpendicular AP siendo P el pie de esta perpendicular o sea la proyección de A sobre el plano y comparemos el ángulo AOP con el AOQ que forma con otra semirrecta de origen O situada en el mismo plano. Para ello tracemos en el plano AOQ la perpendicular desde A sobre dicha semirrecta. Se forma así un triángulo AOQ que tiene la misma hipotenusa OA que el triángulo AOP pero el cateto AQ es mayor que el AP por ser segmento oblícuo respecto del plano, mientras que el AP es perpendicular, y se sabe de Geometría plana que el ángulo opuesto al mayor cateto es mayor que el opuesto al cateto menor, luego llegamos a esta importante conclusión $AOP < AOQ$. Es decir:



El ángulo agudo que una recta oblícua respecto de un plano forma con su proyección sobre éste es menor que el formado con cualquier otra recta del plano trazada por su pie.

5.—ANGULO DE UNA RECTA CON UN PLANO.

Nos encontramos aquí ante una propiedad muy análoga a la estudiada en (1). Vimos allí que entre todos los segmentos limitados entre un punto exterior a un plano y los diversos puntos de éste el determinado con su proyección (es decir, el perpendicular) es mínimo; y ahora hemos probado que entre los diversos ángulos que una recta secante oblícua forma con las rectas del plano trazadas por su pie, el menor de todos es el ángulo agudo formado con su proyección. Parece, por tanto natural definir el ángulo de una recta con un plano que la corta, adoptando como tal este ángulo *mínimo* y bien determinado que forma con su proyección:

> **Angulo de una recta con un plano que la corta oblícuamente es el ángulo agudo que forma con su proyección sobre éste.**
>
> **El ángulo de una recta con un plano perpendicular es recto y con un plano paralelo es nulo.**

Obsérvese que el caso de la recta paralela puede considerarse incluído en el de la recta oblícua, conviniendo en que el ángulo que forma con su proyección es nulo, por ser paralela a ella; pero en el caso de la recta perpendicular al plano, como la proyección se reduce a un solo punto, es preciso definirlo directamente.

He aquí una definición general que vale para todos los casos:

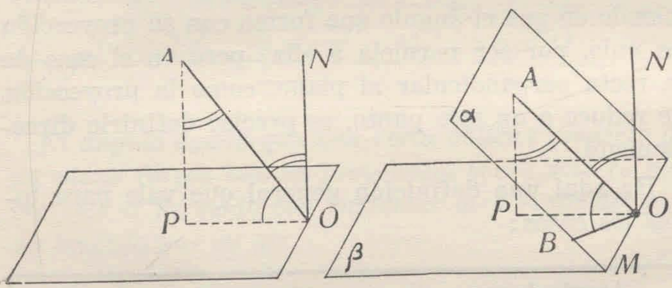
> **Angulo de una recta con un plano es el menor de los ángulos que forma con las trazas sobre este plano de los diversos planos que pasan por aquella.**

6.—ANGULO DE UNA RECTA CON LA NORMAL A UN PLANO.

Según la definición que hemos dado de ángulo de una recta con un plano es necesario proyectar la recta sobre el plano y medir el ángulo que forma con la proyección OP. Suele ser más conveniente medir el ángulo complementario OAP que la recta forma con la recta proyectante AP la cual es normal al plano, o bien con cualquier otra de las normales, por ejemplo, la perpendicular al plano levantada en el punto O traza de la recta dada; pues siendo todas ellas paralelas el ángulo es el mismo.

Resulta así esta regla práctica:

El ángulo que una recta secante de un plano forma con éste es el complemento del ángulo agudo que la recta forma con la normal al plano en el punto de intersección.



7.—**LINEA DE MAXIMA PENDIENTE.**

Se dice que un plano está *inclinado* respecto del suelo cuando no es perpendicular ni paralelo a éste, es decir, forma con él un ángulo mayor que *0* y menor que 90º. Esta denominación se aplica a todo plano que forma con otro secante un ángulo agudo, pero cuando se dice simplemente *plano inclinado* se sobreentiende que lo es respecto del plano horizontal.

Si dejamos caer una bolita sobre un plano inclinado se observa repetidamente este hecho importante: La recta de caída es perpendicular a la traza del plano inclinado con el plano horizontal. Tales rectas situadas en un plano inclinado, perpendiculares a su traza horizontal, se llaman *líneas de máxima pendiente* y esta denominación está justificada por el razonamiento siguiente:

Tracemos la normal ON al plano β, es decir, la vertical correspondiente a ese punto. Entre todas las rectas del plano α que pasan por O, la que forma ángulo mínimo con ON es la proyección de ON sobre α; pero esa proyección es precisamente OA puesto que el plano AON es perpendicular a la traza OM, por contener dos rectas perpendiculares a OM: la ON, por ser normal al plano β y por tanto a toda recta de él; la OA por construcción. Siendo, por tanto, OA la proyección de ON sobre α el ángulo que OA forma con ON es menor que el formado con esta misma por cualquier otra recta del plano α trazada por O y por tanto el ángulo complementario, que es el formado por OA con el plano β es mayor que el formado por cualquier otra recta OB del mismo plano α.

Queda así demostrado:

Las rectas de un plano inclinado que son perpendiculares a su traza con el plano horizontal, forman con éste mayor ángulo que las oblícuas.

De aquí procede el nombre de líneas de máxima pendiente o de **máxima inclinación.** Son las líneas de caída de los graves por los planos inclinados y en las regiones aproximadamente planas de las laderas de las montañas son las líneas que siguen los torrentes de agua; así como en la planicie inmensa de la pampa siguen los ríos la dirección de la línea de máxima pendiente del plano inclinado que aproximadamente forma en cada región el suelo, a no ser que la heterogeneidad de la composición de éste obligue a las aguas a torcer su curso buscando la huella de mínima resistencia.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.—Demostrar que el lugar geométrico de los segmentos iguales con un extremo fijo exterior a un plano y el otro situado en este plano, es la superficie lateral de un cono de revolución.

2.—Utilizando la propiedad anterior determinar la proyección de un punto exterior a un plano sobre este plano.

3.—Demostrar que el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos planos paralelos es el plano medio. Si los planos se cortan, el lugar está formado por los dos planos bisectores de los cuatro diedros que forman.

4.—Demostrar que el lugar de las rectas que forman ángulos iguales con dos planos secantes y cortan a la recta de intersección está formado por los dos planos bisectores antes citados.

5.—¿Cuáles son todas las rectas que forman ángulos iguales con dos planos secantes?

6.—Determinar las rectas que forman ángulos iguales con tres rectas concurrentes en un punto.

CAPITULO VII

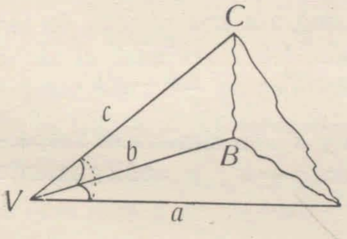
ANGULOS TRIEDROS

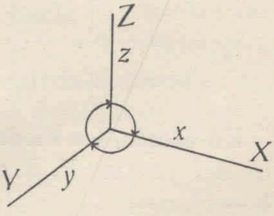
1.—ELEMENTOS DEL ANGULO TRIEDRO.

Dadas tres semirrectas *VA, VB, VC,* llamadas *aristas,* con el mismo origen *V,* llamado *vértice,* y no situadas en un mismo plano, determinan tres planos, *ab, bc, ca,* llamados *caras,* las cuales encierran una porción de espacio que se llama *triedro* o *ángulo triedro.* También suelen llamarse *caras* a los ángulos *ab, bc, ca;* y *diedros* del triedro a los diedros formados por cada dos de estos planos, que contienen en su interior el triedro.

NOTACIONES. — El triedro de aristas *a, b, c,* lo designaremos por *a b c*; las caras, por *a b, b c, c a*; los diedros por la misma letra de la arista, o sea: *a, b, c,* respectivamente.

Los tres ángulos que forman las caras del triedro y los tres diedros se llaman *elementos* de éste.





2.—TRIEDROS IGUALES Y SIMETRICOS.

El concepto de igualdad de triedros, como la igualdad de dos figuras geométricas cualesquiera, se apoya en la idea de *movimiento*.

Dos triedros se dicen iguales cuando un movimiento de uno de ellos lo lleva a coincidir con el otro.

Por tanto: *Si dos triedros* abc *y* a'b'c' *son iguales, tienen iguales las caras y diedros correspondientes; es decir:*

$$bc = b'c \qquad ca = c'a' \qquad ab = a'b'$$

Puede probarse que tres igualdades de éstas son consecuencia lógica de las otras tres.

Dos triedros abc y a'b'c' se dicen simétricos o bien opuestos por el vértice, cuando las aristas de cada uno son las semirrectas opuestas a las aristas del otro.

Basta, pues, prolongar al otro lado del vértice las tres aristas a, b, c, para obtener las a', b', c'.

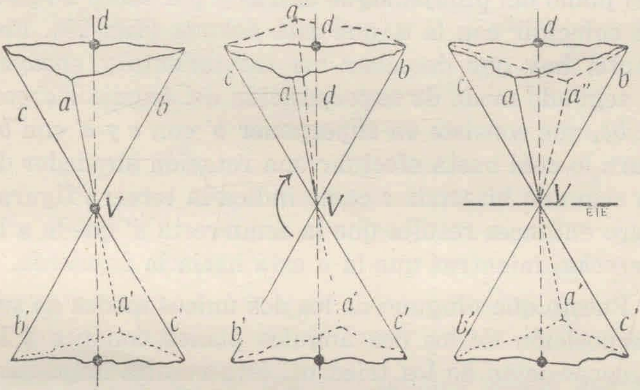
Dos triedros opuestos por el vértice tienen iguales sus elementos homólogos. Es decir:

$$a = a', \qquad b = b', \qquad c = c'$$
$$bc = b'c', \qquad ca = c'a', \qquad ab = a'b'.$$

En efecto, los diedros a y a' son simétricos respecto del centro V, luego es $a = a'$; y análogamente $b = b'$, $c = c'$.

Los ángulos *bc* y *b'c'* son opuestos por el vértice, por estar formados por semirrectas opuestas, luego son iguales; y análogamente, por la misma razón, es también $ca = c'a'$, $ab = a'b'$.

Nada encontramos hasta aquí de sorprendente, pues ya sabemos que la simetría de segmentos y ángulos implica su igualdad; lo inesperado es ver que dos figuras simétricas tan sencillas como son los triedros opuestos por el vértice, no sean iguales, como vamos a probar.



Sea *abc* un triedro de caras desiguales y coloquémoslo como indica la figura, con la cara *bc* sobre el plano del dibujo. Como suponemos desiguales las caras *ab* y *ac* la arista *a* quedará hacia uno u otro lado de la bisectriz *d* del ángulo *bc* (*). Por ejemplo, suponiendo $ab > ac$ la arista *a* quedará como se ve en la figura 1ª delante del plano del dibujo y hacia

(*) En rigor deberíamos hablar del **plano bisector** cuya traza es la recta **d**, pero el rigor perjudica a veces a la claridad.

la *izquierda,* mientras que la semirecta opuesta *a'* quedará *detrás* del plano del dibujo y hacia la *derecha* de la citada bisectriz.

Intentemos ahora la superposición del triedro *a'b'c'* con el *abc.* Para ello es preciso superponer el ángulo *b'c'* con el *bc,* y esto puede hacerse de dos modos: llevando *b'* a coincidir con *b* y *c'* con *c,* para lo cual basta efectuar la rotación de 180º sobre el plano del dibujo; pero así no se logra la coincidencia de los triedros, puesto que la arista *a'* que está situada *detrás* del plano del dibujo, sigue detrás y por tanto no puede coincidir con la *a,* que está *delante* (fig. 2ª). Por tanto, hay que desechar ese movimiento y ensayar el segundo modo de superposición del ángulo *b'c'* con el *bc,* que consiste en superponer *b'* con *c* y *c'* con *b*; para lo cual basta efectuar una rotación alrededor de la segunda bisectriz *e* como indica la tercera figura; pero entonces resulta que la semirrecta *a'* queda a la *derecha,* mientras que la *a* está hacia la *izquierda.*

Puesto que ninguno de los dos únicos modos de superposición de los dos ángulos planos conduce a la superposición de los triedros, ésta resulta imposible.

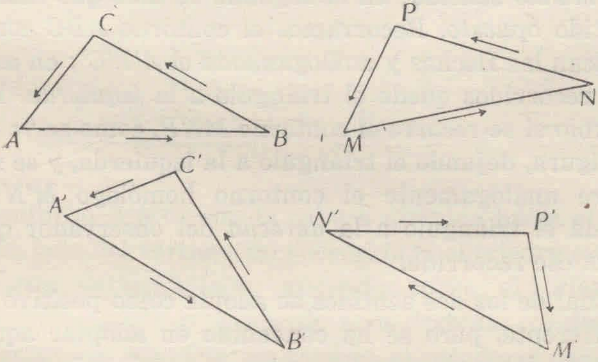
Es claro que si el triedro es *isósceles,* es decir si tiene iguales dos caras *ab* y *ac,* este segundo movimiento conduce a la superposición de ambos triedros; pero si las tres caras son desiguales, los dos triedros son *desiguales,* a pesar de tener iguales sus elementos correspondientes.

EJERCICIOS. — 1. Comprobar la igualdad o desigualdad de los dos triedros que forman las paredes con el suelo en dos rincones de una misma habitación o de dos habitaciones distintas.

2. Comparar los ocho triedros que forman tres planos concurrentes en un punto O. ¿Cuántos casos de igualdad pueden presentarse, es decir, ¿cuántos triedros pueden ser iguales y cuántos desiguales?

3.—SENTIDO DE UN TRIEDRO.

El hecho sorprendente estudiado en el párrafo anterior deja de serlo si nos fijamos en la igualdad de figuras planas. La figura 1ª representa dos trián-



gulos *ABC* y *A'B'C'* que son iguales puesto que se pueden superponer mediante un movimiento y lo mismo la segunda figura; pero nótese una diferencia esencial: mientras la superposición de los dos primeros triángulos puede hacerse sin salir del plano, mediante un deslizamiento de éste sobre sí mismo, es decir, por una operación de Geometría *plana,* en cambio la superposición de los segundos triángulos es imposible mediante un deslizamiento análogo y solamente se logra por un *rebatimiento,* operación solo realizable en el espacio tridimensional.

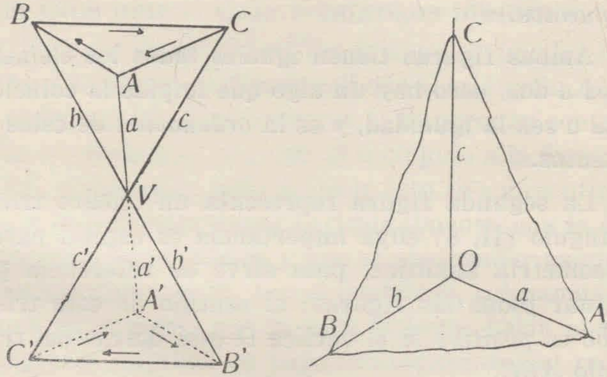
Para un ser bidimensional que desconociera la tercera dimensión, los dos triángulos *MNP* y *M'N'P'* serían desiguales a pesar de tener sus elementos respectivamente iguales. Para nosotros, seres tridimensionales, incapaces de concebir una cuarta dimensión, la imposibilidad de lograr la coincidencia de los triedros simétricos es análoga.

Es sabido cómo se distinguen ambos casos; en el primero se dice que los dos triángulos son iguales y del *mismo* sentido; en el segundo se dice que tienen sentido *opuesto*. Recorramos el contorno *ABC* como indican las flechas y análogamente el *A'B'C'*; en ambos recorridos queda el triángulo a la *izquierda*. En cambio si se recorre el contorno *MNP*, como se ve en la figura, dejando el triángulo a la izquierda, y se recorre análogamente el contorno homólogo *M'N'P'* queda el triángulo a la *derecha* del observador que haga ese recorrido.

Cual de los dos sentidos se adopte como positivo es indiferente, pero se ha convenido en adoptar aquel sentido del recorrido del contorno que deja la figura a la *izquierda*, y cuando ésta queda a la *derecha*, se dice que el sentido es *negativo*.

Procedamos análogamente con los triedros. Para apreciar más cómodamente el sentido del recorrido de las aristas, elijamos un punto en cada una; resultando así un triángulo *ABC* que puede considerarse como sección plana del triedro por el plano determinado por estos tres puntos. Parece natural adoptar como sentido positivo sobre el triedro aquel de los dos sentidos de recorrido del contorno *ABC* que es positivo *visto desde el vértice V.* (*)

Examinemos nuevamente la figura de los triedros simétricos y vemos que si un òbservador recorre el



contorno *A'B'C'* con la cabeza dirigida hacia el mismo lado del vértice (tal sucedería si el triedro está situado verticalmente, apoyado sobre el triángulo *A'B'C')* queda el triángulo a su *derecha,* es decir el sentido es *negativo;* en cambio, si recorre el contorno *ABC* con la cabeza hacia el vértice (es decir hacia abajo) queda el triángulo a su *izquierda,* es decir, el sentido es *positivo.*

(*) En Geometría analítica suele adoptarse como sentido positivo en el triedro el opuesto a éste. Ambos criterios tienen ventajas e inconvenientes que explican el dualismo, sin que ninguno de ambos se imponga universalmente sobre el otro.

(**) Obsérvese que el criterio adoptado para distinguir el sentido se basa en la idea de **derecha** e **izquierda** y lo mismo sucede con todos los criterios análogos (véanse los ejercicios). Para reeducar a una persona que después de un ataque de

Podemos expresar este hecho diciendo brevemente:

Dos triedros opuestos por el vértice tienen sentidos opuestos.

Ambas figuras tienen iguales todos los elementos dos a dos, pero hay un algo que impide la coincidencia o sea la igualdad, y es la *ordenación* de estos elementos.

La segunda figura representa un triedro trirrectángulo (II, 8) cuya importancia es capital para la Geometría analítica, pues sirve de referencia para situar todas las figuras; el sentido de este triedro *abc* es *positivo* si el vértice *O* está detrás del triángulo *ABC*.

EJERCICIOS. — 1. Numerar con 1, 2, 3 las tres aristas de una habitación que concurren en un rincón del suelo y clasificar el triedro así ordenado. Idem para los triedros que tienen el vértice en el techo.

2. Extiéndanse los dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha y clasifíquese el triedro así ordenado que definen estos tres dedos. Idem para la mano izquierda.

3. Si un hombre sentado en el suelo extiende y separa sus piernas, éstas y el tronco forman un triedro que se puede considerar ordenado de diversos modos. Clasificar estos como positivos y negativos.

---

amnesia hubiera olvidado el significado de las palabras derecha e izquierda, no cabría definirle ambas; sería preciso la ayuda de la mímica o de un dibujo, o de un objeto material (p. ej. un reloj).

La misma dificultad habría para enseñar Geometría a un extranjero en su lengua, si el profesor desconociera las palabras que traducen las nuestras **derecha** e **izquierda**.

4. Un observador puede considerarse como vértice de un triedro cuyas aristas están dirigidas hacia el E. hacia el N. y hacia el zenit. Clasifíquese en esta y en otras ordenaciones.

4.—PLANOS ORIENTADOS Y TRIEDROS DIRIGIDOS.

Fijémonos de nuevo en los triángulos iguales del párrafo 3. Hemos explicado allí que el triángulo *ABC* así ordenado es *positivo* porque al recorrer su contorno en el orden *ABCA* queda el triángulo a la *izquierda* del observador; pero al decir ésto se sobreentiende que la figura se coloca horizontalmente, con la cara impresa hacia arriba y que el observador camina sobre su contorno. Si, por el contrario, colocamos la figura en el suelo, con la cara impresa hacia abajo (imagínese impresa en papel transparente) al recorrer su contorno *ABC* queda el triángulo a la *derecha* del observador, es decir, ahora es *negativo* el triángulo. Resulta, pues, que el concepto de sentido positivo o negativo se refiere a una cierta *cara* del plano; y al contemplar las figuras por la cara opuesta el sentido cambia.

He aquí un concepto nuevo que completa la noción de plano geométrico dada en la primera lección de Geometría. La lámina sin espesor que evoca en nuestra imaginación la idea de plano geométrico define dos entes distintos según que se considere como positiva una u otra de sus dos caras. Esto equivale a definir cuál de los dos sentidos de rotación se considera como positivo.

EJEMPLOS. — En la hoja de papel consideramos como positiva la cara visible y con este convenio podemos decir que los triángulos ABC, A'B'C' y MNP dibujados en página 115 son **positivos**, mientras es **negativo** el M'N'P'. Para un observador que prefiera adoptar como cara positiva de la misma hoja de papel la cara de pág. 116, los sentidos de tales figuras serán opuestos. En un reloj, el plano del disco (que por costumbre suele llamarse **esfera**) tiene dos caras, de las cuales consideramos positiva la visible, donde están dibujadas las horas. Con este convenio el sentido de rotación de las saetas en los relojes usuales es **negativo**.

Si se traza la normal al plano llamaremos semirecta *positiva* la dirigida hacia el lado positivo del plano y *negativa* a la opuesta. Es lo mismo adoptar un sentido para cada cara o para cada semirrecta normal.

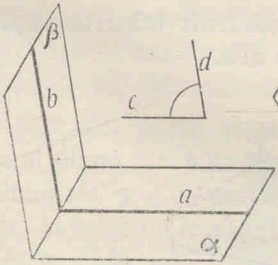
También los ángulos diedros tienen dos sentidos como los ángulos planos, según que se considere la rotación menor que 180º que lleva la cara α a coincidir con la β o bien la β a concidir con la α. Si cortamos el diedro por un plano perpendicular a su arista y es ab la sección normal, el sentido ab puede considerarse como positivo o negativo según la cara del plano ab que se adopte como positiva, lo que equivale, como ya hemos dicho, a elegir un sentido en la normal que en ese caso es la arista. En definitiva: *el sentido positivo de rotación alrededor de una recta está definido adoptando un sentido sobre esta recta.*

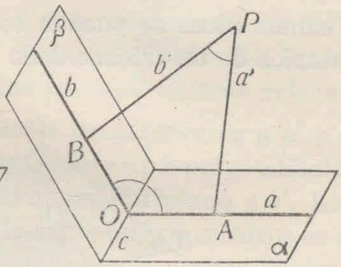
EJEMPLOS. — Si un observador del hemisferio Sur elige en la vertical como sentido positivo hacia arriba, queda definido en el plano horizontal un sentido positivo de rotación, que es el opuesto al de las saetas de un reloj colocado horizontalmente con el horario hacia arriba. El curso aparente de los astros es por tanto **positivo**, por ser opuesto al así definido.

5.—ANGULO DE LAS NORMALES A LAS CARAS DE UN DIEDRO.

Puesto que la medida de un diedro es la de su sección recta, que es un ángulo plano, tiene sentido claro decir que un ángulo plano es igual a un diedro o que un ángulo plano es suplementario de un diedro.

EJEMPLO. — La figura 1ª representa un diedro $\alpha\beta$, y un ángulo plano **cd** que son suplementarios como se comprueba comparando éste con la sección recta del diedro.





Recordado esto, demostraremos esta propiedad, que aplicaremos a renglón seguido:

Si por un punto interior a un diedro se trazan las perpendiculares a sus caras, el ángulo que forman las dos semirrectas perpendiculares y dirigidas hacia las respectivas caras es suplementario del diedro.

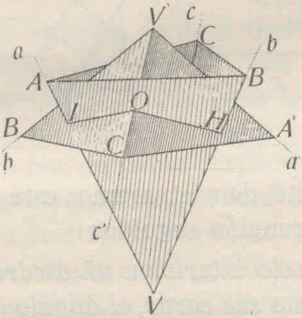
La figura 2ª indica claramente la disposición del diedro $\alpha\beta$ y del ángulo formado por las dos semirrectas normales. El plano determinado por éstas es perpendicular al α por contener la perpendicular a'; y es perpendicular al plano β por contener la recta b' perpendicular a él; por tanto, ese plano ab es perpendicular a la arista c y determina la sección recta

AOB del diedro; pero los ángulos planos AOB y APB tienen sus lados perpendiculares y los lados de uno están dirigidos hacia los del otro, luego son suplementarios.

6.—TRIEDROS SUPLEMENTARIOS.

Dos triedros se llaman suplementarios cuando las caras de cada uno son ángulos suplementarios de los diedros del otro.

Veamos cómo se pueden construir triedros suplementarios de un triedro dado abc.



Si por un punto interior a un triedro se trazan las semirrectas que tienen por origen ese punto y cortan perpendicularmente a las caras, el triedro que forman es suplementario del triedro dado.

Sea: V' interior al triedro $a\ b\ c$.

$a' = V'\ A'$ perpendicular al plano $b\ c$.

$b' = V'\ B'$ perpendicular al plano $c\ a$.

$c' = V'\ C'$ perpendicular al plano $a\ b$.

TESIS) Angulo	$b\ c$	y diedro	a'	suplementarios.
”	$c\ a$		b'	”
”	$a\ b$		c'	”
”	$b'\ c'$		a	”
”	$c'\ a'$		b	”
”	$a'\ b'$		c	”

Que el ángulo $a'b'$ es suplementario del diedro de arista c, acaba de verse en el párrafo anterior y análogamente resulta que $b'c'$ es suplementario del diedro a, y el ángulo $c'a'$ es suplementario del diedro b. Quedan así demostradas las tres últimas relaciones.

Por otra parte, siendo a perpendicular a b' y c' lo es al plano $b'c'$ y análogamente es b perpendicular al plano $c'a'$ y c es perpendicular al plano $a'b'$. Es decir: la relación existente entre ambos triedros es recíproca; cada uno tiene sus aristas perpendiculares a las caras del otro; y por tanto quedan demostradas las tres primeras relaciones que son las mismas tres últimas permutando ambos triedros.

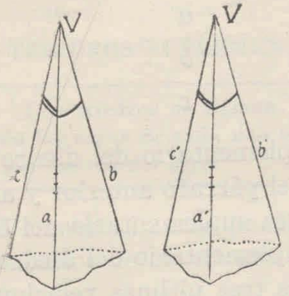
7.—CASOS DE IGUALDAD DE TRIEDROS.

Son análogos a los ya estudiados para los triángulos, con una sola excepción; y además ofrecen la notable sencillez de ser correlativos dos a dos.

1º Dos triedros son iguales si un diedro de uno y las dos caras que lo forman son iguales a sus correspondientes en el otro y están dispuestos en el mismo sentido.

Enunciado de otro modo:

1º. Dos diedros son iguales si tienen dos caras y el diedro comprendido respectivamente iguales, y dispuestas en el mismo sentido.



HIP.)

$$a = a'$$
$$ab = a'b'$$
$$ac = a'c'$$

TESIS)

$$abc = a'b'c'$$

Superpongamos el segundo triedro sobre el primero de modo que la semirrecta *a'* coincida con la *a* y los dos planos que forman el diedro *a'* coincidan con los que forman el *a*. Como las caras *ab* y *ac* son iguales a sus correspondientes *ab* y *ac*, y están en el mismo sentido, la arista *c'* viene a coincidir con la *c* y la *b'* con la *b*; luego ambos triedros coinciden y por tanto son iguales.

2º. *(Correlativo). Dos diedros son iguales si dos diedros y la cara común de uno son iguales a los correspondientes en el otro y dispuestos en el mismo sentido.*

En efecto, los triedros suplementarios de *abc* y *a'b'c'* tienen iguales dos caras y el diedro que forman, luego son iguales por el criterio 1º, y siendo éstos iguales, también lo son los dos triedros *abc* y *a'b'c'*.

3º Dos triedros son iguales si tienen sus caras respectivamente iguales y en el mismo orden dispuestas.

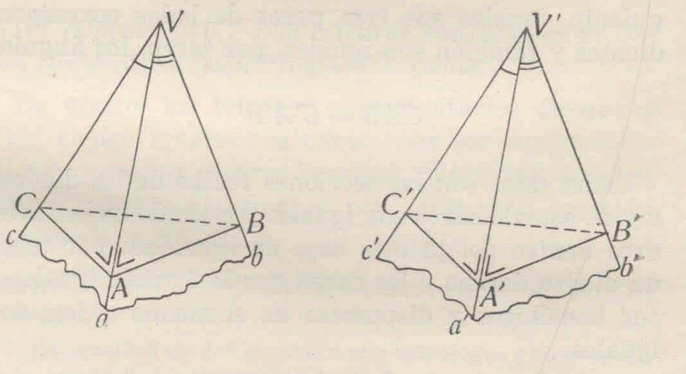
HIP.)

$$ab = b'c'$$
$$bc = b'c'$$
$$ca = c'a'$$

TESIS)

$$abc = a'b'c'$$

El profesor hábil logrará trasmitir a los alumnos la evidencia de esta proposición, sirviéndose del método constructivo, mediante el desarrollo, utilizado en el párrafo (8). Para los espíritus más exigentes que no logren plenamente llegar a esta intuición y sientan un vacío en su convicción, agregamos la demostración lógica.



Para demostrar la igualdad de ambos triedros supongamos agudos los ángulos de sus tres caras y cortémolos por planos perpendiculares respectivamente a las aristas a y a', a distancias iguales de los vértices, es decir, sea $VA = V'A'$.

Los triángulos VAB, $V'A'B'$, rectángulos en A tienen iguales los catetos VA y $V'A'$, y también los ángulos $AVB = A'V'B'$ por hipótesis; luego son iguales, siendo por tanto:

$$AB = A'B', \quad VB = V'B'$$

Análogamente resulta de la comparación de los triángulos VAC y $V'A'C'$:

$$AC = A'C' \quad VC = V'C'$$

Los triángulos VCB y $V'C'B'$ tienen, por tanto, iguales los ángulos en V y V' y también los lados que los forman; luego resulta $BC = B'C'$..

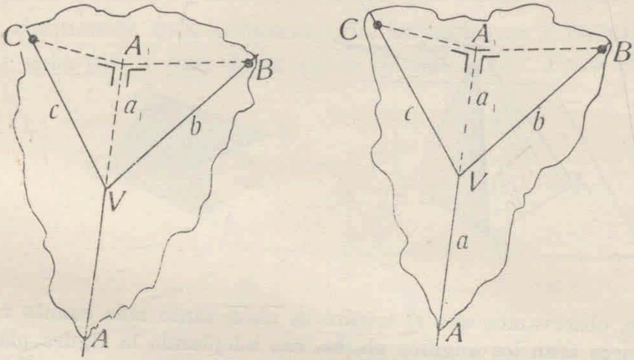
Los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen, por consiguiente, iguales sus tres pares de lados correspondientes y también son iguales, por tanto, los ángulos

$$CAB = C'A'B'$$

Como estos son las secciones rectas de los diedros a y a', estos diedros son iguales y estando ambos triedros dentro del primer caso de igualdad, por tener un diedro de uno y las caras que lo forman iguales a sus homólogos y dispuestos en el mismo orden, son iguales.

Si dos de las caras del triedro son ángulos obtusos, por ejemplo las ab y ac, basta considerar los triedros obtenidos prolongando la arista a, como indica la segunda figura y de la igualdad de los a y a' así obtenida se llega a la misma conclusión que antes, en virtud del caso 1º.

Todavía quedaría por considerar el caso especial en que alguna de las caras sea un ángulo recto; estúdiese como ejercicio.



4º) (*Correlativo.*) *Dos triedros son iguales si tienen sus diedros respectivamente iguales.*

En efecto, los triedros suplementarios de *abc* y *a'b'c'* tienen iguales sus caras (por ser suplementarias de aquellos diedros iguales), luego son iguales, por el criterio anterior; y por tanto, son también iguales *abc* y *a'b'c'*.

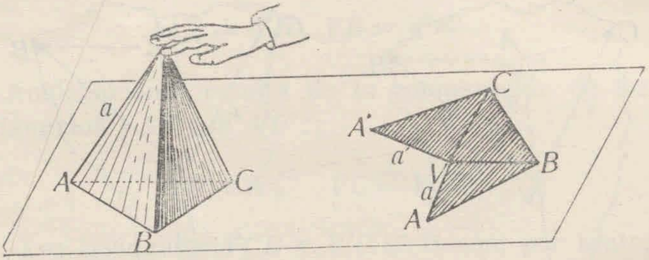
EJERCICIOS. — 1. ¿Existen triedros semejantes, pero no iguales?

2. La igualdad de dos diedros a sus homólogos ¿lleva consigo la igualdad del tercer par de diedros?

La contestación negativa surge ya claramente en el caso más sencillo de dos diedros rectos.

8.—RELACIONES ENTRE LAS CARAS DE UN TRIEDRO.

Construyamos un triedro de cartulina, limitando sus caras arbitrariamente; por ej. según segmentos rectilíneos que formen un triángulo **ABC**, sección del triedro, como se ve en la figura. Si lo apoyamos sobre la mesa sobre esta base ABC y pretendemos extenderlo sobre el plano oprimiendo el vértice, observamos que el triedro se abre, tanto más cuanto menores sean los ángulos **ab, bc, ca.**, adoptando la figura plana así obtenida una forma como la dibujada y que se llama el **desarrollo** del ángulo triedro, el cual es un ángulo **aa'** tanto menor cuanto menores sean los ángulos de las caras. Aun suponiendo un triedro muy abierto, es decir, con sus tres caras muy obtusas, cercanas a 180º, al oprimirlo contra el plano se abre, es decir, resulta como desarrollo un ángulo menor que 360º.



Observaciones empíricas son éstas que evocan en nosotros con clara evidencia (*) la verdad general de esta propiedad de los triedros:

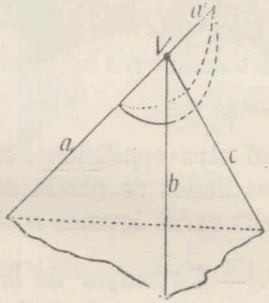
La suma de las caras de cualquier triedro es menor que cuatro rectos.

(*) Esta intuición es mucho más firme y clara que otras consideraciones también intuitivas en que algunos autores se apoyan para demostrar la propiedad de ser cada cara menor que la suma de las otras dos; propiedad de la cual suele deducirse la arriba enunciada y que es equivalente a ella.

Enunciado de otro modo:

Condición 1ª. — *Es condición necesaria para que con tres ángulos dados se pueda construir un triedro, que la suma de éstos sea menor que cuatro rectos.*

Saquemos una consecuencia importante y sencilla de esta propiedad de la suma de las caras. Para ello



prolonguemos una arista a como ya hemos hecho anteriormente, y aplicando al nuevo triedro $a'bc$ la propiedad citada, tendremos:

$$a'b + bc + ca' < 4R$$

Pero las relaciones existentes entre las caras del triedro abc y las del $a'bc$ son éstas:

$$ac + ca' = 2R$$
$$ab + ba' = 2R$$

Sustituyendo en vez de $4R$ la suma de estos cuatro ángulos resulta:

$$\underline{a'b} + bc + \underline{\underline{ca'}} < ab + \underline{ba'} + ac + \underline{\underline{ca'}}$$

y simplificando los términos iguales subrayados en ambos miembros resulta en definitiva:

$$bc < ab + ac$$

Llegamos así a esta importante propiedad que relaciona las tres caras de todo triedro y es completamente análoga a la que relaciona los tres lados de un triángulo:

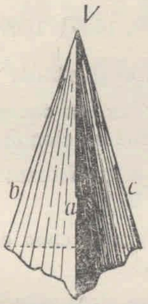
En todo triedro cada cara es menor que la suma de las otras dos.

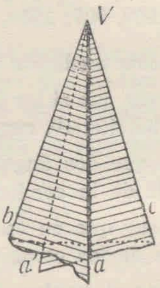
Obtenemos así otra condición *necesaria* para que con tres ángulos dados se pueda construir un triedro que tenga sus caras iguales a ellos..

Condición 2ª. — *La mayor de las caras debe ser menor que la suma de las otras dos.*

Obsérvese que esta sola condición equivale a las tres obtenidas en el enunciado anterior, pues claro es que cada una de las dos caras menores es menor que la suma de las dos restantes.

Hemos demostrado esta nueva condición 2ª como consecuencia lógica de la anterior y de las relaciones entre ángulos suplementarios, pero aun esta sencilla demostración habría podido omitirse, pues la intuición nos afirma fuertemente en la convicción de esta verdad. Imagínese un triedro **abc** apoyado sobre su cara mayor **bc** en el tablero de dibujo (fig 1ª), y recortado a lo largo de su arista **a** doblemos las otras dos caras sobre la **bc**; pero no como antes **abriendo** el triedro sino **cerrándolo**, es decir, de modo que se superpongan estas dos caras sobre la **bc** (fig. 2ª). Vemon en esta experiencia materialmente, y aun sin hacerla vemos imaginativamente para todo caso posible, que una de las dos caras dobladas monta sobre la otra, es decir, ambas se recubren parcialmente, y esto vale tanto como decir que su suma supera al ángulo **bc**.





Recíprocamente supongamos que el mayor de los tres ángulos dados verifica la relación

$$\mathbf{bc} < \mathbf{ab} + \mathbf{ac} \text{ (condición 2ª).}$$

además de ser la suma de los tres inferior a 360º (cond 1ª).

Para comprobar esta condición 1ª se disponen estos tres ángulos consecutivamente como se hizo en la página 128 con el mayor entre los otros dos, viendo que no llegan a formar ángulo completo, comprobandose la condición 1a. mediante el doblado que representa la figura 2ª. Al abrir este plegado o bien al cerrar el de la pág. 128 llegan a unirse las semirrectas **a** y **a'** en una sola que es la tercera arista del triedro.

Llegamos así a esta conclusión final:

La condición necesaria y suficiente para que con tres ángulos dados se pueda construir un triedro que tenga caras iguales a estos ángulos, es que la mayor de ellas sea menor que la suma de las otras dos y la suma de las tres sea menor que cuatro rectos.

EJERCICIOS. — 1.. Por simple comprobación de las condiciones 1ª y 2ª contéstese si es o no posible construir triedros con las caras siguientes:

$$30^o, 60^o, 90^o; 30^o, 60^o, 60^o; 45^o, 30^o, 60^o.$$

Constrúyanse con regla y compás estos ángulos y recortado el papel o cartulina, compruébense las conclusiones obtenidas.

2. El mismo ejercicio anterior, para los ángulos:

$$15^o, 100^o, 90^o; 120^o, 140^o, 160^o; 100^o, 110^o, 120^o.$$

construyéndolos mediante el transportador de ángulos.

3. Demostrar que si los tres ángulos son obtusos, basta comprobar la condición 1ª, cumpliéndose siempre la 2ª.

4. ¿Basta que dos ángulos sean obtusos para que se pueda prescindir de la condición 2a?

5. Demostrar que en todo triedro cada cara es mayor que la diferencia de las otras dos.

6. Escríbase el cuadro de las siete relaciones demostradas entre las tres caras de un triedro.

9.—SUMA DE DIEDROS DE UN TRIEDRO.

El triedro suplementario de otro sirve para demostrar la siguiente relación entre los diedros:

La suma de los diedros de un triedro es mayor que dos rectos y menor que seis.

HIP.) **abc** triedro.

TESIS) $2R < a + b + c < 6R.$

Demostración. — Si formamos el triedro suplementario **a'b'c'**, en él se verifica la relación ya demostrada:

$$0 < b'c + c'a' + a'b' < 4R.$$

Si restamos de **6R** los tres miembros de esta desigualdad, como a mayor sustraendo corresponde menor diferencia, resultan invertidos los signos; es decir:

$$6R > 6R - b'c' - c'a' - a'b' > 2R$$

$$6R > (2R - b'c') + (2R - c'a') + (2R - a'b') > 2R;$$

y como los suplementos de las caras del triedro **a'b'c'** que figuran en los paréntesis son iguales a los diedros del triedro suplementario **abc**, resulta esta desigualdad equivalente a la tesis:

$$6R > a + b + c > 2R$$

EJERCICIOS. — 1. Deducir de las condiciones 1ª y 2ª entre las caras las que deben cumplir los tres diedros dados para que exista un triedro cuyos diedros sean iguales a ellos.

2. Estas condiciones son la obtenida en este párrafo y además esta otra:

Si a es el menor de los diedros debe ser

$$b + c - a < 2R$$

3. Clasificar las ternas de diedros siguientes: R, R, R (es decir: los tres diedros rectos).

3|4 R, 5|4 R, 7|4 R; 3|2 R, 5|2 R, 7|2 R; 1|2 R, 1|3 R, 3|4 R

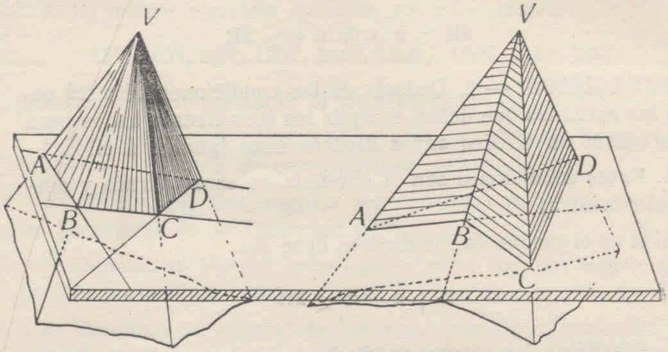
135º, 145º, 155º; 15º, 120º, 75º; 140º, 150º, 90º

según que exista o no un triedro que tenga estos diedros.

3. Calcular todos los elementos posibles de los triedros suplementarios de todos los triedros anteriores. Naturalmente deben quedar excluídos los casos en que no existe triedro.

Dadas varias semirrectas *a, b, c. . ., h, k,* de origen común *V,* tales que el plano determinado por cada dos consecutivas deja a las demás a un mismo lado, los ángulos planos *ab, bc,..., ka* limitan una porción de espacio que se llama *ángulo poliedro conve¿o.* Si alguno de los planas atraviesa o divide el ángulo poliedro éste se llama *cóncavo.*

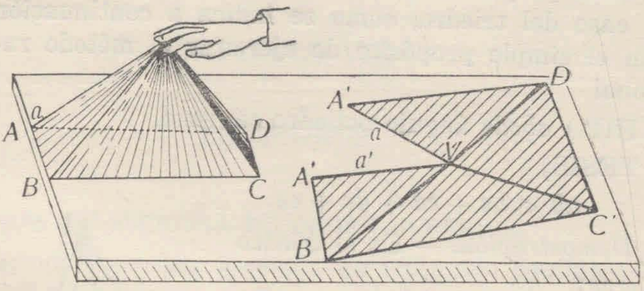
Las semirrectas *abc. . .* se llaman *aristas, V* es el *vértice,* los ángulos *ab, bc. . ., hk, ka,* son las *caras,* y los diedros de cada dos caras consecutivas son los *diedros* del ángulo poliedro.



La figura primera representa un ángulo poliedro de cuatro caras, las cuales han sido recortadas por segmentos rectilíneos mediante un plano secante, sobre el cual aparece apoyado, pero es preciso imaginarlas prolongadas indefinidamente. Resulta así más cómoda la prolongación de las caras, es decir, el trazado de los planos que las contienen, pues sus trazas sobre el plano en que se apoya la figura son rectas **AB, BC, CD, DA** y se observa que el polígono queda a un lado de cada una de estas rectas, luego el ángulo poliedro es **convexo.** En cambio en el ángulo poliedro de la figura segunda, alguno de los planos de las caras (por ej. el AVB) atraviesa o divide al ángulo poliedro, como se observa en sus trazas sobre el plano de apoyo; por esta razón se dice que este ángulo poliedro es **cóncavo.**

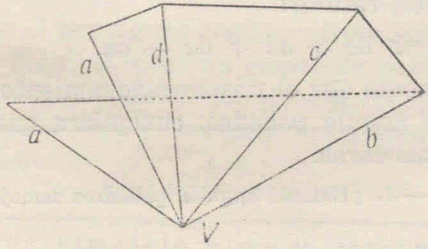
11.—RELACIONES ENTRE LAS CARAS.

Basta repetir el experimento real o ideado ya hecho para los triedros y resultan conclusiones análogas: al oprimir por su vértice el ángulo poliedro convenientemente recortado (como indica la figura) sobre el plano en que se apoya, se abre, esto es, resulta un desarrollo de todas las caras cuya suma no llega a formar un ángulo completo o de una vuelta. Es decir:



En todo ángulo poliedro la suma de sus caras es menor que cuatro rectos.

Lo mismo acontece con el segundo plegado que hacíamos con el desarrollo del triedro. Es evidente que si nos dan varios ángulos, que disponemos consecutivamente, y resulta que el **ab** supera a la suma de los restantes, como indica la figura,



no hay posibilidad de unir las semirrectas **a** y **a'** para cerrar el ángulo poliedro sin forzar el ángulo **ab**, es decir sin encorvar el plano; luego, resulta imposible construir el ángulo poliedro. Llegamos así a la misma conclusión ya sabida para los triedros, que ahora alcanza su máxima generalidad:

En todo ángulo poliedro cada cara es menor que la suma de las restantes.

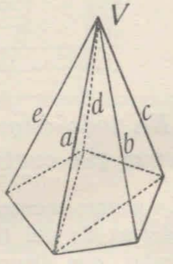
Esta propiedad puede demostrarse reduciéndola al caso del triedro, como se indica a continuación con el simple propósito de ejercitar el método racional

HIP.) $abcde$ ángulo poliedro convexo.

TESIS)

$$ab < bc + cd + de + ea.$$

Demostración. — En el triedro abc es:



$$ab < bc + ac$$

En el triedro acd es:

$$ac < cd + ad$$

En el triedro ade es:

$$ad < de + ea$$

Sumando y suprimiendo los sumandos ac y ad en ambos miembros, resulta:

$$ab < bc + cd + de + ea.$$

Se ve claramente que el mismo razonamiento vale para cualquier ángulo poliedro, cualquiera que sea el número de sus caras.

EJERCICIOS. — 1. ¿Existen ángulos poliedros semejantes, pero no iguales?

2. ¿Es suficiente la igualdad de caras homólogas para la igualdad de los ángulos poliedros?

3. ¿Es suficiente la igualdad de diedros homólogos para la igualdad de los ángulos poliedros?

4.. Descomponer un ángulo poliedro en el menor número posible de ángulos triedros.

CAPITULO VIII

POLIEDROS

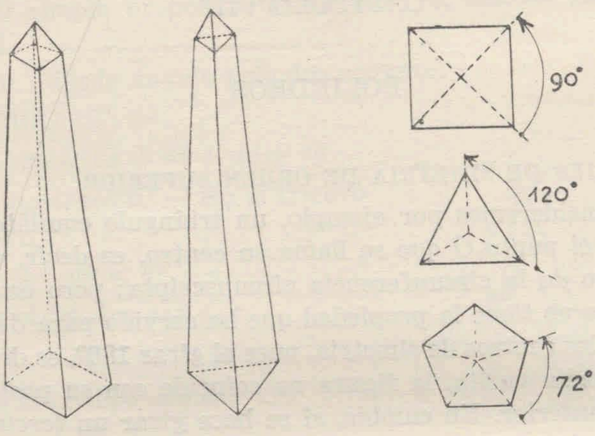
1.—EJES DE SIMETRIA DE ORDEN SUPERIOR.

Consideremos por ejemplo, un triángulo equilátero y el punto O que se llama su centro, es decir, el centro de la circunferencia circunscripta; pero éste centro no tiene la propiedad que ha servido para definir los centros de simetría, pues al girar 180º, es decir media vuelta, la figura no coincide con su posición anterior. En cambio, si se hace girar un *tercio* de vuelta, esto es, 120º, se logra la superposición deseada. He aquí, pues, una nueva forma de simetría que se puede llamar de *tercer* orden o *ternaria.* Análogamente el pentágono regular ofrece simetría *quinaria,* es decir, al girar un *quinto* de vuelta retorna a su posición inicial. Estas mismas consideraciones valen para los ejes de simetría y sugieren la definición siguiente:

Eje de simetría n-ria o de orden n de una figura es una recta tal que las rotaciones de un n-simo de vuelta dejan invariable la figura.

La *simetría* hasta aquí estudiada es, por tanto, *binaria* o de segundo orden.

EJEMPLOS. — El obelisco de Buenos Aires tiene simetría **cuaternaria,** pues al girar un cuarto de vuelta, es decir un ángulo recto, alrededor de su eje, seguiría ocupando la misma posición.



En cambio otros obeliscos tienen planta triangular equilátera y por tanto simetría ternaria. .

Los lápices de sección exagonal tienen simetría de orden 6, etc.

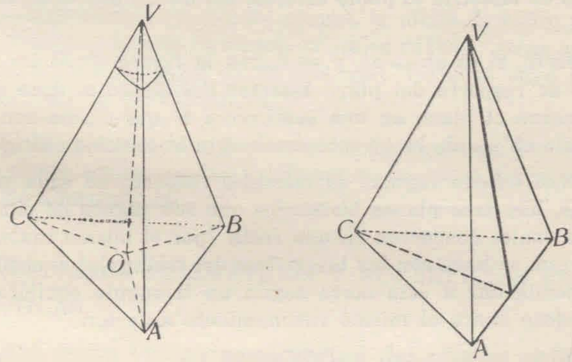
Es evidente que si una figura tiene simetría de orden *par,* también tiene simetría binaria u ordinaria; pues si la simetría es por ejemplo de orden 6, es decir, si la figura no varía al hacerla girar un sexto de vuelta, tampoco variará repitiendo el giro tres veces, esto es, haciéndola girar media vuelta.

Los cuerpos de revolución admiten giros de amplitud cualquiera y por tanto tienen simetrías de órdenes 2, 3, 4, 5, ... n, ...

2.—SIMETRIA DE LOS TRIEDROS. (*)

Se llama *triedro equilátero* o *regular* al que tiene iguales sus tres caras.

Si a partir del vértice se llevan sobre las tres aristas segmentos iguales $VA = VB = VC$, los tres triángulos AVB, BVC, CVA son iguales por tener dos lados iguales y el ángulo comprendido, luego resulta la igualdad:



$$AB = BC = CA$$

es decir, el triángulo ABC es *equilátero*. Si O es su centro son iguales los triángulos OVA, OVB y OVC por tener sus tres lados respectivamente iguales. Por tanto, al girar la figura alrededor del eje VO cada uno viene a coincidir con los otros y las rectas OA, OB, OC son, por consiguiente, perpendiculares a la VO en el punto O. La medida de estas rotaciones vie-

(*) El programa dice "Simetría de la recta, del plano y de los triedros" como el libro de Borel de donde ha sido tomado; pero con el cambio de orden que ha hecho para la simetría corresponde al Cap. II y no a éste la simetría de la recta y del plano.

ne dada por los ángulos planos correspondientes y en el plano ABC se ve que los ángulos de giro para que el triángulo ABC coincida consigo mismo son 120º y sus múltiplos. En resumen:

El triedro regular tiene eje de simetría ternaria.

A este mismo resultado se llega de otro modo:

En todo triedro isósceles (es decir, con dos caras iguales), es plano de simetría el plano bisector del diedro que éstas forman.

En efecto, si es **ab** = **ac**, y se forma la figura simétrica de la cara **ac** respecto del plano bisector del diedro **a**, debe resultar sobre el plano **ac** una semirrecta **b'** que forme con **a** un ángulo **ab'** = **ab**, luego esta semirrecta **b'** coincide con la **c**.

Como el triedro regular es isósceles respecto de cada par de caras, hay tres planos bisectores que son planos de simetría, los cuales concurren en una recta (por el mismo razonamiento que se hace con las bisectrices del triángulo) y el plano perpendicular a ésta corta según un triángulo equilátero repitiéndose ahora el mismo razonamiento anterior.

EJERCICIOS. — 1. Partiendo de un triángulo equilátero construir triedros regulares.

2. Partiendo de un triángulo isósceles construir triedros isósceles.

3. Partiendo de polígonos regulares construir ángulos poliedros con simetría de orden prefijado.

2.—DEFINICION DE POLIEDRO.

Dados varios puntos llamados *vértices*, los cuales determinan polígonos llamados *caras*,, de tal modo que el plano de cada una deja a un solo lado a los demás vértices, se llama *poliedro convexo*, a la porción de espacio limitada por los planos de las caras.

Los poliedros se llaman *tetraedros, pentaedros, exaedros,* ..... si tienen 4, 5, 6 ..... caras; los de 12 caras se llaman *dodecaedros,* los de 20 se llaman *icosaedros,* etc.

Multitud de objetos que produce el arte humano y algunos que nos ofrece la naturaleza tienen forma poliédrica.

EJEMPLOS. — 1. La sal común, la pirita de cobre y otros minerales, aparecen formando cristales cúbicos; otras especies aparecen en cristales de formas muy variadas cuyo estudio constituye la Cristalografía.

2. Objetos comunes de formas poliédricas son los cajones, las mesas corrientes, las habitaciones, las casas (si se prescinde de adornos), etc.

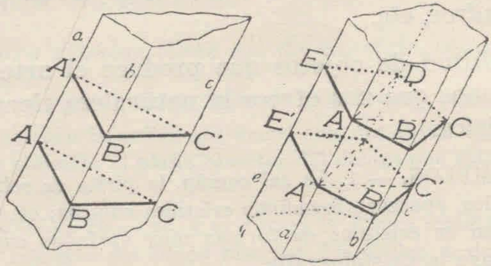
3.—ESPACIOS PRISMÁTICOS Y SUPERFICIES PRISMÁTICAS.

Así como varias semirrectas del mismo origen en un cierto orden determinan un ángulo poliedro, análogamente se dice que varias rectas paralelas $abc\ldots h$ determinan un *espacio prismático convexo* cuando cada plano ab, bc,... ha definido por cada dos aristas consecutivas, deja a todas las demás a un mismo lado; y la región del espacio limitada por estos planos se llama *espacio prismático convexo* o brevemente *prisma convexo.*

Las rectas a, b, c..., h se llaman *aristas;* y se llaman *caras* a las zonas o partes de plano limitadas por cada dos aristas consecutivas.

Se llama *superficie prismática* al conjunto de las caras del espacio prismático.

Las figuras representan un espacio prismático triedro y otro pentaedro.



La sección de un prisma por un lado que corte a las aristas es un polígono de tantos vértices como aristas. En las figuras hay dos secciones del pentaedro, que son pentágonos.

Al trasladar una sección plana según la dirección de las aristas resultan sobre el prisma secciones paralelas e iguales. Por tanto:

Las secciones de un prisma por dos planos paralelos que cortan a las aristas, son polígonos iguales.

Los dos polígonos $ABCD\ldots$ y $A'B'C'D'\ldots$ tienen, pues, iguales los ángulos correspondientes y los lados correspondientes.

Se llaman *secciones normales* a las determinadas por los planos perpendiculares a las aristas; basta trazar el plano correspondiente a una arista en un punto, el cual cortará a las demás perpendicularmente en virtud de II 7 d.

Las secciones normales de un prisma, según el teorema anterior, son iguales.

Dos espacios prismáticos se dicen *iguales* cuando son iguales sus secciones normales. Fácilmente resulta que son iguales las caras y los diedros.

En las figuras anteriores se han trazado dos secciones normales de cada uno de los espacios prismáticos, resultando dos triángulos iguales en la primera y dos pentágonos en la segunda.

EJERCICIOS. — 1. Pónganse ejemplos de cuerpos prismáticos tomados de la vida corriente.

2. Descomponer un espacio prismático de **n** aristas en espacios prismáticos triangulares.

3. ¿Cómo son los lados de una sección oblícua de una superficie prismática comparados con los lados correspondientes de una sección normal?

4.—PRISMAS, CARAS Y BASES.

Si limitamos un espacio prismático por dos planos secantes paralelos, se obtiene un cuerpo llamado *prisma.*

Estos dos planos cortan al espacio prismático en dos polígonos iguales, llamados *bases.*

Los paralelógramos determinados por los dos planos en las caras del espacio prismático se llaman *caras laterales del prisma;* y los segmentos iguales determinados en las aristas del espacio prismático se llaman *aristas laterales* del prisma.

Altura del prisma es la distancia entre los planos de las bases.

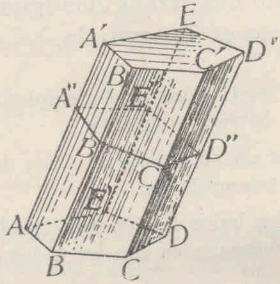
La figura representa un prisma pentagonal, con estos elementos:

Bases: *ABCDE* y *A'B'C'D'E'*.

Aristas laterales: AA', BB' CC' DD' EE'.

Caras laterales: $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EAA'E'$.

Sección recta: $A''B''C''D''E''$.



5.—PRISMA RECTO Y OBLICUO.

Un prisma se llama recto cuando los planos de sus bases son perpendiculares a las aristas.

La figura siguiente representa dos prismas rectos.

Como una arista lateral cualquiera es la distancia entre los planos de las bases, resulta:

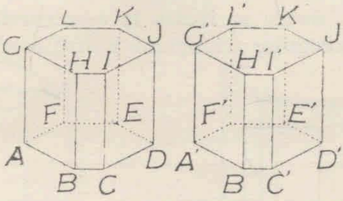
La altura de un prisma recto es cualquiera de las aristas laterales.

Las caras laterales son rectángulos.

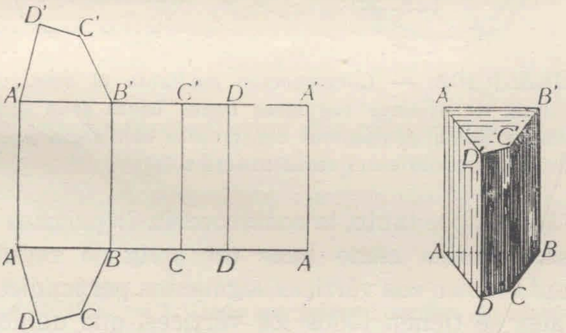
Dos prismas se dicen *iguales* cuando superpuestos coinciden, y por consiguiente tienen iguales todos sus elementos homólogos: caras, aristas y diedros.

Dos prismas rectos que tienen respectivamente iguales las bases y las aristas son iguales, pues al su-

perponer la base de uno sobre la del otro coinciden todas las aristas laterales y también por tanto las bases opuestas.



DESARROLLO DEL PRISMA. — Se construye fácilmente un prisma de cartón, con base dada, dibujando las caras yuxtapuestas, como indica la figura, y una vez recortado este polígono suma, que se llama **desarrollo del prisma,** se dobla por las aristas, pegando después los bordes libres por cualquier procedimiento.

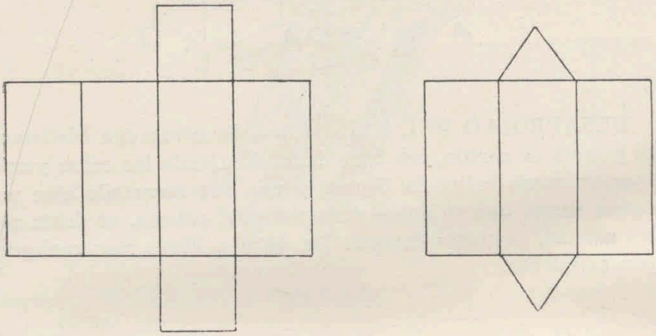


6.—PRISMA REGULAR.

Los prismas que más frecuentemente se presentan en las artes y oficios y en multitud de objetos corrientes (cuadradillos, lapiceros exagonales, etc.) son los regulares.

P r i s m a r e g u l a r es el prisma recto cuya base es un polígono regular.

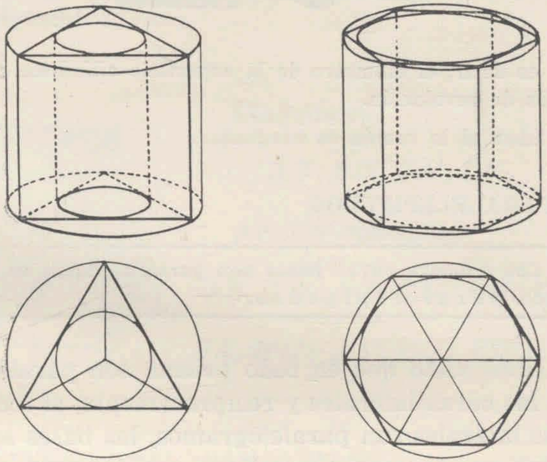
DESARROLLO DEL PRISMA REGULAR. — Basta observar la figura, donde se indica la construcción del desarrollo de un prisma regular triangular y otro cuadrangular.



EJERCICIOS. — Construcción mediante el desarrollo en cartulina, de prismas regulares cuyas bases sean exágonos regulares. Idem pentágonos construidos con regla y compás según se aprendió en el curso anterior.

Fácil es, por tanto, la construcción de prismas regulares. Tómese como base un polígono regular y levantando en sus vértices segmentos perpendiculares iguales se tienen todos los vértices, que unidos por segmentos ordenadamente dan todas las aristas.

Las propiedades de los prismas regulares son completamente análogas a las de los polígonos regulares. ya estudiadas, bastando un simple cambio de palabras, que el lector podrá hacer en cada una, ejercitándose en el conocimiento de los prismas y repasando los polígonos. Por ej.: *Todo prisma regular está inscripto en un cilindro y circunscripto a otro.*



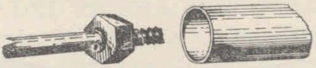
La figura representa los dos cilindros correspondientes a un prisma triangular y a otro exagonal; su construcción es inmediata recordando lo aprendido en el primer curso.

EJERCICIOS. — 1. Dado un prisma regular de madera o cartón determinar su eje.

Dibújese un polígono igual a la base tomando del modelo la medida necesaria; determínese con regla y compás el centro de este polígono y trasládese después sobre el modelo.

2. Construir el mínimo rectángulo de cartón necesario para embalar un prisma de madera dado en un cartucho cilíndrico.

3. Una varilla con tuerca exagonal cuyo lado mide una pulgada debe entrar en un caño. Calcúlese el calibre mínimo de



éste, es decir, el diámetro de la superficie cilíndrica interna, que es de revolución.

4. Idem si la tuerca es cuadrada.

7.—PARALELEPIPEDOS.

Los prismas cuyas bases son paralelógramos se llaman paralelepípedos.

Hemos visto que en todo prisma son paralelógramos las caras laterales y recíprocamente, si todas las caras laterales son paralelógramos, las bases son paralelas, por tener varias rectas paralelas entre sí. Por tanto, podemos definir los paralelepípedos por la condición de tener sus *seis caras paralelógramos.*

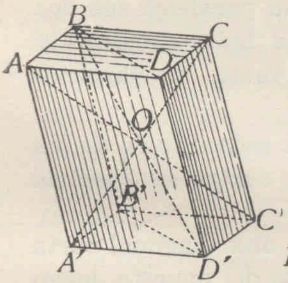
Resulta, pues, que las bases pueden ser dos caras cualesquiera que no tengan arista común; tales caras se llaman *opuestas,* y por ser bases de un prisma, son *iguales.*

Dos vértices no pertenecientes a una misma cara se llaman *opuestos.*

El segmento que une dos vértices opuestos se llama diagonal. Todo paralelepípedo tiene cuatro pares de vértices opuestos y, por tanto, cuatro diagonales.

Como en cada vértice concurren tres caras, las otras tres determinan el vértice opuesto al primero. Hay, por tanto, tres pares de vértices opuestos.

La figura representa un paralelepípedo, que tiene estos elementos:



Diagonales:

AC', BD', CA', DB,.

Aristas opuestas:

AB, C'D'; BC, A'D'; CD, A'B';

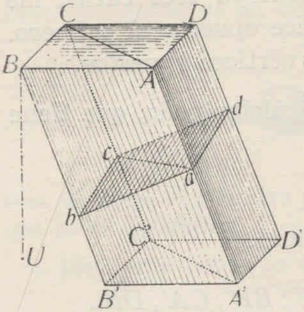
DA, B'C'; AA', CC'; BB', DD'

8.—**PROPIEDADES FUNDAMENTALES.**

TEOREMA 1º. — *Las diagonales de todo paralelepípedo concurren en un punto que divide a cada una en dos partes iguales.*

Demostración. — Por ser las aristas opuestas iguales y paralelas, determinan un paralelógramo, cuyas diagonales se cortan en partes iguales; por tanto: la diagonal *BD'* pasa por el punto medio de la *AC'*; y también la *CA'* y la *DB'*; luego todas concurren en un punto *O* que es punto medio de cada una.

TEOREMA 2º. — *La sección de un paralelepípedo por cualquier plano que corte a cuatro aristas paralelas es un paralelógramo.*



Demostración. — Como los planos de las caras opuestas son paralelos, sus secciones por el plano secante son rectas paralelas, en virtud de (I.6); luego la sección es un cuadrilátero que tiene paralelos sus dos pares de lados opuestos y es, por tanto, un paralelógramo.

TEOREMA 3º. — *El punto de intersección de las diagonales del paralelepípedo es centro de simetría del mismo.*

Cualquier plano que pase por una diagonal corta a dos caras de un triedro y a dos del opuesto, luego corta al paralelepípedo según un paralelógramo, cuyo centro es el punto medio de la diagonal, o sea el mismo del paralelepípedo, que es centro de simetría en el paralelógramo. Dado cualquier punto de la superficie, determina con una diagonal un paralelógramo, luego el simétrico pertenece al contorno y, por tanto, a la superficie del paralelepípedo.

EJERCICIOS. — 1. Cortar un paralelepípedo por un plano, de modo que resulte un exágono

2. Cortar un paralelepípedo por un plano paralelo a una arista. Estudiar la variación de esta sección al moverse el plano paralelamente.

3. ¿Tiene ejes o planos de simetría un paralelepípedo oblícuo?

9.—PARALELEPIPEDO-ORTOEDRO-CUBO.

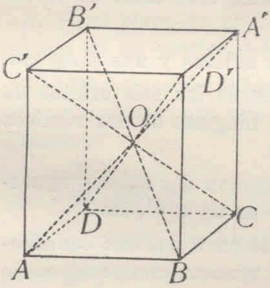
Como el paralelepípedo es un prisma, cuando éste es *recto*, es decir, cuando cuatro aristas paralelas son perpendiculares a las bases, se llama paralelepípedo *recto*. Si además son las bases rectángulos, se llama *paralelepípedo recto rectángulo*, o más brevemente: *ortoedro*.

O r t o e d r o es el prisma recto de base rectangular.

Todo paralelepípedo recto tiene cuatro caras que son rectángulos, por ser prisma recto; el ortoedro tiene las seis caras rectángulos.

También son rectángulos los paralelógramos determinados por cada dos aristas opuestas, por ser éstas perpendiculares a los otros dos lados que son diagonales de las bases. Y como éstas son iguales, resulta:

En todo ortoedro son iguales las cuatro diagonales.



La figura representa un ortoedro, con su centro y sus diagonales.

Sus cuatro diagonales son: AA', BB', CC', DD'.

Ya sabemos que el punto de intersección de las diagonales es centro de simetría, como en todo paralelepípedo.

Por ser prisma recto, los planos medios de las bases, es decir, los planos trazados por el centro paralelos a cada par de bases, son planos de simetría.

Por ser la base un rectángulo, que tiene como centro de simetría el punto de intersección de las diagonales, es eje de simetría del ortoedro la intersección de los dos planos diagonales que éstas determinan, los cuales se cortan en la perpendicular a la base en su centro.

Resultan, por tanto, los siguientes elementos de simetría:

El punto de intersección de las diagonales es centro de simetría.

Las perpendiculares a las caras trazadas por el centro son ejes de simetría.

Los planos paralelos a las bases que cada dos ejes determinan, son planos de simetría.

Total: un centro, tres ejes y tres planos de simetría.

EJERCICIOS. — 1. Enumerar objetos corrientes de forma ortoédrica.

2. Construir un ortoedro dadas dos aristas y una diagonal.

3. Demostrar que los puntos medios de las seis aristas de un paralelepípedo no concurrentes en ninguno de dos vértices opuestos, están situados en un plano.

4. ¿Qué clase de cuadrilátero determinan dos aristas opuestas de un paralelepípedo? ¿Y si éste es un ortoedro?

5. ¿Cómo debe ser un paralelepípedo para que sea equilátero el triángulo formado por los tres vértices consecutivos de un vértice del paralelepípedo?

EL CUBO.

Se llama c u b o o e x a e d r o r e g u l a r a todo ortoedro que tiene sus aristas iguales.

Por tanto:

Las caras son cuadrados.

Cada plano diagonal es bisector de los dos diedros cuyas aristas contiene, y es plano de simetría..

Dos planos diagonales cualesquiera son perpendiculares.

Los tres planos medios de los tres pares de caras opuestas son planos de simetría.

Las 6 diagonales de las 3 secciones medias, o sea las rectas que unen los puntos medios de las aristas opuestas, son ejes de simetría.

Las 3 rectas que unen los centros de las caras opuestas, son ejes de simetría.

Las cuatro diagonales son iguales.

EJERCICIOS. — 1. Enunciar objetos de forma cúbica.

2. Construir un cubo dada el área de su superficie total.

3. ¿Qué clase de triángulo forman los tres vértices consecutivos de un vértice del cubo?

4. ¿Qué clase de exágono forman los puntos medios de las seis aristas del cubo que no contienen ninguno de dos vértices opuestos?

10.—PIRAMIDES - VERTICE, CARAS, BASE.

Si se corta un ángulo poliedro por un plano que no pase por el vértice y corte a todas las aristas, la sección es un polígono; la parte de ángulo poliedro que contiene al vértice se llama *pirámide*.

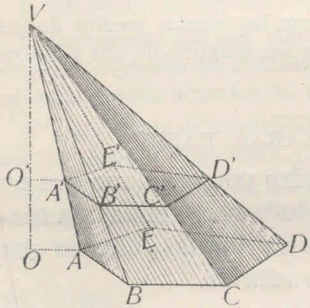
Las semirrectas del ángulo poliedro quedan divididas por el plano secante en dos partes, de las cuales sólo pertenece a la pirámide el segmento comprendido entre el vértice y la intersección con el polígono. Recíprocamente, todo segmento determinado por el vértice y un punto del polígono pertenece a una semirrecta del ángulo poliedro, luego podemos establecer esta definición equivalente:

Pirámide es el cuerpo formado por los puntos de todos los segmentos de origen V, llamado vértice, y extremo perteneciente a un polígono, llamado base.

Se llaman *caras* los triángulos determinados por el vértice con cada lado de la base.

Las secciones paralelas a la base de una pirámide son polígonos semejantes a ella.

Como las secciones de un diedro son ángulos iguales las dos secciones paralelas de una pirámide triangular son triángulos con los ángulos correspondientes iguales, y por tanto semejantes. Si la pirámide tiene mayor número de caras las secciones paralelas se descomponen en triángulos semejantes igualmente dispuestos y por tanto son polígonos semejantes.



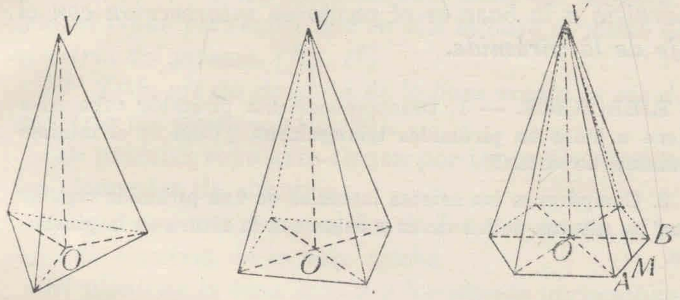
La figura representa una pirámide de base pentagonal, con una sección paralela a la base, y, por tanto, semejante a ella.

La distancia VO del vértice al plano de la base es la *altura* de la pirámide.

11.—PIRAMIDE REGULAR.

Se llama pirámide regular a la que tiene regular el polígono base y el vértice en la perpendicular a su plano en el centro de la base. Esta recta se llama eje.

Las figuras representan pirámides regulares, cuyas bases son: un triángulo equilátero, un cuadrado



y un exágono regular; se llaman pirámide *triangular, cuadrangular y exagonal,* respectivamente.

Por ser la base un polígono regular, su centro equidista de los vértices; luego las aristas laterales de la pirámide son segmentos oblicuos cuyos pies se apartan igualmente del pie de la perpendicular, siendo, por tanto, iguales. Por consiguiente resulta:

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles iguales.

Las alturas de estos triángulos isósceles se llaman *apotemas* de la pirámide. En la pirámide exagonal de la figura está dibujada la apotema VM.

Como las secciones paralelas a la base son polígonos semejantes a ésta, según se ha visto en el párrafo anterior, resulta:

Las secciones paralelas a la base de una pirámide regular son polígonos regulares.

Además, como a segmentos iguales en un plano corresponden segmentos iguales en el otro, el punto en que el plano secante corta al eje equidista de los vértices de la sección; luego:

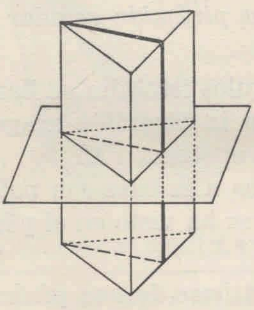
El centro del polígono determinado por un plano paralelo a la base es el punto de intersección con el eje de la pirámide.

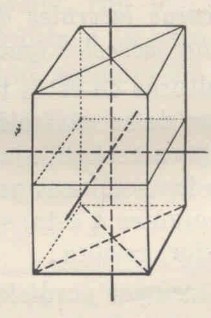
EJERCICIOS. — 1. Descomponer una pirámide cuya base tiene **n** lados en pirámides triangulares. ¿Cuál es el mínimo número de éstas?

2. Compárense las aristas laterales de una pirámide regular con las alturas de las caras y éstas con la altura de la pirámide.

12.—SIMETRIA DE LOS PRISMAS.

El plano medio entre las bases de un prisma recto biseca no sólo las aristas, sino todo segmento perpendicular a ella limitado entre las bases, luego éstas son simétricas respecto de dicho plano medio. Cada uno de dichos segmentos queda bisecado por el plano medio en dos segmentos simétricos; luego resulta:





I. *En todo prisma recto, el plano medio de las bases es el plano de simetría del mismo. (fig. 1ª).*

II. *Si la base del prisma recto tiene centro de simetría, la perpendicular en él a la base es eje de simetría del prisma. (fig. 2ª).*

III. *Si la base del prisma recto tiene eje de simetría, el plano perpendicular en él a la base es plano de simetría del prisma. (fig. 1ª).*

IV. *Todo eje de simetría de la base media es eje de simetría del prisma. (fig. 2ª).*

Los prismas regulares tienen por tanto los siguientes elementos de simetría:

El eje que une los centros de las dos bases, y los ejes de simetría de la base media.

El plano de la base media y los planos perpendiculares a ella en sus ejes de simetría.

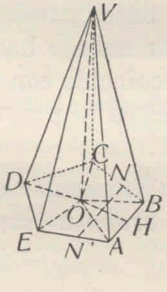
El centro de la base media.

EJERCICIOS. — 1. Señalar en la figura o mejor en un modelo los elementos de simetría de un prisma cualquiera. (Por ej. un trozo de listón de madera).

2. Señalar en los modelos de prismas regulares todos sus elementos de simetría.

13.—SIMETRIA DE LA PIRAMIDE.

Supongamos ahora que la pirámide es regular. Los ejes de simetría de la base que es un polígono regular, son:



1º Las rectas *OA, OB, OC*. . ., que unen el centro con los vértices.

2º Las rectas *OH, OK*. . ., que unen el centro con los puntos medios de los lados.

Consideremos, por ejemplo,

una de éstas, OH; si N y N' son dos puntos simétricos respecto de ella, la recta NN' es perpendicular a OH, luego también lo es al plano VOH por el teorema de las tres perpendiculares; y como están NN' a distinto lado y equidistantes, son simétricos respecto de dicho plano VOH.

Lo dicho para los puntos de la base vale para cualquier sección paralela, que también es polígono regular, luego resulta:

Todo plano que pase por el eje y una arista lateral de una pirámide regular, es un plano de simetría.

Todo plano que pase por el eje y una apotema de una pirámide regular, es un plano de simetría.

EJERCICIOS. — 1. Dibujar en las pirámides de que se disponga sus elementos de simetría.

2. Enumerar los elementos de simetría de las pirámides regulares cuyas bases tengan 3, 4, 5, 6, 7, 8 lados.

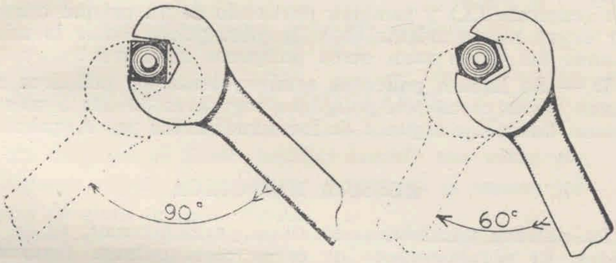
14.—EJES DE SIMETRIA DE ORDEN SUPERIOR EN LOS PRISMAS Y PIRAMIDES REGULARES.

Prismas y pirámides regulares nos ofrecen buenos ejemplos de la simetría de orden superior que hemos definido al comienzo de este capítulo.

La conclusión es sencilla: cada prisma o pirámide tiene la misma simetría de su base, puesto que el movimiento de rotación alrededor del eje hace girar la base sobre sí misma y si esta coincide con su posición primitiva, lo mismo le sucederá al prisma o pirámide.

Por tanto: Un prisma o pirámide regular cuya base tiene n *lados es simétrica de orden* n *respecto de su eje.*

EJEMPLOS. — El fundamento de la llave que hace girar la tuerca cuadrada de un bulón es precisamente la simetría cuaternaria, pues mediante un giro de un cuarto de vuelta o sea de 90º queda el cuadrado de la tuerca en posición igual a la anterior y por tanto puede aplicarse otra vez la llave. En cambio cuando hay algún obstáculo para efectuar giro tan



amplio, se usa tuerca exagonal, la cual por su simetría de orden 6 coincide consigo misma después de una rotación de 60º y puede aplicarse nuevamente la llave para un nuevo giro, apretando o aflojando la tuerca según sea el sentido del giro.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.—Clasificar objetos corrientes de forma poliédrica, asignándoles sus nombres geométricos.

2.—Construir los desarrollos de prismas, pirámides y paralelepípedos rectos y oblicuos, formando mediante ellos los poliedros correspondientes.

3.—Deducir por razonamiento la forma de la sección producida en un paralelepípedo por un plano que se mueve paralelamente, y comprobar las conclusiones en el modelo construido.

4.—Construir paralelepípedos cuyas caras sean rombos. Demostrar que tales poliedros, llamados **romboedros**, tienen todas las aristas iguales. Estudiar en especial el caso en que todas las caras sean iguales, enumerando todos los elementos de simetría del poliedro.

5.—Suele llamarse también **romboedro** al paralelepípedo rectángulo cuyas bases son rombos. Determínense todos sus elementos de simetría.

6. — Si todas las caras de un poliedro son polígonos regulares de una misma especie (p. ej. cuadrados) deben ser todos iguales, puesto que cada dos caras contiguas tienen un lado común; p. ej.: si a un cubo se le yuxtaponen seis cubos iguales en sus seis caras, resulta un poliedro con 30 caras que son cuadrados iguales, pero no tienen igual número de caras concurrentes en cada vértice y por esta causa no es regular.

Forme el lector poliedros cuyas caras sean triángulos equiláteros iguales partiendo del tetraedro o del exaedro regulares (capítulo IX) y también partiendo de un prisma triangular cuyas nueve aristas sean iguales. ¿Cabe hacer lo mismo cuando las caras sean otros polígonos regulares?

7. — Se llaman **poliedros semiregulares** los poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares de dos o más especies. Construir algunos de los descubiertos por Arquímedes.

RESEÑA HISTORICA

La palabra **paralelepípedo,** como **paralelógramo,** es de Euclides. El paralelepípedo de caras rectangulares **(ortoedro)** era llamado **cubo** por Heron, pero prevaleció el sentido actual que es el de Euclides.

Prisma viene de **priein** = aserrar; se creyó mucho tiempo que **pirámide** procede de **pir** = fuego porque Pitágoras suponía que el fuego está compuesto de partículas tetraédricas; pero en verdad procede de la palabra egipcia **piremus** con que designaban a la generatriz.

Sobre los poliedros regulares véase pág. 170; los semirregulares fueron estudiados por Arquímedes, que catalogó los 13 tipos siguientes:

Número de caras	**Número de lados de las caras** 3	4	5	6	8	10
8	4	—	—	4	—	—
14	8	6	—	—	—	—
14	—	6	—	8	—	—
14	8	—	—	—	6	—
26	8	18	—	—	—	—
26	—	12	—	8	6	—
32	20	—	12	—	—	—
32	—	—	12	20	—	—
32	20	—	—	—	—	12
38	32	6	—	—	—	—
62	20	30	12	—	—	—
62	—	—	—	20	30	12
92	80	—	12	—	—	—

CAPITULO IX

POLIEDROS REGULARES

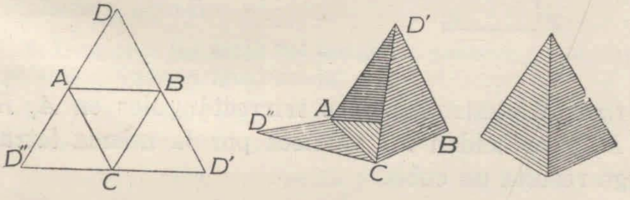
1.—LOS CINCO POLIEDROS REGULARES.

Un poliedro se llama **regular** cuando sus caras son polígonos regulares iguales y concurren el mismo número de ellas en cada vértice.

Veamos cómo se pueden construir poliedros regulares de 4, 6, 8, 12 y 20 caras, es decir: *tetraedros, exaedros, octaedros, dodecaedros, icosaedros;* y demostraremos que estos cinco son los únicos tipos de poliedros regulares.

Designaremos por c el número de caras, por v el número de *vértices,* y por a el número de *aristas* de cada poliedro.

TETRAEDRO REGULAR.



Dibujados cuatro triángulos equiláteros iguales, como indica la figura, y recortado el papel o cartulina por el contorno, doblemos dos de los triángulos, p. ej.: *ABD* y *BCD'* hasta formar con el *ABC* el triedro de vértice *B*, lo cual es posible por ser la suma de ángulos en *B* dos rectos.

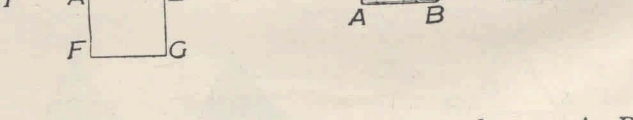
Por ser $BD = BD'$, coincidirán *D* y *D'*, resultando un triángulo *ACD* de lados iguales, es decir, equilátero, con el cual vendrá a coincidir el *ACD''*, si se dobla alrededor de *AC*, cerrando el triedro.

La simple inspección de la figura muestra que para el *tetraedro* es:

$$c=4,\ v=4,\ a=6.$$

EXAEDRO REGULAR.

Si recortamos la figura formada por 6 cuadrados iguales y se doblan las caras que circundan a la *ABCD*,



se forman cuatro triedros trirrectángulos en *A*, *B*, *C*, *D*, y coinciden los vértices por la misma letra; luego resulta un cubo.

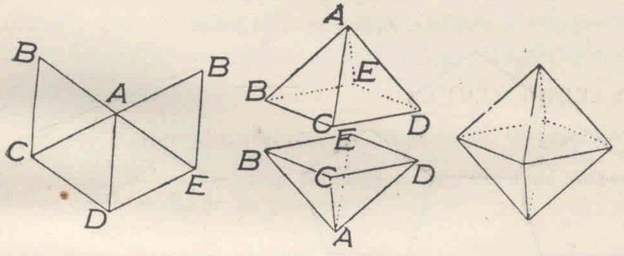
Evidentemente es:

$$c=6,\ v=8,\ a=12.$$

OCTAEDRO REGULAR.

Construyamos cuatro triángulos equiláteros iguales, dispuestos tres de ellos en torno del cuarto, como indica la figura, formando con ellos una pirámide cuadrangular *ABCDE* de base cuadrada; si se forma otra igual y se unen ambas por sus bases, resulta un poliedro de ocho caras iguales, que es regular por tener cuatro concurrentes en cada vértice.

Para el *octaedro* es: $c=8$, $v=6$, $a=12$.



NOTA: Obsérvese que el octaedro tiene igual número de aristas que el exaedro, y que los números de caras y vértices están permutados, propiedad que pronto mostrará su interesante significado.

EJERCICIOS. — 1. Construir con cartulina tetraedros, exaedros y octaedros regulares.

2. Comparar las áreas del tetraedro, exaedro y octaedro regulares que tienen igual arista.

3. ¿Qué poliedro determinan los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular?

Idem de un cubo (no resulta poliedro regular).

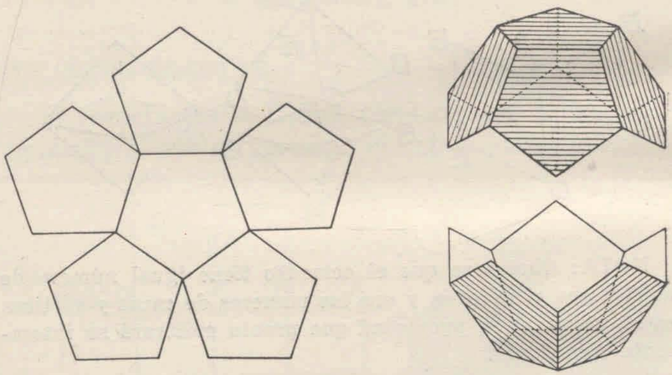
Idem de un octaedro.

4. ¿Qué poliedro determinan los centros de las caras de un tetraedro, exaedro u octaedro regular?

DODECAEDRO REGULAR.

Si recortamos la figura formada por 6 pentágonos iguales y se doblan las cinco caras que circundan al pentágono central, hasta que coincidan los vértices designados por la misma letra, se forma un casquete de contorno quebrado en que los ángulos entrantes son iguales a los salientes.

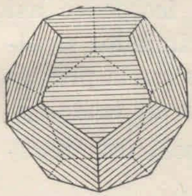
Construído otro casquete exactamente igual, se observa que ambos contornos pueden hacerse coin-



cidir, ajustando los ángulos salientes de uno con los entrantes del otro. El poliedro formado por los 12 pentágonos iguales es regular, por tener tres caras concurrentes en cada vértice.

En efecto, en los vértices del polígono central de cada casquete, concurren tres caras del mismo; y en cada vértice del contorno quebrado concurren dos caras de un casquete y una cara del otro.

La demostración de que ambos casquetes encajan exactamente, es demasiado larga y la omitimos, de igual modo que en los otros poliedros, pero claramente se ve que es: $c=12$, $v=20$, $a=30$.

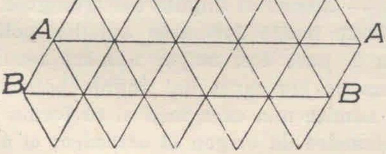


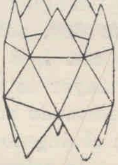
La figura representa el dodecaedro regular así construído; poliedro que vino a cerrar inesperadamente la serie de los poliedros regulares que se creía completa con los ya conocidos, esto es: el tetraedro, el cubo y el octaedro, que hemos estudiado, más el icosaedro de que vamos a ocuparnos ahora, el cual fué descubierto por los pitagóricos antes que el dodecaedro.

NOTA: En la práctica de la construcción del dodecaedro se recortan dos rosetas como la representada en la figura, unidas por una arista, dejando en cada arista libre un estrecho reborde para facilitar la pegadura.

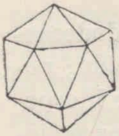
ICOSAEDRO REGULAR.

Recortando la red de 20 triángulos equiláteros dibujada en la figura y soldando los bordes designados





AB, se forma un anillo, en el que se logra que sean regulares los pentágonos *BCDEF* y *GHJKL*; doblando los triángulos superiores hasta cerrar una pirámide pentagonal y lo mismo los de abajo, se forma un poliedro que es regular por tener sus caras iguales e igual número de ellas concurren en cada vértice, como fácilmente se comprueba. La figura representa el icosaedro así construído, cuyo descubrimiento significa un gran éxito de la escuela pitagórica, teniendo en cuenta su complejidad, comparativamente con los tres poliedros regulares que antes se conocían.



Examinando el icosaedro se observan los siguientes números característicos:

$$c = 20, \; v = 12, \; a = 30$$

(V. *Reseña histórica* al final)

LOS UNICOS TIPOS DE POLIEDROS REGULARES.

Así como hay polígonos regulares de tantos lados como se quiera, no acontece lo mismo con los poliedros regulares.

Para ver todos los tipos posibles de poliedros regulares, procedamos ordenadamente, según la naturaleza de sus caras.

Caras triangulares. — Siendo el ángulo del triángulo equilátero de 60º, solamente puede formarse ángulos poliedros con 3 ó con 4, ó con 5, pues con mayor número resultaría 360º ó mayor la suma de las caras del ángulo poliedro; el triedro formado sólo admite una cara más si se forma el **tetraedro**; el ángulo tetraedro da origen al **octaedro**; el ángulo pentaedro da origen al **icosaedro.**

Caras cuadradas. — Si se agrupan 3 cuadrados en cada vértice resulta el cubo o **exaedro**; mayor número no se pueden agrupar, por resultar 360º ó mayor la suma de ángulos en cada vértice.

Caras pentagonales. — Si se forma un triedro de pentágonos iguales y se van completando los triedros abiertos con nuevos pentágonos, resulta el **dodecaedro**; mayor número de pentágonos no puede haber en cada vértice.

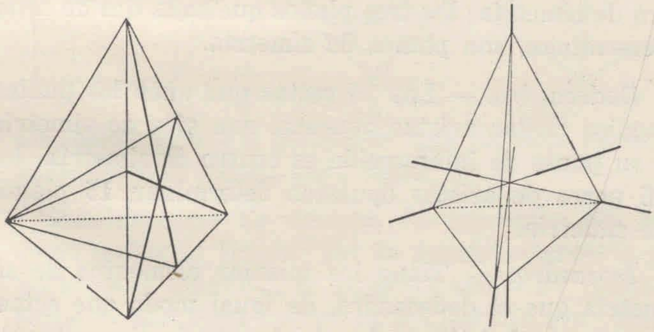
Con exágonos no se pueden formar poliedros; pues debiendo concurrir al menos tres en cada vértice, la suma de ángulos sería 360º; y mayor si son polígonos de 7, 8, ... lados.

Resumen: **no existen otros tipos de poliedros regulares, más que los cinco estudiados.**

2.—SIMETRIA DE LOS POLIEDROS REGULARES.

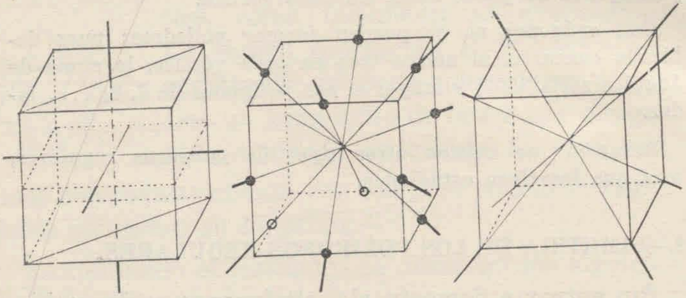
Sin entrar a demostrarlo, obsérvanse en los poliedros construídos, como se ha explicado, los elementos de simetría siguientes:

Tetraedro. — No tiene centro ni ejes de simetría ordinaria pero tiene cuatro ejes de simetría ternaria.



Planos de simetría son los determinados por cada arista y el punto medio de la arista opuesta.

Exaedro. — Las 3 rectas que unen puntos medios de caras opuestas son ejes de simetría y su punto de intersección es centro de simetría; los 3 planos medios entre los tres pares de caras opuestas son



planos de simetría. Las diagonales son ejes de simetría ternaria.

Octaedro. — Las 3 diagonales son ejes de simetría cuaternaria y su punto de intersección es centro de simetría; los tres planos que cada dos de estos determinan, son planos de simetría.

Dodecaedro. — Las 15 rectas que unen los puntos medios de las aristas opuestas son ejes de simetría y su punto de intersección es centro de simetría; los 15 pares de aristas opuestas determinan 15 planos de simetría.

Icosaedro. — Tiene los mismos elementos de simetría que el dodecaedro, de igual modo que octaedro y exaedro tienen igual número de elementos de simetría.

Esta correspondencia entre octaedro y exaedro, entre dodecaedro e icosaedro se expresa diciendo que son poliedros *conjugados*.

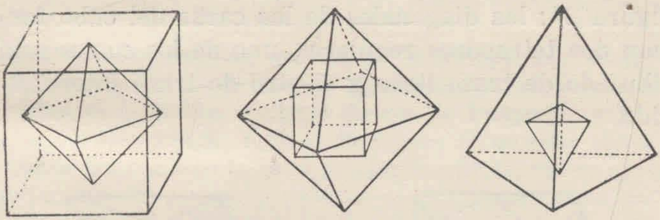
Se puede demostrar que *el poliedro cuyos vértices son los puntos medios de las caras de otro, es el conjugado de éste.*

EJERCICIOS. — 1. Construir con cartulina dodecaedros e icosaedros regulares.

2. .Comparar las áreas del dodecaedro y del icosaedro regular que tengan igual arista.

3.—POLIEDROS CONJUGADOS.

Los centros de las caras de un poliedro regular son vértices de otro poliedro que también es regu-



lar, como vamos a probar en uno de ellos siendo el razonamiento válido para todos.

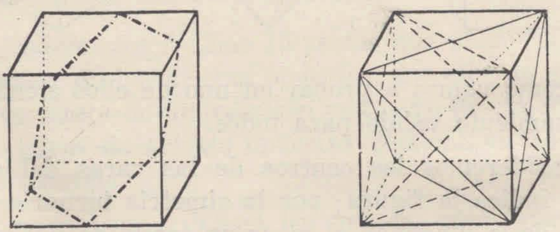
Consideremos los centros de las caras del cubo como indica la figura; por la simetría ternaria respecto de la diagonal, al girar un tercio de vuelta en torno de ella cada centro va a coincidir con otro, es decir el triángulo coincide consigo mismo y por tanto es equilátero. El nuevo poliedro, que se llama *conjugado* del cubo, tiene por tanto tantas caras como vértices el cubo, o sea 8, es decir es un octaedro. Recíprocamente, si se parte del octaedro y se forma un poliedro cuyos vértices sean los centros de sus caras, resulta un cubo.

Análogamente son conjugados el dodecaedro e icosaedro, relación que está de acuerdo con los números de caras y vértices de cada uno, que son iguales a los números de vértices y caras del otro.

Finalmente, el conjugado del tetraedro es otro tetraedro, como se ve en la figura 3ª.

Los puntos medios de las aristas del cubo son vértices de cuatro exágonos regulares, secciones planas del cubo; la fig. 1ª representa uno de ellos.

Otra relación interesante es la representada en la figura 2ª: las diagonales de las caras del cubo forman dos tetraedros regulares, uno de los cuales está dibujado de trazo lleno y el otro de trazo interrumpido.



EJERCICIOS. — 1. Demostrar que los tetraedros formados por las diagonales de las caras de un cubo son regulares.

2. Demostrar que los puntos medios de las aristas de un cubo forman exágonos regulares secciones del cubo por los planos perpendiculares a cada diagonal en su punto medio.

RESEÑA HISTORICA

Parece seguro que Pitágoras conoció en su viaje a Egipto los más sencillos poliedros regulares: **tetraedro, exaedro** y **octaedro**, únicos descubiertos por los egipcios. Pronto descubrieron los pitagóricos el **icosaedro**, creyendo así haber agotado todos los poliedros regulares. Llevados de su espíritu cosmológico les asignaron a estos cuatro poliedros el carácter de componentes del universo, suponiendo que los cuatro elementos: **tierra, aire, fuego** y **agua**, estaban compuestos por partículas de estas cuatro formas poliédricas.

Tal teoría atómica fracasó cuando más tarde descubrieron el dodecaedro; pero pronto le encontraron interpretación física, admitiendo que el Universo entero tiene esta forma poliédrica.

El descubrimiento del dodecaedro constituye uno de los timbres de gloria de la escuela pitagórica. Se atribuye con fundamento a **Hipaso**, discípulo directo de Pitágoras; y lleno de legítimo orgullo, faltó al juramento de guardar secreto, como era regla de la secta pitagórica, divulgando su descubrimiento. El perjuro pereció en el mar, según unos por castigo divino y según otros condenado por sus mismos condiscípulos.

Vemos en esta consigna del silencio una concepción objetiva de la ciencia que sacrifica modestamente al individuo en aras de la obra, criterio que más tarde se modifica, asignándose a cada investigador la paternidad de sus descubrimientos; pero que vuelve a reaparecer después de Galileo, cuyos discípulos, agrupados en la famosa Academia del Cimento, publicaban colectivamente sus descubrimientos, diluyendo su personalidad en la magna empresa colectiva. Sana costumbre que pronto desaparece, recuperando la ciencia, como el arte, su carácter de obra individual, con lamentables ejemplos de plagios, discusiones y falsificaciones de paternidad, que llenan la historia de la ciencia, oscureciendo el brillo de altísimas figuras.

Examine el lector los números que hemos llamado **c**, **v**, **a** de **caras**, **vértices** y **aristas** de los cinco poliedros regulares y notará que en todos ellos se verifica la relación siguiente:

$$c + v - a = 2$$

Esta relación importante, llamada teorema de **Euler**, no es característica de los poliedros regulares, sino que se verifica también para todos los poliedros convexos y aun para muchos otros. En realidad era ya conocida de Arquímedes, y Descartes fué el primero en enunciarla claramente.

Compruebe el lector la relación citada en cualquier poliedro, aun no siendo convexo, y vea que en cambio no se verifica en ciertos poliedros más complicados de forma anular, como es por ejemplo un marco de ventana.

INDICE