CLARO C. DASSEN

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA ELEMENTALES

VOLUMEN I:

ARITMÉTICA

Editorial ESTRADA

Duesalt

Aritmética y Álgebra

ELEMENTALES

POR

C. C. DASSEN

Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas, etc.

Texto para los Colegios Nacionales y Escuelas Normales

PRIMERA EDICIÓN

VOL. I, ARITMÉTICA

EDITORIAL ESTRADA

BUENOS AIRES

ANGEL ESTRADA Y CÍA. — EDITORES

466 — BOLIVAR — 466

1937

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA
ELEMENTALES

VOL. I, ARITMÉTICA

PREFACIO

(PARA LOS SEÑORES PROFESORES)

La aprobación de los nuevos programas de matemáticas pone fin a un estado de incertidumbre que restringió durante los últimos años la publicación de libros de enseñanza sobre las materias que aquéllos comprenden.

El estudio de esas ciencias, por su índole, no admite modificaciones parciales: una reforma de los programas respectivos exige por lo tanto la renovación total de los textos que deben interpretarlos.

Las matemáticas en los institutos de instrucción secundaria, normal y especial plantea problemas difíciles de resolver puesto que la enseñanza de esas disciplinas debe contemplar simultáneamente propósitos muy distintos.

Las matemáticas son, por una parte, materias instrumentales o auxiliares, cuyo conocimiento práctico — y en algunos aspectos empírico — es indispensable al alumno para iniciarse con éxito en el estudio de otras asignaturas (física, química, geografía, ciencias naturales, etc); pero son también, ciencias independientes y abstractas con aplicaciones prácticas propias, y que llenan, además, otra finalidad didáctica superior: la educación intelectual del estudiante en el orden del raciocinio y de la disciplina mental; por eso se les ha llamado "cursos de lógica práctica".

Este dualismo de finalidades, y el carácter de la enseñanza media que prepara para profesiones y especialidades distintas, explican la diversidad de criterios sobre la técnica didáctica que conviene aplicar. Los nuevos programas siguen un método "intuitivo" y "razonado" que parte de la realidad concreta y que se apoya en ella. A juicio de sus autores, esta orientación es más favorable al *desarrollo mental del alumno y se aplica con éxito en Francia, Alemania e Italia entre otros países.*

La eficacia de todo programa depende, en cierta medida, de su interpretación. Por ese motivo, nuestra Casa ha resuelto encomendar la preparación de los textos que desarrollarán los nuevos programas a especialistas consagrados y con larga actuación al frente de cátedras.

Después de insistentes gestiones, esta Editorial ha conseguido que la delicada tarea de escribir una serie completa de textos para para desarrollar los nuevos programas de aritmética y álgebra, sea aceptada por el doctor Claro C. Dassen, cuya autoridad científica y cuyo prestigio como matemático, profesor y publicista nos eximen de toda presentación. Su labor de especialista y su actuación en la cátedra como maestro orientador de varias generaciones son conocidas dentro y fuera del país.

Cuando solicitamos su colaboración, declinó el ofrecimiento, alegando que en el difundido tratado en varios tomos que él publicara hace algunos años, ya había expuesto esas materias ajustándose estrictamente a su criterio personal y sin aceptar limitaciones de programa alguno. Nuestra Casa insistió en su propuesta haciéndole presente que la obra publicada, por su contenido y extensión, es indiscutiblemente un texto de mérito, muy útil para los alumnos que desean prepararse para estudios superiores de esas materias, pero que como texto, resulta excesivo con relación a los programas actuales de enseñanza media; agregando que — a nuestro juicio — podría cumplir en adelante la función de obra de consulta para estudiantes.

Nuestra Casa significó, además, al doctor Dassen que la coincidencia entre la orientación metodológica de los programas actuales y la que él ha difundido desde la cátedra y aplicado en todos sus libros, era un motivo más para insistir en nuestro pedido, que fué aceptado finalmente.

Al remitirnos los originales de este primer volumen que sale hoy a luz, nos ha manifestado el autor, entre otras cosas, las siguientes que textualmente transcribimos:

“Aunque no contiene nada de fundamentalmente nuevo respecto “del Tratado inicial arriba aludido — el cual puede continuar con- “servando, si así se le quiere dar, un carácter de texto de consulta

" *para los alumnos — sin embargo, al redactar el nuevo libro, he*
" *procurado ponerlo más al alcance de los estudiantes aprovechando,*
" *desde luego, la experiencia dada por el tiempo transcurrido, sal-*
" *vando las deficiencias observadas y teniendo en cuenta las re-*
" *flexiones que, sobre la enseñanza de esas disciplinas han emitido,*
" *aun hace poco, eminentes sabios y pedagogos en el ramo.*

" *Me he preacupado de la corrección y exactitud del lenguaje,*
" *y cuando la necesidad de abreviar el discurso exige una forma no*
" *del todo correcta en la expresión, he insistido mucho en señalar*
" *esa circunstancia para no provocar dudas ni errores. He cuidado*
" *mucho también lo relativo a conceptos fundamentales: no con-*
" *fundir por ejemplo, el concepto de número, con el de unidad y*
" *con el de conjunto.*

" *Respecto de la definición de número, ha recalcado reciente-*
" *mente, el eminente profesor del Instituto de Francia, H. Lebesque,*
" *en su trabajo* Sur la Mesure des Grandeurs (1933), *que siendo*
" *mejor, para la enseñanza de la aritmética, considerarla netamente*
" *como una ciencia experimental al igual que las demás, libre de*
" *toda metafísica, conviene definir a los números como simples*
" *vocablos de una prefijada y ordenada serie de palabras. La* enu-
" meración *determina, en cada caso, al vocablo que afecta la co-*
" *lección enumerada y el vocablo o número así determinado cons-*
" *tituye la descripción completa de ese mismo acto de la numeración.*

" *En esta enseñanza media, en suma, no habrá que entender por*
" número *a un ente a quien se da un nombre con el que no debe*
confundirse, sino a un vocablo que evoca o describe un acto, el de la
enumeración.

" *Desearía referirme a otros puntos y extenderme en otras con-*
" *sideraciones, pero alargaría demasiado estas líneas preliminares.*
" *Me conformaré con señalar que en los capítulos que contienen*
" *temas muy abstractos como el relativo a la divisibilidad, múltiplos*
" *y divisores comunes, he procurado hacerlos más accesibles a los*
" *alumnos, conservando, sin embargo, en tipo menor las demostra-*
" *ciones. Esta parte señalada con caracteres menores, puede consi-*
" *derarse también un simple complemento, pero siempre será*
" *más pedagógico, cuando los temas resulten demasiado abstractos,*
" *que los profesores prescindan de las demostraciones, sobre todo si*
" *los alumnos no pueden entenderlas por su corta edad o por sus*

" escasas aptitudes. Es más útil una buena práctica sin justifica-
" ción teórica, que insistir sobre ésta, malográndolo todo.

" He conservado muchos de los ejercicios de mi Tratado ante-
" rior, agregando otros, e incluyendo al final las soluciones perti-
" nentes.

" He agregado, asimismo, algo sobre el cálculo mental ya que
" se ha asignado a éste, no sin razón, una importancia particular".

Con estas palabras cierra el doctor Dassen la presentación de la obra que hoy agregamos a nuestro índice bibliográfico, con la certidumbre de servir los intereses de la enseñanza.

Los Editores.

ERRATAS

Pág.	*Línea*	*Dice*	*Léase*
I	12	plantea	plantean
III	7	preacupado	preocupado
III	15	Lebesque	Lebesgue
III	23	numeración	enumeración
6	17	a los números	a los de los números
14	18	las cifras	las cifras así escritas
17	14	; centena	; decena de millar
17	15	millar de millón	centena de millar de millón
19	4	**quigentésimo**	**quingentésimo**
19	5	**nonigentésimo**	**noningentésimo**
25	1, 2, 3	*número*	*conjunto*
25	27	dichos	dicho
37	11	**Substracción**	**Substraer**
50	2	a y b)	(a y b)
50	7	a > m	a > b
62	10	por ciento	, y de ciento
70	26	vemos	vimos
71	29	por	para
74	9	*d*	*b*
79	6, 7	divisor	dividente
80	28	divisor	dividente
81	3	y 4	y 40
91	12	es	resultará
91	18	por 4 ; es decir, si es 25, 50 ó 75.	por 4.
92	38	8535284977632 :	8545160213632 :
101	10	por el cociente	por un múltiplo del cociente
103	26	pares	impares
112	20	3477547.	3472547.
113	14	factores dígitos	factores no dígitos
114	25	equivalente	equivalentes
117	18	*nueve avos... diez mil milésimos*, etc.	*diez milésimos*, etc.
122	10	, mil veinticincoavos,	, mil veinte y cinco,
122	14	los números fraccionarios siguientes :	el número fraccionario :
131	Ej. 137	se efectuaría si	se efectuaría, en un día, si
131	Ej. 138	**1400 unidades**	**1600 unidades**
133	Ej. 140	$4\frac{9}{11}$	$4\frac{7}{11}$
134	Ej. 151	$\frac{*}{y}$	$\frac{*}{6}$
160	Ej. 188	1160	1170
166	Ej. 241		agregar : (véase n.º 147, pág. 73).
166	Ej. 242	por los factores de 264	por los factores 3, 8, 11, de 264
167	Ej. 250	résto, cuando	resto, 6, cuando
167	Ej. 257	$2\frac{5}{5}$	$2\frac{5}{7}$
167	Ej. 260	$3\frac{3}{11} \times 2\frac{5}{8}$	$3\frac{7}{11} \times 2\frac{5}{8}$
167	Ej. 260 (al final)	de $\frac{15}{6}$	(suprimirlo)
168.	Ej. 262	$2\frac{5}{13}$	$1\frac{5}{13}$
168	Ej. 262 (al final)		agregar : Los siglos se tomarán de 36500 días.
170	Ej. 278	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$

Pág.		*Dice*	*Léase*
172	Ej. 11	5398	5393
	Ej. 16	19	9
	Ej. 27	341	441
	Ej. 34	60366022822	5967810228225
	Ej. 50	5775 ; 2275	5775, 2275
	Ej. 51	80595479, 22334 ;	8070605 ;
	Ej. 54	1848396	462156
	Ej. 66	2, 8 ; 0, 0 ; 0, 0 ; 4, 4 ; 1, 7 ; 0, 6 ; 2, 2 ; 00.	2, 8 ; 2, 8 ; 0, 0 ; 1, 4 ; 1, 7 ; 0, 6 ; 2, 2 ; 2, 8.
	Ej. 67	4, 4 ; 4 ; 4 ;	1, 4 ; 1, 4 ;
	Ej. 67	; 0, 0 ; 0, 0 ; 0, 0.	; 0, 6 ; 0, 0 ; 0, 0.
	Ej. 74	283402 ; 1542 ; 2834 ; 5289 ;	283402, 1542 ; 2834, 5289 ;
	Ej. 74	; 1294 ; 14795 ; 1878 ; 163.	; 1294, 141795 ; 1878, 103.
	Ej. 77	; 7 ; 7.	; 7.
	Ej. 88	11^2, 19 ; 2^6 ; 3^7.	(suprimirlo)
	Ej. 91	2 y 5	2 ; 5
173	Ej. 104	28453200	47401200
	Ej. 114	; $\frac{4716}{15}$; . . . ; $\frac{3751}{21}$;	; $\frac{4766}{15}$; . . . ; $\frac{3851}{21}$;
	Ej. 119	; $\frac{52}{5381}$	; $\frac{52}{5831}$
	Ej. 132	; $39\frac{5}{11}$.	; $38\frac{5}{11}$.
	Ej. 133	; $1\frac{427}{492}$	; $1\frac{8429}{9240}$.
174	Ej. 142	, $10\frac{25}{45}$	, $10\frac{32}{45}$
	Ej. 146	, $78\frac{23}{70}$	, $78\frac{33}{70}$
	Ej. 149	$18\frac{157}{432}$	$18\frac{7}{432}$
	Ej. 159	; $1174\frac{11}{28}$	$1192\frac{1}{4}$
175	Ej. 169	$1\frac{7}{10}$	$1\frac{89}{115}$
	Ej. 174	$13\frac{39}{40}$	$13\frac{39}{49}$
	Ej. 175	$24\frac{23}{72}$	$22\frac{161}{216}$
	Ej. 176	$39\frac{1}{15}$	$39\frac{1}{16}$
	Ej. 181	$\frac{2}{135}$	$\frac{2}{315}$
	Ej. 187	530	540
	Ej. 191	60	760
176	Ej. 228	13^{17}	13^7
	Ej. 241 y 242	241. 242.	242. 241.
	Ej. 249	306520	30652
	Ej. 262	82121	82131
177	Ej. 276	$1\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, 2, $3\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{4}$, $2\frac{2}{5}$, $3\frac{1}{2}$

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS

1. La Aritmética; sus fundamentos; su origen. — La ciencia de que nos vamos a ocupar está basada en las nociones de *colección*, de *combinación de colecciones*, en la de *orden* y, en definitiva, en las de **contar** y de **número entero**, — como lo expresa la etimología de su nombre — que es uno u otro de los dos vocablos griegos: *aritmeo* (contar) o *aritmos* (número).

Como todas esas nociones se adquieren en la práctica desde la más tierna infancia, se pasan de definiciones y de comentarios (*).

Por otra parte, es muy natural que los hombres, desde que existen, hayan hecho comparaciones entre los objetos que los rodean, que hayan considerado conjuntos de esos objetos; que se hayan preocupado de distinguirlos y combinarlos. Por eso se ha dicho que la aritmética tiene su origen en esas operaciones del espíritu y que es tan antigua como el hombre mismo.

La Aritmética es, en suma, una ciencia experimental, lo mismo que lo son las demás ciencias; pero su particularidad consiste en que, para establecerse, le han bastado poquísimas y sencillas experiencias, repetidas tantas y tantas veces desde el origen de la humanidad que ellas nos han dado, al respecto, una certeza superior a la de cualquier otra ciencia, así como una seguridad de aplicación tal, que nos permite, en presencia de un caso dado, resolver de inmediato, sin vacilación alguna, si esa aplicación de la aritmética le es o no posible.

Y por eso se ha dicho también que la Aritmética es la ciencia humanamente perfecta y que prácticamente nunca nos engaña.

Por las causas apuntadas sería vano, pues, definir las nociones básicas de la aritmética. Debemos limitarnos a disquisiciones respecto de ellas.

Es lo que vamos a hacer en lo que sigue.

2. Las nociones de colección y de unidad. — Tomaremos un caso concreto: En nuestra mesa de trabajo tenemos, entre otras cosas, varios libros. Reunimos estos libros y los guardamos en una valija.

(*) «Desde la época remota en que la humanidad aprendió a contar, el número (entero) fué uno de aquellos datos fundamentales con que nuestro pensamiento obra; dato tan claro a la inteligencia, que cualquier análisis que se intente a su respecto sólo consigue obscurecerlo». (P. BOUTROUX, *Principes de l'Analyse Mathématique.* § 2).

El contenido de ésta es ahora una **colección**, un **agregado** o **conjunto** de libros. Cada libro es una **unidad** del conjunto. No importa que dichos libros traten distintos temas, que unos sean léxicos, otros geografías, etc.; para el caso sólo se tiene en cuenta la condición común a todos: de ser *libros*. Por eso se dice que las *unidades* de un conjunto son, con respecto a él, *equivalentes*. Pero es necesario que cada *unidad* conserve su *individualidad*, es decir, que sea distinguible de cada una de las demás (*).

Una *compañía* es un conjunto de *soldados; una congregación* un conjunto de *sacerdotes;* una *arbolada*, un conjunto de *árboles*. En estos tres últimos conjuntos las unidades son, respectivamente, un soldado, un sacerdote y un árbol, cualesquiera que sean los apellidos de las personas componentes, o las especies de los árboles.

UN REBAÑO, MANADA O HATO, es un conjunto de *animales de la misma especie* ya se trate, en particular, de una PIARA, o de una VACADA, o de una TORADA, o de una RECUA, o de una MULETADA, o de una CARNERADA (O BORREGADA), que son todos rebaños especiales cuyas respectivas unidades son especialidades diversas del *animal unidad* (cerdo, vaca o buey, toro, asno, mula, carnero, cordero o borrego).

3. Unidades - conjuntos. Generalidad de la noción de conjunto. — Las unidades pueden, a su vez, ser colecciones. Así, un REGIMIENTO es un conjunto de *batallones;* cada BATALLÓN un conjunto de *compañías*. En uno y otro caso las unidades son a su vez conjuntos, ya que una COMPAÑÍA es un conjunto de soldados.

Se consideran también conjunto de unidades inmateriales, que existen no en el espacio sino en el tiempo; es lo que sucede cuando se dice que una SEMANA, un MES, son conjuntos especiales de *días;* que un SIGLO es un conjunto especial de *años*. Y cabría hacer más distingos al respecto.

4. La noción de orden. — En algunos conjuntos desempeña un papel importante la noción de **orden.** Así, en un diccionario, considerado como un conjunto de **palabras escritas,** es el *orden alfabético*.

En la frase: «La aritmética es la ciencia de los números» — que es también un conjunto de palabras, — el orden, es aquel

(*) Por ejemplo, si en una jaula reunimos un lobo con un cordero, aquel devorará a éste y existiendo así una unidad del conjunto de los animales reunidos que pierde su individualidad, no resulta la aritmética aplicable al caso.

en que están ellas escritas, pues una alteración de ese orden podría cambiar el significado de la frase y aun anularlo.

En general, cuando se enuncian los objetos o unidades de una colección, no hay necesidad de hacerlo siguiendo un determinado orden; y lo mismo es, por ejemplo, decir un *cuaderno*, un *libro* y un *tintero;* que: un *libro*, un *tintero* y un *cuaderno;* o que un *tintero*, un *libro* y un *cuaderno*, etc. En otros casos puede, sin ser ello estrictamente indispensable, haber conveniencia en seguir un orden. Si, v. gr., se quisiese enunciar un conjunto de niños, podría convenir hacerlo por orden de edad, o de estatura.

5. **La serie natural de los números enteros.** — Una colección de unidades puede destruirse retirando de ella — ya sea efectivamente, ya con la mente —, una después de otra, y al acaso, todas las unidades que la componen; e inversamente puede reconstruirse, tomando, real o mentalmente, al acaso, una (*) de las unidades así separadas, luego otra, y así siguiendo hasta juntarlas todas.

Haciendo esta operación tendremos, al principio, ninguna unidad, se dice **cero** unidad; luego **una** (**) unidad; luego *una* y *una* unidades; luego *una* y *una* y *una* unidades, etc.

En vez de *una* y *una*, se dice **dos**; en vez de *una* y *una* y *una*, se dice **tres**; luego se dice **cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez**... Para no tener que crear indefinidamente nuevos nombres — que, por otra parte, ninguna memoria, por feliz que fuese, podría retener, aun limitándose a las necesidades de la vida usual — se ha ideado una manera de resolver esa dificultad. La expondremos en el capítulo siguiente.

6. Los vocablos así creados se llaman **números enteros** y escritos o considerados en el orden en que se les ha ido estableciendo, o sea en este orden:

cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco,...

constituyen lo que se llama la **serie natural de los números enteros**, que es evidentemente indefinida.

Limitada esta serie hasta un número cualquiera se obtiene un *conjunto ordenado de palabras.*

(*) El vocablo «una» es aquí, gramáticalmente, un artículo indeterminado y no un adjetivo numeral.

(**) Aquí «una» es un adjetivo numeral cardinal.

7. Comparación de conjuntos. — Consideremos dos colecciones cualesquiera; tomemos, al acaso, una unidad de una de ellas, y en la misma forma, una unidad de la otra. Juntemos estas dos unidades así separadas.

Repitamos luego esa misma operación tomando una nueva unidad, al acaso, del primer conjunto y otra del segundo, y juntemos esas dos unidades.

Así, continuando puede suceder una de estas dos cosas: o se agotan simultáneamente las dos colecciones, o una se agota antes que la otra.

En el primer caso, al retirar la última unidad de la primera colección, se retira también la última unidad de la segunda. Se dice entonces que las dos colecciones son *aritméticamente equivalentes* o *numéricamente iguales*.

En el segundo caso se dice que la colección que se agotó antes que la otra es *aritméticamente* (o *numéricamente*) **menor** que ésta; o, también, que la que no se agotó es *aritméticamente* (o *numéricamente*) **mayor** que la otra.

8. Cuando las colecciones son equivalentes puede establecerse entre sus unidades componentes una correspondencia **biuniforme**, de modo que, cuando se piensa en una unidad de una de las colecciones, este pensamiento evoque el de otra, bien determinada y única de la segunda; y recíprocamente, que el pensamiento de esta última unidad traiga a la mente el de la misma unidad previamente pensada en la primera. Se dice entonces que las colecciones son **coordinables** o que se corresponden **mutua** y **perfectamente**; y un objeto de una de las colecciones se dice ser *correspondiente* de aquel de la segunda cuyo pensamiento evoca.

En el ejemplo dado anteriormente, la correspondencia entre las unidades de una y otra colecciones fué decidida por el azar, pues a cada objeto de una colección correspondía aquel de la otra que salió por extracción, al acaso, y con quien se juntó. Pero, a veces, la correspondencia entre las unidades de dos colecciones, aritméticamente equivalentes, puede establecerse de otro modo.

Consideremos, por ejemplo, todos los pares de zapatos existentes en una zapatería. Podemos hacer un conjunto con los zapatos izquierdos y otro con los derechos.

Estos dos conjuntos son evidentemente equivalentes del punto de vista aritmético: se corresponden *mutua* y *perfectamente* de manera que a un zapato derecho corresponda, en la otra colección, el único zapato izquierdo con el que aquel formaba par, y recíprocamente. Fácilmente se comprueba que si dos colecciones son equivalentes a una tercera, son equivalentes entre sí. El puente de paso es dicha tercera colección.

9. El acto de contar. Propiedad invariante del número entero. — Consideremos una colección de unidades cualquiera, y la colección de vocablos constituída por la serie natural de los números enteros, limitada convenientemente (n.° 5). «De buen grado cabe imaginar — y las comprobaciones hechas en ciertas poblaciones primitivas parecen confirmar esa hipótesis — que, por un mecanismo análogo al expuesto en el parágrafo anterior, los hombres, cuando quisieron comparar dos colecciones, cayeron en la *operación de contar*, es decir, de comparar las dos colecciones con una colección tipo, o sea precisamente con esa colección ordenada de palabras que constituye la serie natural de los números enteros. Para **contar** o **enumerar** se adscribe, o se hace corresponder mentalmente, a cada unidad de la colección a contar, uno de los vocablos de la serie natural en cuestión en el orden en que están escritos, empezando por el número *uno*; el último número pronunciado al agotar la colección dada, se dice ser el **número** de unidades de la colección. *Ese número es considerado como el resultado de la operación experimental de la enunciación, porque constituye la información completa de dicha operación.* Un resultado experimental permite dispensarse de otras experiencias; las reglas de las cuatro operaciones nos dispensan de las operaciones de la enumeración para ciertos conjuntos que puede formarse a partir de conjuntos ya enumerados.

Con motivo de esas reglas se comprueban hechos diversos enunciados ordinariamente como proposiciones a demostrar, pero cuyas pretendidas demostraciones no son en realidad otra cosa que verificaciones experimentales fundadas especialmente en esta comprobación general que: **El número de unidades de un conjunto es independiente del orden que se ha seguido al contarlas** (*).

Esta última proposición es lo que se llama la «Propiedad invariante del número entero».

(*) H. Lebesgue. *Sur la Mesure des Grandeurs.* § 1 (1933).

10. Relación. Valor de una colección. — Conociendo el número que afecta una colección y a su unidad, se conoce la colección. Por eso se dice, a veces, que el número define la **relación** de la colección respecto de su unidad.

La reunión del número que corresponde a una colección y de la definición de las unidades componentes, se llama el **valor de la colección.**

11. Números cardinales y números ordinales. — Como puede observarse, el número recién considerado responde a la pregunta ¿cuánto? o ¿cuántas veces?

Se llama **número cardinal** para diferenciarlo del **número ordinal,** el cual expresa el *lugar que ocupa un objeto en una colección ordenada.* Los números ordinales se enuncian así: **primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo, undécimo, duodécimo, décimotercero,** etc.

Existe una regla gramatical para continuar componiendo esos nombres en base a los números cardinales correspondientes (véase n.° 30, pág. 18).

Cuando se usa simplemente la palabra «número», sin otro calificativo, se entiende que es el número cardinal.

12. Observemos, para terminar, que la formación de una colección por el agregado, uno a uno, de sus unidades componentes, da lugar a una serie de colecciones parciales sucesivamente de una, dos, tres,... unidades hasta obtener la colección considerada. Cada una de esas colecciones tiene *una unidad más* que la anterior y *una unidad menos que la siguiente,* empezando por aquella a quien corresponde el número *uno.* La serie de colecciones parciales, así encaradas, está, pues, ordenada.

13. Conjuntos de conjuntos. Composición y descomposición de conjuntos. — Se concibe sin dificultad que varios conjuntos de mismas unidades puedan reunirse en uno único. Y análogamente, un conjunto dado puede descomponerse en varios parciales de mismas unidades.

Así un conjunto de niños, otro de mujeres y otro de hombres, que tiene todos una unidad común, *la persona,* pueden reunirse en un mismo local, constituyendo así un conjunto único de *personas.* Y viceversa, este último puede descomponerse en un conjunto parcial de niños, otro de mujeres y otro de hombres; o de cualquier otra manera, juntando varias de sus unidades y considerando que ellas forman un conjunto parcial; luego reuniendo varias de las unidades restantes del conjunto inicial y considerando que éstas constituyen un nuevo conjunto parcial; y así siguiendo.

EJERCICIOS

1. Coordinar el conjunto *casa, campo y ciudad* con el conjunto *hombre, mujer* y *niño.*

2. Si dos colecciones son coordinables y a cada una de ellas se agrega o quita una unidad, las nuevas colecciones siguen siendo coordinables. Y viceversa.

3. Si una colección es coordinable con otra y parte de ella lo es con parte de la otra, el *complemento* de la primera es coordinable con el *complemento* de la segunda.

4. Si una colección es parte común de otras dos colecciones coordinables, los complementos de estas últimas son coordinables.

CAPÍTULO II

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

1) Decimal

14. Objeto. — Los *sistemas de numeración* tienen por objeto designar los números cardinales enteros usuales, ya oralmente, ya con signos especiales escritos llamados **cifras.** Con relativamente pocas palabras cuyas composiciones indican, en lo posible, el lugar que el número designado ocupa en la serie natural, y con apenas unos pocos signos, se puede nombrar y representar en la escritura cualquier número.

Exponemos a continuación el **sistema decimal,** de uso general.

15. Sistema decimal. — Como indicamos en el n.º 5, los primeros números [dejando de lado a **cero** cuya cifra (*) es 0], se designan así:

uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve,

a los que se hace corresponder las cifras:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Estos constituyen los **números dígitos** (**).

El número que sigue, se designa oralmente diciendo **diez.**

Todos los sistemas de numeración, para no tener que crear muchos nombres nuevos y no hacer uso de nuevas cifras en la escritura, recurren a las nociones de **unidades - conjuntos** (n.º 3) y de **conjuntos de conjuntos** (n.º 13). El sistema que nos ocupa lo hace a partir de *diez* y por eso se llama **decimal.**

Se dice también que *diez es la base de este sistema.*

16. Ley fundamental de agrupamiento. — Consideremos un conjunto cualquiera de unidades; llamaremos a estas últimas: **unida-**

(*) Precisamente la palabra *cifra* viene del árabe *céfer,* nombre propio de cero.

(**) Del latín *digitus,* que significa *dedo,* pues afectan colecciones que pueden *contarse con los dedos.*

des **simples** o de *primer orden*. Reunamos estas unidades simples en grupos de a diez. Llamaremos a cada uno de estos grupos *unidades de segundo orden* o **decenas**. Formemos así, con las unidades simples, tantas decenas como sea posible; quedará en general un remanente de unidades simples que no alcanzan a diez, y entonces la colección dada quedará reemplazada por una colección de *decenas* y una de *unidades* simples que no alcanza a una decena.

Operemos luego de idéntica manera con las *decenas* formando con ellas tantos grupos de diez o unidades de tercer orden o **centenas** como sea posible. La colección de las decenas queda, entonces, reemplazada por una de centenas y una de decenas que no alcanzan a una centena.

De esta manera, la colección inicial queda reemplazada, por una de *centenas*, una de *decenas* que no alcanzan a formar una centena, y una de *unidades simples* que no alcanza a formar una decena.

Operando después con las centenas, formaremos con ellas tantos grupos de diez o *unidades de cuarto orden* o **millares**, como sea posible, etc.

Y así siguiendo, llegará, evidentemente, un momento en que no se podrá continuar por no alcanzar a diez las *unidades - conjuntos* del orden más elevado hasta ese momento alcanzado; y la operación del agrupamiento quedará terminada.

17. Resulta así que *cualquier colección de unidades simples puede ser substituída por una colección de colecciones de unidades de diversos órdenes a las que corresponden uno de los números dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), todos los cuales pueden ser nulos salvo el que afecta la colección de grado más elevado, el cual es por lo menos igual a 1.*

La forma como se ha hecho el agrupamiento pone en evidencia que, conjuntos equivalentes, dan lugar a idéntico agrupamiento, y que conjuntos desiguales, a desiguales agrupamientos.

18. Numeración oral. — Los nombres de los números que siguen a diez se establecen de la siguiente manera:

a) **El conjunto no contiene unidades del orden superior al tercero, es decir, es inferior a un millar.**

Para designarlos se enuncian los dígitos que afectan respectivamente las centenas, decenas y unidades simples, seguidos: el primero de esos nombres, de la palabra **cientos**, y el segundo, del sufijo **enta** acomodado eufónicamente, como se indica más adelante.

Si uno de los dígitos en cuestión es cero, no se le nombra, ni tampoco se nombra la unidad correspondiente.

Si el dígito de las centenas es 1 se dice simplemente **cien** o **ciento.**

Excepcionalmente se usan nombres especiales como se indica a continuación:

diez;
diez y uno, se dice **once;**
diez y dos, se dice **doce;**
diez y tres, se dice **trece;**
diez y cuatro, se dice **catorce;**
diez y cinco, se dice **quince;**
diez y seis;
diez y siete;
diez y ocho;
diez y nueve;
dos enta, se dice **veinte;**
veinte y uno;
veinte y dos;
. . . . .
veinte y nueve;
tres enta, se dice **treinta;**
treinta y uno;
. . . . .
treinta y nueve;
cuatro enta, se dice **cuarenta;**
cuarenta y uno;
. . . . .
cuarenta y nueve;
cinco enta, se dice **cincuenta;**
cincuenta y uno;
. . . . .
cincuenta y nueve;
seis enta, se dice **sesenta;**
sesenta y uno;
. . . . .
sesenta y nueve;

siete enta, se dice **setenta**;
setenta y uno;
.....
setenta y nueve;
ocho enta, se dice **ochenta**;
ochenta y uno;
.....
ochenta y nueve;
nueve enta, se dice **noventa**;
noventa y uno;
.....
noventa y nueve;
cien;
ciento uno;
.....
ciento noventa y nueve;
doscientos o **docientos**;
doscientos uno;
.....
doscientos noventa y nueve;
trescientos o **trecientos**;
trescientos uno;
.....
trescientos noventa y nueve;
cuatrocientos;
cuatrocientos uno;
.....
cuatrocientos noventa y nueve;
cinco cientos, se dice **quinientos**;
quinientos uno;
.....
quinientos noventa y nueve;
seiscientos;
seiscientos uno;
.....
seiscientos noventa y nueve;
siete cientos, se dice **setecientos**;
.....
setecientos noventa y nueve;
ochocientos;
.....

ochocientos noventa y nueve;
nuevecientos o novecientos;
. . . . .
novecientos noventa y nueve;
mil.

19. b) **El conjunto es mayor que un millar.**

Si una unidad de cuarto orden se llama un **millar**, nada impide considerar esa unidad, *millar,* como una nueva unidad simple, entonces la unidad de quinto orden que sigue podrá llamarse una *decena de millar* (unidad de 5.° orden) y la siguiente una *centena de millar* (unidad de 6.° orden).

De esta manera, para numerar una colección en base al *millar* siendo la colección inferior a *mil millares* (unidad de 7.° orden), bastarán también *tres dígitos,* uno que indique el número de *centenas de millares,* otro el de *decenas de millares* y otro los *millares simples.*

De igual manera, si *mil millares* (unidad de 7.° orden), se designa con el nombre de **millón,** la de octavo orden podrá llamarse *decena de millón,* y la de 9.° orden *centena de millón,* entonces, una colección, por ejemplo, de cinco unidades de 9.° orden, unida con otra de siete de 8.° orden y otra de 3 unidades de 7.° orden podrá enunciarse diciendo *quinientos setenta y tres millones,* etc.

Esta observación permite dar fácilmente nombres a los números después del millar.

Para ello se hace una nueva agrupación de unidades en la siguiente forma:

Las unidades de 1.°, 2.° y 3.° orden, constituyen las *unidades, decenas y centenas de la* **primera clase** considerada como una nueva unidad simple.

Las unidades de 4.°, 5.° y 6.° orden constituyen las *unidades, decenas y centenas de una unidad de* **segunda clase** o *millar.*

Las unidades de 7.°, 8.° y 9.° orden, constituyen las *unidades, decenas y centenas de* **millón** o *unidad de* **tercera clase.**

Las unidades de 10.°, 11.° y 12.° orden, constituyen las *unidades, decenas y centenas de* **billones** o *unidad de* **cuarta clase.**

Y así tendremos el **trillón** o unidad de quinta clase; el **cuatrillón,** unidad de sexta clase; el **quintillón,** etc.

Raras veces hay que ir más allá.

20. Según ésto, la regla para designar los números que siguen a mil, es la siguiente:

Se descompone la colección correspondiente en grupos de unidades principales de las diversas clases (millares, millones, billones, trillones, etc.), *y se enuncian los números* (que son inferiores a mil), *sucesivamente de cada una de esas unidades de diversas clases empezando por las más altas; y se hace seguir esas enunciaciones del nombre de la unidad principal de la clase correspondiente, suprimiendo la enunciación del número y de la unidad relativos a una clase cualquiera, si dicho número que la afecta es cero.*

Supongamos, por ejemplo, que debemos numerar una colección que tiene:

dos	unidades	de	primer	orden	(unidades simples)
cinco	»	»	2.º	»	(decenas)
cuatro	»	»	3.º	»	(centenas)
cero	»	»	4.º	»	(millares)
nueve	»	»	5.º	»	
cinco	»	»	6.º	»	
cuatro	»	»	7.º	»	(millones)
ocho	»	»	8.º	»	
dos	»	»	9.º	»	
ocho	»	»	10.º	»	(billones)
una	»	»	11.º	»	
ocho	»	»	12.º	»	
dos	»	»	13.º	»	(trillones)
ocho	»	»	14.º	»	
una	»	»	15.º	»	
siete	»	»	16.º	»	(cuatrillones)
dos	»	»	17.º	»	

Agrupadas por clases obtendremos:

cuatrocientas cincuenta y dos	unidades	de	primera	clase	
quinientas noventa	»	»	segunda	»	(miles)
doscientas ochenta y cuatro	»	»	tercera	»	(millones)
ochocientos diez y ocho	»	»	cuarta	»	(billones)
ciento ochenta y dos	»	»	quinta	»	(trillones)
veinte y siete	»	»	sexta	»	(cuatrillones)

El número se enumerará:

Veinte y siete cuatrillones, ciento ochenta y dos trillones, ochocientos diez y ocho billones, doscientos ochenta y cuatro millones, quinientos noventa mil cuatrocientos cincuenta y dos.

21. **Numeración escrita.** — Para representar en la escritura todos los números que siguen a *nueve* utilizando exclusivamente las cifras

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

se hace la siguiente convención:

Cuando varias cifras están escritas las unas al lado de las otras en fila horizontal, la primera cifra de la derecha expresará simplemente el número que representaría escrita aisladamente; la cifra que le sigue hacia la izquierda expresará tantas decenas como unidades simples expresaría si estuviese escrita aisladamente; de igual manera, la que le sigue hacia la izquierda expresará tantas centenas como unidades simples expresaría escrita aisladamente, y así siguiendo.

Finalmente, el conjunto de todas las cifras — (conjunto que llamaremos **guarismo**) — *expresa el conjunto total de todos los conjuntos* (n.° **13**, pág. 6 y n.° **17**, pág. 9) *que cada cifra expresa separadamente de acuerdo con lo recién convenido.*

Ejemplo, la agrupación de cifras, o sea, el guarismo

37.415.926

significa un conjunto de 6 unidades simples, 2 decenas, 9 centenas, 5 millares, 1 decena de millar, 4 centenas de millar, 7 millones y 3 decenas de millones.

22. Según esta convención, el símbolo 10 indica *diez;* el símbolo 100, *cien;* 1000, *mil;* 10000, *diez mil;* 100000, *cien mil;* 1000000, *un millón;* 10000000, *diez millones;* 100000000, *cien millones;* 1000000000, *un billón,* etc.

23. Y de esta misma convención resulta también que: para representar con cifras el número relativo a una colección cualquiera, es decir, para hallar su guarismo correspondiente, se transforma la colección en grupos de unidades de los diversos órdenes y se escribe de izquierda a derecha, empezando por los del orden más elevado, las cifras que corresponden a los grupos de las unidades de los distintos órdenes.

Hay que tener cuidado de hacer corresponder la cifra 0 a un grupo de unidades de determinado orden que faltase.

Por ejemplo, el número *trescientos noventa millones cuatrocientos veinte y siete mil doscientes catorce,* tiene el siguiente guarismo:

390427214.

24. Como de una manera única puede una colección ser transformada en una agrupación de unidades de los diversos órdenes del sistema decimal, resulta que, a una colección dada, le corresponde un único guarismo (n.° 17); y viceversa.

25. Enunciar un número representado con cifras. — a) Si el guarismo no tiene más de tres cifras, se enuncian esas cifras una después de la otra, sucesivamente de izquierda a derecha, haciendo, para las dos primeras cifras, seguir al nombre de cada una, el de las unidades del orden que representa o sea: *cien* o *cientos* para la tercera cifra de la izquierda (3.er orden), y *enta* para la segunda cifra (2.° orden), teniendo en cuenta las excepciones y eufonías. (Véanse los términos en el n.° 18).

Así, 8 se lee *ocho;* 49 se lee *cuarenta y nueve;* 203 se lee *doscientos tres.*

26. b) Si el guarismo tiene más de tres cifras, se separa las cifras componentes en secciones, de tres en tres, empezando por la derecha, de modo que la primera sección de la izquierda puede tener una, dos o tres cifras.

Empezando luego por la izquierda, se enuncia sucesivamente y de acuerdo con el caso precedente los números, inferiores a *mil,* constituídos por las diversas secciones, haciendo seguir cada una de ellas del nombre de los unidades principales de la clase que representa. No se enuncia el número, ni el nombre de las unidades principales de una clase, si su lugar está marcado por una sección de tres ceros.

Por ejemplo, para leer el número cuyo guarismo es:

27182818284590452

haremos la siguiente distribución mental:

cuatrillones	trillones	billones	millones	miles	
27.	182.	818.	284.	590.	452

que se leerá, como se ha dicho en la pág. 14:

Veinte y siete cuatrillones, ciento ochenta y dos trillones, ocho-

cientos diez y ocho billones, doscientos ochenta y cuatro millones, quinientos noventa mil, cuatrocientos cincuenta y dos.

El guarismo:

1.001.001

se leerá: *un millón, mil uno.*

En la escritura, para facilitar la lectura, se acostumbra dejar un pequeño intervalo o un punto entre las secciones, como hemos hecho en los dos ejemplos recién dados.

27. **Resumen.** — De lo expuesto más arriba se desprende:

a) Que toda cifra colocada a la izquierda de otra representa una unidad de un orden inmediatamente superior a ésta. Así, en 182, 8 representa decenas; 1, centenas.

b) Que toda cifra que acompaña a otras, en la forma indicada, tiene un significado diferente del que tiene cuando está aislada. El significado que tiene cuando está aislada se llama su **valor absoluto**, mientras que el otro se llama su **valor relativo.** Así, en 284, el 8 representa ocho decenas o sea ochenta unidades simples, mientras que, aisladamente escrito, expresa ocho unidades simples.

c) Si se agrega un cero a la izquierda de una cifra, el valor relativo de esa cifra pasa a un orden inmediatamente superior. Así, sea el guarismo 45 cifra que, refiriéndose a una colección, indica que ésta tiene 45 unidades simples, mientras que 450, en las mismas condiciones, indica 45 decenas.

d) *Cero* agregado a la izquierda de una cifra no modifica el significado de ésta. Así, 3, ó 03 tienen el significado: *tres.*

e) La cifra *cero,* cualquiera que sea su lugar en un guarismo, representa siempre *cero.* Las otras cifras, que representan números distintos según el lugar que ocupan en el guarismo, se llaman **cifras significativas**; de modo que un número escrito con cifras puede considerarse como afectando al conjunto de los conjuntos (n.º 13, pág. 6), expresados por los valores relativos de cada una de sus cifras significativas.

Así, el guarismo 31416 puede considerarse como expresando el conjunto de los conjuntos de tres decenas de millares, de un millar, de cuatro centenas, de una decena y de seis unidades simples.

f) Para conocer si el conjunto que, contado, está expresado con un determinado guarismo, es mayor (n.º 7, pág. 4) que otro expresado en la misma forma, se cuentan las cifras de cada uno de esos guarismos; el que tiene más cifras es, desde luego, el que expresa el conjunto mayor; si tienen igual número de cifras, basta comparar una a una la cifra de la izquierda de cada expresión; la cifra que tiene un rango más avanzado en la serie 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se refiere, evidentemente, a un conjunto mayor. Si fueran iguales esas cifras de la izquierda, se pasaría a comparar las que le siguen hacia la derecha, etc.

28. Sistema de numeración llamado «largo». — El sistema de numeración decimal que se ha expuesto se llama, a veces, «corto» para distinguirlo de una variante, usada especialmente por los sajones, y que se llama *«largo»*. En este último, después del millón, las unidades de orden superior siguen de la siguiente manera: *millón* (unidad de orden 7.°); *decena de millón* (orden 8.°); *centena de millón* (orden 9.°); *millar de millón* (orden 10.°); *centena de millón* (orden 11.°); *millar de millón* (orden 12.°); *billón* (orden 13.°); *decena de billón* (orden 14); ...; *millar de billón* (orden 16.°); ...; *centena de millar de billón* (orden 18.°); ...; *trillón* (orden 20.°); ...; *centena de millar de trillón* (orden 24.°); *cuatrillón* (orden 25.°); ...

Existe, por consiguiente, una periodicidad constituída por un grupo de seis unidades que se repiten empezando por las de primer orden hasta la centena de millar que es de sexto orden.

Esto equivale a decir que se reúnen las *clases* del otro sistema, de dos en dos, para constituir las *secciones*. El conjunto de las dos primeras clases constituye la *sección de las unidades simples;* el conjunto de la tercera y cuarta clase, la *sección de los millones;* el conjunto de las dos siguientes clases, la *sección de los billones,* y así siguiendo, la *sección de los trillones,* etc.

El número correspondiente a un guarismo se lee, como hemos visto, enunciando sucesivamente los números inferiores a un millón, correspondientes a los grupos de unidades de las distintas secciones, empezando por la más elevada y haciendo seguir a ese número el nombre de la unidad principal, saltando las constituídas por ceros, si los hay.

Por eso es que, en la escritura con cifras, conviene separar las cifras en grupos de a seis a partir de la derecha. Por ej.: el número

167043267847654312

que, en el sistema corto, se enunciaría de la siguiente manera:

cuatrillones	trillones	billones	millones	miles	
167.	043.	267.	847.	654.	312

ciento sesenta y siete CUATRILLONES, *cuarenta y tres* TRILLONES, *doscientos sesenta y siete* BILLONES, *ochocientos cuarenta y siete* MILLONES, *seiscientos cincuenta y cuatro* MIL, *trescientos doce*; y en el sistema largo se expresaría así:

billones millones
167043.267847.654312

ciento sesenta y siete mil cuarenta y tres BILLONES, *doscientos sesenta y siete mil ochocientos cuarenta y siete* MILLONES, *seiscientos cincuenta y cuatro mil trescientos doce.*

Así pues que un *billón* del sistema «largo» equivale a un millón de millones o sea a un *trillón* del sistema «corto».

El sistema corto parece preferible y es más usado. De todas maneras, como pocas veces hay que usar conjuntos de más de un millón de unidades simples y siendo así que, hasta ese límite, los dos sistemas son equivalentes, resulta que no se nota en la práctica dificultades al respecto.

29. *En Francia*, durante los siglos XI y XII se llamaba también *un billón* a *un millón de millones*. En el transcurso del siglo XVIII ese vocablo *billón* se cambió en *milliardo*, palabra creada a mediados del siglo XVI para designar *mil millones*.

30. **Número ordinal.** — Para expresar los doce primeros números ordinales se dice, según vimos:

primero o **primo, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo, undécimo, duodécimo.**

Se dice después:

décimotercero, décimocuarto, décimoquinto, ..., décimonoveno, vigésimo, vigésimo primero, ..., vigésimo noveno, trigésimo, trigésimo primero, ..., trigésimo noveno, cuadragésimo, ..., quin-

cuagésimo, ..., sexagésimo, ..., septuagésimo, ..., octogésimo, ..., nonagésimo, ..., nonagésimo noveno, centésimo, centésimo primero, ..., centésimo undésimo, ..., ducentésimo, ..., tricentésimo, ..., cuadringentésimo, ..., quigentésimo, ..., seiscentésimo, ..., septingentésimo, ..., octingentésimo, ..., nonigentésimo, ..., milésimo, ..., millonésimo, ...

EJERCICIOS

5. Expresar verbalmente los números:

99, 909, 191, 919.
111, 1101, 1011, 1111, 10111, 11011, 11110.
3164, 6314, 1346, 4163.
1000001, 1001001, 111001, 1000010, 1010101.
11111111, 10000001, 111000001, 101010101.
46000530004, 9900009990090.
2843654000068005024376299 6.

En el sistema corto y en el largo.

6. Hallar los guarismos de:
Veinte y cinco millones, sesenta mil cuatro unidades.
Cinco trillones trescientos millones setecientos mil cuatro unidades.
Sesenta y tres billones setecientos cuarenta mil cuatrocientos seis millones doscientos un mil treinta y cinco unidades (expresadas en el sistema "largo").

7. Cuáles son los mayores y menores números cuyos guarismos tienen cinco cifras.

8. Un número tiene 18 cifras, cuál es el orden de sus unidades más altas, en el sistema corto y en el largo.

9. Cuántas cifras tiene un número cuyas más altas unidades son decenas de trillones en el sistema largo.

10. Qué cambio experimenta un número cuando se introducen uno o varios ceros entre sus cifras. Analizar diversos casos.

11. Cuántos caracteres de imprenta son necesarios para numerar todas las páginas de un libro que tiene 1625, suponiendo que se utiliza cada carácter sólo una vez.

12. Cuántas páginas tiene un diccionario cuya compaginación ha necesitado el empleo de 10.681 caracteres.

2) Sistema de numeración romana

31. Su uso. Símbolos que emplea. — Esta numeración se emplea especialmente para las inscripciones funerarias, arquitectónicas y artísticas en general; para consignar fechas memorables, para designar los capítulos de un libro, los personajes de una dinastía o lista de soberanos, etc.

Utiliza como símbolos las siete mayúsculas M, D, C, L, X, V, I, que corresponden a los números mil, quinientos, cien, cincuenta, diez, cinco y uno, respectivamente, de la numeración decimal.

Para los números restantes se procede así:

1.° Se conviene, desde luego, que la repetición de una mayúscula significa juntar las colecciones que ellas numeran, pero las mayúsculas V, L y D no se repiten, y de las restantes, salvo la M, tampoco se acostumbra repetirlas más de tres veces. Según esto, se tiene que:

II	corresponde a		2	XX	corresponde a		20
III	»	»	3	XXX	»	»	30
CC	»	»	200	MM	»	»	2000
CCC	»	»	300	MMM	»	»	3000
				MMMM	»	»	4000

2.° Se conviene también en que cualquiera de las mayúsculas utilizadas en esta numeración, colocada delante de otra que corresponde a un menor número de unidades, importa reunir las unidades de los dos conjuntos que separadamente numerarían. Así:

MD	corresponde a		1500
MDC	»	»	1600
MDCC	»	»	1700
MDCCC	»	»	1800
MDCCCL	»	»	1850
MDCCCLX	»	»	1860
MDCCCLXX	»	»	1870
MDCCCLXXX	»	»	1880
MDCCCLXXXV	»	»	1885
MDCCCLXXXVI	»	»	1886
MDCCCLXXXVII	»	»	1887
MDCCCLXXXVIII	»	»	1888
MMMDCCCLXXXVIII	»	»	3888

3.° Se conviene igualmente que cualquiera de las referidas mayúsculas colocada delante de otra que corresponde a un mayor número de unidades importe retirar del conjunto, que esta última mayúscula numera, tantas unidades como numera la primera. Así:

IV	corresponde	a	4 (*)	[V (cinco) menos I (uno)]
IX	»	»	9	[X (diez) menos I (uno)]
XL	»	»	40	[L (cincuenta) menos X (diez)]
XC	»	»	90	[C (cien) menos X (diez)]
CD	»	»	400	[D (quinientos) menos C (cien)]
CM	»	»	900	[M (mil) menos C (cien)]

4.° Una raya horizontal colocada encima de una mayúscula, o de un grupo de mayúsculas, representa el número de unidades de *mil* conjuntos, como el que esa mayúscula o ese grupo de mayúsculas numeran aisladamente. Así:

$\overline{\mathrm{I}}$	significa	igual	que	M
$\overline{\mathrm{II}}$	»	»	»	MM
$\overline{\mathrm{V}}$	»	»	»	MMMMM
$\overline{\mathrm{X}}$	»			10 000
$\overline{\mathrm{L}}$	»			50 000
$\overline{\overline{\overline{\mathrm{I}}}}$	»			1 000 000 000
$\overline{\overline{\overline{\mathrm{X}}}}$	»			10 000 000 000
$\overline{\overline{\overline{\mathrm{C}}}}$	»			100 000 000 000

32. Otra manera de expresar 500 y 1000. En vez de la mayúscula D, se usa a veces el símbolo IↃ. Mil se indica también, en vez de M, con CIↃ. Cada Ↄ escrita a la derecha de IↃ significa diez veces más unidades. Así:

IↃ	significa	500
IↃↃ	»	5.000
IↃↃↃ	»	50.000

Cada Ↄ puesta a la derecha de CIↃ juntamente con una C puesta delante, significa diez veces más unidades. Así:

CCIↃↃ	significa	10000
CCCIↃↃↃ	»	100000
CCCCIↃↃↃↃ	»	1000000

De modo que *mil* puede, en este sistema romano, representarse tanto por M, como por CIↃ, como por $\overline{\mathrm{I}}$.

(*) En los cuadrantes de los relojes, 4 es frecuentemente indicado por IIII, y no por IV; pero, en general, se utiliza la representación que exige menos caracteres.

2.000 puede representarse, ya con MM o con CIↃCIↃ o con $\overline{\mathrm{II}}$.
5.000 puede expresarse con MMMMM o con IↃↃ o con $\overline{\mathrm{V}}$.
10.000 puede igualmente escribirse CCIↃↃ o $\overline{\mathrm{X}}$.
50.000 puede expresarse con IↃↃↃ o con $\overline{\mathrm{L}}$.

33. En la compaginación de los prefacios de los libros, y a veces en la designación de las fechas, se utilizan minúsculas en vez de mayúsculas. En este sistema, si un número debe terminar en i se cambia ésta en j. Así se escribe cij por 102; mcmxxxvij por 1937.

EJERCICIOS

Escribir en cifras ordinarias (arábigas), los siguientes números escritos con caracteres romanos:

13. CDXCIX, DCCXXI, CDXXIX,
$\overline{\mathrm{X}}\mathrm{MCCLXXXVI}$, $\overline{\mathrm{X}}\mathrm{MMMDCXCIV}$,
$\overline{\mathrm{LIX}}\mathrm{CDLII}$, $\overline{\mathrm{XCIX}}\mathrm{CDXIX}$,
$\overline{\mathrm{MDLXVII}}\mathrm{DCCCXL}$, $\overline{\mathrm{MMMCDLXXVI}}\mathrm{DXXI}$.

14. mxmiij, mdccix.

15. Escribir con caracteres romanos los siguientes gaurismos:

3050, 3149, 2139, 3273, 2768,
67241, 40069, 98762, 45798, 99999,
560749, 3651109, 499904.

CAPÍTULO III

LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES

1. — La Adición.

34. Definiciones. — En lo que llevamos expuesto hemos tenido ocasión, especialmente en el n.º 13 (pág. 6), de hablar de la reunión de varias colecciones de unidades equivalentes, en una única. Esta operación se llama **adición**; la colección resultante se dice ser la **suma** de las colecciones parciales reunidas, las cuales se llaman los **sumandos** de la suma. Se dice también que las colecciones se han **adicionado** o **sumado.**

Todo lo anterior supone, desde luego, que la operación es, práctica o teóricamente, realizable.

35. Por lo demás se sobreentiende también que cada una de las unidades de las colecciones sumadas conserva su individualidades en la suma (*).

36. De la definición misma se deduce que la colección, suma de otras, tiene más unidades que cada una de las colecciones sumandos; y, por consiguiente, que cada una de las colecciones parciales es aritméticamente menor, o sea, tiene menos unidades que la colección suma.

37. Signos y convenciones. — De lo expuesto en el n.º 5 (pág. 3), se desprende que una colección cualquiera puede considerarse como la suma de sus unidades componentes. Los conjuntos parciales de una, dos, tres,... unidades que así viene obteniéndose hasta constituir la colección dada, son tales que cada una es mayor que la precedente y menor que la siguiente.

38. Se conviene para abreviar el lenguaje, suprimir la expresión de la unidad y escribir convencionalmente:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \dots$$

(*) Por ejemplo, si se reuniera en una jaula común los pájaros encerrados en varias jaulas, podría suceder que algunos devorasen a otros.

El signo $<$ se lee **«menor que»**.

O también se escribe: $\ldots > 5 > 4 > 3 > 2 > 1 > 0$.

El signo $>$ se lee **«mayor que»**.

Sea una colección de tres unidades y otra de cinco, adicionándole obtenemos una colección suma que tiene ocho unidades.

Prescindiendo, como se ha dicho, de la expresión de las unidades, escribiremos convencionalmente:

$$3 + 5 = 8.$$

El signo $+$ se lee **«más»**, el signo $=$ se lee **«igual»** y el total de lo escrito se llama una **«igualdad»**.

La parte de la igualdad a la izquierda del signo $=$ se llama el **primer miembro** de la igualdad; la que está a la derecha, el **segundo miembro** de la igualdad.

39. Para expresar correctamente, en palabras, la igualdad anterior, habría que decir como más arriba: *tres unidades sumadas con otras cinco dan ocho unidades,* suponiendo que todas las unidades sean equivalentes.

Para no hablar tanto se dice simplemente que

tres más cinco igual ocho

pero no debe olvidarse que *esa expresión es incorrecta* y que sólo se emplea en aras a la abreviación del lenguaje y sobreentendiéndose siempre la palabra *unidad* después de la expresión de cada número; recuérdese, en efecto, que por la definición dada en el n.º 5, los **números** son, para nosotros, simplemente **vocablos especiales** pertenecientes a una serie ordenada.

La adición — y lo mismo la substracción que estudiaremos luego —, supone la reunión o la descomposición de conjuntos de unidades *equivalentes;* por eso no es necesario referirse a estas mencionándolas a cada rato. Por eso, también, la especulación versa exclusivamente sobre el **acto de contar** y sobre el **número entero**, lo que permite, entonces, usar el lenguaje convencional, aunque impropio, que hemos indicado.

40. **Propiedades de la adición.** — a) De la propiedad invariante del número entero (n.º 9, pág. 5), resulta inmediatamente que el número que afecta la suma de varias colecciones es único, lo que se expresa diciendo que la adición es una operación *uniforme* o

unívoca. Esto equivale a decir que un *único número puede ser la suma de varios otros dados.* O también que: *si a dos números iguales se les suma un mismo número, los resultados son iguales.*

b) Esta misma propiedad invariante nos dice igualmente que la suma de varios conjuntos es siempre la misma, cualquiera sea el orden seguido para juntar los sumandos. Esta propiedad se expresa diciendo que la adición es una operación *conmutativa.*

Observemos, con tal motivo, que una colección puede considerarse como la suma de los grupos que es posible formar con sus unidades simples, siempre que sean tomadas todas ellas, sin excepción ni repetición, y cualquiera que sea el orden seguido para juntar los grupos en cuestión.

c) Además, y siempre por la misma causa, para sumar varios conjuntos, se puede, o reunirlos simultáneamente, o reunir primero dos de ellos, luego reunir el conjunto así obtenido con otro de los conjuntos restantes, y el conjunto parcial así obtenido juntarlo con otro, etc., y eso en cualquier orden y forma.

Sea, por ejemplo, sumar conjuntos de 2, 3, 6 unidades, respectivamente. Para efectuar esa operación puede reunirse primero los conjuntos de 2 y 3 unidades, con lo que se obtiene uno de 5 unidades, el cual puede, luego, juntarse con el de 6 unidades. O bien puede juntarse con el conjunto de 2 unidades, el conjunto constituído por la suma parcial de los de 3 y 6 unidades, etc.

Esto se expresa diciendo que

$$(2+4)+6=2+(4+6)=2+4+6.$$

El signo (...) se llama **paréntesis**; significa que, *ante todo,* debe efectuarse la o las operaciones encerradas por dichos paréntesis.

Puede extenderse esa propiedad de la adición, que se llama **asociativa,** al caso que se tuviese más sumandos; y se tiene así, simbólicamente

$$\{[(2+4)+6]+8\}+7=[2+(4+6)]+(8+7)$$
$$=(2+4+6)+(8+7)= \ldots =2+4+6+8+7.$$

Los signos [...] y {...} se llaman **listones** y **corchetes,** respectivamente, y expresan que, después de realizar las operaciones indicadas dentro de los paréntesis, deben efectuarse las indicaciones dentro de los listones, primero, y las de los corchetes después; y entonces la igualdades recién escritas significan que si deben adicionarse colecciones de 2, 4, 6, 8 y 7 unidades respectivamente, el mismo resultado daría sumar primeramente las de 2 y 4 unidades y, hecho ésto, juntar a la colección así obtenida, la de 6, y luego a la colección así obtenida, la de 8, o bien sumar primero las de 4 y 6, luego las de 8 y 7, y luego juntar la de 2 con las dos nuevas colecciones obtenidas; o también que juntar primero las colecciones de 2, 4 y 6 unidades, y luego juntar las de 8 y 7 y luego juntar las dos colecciones parciales así obtenidas; o que seguir cualquiera otro orden.

Cuando se tiene una expresión como la anterior

$$2 + 4 + 6 + 8 + 7$$

relativa a la suma de varias conjuntos, cada una de las expresiones numéricas relativas a los sumandos, o sea, aquí, los números 2, 4, 6, 8, 7, se llaman los **términos** de la suma.

d) Se desprende también que si una colección tiene más unidades que otra, la primera puede considerarse como la suma de dos colecciones; una de las cuales es la segunda (la de menos unidades), y de *otra única*.

41. Prescindiendo de las unidades, con el lenguaje abreviado condicional indicado más arriba (n.º 39), diremos: dado un número mayor que otro *sólo existe un número* que, sumado con el *menor*, da el *mayor*.

42. Por consiguiente, el único número que sumado con otro no lo altera, es el *número cero*. Se dice que *cero* es el módulo de la adición. Y también resulta que *sólo* puede ser nula la suma de dos o más números si éstos lo son *todos* simultáneamente. Y así también podemos escribir las igualdades siguientes en las que *a* designa un número entero cualquiera:

$$o + a \equiv a + o \quad ; \quad 0 + 0 = 0.$$

43. El uso de una letra alfabética para indicar un *número cualquiera* se hace para poder generalizar, pues, entonces, se entiende que puede substituirse la letra *a* por cualquier número escrito en el sistema de numeración adoptado.

El signo $\equiv$ significa que la igualdad que resultaría si se le substituyese por el signo $=$, se verificará cualquiera que sea el valor que se dé a la letra (o letras), que figuran en ella. La igualdad se llama entonces una **identidad** y el signo $\equiv$ se llama de *identidad*. $a + b = 5$ no es una identidad porque no se puede dar a a y b cualquier valor.

Puede dejarse constancia de que si a dos números iguales se les agrega un mismo número, los resultados son iguales.

Es por otra parte una consecuencia de que existe un solo número que pueda ser la suma de varios dados.

44. **Desigualdades.** — Si se tienen tres colecciones tales que la segunda sea mayor que la primera y la tercera mayor que la segunda, resulta de inmediato que la tercera es, con más razón, mayor que la primera.

Simbólicamente se escribe

$$8 > 4 \qquad 12 > 8 \therefore 12 > 4$$

El signo $\therefore$ se lee **«luego»** o «por tanto».

En general si

$$b > a \quad y \quad c > b \qquad \text{resulta } c > a.$$

Si los sumandos de una suma son respectivamente mayores que las de otra, es obvio que la primera suma es mayor que la segunda.

Por ejemplo, si 8, 7, 5 representan los números de unidades de una suma y 6, 4, 3 los de otra, claro está que

$$8 + 7 + 5 > 6 + 4 + 3.$$

Pueden escribirse, en vez de esta desigualdad, las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 8 + 7 + 5 &= (6 + 2) + (4 + 3) + (3 + 2) \\ &= 6 + 2 + 4 + 3 + 3 + 2 \\ &= (6 + 4 + 3) + (2 + 3 + 2). \end{aligned}$$

De modo que, para obtener la suma $(8 + 7 + 5)$ hay que adicionar $(2 + 3 + 2)$ a la otra suma $(6 + 4 + 3)$.

Naturalmente que el resultado sería el mismo si algunos de los sumandos de la primera suma fueran iguales a algunos de la segunda, con tal de que, de los restantes, ninguno fuera menor y hubiera por lo menos uno mayor.

45. Un caso particular se enuncia así (con el lenguaje convencional referido en el n.° 39):

Adicionando a un mismo número, dos números diferentes, las *sumas son también diferentes; la mayor corresponde al mayor número sumado.*

Puede también dejarse constancia de que: Si a dos números desiguales dispuestos en cierto orden de valor, se les agrega, respectivamente, dos números desiguales dispuestos en el mismo orden de valor que aquéllos, los resultados son desiguales y dispuestos siempre en el mismo orden de valor.

Así, si

$$3 < 5 \quad \text{y} \quad 7 < 8,$$

se tiene

$$3 + 7 < 5 + 8,$$

pues

$$3 + 2 = 5$$

$$7 + 1 = 8$$

$$3 + 2 + 7 + 1 = 5 + 8$$

$$\therefore \quad (3 + 7) + (2 + 1) = 5 + 8 \qquad (\text{n.}^{\circ}\ 40)$$

$$\therefore \quad 3 + 7 < 5 + 8 \qquad (\text{n.}^{\circ}\ 36)$$

46. Práctica de la adición en el sistema de numeración decimal. — Insistiremos una vez más en observar que, para abreviar el lenguaje, hablaremos a menudo de *sumar números* a pesar de ser ello enteramente incorrecto. Que cuando así diremos, debe entenderse que deben sumarse las colecciones que tienen esos números de unidades. Igualmente cuando se use la frase *sumar cifras* o *sumar un número con una cifra* o *con un guarismo* (n.° 21, pág. 14), se entiende sumar, de acuerdo con la anterior convención, los números que esas cifras representan o los números con los que las cifras o los guarismos representan.

Esto sentado de una vez por todas, vamos a considerar la práctica de la adición en el sistema decimal.

a) **Suma de un dígito con un guarismo terminado en cero.**

Sea, por ejemplo, sumar cinco con 320 ó 320 con 5. Basta reemplazar el 0 del guarismo por la cifra 5. Se obtiene 325; y efectivamente, de acuerdo con lo establecido en el n.° 27 b) pág. 16, se tiene que

$$325 = 320 + 5$$

Inútil repetir que la suma de un número con 0 no lo altera.

b) **Suma de varios guarismos terminados en ceros.**

Sea, v. gr., sumar 240 con 5400, con 620 y con 70.

Expresando los conjuntos correspondientes con la unidad *decena*, la operación consiste, en definitiva, en sumar

24 decenas con 540 decenas, con 62 decenas y con 7 decenas.

La suma buscada es (24 + 540 + 62 + 7) decenas, de modo que para expresarla en unidades simples, bastará, según las conversaciones hechas, agregar a la cifra que da la suma de las decenas en cuestión, un cero a la derecha. Resulta así que para resolver el problema propuesto puede suprimirse el cero con que terminan todos los guarismos sumandos, y una vez efectuada la suma sin ese cero, agregarlo a la derecha del guarismo obtenido.

c) **Suma de dos dígitos.**

Sea, por ejemplo, sumar dos colecciones, una de 4 unidades y otra de tres unidades.

Se puede decir

$$4+3=4+1+1+1$$

$$4+1=5; \quad 5+1=6; \quad 6+1=7$$

Algunas personas hacen esta suma utilizando los dedos: levantan tantos dedos como indica el segundo sumando, en este caso tres dedos, y cuentan con los dedos así levantados a partir del número que sigue al que corresponde al primer sumando. En este ejemplo dirá *cinco, seis, siete.*

Es preferible retener en la memoria los resultados de la suma de dos dígitos.

47. Estos resultados están escritos en un cuadro que se llama **tabla de adición**, la cual se construye de la siguiente manera:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

En una primera línea horizontal o **fila** se escriben, empezando por 0, los dígitos en el orden natural. Debajo de cada uno de esos números es escriben los mismos dígitos empezando por 1 y terminando ahora con 10. Debajo de los anteriores se escribe otra fila empezando por 2 y terminando por 11; y así siguiendo, hasta una décima fila que empieza por 9 y termina por 18.

Un número cualquiera de una fila resulta igual al que tiene encima, agregado con 1.

Si con esta tabla quiere hallarse la suma, por ejemplo, de 7 con 8, se busca en la línea horizontal que empieza por 7, el número que resulta situado en la **columna** vertical encabezada con 8; se ve que es 15. Y así debe ser, ya que por la observación recién hecha, ese número resulta de agregar a 8, siete veces 1 (tantas veces como filas tiene debajo, y ese número de filas está indicado por el número con que empieza cada fila (*).

d) **Sumar dos números cualesquiera.**

Sea, como ejemplo, sumar los números correspondiente a los guarismos

$$357, \quad 2325, \quad 8979, \quad 323.$$

Puede reducirse la cuestión a los casos anteriores descomponiendo (n.° 13, pág. 6), cada uno de los sumandos en base a decenas y unidades simples así:

$$\begin{aligned} 357 &= 350 + 7 \\ 2325 &= 2320 + 5 \qquad\qquad (1) \\ 8979 &= 8970 + 9 \\ 323 &= 320 + 3. \end{aligned}$$

La suma de los dígitos $7 + 5 + 9 + 3$ se hace como acabamos de indicarlo, mentalmente, diciendo:

siete más *cinco,* son *doce;*
doce más *nueve,* son *veinte y uno;*
veinte y uno más *tres,* son *veinte y cuatro.*

Como $24 = 20 + 4$, la suma buscada resulta ser la de

$$(350 + 2320 + 8970 + 320 + 20) + 4.$$

(*) También puede usarse un par de reglitas: una fija F (fig. 1) que lleve divisiones iguales numeradas de izquierda a derecha de 1 a 18, y otra móvil M llevando divisiones iguales a las de la otra y numeradas de 1 a 9. Para sumar

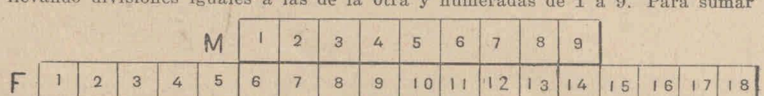


Fig. 1

5 con 8, se disponen las reglas como indica la figura (el 1 de la regla M encima del 6 de la F, y debajo del 8 de M, figura la suma 13 buscada. Esta maniobra y el resultado se entienden y explican sin mayores dificultades.

La parte entre paréntesis está en el caso b) y una vez efectuada, como terminará en cero, nos hallaremos en el caso a) y se advierte sin dificultad que la suma buscada tendrá
$(35 + 232 + 897 + 32 + 2)$ decenas y 4 unidades simples.

Pero

$$\begin{aligned}
&35 + 232 + 897 + 32 + 2 = \\
&(30 + 230 + 890 + 30) + (5 + 2 + 7 + 2 + 2) = \\
&(30 + 230 + 890 + 30) + 18 = \\
&(30 + 230 + 890 + 30 + 10) + 8
\end{aligned}$$

lo que significa que la suma buscada se compone de

$$[(30 + 230 + 890 + 30 + 10) + 8] \text{ decenas}$$

y de 4 unidades simples, es decir, de

$$\begin{aligned}
(3 + 23 + 89 + 3 + 1) &\text{ centenas,} \\
8 &\text{ decenas,} \\
4 &\text{ unidades simples.}
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
3 + 23 + 89 + 3 + 1 &= (20 + 80) + (3 + 3 + 9 + 3 + 1) \\
&= 100 + 19 \\
&= (100 + 10) + 9 \\
&= 110 + 9.
\end{aligned}$$

De modo que la suma buscada tiene 11 millares
9 centenas
8 decenas
4 unidades simples.

Es, por consiguiente,

11984

Estas explicaciones justifican la siguiente:

48. Regla práctica. — Para hallar la *expresión numérica de la suma de varios conjuntos, se escriben las expresiones numéricas (es decir, los guarismos), de cada uno de los sumandos, las unas debajo de las otras de tal manera que las cifras que correspondan a unidades del mismo orden se encuentren en una misma columna vertical. Debajo de la última expresión se traza una raya horizontal, que separará aquella última expresión, de la expresión de la suma a escri-*

bir. Se suman, luego, los dígitos que corresponden, en cada sumando, a las unidades simples; si esta suma parcial es también un dígito, se escribe debajo de la columna correspondiente, y, entonces, esa cifra será la de las unidades simples del total. Si esa suma parcial tiene más de una cifra, se escribe sólo la última de la derecha, la cual será, ahora, la de las unidades simples del total y se **retiene** *el número constituído por las cifras restantes en el orden en que están escritas, y a ese número se le suman los dígitos que constituyen la columna de las decenas; y se sigue como antes. De esta manera continuando, se llega a la penúltima columna de la izquierda; cuando se ha efectuado la suma del número retenido en esta columna, con los dígitos de la última de la izquierda se escribe el resultado a la izquierda de las cifras ya halladas del* **total** *y queda así escrito este último.*

Cuadro explicativo				Disposición usual
M	C	D	U	
	3	5	7	357
2	3	2	5	2325
8	9	7	9	8979
	3	2	3	323
10	18	16	24	11984

Como se indica en el cuadro explicativo de la izquierda, en la columna vertical encabezada por la letra U (unidades simples) están escritas las cifras 7, 5, 9, 3, de las unidades simples de los sumandos; la suma de éstos es 24, se escribe sólo el 4 (cuadro de la derecha) y se retiene 2 para sumarlo con los dígitos 5, 2, 7, 2 que se encuentran en la columna de las decenas, encabezada por la D; como la suma de éstos es 16, (cuadro de la izquierda), agregando el 2 retenido, sale 18; se escribe 8 debajo de la columna de las decenas y se retiene 1, y así se continúa.

Se ve que todo se reduce a saber sumar un dígito con un número cualquiera y, en definitiva, un dígito con otro.

49. Prueba de la adición. — Al efectuarse los cálculos recién detallados, es posible equivocarse; conviene hacer una verificación al respecto. Claro está que puede uno equivocarse nuevamente al efectuar tal verificación, pero se disminuye, así, considerablemente las probabilidades de que subsista un error.

No es recomendable hacer la prueba de la adición repitiendo exactamente las mismas operaciones hechas la primera vez, porque la experiencia enseña que cuando se efectúa dos veces seguidas una misma operación hay una manifiesta tendencia en repetir el mismo error. Más recomendable, por eso, es hacer la prueba de la adición, disponiendo los sumandos en otro orden. A fin de no escribir dos veces los guarismos, conviene efectuar las adiciones parciales; primero, de arriba abajo, y luego, de abajo arriba, lo que importa invertir el orden de los sumandos.

También se puede hacer la suma parcial de un cierto número de sumandos, luego la de otros, etc., y sumar, finalmente, estas sumas parciales (*).

Todas estas pruebas están fundadas en la propiedad invariante del número entero (n.° 40 a y c).

50. Cálculo mental. — Para lo relativo al cálculo mental véase más adelante pág. 146.

EJERCICIOS

16. ¿Cuántos números superiores a 9 pueden representarse como suma de dos dígitos?

Efectuar las adiciones:

17. $38192 + 48980 + 7629 + 5011 + 17786$
18. $9999 + 8765 + 6666 + 5544 + 6688$
19. $61616 + 16161 + 61661 + 16616 + 66161$

20. ¿Es posible ejecutar una adición empezando por la izquierda? Caso afirmativo, ¿cómo se ejecutaría?

21. Hallar la suma de los más pequeños números que pueda expresarse repectivamente con una, dos, tres, cuatro, cinco y seis cifras.

2. — La Substracción

51. Definiciones y propiedades. — La **substracción** tiene por objeto hallar uno de los sumandos de una suma de dos colecciones, conociendo esa suma y el otro sumando.

Así, sea, prescindiendo de las unidades, la suma $6 + 3 = 9$. Su-

(*) Cuando se tiene que efectuar una larga adición, conviene seguir ese procedimiento o sea, repartir los sumando en grupos, hacer la adición de cada grupo y luego sumar las sumas parciales así obtenidas.

puesto conocido 9 y el sumando 3; la substracción tiene por objeto hallar el otro sumando 6. Se escribe: $9 - 3 = 6$.

El signo — se lee «**menos**». Se tiene también $9 - 6 = 3$.

52. De acuerdo con la observación del n.º 41 (pág. 26), sabemos que ese otro sumando es *único*, y por eso se dice que la substracción es una operación **unívoca** o **uniforme**. Para que ella tenga sentido, es evidente que la suma dada, que se llama el **minuendo**, no debe ser menor que el sumando dado, que se llama el **substraendo**. Si el minuendo fuese igual al substraendo, el otro sumando, que se llama, en general, el **resto**, **residuo** o **diferencia**, sería nulo. Cero es el único número que restado de otro no lo altera. Se dice que *cero* es el módulo de la substracción.

53. De lo anterior resulta que sumando el resto con el substraendo debe obtenerse el minuendo, y que hay un *solo resto* que satisface a esa condición, lo que permite verificar la exactitud del mismo en todos los casos; basta sumar el presunto resto con el substraendo y si se obtiene el minuendo queda establecido que ese presunto resto es realmente el *resto*, ya que no puede haber otro.

54. Si de un conjunto de unidades se retira o *substrae*, sucesivamente, varios conjuntos parciales de esas unidades constitutivas, el conjunto resultante podría, evidentemente, obtenerse retirando de golpe el conjunto constituído por la suma de todos los conjuntos parciales retirados.

Por ejemplo, si en una caja hay cincuenta fósforos y se sacan de ella, sucesivamente: primero, cinco fósforos; luego, diez; luego, quince, quedan en la caja el mismo número de fósforos que si se hubiese, de golpe, retirado de ella $5 + 10 + 15$, o sea, 30 fósforos. Se escribe así:

$$[(50 - 5) - 10] - 15 = \quad 50 - (5 + 10 + 15).$$

Y viceversa, retirar de la caja 30 fósforos de una vez, deja en la caja el mismo número de fósforos que si retiraran estos 30 fósforos en tres veces: primero, 5 fósforos; luego, 10; luego, 15; de modo que tenemos otra vez la igualdad

$$50 - (5 + 10 + 15) = \quad 50 - 5 - 10 - 15$$

es un hecho de tal evidencia, que toda demostración es ociosa.

55. Combinación de la adición con la substracción. Polinomio aritmético. — Puede formarse una colección de unidades tomando, primero, una colección cualquiera de esas unidades; luego, restándole una colección parcial de las mismas; luego, agregándole otra cualquiera, siempre de unidades equivalentes; luego, quitándole una colección parcial de la colección hasta ese momento obtenida, etc. Se comprueba que el orden que se sigue para efectuar esas adiciones y substracciones sucesivas es indiferente siempre, como es natural, que ese orden permita efectuar las substracciones y que sean las mismas colecciones parciales las que se sumen o resten.

En efecto si, por ejemplo, un negociante recibe 9 pesos, paga luego 3, recibe luego 8 y paga 7 y luego 4 y por último recibe 5, el número de pesos que le quedarán al final es evidentemente el mismo que si hubiese recibido de golpe $9 + 8 + 5$ pesos y luego pagado de golpe $3 + 7 + 4$.

Luego

$$9 - 3 + 8 - 7 - 4 + 5 = (9 + 8 + 5) - (3 + 7 + 4) = 8 .$$

56. De donde se desprende que, por de pronto:

a) **Toda serie de adiciones y de substracciones puede reducirse a dos adiciones y a una substracción final.**

Hemos visto que, en las adiciones, el orden de los sumandos puede ser cualquiera, de modo que, en el caso que tratamos, pueden en definitiva realizarse las adiciones y las substracciones en un orden cualquiera con tal de que éste permita realizar las substracciones y de que sean siempre los mismos, los conjuntos que se suman y los mismos los que se restan.

57. **Definición.** — En general se llama *polinomio aritmético* a una expresión constituída por números, indicados con cifras separadas las unas de las otras por los signos $+$ o $-$. Indica el resultado obtenido efectuando sucesivamente las operaciones a que deben ser sometidos los números, leídos de izquierda a derecha, de acuerdo con los signos que los preceden. Este polinomio carece evidentemente de significado, si una o más de las operaciones sucesivas indicadas es imposible. Los números constitutivos del polinomio en cuestión se llaman los **términos** del polinomio. Aquellos precedidos del signo $+$ se dicen **positivos** o **aditivos**; los precedidos del signo $-$ se dicen **negativos** o **substractivos.**

El primer término, aunque no viene precedido de signo, se considera como aditivo, pues se lo puede considerar como el resultado de adicionarlo a 0.

Si el polinomio tiene sólo dos términos se llama **binomio**; si tiene tres, **trinomio** y si tiene cuatro, **cuatrinomio**.

58. Consideremos el polinomio $9 - 6 + 7 - 5 - 4 + 8 - 2$. Se tiene:

$$9 - 6 + 7 - 5 - 4 + 8 - 2 = 8 + 9 - 6 - 4 - 5 + 7 - 2$$

pues ambas expresiones o *polinomios aritméticos* son iguales respectivamente a

$$(9 + 7 + 8) - (6 + 5 + 4 + 2)$$

y a

$$(8 + 9 + 7) - (6 + 4 + 5 + 2)$$

pero no podría escribirse

$$9 - 6 + 7 - 5 - 4 + 8 - 2 = 9 - 6 - 2 - 5 + 7 - 4 + 8$$

porque $9 - 6 - 2 - 5$ carece de sentido.

Esta posibilidad de cambiar el orden de las adiciones y substracciones permite simplificar las expresiones en las que dos conjuntos de mismo número de unidades figuran respectivamente uno sumando y otro restando, pues basta eliminarlos.

Así:

$$8 + 7 - 6 - 8 + 3 = 7 + 8 - 8 - 6 + 3 = 7 - 6 + 3.$$

59. También resulta de esto que *no se altera la diferencia de dos conjuntos de objetos si se agrega a cada uno de ellos un conjunto, cada uno de igual número de unidades.*

Pues, efectivamente, y como ejemplo, la diferencia $8 - 4$ es la misma $(8 + 5) - (4 + 5)$.

$$\begin{aligned}(8 + 5) - (4 + 5) &= 8 + 5 - 4 - 5 \qquad (\text{n.}^{\text{o}}\ 54)\\ &= 8 - 4\end{aligned}$$

Lo mismo ocurriría si, en vez de agregarse conjuntos iguales, se restasen estos últimos simultáneamente del minuendo y del substraendo.

Se escriben, en general

$$a - b \equiv (a \pm c) - (b \pm c)$$

El signo $\pm$ se lee **más o menos**.

60. Finalmente, consideremos el caso de restar un conjunto que sea la suma de varios conjuntos parciales, de otro constituído en la misma forma, y con el mismo número de términos; si los términos del minuendo son respectivamente no menores que los correspondientes del substraendo, se puede efectuar la resta, restando cada término del substraendo del respectivo término del minuendo y sumando los restos parciales así obtenidos.

Por ej., sea restar $(5+4+3+2)$ de $(9+8+7+6)$ que cumplen las condiciones impuestas. Tenemos:

$$(9+8+7+6)-(5+4+3+2)=$$
$$9+8+7+6-5-4-3-2$$
$$=(9-5)+(8-4)+(7-3)+(6-2).$$

61. Substracción de un polinomio aritmético, de un número. — Sea restar $9-6+11-8+12$ de un número cualquiera, 57 por ej. *Bastará escribir después del número, los términos del polinomio, con un signo contrario al que le precede.* Se tendrá así que

$$57-(9-6+11-8+12)$$
$$=57-9+6-11+8-12$$

Compruébese efectivamente, que $57-9+6-11+8-12$ es el resto, porque sumando con el substraendo $9-6+11-8+2$ queda, atento al cambio de signos efectuado, sólo del minuendo 57. Y como el resto es único, resulta probada la proposición, según observamos en el n.° **53**.

62. Una consecuencia de esa proposición es que: *En un polinomio aritmético se puede encerrar entre paréntesis a los términos que se desee, afectándolos de un signo contrario, con tal que el agrupamiento dentro del paréntesis tenga un sentido y que se someta ese agrupamiento a ser substraído. Es menester, además, que en el nuevo polinomio, la sucesión de operaciones puede ser efectuada.*

63. Claro está también que en un polinomio aritmético, *se puede encerrar entre paréntesis a los términos que uno desee, con los mismos signos que tienen delante con tal de que el agrupamiento, dentro del paréntesis, tenga un sentido y que se le someta a una adición.* Además, en el nuevo polinomio, la sucesión de las operaciones debe ser posible.

Ejemplo: se tiene que el polinomio $14+9-7+11-2-5$, puede escribirse así:

$$11-2-(7+5-9)+14$$

o así:

$$11-7+(9-2-5)+14$$

Es una consecuencia de lo establecido en los n.os anteriores.

64. **Otras consecuencias.** — Anotemos algunas otras consecuencias resultantes de lo establecido en los números anteriores y que son de inmediata verificación. Los alumnos pueden desarrollarlas a título de ejercicio.

65. *Si la diferencia entre dos números* **a** *y* **b** *es igual a la diferencia entre otros dos* **c** *y* **d**, *se tiene que* $a + d = c + b$. *Y si* $a > c$, *la diferencia* $a - c = b - d$.

66. Recíprocamente: *Si la suma de dos números* **a** *y* **b**, *es igual a la suma de otros dos* **c** *y* **d**; *y si* $a > c$, *entonces* $a - c = d - b$.

67. *Sí, dados dos conjuntos, se disminuye el primero y se aumenta el segundo con un mismo conjunto, su suma no altera.*

68. *Si en una suma se disminuye cierto sumando, la suma disminuye en otro tanto.*

69. *Para restar un número, de una suma de dos sumandos, puede restarse ese número de uno de los sumandos, si ello es posible, y agregar el otro sumando al resultado obtenido.*

70. *Si en una substracción se aumenta el minuendo agregándole cierto número, el resto viene aumentado de otro tanto.*

71. *Si en una substracción se disminuye el minuendo o si se aumenta el substraendo en cierto número, el resto queda disminuído en otro tanto.*

72. *Para restar de un número la diferencia de otros dos, se puede siempre agregar al número el substraendo de la diferencia en cuestión, y al resultado restarle el minuendo.*

73. *Si en una substracción se disminuye el substraendo en cierto número, el resto queda aumentado en otro tanto.*

74. **Práctica de la substracción en el sistema de numeración decimal.** — a) **Diferencia entre un número menor que 20 y un dígito.**

Reteniendo en la memoria los resultados obtenidos sumando un dígito a uno cualquiera de los primeros números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, — resultados que son siempre inferiores a 20 — se obtiene de inmediato la diferencia entre un número menor que 20 y uno de los números 1, 2, 3, 4..., 10, cuando aquel es mayor que éste.

Para retener en la memoria esas diferencias hay que ejercitarse ayudándose, si se quiere, con la *tabla de sumar* referida en el n.° 47 (pág. 29).

También puede hacerse uso de los dedos o de las reglas (fig. 1, pág. 30). Establecido lo anterior veamos el caso en que

b) **El guarismo del minuendo y el del substraendo terminan en cero.**

De acuerdo con la observación hecha en el n.° 46 b), pág. 28, se deduce de inmediato que la diferencia buscada se obtiene prescindiendo de esos ceros, y calculando la diferencia entre los guarismos constituídos por las cifras restantes; y agregando un cero a la derecha del guarismo diferencia.

Así, para hallar la diferencia 970 — 250, se busca la diferencia entre 97 y 25 y se agrega un cero a la derecha del guarismo así hallado.

c) **La cifra de las unidades del guarismo minuendo no es menor que la correspondiente del substraendo.**

Sea restar 3416 de 7859. Tenemos:

$$7859 = 7850 + 9$$
$$3416 = 3410 + 6.$$

Ya observamos que es lo mismo retirar de un conjunto de golpe 3416 unidades que retirar primero 3410 y luego 6.

Podemos pues escribir:

$$7859 - 3416 = 7859 - 3410 - 6$$

o sea:

$$= (7850 + 9) - 3410 - 6$$

lo que es también equivalente a (n.º **58**):

$$(7850 - 3410) + (9 - 6)$$

La diferencia $9 - 6 = 3$ está en el caso a) y la diferencia 7850 — 3410 en el caso b); la cuestión queda pues reducida a saber hallar la diferencia entre 785 y 341, y luego agregar un 3 a la derecha.

d) **La cifra de las unidades del minuendo es menor que la correspondiente del substraendo.**

Sea hallar la diferencia entre 9321 y 2584.

Tenemos que

$$9321 = 9320 + 1$$
$$2584 = 2580 + 4.$$

Que puede escribirse así:

$$9321 = 9310 + 11$$
$$2584 = 2580 + 4.$$

Luego

$$9321 - 2584 = (9310 - 2580) + (11 - 4)$$
$$= (9310 - 2580) + 7$$

Queda reducida la cuestión a obtener la diferencia entre 931 y 258 que se encuentre en el caso c) o en este mismo caso d) pero con una cifra menos. Aquí es el caso d).

También puede hacerse la descomposición así: agregando 10 a la vez al minuendo y al substraendo, lo que no altera el resto (n.º 59, pág. 36).

$$10 + 9321 = 9320 + 11$$
$$10 + 2584 = 2590 + 4,$$

la cuestión queda reducida a saber hallar la diferencia entre 932 y 259.

De todas las explicaciones anteriores surge la siguiente:

75. **Regla práctica.** — *Para hallar el guarismo de una resta, se escribe el guarismo del substraendo debajo del del minuendo de tal manera que se correspondan las cifras de las distintas unidades; se traza una raya horizontal debajo del substraendo, y debajo de esa raya se escribirá el resto. Para hallar éste se empieza la operación por la derecha: se resta, si es posible, el dígito de la derecha del substraendo del correspondiente del minuendo: la diferencia, es el dígito de las unidades simples de la resta buscada; se escribe la cifra correspondiente debajo de la raya en el lugar respectivo. Si esa substracción es irrealizable, se agrega 10 al dígito de las unidades simples del minuendo y, a la suma así obtenida se le resta el dígito correspondiente, o sea, el de las unidades simples, del substraendo. Ahora la resta es posible y la cifra del dígito de la diferencia se escribe en el lugar correspondiente, debajo de la raya. En este último caso, para compensar el 10 agregado, se agrega mentalmente 1 al dígito de las decenas del substraendo. Luego, se resta el dígito de las decenas del substraendo (aumentado en 1 en el caso indicado), del dígito de las decenas del minuendo; la resta da el dígito de las decenas del resto buscado y la cifra correspondiente se escribe debajo de la raya en el lugar correspondiente, a la izquierda de la cifra, ya hallada, de las unidades simples. Si la substracción en cuestión es imposible, se agrega 10 al número de las decenas del minuendo y se agrega 1 al de las centenas del substraendo; la substracción es ahora posible y nos da la cifra de las decenas del resto buscado. Se continúa así, hasta terminar, es decir, hasta agotar todas las cifras del substraendo; cuando se han restado los números relativos a las unidades del más alto orden del substraendo, se coloca a la izquierda de la parte ya escrita del resto, el guarismo formado por las cifras no empleadas de la izquierda del minuendo, tal cual están si la última substracción parcial ha sido directa, o disminuída de 1 si ha sido necesario, para*

efectuar esta última substracción parcial, agregar 10 al número que corresponde a las unidades más elevadas del substraendo. Se obtiene, de esta manera, el resto buscado.

Así para restar 25673 de 4817519, se dispone la operación de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r} 4817519 \\ 25673 \\ \hline 4791846 \end{array}$$

y se dice: 3 restado de 9 da 6; 7 restado de 11, da 4; 7 restado de 15, da 8; 6 restado de 7, da 1; 2 restado de 11, da 9; 1 restado de 48, da 47.

Esta manera de hacer substracciones se llama *método de las* **compensaciones.** Puede también seguirse el llamado de los **préstamos o de las descomposiciones.**

76. *Método de los préstamos o de las descomposiciones.*

Sea la resta 8346 — 5857.

La descomposición se hace así:

$$\begin{array}{l} 8346 = 8000 + 300 + 40 + 6 = 7000 + 1200 + 130 + 16 \\ 5857 = 5000 + 800 + 50 + 7 = 5000 + \ \ 800 + \ \ 50 + \ \ 7 \\ \hline 2489 = \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2000 + \ \ 400 + \ \ 80 + \ \ 9 \end{array}$$

Como no se puede restar 7 de 6, se hace un préstamo a las decenas; quitando una de éstas quedan 3 decenas y 16 unidades; y ahora puede restarse 7 de 16 quedan 9 que es la cifra de las unidades del resto. Como no se puede restar 5 decenas de las 3 que quedaron, se hace un préstamo a las 3 centenas, quedan 2 centenas y 13 decenas; de éstas pueden restarse las 5 y quedan 8 decenas o sea 80 unidades simples, que se escriben; y así se continúa. Prácticamente no se hace la descomposición sino que, de cabeza, se dice: 7 de 16 quedan 9; 5 de 13 quedan 8; 8 de 12 quedan 4; 5 de 7 quedan 2.

La diferencia con el otro método consiste en que, en vez de reforzar las cifras del substraendo, se reducen las del minuendo.

77. Método de substracción por adiciones complementarias (*). — La diferencia entre un número y el que expresa la unidad de orden inmediatamente superior se llama el **complemento** de dicho número. Así, 4 es el complemento de 6; 27 el de 73, etc.

En la práctica, se escribe inmediatamente ese complemento como se indica a continuación:

(*) Para más detalles, véase nuestro «Tratado de Aritmética Elemental», páginas 83 y 84.

Sea, por ej., hallar el complemento de 314159. Se escribe otro guarismo de igual número de cifras tal que cada cifra sea lo que falta a la correspondiente del guarismo dado para valer 9 (complemento a 9) salvo la cifra de la derecha que es el complemento a 10 (*).

Así, para el ejemplo tomado, ese complemento es 685841.

Puede comprobarse que, efectivamente,

$$314.159 + 685.841 = 1.000.000.$$

Para restar un número de otro puede utilizarse el complemento del substraendo. Sea, por ejemplo, efectuar la substracción

$$536789 - 348765.$$

El complemento de 348765 es 651235. En virtud de las propiedades ya conocidas, es lo mismo realizar la operación dada que la

$$536789 + 651235 - (348765 + 651235)$$

o sea que la

$$536789 + 651235 - 1000000 = 188024.$$

Prácticamente se dispone la operación así:

$$\begin{array}{r} 536789 \\ 651235 \\ \hline \text{1}88024 \end{array}$$

EXPLICACION

Se escribe el guarismo minuendo; debajo, el complemento del guarismo substraendo; se efectúa la suma y se resta 1 a la cifra de la suma que resulte inmediatamente superior a la de la más alta unidad del substraendo.

Esta aplicación del complemento aritmético sólo presenta ventajas cuando ha de efectuarse una serie de sumas y de restas, porque, mediando ella, se reduce todo a efectuar una suma.

78. Prueba de la substracción. — Se efectúa, evidentemente, como ya vimos (n.º 53, pág. 34), sumando el resto al subtraendo y viendo si, de acuerdo con la misma definición de la substracción, se obtiene el minuendo. También puede restarse el resto del minuendo y ver si se obtiene el substraendo.

79. Cálculo mental. — Para lo relativo al cálculo mental, véase más adelante, pág. 146.

(*) Si la última cifra de la derecha del guarismo dado fuese cero, habría que reemplazarlo por 10 y restar 1 a la cifra de las decenas. Así, el complemento de 25680 es 74320.

EJERCICIOS

22. Efectuar las siguientes substracciones:

95467 — 87283 ; 9090909 — 909090
111111 — 9999 ; 10101010 — 90909
12345678 — 3456789 ; 9876543210 — 987654321.

23. La suma de dos números es 63759; uno de ellos, disminuído de 26790, da 29474. ¿Cuáles son esos números?

24. ¿Cómo se podría ejecutar una substracción empezando por la izquierda?

25. La diferencia entre dos números es 6995, el menor de ellos es 4548. ¿Cuál es su suma?

26. La diferencia entre dos números es 3887 y uno de ellos es 6162. ¿Cuál es el otro? (Hay dos soluciones).

27. Efectuar las operaciones siguientes previa transformación de las expresiones en polinomios:

$$(785 - 365) + 440$$
$$436 + (753 - 543) - 205$$

28. ¿Qué alteración experimenta la diferencia de dos números: 1.° si se aumenta el minuendo en 86 y se disminuye el substraendo en 39; 2.° si se aumenta el minuendo en 239 y se aumenta el substraendo en 58; 3.° si se aumenta el minuendo en 65 y se aumenta el substraendo en 203; 4.° si se disminuye el minuendo en 650 y se disminuye el substraendo en 397; 5.° si se disminuye el minuendo en 493 y se disminuye el substraendo en 684; 6.° si se disminuye el minuendo en 358 y se aumenta el substraendo en 265?

29. Dados tres números cualesquiera, demostrar: 1.° que el excedente de la suma de los dos primeros respecto de la diferencia entre el primero y el tercero, es igual a la suma del segundo y el tercero; 2.° si se agrega la diferencia de los dos primeros a la suma del segundo y del tercero, obtiénese la suma del primero y del tercero.

3. — La Multiplicación.

80. Definiciones. — Si se deben adicionar varias colecciones, todas de igual número de unidades, el número de unidades de la colección suma quedará determinado dando ese número de unidades común de las colecciones sumandos, y el número de sumandos. Presentada la adición en esta forma, o sea, con esta determinación, recibe el nombre especial de **multiplicación**; la colección que se repite se llama **multiplicando**; el número de veces que se repite, **multiplicador**, y la suma especial, **producto**. El multiplicando y el multiplicador se dicen ser los **factores del producto**.

El caso que consideramos es el tratado en el n.° **3**, (pág. 2) con el nombre de *unidades-conjuntos*, porque efectivamente, el *producto* no es otra cosa que una colección de *unidades-conjuntos*.

La unidad-conjunto que se repite, es el *multiplicando;* el número de dichas unidades-conjuntos que afecta a la colección de ellas, es el *multiplicador.*

Se representa un producto a efectuar escribiendo, primero, el multiplicando; luego, en la misma línea, el multiplicador, separándolos por el signo × (o por . si no trae confusión), que se lee **multiplicado por.** Cuando se usan letras para indicar números, se suprime todo signo.

Según ésto, la suma 2 hombres + 2 hombres + 2 hombres, se escribirá:

2 hombres × 3, ó 2 hombres . 3.

Y, si se prescinde de la unidad, podrá convencionalmente escribirse

2×3 ó $2 . 3.$

81. Pero es importantísimo observar que el *multiplicando es una* COLECCIÓN, *mientras el multiplicador es un* NÚMERO *que responde a la pregunta* ¿cuántas veces se ha tomado el multiplicando como sumando?

El producto es una colección. Según acabamos de ver, es la colección de tantas unidades-conjuntos como indica el multiplicador.

Si por ejemplo, se dice que una compañía tiene cien soldados y se pregunta cuántos soldados tiene un batallón constituído por veinte compañías, la contestación importa efectuar una multiplicación; el multiplicando es *100 soldados,* el multiplicador el *número 20.*

82. La expresión 2×3 suele leerse así: *multiplicar dos por tres* o *repetir dos, tres veces,* o *encontrar un número tres veces mayor que dos;* o bien: *numerar, en base a sus unidades simples una colección de unidades-conjunto cada uno de tres unidades simples.*

$a \times b$ o $a . b$ o ab se leen, análogamente: a **multiplicado por** b; **repetir** a, b **veces,** etc.

83. El resultado de multiplicar una colección o, incorrectamente, de multiplicar un número, por 2, 3, 4, 5..., se dice el **duplo,** el **triplo,** el **cuádruplo,** el **quíntuplo,** etc., de dicha colección o de dicho número.

84. **Multiplicador considerado como una relación.** — Si como lo hicimos en el n.° 10, decimos que el *número* define la *relación* de una colección respecto de su *unidad,* la observación precedente permite decir que el multiplicador define la relación entre el producto y el multiplicando. Entonces, la multiplicación puede definirse diciendo que, *dada una colección llamada* MULTIPLICANDO *y un*

número llamado MULTIPLICADOR, *la* MULTIPLICACIÓN *se propone hallar una colección llamada* PRODUCTO, *tal que el multiplicador sea la relación entre ella y el mulplicando.*

Y si imaginamos un conjunto que tenga tantas unidades simples como indica el multiplicador, este último define la relación entre aquel conjunto y la unidad simple.

Por eso, prescindiendo ahora de los conjuntos y hablando sólo de números, se dice, a veces, aunque muy incorrectamente, que *la multiplicación es una operación que tiene por objeto, dado un número llamado* multiplicando *y otro llamado* multiplicador, *hallar un tercero llamado* producto *tal que su relación con el multiplicando sea igual a la relación del multiplicador con el número* 1.

No es una definición recomendable.

85. **Propiedades de la multiplicación.** — Siendo la multiplicación un caso particular de la adición, es una operación **unívoca** o **uniforme.**

También es **conmutativa.** Y en efecto, tomando un ejemplo cualquiera, sean las multiplicaciones.

$$3 \text{ hombres} \times 2; \quad 2 \text{ hombres} \times 3$$

fácil es comprobar materialmente que el producto de una y otra es el mismo. El producto 3 hombres × 2, significa

$$3 \text{ hombres} + 3 \text{ hombres}.$$

Podemos disponer los dos sumandos así:

$$\begin{array}{l} 3 \text{ hombres} = 1 \text{ hombre} + 1 \text{ hombre} + 1 \text{ hombre} \\ \underline{3 \text{ hombres} = 1 \text{ hombre} + 1 \text{ hombre} + 1 \text{ hombre}} \\ 3 \text{ h.} + 3 \text{ h.} \;\; = 2 \text{ hombres} + 2 \text{ hombres} + 2 \text{ hombres} \\ 3 \text{ h.} \times 2 \quad\;\; = 2 \text{ hombres} \times 3. \end{array}$$

Se comprende sin dificultad que esta demostración experimental puede extenderse a cualquier otro ejemplo.

La propiedad en cuestión se enuncia también diciendo que: **El orden de los factores no altera el producto.**

86. **Combinación de la multiplicación con la adición.** — Sea efectuar la operación $(3 + 4) \times 2$. Significa que una colección formada por dos colecciones parciales respectivamente de 3 y 4 unidades debe ser juntada con otra formada de la misma manera; es evidente que al efectuar esta suma, se obtendrán dos colecciones parciales de 3 objetos y dos de 4, de manera que

$$(3 + 4) \times 2 = (3 \times 2) + (4 \times 2).$$

87. Ordinariamente, cuando se debe, como en el ejemplo anterior, indicar sumas de productos, se suprimen los paréntesis que en-

cierran los productos; así, en vez de $(3 \times 2) + (4 \times 2)$ se escribirá $3 \times 2 + 4 \times 2$. Habrá que tener cuidado de no hacer la operación sumando 2 con 4; antes que nada se efectuarán multiplicaciones.

En general se demostraría de la misma manera que

$$(a + b)m \equiv am + bm$$

y que

$$(a + b + c + \ldots)m \equiv am + bm + cm + \ldots$$

88. La propiedad anterior se expresa diciendo que la multiplicación es una operación **distributiva** respecto de la adición, o también que: *para multiplicar una suma de varios conjuntos de objetos (o de números) por un número se multiplica separadamente cada uno de los conjuntos (o de los números) por el multiplicador y se suman los productos parciales obtenidos.*

89. Cuando en vez de la expresión

$$am + bm + cm + dm + \ldots$$

se escribe su equivalente $(a + b + c + d + \ldots)m$ se dice que en la primera se ha *sacado* m *factor común.*

La operación $2\ (3 + 4)$ indica que deben juntarse $3 + 4$, o sea 7, conjuntos de dos objetos.

En virtud de la propiedad conmutativa de la multiplicación, el resultado es idéntico al de la multiplicación.

$$(3 + 4) \times 2 \text{ que es } 3 \times 2 + 4 \times 2$$

o sea:

$$2 \times 3 + 2 \times 4.$$

Se tendrá en general, que

$$m(a + b) = ma + mb$$

$$m(a + b + c + d + \ldots) = ma + mb + mc + md + \ldots$$

Se expresa la propiedad anterior diciendo que *la multiplicación es una operación* **completamente distributiva respecto de la adición.**

Todo lo anterior justifica la siguiente proposición:

90. *Para multiplicar un conjunto por la suma indicada de dos o más números, se multiplica el conjunto por cada uno de los números y se suman los productos parciales.*

Esto equivale a decir que *si, en una multiplicación, se aumenta* *uno de los factores, el producto acrece del producto parcial de ese aumento por el otro factor.*

Consideremos ahora la operación

$$(2+3)\times(4+5).$$

De acuerdo con lo anterior esto equivale al producto

$$(2+3)\,4+(2+3)\,5$$

o sea:

$$2\times4+3\times4+2\times5+3\times5.$$

Lo mismo tendremos que

$$\begin{aligned}(2+3+4)\times(5+6) &= (2+3+4)\times5+(2+3+4)\times6\\ &=2\times5+3\times5+4\times5+2\times6+3\times6+4\times6.\end{aligned}$$

Usando letras en vez de cifras, tendremos:

$$(a+b)\;(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Lo que puede expresarse diciendo que si: *en una multiplicación se aumenta simultáneamente el multiplicando y el multiplicador, el producto acrece*: 1.º *del producto del aumento de multiplicando por el multiplicador;* 2.º *del producto del aumento del multiplicador por el multiplicando;* 3.º *del producto del aumento del multiplicando por el aumento del multiplicador.* En general, pues:

91. *Para multiplicar una suma de conjuntos (o de números) por una suma de números, se multiplica cada uno de los sumandos del multiplicando por cada uno de los sumandos del multiplicador y se suman los productos parciales.*

92. El símbolo $(4\times3)\times5$ significa que debe efectuarse primero el producto 4×3, esto es, sumar tres conjuntos de cuatro objetos cada uno (o tres números iguales a 4) y luego multiplicar a su vez este producto por 5. Luego

$$\begin{aligned}(4\times3)\times5&=(4+4+4)\,5=4\times5+4\times5+4\times5=\\ &=4(5+5+5)=4\times(5\times3).\end{aligned}$$

Luego

$$(4\times3)\times5=4\times(3\times5).$$

No hay, por consiguiente, ventaja en poner paréntesis, y puede escribirse simplemente $4\times3\times5$, siendo indiferente multiplicar primero 4×3 y luego el producto por 5, o multiplicar 4 por el producto 3×5.

93. Se tendría en general que

$$a\,.\,(b\,.\,c)\equiv(a\,.\,b)\,.\,c.$$

La propiedad anterior se expresa diciendo que la multiplicación es una operación **asociativa**. Si prescindimos de los objetos de las colecciones y nos atenemos únicamente a los números, veríamos de una manera completamente general que el producto de tres o más números $a, b, c, d, \ldots$ ordenados de cierta manera (producto que se obtiene multiplicando el producto de los dos primeros por el tercero, luego el producto de los tres primeros por el cuarto, y así sucesivamente), no se altera invirtiendo el orden establecido (*). Los números $a, b, c, d, \ldots$ son los *factores* del producto y por lo tanto *el orden de los factores no altera el producto.*

Anotemos las consecuencias siguientes:

94. *En un producto de varios factores puede reemplazarse un cierto número de ellos por el producto de los mismos.*

Así en el producto $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g$ podemos reemplazar los factores $b, d, f,$ por el producto bdf de los mismos. Efectivamente, hemos visto que se tiene

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \equiv a \cdot b \cdot d \cdot f \cdot c \cdot e \cdot g \equiv a(bdf)c \cdot e \cdot g.$$

Inversamiente, en un producto de varios factores de los que algunos son a su vez productos de otros, puede reemplazarse dichos factores por aquellos de los cuales son productos. Así:

$$3 \times (4 \times 5 \times 6) \times 7 = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7;$$
$$4 \times 6 \times 7 = 4 \times (2 \times 3) \times 7.$$

95. *Para multiplicar un producto indicado de varios factores por un número, basta multiplicar uno de estos factores por el número.*

Así, si el producto $7 \times 4 \times 5 \times 6$ debe multiplicarse por 9, bastará reemplazar, por ejemplo el factor 4, por el producto 4×9. Efectivamente se tiene (n.º 93):

$$(7\times4\times5\times6)\times9 = 7\times4\times5\times6\times9 = 7\times(4\times9)\times5\times6.$$

96. *Para multiplicar un número por un producto indicado de*

(*) Así $\quad a \times b \times c \times d \times e \equiv c \times a \times e \times b \times d$

pues tendremos sucesivamente

$$abcde \equiv a(bc)(de) \equiv a(cb)(ed) \equiv acbed \equiv (ac)(be)d \equiv (ca)(eb)d \equiv caebd$$

según las propiedades conmutativas y asociativas demostradas. Lo mismo se demostraría cualquier otro caso.

varios factores, puede multiplicarse ese número por uno de los factores, luego este producto por otro factor, etc., hasta agotar éstos. Así:

$$7 \times (9 \times 6 \times 5) = 7 \times 9 \times 6 \times 5.$$

97. Los multiplicadores 0 y 1 carecen de significado en base a la definición de multiplicación, pero, para conservar a esta operación su propiedad conmutativa y como $0 \times a = 0$ y $1a = a$ (pues $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = a$), se conviene que el producto de cualquier número o colección por cero, sea *cero* y que el producto de cualquier número por 1, sea el mismo número, escribiremos entonces:

$$a \times 0 \equiv 0, \qquad 0 \times 0 = 0, \qquad a \times 1 \equiv a.$$

98. **Módulo.** — Es evidente que un producto es siempre diferente del multiplicando, salvo el caso en que el multiplicador sea 1. Por eso se dice que 1 es el *módulo* de la multiplicación.

99. **Múltiplos.** — Del n.° 97 resulta que para que el producto de varios factores sea nulo se requiere que uno por lo menos de éstos lo sea.

Llámase *múltiplo* de un número al producto de éste por un número natural, así:

$$7 \times 4 \qquad 7 \times 5 \qquad 7 \times 9 \ldots$$

son múltiplos de 7. En ese caso se dice que el número en cuestión es un *divisor* o *submúltiplo* de su *múltiplo.*

100. Es también evidente que si el número natural por el que se ha multiplicado el número es mayor que 1, sus múltiplos serán mayor que él e irán creciendo cada vez, es decir, a medida que el multiplicador aumente.

101. Los múltiplos de 2, a saber: 2, 4, 6, 8, ... se llaman números **pares** y se pueden representar así: $2p$; los demás números se llaman **impares** y pueden representarse así: $2p + 1$.

102. **Observaciones relativas a la multiplicación. Aplicación a las desigualdades.** — *Si un número no es nulo, multiplicado por otro mayor que* 1, *queda aquél acrecido.*

$$\text{Así} \quad a > 0 \qquad b > 1$$

$$\therefore \quad ab > 1 \qquad \text{(n.° 100)}$$

103. *Si se multiplican dos números desiguales* (a, b) *dispuestos en cierto orden de valor, por un mismo entero* (m) *no nulo, los productos son desiguales*

y dispuestos en el mismo orden de valor; o también: *si un mismo número* (m), *no nulo, se multiplica por dos números desiguales* a y b), *dispuestos en cierto orden de valor, los productos son también desiguales, y dispuesto en el mismo orden.*

Es una consecuencia de lo establecido en el n.º 44 (pág. 27).

Expresada la cuestión con letras escribiremos:

Si m *no es nulo y se tiene* $a > m$, *entonces se tendrá también*

$$am > bm \quad \text{o sea} \quad ma > mb.$$

104. *Si se multiplican dos números dispuestos en cierto orden de valor, respectivamente, por otros dos números dispuestos en ese mismo orden, los productos son desiguales y dispuestos siempre en ese mismo orden.*

Con letras:

$$a > m \qquad b > n \qquad \therefore \qquad ab > mn$$

En efecto, las desigualdades $a > m$ y $b > n$ implican que a y b no son nulos; luego, $ab > mb$ según lo anterior, puesto que $a > m$ pero como $b > n$, con más razón se tendrá $ab > mn$; y eso aunque m y n fuesen nulos.

105. Combinación de la multiplicación con la substracción. — Sea efectuar la operación

$$(7 - 2) \times 3$$

De acuerdo con la definición de multiplicación y lo establecido en el n.º 56 (pág. 35).

$$(7 - 2) \times 3 = (7 - 2) + (7 - 2) + (7 - 2)$$
$$= 7 + 7 + 7 - (2 + 2 + 2) = 7 \times 3 - 2 \times 3.$$

De modo que *para multiplicar la diferencia entre dos números, por un tercero, puede multiplicarse el minuendo y el substraendo por dicho tercer número y restar el segundo producto del primero.*

En general se tiene

$$(a - b)c \equiv ac - bc$$

lo que se expresa diciendo que **la multiplicación es distributiva respecto de la substracción.**

106. Sea el producto

$$(a + b)\ (c - d) \qquad (1)$$

designando con m la diferencia entre c y d, tendremos, de acuerdo al caso anterior, que $(a + b)m \equiv am - bm$. Y siguiendo los cálculos, podremos escribir

$$am + bm \equiv a(c - d) + b(c - d)$$
$$\equiv ac - ad + bc - bd \qquad (2)$$

107. La operación

$$(a - b)\ (c - d)$$

nos conduciría, análogamente (haciendo $c - d = m$), a lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(a - b)\,(c - d) &= am - bm = a(c - d) - b(c - d) \\
&\equiv ac - ad - (bc - bd) \;\therefore \\
(a - b)\,(c - d) &\equiv ac - ad - bc + bd \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Reemplazar (1) por (2) es **desarrollar** (1). Lo mismo, reemplazar el primer miembro de la igualdad (3) por el segundo, se dice **desarrollar** aquél.

Todas esas proposiciones pueden, sin inconveniente, extenderse a polinomios aritméticos.

108. Práctica de la multiplicación en el sistema de numeración decimal.

a) **Multiplicación por 10, 100, 1000, 10000, etc.**

Sea multiplicar 3 unidades por 1000. Por la propiedad conmutativa de la multiplicación, el producto es el número mismo que el de 1000 unidades multiplicadas por 3.

$$
\begin{array}{r}
1000 \\
1000 \\
1000 \\
\hline
3000
\end{array}
$$

Este puede ejecutarse en forma de suma, como se indica a la izquierda, y se ve que se reducen a multiplicar 1×3 y agregar tres ceros a la derecha.

Pudiendo extenderse el raciocinio anterior a cualquier multiplicando resulta que

Para multiplicar por 10, 100, 1000, 10000, *etc., se escribe a la derecha del número multiplicando, tantos ceros como tiene el multiplicador.*

b) **Formar los nueve primeros múltiplos de un número. Tabla de multiplicación o de Pitágoras.**

Para hallar los nueve primeros múltiplos de un número, es decir, el producto de éste por los dígitos, se dispone la operación de la manera siguiente. Sea, por ejemplo, el número 31416.

1	31416
2	62832
3	94248
4	125664
5	157080
6	188496
7	219912
8	251328
9	282744

Primero se escriben en columna vertical, los dígitos sucesivos y frente a 1 se escribe el número dado, 31416; debajo, frente al 2, se escribe 62832 obtenido sumando 31416 consigo mismo, lo que equivale a multiplicarlo por 2; luego, se suma 31416 con 62832 y el resultado, 94248, se escribe enfrente de 3, pues la operación efectuada equivale a 31416 tomado tres veces como sumando; luego, se suma 94248 con 31416, y el resultado, 125664, se escribe frente al 4, etc.; hasta llegar a 9. Como comprobación, sumando el último número hallado, 282744, con el dado, 31416, debe obtenerse este mismo con un cero a la derecha, pues el resultado es el producto de 31416 por 10.

Precisamente es así cómo se procede para construir lo que se llama *tabla de multiplicación* o de *Pitágoras.*

En una fila horizontal se escriben los nueve dígitos; debajo, los resultados de sumar cada uno con sí mismo; en una tercera fila, los resultados de sumar las dos primeras filas; luego, los de sumar la tercera con la primera; en seguida, los de sumar la cuarta con la primera; y así sucesivamente hasta la novena línea. Se obtiene, de esta manera, el cuadro siguiente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Disponiendo de este cuadro, si se quiere, por ejemplo, hallar el producto de 7 por 8 se señala el número 7 en la primera fila horizontal, y luego en la 8.ª fila, es decir, en aquélla que empieza por 8, se encuentra, en frente del 7, es decir, en la intersección de la columna vertical, que empieza por 7 con la fila horizontal que empieza por 8, el producto buscado, el cual resulta ser 56.

El cuadro anterior es simétrico respecto de la fila oblicua que parte del 1 y llega al 81. Dicha fila contiene los productos de los dígitos consigo mismo o, como se dice (n.° **113**, pág. 57), los *cuadrados* de los dígitos; y la simetría indicada es una consecuencia de la propiedad conmutativa (n.° **85**, pág. 45), de la multiplicación.

c) **Producto de dos dígitos.** Están indicados en la tabla de multiplicación y deben retenerse en la memoria.

d) **Uno de los factores es dígito sin serlo el otro.** En virtud de la recordada propiedad conmutativa, podemos suponer que el factor dígito es siempre el multiplicador.

Sea, entonces, efectuar la operación 271828×3. Podría efectuarse la suma equivalente a esa multiplicación como se indica al margen; pero se efectúan de un golpe las sumas parciales, observando que basta, para ello, multiplicar por 3 cada cada una de las cifras del multiplicando; si hay cifras retenidas en los diversos productos parciales, se suman, al producto parcial siguiente, después de efectuado éste. Así, en el caso considerado, se dirá: 3 por 8, 24; escribo 4 y retengo 2; 3 por 2, 6; 6 más 2 retenido, 8; escribo 8; 3 por 8, 24; escribo 4 y retengo 2; 3 por 1, 3; más 2 retenido, 5; escribo 5; 3 por 7, 21; escribo 1 y retengo 2; 3 por 2, 6; más 2 retenido, 8; escribo 8. La operación se dispone así:

$$\begin{array}{r} 271828 \\ 271828 \\ 271828 \\ \hline 815484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 271828 \\ 3 \\ \hline 815484 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 57721 \\ 8 \\ \hline 461768 \end{array}$$

De ahí la siguiente

Regla práctica. *Para multiplicar un número de varias cifras por un dígito, se escriben ambos números uno debajo del otro, de preferencia el dígito abajo; se traza una raya horizontal debajo de los números así escritos y se escribe el producto debajo de la raya haciendo corresponder las cifras de los diversos órdenes del producto con las del multiplicando. Se multiplica la cifra de la derecha del multiplicando por el dígito y se escribe la cifra de las unidades simples del producto, reteniendo la cifra de las decenas, si las hay; se multiplica luego la cifra de las decenas del multiplicando por el dígito y al producto obtenido así, se le suma el número antes retenido, si lo hubo; la cifra de las unidades del resultado es la cifra de las decenas del producto buscado; se escribe en su lugar y se retiene las decenas, si las hay; y se continúa así hasta agotar todas las cifras del multiplicando.*

e) **Uno de los factores es un dígito seguido de ceros.** Sea, por ejemplo, efectuar la operación

$$78093 \times 500.$$

Tenemos: $500 = 5 \times 100$ (caso a)

Luego, $78093 \times 500 = 78093 \times 5 \times 100.$

La operación 78093×5 se encuentra en el caso d) y la multiplicación subsiguiente por 100 en el caso a).

En general, pues, para resolver el caso indicado, *se prescinde de los ceros; se multiplican los factores, uno de los cuales es ahora un dígito, y al producto obtenido se le agrega a la derecha tantos ceros como fueron suprimidos.*

f) **Caso general. Multiplicar dos números cualesquiera.** Sea multiplicar 98756 por 823.

Tenemos:

$$823 = 800 + 20 + 3$$

Luego,

$$\begin{aligned} 98756 \times 823 &= 98756 \times (800 + 20 + 3) \\ &= 98756 \times 800 + 98756 \times 20 + 98756 \times 3 \qquad (\text{n.}^{\circ}\ 90,\ \text{pág. } 46) \end{aligned}$$

Estas multiplicaciones entran en los casos anteriores. Se dispone la operación como se indica a continuación:

$$\begin{array}{r} 98756 \\ 823 \\ \hline 296268 \\ 1975120 \\ 79004800 \\ \hline 81276188 \end{array}$$

Se escribe, primero, el multiplicando, y debajo, el multiplicador; debajo de éste se tira una raya horizontal; debajo de la raya se escriben los productos del multiplicando por 3, 20 y 800, los unos debajo de los otros, de manera que se corresponden las unidades de los diversos órdenes en una misma columna vertical. Estos productos se llaman *parciales*. Generalmente se evita escribir, uno, dos, tres ceros a la derecha del primero, segundo, tercer producto parcial, pero se cuida de poner las otras cifras en el lugar que les corresponden como si estuvieran escritos los ceros. Luego se suman los productos parciales como se indicó (n.º 48, pág. 31). Esta suma, que en nuestro ejemplo es 81276188, es el producto buscado. Si alguna cifra del multiplicador fuera 0, originaría un producto parcial constituído por puros ceros; se evita escribirlo a condición de colocar las cifras del producto parcial siguiente como si esta línea de ceros existiera.

La multiplicación

$$31416 \times 458$$

se ejecutaría prácticamente en una de estas dos formas:

31416	31416
458	458
251328	125664
157080	157080
125664	251328
14388528	14388528

Cuando los factores terminan en ceros se efectúa el producto como si éstos no existieran, pero se agrega a la derecha de éste, luego de hallado, tantos ceros como tenían ambos factores.

Por ejemplo, si debe multiplicarse 98756000 por 8230000, estos números pueden escribirse así:

$$98756 \times 1000, \qquad 823 \times 10000$$

y su producto es

$$98756 \times 823 \times 1000000 \qquad \text{(n.° 93, pág. 48)}$$

luego una vez efectuado el producto de 98756×823 basta (n.° 108, pág. 51), agregar $3 + 4 = 7$ ceros, suma de los ceros de los factores a la derecha de aquél para obtener el buscado; éste resulta ser 812761880000000.

109. Regla práctica. *Para multiplicar dos números de varias cifras, se suprimen los ceros colocados a la derecha de los números, si existen; se escribe el multiplicador (el número de menos cifras) debajo del multiplicando y debajo de él una raya horizontal. Se multiplica sucesivamente el multiplicando por los números indicados por cada cifra del multiplicador siguiendo el orden de derecha a izquierda. Se escribe cada producto parcial debajo del anterior reculando de un rango hacia la izquierda, es decir, de manera que la cifra de las unidades de un producto parcial esté debajo del de las decenas del anterior, etc. Si hay algún cero en el multiplicador se saltea, pero el producto parcial siguiente se recula de dos lugares hacia la izquierda respecto del producto parcial anterior. Si hubiera dos ceros sucesivos en el multiplicador al escribir el producto parcial siguiente se reculará de tres lugares hacia la izquierda respecto del anterior, etc. Una vez escritos todos los productos parciales, se suman éstos y se obtiene el producto buscado. Si se hubie-*

re quitado ceros a los factores, se agregarán éstos a la derecha del producto, tantos cuantos se han quitado.

110. **Pruebas de la multiplicación.** — La propiedad conmutativa de la multiplicación nos permite hacer la prueba de la misma, cambiando el multiplicando en multiplicador y viceversa.

111. **Producto de varios factores.** — Si deben multiplicarse varios factores se empieza multiplicando dos de ellos, luego el producto obtenido se multiplica por el tercero, etc., o en cualquier otro orden (n.° 93, pág. 48).

112. **Número de cifras del producto.** — Supongamos que el multiplicando a tenga 5 cifras y que el multiplicador b tenga 3 cifras; este último es menor que 1000 y a lo menos igual a 100, el producto será, por consiguiente, menor que $a \times 1000$ y a lo menos igual a $a \times 100$; estos dos últimos productos se obtienen colocando 3 ó 2 ceros a la derecha del número a; se obtiene así como producto un número de $5 + 3$ o de $5 + 2$ cifras. Luego el producto tiene 8 ó 7 cifras. Análogamente se demostrará que, en general, *el producto de dos números tiene tantas cifras como ambos factores juntos o una menos.*

EJERCICIOS

30. Demostrar que la suma de dos números es siempre menor que el producto de los mismos, salvo que uno de los sumandos sea 1 o que ambos sean 2.

31. Demostrar que, dada una colección de n objetos, el doble del número de colecciones distintas de dos objetos, que pueden formarse con ella es igual a $n\ (n - 1)$.

32. El producto de tres números consecutivos es un múltiplo de 6.

33. ¿Qué número debe agregarse a 7486993 para hacerlo 100 veces mayor?

34. Efectuar las multiplicaciones siguientes:

$$12378965 \times 48765$$
$$840076 \times 37005$$
$$180302 \times 900463$$

35. Multiplicar un millón mil uno, por cien mil cien y expresar verbalmente el resultado.

36. Para multiplicar un número por 99997, se agregan cinco ceros a su derecha y se resta del número obtenido tres veces el número dado.

37. Para multiplicar un número por 12111, se multiplica dicho número por 11, y el producto así obtenido se vuelve a multiplicar por 11; se agrega dos ceros a la derecha de este último producto y se suma el primer producto.

38. Efectuar el producto de un número cuyo guarismo tiene p cifras igua-

les a 9, por un número cuyo guarismo esté constituído por p cifras iguales, y hallar la ley de formación de ese producto. Por ejemplo: 9×2 ; 99×22 ; 999×2222 ; ...

39. ¿Cómo altera el producto de dos factores:

1.° Cuando se aumenta el multiplicador con 3.
2.° » » » » multiplicando con 13.
3.° » » disminuye » multiplicando con 7.
4.° » » » » multiplicando con 11.
5.° » » multiplica uno de los factores por 4.
6.° » » » uno de los factores por 5 y el otro por 8.
7.° » » aumenta 1 a cada factor.
8.° » » disminuye 1 » » »
9.° » » agrega 8 a uno de los factores y se disminuye 2 al otro?

40. Efectuar los cálculos siguientes, transformando los productos en polinomios:

$$(17 - 8) \times (42 - 5) \qquad (17 + 8) \times 42 - 5.$$

41. Demostrar que la suma de todos los números contenidos en la tabla de multiplicación hasta 9 es igual a la suma de los nueve primeros dígitos multiplicada por sí misma.

42. Sabiendo que un libro tiene 499 páginas, cada una de 39 líneas y que cada línea tiene 47 letras ¿cuántas letras contiene ese libro?

43. Calcular el efectivo de una brigada compuesta de 3 regimientos, cada uno de 5 batallones; cada batallón encierra 4 compañías de 120 hombres cada una.

4. La Potenciación

113. Definiciones. — Si todos los factores de un producto de varios factores son iguales, basta, para hallar ese producto, conocer el factor que se repite y el número de veces que se repite como factor. La multiplicación presentada en esa forma, o sea con tal determinación, se llama **potenciación.** El factor constante se llama la **base**; el número de factores, el **exponente.** La operación se indica escribiendo la base y luego, a su derecha y algo arriba, en tipo menor, el exponente. Así, la multiplicación $3 \times 3 \times 3 \times 3$, se designará 3^4, 3 expresa la base; 4 el exponente; el resultado se llama **potencia.** La segunda potencia se llama **cuadrado**; la tercera, **cubo.** Las demás se expresan diciendo **cuarta, quinta, sexta** potencia. Así la expresión anterior 3^4 se leera, **la cuarta potencia de 3.** La cuarta potencia se expresa a veces con el vocablo **bicuadrada.**

Llamaremos *primera potencia* de una colección (y, por extensión, para abreviar, primera potencia *de un número*), a esa misma colección (o a ese mismo número).

El exponente 1 generalmente se sobreentiende. Así tendremos:

$a^1 = a.$
$a^2 = a.\ a.$
$a^3 = a.\ a.\ a.$
$a^n = a.\ a.\ a.\ \ldots$ (*n* veces). Se lee «enésima potencia de *a*».

Se conviene en que el símbolo a^0 signifique 1. Es decir $a^0 = 1$ por la razón que se da más adelante (n.° **135**, pág. 69).

114. Propiedades de la potenciación. — De la definición misma se desprende:

a) **Propiedad distributiva para una misma base.** Sea, por ejemplo, ejecutar la operación

$$7^2 \times 7^3 = (7.7)\ (7.7.7) = 7^{2+3}$$

En general se tiene $a^p a^q = a^{p+q}$.

b) **Propiedad distributiva para diferentes bases.** Sea, por ejemplo, la operación:

$$5^3 6^3 = 5.5\,5.6.6.6 = (5.6).(5.6).(5.6) = (5 \times 6)^3$$

En general se tiene

$$a^p b^p c^p \equiv (a.b.c)^p$$

c) **Propiedad asociativa.** Sea, por ejemplo, la operación:

$$(4^2)^3 = 4^2 4^2 4^2 = 4.4.\ 4.4.\ 4.4. = 4^{3 \times 2}$$

En general se tiene:

$$(4^p)^q = a^{pq}$$

115. Observaciones. — a) El exponente de una potencia puede a su vez ser una potencia. Así:

$$5^8 = 5^{(2^3)}$$

Hay que tener cuidado, en esos casos, de no confundirse. En general se acepta que la notación

a^{b^c} significa $a^{(b^c)}$ y no $(a^b)^c$. Así $4^{3^2} = 4^9$ y no $4^{3^2} = 4^3 \times 4^3 = 4^6$.

b) Una potencia cualquiera de 10 es igual a 1 seguido de tantos ceros como indica el exponente.

Así

$$10^5 = 100000.$$

Como la unidad de orden *p*, es 1 seguido de p-1 ceros, esa unidad se representará así:

$$10^{p-1}.$$

Por consiguiente, un número n que tiene *p* cifras, *a, b, c, . . ., k, l*, leídas de izquierda a derecha, podrá expresarse así:

$$n = a \times 10^{p-1} + b.10^{p-2} + c.10^{p-3} + \ldots + k.10 + l.$$

c) Es evidente que para cualquier número *n* se tiene $0^n = 0 \quad 1^n = 1$.

d) Si $a > b$ resulta $a^n > b^n$.

e) Si $p > q$ resulta $a^p > a^q$.

Estas dos últimas propiedades son consecuencias de lo establecido en el n.° 104, pág. 50.

116. Cuadrado y cubo de una suma indicada. — Si hubiera de calcularse el cuadrado de $(a + b)$, habría que multiplicar $(a + b)$ por sí mismo, es decir, hacer el producto $(a + b), (a + b)$.

De acuerdo a lo dicho en el n.° 91 (pág. 47), efectuado el producto se encuentra el polinomio aritmético:

$$a \times a + ab + ab + bb$$
$$\text{como } ab + ab = ab \times 2 = 2ab.$$

Resulta en definitiva, la identidad: $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$.

Que se expresa diciendo:

El cuadrado de la suma de dos colecciones (es decir, el resultado de reunir esa colección-suma con otras iguales a ella tantas veces como lo indica el número que la afecta), es igual al cuadrado de la primera de las colecciones, más el doble producto de esa primera coleción por el número que afecta la segunda y más el cuadrado de la segunda.

Más abreviadamente, aunque más incorrectamente, se dice:

117. *El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

De igual manera se demostrará la identidad

$$(a + b)^3 \equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b).$$

Hay que ejecutar las operaciones

$$(a+b)(a+b)(a+b) \equiv (a+b)^2(a+b) \equiv (a^2+2ab+b^2)(a+b)$$
$$\equiv (a^2+2ab+b^2)a+(a^2+2ab+b^2)b$$
$$\equiv a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Este resultado se expresa abreviadamente así:

118. *El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo; más el triplo del primero por el cuadrado del segundo; más el cubo del segundo.*

O también:

El cubo de la suma de dos números, es igual a la suma de los cubos de esos dos números aumentada de 3 veces el producto de su suma por su producto.

119. **Otras identidades importantes.** — De las identidades:

$(a+1)^2 \equiv a^2+2a+1$ a)

$(a+1)^3 \equiv a^3+3a^2+3a+1$ b)

Se deducen estas otras:

$(a+1)^2 - a^2 = 2a+1 = a+(a+1)$ c)

$(a+1)^3 - a^3 = 3a^2+3a+1$ d)

Todas ellas pueden enunciarse así.

a) *El cuadrado de un número es igual al del anterior, más dos veces este último, más uno.*

b) *El cubo de un número es igual al del anterior más tres veces el cuadrado de este último, más tres veces este mismo, más uno.*

c) *La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es igual al duplo del menor, más uno, o también a la suma de esos números.*

d) *La diferencia entre los cubos de dos números consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo del menor, más uno.*

Ejemplos:

a) $4^2 = 3^2 + 2.3 + 1.$

b) $5^3 = 4^3 + 3.4^2 + 3.4 + 1.$

c) $6^2 - 5^2 = 2.5 + 1 = 6 + 5.$

d) $6^3 - 5^3 = 3.5^2 + 3.5 + 1.$

También tenemos las identidades:

$$(a+b)(a-b) \equiv a^2 + ab - ab + b^2 = a^2 - b^2 \qquad e)$$
$$(a-b)(a-b) \equiv a^2 - ab - ab + b^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2 \qquad f)$$

Que se enuncian diciendo

e) *El producto de la suma de dos números, multiplicada por la diferencia de los mismos, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos números.*

f) *El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

Ejemplos:

e) $(7+3)(7-3) = 7^2 - 3^2$.
f) $(7-3)^2 = 7^2 - 2.7.3 + 3^2$.
g) Consideremos ahora la identidad f):

$$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2.$$

Agregando y restando al polinomio $a^2 - 2ab + b^2$, el producto 4.ab. puede escribirse la identidad así:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &\equiv a^2 - 2ab + b^2 + 4ab - 4ab\\ &\equiv a^2 - 2ab + 4ab + b^2 - 4ab\\ &\equiv a^2 + 2ab + b^2 - 4ab\\ &\equiv (a+b)^2 - 4ab\end{aligned}$$
$$(a-b)^2 \equiv (a+b)^2 - 4ab$$

o también

$$(a+b)^2 \equiv (a-b)^2 + 4ab \qquad (9)$$

que se enuncia diciendo:

g) *Si al cuadrado de la diferencia de dos números se le agrega cuatro veces su producto, se obtiene el cuadrado de su suma.*

Por ejemplo:

$$(5+2)^2 = (5-2)^2 + 4.5.2$$

Si designamos por s la suma de dos números y por d su diferencia y por p su producto, la identidad g) puede expresarse así:

$$s^2 = d^2 + 4p$$

expresión que permite encontrar uno de los tres números *s*, *d* y *p* conociendo los otros dos.

h) Finalmente tenemos también la identidad fácil de demostrar:

$$(a - b)^3 \equiv a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

EJERCICIOS

44. Efectuar rápidamente las operaciones:

$$(3794)^2 - (3754)^2$$
$$(164369)^2 - (164119)^2$$

45. Hallar el producto de la suma por la diferencia de doscientos treinta y ocho mil cuatrocientos veinte y ocho por ciento cuatro mil sesenta y nueve.

46. La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 28731; hallar esos números.

47. Todo cuadrado de un número par es un múltiplo de 4.

48. Calcular los cinco productos que se obtienen multiplicando cada una de las cinco primeras potencias de 8 por esas mismas potencias de 5.

49. Demostrar que se obtiene el producto $(10^m + a) \times (10^m + b)$, multiplicando 10^m por $10^m + a + b$ y agregando $a \times b$. Aplicarlo a casos particulares.

5. — La División.

120. Definiciones. — Esta operación consiste en hallar uno de los factores de un producto, conociendo éste y el otro factor. El producto dado en esas condiciones se llama **dividendo**, el factor conocido **divisor** y el que se busca **cociente**. Si el factor conocido, o divisor, es el multiplicando del producto (es decir, del dividendo), el factor buscado (o sea el cociente) es el multiplicador, esto es, un *número* cardinal; si, en vez el factor conocido es el multiplicador, el buscado es el multiplicando, esto es, una colección de objetos.

Así, el producto de una colección de 3 unidades, por 2, o sea, el resultado de sumar 3 colecciones, cada una de 2 objetos, es una colección de 6 objetos; luego, dividir una colección de 6 objetos (*dividendo*), por una colección de 3 objetos (*divisor*), es hallar el número (*cociente*) — 2, en este caso — de colecciones de 3 objetos que deben sumarse para obtener otra de 6 objetos.

Pero también puede decirse que, dividir una colección de 6 objetos (*dividendo*) por el número 2 (*divisor*) es hallar qué colección (*cociente*), — una de tres objetos en este caso, — repetida 2 veces como sumando, origina una colección de 6 objetos. En el primer caso, el divisor es una colección y el cociente un número; en el segundo el divisor es un número y el cociente una colección.

Es evidente que la división carecerá de sentido si el dividendo no es un múltiplo (n.° 99, pág. 49) del divisor.

121. Si se prescinde de los objetos de las colecciones puede hablarse de *división de números*, así la división de 6 por 3 se dice ser 2, porque la división de una colección de 6 objetos por una de 3 objetos es 2. Cuando, en lo sucesivo, se hable de división de números, no hay que olvidar la convención anterior.

122. Propiedades. — Designemos con a al dividendo de una división, con b al divisor y con c al cociente; hemos visto que a debe ser un múltiplo de b para que la operación tenga sentido. Además, b no debe ser 0, pues todo múltiplo de 0 es cero (n.° 97, pág. 49). Si fuese 0, la operación carecería de sentido, a menos que a fuese también *cero*, pues, en este caso, cualquier número podría ser cociente, desde que la igualdad $a = bc$ tomaría entonces la forma $0 = 0c$ y cualquier valor de c la satisfacería (n.° 97). En este caso la operación no sería unívoca o uniforme, siéndolo en todos los demás casos según se desprende del n.° 100.

123. Se representa la división de a por b de la siguiente manera: $\frac{a}{b}$, y se tiene entonces $\frac{a}{b} = c$. En vez de $\frac{a}{b}$ se escribe, a veces, a/b o $a : b$. De lo anterior se deduce que:

$\left(\frac{a}{b}\right) \times b = a$ siempre que b no sea nulo. Efectivamente, si el cociente de $\frac{a}{b}$ es c, se tendrán, por definición, las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{b} = c; \qquad a = bc; \qquad a = b\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)b.$$

124. Luego: *No se altera un número dividiéndolo primero y multiplicándolo después por un mismo número, siempre que éste no sea nulo.* Veremos más abajo que un número puede también multiplicarse primero y dividirse después por un mismo número no nulo, sin alterar aquél (n.º 128, identidad 3.ª).

125. También es evidente que $\dfrac{a}{1} = a$; es un caso particular del anterior, pues el número que divide y multiplica a es 1.

126. Las fórmulas

$$\frac{a}{b} = c, \qquad a = bc, \qquad b = \frac{a}{c},$$

tienen el mismo significado siempre que a, b, c no sean nulos. Luego, si uno de los números a, b o c es desconocido, puede ser aislado y determinado conociendo los otros dos. En la primera fórmula está aislado c, en la segunda a y en la tercera b.

127. El módulo de la división es el número 1.

128. **Combinación de la división con la adición, substracción y multiplicación.** — De la definición (n.º 120) de división se deducen las siguientes identidades:

1.ª $$\frac{(a+b)}{m} \equiv \left(\frac{a}{m}\right) + \left(\frac{b}{m}\right);$$

2.ª $$\frac{(a-b)}{m} \equiv \left(\frac{a}{m}\right) - \left(\frac{b}{m}\right);$$

3.ª $$a\left(\frac{b}{c}\right) \equiv \frac{(ab)}{c}; \quad \therefore \quad \left(\text{Si } b = c \text{ resulta } \frac{(ac)}{c} = a;\right.$$

4.ª $$\frac{a}{(bc)} \equiv \frac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c};$$

5.ª $$\frac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)} \equiv \left(\frac{a}{b}\right)c;$$

6.ª $$\frac{a}{b} \equiv \frac{(am)}{(bm)}$$

7.ª $$\frac{a}{b} \equiv \frac{\left(\frac{a}{n}\right)}{\left(\frac{b}{n}\right)}$$

En las fórmulas 1.ª, 2.ª, 3.ª, 6.ª y 7.ª, se puede, sin temor de incurrir en ambigüedades, suprimirse los paréntesis, y aun cuando en las 4.ª y 5.ª las rayas indican bastante claramente el orden en que deben efectuarse las operaciones, conviene, para mayor claridad, dejar los paréntesis.

Se supone, en las fórmulas anteriores, que las divisiones indicadas tengan sentido.

La justificación de esas identidades se hace así:

1.ª y 2.ª De la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición y de la substracción (nᵒˢ **88** y **105**) resulta que

$$\left(\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}\right) \times m \equiv \frac{a}{m}\, m \pm \frac{b}{m}\, m \equiv a \pm b .$$

Luego, $a \pm b$ resulta ser el producto de los dos factores $\left(\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}\right)$ y m, y se tiene, según la definición de división, que $\dfrac{a \pm b}{m} \equiv \dfrac{a}{m} \pm \dfrac{b}{m}$.

Las propiedades recién demostradas se indican diciendo que la división es una operación **distributiva respecto de la adición y de la substracción.**

3.ª Se tiene:

$$a\left(\frac{b}{c}\right) \equiv \left(\frac{b}{c}\right) a \equiv \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \ldots (a \textit{ veces}) \equiv$$

$$\equiv \frac{b + b + b \ldots (a \text{ veces})}{c} \text{ (identidad 1.ª)} \equiv \frac{ba}{c}.$$

4.ª Designemos con la letra d al cociente de $\dfrac{a}{(bc)}$, se tendrá

$$d = \frac{a}{(bc)}; \;\therefore\; a = (bc)d \equiv b(cd)$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right) = cd \quad \therefore \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = d$$

$\therefore$ reemplanzando d por su valor:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} \equiv \frac{a}{(bc)}.$$

5.ª Hagamos

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = d,$$

luego

$$a = \left(\frac{b}{c}\right) d \equiv \frac{bd}{c} \equiv b\left(\frac{d}{c}\right) \text{ (identidad 3.ª)}$$

$\therefore$:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}.$$

Considerando, en esta última igualdad, d como dividendo, c como divisor y $\frac{a}{b}$ como cociente, se tendrá:

$$d = c\left(\frac{a}{b}\right) \therefore \text{ reemplanzando } d \text{ por su valor:}$$

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} \equiv \left(\frac{a}{b}\right) c.$$

6.ª y 7.ª Designemos al cociente de $\frac{a}{b}$ con la letra c, tendremos:

$$a = bc$$

$$\therefore \quad am = bmc \quad ; \quad \frac{a}{m} = \frac{b}{m} c$$

$$\therefore \quad \frac{am}{bm} = c \quad ; \quad \frac{\left(\frac{a}{m}\right)}{\left(\frac{b}{m}\right)} = c$$

∴ reemplazando c por su valor:

$$\therefore \quad \frac{bm}{am} \equiv \frac{b}{a} \quad ; \quad \frac{\left(\frac{a}{m}\right)}{\left(\frac{b}{m}\right)} \equiv \frac{a}{b}$$

Se ve que en las fórmulas 1.ª, 2.ª y 7.ª, si las divisiones indicadas en el segundo miembro son posibles, el primer miembro debe tener sentido. Al revés sucede en la 3.ª y 4.ª, es decir, que si las divisiones indicadas en el primer miembro son posibles, el segundo miembro debe tener sentido. En cuanto a la fórmula 6.ª si un miembro tiene sentido, el otro también debe tenerlo.

129. Las fórmulas 1.ª y 2.ª pueden, evidentemente, extenderse y enunciarse diciendo.

Para dividir un conjunto formado por adiciones y substracciones sucesivas de conjuntos parciales, por un número, puede dividirse separadamente cada uno de los conjuntos parciales por dicho número (siempre que estas operaciones tengan sentido), y luego reunir los cocientes por adiciones y substracciones en el mismo orden en que lo están los conjuntos parciales respectivos que constituyen el dividendo, y viceversa, puede expresarse como un cociente único, un conjunto de cocientes parciales ligados entre sí por adiciones y substracciones. Así:

$$\frac{2+4+8+-10}{2} = \frac{2}{2} + \frac{4}{2} + \frac{8}{2} - \frac{10}{2}$$

$$\frac{9}{3} - \frac{6}{3} + \frac{3}{3} = \frac{9-6+3}{3}$$

130. Si los divisores fueran diferentes, la identidad 6.ª permitirá hacerlos iguales, pues bastará multiplicar el dividendo y el divisor de cada cociente parcial por el producto de los demás divisores. Así:

$$\frac{8}{2} - \frac{9}{3} + \frac{10}{5} = \frac{8 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 5} - \frac{9 \times 2 \times 5}{3 \times 2 \times 5} + \frac{10 \times 2 \times 3}{5 \times 2 \times 3} =$$

$$= \frac{8 \times 3 \times 5 - 9 \times 2 \times 5 + 10 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 5}$$

131. La propiedad asociativa de la multiplicación y las identidades 3.ª, 4.ª y 5.ª, leídas en uno u otro sentido, nos enseñan cómo se multiplica o divide un número por un producto o un cociente y también cómo se multiplica o divide un producto o un cociente por un número. Los factores y divisores pueden colocarse en cualquier orden sin que el resultado final cambie.

Ejemplo:

$$\frac{\left(3\times\frac{8}{2}\right)}{\left(\frac{9}{3}\right)}=\frac{\left(\frac{3\times 8}{2}\right)}{\left(\frac{9}{3}\right)}\text{ (identidad 3.ª)}=\frac{3\times 8}{2\left(\frac{9}{3}\right)}\text{ (identidad 4.ª)}=$$

$$=\frac{3\times 8}{\left(\frac{2\times 9}{3}\right)}\text{ (identidad 3.ª)}=\frac{3\times 8}{2\times 9}\times 3\text{ (identidad 5.ª)}=$$

$$=\frac{3\times 8\times 3}{2\times 9}$$

132. Según lo anterior:

Para dividir el producto de factores, por un número que divida exactamente a uno de esos factores, basta reemplazar, en el producto, dicho factor por el cociente de su división por el número.

Así, el cociente de la división de $(5 \times 14 \times 8) : 7$ es, ya que $(14 : 7) = 2$, $5 \times 2 \times 8$.

Basta hacer la prueba: $(5 \times 2 \times 8) \times 7 = 5 \times (2 \times 7) \times 8 = 5 \times 14 \times 8$, es decir, el dividendo.

133. *Una consecuencia de ello es que para dividir un producto de varios factores por uno de ellos, basta suprimir ese factor en el producto.*

134. *El cociente de la división de dos potencias de un mismo número, cuando el exponente del dividendo es mayor que el del divisor, es igual a una potencia de ese número cuyo exponente es la diferencia entre el exponente del dividendo y el del divisor.*

Así: $7^{14} : 7^8 = 7^6$. Basta hacer la comprobación $7^8 \times 7^6 = 7^{14}$.

En general se tiene que como $a^p a^q = a^{p+q}$

se deduce que $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ya que

$$a^{m-n}a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

135. Exponente cero. — Como $\frac{a^m}{a^m} = 1$, se tiene que $1 = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$; de modo que la expresión a^0 debe entenderse como expresando el número 1 a fin de conservar las reglas del cálculo.

136. Otra acepción de la división. — Definición. En vez de considerar a la división como la operación inversa de la multiplicación, puede dársele otro significado más general, considerándola como un caso especial de substracciones sucesivas. En ese caso se llama, a veces, **división natural** para distinguirla de la otra acepción. Se dirá, entonces:

Dadas dos colecciones de objetos, la división natural de la primera por la segunda consiste en averiguar cuántas colecciones parciales de tantos objetos como tiene la segunda, puede extraerse de la primera, y determinar la colección restante cuando quede en la primera un número de objetos menor que el de la segunda. El número de substracciones sucesivas que puede efectuarse es el **cociente** de la división; el **resto** de la última substracción es el **resto** de la división natural.

La primera colección es el **dividendo**; la segunda el **dividente** (*). Ejemplo:

Supongamos que un niño quiere repartir entre dos compañeros nueve bolillas contenidas en una caja, dando a cada uno un número igual de bolillas. Podrá proceder de la siguiente manera: dará, primero, una bolilla a cada compañero, habrá quitado así 2 bolillas de la caja; luego, dará a cada uno otra bolilla; habrá quitado así dos veces dos bolillas de la caja o sean 4 bolillas, y quedarán cinco; volverá a darles una y quedarán tres; repetirá la operación y quedará una; ahora no podrá dar ya una a cada uno puesto que, para ello, deberían quedar dos en la caja. La operación, por consiguiente, ha terminado; el número 4 de distribuciones de bolillas hechas, indica el de veces que se ha extraído o substraído dos bolillas de la caja; esto es, de la colección de las nueve bolillas primitivas, es el **cociente**, e indica también cuántas bolillas ha re-

(*) El dividente suele, ordinariamente, continuar llamándose «divisor» como en la otra acepción de la división, pero atento a la definición de *divisor* que se dan en los nos. 99 (pág. 49) y 158 (pág. 82), hay evidente incongruencia en adoptar el mismo nombre.

cibido cada niño. La colección de bolillas remanente en la caja, es el **resto** de la división, esto es, de la operación efectuada; las nueve bolillas primitivas constituyen el **dividendo**; la colección de los dos alumnos entre los que se han repartido las bolillas, constituyen el **divídente.** Como se ve, la colección de nueve bolillas primitiva se ha descompuesto en dos colecciones parciales de cuatro bolillas y una de una; de suerte que, reuniendo nuevamente estas colecciones, se reconstituiría la primitiva colección de nueve bolillas; luego el resto de la división es la diferencia entre la colección primitiva o dividendo y la suma de las colecciones parciales, todas de igual número de bolillas; suma que es igual al producto del divídente por el cociente. Por consiguiente, puede escribirse:

$$9 = 2 \times 4 + 1.$$

Si designamos con la letra a al dividendo, con b al divídente, con c al cociente y r al residuo, tendremos la igualdad

$$a = bc + r$$

en la que r es menor que b.

137. Como se ve, puede también decirse que *la división natural es una operación que consiste en descomponer el dividendo en un cierto número de colecciones parciales de tantos objetos como tiene el divídente y en un resto menor que el dividendo.* El número de colecciones parciales en cuestión es el cociente.

138. Si el divídente es un divisor (n.° 99) del dividendo, el resto de la división es cero. Se dice, entonces, que la **división es exacta,** o que el **cociente es exacto** y corresponde a la definición del n.° **120.** Entonces se dice, también, según vemos, que el divisor y el cociente son **submúltiplos** del dividendo.

Resulta así que esta nueva acepción de la división comprende a la primera. Es más amplia que ésta y siempre tiene sentido, cualesquiera que sean los datos.

139. La definición de división dada en el n.° **137,** viene a reducir esta operación a un caso particular de la operación de extraer de un mismo conjunto de a objetos, varios otros conjuntos parciales de p, q, r objetos; la división supone que los números p, q, r, son iguales. El conjunto a es, entonces, el dividendo; uno cualquiera de los conjuntos parciales de igual número de objetos extraídos, el divídente; el resto de la división es el conjunto restante cuando no puede extraerse más el divídente; y, como se ve, este resto es el mismo que se obtendría restando de a el producto del divídente por el cociente, es decir, la suma de las colecciones parciales extraídas.

140. Cociente cero. — Si el divídente fuera mayor que el dividendo, el cociente sería cero y el resto igual al dividendo. Si el divídente es igual al dividendo podría considerarse el cociente igual a 0 y el resto igual al dividendo; o bien que el cociente es igual a uno y el resto cero, pues en ambos casos se tiene que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el resto. Pero la segunda solución es la única que satisface a la condición de que debe ser el resto menor que el divídente.

141. Si prescindimos de los objetos de la colección y sólo atendemos a los números, podemos decir que:

Dados dos números a *y* b *llamados, respectivamente,* DIVIDENDO *y* DIVÍDENTE, la división tiene por objeto hallar otras dos, c y r, llamados, respectivamente, *cociente* y *resto,* tales que se verifiquen las condiciones:

$$a = bc + r \qquad\qquad r < b.$$

142. Como se ve, el problema de la división implica hallar dos incógnitas c y r y los raciocinios de los nos. **136** y **137** demuestran que siempre existe una solución, única, del problema.

Puede decirse que, en las fórmulas anteriores, bc es el mayor múltiplo de b contenido en a (es decir, inferior o igual a a). Cuando r es nulo, a es un múltiplo de b; se dice, como vimos también entonces, que la división se hace **exactamente** y que a es (exactamente) **divisible** por b o aun que b es un **divisor** de a o un *submúltiplo* de a (n.° 99, pág. 49).

143. Si dos números a y a_1 (*) son tales que, por el mismo divídente o **módulo** b, originan el mismo resto, se les llama **congruentes** con el módulo b y se escribe

$$a \equiv a_1 \ (\text{mód. } b)$$

Una identidad de la forma anterior se llama **congruencia**.

144. Propiedades especiales a la nueva acepción. — Dados dos números a y b, formemos una tabla de los múltiplos sucesivos de b,

---

(*) Cuando se quiere hacer corresponder dos objetos que pertenecen cada uno a una colección diferente (o a los números que afectan dichos objetos), conviene, a veces, designarlos con la misma letra agregando a una, o a las dos, letras una indicación; así se escribirá a y a_1 que se leen a y a *sub uno;* si hay más letras puede ponerse $a, a_1, a_2, \ldots$

esto es, los productos de b por los números 0, 1, 2, 3, 4, ...; como estos múltiplos aumentan constantemente en valor (n.° 100, pág. 49), acabarán por ser mayores que a. Dos casos pueden presentarse:

1.° a figura en la tabla, entonces existe un número c tal que

$$a = bc.$$

Ese número c y el número $r = 0$ satisfacen a las condiciones impuestas al cociente y al resto.

2.° a no figura en la tabla; existen entonces dos números en la tabla entre los cuales se halla a. Si cb y $(c+1)b$ son los dos números entre los que está a; se verificarán las siguientes desigualdades:

$$a > bc \qquad a < (c+1)b$$

las que pueden escribirse así:

$$bc < a < (c+1)b.$$

Se dice entonces que c es el *cociente aproximado en menos de una unidad por defecto.* Se dice, igualmente, que $c + 1$ es el *cociente aproximado en menos de una unidad por exceso.* También resulta que $a + 1 \leqq (c+1)b$; (*) porque si $(c+1)b$ es mayor que a debe, por lo menos, ser igual a $a + 1$ pudiendo ser mayor que $(a + 1)$.

Si r es la diferencia entre bc y a, resultará:

$$a > bc + r \qquad\qquad r < b$$

y la división queda ejecutada.

En general ambos casos 1.° y 2.°, pueden reducirse a uno mediante las expresiones

$$a \geqq bc \qquad\qquad a + 1 \leqq b(c+1).$$

145. División de un número por un producto de factores. — Sea a un número que se divide sucesivamente por k, l, m. Sean b, c, d, los cocientes sucesivos. Según lo anteriormente expresado, se tienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{array}{llll} a \geqq kb & (1) & a + 1 \leqq k\,(b + 1) & (4) \\ b \geqq lc & (2) & b + 1 \leqq l\,(c + 1) & (5) \\ c \geqq md & (3) & c + 1 \leqq m\,(d + 1) & (6) \end{array}$$

Por otra parte, mulitplicando la (2) por k y la (3) por kl y comparando, sale

$$a \geqq kb \geqq lck \geqq kmld \qquad (7)$$

Repitiendo la misma operación con las desigualdades (4), (5), (6) sale, análogamente:

$$a + 1) \leqq k\,(b + 1) \leqq kl\,(c + 1) \leqq klm\,(d + 1) \qquad (8)$$

(*) El signo $\geqq$ se lee "igual o mayor que"; el signo $\leqq$ se lee "igual o menor que".

o sea: también las dos desigualdades

$$a \overline{\overline{>}} klmd \quad (9) \qquad a + 1 \overline{\overline{<}} klm(d + 1) \quad (10)$$

El sistema (9), (10) pone en evidencia que d es el cociente de dividir a por klm.

146. Y como ese producto no altera cualquiera que sea el orden de los factores k, l, m, se desprende que *si se divide un número sucesivamente por varios otros, se obtiene siempre un mismo cociente final, cualquiera que sea el orden en que se efectúan las divisiones parciales.*

En cuanto a los restos, si los designamos con r_1, r_2, r_3, tendremos que

$$r_1 = a - kb \quad ; \quad r_2 = b - lc \quad ; \quad r_3 = c - md.$$

Luego podremos escribir las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= a - klb \\ r_2 k &= bk - lkc \\ r_3 kl &= ckl - klmd \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Ahora bien, el resto r de la división definida por las desigualdades (9) y (10) es

$$r = a - klmd \qquad (12)$$

Sumando ordenadamente las desigualdades (11) y simplificando se deduce que

$$r_1 + r_2 k + r_3 kl = a - klmd \qquad (13)$$

lo que pone en evidencia comparando (12) con (13) que

$$r = r_1 + r_2 k + r_3 kl$$

Para que r sea nulo, debe tenerse $a = klmd$ y atento a que, según la desigualdad (7), kb y lck están comprendidas entre a y klmd, siendo éstas iguales, también tendrán que serlo las intermedias; luego

$$a = kb = klc = klmd$$

En definitiva, entonces:

147. *Si se divide un número* a *por el producto de varios factores, k, l, m, el cociente obtenido es igual al último que se obtiene dividiendo* a *sucesivamente, primero por* k; *luego, el cociente así obtenido, por* l, *y luego el nuevo cociente así obtenido por* m, *etc. Y eso cualquiera que sea el orden que se siga para efectuar esas divisiones parciales. En cuanto al resto de la división de* a *por el producto klm, es igual a la suma de los restos parciales obtenidos en las divisiones parciales indicadas, previa multiplicación de segundo resto por k del tercero por kl, etc.*

148. Si se tiene entre los números a, b, c, y r la relación

$$a = bc + r$$

sólo podrá afirmarse que c es el cociente de la división de a por b, en el caso en que r sea menor que b; supongamos que $r > b$ y llamenos c_1 y r_1 y r el cociente y al resto de r dividido por b, tendremos $r = bc_1 + r_1$

$$\therefore \quad a = bc + bc_1 + r_1 \equiv (c + c_1)b + r_1$$

como ahora $r_1 < b$, esta igualdad prueba que el cociente de a dividido por b es $c + c_1$ y el resto r_1. Luego una relación de la forma

$$a = bc + r$$

en el caso que c no sea el cociente de a; b permite simplificar la investigación de dicho cociente, una de cuyas partes c es ya conocida; para tener la otra parte, c_1, basta dividir r por el número b, que es menor que a; el resto de esta última división es el buscado, el cociente de la misma es la otra parte del cociente buscado.

Se obtendrá este último sumando las dos partes c y c_1.

Es obvio, finalmente, que si a contiene c veces b, y da un resto r menor que a, y se extrae $(c - m)$ veces b de a: lo que queda de a, o sea $a - (c - m)b$ no contendrá ya más que m veces d y dejará el mismo resto r. Eso resulta de las expresiones $a = bc + r$; $a - (c - m)b = a - bc + mb$, pues reemplazando en el segundo miembro de esta igualdad a por $bc + r$, sale

$$a - (c - m)b = bc + r - bc + mb = mb + r$$

$$\text{con } r < b.$$

149. **Observaciones.** — a) El resto de una división $a : b$, puede tomar todos los valores desde 0 hasta $b - 1$, como máximo; cuando toma ese valor máximo tendremos

$$a = bc + (b - 1)$$

de donde

$$a + 1 = bc + b = b(c + 1).$$

Para el resto 0, tendremos

$$a = bc.$$

Vemos, pues, nuevamente (n.° 144) que puede caracterizarse una división natural ya por las expresiones:

$$a = bc + r \qquad r < b$$

o por las:

$$a \geqq bc \qquad a + 1 \leqq b(c + 1).$$

150. **Otras propiedades.** — a) Si entre los números a, b, d, existe la relación

$$a > bd$$

d podrá, a lo sumo, ser igual al cociente c exacto, o al cociente aproximado en menos de una unidad por defecto, de la división a, b; c es, por consiguiente, igual o mayor que d.

Si entre esos mismos números a, b, d existiese, en cambio, la relación

$$a < bd$$

un raciocinio análogo establecerá que c es, a lo sumo, igual a d.

Así que el cociente exacto o aproximado en menos de una unidad por exceso es, en este caso, igual o menor que $d + 1$.

b) *Si se multiplica (o divide) el dividendo y el dividente de una división natural por un número, el cociente no altera, pero el resto queda multiplicado (o dividido) por dicho número.*

Pues si se tiene $a = bc + r \qquad r < b$

multiplicando por un número n, tendremos

$$an = bnc + rn \qquad rn < bn,$$

lo que demuestra que el cociente de $an : bn$ es siempre c y el resto es rn.

Análogamente ocurre si se divide por n en vez de multiplicar.

151. **Práctica de la división en el sistema de numeración decimal.** — Consideremos la división en la acepción más general indicada en el n.º **136** (pág. 69).

a) **El dividente es una potencia de diez.** Sea, por ejemplo, efectuar la división 43725 : 1000.

La igualdad $43725 = 43 \times 1000 + 725$, pone en evidencia que el cociente es 43 y el resto 725. Y como esta consideración puede extenderse a cualquier otro ejemplo, se desprende que:

152. *Para dividir un número por una potencia de 10, se separa a la derecha de ese número tantas cifras como ceros tiene el dividente; el número que queda a la izquierda es el cociente; el constituído por las cifras separadas, el resto.*

b) **El dividente y el cociente son dígitos.** Se conoce que el cociente es un dígito, agregando un cero a la derecha del dividente; si el número así obtenido es mayor que el dividendo, el cociente es evidentemente menor que 10. Así, 73 : 9 tiene un cociente dígito, porque si fuere 10, multiplicado por el dividente 9 daría 90, número mayor que el dividendo 73.

La tabla de multiplicación (pág. 52), nos suministra los múltiplos sucesivos de 9, y vemos que 73 está comprendido entre 72, (9×8) y 81 (9×9). Luego el cociente buscado es 8, siendo el resto 1. En efecto, $73 = 9 \times 8 + 1$. Con práctica se efectúa esta operación instantáneamente.

c) **El cociente es un dígito sin serlo el dividente.** Se conocerá si esta circunstancia se verifica, agregando un cero a la derecha del dividente; si el número obtenido es mayor que el dividendo, el cociente es menor que diez.

La operación se efectúa, entonces, por tanteos; algunas observaciones permiten disminuir el número de ensayos a efectuar.

Sea, por ejemplo, dividir 47385 por 5837; como $58370 > 47385$ el cociente es un dígito.

Si en vez de dividir 47385 por 5837, se dividiera 47385 por 5000, el cociente sólo podría aumentar, pues 5000 está contenido en 47385 por lo menos tantas veces como 5837. Para dividir 47385 por 5000, es decir, por 5 × 1000, puede dividirse aquél, sucesivamente, por 1000 y por 5 (n.º 128, 4.º). El cociente de 47385 por 1000 es 47, y el cociente de 47 por 5 es 9 (caso 1.º). Luego el cociente buscado es 9 u otro número menor; se dice que 9 es un *límite superior* del cociente de la división propuesta.

Igualmente, si se dividiera 47385 por 6000 en vez de dividirse por 5837, el cociente no podría sino disminuir; pero ese cociente se obtiene dividiendo 47385 por 1000 y luego por 6, y se tiene, así, sucesivamente, como cociente 47 y 7; se dice que 7 es el límite inferior del cociente buscado; este último, por consiguiente, podrá ser 7, 8 u 9; bastará, entonces, ensayar únicamente estos tres cocientes. El producto de 5837 por 7 es 40859, número inferior a 47385; el producto de 5837 por 8 es 46696; el producto por 9 da 52533, número mayor que 47385. Luego, el cociente buscado es 8 y el resto 47385 — 46696 = 689.

Sea, como segundo ejemplo, dividir 9989 por 1999; siguiendo el procedimiento indicado debemos dividir 9989 por 1000, el cociente es 9, para ensayar 9 se multiplica 1999 por 9 y se obtiene 17991 mayor que 9989; luego, el cociente buscado es menor que 9; ensayemos 8: tenemos 1999 × 8 = 15992; luego, el cociente es menor que 8; como 1999 × 7 = 13993 debemos ensayar 6: 1999 × 6 = 11994; aun el cociente es menor que 6; 1999 × 5 = 9995; 1999 × 4 = 7996; el cociente buscado por consiguiente, es 4 y el resto de la división es 9989 — 7996 = 1993. Este ejemplo demuestra que, en ciertos casos desfavorables, pueden ser necesarios hasta cinco ensayos; pero, en la práctica no se realizan todos pues se hacen las multiplicaciones con las dos primeras cifras de la izquierda del divídente y se compara el producto con las dos primeras cifras del dividendo. En el ejemplo anterior se dirá, para ensayar 7, : 7 por 9 son 63, 7 por 1 son 7, más 6 son 13, el producto de 19 por 7 es 133, luego el producto de 1999 × 7 contendrá por lo menos 13 millares y será superior a 9989; el cociente es, por consiguiente, menor que 7. La práctica facilita la elección a primer golpe de vista del cociente buscado; para comprobar si este número es el verdadero, basta multiplicarlo por el divídente, y ver si el producto puede restarse del dividendo dejando un resto menor que el divídente.

Para obtener, en el ejemplo anterior, el límite inferior del cociente, se dividirá 9989 por 2000 y se tendrá 4, el cual resulta ser el cociente buscado.

Si se tuviera que efectuar la división siguiente: 12725 por 1984, se dividiría 12725 por 1000 y se obtendría 12, pero como el cociente es un dígito, se empezarían los ensayos a partir de 9; el cociente es 5.

153. Lo anterior justifica la siguiente

Regla práctica. *Cuando el cociente es un dígito, se suprime a la derecha del dividendo, tantas cifras como tiene el divídente,* *menos una; se divide el número restante (que tiene una o dos cifras) por la primera cifra del divídente; si el cociente en cuestión es un dígito, éste viene a ser un límite superior del cociente buscado; en caso contrario se toma 9 como límite superior. Se ensaya la cifra hallada como límite superior, multiplicando el dividendo por ella; si el producto es igual o menor que el dividendo, dicha cifra es el cociente buscado y entonces el resto es igual a la diferencia entre el dividendo y ese producto. Si el producto es mayor que el dividendo, se ensaya el dígito anterior al que se ensayó, y así, sucesivamente, hasta obtener el cociente buscado.*

Se obtiene un límite inferior del cociente, dividiendo el número conservado a la derecha del dividendo por la primera cifra del dividendo, aumentada de 1.

d) **Caso general.** Si el divisor y el cociente no son dígitos, se determina el cociente, cifra por cifra empezando por la izquierda, en base del principio siguiente:

Para obtener el número de decenas, de centenas, de millares, etc., del cociente, basta dividir por el divídente, el número de decenas, de centenas, de millares, etc., del dividendo.

Supongamos, por ejemplo, que el número de millares del cociente sea 35; esto significa que el divídente está contenido 35000 veces en el dividendo y que no está contenido 36000 veces; pero 35000 veces el divídente y 36000 veces el dividendo son respectivamente números exactos de millares que se obtienen multiplicando el divídente por 35 y por 36; el primero de ellos está contenido en el número de millares del dividendo, mientras el segundo no lo está; pero esto equivale a decir que 35 es el cociente de dividir el número de millares del dividendo por el de millares del divídente.

Así, en la división de 748765 por 4325, para obtener el número de millares del cociente, basta dividir 748 por 432.

Esta proposición y lo establecido en el n.º **148** respecto del caso en que se ha separado el dividendo en dos partes de las que una es un múltiplo del divídente, explican el mecanismo de la división.

Sea por ejemplo dividir 236485 por 297; si se quisiese tener el número de decenas del cociente se dividiría 23648 por 297; si se quisiera tener el de las centenas, dividiríamos 2364 por 297, pero ahora el cociente sería un dígito, luego las cifras de las más altas unidades del cociente representa centenas y se obtendrá dividiendo, 2364 por 297, división que está en el caso c), se obtiene, como cociente 7 y como resto 2364 — 297 × 7 = 2364 — 2079 = 285, este resto constituye lo que se llama el **primer resto parcial**; el producto del dividente, 297, por 700, es 207900, y para obtener la diferencia entre 236485 y 207900, bastará, evidentemente, agregar a la derecha del primer resto parcial, 285, las dos últimas cifras, 85, del dividendo, lo que da 28585. Se ve que se ha separado el dividente en dos partes, una igual a 297 × 700, otra igual a 28585; luego, se obtendrá el cociente de la división propuesta agregando a 700 el cociente de la división de 28585 por 297. Este cociente es evidentemente inferior a 100, pues, de lo contrario, 28585 contendría a 297, por lo menos 800 veces; la primera cifra de este cociente representará por consiguiente decenas y se obtendrá dividiendo 2858 por 297 (caso c); se obtiene como cociente 9 y como resto 185. Este último constituye el **segundo resto parcial** y repitiendo el raciocinio anterior se comprueba que basta agregar a su derecha la última cifra, 5, del dividendo, para obtener la diferencia entre 28585 y 90 veces el dividente 297, y que, dividiendo esta diferencia, 1855, por 297 (caso c) se obtiene la cifra, 6, de las unidades del cociente buscado y el residuo, 73, de la división propuesta. Se dispone la operación así:

$$\begin{array}{r|l} 236485 & 297 \\ \cline{2-2} 2079 & 796 \\ \cline{1-1} 28585 & \\ 2673 & \\ \cline{1-1} 1855 & \\ 1782 & \\ \cline{1-1} 73 & \end{array}$$

Las explicaciones anteriores justifican la siguiente:

154. Regla práctica. — *Para dividir un número* a *por otro* b, *se escribe en una misma horizontal, el dividendo a la izquierda y el dividente o divisor a la derecha; se separa ambos por una raya vertical; debajo del dividente se traza una raya horizontal y es debajo de* *esta última donde se escribirá el cociente, cifra por cifra. Se separa a la izquierda de* a *un número, tal que el cociente de éste por* b *sea un dígito; este número es el primer dividendo parcial. El orden de las unidades que expresa en el dividendo la última cifra de ese dividendo parcial, es el orden de las más altas unidades del cociente; el cociente de la división del primer dividendo parcial por el divisor, es la primera cifra del cociente; se multiplica el dividente por el número indicado por esa cifra y se escribe el producto debajo del primer dividendo parcial, de tal manera que las cifras de las unidades de mismo orden se correspondan; se traza una raya debajo de dicho producto y se escribe debajo la diferencia entre el primer dividendo parcial y ese producto; esta diferencia es el primer resto parcial; se forma el segundo dividendo parcial escribiendo a la derecha de ese resto la primera de las cifras del dividendo que sigue del primer dividendo parcial, o, como se dice, se* **baja** *esa cifra; se divide el segundo dividendo parcial por el dividente y se obtiene la segunda cifra de la izquierda del cociente; esta cifra se escribe a la derecha de la ya hallada; se multiplica el número indicado por esta cifra por el dividente y el producto se resta del segundo dividendo parcial en la forma ya indicada, el resto obtenido constituye el segundo resto parcial; se escribe a la derecha de éste la cifra a la derecha de la ya bajada y se obtiene el tercer dividendo parcial, el cual suministrará la tercera cifra de la izquierda del cociente, y así sucesivamente. Cuando se haya bajado la última cifra del dividendo, se obtendrá el último dividendo parcial, el cual, dividido por el dividente, suministrará la cifra de las unidades del cociente. Restando de este último dividendo parcial el producto del dividente por el número indicado por dicha cifra, se obtendrá el último resto parcial, el cual será también el resto de la división. Cuando alguna cifra del cociente resulte ser cero, la multiplicación y substracción correspondiente se efectúan sin escribir nada.*

Cuando el cociente de una división contiene muchas cifras, conviene formar una tabla de los nueve primeros múltiplos del dividente, como se ha indicado en el n.º 108, b, pág. 51; esta tabla permite, en efecto, suprimir los ensayos en cada división parcial suministrando inmediatamente la cifra correspondiente del cociente; de manera que sólo deben efectuarse substracciones.

Cuando el dividente es un dígito, prácticamente se escribe el dividendo e inmediatamente debajo el cociente, efectuando mentalmente los productos y restas parciales. Así, sea dividir 4378967 por 4, se dirá: 4 dividido por 4 da 1, y se escribe 1 debajo de 4; 3 dividido por 4 da 0 y queda 3, se escribe 0 debajo de 3; 37 dividido por 4 da 9 y queda 1, escribo 9 debajo de 7; 18 dividido por 4 da 4 y queda 2, escribo 4 debajo de 8; 29 dividido por 4 da 7 y queda 1, escribo 7 debajo de 9; 16 dividido por 4 da 4, escribo 4 debajo de 6; 7 dividido por 4 da 1, queda 3. Luego el cociente es 1094741 y el resto 3.

155. Método llamado «italiano» o «comprimido» para dividir. — Consiste en hacer mentalmente las substracciones del método corriente. El ejemplo siguiente da cuenta de este método.

87564	23
185	3807
164	
3	

Sea dividir 87564 por 23. La operación se dispone como se indica al margen. Se dice: 87 dividido por 23, da 3; multiplico 3 por 23 y resto, de cabeza, el producto, de 87; para esto digo así: $3 \times 3 = 9$; $9 + 8 = 17$; escribo 8 y retengo 1; $3 \times 2 = 6$; 6 más el 1 retenido $= 7$; $7 + 1 = 8$; escribo 1 y bajo 5. Obtengo así el primer dividendo parcial, 185, y la primera cifra, 3, de la izquierda del cociente que escribo en su lugar. Divido 185 por 23; obtengo 8; $8 \times 3 = 24$; $24 + 1 = 25$, escribo 1 y retengo 2; $8 \times 2 = 16$; 16 más 2 retenido, da 18; $18 - 18 = 0$; bajo el 6 y obtengo el segundo dividendo parcial 16 y la segunda cifra 8 del cociente que escribo en su lugar; 16 no puede dividirse por 23; escribo 0 en el cociente y bajo el 4. Formo así el último dividendo parcial, que dará análogamente la última cifra 7 del cociente y el resto 3.

156. Prueba de la división. — Se efectúa multiplicando el divídente por el cociente y agregando el resto: debe obtenerse el dividendo. También puede efectuarse restando el resto del dividendo y dividiendo el resultado por el cociente: debe obtenerse el divisor. Si la división es exacta puede dividirse el dividendo por el cociente: debe obtenerse el divisor.

157. Número de cifras del cociente. — De lo dicho en el n.° 112, (pág. 56), resulta que el cociente tiene tantas cifras como indica la diferencia entre el número de cifras del dividendo y la del divídente o una más.

EJERCICIOS

Efectuar las divisiones:

50. 16513000 : 2859; 2704812 : 33; 4441455 : 45; 284040408 : 32124.

51. 1234444321 : 1111; 2535453196195 : 314159; 31087012380 : 37005; 1831785144200 : 45007006.

52. ¿Cuántas unidades de tiempo tardaría un viajero para recorrer 23458 unidades de distancia, a razón de 37 unidades por 60 unidades de tiempo?

53. Si 109 se multiplica por un cierto número es aumentado en 2071. Hallar el multiplicador.

54. En una división, el dividente es 20 veces mayor que el cociente y 4 veces mayor que el resto, ¿cuál es el dividendo sabiendo que el resto es 76?

55. Dividir la diferencia de los cuadrados de 9409 y 10609 por la suma de los cuadrados de 97 y 103.

56. Si un número, dividido por 323, origina un resto de 125, ¿cuál será el resto cuando el mismo número sea dividido por 19?

57. En una división, el dividente es 23, el cociente 3807 y el resto 3, ¿cuál es el dividendo?

58. En una división el dividendo es 123456789, el cociente es 123580 y el resto 369, ¿cuál es el dividente?

59. Si al dividendo de una división natural se agrega un múltiplo, md, del dividente d, el cociente aumenta en m quedando igual el resto.

60. El resto obtenido dividiendo la suma de varios números por un dividente, es igual al resto de dividir por el mismo dividente la suma de los restos que dichos números originan al ser divididos separadamente por el dividente.

61. ¿Cuál es el mayor número que puede agregarse al dividendo, sin cambiar el cociente, y cuál para que el cociente sea exacto si no lo era?

CAPÍTULO IV

DIVISIBILIDAD

158. Definiciones. — Recordemos que un número se dice **múltiplo** de otro si es el producto de éste por un número cualquiera de la serie natural. Y que un número se dice **factor, divisor** o **submúltiplo** de otro, si lo **divide exactamente** (n.º 99).

Se dice que un número es **divisible** por otro, si este otro es factor, divisor o submúltiplo del primero.

Conviene, a menudo, saber si un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división, con la inspección de sus cifras. Los criterios que sirven para ese conocimiento se llaman los **caracteres de divisibilidad**; están basados en ciertas proposiciones fundamentales que se expresan a continuación.

159. Proposiciones fundamentales. — **Si dos números son divisibles por un tercero, la suma y la diferencia de los mismos son también divisibles por dicho tercer número.**

Al mayor de los dos números lo designaremos por a, el otro por b.

Designemos por n al tercer número y sean: a_1 y b_1 (*) los cocientes, exactos por hipótesis, de $a : n$ y $b : n$.

Tendremos entonces:

$$a = na_1, \qquad b = nb_1.$$

Sumando y restando ordenadamente a estas igualdades obtendremos:

$$a \pm b = n(a_1 \pm b_1)$$

lo que equivale a decir que $a \pm b$ es divisible por n.

Así, si los números son 321 y 30 y el tercero 3:

$$\frac{321 + 30}{3} = \frac{321}{3} + \frac{30}{3} = 107 + 10 = 117.$$

(*) Esas expresiones se leen como se ha dicho (n.º **143**) *a sub uno; b sub uno.*

160. De una manera enteramente análoga se comprobará que: **Si varios números** $a, b, c, d, e, \ldots$, **son todos divisibles por otro** n, **el polinomio (n.° 57, pág. 35), obtenido sumando o restando aquéllos en cierto orden, es también divisible por** n, **y el cociente se obtiene efectuando las sumas y restas, en el mismo orden, de los cocientes respectivos** $a_1, b_1, \ldots$ **de** a, b, c, por n.

161. Si la suma o la diferencia de dos números es divisible por un tercero, y uno de aquellos números también lo es, el otro es igualmente divisible por el tercero.

Pues que si $\frac{a \pm b}{n} = c$ y $\frac{a}{n} = a_1$, entonces, como $c = \frac{a \pm b}{n} = \frac{a}{n} \pm \frac{b}{n} = a_1 \pm \frac{b}{n}$, se desprende, de esa igualdad, que $a_1 \pm \frac{b}{n} = c$; luego, o $\frac{b}{n} = c - a_1$, o $\frac{b}{n} = a_1 - c$, es decir, que b es divisible por n.

162. Si un número a **es divisible por otro** b, **todo múltiplo de** a **es también divisible por** b.

Pues si am es un múltiplo de a, se le puede considerar como la suma de m números a, todos ellos, por lo tanto, divisibles por b; luego esa suma es divisible por b; y si a_1 es el cociente $a : b$, tendremos que

$$am : b = ma_1$$

Puede también decirse que:

163. Si uno de los factores de un producto es divisible por un número, también es divisible por éste el producto en cuestión, y ello es exacto cualquiera que sea el número de los factores.

164. Si en una división natural se aumenta o disminuye el dividendo en un múltiplo del dividente, no altera el resto.

Pues si a, b, c, r representan, ordenadamente el dividendo, el dividente, el cociente y el resto de la división, se tendrá:

$$a = bc + r, \quad r < b \qquad 1)$$

si bm es un múltiplo cualquiera del dividente, podremos escribir en vez de 1):

$$a \pm bm = bc \pm bm + r = b(c \pm m) + r \qquad r < b,$$

lo que significa que r sigue siendo el resto de la división de $(a \pm bm) : b$, sólo que el cociente es, ahora, $c \pm m$.

165. Si en una división natural el dividendo es un polinomio aritmético, no altera el resto, al aumentar o disminuir uno, varios o todos los términos del polinomio en un múltiplo del dividente.

Pues, la operación hecha, equivale a aumentar o disminuir el dividendo en un múltiplo del dividente.

Una consecuencia de lo anterior, es que:

166. No altera el resto de la división natural de un polinomio aritmético por un número, si se reemplaza cada término por el resto de su división por dicho número.

Pues, la operación indicada equivale a disminuir cada término del polinomio en el mayor múltiplo del dividente que está contenido en el dividendo.

167. Caracteres de la divisibilidad. — Conviene, a menudo, conocer el resto de una división sin hallar el cociente y, en particular, saber si dicho resto es o no nulo. En estos casos, en vez de efectuar la división, es cómodo apoyarse en los principios recién demostrados a fin de substituir el dividendo por otro número más simple y que, sin embargo, permite hallar, lo mismo, el resto buscado.

168. Caracteres de divisibilidad por 2, 5, 4, 25, 2^n, 5^n.

De la igualdad

$$10 = 2 \times 5$$

sale

$$10^2 = 100 = 2^2 \times 5^2 = 4 \times 25$$
$$10^3 = 1000 = 2^3 \times 3^3 = 8 \times 125$$

y, en general

$$10^n = 2^n \times 5^n.$$

Siendo 10 divisible por 2 y por 5, todo múltiplo de 10 será divisible por 2 y por 5 (n.º 162); análogamente, siendo 100 divisible por 4 y por 25, todo múltiplo de 100 será también divisible por 4 y y por 25, y todo múltiplo de 1000 lo será por 8 y por 125, etc. Luego, si se busca el resto de la división natural de un número por 2 ó por 5 podrá dejarse de costado las decenas, centenas, etc., del número, ya que siendo ellas, por fuerza, divisibles por 2 y por 5, dejan un resto nulo. Sólo habrá que atender, entonces, a la cifra de las unidades del guarismo.

Por la misma razón, para conocer el resto de la división de un número por 4 y por 25, bastará hallar el resto, de la división por 4 o por 25 del número representado por las dos cifras de la derecha del guarismo respectivo.

Y para conocer el resto de la división de un número por 8 ó por 125, bastará determinar el resto de la división por 8 o por 125 del número representado por las últimas tres cifras de la derecha del guarismo respectivo.

Por ejemplo: el resto de la división de 7849838 por 4 es el de la división de 38 por 4, o sea, 2.

El resto de la división de ese mismo número por 125 será el de la división de 838 por 125, que es 88.

De lo anterior se desprenden las siguientes muy importantes consecuencias:

169. Estando un número escrito en el sistema de numeración decimal, puede saberse de inmediato, sin efectuar la división y por la sola inspección de sus últimas cifras, si es divisible por 2, 5, 4, 25, 8 ó 125.

Lo será por 2 si termina en 0 o en cifra par.

Lo será por 5 si termina en 0 o en 5.

Lo será por 4 si las dos cifras de la derecha de su guarismo representan un número divisible por 4, o en dos ceros.

Lo será por 25 si su guarismo termina en dos ceros, 25, 50 ó 75.

Lo será por 8 si el número expresado por las tres últimas cifras de la derecha de su guarismo es divisible por 8, o si son tres ceros

Lo será por 125 si el número expresado por las tres últimas cifras de la derecha de su guarismo es divisible por 125, o son tres ceros.

Etc., etc.

Y es claro que se trata de condiciones necesarias y suficientes.

170. Caracteres de divisibilidad por 9 ó por 3. — *El resto de la división de un número por 9 o por 3 es el mismo que el de la división por 9 o por 3 de la suma de los números representados por las cifras significativas de su guarismo.*

Efectivamente, toda potencia de 10 dividida por 9, da por resto 1. Así: $10000 = 9999 + 1 =$ múltiplo de $9 + 1$.

Luego:

$70000 = 7 \times 10000 = 7 \times$ (múltiplo de $9) + 7 =$ múlt. $9 + 7$,

de modo que:

Todo número representado por un guarismo constituído por una cifra significativa seguida de ceros, es un múltiplo de 9 más el dígito que expresa aquella cifra significativa; por tanto, el resto de la división por 9 del número en cuestión es ese dígito.

Consideremos ahora un número cualquiera, por ej., 74321895; tenemos las siguientes igualdades:

$$
\begin{array}{rl}
70000000 = & \text{múltiplo de } 9 + 7 \\
4000000 = & \quad » \quad\quad » \quad 9 + 4 \\
300000 = & \quad » \quad\quad » \quad 9 + 3 \\
20000 = & \quad » \quad\quad » \quad 9 + 2 \\
1000 = & \quad » \quad\quad » \quad 9 + 1 \\
800 = & \quad » \quad\quad » \quad 9 + 8 \\
90 = & \quad » \quad\quad » \quad 9 + 9 \\
5 = & \quad » \quad\quad » \quad 9 + 5 \\
\hline
74321895 = & \text{múltiplo de } 9 + (7 + 4 + 3 + 2 + 1 + 8 + 9 + 5).
\end{array}
$$

Así es que *todo número es igual a un múltiplo de 9 más la suma de los dígitos expresados por las cifras significativas de su guarismo.*

Como 9 es un múltiplo de 3, resulta también que *todo número es un múltiplo de 3 más la suma de los dígitos expresados por las cifras de su guarismo.*

Según ésto, para obtener el resto de la división natural de un número por 9 ó por 3, basta hallar el resto de la división por 9 ó por 3 de la suma de los referidos dígitos.

Y esa última división puede tratarse otra vez como si se tratase de un nuevo número.

Así en el ejemplo considerado el resto de la división por 9 ó por 3 de la suma $7+4+3+2+1+8+9+5$ de los dígitos se hallará así:

$$7+4=11=9+2; \quad 2+3=5; \quad 5+2=7; \quad 7+1=8;$$
$$8+8=16=9+7; \quad 7+5=12=9+3.$$

Por consiguiente, el resto de la división del polinomio, por 9, es 3; y el de su división por 3, es 0. Como se ve, se saltean las cifras 9 que se vienen encontrando.

De lo anteriormente dicho resulta que:

171. Estando un número escrito en el sistema de numeración decimal, si la suma de los dígitos representados por las cifras significativas de su guarismo es 3, o un múltiplo de 3, ese número será divisible por 3, siendo ésta una condición necesaria y suficiente. En las mismas condiciones, si la suma de los dígitos en cuestión es 9, o un múltiplo de 9, el número es divisible por nueve, siendo ésta una condición necesaria y suficiente.

Así 432018 es divisible por 9 y por lo tanto por 3, pues:

$$4+3+2+0+1+8=18,$$

múltiplo de 9 y por lo tanto de 3.

42 es divisible por 3, pero no por 9, pues $4+2=6$, múltiplo de 3 y no de 9.

172. Caracteres de divisibilidad por 11. — *Para obtener el resto de la división por 11 de un número cualquiera, puede emplearse el procedimiento siguiente:*

Se suman los números que representan las diversas unidades de orden par (suponiendo que la cifra de las unidades simples corresponda a un rango impar) y se efectúa la suma análoga de las de orden impar. Si la segunda suma es inferior o igual a la primera, se la resta de ella y entonces el resto buscado es el mismo que se obtiene dividiendo por 11 esa diferencia; si la segunda suma es superior a la primera, se efectúa la substracción en la misma forma, previa agregación a la primera, de un múltiplo conveniente de 11 a fin de hacer la substracción posible.

Efectivamente, los restos de la división por once, de 10 y de 100 son, respectivamente, 10 y 1, pues $10=11\times 0+10$; $100=9\times 11+1$; luego, los restos de dividir por 11 a los términos de la serie 10, 100, 1000, 10000, ..., son, alternativamente, 10 y 1, desde que $1000=100\times 10=(\text{múltiplo de } 11+1)\times 10=\text{múltiplo de } 11$

$+10$; $10000 = 100 \times 100 =$ (múltiplo de $11+1$) (múltiplo de $11 + 1$) $=$ múltiplo de $11 + 1$; etc.

Consideremos ahora un número cualquiera, por ej., $3487621 = 1 + 2 \times 10 + 6 \times 100 + 7 \times 1000 + 8 \times 10000 + 4 \times 100000 + 3 \times 1000000$.

No se altera el resto de la división por 11 reemplazando, en el segundo miembro, los factores 10, 100, 1000, etc., por sus restos, es decir, por 10, 1, 10, 1, 10, 1... (n.º 166); luego, el resto en cuestión es el mismo que el que corresponde a

$$1 + 6 + 8 + 3 + 10 \times (2 + 7 + 4),$$

o también:

$$1 + 6 + 8 + 3 + (11 - 1) \times (2 + 7 + 4),$$

es decir, pues:

$$1 + 6 + 8 + 3 + \text{múltiplo de } 11 - (2 + 7 + 4).$$

De modo que el resto de la división del número dado por 11, es el mismo que el obtenido dividiendo por 11 la diferencia entre $1 + 6 + 8 + 3$, suma de los números indicados por las cifras de orden impar, empezando por la derecha, y la suma análoga relativa a las cifras de orden par; o bien, si esa diferencia es imposible, entre la suma de los números indicados por las cifras de orden impar más un múltiplo de 11 conveniente, y la suma análoga relativa a las cifras de orden par. En el ejemplo dado se tiene, pues, como resto $18 - 13 = 5$.

Si se tratase del número 234160, como $0 + 1 + 3 < 6 + 4 + 2$, obtendríamos como resto, $11 + 0 + 1 + 3 - (6 + 4 + 2)$ o sea $15 - 12 = 3$.

De lo anterior se desprende que:

173. *Estando un número escrito en el sistema de numeración decimal, si la suma de los números representados por las cifras de orden impar es igual a la suma análoga de las cifras de orden par; o si la diferencia entre la mayor y la menor es* 11, *o un múltiplo de* 11, *ese número es divisible por* 11, *siendo ésta una condición necesaria y suficiente.*

174. **Caracteres de divisibilidad por 7, 11 y 13.** — De la igualdad $7 \times 11 \times 13 = 1001$, se desprende que 1000 es un múltiplo de 7, de 11 y de 13, menos 1. Luego $1000000 = 1000 \times 1000$, resulta igual a un múltiplo de 7, 11 y 13, más 1; y así, alternativamente,

$1000 \times 1000 \times 1000 =$ múltiplo de 7, 11, 13, menos 1; $1000 \times 1000 \times 1000 \times 1000 =$ múltiplo de 7, 11, 13, más 1, etc.

175. *Luego, para conocer, sin hacer la división, si un número escrito en el sistema de numeración decimal es divisible por 7, 11 ó 13, se divide en secciones de tres cifras a contar de la derecha; se hace la suma de los números indicados por los guarismos secciones, de lugar par; luego la suma análoga de las restantes (de lugar impar); la diferencia entre ellos debe ser* 0, 7, 11, 13; *o un múltiplo de* 7, *de* 11 *o de* 13, *respectivamente.*

Así, 228.724.132 es divisible por 7, pues las secciones aludidas son 228, 132 por un lado, cuya suma es 360; y la restante 724; $724 - 360 = 364 = 52 \times 7 =$ múltiplo 7.

Igualmente se comprueba que 3113 es divisible por 11, pues $113 - 3 = 110 = 11 \times 10 =$ múltiplo 11.

Y 1.438.437 es divisible, a la vez, por 7, 11 y 13, porque $437 + 1 - 438 = 0$.

176. **Prueba por 9 de la multiplicación.** — *Si varios números* a, b, c, ..., *al ser divididos por otro* n, *dan como restos* r_a, r_b, r_c, ..., *la suma* $(a + b + c + \ldots)$ *de aquéllos y la suma* $(r_a + r_b + r_c + \ldots)$, *dan el mismo resto,* r, *cuando ellas se dividen por* n.

Se tiene, efectivamente:

$a =$ múltiplo $n + r_a$
$b =$ múltiplo $n + r_b$
$c =$ múltiplo $n + r_c$
. . . .

sumando ordenadamente

$$(a + b + c + \ldots) = \text{múltiplo } n + (r_a + r_b + r_c + \ldots)$$

lo que significa que $(a + b + c + \ldots)$ y $(r_a + r_b + r_c + \ldots)$ difieren en un múltiplo de n.

Deben, por consiguiente, dar el mismo resto (n.º 165) si se dividen esas sumas por n.

Si n es 9, hemos visto en el n.º 170 cómo se obtienen fácilmente los restos r_a, r_b, r_c, ..., aplicando una regla que exige la intervención de todas las cifras de los guarismos de los números dados a, b, c, ..., lo que no ocurre con las divisiones por 2, 4, 5, 8, ..., ya que, en éstas, son únicamente la última o las últimas cifras del número dado que entran en el criterio.

Esta observación indica la conveniencia de valerse del número 9 cuando se aplica la propiedad demostrada para efectuar la prueba de una de las operaciones aritméticas fundamentales.

Supongmos que se trate de comprobar la exactitud del resultado obtenido multiplicando dos números. Se tiene la siguiente

177. Regla. — *Para efectuar la prueba por 9 de una multiplicación, se calculan los restos de la división por 9 del multiplicando, del multiplicador y del producto* (*aplicando la regla del n.º* 170). *Se multiplican entre sí los restos relativos al multiplicando y al multiplicador y se halla el resto de la división por 9 de ese producto. Este último resto debe ser igual al obtenido para el producto cuya exactitud se está verificando.*

Prácticamente se dispone la operación así. Sea multiplicar 342 × 569 :

$$\begin{array}{r} 3427 \\ 569 \\ \hline 30843 \\ 20562 \\ 17135 \\ \hline 1949963 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 7 & \\ 5 & \times & 5 \\ & 2 & \end{array}$$

Se dibuja una cruz: en dos ángulos opuestos por el vértice se escriben los restos 7 y 2 de la división por 9 del multiplicando y del multiplicador; se multiplican éstos, se escribe en uno de los ángulos restantes el resto, 5, de la división por 9 de dicho producto; finalmente, en el último ángulo se escribe el resto relativo al producto que se está verificando; estos dos últimos restos deben ser iguales. En nuestro caso diremos $3 + 4 = 7$, $7 + 2 = 9$, 7; escribo 7 en el ángulo superior de la cruz; $5 + 6 = 11$, $11 - 9 = 2$, $2 + 9 = 11$, $11 - 9 = 2$: escribo 2 en el ángulo inferior de la cruz; $7 \times 2 = 14$, $1 + 4 = 5$: escribo 5 en el ángulo de la izquierda; $1 + 4 = 5$, $5 + 6 = 11$, $11 - 9 = 2$, $2 + 3 = 5$: escribo 5 en el ángulo de la derecha; como estos dos últimos restos son iguales es de presumir que el producto es exacto.

178. Podría también aplicarse la prueba por 9 a las otras tres operaciones fundamentales pero ello carecería de ventaja práctica, lo mismo que la prueba por 11, que consistiría en buscar los restos de la división por 11, como se indicó en el n.º 172, en vez de buscar los restos de la división por 9.

La prueba por 9, si da éxito y si ha sido aplicada sin error, prueba únicamente que el error, si existe, es un múltiplo de 9. Esta prueba no avisaría, por ejemplo, un error cometido no colocando los productos parciales en el sitio que les corresponde.

179. **Divisibilidad por 6.** — Es evidente que si un número n es divisible simultáneamente por 2 y por 3, debe serlo por 6, pues si $\frac{n}{2} = p$ y $\frac{n}{3} = q$ se tendrá:

$$n = 2p \quad \therefore \quad \frac{n}{3} = \frac{2p}{3},$$

y como $\frac{n}{3} = q$, es necesario que $\frac{p}{3}$ sea un número entero, que llamaremos p_1, luego

$$\frac{n}{3} = 2p_1 \quad \therefore \quad \frac{n}{6} = p_1.$$

180. **Resumen.** — Estando un número escrito en el sistema decimal es divisible:

Por 2 (es decir que es **par**), si termina en 0 o en cifra par;

Por 3, si la suma de los números representados por sus cifras significativas es divisible por 3;

Por 4, si termina en dos ceros, o si el número representado por sus dos últimas cifras se divisible por 4; es decir, si es 25, 50 ó 75;

Por 5, si termina en 0 o en 5;

Por 6, si lo es a la vez por 2 y por 3;

Por 7, si dividido en grupos de a tres cifras a partir de la derecha, se verifica que sumados los números indicados por los grupos impares y los representados por los de lugar par, la diferencia entre dicha suma es 0, 7 o un múltiplo de 7;

Por 8, si termina en tres ceros o si sus tres últimas cifras de la derecha representan un número divisible por 8;

Por 9, si la suma de los dígitos representados por las cifras significativas es divisible por 9;

Por 10, si termina en 0;

Por 11, si efectuada la suma de los dígitos representados por las cifras significativas de rango par y la análoga relativa a las cifras de rango impar, se verifica que la diferencia entre ambas es 0 o es divisible por 11;

Por 13, misma regla que por 7, substituyendo 7 por 13;

Por 25, si el número termina en 00, 25, 50 ó 75;

Por 100, si termina en 00;

Por 125, si las tres cifras de la derecha del número son ceros o representan un número divisible por 125; etc.

EJERCICIOS

62. Determinar si los números 288, 1050, 3563, 166648, 123456789, son divisibles por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11.

63. Agregar un dígito a la derecha de cada uno de los números siguientes: 31221, 4756657, 426486082, a fin de que el número restante sea divisible por 11.

64. Reemplazar el asterisco por un número en los ejemplos siguientes:

34*7	de tal manera que	el número resultante	sea divisible por	9
1*567	»	»	»	11
159*	»	»	»	6
7**217	»	»	»	99
635**	»	»	»	75

65. Hallar el resto de la división por 3 de los números 4376540123, 14799887602, 98765456789, 93338642, 831546, 3694051, 4917803, 113766143.

66. Hallar los restos de la división por 3 y por 9 de los números 40004, 6146, 46008, 7060, 54601, 14343, 95618 y el de la suma de los mismos. Comprobar (véase ejercicio 60, pág. 81) que el resto de la división por 3 ó por 9 de la suma de los restos parciales es igual al resto análogo relativo a la suma de los números dados. (Prueba de la divisibilidad por 3 ó por 9 de la adición).

67. El mismo ejercicio anterior relativo a las adiciones siguientes:

$$7654 + 4567 + 3258 + 7748$$
$$123456 + 789012 + 3456789 + 123456789.$$

68. Hallar los restos de la división por 3 y por 9 de los números 29312, 6577 y el de la diferencia entre ellos, y demostrar que si se hace la substracción de los restos parciales (del minuendo y del substraendo), y se halla el resto de la división por 3 ó por 9 de esta substracción, se obtiene el mismo número que el resto hallado relativo al residuo de la substracción de los números dados. (Prueba de la divisibilidad por 3 ó por 9 aplicada a la substracción).

69. Mismo ejercicio que el anterior relativo a las substracciones siguientes:

$$449558 - 31033, \quad 91266 - 52385, \quad 549063 - 41409.$$

70. Multiplicar 913257×87242 y efectuar la prueba por 9.

71. Mismo ejercicio relativo a las siguientes multiplicaciones:

$$99999 \times 1111, \quad 908172 \times 6318.$$

72. Efectuar la división (que es exacta) exacta de 3663281856 : 72384, y aplicar la prueba por 9 deduciéndola de la ya conocida relativa a la multiplicación.

73. Mismo ejercicio anterior relativo a las divisiones siguientes:

879534 : 6714; 588922344 : 90008, 8535284977632 : 9875236.

74. Efectuar las operaciones siguientes; hallar la prueba por 9 relativa a esta clase de operación (división inexacta); y aplicarla:

3983783456 : 14057; 15328727 : 5407; 195076425 : 150645; 698779 : 372.

CAPÍTULO V

CODIVISORES Y COMÚLTIPLOS DE UN NÚMERO, MÁXIMO CODIVISOR Y MÍNIMO COMÚLTIPLO

1. MAXIMO COMUN DIVISOR (M. C. D.)

181. Definiciones. — Es evidente que un número puede admitir varios divisores (n.° 158): desde luego siempre tiene necesariamente dos divisores, a saber: el número 1 y el mismo número considerado; pero puede tener otros; así 6 tiene además de 1 y 6, los divisores 2 y 3. Pero el número de estos divisores es limitado, desde que todos los divisores, a excepción de uno de ellos, deben ser inferiores al número dado. Hay que hacer una excepción sin embargo para *cero,* pues como cero dividido por cualquier número es cero, resulta que cero puede considerarse como un múltiplo de un número cualquiera; dado el carácter excepcional de este número, lo excluiremos en nuestros raciocinios, de suerte que al hablar de los divisores de un número supondremos que éste no es cero; de igual manera, al hablar de los múltiplos de un número excluiremos el número cero.

182. Ciertos números admiten **divisores comunes**; así 48 y 60 admiten los divisores comunes 2, 3, 4, 6 y 12; en general, dados varios números $a, b, c, \ldots$, diferentes de cero, pueden existir varios otros que los dividen a todos, y desde luego se nota que el número 1 cumple esta condición; esos últimos números se llaman **divisores comunes** o, abreviadamente, **codivisores** de $a, b, c, \ldots$ El número de estos divisores comunes es limitado, pues ninguno puede ser mayor que el menor de los números dados $a, b, c, \ldots$; existe necesariamente, pues, uno de estos divisores que es mayor que todos los demás, y se le llama **máximo común divisor** o **máximo codivisor** y abreviadamente lo indicaremos así: *m. c. d.*

183. Principios fundamentales. — I. Los codivisores de dos o más números son los mismos que los divisores del máximo común divisor de aquéllos, o, en otros términos: *todo divisor de dos o más números es un divisor del máximo común divisor de aquéllos;* y viceversa.

Consideremos, en primer lugar, el caso de dos números a y b. Si a es divisible por b, todo divisor de b es también divisor de su múltiplo a (n.° 162, pág. 83); por consiguiente, los divisores comunes de a y b son los mismos que los de b. Si a y b no son divisibles uno por el otro, los dos números a y b son necesariamente diferentes. Supongamos que $a > b$; sean c y r el cociente y el resto de la división de a por b; tendremos que $a = bc + r$; luego, todo número que divide b y r debe dividir a (n^{os}. 161 y 162), por consiguiente, los divisores comunes de a y b son los mismos que los de b y r, desde que, si se forma un cuadro con los divisores comunes a a y b, y otro con los comunes a b y r, todo número que figura en el primer cuadro debe figurar en el segundo, y viceversa, los dos cuadros están constituídos, pues, por *los mismos* números.

Si r divide b, los divisores comunes de r y b, y por lo tanto de a y b, son los mismos que los de r.

Si r no divide b, se habrá conseguido hacer depender la investigación de los factores comunes a a y b, de la de los factores comunes a b y r; como r es menor que b se ha simplificado la cuestión. Sean c_1 y r_1 el cociente y el resto de dividir b por r; tendremos que $b = rc_1 + r_1$ y un raciocinio análogo al anterior prueba que los factores comunes a b y r son los mismos que los comunes a r y r_1, y que si r_1 divide r, los factores comunes a r y r_1 (y por lo tanto a r y b, o sea a a y b) son los factores de r_1. Si r_1 no divide r tendremos nuevamente una igualdad $r = r_1c_2 + r_2$; y así sucesivamente; como los restos $r_1, r_2, \ldots,$ disminuyen cada vez, su número debe necesariamente ser limitado, pero esta limitación implica obtener un resto que divide forzosamente al precedente; luego, esta última circunstancia debe necesariamente producirse. Sucederá esto, especialmente, si el último resto es 1, pues este resto divide siempre al procedente; pero, en general, si r_n es el último resto, es decir, el que divide al precedente r_{n-1}, los divisores comunes a r_n y r_{n-1} (y por lo tanto a los anteriores r_{n-1} y r_{n-2}, etc., y, por último, a a y b), son los divisores de r_n. El problema de hallar los divisores comunes a a y b queda así reducido a hallar los divisores de r_n.

Podemos decir, en consecuencia, que:

184. *Dados dos números* a *y* b, *distintos de cero, existe un número* r_n *tal que los divisores comunes a* a *y* b *son los mismos que los divisores de* r_n*; este último número, que puede obtenerse por una serie de divisiones sucesivas, se llama, según vimos, el* **máximo común divisor de a y b**; *nombre justificado por el hecho de que es el mayor divisor de* r_n y por lo tanto de a y b.

Veamos un ejemplo. Sean los números 11256 y 8428. Dividiendo el primero por el segundo, se tiene por cociente 1 y por resto 2828; dividiendo 8428 por 2828 se obtiene por cociente 2 y por resto 2772; dividiendo 2828 por 2772 se obtiene por cociente 1 y por resto 56; dividiendo 2772 por 56 se obtiene por cociente 49 y por resto 28; dividiendo 56 por 28 se obtiene por cociente 2 y por resto 0. Luego, los divisores comunes a 11256 y 8428, son los divisores de 28, y el máximo común divisor es, por consiguiente, 28.

185. Prácticamente se dispone la operación escribiendo los cocientes encima de los divisores como se indica a continuación:

cocientes	1	2	1	49	2
11256	8428	2828	2772	56	28
2828	2772	56	532 28	0	Restos

Podemos en resumen, enunciar la siguiente

186. **Regla práctica.** — *Para hallar el máximo común divisor de dos números, se divide el mayor por el menor; si la división es exacta, el menor número es el máximo común divisor; si no sucede así, se divide el menor número por el resto; si la división es exacta, el resto es el máximo común divisor; de lo contrario se divide el primer resto por el segundo resto; si esta tercera división es exacta, el segundo resto es el máximo común divisor; de lo contrario se divide el segundo resto por el tercero y así se continúa hasta obtener un resto que divida exactamente al precedente. Ese último resto es el máximo común divisor.*

187. Consideremos ahora el caso de varios números: $a, b, c, d,$ ... Desde que los divisores comunes a a y b son los de su máximo común divisor p, es evidente que los divisores comunes a $a, b, c, d, \ldots$, son los comunes a $p, c, d, \ldots$ y que estos últimos son, a su vez, los comunes a $q, d, \ldots$, siendo q el máximo común divisor de p y c; y así sucesivamente. Siguiendo de esta manera se llegará finalmente a sólo tener dos números; y, entonces, los divisores del máximo común divisor de estos dos números, serán los divisores comunes a los números dados $a, b, c, d, \ldots$

Luego: *Dado tantos números cuanto se desee, existe un número cuyos divisores son los mismos que los divisores comunes a los números dados; se le da el nombre de* máximo común divisor *de dichos números; la investigación de este m. c. d. se reduce al caso de dos números, basándose en que puede reemplazarse dos de los números dados por el m. c. d. de ellos, y es evidente, por otra parte, que puede reemplazarse dos, tres, cuatro de dichos números por el m. c. d. de ellos.*

Consideremos los números 360, 225, 600 y 345. El m. c. d. de 360 y 225 es 45; el m. c. d. buscado es, por consiguiente, el mismo que el de los tres números 45, 600 y 345.

El m. c. d. de 45 y 600 es 15; luego, el m. c. d. buscado es el mismo que el de 15 y 345, el cual es 15.

Podemos, según esto, enunciar la siguiente

188. Regla práctica. — *Para hallar el m. c. d. de varios números, se busca primero el m. c. d. de dos de ellos. Luego el m. c. d. entre el m. c. d. recién hallado y otro de los números dados. Luego se busca el m. c. d. entre el m. c. d. recién hallado y un cuarto número, y así sucesivamente hasta agotar todos los números dados. El último m. c. d. encontrado es el buscado.*

El método recién indicado para hallar el m. c. d. de varios números se llama *método por divisiones sucesivas*. Más adelante (n.º 209, pág. 110), indicaremos otro.

Ejemplos. — Hallar el m. c. d. entre los números 1666, 2254, 2842, 690.

	1	2	1	5
2254	1666	588	490	98
588	490	98	00	

luego el m. c. d. entre 1666 y 2254 es 98.

	29
2842	98
882	
0	

luego el m. c. d. entre 98 y 2842 es 98.

	7	24	2
690	98	4	2
4	18	0	
	2		

luego el m. c. d. entre 98 y 690 es 2.

Luego el m. c. d. buscado es 2.

En la práctica conviene a menudo, para simplificar, empezar por hallar el m. c. d. de los números menores.

189. **II. Cuando se multiplican o dividen dos o más números por un mismo factor, el m. c. d. queda multiplicado o dividido por dicho factor.** (La proposición anterior significa que el m. c. d. de los nuevos números obtenidos es el mismo primitivo, multiplicado o dividido por el número por el que se han multiplicado o dividido los números dados).

Al hablar de dividir, se supone, esencialmente, que esa división es exacta.

Sean a y b los dos números propuestos, r el resto de la división de a por b; r_1 el resto de la división de b por r; r_2 el de la división de r por r_1 y así sucesivamente, y r_n el m. c. d.

Si se multiplica o divide a y b por m, es decir, si se reemplaza a y b por am y bm, o por $\frac{a}{m}$ y $\frac{b}{m}$, el resto r queda también multiplicado o dividido por m (n.° **150, b**; pág. 74); e igual cosa sucede con los restos r_1, r_2 .. r_n. Luego los m. c. d. de am, bm y de $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ son, respectivamente, $r_n \times m$ y $\frac{r_n}{m}$.

Así, el m. c. d. de 360 y de 172 es 4; el de 360×5, o sea de

1800 y de 172×5, o sea de 860, es $4 \times 5 = 20$. El de $\frac{360}{2}$ y de $\frac{172}{2}$, o sea de 180 y de 86, es $\frac{4}{2} = 2$.

Consideremos ahora el caso de tres números a, b, c; sea d el m. c. d. de a y b; d_1 el m. c. d. de d y c, es decir, el m. c. d. de a, b, c; se trata de demostrar que el m. c. d. de am, bm, cm es $d_1 m$; y el de $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}$ es $\frac{d_1}{m}$; efectivamente, el m. c. d. de am y bm es dm, según lo recién demostrado; el m. c. d. de dm y de cm, es decir el m. c. d. de am, bm, cm, es, por la misma razón, $d_1 m$. Lo mismo se demostraría que $\frac{d_1}{m}$ es el m. c. d. de $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}$.

Ninguna dificultad existe en extender la demostración al caso de cuatro o más números. En particular, si se divide los números $a, b, c, \ldots$, por su m. c. d., el máximo común divisor de los cocientes $a_1, b_1, c_1, \ldots$ será $\frac{d}{d} = 1$. Luego, dichos números $a_1, b_1, c_1, \ldots$ no tienen otros común divisor que 1. Recíprocamente, si los números $a_1, b_1, c_1, \ldots$ tienen a 1 como m. c. d., y si d es un número cualquiera, el m. c. d. de $a_1 d, b_1 d, c_1 d, \ldots$, es d.

190. Definición. — Cuando el m. c. d. de varios números es 1, se dice que esos números **son primos** entre sí. Así, 8 y 11 son primos entre sí. Puede decirse, por consiguiente, que: *cuando se divide varios números por su m. c. d., los cocientes son primos entre sí.* Así, $\frac{360}{4} = 90$ y $\frac{172}{4} = 43$ son primos entre sí; y recíprocamente: *cuando varios números son primos entre sí y se les multiplica por un tercero, ese tercer número es el m. c. d. de los productos.*

191. III. El m. c. d. de dos números, es también el de uno de ellos y del producto (o cociente) del otro multiplicado (o dividido) por un factor primo con el primero.

Sean, por ejemplo, los números 360 y 172, cuyo m. c. d. es 4.

Se trata de probar que 4 es también el m. c. d. de 360×7 y 172, siendo 7, como es, un número primo con 172.

Efectivamente, los divisores comunes a 360 y 172 son también, evidentemente, divisores comunes a 360×7 y 172. Bastará pues demostrar que, recíprocamente, todo divisor común a 360×7 y 172, divide a 360. Como el m. c. d. de 172 y 7 en 1, ya que esos números son primos entre sí, resulta que el m. c. d. de 360×7 y 360×172, es 360 (n.º 189). Pero todo número que divide 172 y 360×7 divide también 172×360 y 360×7 y, por tanto, divide a su m. c. d., 360, lo que se quería demostrar.

En general si los números son a y b; y m un número primo con b, el principio establece que si d es el m. c. d. de a y b, d será también el m. c. d. de am y b.

Efectivamente, los divisores comunes a a y b son también comunes a am y b; bastará, por consiguiente, demostrar que los divisores comunes a am y b son también divisores comunes de a y b, es decir, que dividen a; pero el m. c. d. entre m y b es 1; luego el m. c. d. entre am y ba es a (n.º 189); pero todo número que divide b y am divide también ba y am, y divide, por lo tanto, el m. c. d. de éstos, a.

Análogamente, no se altera el m. c. d. entre dos números a y b dividiendo uno de ellos por un número primo con el otro (se supone esencialmente que la división sea exacta), pues desde que se verifica que si m es un número primo con b, el m. c. d. entre a y b es el mismo que el m. c. d. entre ma y b, resulta, inversamente, que si d es el m. c. d. entre ma y b, d es el m. c. d. entre a y b, es decir, entre uno de los números y el cociente del otro dividido por un número primo con el primero.

192. Consecuencias. — 1.ª *Si un número divide a un producto de dos factores y es primo con uno de éstos, divide al otro.*

Pues si b divide al producto ma, siendo primo con m, el m. c. d. entre b y ma es b, y por lo tanto b es también el m. c. d. entre b y a desde que m es primo con b. Luego b divide a.

Así, 7 divide al producto $28 \times 3 = 84$, como 7 es primo con 3, divide 28.

2.ª *Todo número que es primo con dos factores de un producto, es primo con este producto.*

Pues si b es primo con a y con m, debe ser primo con am desde que siendo 1 el m. c. d. entre a y b, 1 es también el m. c. d. entre am y b, en virtud del principio III (n.º 191). Así, siendo 3 un número primo con 5 y 7, es también primo con el producto $5 \times 7 = 35$.

Ninguna dificultad existe en extender las consecuencias anteriores al caso de un producto de varios factores.

Sea, efectivamente, a, b, c, tres factores de un producto; si n es un número primo con a, con b y con c, debe ser primo con el producto abc, pues siendo primo con a y b es primo con ab, y siendo primo con ab y con c, lo es con abc. Lo mismo se demostraría para el caso de un número cualquiera de factores.

EJERCICIOS

Hallar el m. c. d. de los números siguientes:

75. 46 y 138; 135 y 225; 900 y 3474; 741 y 57.
76. 535075 y 1259; 112 y 32; 126 y 99; 5292 y 9450.
77. 16632 y 2808; 53163 y 88209; 2744 y 13721; 83160 y 332647.
78. 48, 360 y 2024; 4998, 3381 y 4116; 1666, 2254, 2842 y 690.
79. 1213, 1421 y 1127; 464321 y 683111; 116039, 122067 y 137137.

§ 2. — MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M. C. M.)

193. Definiciones. — Un número, no nulo, se dice *múltiplo común o comúltiplo* de varios otros cuando es divisible por todos ellos.

Así, 105 es múltiplo común de 3, 5, 7, porque es divisible por 3, 5 y 7.

194. Consideremos el cuadro siguiente de los múltiplos de 2, 3 y 4, menores que 25

2	2		4	6	8		10	12	14		16	18	20		22	24
3		3		6		9		12		15		18		21		24
4			4		8			12			16		20			24

examinándolo vemos que 4 es un múltiplo a la vez de 2 y de 4, es decir un *múltiplo común* de 2 y 4; también vemos que 6 y 18 son múltiplos comunes de 2 y 3; que 8, 16 y 20 son tres múltiplos comunes de 2 y 4; por último, que 12 y 24 son múltiplos comunes de 2, 3 y 4.

Es evidente que si a, b, c, ..., son números dados, el producto de todos ellos multiplicado por un factor arbitrario, no nulo, es un múltiplo común de aquéllos; varios números dados admiten, por consiguiente, tantos múltiplos comunes como se quiera; entre ellos existe uno menor que todos los restantes; pues, o ese múltiplo común menor es el producto $abc\ldots$ de todos los números, o es un número menor que ese producto, y como los números menores que el producto $abc\ldots$ son limitados, sucede lo mismo con los múltiplos comunes inferiores al producto $abc\ldots$; entre éstos debe, por consiguiente, existir uno menor que todos los otros.

Así, en el cuadro anterior, 12 es el menor de los múltiplos comunes a 2, 3 y 4.

195. Principios fundamentales. Mínimo común múltiplo (m. c. m.). — *Un múltiplo común de dos números dados, procede de multiplicar uno de ellos por el cociente del otro dividido por el m. c. d. de ambos.*

Tomemos un ejemplo cualquiera: Sean los números 360 y 172, cuyo m. c. d. es 4. Vimos más arriba (n.° 190) que los cocientes $\dfrac{360}{4} = 90$ y $\dfrac{172}{4} = 43$ son primos entre si. Todo múltiplo de 360 procede de multiplicarlo por un factor cualquiera m, de modo que ese múltiplo puede expresarse así $360\,m$ o $4 \times 90 \times m$. Para que ese múltiplo de 360, sea también un múltiplo de 172, deberá tener, análogamente, la forma $172\,n$, o sea, $4 \times 43 \times n$. De modo que tendremos la condición

$$90 \times 4 \times m = 43 \times 4 \times n$$

o sea

$$90\,m = 43\,n.$$

Como 43 divide el segundo miembro de la igualdad, debe dividir al primero; y siendo primo con 90, debe dividir m. De modo que m debe ser un múltiplo de 43. Esta condición, necesaria como se ve, es también suficiente, porque si m es divisible por 43, también lo es $90\,m$, de modo que $90\,m \times 4$, es divisible por 43×4 o sea por 172.

Los múltiplos comunes a a y b tienen, pues, la forma

$$90 \times 4 \times k.43 = 90 \times 43 \times 4 \times k = \frac{360 \times 172}{4}\,k$$

El más pequeño es $\dfrac{360 \times 172}{4}$. Se le llama el *mínimo común múltiplo,* (se escribe abreviadamente m. c. m.), de 360 y 172, de modo que:

196. *El mínimo común múltiplo de dos números se obtiene dividiendo el producto de ellos por su máximo común divisor; los múltiplos comunes de los dos números son los múltiplos de ese m. c. m.*

En general, si los números dados son a y b; siendo d su m. c. d.; a_1 y b_1 los cocientes $a : d$; $b : d$, se tiene

$$a = a_1d \qquad b = b_1d$$

y sabemos que a_1 y b_1 son primos entre sí (n.º 190).

Todo múltiplo de a se obtiene multiplicando a por un cierto número m; puede, por consiguiente, representarse así: am o a_1dm; para que este nuevo número a_1dm sea también múltiplo de b, debe elegirse m de tal manera que a_1dm sea divisible por b, es decir, por b_1d; luego podrá escribirse, si llamamos c al cociente de la división:

$$a_1dm = b_1dc,$$

o bien simplificando

$$a_1m = b_1c;$$

b_1 debe, por lo tanto, dividir a a_1m, y como es primo con a_1 debe dividir a m. Recíprocamente, si m es divisible por b_1, lo mismo sucederá con a_1m, luego a_1md será divisible por b_1d, es decir por b. De lo anterior resulta que todo múltiplo común de a y b se obtendrá multiplicando a_1d por un múltiplo de b_1, y recíprocamente, todo número obtenido de esta manera es un múltiplo común de a y b; como todo múltiplo de b_1 es de la forma kb_1, siendo k un número cualquiera, resulta que todo múltiplo común de a y b es de la forma

$$a_1d \times (kb_1) \equiv a_1b_1d \times k,$$

y recíprocamente.

En resumen, los múltiplos comunes de a y b son los múltiplos de a_1b_1d; y se les obtiene dando a k los diversos valores 1, 2, 3, ... El menor es a_1b_1d.

Así, el menor múltiplo común a 180 y 86 es 7740, pues el m. c. d. es $d = 2$ y se tiene

$$a_1 = \frac{180}{2} = 90, \qquad b_1 = \frac{86}{2} = 43;$$

luego

$$a_1b_1d = 90 \times 43 \times 2 = 7740.$$

Los múltiplos de 7740 son los múltiplos comunes a 180 y 86.

Si los números a y b son primos entre sí, $d = 1$, y entonces $a_1 = a$, $b_1 = b$ y se tiene que $a_1b_1d = ab$, luego, los múltiplos comunes de a y b son los múltiplos del producto ab.

El número a_1b_1d, que puede escribirse ab_1, o a_1b, o $\frac{ab}{d}$, se llama el *mínimo común múltiplo* o *mínimo comúltiplo* de los números a y b, y lo indicaremos así: m. c. m.

Consideremos, ahora, el caso de varios números a, b, c, d...

A los efectos de encontrar los múltiplos comunes a todos ellos, puede reemplazarse dos de dichos números, a y b por ejemplo, por su m. c. m. m, pues es evidente, según el final del n.º anterior, que los múltiplos comunes de $a, b, c, d, \ldots$, son los múltiplos comunes de $m, c, d, \ldots$; si se designa por m_1 el m. c. m. de m y c, puede igualmente reemplazarse m y c por m_1 a los efectos de hallar los múltiplos comunes de $m, c, d, \ldots$, o sea, de $a, b, c, d, \ldots$ Si m_2 indica el m. c. m. de m_1 y d, veríamos análogamente que los múltiplos comunes de $m_1, d, e, \ldots$, son los comunes a $m_2, e, \ldots$ Siguiendo de esta manera llegaremos finalmente al caso de dos números, y el m. c. m. m_n de estos dos será el de todos los números dados $a, b, c, d, e, \ldots$, y los múltiplos de m_n serán los múltiplos comunes a dichos números dados. Luego:

198. *Dados tantos números cuantos se quiera, existe un número tal que los múltiplos comunes a aquéllos son los múltiplos de ese último número, el cual se llama* **mínimo común múltiplo** *de los primeros.*

En la investigación de dicho m. c. m. de varios números puede reemplazarse dos o varios de ellos por el m. c. m. relativo a los mismos. Así, el m. c. m. de 360, 172, 18 y 21 es el m. c. m. de 15480 (m. c. m. de 360 y 172) y de 126 (m. c. m. de 18 y 21); y como 18 es el m. c. d. de 15480 y de 126, el m. c. m. buscado es el producto de $15480 \times \left(\dfrac{126}{18} = 7\right)$ o sea 108360.

EJERCICIOS

Hallar el m. c. m. de los números siguientes:

80. 360 y 80850; 74256 y 84942; 8, 12, 27 y 30; 27, 260 y 121.

81. 3127, 3551 y 3953; 156, 168, 208 y 432; 2059 y 4189.

82. 1517, 1739 y 1927; 1404, 3042 y 663; 8, 10, 15, 16, 18 y 20; de los diez números dígitos; de los 12 primeros números pares.

83. Cuál es el menor número que, dividido por 12, 27, 70 y 45, produce cada vez un resto igual a 6.

84. Una persona trabaja cuatro días y descansa el quinto; sabiendo que vuelve a trabajar un lunes después de haber descansado el día anterior, ¿en cuánto tiempo le tocará descansar nuevamente un domingo?

85. Cuatro vapores parten con igual destino: el primero sale cada cinco días, el segundo cada 8 días, el tercero cada 12 y el cuarto cada 15. Habiendo salido simultáneamente, ¿en cuánto tiempo volverán a partir juntos?

86. Dos ruedas dentadas engranadas tienen respectivamente 66 y 24 dientes, la primera da 12 vueltas por 60 segundos. Suponiendo una disposición inicial, ¿en cuánto tiempo se encontrarán en la misma posición?

87. Dos reglas divididas en partes iguales están aplicadas una contra la otra teniendo un extremo común; las divisiones de la primera regla valen 84 unidades y las de la segunda 90 unidades, ¿cuáles son los trazos de una regla que coinciden con los de la otra?

CAPÍTULO VI

NÚMEROS PRIMOS

199. Definición. — Llámase **número primo** al que, fuera de sí mismo y del número 1, no admite otros divisores.

Así, 5 es un número primo, porque no es divisible por 2, 3, 4.

No debe confundirse el concepto de *números primos* con el de *números primos entre sí* (n.° **190**); así, los números 4 y 9 son primos entre sí en tanto que, separadamente, no son números primos; el primer concepto afecta un solo número, por eso, puede llamarse a éste, número primo **absoluto**, en tanto que el otro concepto afecta dos o más números, de suerte que cada uno de éstos, considerado en esta forma, es primo sólo **relativamente** a los otros. Es evidente que todo número primo (absoluto) lo es también relativamente a otros cualesquiera; pero hemos visto que la recíproca no es exacta.

200. Principios. — **I. Todo número no primo admite necesariamente un divisor primo fuera de si mismo y del número 1.** Pues desde que dicho número, a, no es primo, admite divisores distintos de sí mismo y del número 1; estos divisores son menores que él, y como el número de ellos debe ser limitado, el menor, b, debe ser primo, ya que de lo contrario, admitiría un divisor menor que él, fuera del número 1, y ese divisor dividiría también a, lo que es contradictorio con la hipótesis hecha de ser b el menor de los divisores de a.

II. La serie de números primos es ilimitada. Es decir, que por grande que sea un número primo, existen siempre otros mayores que él.

Efectivamente, si existiera un número primo p mayor que cualquier otro, formando el producto de todos los números inferiores a p, que representaremos así: $1 . 2 . 3 . 5 . 7 \dots p$, y agregándole 1, obtendríamos un número $(1 . 2 . 3 . 5 . 7 \dots p) + 1$ que no podría ser primo por la hipótesis hecha; pero entonces admitiría un divisor diferente de 1, y ese divisor no puede ser ninguno de los números 2, 3, 5, 7, ..., p, pues sino dividiría al sumando 1 . 2 . 3 . 5 . 7 ... p, y como también dividiría la suma $(1 . 2 . 3 . 7 ... p) + 1$, debería dividir al otro sumando 1 (n.º 161, pág. 83), lo que es imposible; llegamos, pues, a una contradicción.

201. **Formación de una tabla de números primos.** — Con objeto de simplificar el lenguaje, en el presente párrafo, no considaremos a 1 como número primo; y cuando hablemos de múltiplos y submúltiplos o divisores, se entenderá tratarse de divisores distintos de 1 y de múltiplos obtenidos multiplicando el número por factores distintos de 1.

Para formar una tabla de números primos nos basaremos en el principio siguiente:

Si un número n *es inferior al cuadrado de un número* a; *y si no es divisible por ninguno de los números primos inferiores a* a, *puede asegurarse que* n *es primo.*

Supongamos que n no sea primo, y que p sea el menor de los números primos que dividen a n; sea c el cociente de n dividido por p, tendremos: $n = pc$.

Desde que n no es divisible por ningún número primo inferior a a es, por lo menos, igual a a; c es inferior a a, pues el producto de dos números iguales o superiores a a, es, por lo menos, igual a $a \times a$ y, por lo tanto, mayor que n, contrariamente a lo supuesto; pero entonces resultará que n es divisible por c, y, en consecuencia, por cualquier divisor primo de c, es decir, por un número primo inferior a c, y en todos casos menor que a. Caemos, pues, en una contradicción.

Sentado esto, para formar la tabla de los números primos inferiores o iguales a un número dado n, se escribe la serie natural de los números de 2 a n:

$$2, 3, 4, 5, 6, ... n$$

se tacha todos los números múltiplos de 2, es decir, 4, 6, 8, 16, ... ; ahora después de 2, se encuentra 3, no tachado, pero ya no queda en la tabla ningún número divisible por 2, es decir, por el único número primo menor que 3, luego, en virtud del principio recién demostrado, todos los números que subsisten en la tabla y son inferiores a 3×3 son primos; se tacha todos los múltiplos de 3, empezando por 3×3, pues todo múltiplo de inferior a 3×3 no ha podido subsistir en la tabla (*). Después de 3 se encuentra el 5 no tachado, y como ya han sido tachados los múltiplos de 2 y de 3, es decir, de los números primos inferiores a 5, resulta, en virtud del principio anterior, que todos los múltiplos de 5 inferiores a 5×5 no han podido subsistir en la tabla, luego tachamos los múltiplos de 5 empezando por 5×5 (**) ; de igual manera, después de 5 encontramos 7 y tachamos los múltiplos de 7, empezando por 7×7; luego tachamos los múltiplos de 11 empezando por 11×11. Si, continuando de esta

(*) Es evidente, por lo demás, que 3×2 debe haber sido tachado por ser múltiplo de 2.

(**) Los múltiplos 5×2, 5×3, 5×4 deben evidentemente haber sido tachados por ser múltiplos de 2 y de 3.

manera, se llega a tachar los múltiplos de un número primo p, y si q es el primero de los números primos de la tabla no tachados después de p, está uno seguro de que todos los números que subsisten y son inferiores a $q \times q$ son primos; si $q \times q$ es superior a n, la operación ha terminado.

202. La tabla siguiente nos da los números primos comprendidos entre 1 y 1000.

1	101	211	307	401	503	601	701	809	907
2	103	223	311	409	509	607	709	811	911
3	107	227	313	419	521	613	719	821	919
5	109	229	317	421	523	617	727	823	929
7	113	233	331	431	541	619	733	827	937
11	127	239	337	433	547	631	739	829	941
13	131	241	347	439	557	641	743	839	947
17	137	251	349	443	563	643	751	853	953
19	139	257	353	449	569	647	757	857	967
23	149	263	359	457	571	653	761	859	971
29	151	269	367	461	577	659	769	863	977
31	157	271	373	463	587	661	773	877	983
37	163	277	379	467	593	673	787	881	991
41	167	281	383	479	599	677	797	883	997
43	173	283	389	487		683		887	
47	179	293	397	491		691			
53	181			499					
59	191								
61	193								
67	197								
71	199								
73									
79									
83									
89									
97									

203. **Reconocer si un número dado es primo.** — Para investigar si un número n, no existente en la tabla, por ser superior al límite de ésta, es primo, se aplica las conocidas reglas de divisibilidad por 2, 3, 5, 7, 11, 13, y luego se sigue ensayando por división directa los divisores primos 17, 19, 23, ..., p hasta hallar un cociente c menor o igual al número primo q que sigue al p en la tabla; si ningún dividente ha resultado ser divisor, puede afirmarse que el número dado es primo, pues se tiene

$$n < p(c + 1) < p \times q;$$

y entonces, no siendo n divisible por ningún número primo inferior a q, es primo en virtud del principio establecido en el n.º 201.

Así, el número 2311 es primo; pues, como se ve en seguida, no es divisible por 2, 3, 5, 11; las divisiones por 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 no son tampoco exactas, pero la última da por cociente 43, número inferior al número primo 59 que sigue a 53; si se hubiera tratado del número

1009, hubiera bastado ensayar la división hasta por 31, porque esta última da por cociente 32, número inferior al número primo 37 que sigue a 31.

Si no se dispone de una tabla de números primos, se ensayarán los divisores 2, 3, 4, 5, 6,... en su orden, evitando ensayar aquellos como 4, 6, 8,... que se sabe netamente no ser primos, suspendiendo los ensayos cuando se obtenga un cociente c menor que el divisor p, pues se tendrá entonces que

$$n < p(c+1) < p^2,$$

y con ello la seguridad de que n, no admitiendo divisores primos menores que p, será primo.

204. Forma factorial de un número. Descomposición de un número en factores primos. — Empezaremos demostrando las siguientes proposiciones:

1.ª *Si un número primo divide el producto de varios factores, divide a lo menos uno de ellos.* Pues si fuera primo con todos los factores, sería también primo con el producto, según lo demostrado en el n.º 192, lo que es contrario el supuesto.

2.ª *Todo número no primo puede descomponerse en un producto de factores primos distintos de 1; y la descomposición sólo puede efectuarse de una única manera.*

Sea n un número no primo, es decir que admite por lo menos un divisor primo, a, distinto de 1 y de n (n.º 200); sea q el cociente de la división de n por a, resulta $n = aq$.

Si q es primo, queda descompuesto n en el producto de dos factores primos; si q no es primo admitirá un factor primo b distinto de 1 y de q_1, se tendrá $q = bq_1$ y $n = abq_1$.

Si q_1, cociente de q dividido por b, es primo, queda n descompuesto en el producto de tres factores primos; si q_1 no es primo admitirá de igual manera otro factor c primo distinto de 1 y de q_1; si q_2 es el cociente de q_1 dividido por c, se tendrá:

$$q_1 = cq_2 \qquad n = abcq_2.$$

Si q_2 es primo tendremos descompuesto n en el producto de cuatro factores primos; de lo contrario, podrá q_2 tratarse como q_1, etc.; como los números q, q_1, q_2, ... disminuyen cada vez (desde que se obtienen dividiendo el anterior por un número mayor que 1), y como sólo hay un número limitado de números inferiores a uno dado, es menester que la serie de divisiones sucesivas termine y se obtenga un último cociente q_n, primo, y entonces $n = abc \ldots q_n$ se hallará descompuesto en un producto de factores primos. Nada impide que algunos de estos factores primos sean iguales.

Ahora bien, la descomposición anterior sólo puede verificarse de una manera, pues si se tuviera simultáneamente

$$n = abcd \ldots q \qquad (1)$$
$$n = a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots q_1 \qquad (2)$$

siendo los factores $a, b, \ldots, q$; $a_1, b_1, \ldots, q_1$ todos primos, se tendría necesariamente que (admitiendo que no figura 1 entre dichos factores) si a divide n en virtud de la primera igualdad, debe dividir uno por lo menos de los factores $a_1, b_1, c_1, \ldots q_1$ en virtud de la segunda igualdad y de lo establecido más arriba; pero como estos últimos factores son primos, no puede a dividir a ninguno de ellos sin ser igual a uno de ellos. Supongamos, por consiguiente, que $a = a_1$, suprimiéndolos en la igualdad

$$abcd \ldots q = a_1 b_1 c_1 \ldots q_1 \qquad (3)$$

deducida de las dos anteriores, resulta $bc \ldots q = b_1 c_1 \ldots q_1$, y de una manera enteramente análoga a la anterior se desprende que b debe ser igual a uno de los factores del miembro de la derecha; suponiendo que $b = b_1$ se tendría $cd \ldots q = c_1 d_1 \ldots q_1$, y continuando de la misma manera llegaríamos a probar que cada factor del miembro de la izquierda de la igualdad (3) debe ser igual a uno correspondiente del miembro de la derecha, y viceversa; las dos descomposiciones (1) y (2) son, por consiguiente, idénticas.

205. *Ejemplos.* — Consideremos el número 180; empecemos la división con los números primos sucesivos, ayudándonos, siempre que se pueda, en los caracteres de divisibilidad: 180 es divisible por 2, el cociente es 90; 90 es divisible por 2, el cociente es 45; 45 no es divisible por 2 pero lo es por 3, el cociente es 15; 15 es divisible por 3 y el cociente es 5, número primo.

206. Prácticamente se dispone la operación como se indica a continuación: arriba, a la izquierda, se escribe el número dado, se traza a la derecha una raya vertical; enfrente del número, a la derecha de la raya, se escribe el primer divisor primo, y debajo del número, el cociente; enfrente de ese cociente se escribe el segundo divisor primo y debajo del primer cociente, el segundo; y así sucesivamente hasta obtener un cociente primo, el cual se vuelve a escribir debajo de los divisores primos.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	3

Es claro que se tendrá sucesivamente:

$$5;\quad 15 = 5 \times 3;\quad 45 = 15 \times 3 = 5 \times 3 \times 3;$$
$$90 = 45 \times 2 = 5 \times 3 \times 3 \times 2;$$
$$180 = 90 \times 2 = 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 5 \times 3^2 \times 2^2.$$

La forma factorial de un número, es decir la manera de representar un número cualquiera por un producto de factores primos, es útil en muchas circunstancias, pues facilita diversas operaciones y pone en evidencia diversas propiedades de los números.

Veamos algunas proposiciones.

207. — Divisores comunes a varios números. — *Para que un número* a, *descompuesto en factores primos, sea divisible por otro* b, *descompuesto igualmente en factores primos, es condición necesaria y suficiente que todos los factores primos que figuran en* b *se encuentren en* a *elevados por lo menos a la misma potencia.*

Sea c el cociente de a dividido por b, tendremos $a = b \times c$; descomponiendo b en factores primos, vemos que a, como producto de b por c debe contener todos los factores de b elevados por lo menos a la misma potencia, pues multiplicando los factores de b por los de c, no puede sino aumentarse los factores primos ya contenidos en b o aumentar la potencia de los ya existentes en b sin poder hacer desaparecer ningún factor de b ni disminuir la potencia a que está elevado. Por otra parte, si a contiene todos los factores de b elevados por los menos a la misma potencia, podrán separarse éstos y constituir así b; a figurará entonces como producto de b por otros factores; a será, en resumen, divisible por b y el cociente será el producto de los otros factores restantes. Por ejemplo, si a es $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11$ y $b = 2 \times 5 \times 11$, se escribirá:

$$a = (2 \times 5 \times 11) \times (2 \times 3 \times 7 \times 7) = b \times (2 \times 3 \times 7 \times 7).$$

208. Hallar todos los divisores de un número o expresar un número en su forma factorial. — Sea n un número descompuesto en sus factores primos; todo divisor de n, a excepción de 1, deberá poder descomponerse en factores primos que figuran en n, con exponentes iguales o menores. Luego, para hallar los divisores de n, bastará escribir todos los números formados por el producto de los factores que cumplan las condiciones indicadas.

Para no olvidar ninguno y proceder con método, se efectúa la operación de la siguiente manera:

Sea, por ejemplo, hallar todos los divisores de $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

En una primera línea se escriben los números

$$1,\ 2,\ 2^2, \qquad (1)$$

en otra línea escribamos

$$1,\ 3,\ 3^2, \qquad (2)$$

Ahora, si se multiplica cada uno de los divisores de la primera fila por cada uno de los de la segunda se formarán los números

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 \times 3 & 2 \times 3 & 2^2 \times 3 \\ 1 \times 3^2 & 2 \times 3^2 & 2^2 \times 3^2 \end{array}$$

los cuales vienen a ser, evidentemente, con excepción de 1, todos los divisores en los que sólo entran como factores primos 2 y 3.

De igual manera, multiplicando cada uno de los divisores recién hallados por

$$1,\ 5 \qquad (3)$$

se tendrán los divisores siguientes:

$1,\ 2,\ 2^2,\ 1 \times 3,\ 2 \times 3,\ 2^2 \times 3,\ 1 \times 3^2,\ 2 \times 3^2,\ 2^2 \times 3^2,\ 1 \times 5,\ 2 \times 5,$ $2^2 \times 5,\ 1 \times 3 \times 5,\ 2 \times 3 \times 5,\ 2^2 \times 3 \times 5,\ 1 \times 3^2 \times 5,\ 2 \times 3^2 \times 5,$ $2^2 \times 3^2 \times 5.$

o sea

$$1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 6,\ 12,\ 9,\ 18,\ 36,\ 5,\ 10,\ 20,\ 15,\ 30,\ 60,\ 45,\ 90,\ 180.$$

los cuales, con excepción de 1, son todos los números en los que sólo entran los factores primos 2, 3 y 5 elevados a potencias iguales o menores que en el número dado 180; son, por consiguiente, los divisores buscados. El número de éstos es, evidentemente, el producto de los números de términos que se encuentran escritos en las líneas (1), (2) y (3), es decir, en general, el producto de los exponentes, aumentados de 1, de los factores primos diferentes que figuran en la descomposición del número dado n; así, en el caso del número 180, se tendrá ($3 \times 3 \times 2 = 18$) factores. Ese número será par, si uno de los exponentes es impar; sólo será impar si todos los exponentes son pares, en cuyo caso n es el cuadrado de un número. Para expresar este último, se divide por 2 el exponente de cada factor primo contenido en n y se multiplican estos factores así afectados con exponentes mitades. Así, si se tiene

$$n = 2^2 \times 3^4 \times 7^6$$

el número de divisores será $3 \times 5 \times 7 = 105$, y n sería el cuadrado de $2 \times 3^2 \times 7^3$, puesto que $(2 \times 3^2 \times 7^3)^2 = 2^2 \times 3^4 \times 7^6$.

209. Hallar el m. c. d. de varios números. — Descomponiendo estos números en sus factores primos se comprueba en seguida si tienen algún divisor común distinto de 1, pues tal divisor, descompuesto en factores primos, sólo puede comprender los factores primos comunes a todos los números dados; inversamente, todo producto de factores primos comunes a los números dados, es un divisor común de ellos, y el mayor será evidentemente aquel formado por el producto de *todos* los factores primos comunes; si estos factores están elevados a distinta potencia se tomará, naturalmente, la menor potencia común. De la regla de formación de los factores comunes, resulta claramente que los divisores comunes a los números dados son los mismos que los divisores del m. c. d. Podemos, por consiguiente, enunciar la siguiente:

210. **Regla.** — *Para formar el m. c. d. de dos o más números descompuestos en factores primos, se efectúa el producto de todos los factores primos diferentes comunes a esos números y se afecta cada uno de ellos de un exponente igual al menor de los exponentes que afectan este factor en los distintos números.*

Por ejemplo, sean los números

$$a = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11^3 \qquad b = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11^2$$
$$c = 2^5 \times 3^4 \times 5 \times 11 \times 19^2 \qquad d = 2 \times 3^6 \times 5^4 \times 7^4 \times 13^3$$

el m. c. d. será

$$2 \times 3^2 \times 5.$$

Si los números dados no tienen factores primos comunes, son primos entre sí.

Lo dicho recién demuestra de una manera evidente las proposiciones enunciadas en los nos. 189 y siguiente, como ser:

211. *Si dos o más números se multiplican o dividen por otro, el m. c. d. de los productos es el mismo de antes, multiplicando o dividiendo, respectivamente, por ese otro número; si se divide varios números por el m. c. d. de ellos, los cocientes son números primos entre sí, puesto que después de efectuada la división no quedan ya factores primos comunes.*

212. **Hallar el m. c. m. de varios números.** — Descompuestos los números en factores primos, es evidente que un múltiplo común de dichos números, descompuesto a su vez de igual manera, debe contener todos los factores que figuran en cada uno de los números, y cada uno de éstos debe aparecer elevado a una potencia por lo menos igual a la mayor que afecta dicho factor en los números dados; y recíprocamente, todo número expresado por el producto de factores primos que satisfacen a estas condiciones, es un múltiplo de los números dados; el menor, es decir el m. c. m., se obtendrá tomando únicamente los factores distintos existentes en los números dados afectados cada uno de la potencia igual a la mayor de las que figuran en los números que se consideran, de aquí la siguiente:

213. Regla. — *Para formar el m. c. m. de varios números expresados por un producto de factores primos, se forma el producto de todos los factores primos distintos que figuran en los números dados y se afecta cada uno de ellos del exponente que tiene en aquel de los números considerados en que figura con el mayor exponente.*

Por ejemplo, el m. c. m. de los números

$$2^3 \times 3^3 \times 5, \quad 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 17, \quad 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 23$$

es

$$2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 17 \times 23.$$

Observemos que si se divide el m. c. m. de los números dados, obtenido como se acaba de indicar, por cada uno de ellos, los cocientes carecerán de factores primos comunes, pues si existiere algún factor de esta clase, al multiplicar los cocientes por los correspondientes números dados, el factor primo común de que hablamos figuraría ahora, en alguno de esos productos con un exponente más elevado aun que en aquel de los números dados que lo tenía en el grado más alto de todos.

EJERCICIOS

Descomponer en factores primos los siguientes números:

88. 45, 105, 2310, 360, 124146, 64, 2187.

89. 371280, 9261000, 7909200, 58744125, 3477547.

90. La condición necesaria y suficiente para que un número sea potencia perfecta del grado n, es que los exponentes de sus factores primos sean múltiplos de n.

91. Hallar los factores primos comunes a los dos números:

$$4908 \text{ y } 5356; \qquad 14850 \text{ y } 8840.$$

92. Hallar la forma factorial de 496 y demostrar que la suma de todos los números exactamente divisibles por 496 (incluso 1 y excluído 496) es 496.

93. Descomponer en factores primos el producto de los diez primeros números, buscando cuántas veces cada número primo entra como factor en el producto.

94. Descomponer en factores primos los números 625, 11664, 128164, 883600. ¿De qué números son los cuadrados?

95. Descomponer en factores primos los números 216, 21952, 35287552. ¿De qué números son los cubos?

96. Hallar un número n tal que $n(n+1) = 42$.

97. Hallar dos números x e y tales que $(x+y)\,(x-y) = 7$.

98. Hallar todos los cuadrados divisores de un número dado.

99. Hallar todos los cuadrados divisores comunes de dos números dados.

Hallar el m. c. de los siguientes números:

100. 3213 y 2200; 2250 y 1080.

101. 3654 y 63; 25020 y 834.

102. 1080, 22950 y 50715.

103. 8064, 3600, 28224 y 66528.

104. Hallar el m. c. d. y el m. c. m. de los números 2700, 45360 y 83600.

105. Las ruedas delanteras de un coche tienen 24 unidades de longitud de circunferencia y las de atrás 36 unidades, ¿cuántas unidades ha recorrido el coche en un trayecto en que las pequeñas ruedas han efectuado 1000 vueltas más que las grandes?

106. El producto del m. c. m. de dos números por el m. c. d. de los mismos es igual al producto de dichos dos números.

107. Descomponer 3150 en dos factores dígitos, de tantas maneras como sea posible.

CAPÍTULO VII

CANTIDADES Y NÚMEROS FRACCIONARIOS

214. Definiciones. — Consideremos un conjunto de lámparas eléctricas; como no puede partirse una lámpara sin destruirla, o sin hacerle perder su individualidad, el conjunto considerado sólo podrá modificarse agregando o retirando lámparas y no partes de éstas, pues estas partes no serían ya lámparas.

Consideremos, en cambio, un conjunto de lápices; como puede partirse un lápiz en dos y cada pedazo seguir siendo un lápiz, es posible modificar el conjunto teniendo en cuenta esa circunstancia. La unidad *lápiz* se presta a una especulación a la que no se presta la unidad *lámpara*.

215. Conjuntos continuos y conjuntos discontinuos. — Por los ejemplos recién dados, se ve que cabe clasificar los conjuntos en dos categorías: aquellos cuyas unidades no pueden, por su naturaleza, ser descompuestas en otras equivalentes a ellas; y aquellos en que tal cosa es posible, teórica o prácticamente.

Un conjunto de soldados, una colección de huevos, pertenecen a la primera categoría; el conjunto de las hojas de un bloque de papel, a la segunda. Los conjuntos de la primera categoría se dicen **discontinuos.**

216. Grandores matemáticos. — Se designa con el nombre de **grandor matemático,** o de **cantidad** (o **magnitud**) **matemática,** a todo aquello que puede equipararse a un conjunto de unidades equivalente y perfectamente definidas. Respecto de esos grandores se sabe, por consiguiente, definir la *igualdad* y la *suma.* Y resulta que si dos grandores matemáticos son iguales a un tercero, lo son entre sí. Y de que la adición de varios grandores matemáticos es independiente del orden seguido para adicionarlos o sumarlos.

Cantidades matemáticas de la misma especie son aquéllas cuyas unidades responden a una misma definición; son esta clase de cantidades, evidentemente, aquellas que se pueden concebir iguales y adicionar.

Si esos grandores se resuelven en conjuntos discontinuos, se dice que son grandores **discontinuos** o **discretos.**

Si la descomposición de la unidad, en los conjuntos no discontinuos, puede suponerse en teoría realizable indefinidamente, los conjuntos se dicen continuos, y los grandores matemáticos que le son equiparables, se dicen **continuos.**

Siendo indivisible la unidad en los grandores discontinuos, la especulación con ellos versa exclusivamente sobre el concepto de número entero. No sucede lo mismo con los grandores continuos, pues, con ellos cabe especular, además, sobre lo relativo a la subdivisión de la unidad.

217. Definición de la Aritmética y de la Matemática. — Precisamente la Aritmética es la ciencia que estudia los grandores matemáticos independientemente de todo concepto extraño a la noción de número entero y a los que nacen, en los grandores continuos, de la partición de la unidad.

Las ciencias que estudian las cantidades matemáticas, en general, es decir, en sí mismo o asociadas con otras nociones compatibles con su naturaleza, se llaman las **matemáticas.**

La **matemática** es el conjunto de las matemáticas.

En adelante cuando usemos las palabras *cantidad, grandor* o *magnitud,* se referirán a las que son *matemáticas* o *determinables.*

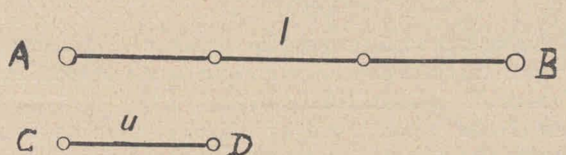


Fig. 2.

218. Cantidades y números fraccionarios. — Supongamos, (fig. 2), que AB represente un lápiz y CD una parte cortada de él.

Si AB se ha cortado en tres partes iguales, se dirá que el largo, l, de AB es tres veces el largo, u, de CD y se escribirá $l = 3u$.

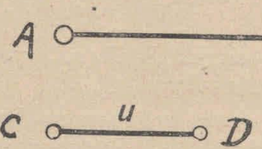


Fig. 3.

Podrá considerarse l como un conjunto de tres u; u es la unidad, y el número 3, el que afecta al conjunto.

Consideremos ahora la figura 3.

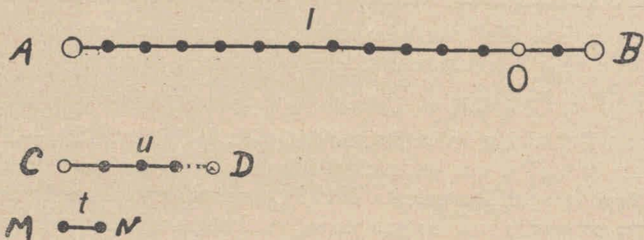


Fig. 4.

Aquí AB no puede considerarse como tres CD, sino como tres CD más un trozo OB que no alcanza a CD, es decir, que l es mayor que $3u$. Pero si CD fuese cortado en 4 partes iguales (fig. 4), una de esas partes MN podría caber exactamente dos veces, por ejemplo, en OB, y entonces, si designamos con t al largo de MN, podríamos escribir

$$l = 3u + 2t.$$

Vendría a estar, así, expresado l en base a unidades distintas. Conviene generalmente expresar l en base a una sola unidad establecida de antemano e invariable.

Si en el caso presente esa unidad es u, para expresar l serán necesario dar *dos números*: uno que exprese en cuántas partes idénticas, t, se considera *partida, fraccionada* o *quebrada* la unidad u elegida, y otro que exprese cuántas de esas partes, t, contiene l.

En nuestro ejemplo, esos dos números son, respectivamente, 4 y 14, pues u se partió en 4 partes iguales de largo t y en l caben exactamente 14 de esas partes. Por la razón que daremos luego, se expresan ambos números escribiendo el segundo encima del primero, separados por la raya de división; así se escribirá, en el caso del ejemplo tomado, $\frac{14}{4}$, y se dirá que $l = \frac{14}{4} u$.

El conjunto de dos números enteros enunciados e interpretados como acaba de indicarse, constituye lo que se llama un **número quebrado o fraccionario**, y si se le llama también *número*, es por analogía al número entero, pues uno y otro implican el concepto de *algo* que, asociado al concepto de *unidad*, determina el *conjunto* o *cantidad* l considerada, conjunto o cantidad que, por esta razón, se llama **cantidad fraccionaria.**

219. **Nomenclatura.** — Si la unidad primitiva u se considera como el conjunto de *dos* unidades idénticas, éstas se llaman *medios;* si se considera como el conjunto de tres unidades idénticas, éstas se llaman *tercios*, y así sucesivamente se dice: *cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos, décimos, onceavos, doceavos, treceavos, catorceavos,... diecinueveavos, veinteavos,... noventa y nueveavos, centavos*, o *centésimos,ciento un avos,... novecientos noventa y nueve avos, milésimos, mil y un avos,... nueve mil novecientos noventa y nueve avos,... diez mil milésimos*, etc.

220. Por consiguiente, el número fraccionario $\frac{14}{3}$ se leerá *catorce tercios*, y la cantidad fraccionaria $l = \frac{14}{3} u$ se expresará diciendo *catorce tercios de u;* locución que significará que l puede considerarse como un conjunto de 14 unidades idénticas al tercio de u.

221. **El concepto de cantidad y número fraccionario derivado de la división considerada como operación inversa de la multiplicación.** — Recordemos que, considerada como operación inversa de la multiplicación, la división se propone obtener uno de los factores de un producto conociendo éste y el otro factor. Según esto, tal operación carecerá de sentido si el dividendo no es el producto del divisor por un número, o si no existe cantidad alguna que multiplicada por el divisor origine el dividendo. Por ejemplo, si se pudiera determinar en cuántos grupos de dos niños puede repartirse uno de 5 niños, la operación carecería de significado, porque para que fuera posible sería necesario que hubiese un niño más o uno menos; de igual

manera, si se pregunta: ¿cuántos niños debe haber en un conjunto para que, juntados de a dos, se origine otro de cinco niños?, la operación sería igualmente imposible.

Tratándose de grandores matemáticos continuos puede, sin embargo, darse una solución a una división de la última especie.

222. Por ejemplo, si se tratara de dividir por 2 al lápiz AB (fig. 5), igual a $5u$, el conjunto cociente no podría ser ni $2u$, ni $3u$, ni ningún número entero de u; pero si se adopta como unidad no

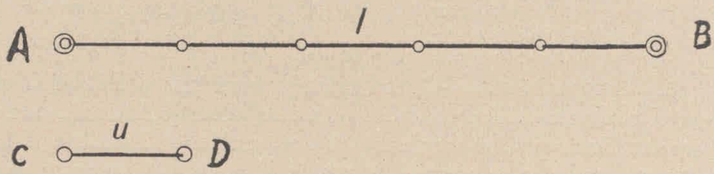


Fig. 5.

ya u, sino la mitad, m, de u (fig. 6), entonces AB contendría $(2 \times 5)m$, y el conjunto cociente de dividirlo por 2 se compondría evidentemente de cinco m y sería $5m$. En general, si se tiene la operación $\frac{a \text{ unidades}}{b}$, en que a y b representan números, y se adopta como unidad, no la primitiva, sino otra b veces menor que aquella, el

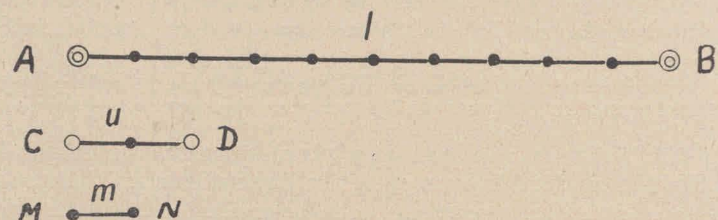


Fig. 6.

dividendo contendrá $a \times b$ de esas nuevas unidades y entonces la división $\frac{a \text{ unidades}}{b}$, referida a las nuevas unidades, se expresará así: $\frac{(a \times b) \text{ nuevas unidades}}{b}$, y el cociente será a nuevas unidades.

223. Interpretada la operación de esta manera tendrá un significado preciso, aun en el caso en que el dividendo sea menor que el divisor.

La figura 7 demuestra, por ejemplo, que $AB = 3MN$, $CD = 5 MN$ y, por consiguiente, que $AB = \frac{3}{5} CD$; y también que la división $\frac{3u}{5}$ representa una cantidad, AB, obtenida considerando u como el conjunto de 5 unidades idénticas MN, y tomando 3 de estas nuevas unidades.

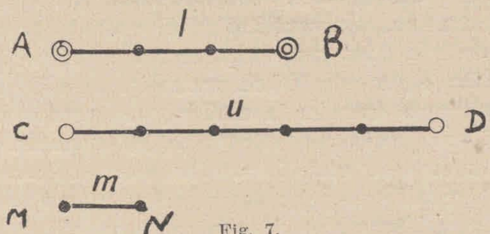


Fig. 7.

224. Cuando las cantidades fraccionarias son, como en el caso anterior, menores que la unidad que sirve de base para indicarlas, se llaman a veces **fracciones o quebrados propios o fracciones de la unidad**; en caso contrario, pueden expresarse como suma de un número entero de unidades y de una fracción de la unidad; cuando se expresan de esta manera se las llama cantidades fraccionarias **mixtas**. Así, en el ejemplo del n.º **218**, puede indicarse la cantidad fraccionaria l de la siguiente manera: $4u + \frac{2}{3}u$, o $\left(4 + \frac{2}{3}\right) u$, o simplemente escribiendo $4\frac{2}{3}u$, siendo entonces $4\frac{2}{3}$ el número llamado *mixto*, por ser formado de un entero y de uno fraccionario propiamente dicho.

225. Reasumiendo, vemos que la división $\frac{a \text{ unidades}}{b}$ tiene siempre un significado cuando se refiere a grandores continuos, porque si no puede efectuarse tal operación expresando las cantidades en base a la unidad primitivamente establecida y según la que está expresado el dividendo, podrá efectuarse tomando como nueva unidad, para expresar la cantidad, y por lo tanto el dividendo y el cociente, otra b veces menor que la primitiva, esto es, considerando la primitiva unidad como un conjunto de b *nuevas* unidades idénticas entre sí, en cuyo caso el cociente será un conjunto de a de estas nuevas unidades.

226. Este cociente existe, pues, y corresponde a una cantidad llamada fraccionaria o *quebrada*, porque para expresarla en base a la unidad establecida ha sido necesario partir, *fraccionar* o *quebrar* esta última en partes iguales. Luego, en base a una unidad establecida de antemano, una cantidad se dice **entera** o se dice **fraccionaria**, según que, para expresarla, no sea necesario fraccionar o partir la unidad, o que esta última operación sea indispensable. En el primer caso, para enunciar la cantidad basta enunciar un número entero, el cual indica de cuántas de las unidades establecidas puede considerarse compuesta la cantidad a expresar; en el segundo caso, es indispensable enunciar dos números enteros, a saber: uno que indica en cuántas partes iguales se ha fraccionado la unidad primitiva, otro que indica cuántas de estas partes o nuevas unidades componen la cantidad expresada. Hemos visto que el conjunto de estos dos números, presentados en cierta forma, constituye lo que se llama un **número fraccionario.**

227. La división $\dfrac{a \text{ unidades}}{b}$ expresa, pues, la cantidad fraccionaria $\dfrac{a}{b}$ unidades (se lee a sobre b unidades), y lo anterior explica por qué un número fraccionario se escribe en la forma $\dfrac{a}{b}$ (se lee a sobre b); el número b que expresa en cuántas partes iguales se ha descompuesto la unidad primitiva, se llama el **denominador** del número fraccionario, el otro, a, que expresa cuántas de estas partes componen la cantidad fraccionaria, se llama el **numerador.**

Si la división es tomada en el sentido de determinar por qué número debe multiplicarse el divisor para obtener el dividendo (por ejemplo, en la división $\dfrac{5u}{2u}$, y si sucede, como en este ejemplo, que tal división es imposible por no ser el dividendo un múltiplo del divisor, se conviene, a fin de mantener las reglas del cálculo, que el cociente de esta división sea un número fraccionario, cuyo numerador es el número que afecta al dividendo, y el denominador, el que afecta al divisor; en el mismo ejemplo este número sería $\frac{5}{2}$.

Es evidente, en efecto, que si la expresión $\frac{5}{2}u$ representa la cantidad formada por cinco unidades iguales a la mitad de u, la expresión $\frac{5}{2}(2u)$ expresará una cantidad doble de la anterior, puesto que el número fraccionario $\frac{5}{2}$ afecta ahora una cantidad $2u$ doble de antes; pero entonces $\frac{5}{2}(2u)$ representa un conjunto de diez unidades iguales a la unidad de u, es decir, cinco unidades iguales a u. En resumen, se tiene $\frac{5}{2}(2u) = 5u$; por lo tanto, al escribir $\frac{5u}{2u} = \frac{5}{2}$, se conserva la definición de división, desde que se verifica que el dividendo $5u$ es igual producto $\frac{5}{2}(2u)$ del divisor $2u$ por el cociente $\frac{5}{2}$.

228. Puede comprenderse, por lo que antecede, que una cantidad fraccionaria es, en resumen, una magnitud expresada en base a distintas unidades, y que está caracterizada por el hecho de que sólo se enuncia la unidad superior. Así, el lapso de tiempo 1 día 3 horas, o sea 27 horas, estará expresado en forma fraccionaria diciendo $\frac{27}{24}$ días, pues $\frac{27}{24}$ días representa el tiempo constituído por la suma de 27 unidades veinticuatro veces más pequeñas que el día, es decir, 27 horas. Como se ve, al enunciar una cantidad en forma fraccionaria, en vez de dar un nombre especial a las unidades inferiores, se indican éstas con un nombre genérico (medios, tercios, cuartos, etc.), que expresa en cuántas partes se ha dividido la unidad única que se enuncia.

229. Las cantidades y números enteros o fraccionarios se llaman, genéricamente, *cantidades* o *números racionales*. El numerador y el denominador de un número fraccionario se llaman los *términos* del número fraccionario.

EJERCICIOS

108. Escribir en cifras los números fraccionarios siguientes: nueve quintos, trece veinticincoavos, mil veinticincoavos, dos mil doscientos ventidosavos, cuarenta y tres mil cuarenta y tres, cincuenta y dos milésimos.

109. Escribir con todas letras los números fraccionarios siguientes:

$$\frac{359}{999},\quad \frac{1001}{10001},\quad \frac{34043}{990099},\quad \frac{8000}{25900},\quad \frac{1100011}{111000111}.$$

110. Escribir con cifras los números fraccionarios siguientes: ciento once enteros, mil ciento once, novecientos noventa y nueveavos.

111. Una fuente ha derramado 137 unidades de capacidad de agua en un estanque cuya capacidad es de 450 unidades, ¿qué fracción del estanque ha llenado?

Dar forma de fracción propia a los siguientes números mixtos:

112. $1\frac{2}{3},\ 2\frac{2}{3},\ 2\frac{3}{4},\ 3\frac{3}{5},\ 4\frac{3}{5},\ 5\frac{5}{6},\ 6\frac{7}{8},\ 5\frac{8}{9},\ 4\frac{5}{9},\ 12\frac{5}{8}.$

113. $7\frac{12}{17},\ 12\frac{3}{10},\ 17\frac{2}{3},\ 20\frac{4}{5},\ 10\frac{8}{9},\ 14\frac{3}{5},\ 15\frac{5}{6}.$

114. $206\frac{29}{53},\ 317\frac{11}{15},\ 620\frac{13}{14},\ 2607\frac{6}{29},\ 183\frac{8}{21},\ 127\frac{13}{28}.$

115. ¿Entre cuántas personas puede repartirse 10 manzanas de tal manera que cada una reciba $\frac{1}{2}$ de una manzana? ¿y entre cuántas, si cada una recibe $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$?

CAPÍTULO VIII

MECANISMO DEL CÁLCULO CON CANTIDADES O NÚMEROS FRACCIONARIOS

230. Supondremos en lo que sigue que las cantidades fraccionarias están expresadas en base a una misma unidad.

231. Propiedad fundamental. — *No altera una cantidad fraccionaria si se multiplica (o divide) por un mismo número entero a la vez el numerador y el denominador del número fraccionario que la afecta.*

Sea la cantidad fraccionaria $\frac{a}{b}$ *unidades,* se trata de demostrar que las cantidades fraccionarias $\frac{am}{bm}$ *unidades* (o $\frac{a:m}{b:m}$ *unidades,* suponiendo que a y b sean múltiplos de m, a fin de que las divisiones $\frac{a}{m}$ y $\frac{b}{m}$ sean exactas) representan la misma cantidad primitiva. Esto es, en resumen, que se tienen las identidades

$$\frac{a}{b}\,\textit{unidades} \equiv \frac{am}{bm}\,\textit{unidades} \equiv \frac{a:m}{b:m}\,\textit{unidades},$$

o simplemente que

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{am}{bm} \equiv \frac{a:m}{b:m}.$$

232. Efectivamente, la expresión $\frac{a}{b}$ *unidades* representa una cantidad que puede considerarse como el conjunto de a unidades b veces más pequeñas que la primitiva; es decir, que si se considera a la unidad primitiva como el junto de b unidades idénticas, la cantidad $\frac{a}{b}$ *unidades*, contiene a de esas nuevas unidades. De igual manera $\frac{am}{bm}$ *unidades* y $\frac{a:m}{b:m}$ unidades, representan, respectivamente, cantidades que pueden considerarse como el conjunto de am *unidades* o de $(a:m)$ unidades, bm o $b:m$ veces más pequeñas que la primitiva; es decir, que si se considera a la unidad primitiva como el conjunto de bm o de $\frac{b}{m}$ *unidades* idénticas, la cantidad $\frac{am}{bm}$ *unidades*, o la $\frac{a:m}{b:m}$ *unidades*, contienen am o $a:m$ de ellas; pero entonces es la misma cantidad de antes, porque si, por una parte, la unidad primitiva se ha partido en un número m veces mayor o menor de partes iguales, por otra, las cantidades fraccionarias $\frac{am}{bm}$ *unidades* y $\frac{a:m}{b:m}$ *unidades* contienen un número m veces mayor o menor de ellas.

233. La figura 8 demuestra claramente que si $AB = \frac{6}{4} CD$,

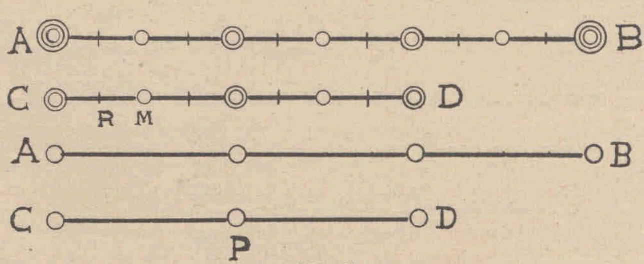


Fig. 8.

también se tiene que $AB = \frac{12}{8} CD$ y $AB = \frac{3}{2} CD$ porque, en el primer caso, CD se supone compuesto de 4 unidades CM habiendo 6 de ellas en AB; en el segundo caso se tiene que $\frac{12}{8}$ CD proviene de dividir en dos partes iguales cada uno de los CM, obteniéndose unidades nuevas iguales a CR, el número de las cuales, en AB, es naturalmente doble de antes o sea 12, de manera que $\frac{12}{8}$ CD significa lo mismo que $\frac{6}{4}$ CD; por último, $\frac{3}{2}$ CD significa que la nueva unidad es la mitad de CD, esto es, el doble de CM, es decir CP; esta unidad está contenida en AB la mitad de veces que lo estaba la CM, esto es, 3 veces; luego, $\frac{3}{2}$ CD y $\frac{6}{4}$ de CD son las mismas cantidades.

234. Reducción a iguales denominadores. — La propiedad enunciada en el n.º **128**, 6.º y 7.º (pág. 64), queda, por consiguiente, generalizada; y lo mismo que se indicó allí, pueden reducirse varios números fraccionarios al mismo denominador si es que éstos son diferentes; basta, como vimos, multiplicar el numerador y denominador de cada número fraccionario por el producto de los denominadores de los demás, con lo que dichos números, sin alterar, resultan con el mismo denominador.

Así tenemos que $\frac{2}{3}$, $\frac{14}{5}$, $\frac{17}{7}$, son números fraccionarios que expresan lo mismo que $\frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7}$, $\frac{14 \times 3 \times 7}{5 \times 3 \times 7}$, $\frac{17 \times 3 \times 5}{7 \times 3 \times 5}$, es decir que $\frac{70}{105}$, $\frac{294}{105}$, $\frac{255}{105}$.

Puede, sin embargo, obtenerse a menudo un denominador común menor que el que resulta aplicando el procedimiento anterior; ese denominador común menor es evidentemente el m. c. m. de los denominadores, y ninguna dificultad existe en comprender la siguiente:

235. Regla práctica. — *Para reducir varios números fraccionarios de distintos denominadores, a otros iguales, uno a uno, pero con un mismo denominador que sea el menor posible, se busca el m. c. m. de los denominadores y se multiplica los dos términos de cada uno de los números fraccionarios dados por el cociente de dividir el m. c. m. hallado por el denominador respectivo.*

236. Así, sean los números fraccionarios $\frac{3}{4}, \frac{15}{6}, \frac{7}{105}$, los que se quiere reducir a otros equivalentes con el mismo denominador, el menor posible. El m. c. m. de 4, 6, 105 es 420 y tenemos que

$$\frac{3}{4} = \frac{3\,\frac{420}{4}}{4\,\frac{420}{4}} = \frac{3 \times 105}{420};$$

análogamente

$$\frac{15}{6} = \frac{1050}{420}, \qquad \frac{7}{105} = \frac{28}{420}.$$

237. Si los denominadores de los números fraccionarios dados fueran todos primos entre sí, el m. c. m. sería el producto de ellos y la regla no ofrecería novedad sobre el procedimiento indicado en el n.º **234.**

238. De la definición dada para los números fraccionarios se deduce que: *Quedando fijo el denominador, la cantidad fraccionaria aumenta o disminuye junto con el numerador;* y que, viceversa: *quedando fijo el numerador, la cantidad fraccionaria disminuye o aumenta cuando el denominador aumenta o disminuye.*

EJERCICIOS

116. Reducir a un mismo denominador los números fraccionarios siguientes:

$$\frac{4}{5}, \frac{12}{25} \text{ y } \frac{11}{50}. \qquad \frac{2385}{3852} \text{ y } \frac{49}{603}. \qquad \frac{21}{40}, \frac{51}{90} \text{ y } \frac{69}{135}.$$

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{3}{8} \text{ y } \frac{11}{24}. \qquad \frac{1}{3}, \frac{1}{19}, \frac{2}{3}, \frac{5}{19}, \frac{7}{19} \text{ y } \frac{18}{19}.$$

117. Disponer por orden de grandor relativo los siguientes números fraccionarios:

$$\frac{8}{9}, \frac{6}{10}, \frac{15}{22}, \frac{27}{36}. \qquad \frac{14}{18}, \frac{31}{35}, \frac{9}{11}, \frac{12}{27}, \frac{23}{72}.$$

$$\frac{5}{7}, \frac{11}{14}, \frac{19}{35}, \frac{15}{28}, \frac{13}{21}. \qquad \frac{7}{16}, \frac{19}{24}, \frac{4}{5}, \frac{15}{32}.$$

$$\frac{9}{10}, \frac{11}{20}, \frac{13}{15}, \frac{7}{30}, \frac{5}{36}. \qquad \frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{3}{11}, \frac{7}{18}, \frac{17}{33}. \qquad \frac{3}{8}, \frac{9}{16}, \frac{13}{27}, \frac{19}{36}.$$

118. Disponer por orden de grandor todos los números fraccionarios irreducibles (véase n.º 239) cuyos términos sean menores que 7 y aquellos irreducibles tales que la suma de sus términos sea menor que 7.

239. Simplificación de números fraccionarios. — Dividiendo ambos términos de un número fraccionario por un factor común a ellos, se obtiene otro equivalente y expresado con números menores; se dice entonces que dicho número fraccionario se ha simplificado. La mayor simplificación posible se obtendrá, evidentemente, dividiendo los dos términos del número fraccionario por el m. c. d. de ellos; los términos del número fraccionario así obtenido son primos entre sí y corresponden al número fraccionario más simple entre todos los equivalentes al dado. Los números fraccionarios que reúnen esta condición, es decir cuyos términos sean primos entre sí, se llaman **irreducibles.**

240. Por ejemplo el número fraccionario $\dfrac{210}{126}$ es equivalente al $\dfrac{\left(\dfrac{210}{2}\right)}{\left(\dfrac{126}{2}\right)}$, es decir a $\dfrac{105}{63}$, y también al $\dfrac{5}{3}$ obtenido dividiendo los dos términos 210 y 126 del número fraccionario dado por 42, m. c. d. entre 210 y 126.

$$\begin{array}{r} 7 \\ \cancel{35} \\ \cancel{105} \\ \cancel{210} \\ \hline \cancel{126} \\ \cancel{63} \\ \cancel{21} \\ 3 \end{array}$$

Para simplificar un número fraccionario y transformarlo en otro irreducible, se procede a veces como se indica a continuación. Sea simplificar el número fraccionario anterior $\dfrac{210}{126}$; como 210 y 126 son divisibles por 2, se tacha ambos números y se escribe los cocientes 105 y 63 de la división; resulta ahora que 105 y 63 no son divisibles por 2 pero sí por 3, se tacha 105 y 63 y se escribe los cocientes 35 y 21; se observa luego que 35 y 21 no son divisibles por 2, 3, 5 pero sí por 7, se tachan y se escriben los cocientes 7 y 3; como éstos son primos entre sí resulta que el número fraccionario irreducible equivalente al dado, es $\dfrac{7}{3}$.

EJERCICIOS

Simplificar los números fraccionarios siguientes:

119. $\frac{4}{6}, \frac{350}{910}, \frac{936}{104958}$.

120. $\frac{3420}{4860}, \frac{111804}{266805}$.

121. $\frac{18176}{191808}, \frac{7200}{704075}$.

122. $\frac{280}{945}, \frac{42237}{75582}$.

123. $\frac{7497}{15729}, \frac{5400}{30105}$.

124. $\frac{32436}{68400}, \frac{6435}{7293}$.

125. $\frac{890274}{1213641}, \frac{37275}{47325}$.

126. Hallar un número fraccionario equivalente a $\frac{4}{5}$ cuyo denominador sea 35.

127. Hallar un número fraccionario equivalente a $\frac{25}{82}$ cuyo numerador sea 1000.

128. Hallar un número fraccionario equivalente a $\frac{7}{40}$ cuyo numerador sea 1000.

129. Un caño suministra 23 unidades de capacidad de agua por minuto y alimenta un estanque cuya capacidad es de 72900 unidades. Si se abre el caño durante 12 horas, ¿qué fracción del estanque llenará en ese tiempo?

130. Hallar un número fraccionario equivalente a $\frac{7}{12}$ y cuyos términos sumen 95.

131. Hallar un número fraccionario equivalente a $\frac{4}{7}$ y cuyos términos tengan una diferencia igual a 45.

241. Adición. — Estando diversas cantidades fraccionarias expresadas en base a una misma unidad, es evidente que si los números fraccionarios que afectan a aquéllas tienen el mismo denominador, el número fraccionario que afecta la suma de aquéllas tiene también el mismo denominador que los sumandos y como numerador la suma de los numeradores de los sumandos.

242. Por ejemplo, supongamos (fig. 9) que se trata de adicionar longitudes y que la unidad de longitud en base a la cual están expresadas las longitudes de AB y CD, a sumar, sea u, longitud de MN; supongamos que $u = 4f$, siendo f la longitud de PQ; vemos que las longitudes de AB y CD son respectivamente $3f$ y $7f$ o sea $\frac{3}{4}u$ y $\frac{7}{4}u$; la suma de dichas longitudes es, por consiguiente, $AD = (3 + 7)f = 10f = \frac{10}{4}u$, lo que demuestra que $\frac{3}{4}u + \frac{7}{4}u = \frac{10}{4}u$, o simplemente, refiriéndonos a los números fraccionarios, que $\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4}$.

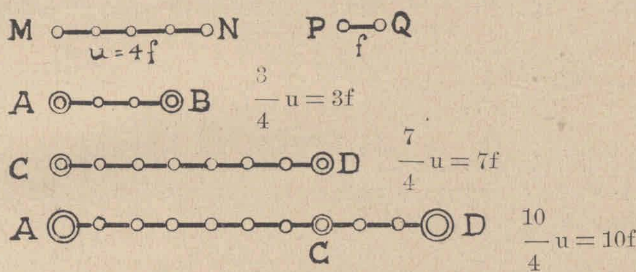


Fig. 9.

243. En general, se tiene $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \equiv \frac{a+b}{m}$; y de igual manera

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m} + \ldots \equiv \frac{a+b+c+d+\ldots}{m}.$$

244. Si los números fraccionarios a sumar tuvieran distintos denominadores, se reduciría el caso al anterior, reemplazando los números fraccionarios dados por otros equivalentes de mismo denominador, obtenidos como se indica en el n.º 235.

Por ejemplo:

$\frac{3}{4}$ unidades $+ \frac{2}{3}$ unidades $+ \frac{5}{7}$ unidades $= \frac{63}{84}$ unidades $+ \frac{56}{84}$ unidades $+ \dfrac{60}{84}$ unidades $= \dfrac{63+56+60}{84}$ unidades $= \dfrac{179}{84}$ unidades. Igualmente:

$$\frac{7}{4}+\frac{15}{12}+\frac{6}{24}=\frac{42}{24}+\frac{30}{24}+\frac{6}{24}=\frac{78}{24}=\frac{13}{4}.$$

245. Si las cantidades están expresadas en base a distintas unidades, se transforman previamente en otras equivalentes expresadas en base a una misma unidad.

Así, $\dfrac{7}{4}$ años $+ \dfrac{2}{3}$ día equivalen a $\dfrac{7\times 365}{4}$ días $+ \dfrac{2}{3}$ día o sea $\dfrac{7665+8}{12}$ días $= \dfrac{7673}{12}$ días.

246. Si algunos sumandos son cantidades enteras, se suman por separado y se agregan a la suma de los sumandos fraccionarios como se indicó en el n.º **224**, pág. 119.

Así, $\quad 2+\dfrac{3}{4}+1+\dfrac{7}{5}=2+1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{5}=3+\dfrac{15+28}{20}$

$=3+\dfrac{43}{20}=\dfrac{3\times 20}{20}+\dfrac{43}{20}=\dfrac{60+43}{20}=\dfrac{103}{20}$; o también $3+\dfrac{43}{20}=3+2\dfrac{3}{20}=5\dfrac{3}{20}$.

Análogamente, si se tratara de números fraccionarios mixtos, la propiedad asociativa y conmutativa de la adición hace ver que puede sumarse separadamente los números enteros y los fraccionarios. Así:

$$4\frac{2}{3}+5\frac{1}{4}=\frac{14}{3}+\frac{21}{4}=\frac{56+63}{12}=\frac{119}{12}=9\frac{11}{12},$$

resultado que puede también obtenerse así:

$$4+\frac{2}{3}+5+\frac{1}{4}=4+5+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=9+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=9\frac{11}{12}.$$

247. Sea c y r respectivamente el cociente y el resto de la división natural de a por b, se tendrá

$$a = bc + r;$$

por consiguiente

$$\frac{a}{b} = \frac{bc + r}{b} \equiv \frac{bc}{b} + \frac{r}{b} \equiv c + \frac{r}{b}.$$

Luego, puede establecerse que si al cociente de una división natural se agrega una cantidad fraccionaria cuyo numerador es el resto de la división y cuyo denominador el dividente, se obtiene exactamente la cantidad fraccionaria, expresada por la división indicada, considerada como operación inversa de la multiplicación.

EJERCICIOS

Efectuar las adiciones siguientes:

132. $\frac{3}{17} + \frac{8}{17} + \frac{9}{17} + \frac{16}{17}$; $5\frac{7}{11} + 8\frac{4}{11} + 13\frac{2}{11} + 10\frac{5}{11} + \frac{9}{11}$.

133. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$; $\frac{7}{15} + \frac{3}{4} + \frac{2}{7} + \frac{11}{13}$; $\frac{15}{25} + \frac{7}{21} + \frac{9}{11} + \frac{18}{112}$

134. $6\frac{1}{30} + 8\frac{2}{3} + 13\frac{4}{7} + \frac{1}{2} + \frac{8}{16} + \frac{94}{188} + \frac{525}{1050}$; $4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{2} + 6\frac{7}{12}$.

135. $20\frac{4}{9} + 17\frac{2}{3} + 6 + 24\frac{5}{6}$; $5\frac{2}{35} + \frac{6}{5} + \frac{6}{7} + \frac{39}{70}$; $\frac{14}{33} + \frac{3}{40} + \frac{25}{11} + \frac{1}{3} + \frac{49}{22}$.

136. Un obrero efectuaría cierto trabajo en 10 días, otro en 9, otro en 12 y otro en 13, ¿qué fracción del trabajo se efectuaría en un día trabajando los cuatro obreros simultáneamente?

137. Un obrero efectuaría un trabajo en 25 días, otro en 27, un tercero en 21, ¿qué fracción del trabajo se efectuaría si trabajaran simultáneamente el 1.º y el 3.º; cuál trabajando el 2.º y el 3.º; cuál trabajando el 1.º y el 2.º; cuál trabajando juntos?

138. Un caño suministra $6\frac{6}{15}$ unidades de capacidad por minuto, otro $3\frac{1}{5}$ más que el primero en el mismo tiempo, ¿qué fracción de un estanque de capacidad de 1400 unidades pueden esos dos caños llenar juntos en una hora o sea, en 60 minutos?

248. Substracción. — Si los números fraccionarios a restar tienen el mismo denominador, el número fraccionario que afecta el resto tiene por numerador el número que se obtiene restando ordenadamente los numeradores, y el mismo denominador que aquéllos. Así:

$$\frac{7}{3}\text{ unidades} - \frac{2}{3}\text{ unidades} = \frac{5}{3}\text{ unidades},$$

pues

$$\frac{7}{3}\text{ unidades} = \frac{5}{3}\text{ unidades} + \frac{2}{3}\text{ unidades (n.° 243)};$$

y en general

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m},$$

pues

$$\frac{a-b}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a-b+b}{m} = \frac{a}{m}.$$

249. Si los denominadores son distintos, se reemplazan los números fraccionarios dados por otros equivalentes y del mismo denominador. Así:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

250. Si las cantidades no están expresadas en base a una misma unidad, se hace previamente la reducción a la misma unidad.

Ejemplo. — Sea la substracción $\frac{7}{4}$ años $- \frac{2}{3}$ día; tendremos: $\frac{7}{4}$ años $= \frac{7 \times 365}{4}$ días; luego, $\frac{7}{4}$ años $- \frac{2}{3}$ día equivale a $\frac{2555}{4}$ días $- \frac{2}{3}$ día $= \frac{7665 - 8}{12}$ días $= \frac{7657}{12}$ días.

251. Si se tratara de números fraccionarios mixtos podría evidentemente restarse separadamente la parte entera, luego la fraccionaria y sumar ambos restos. Así:

$$27\frac{2}{3}-14\frac{2}{5}=27+\frac{2}{3}-\left(14+\frac{2}{5}\right)=27+\frac{2}{3}-14-\frac{2}{5}$$

$$=27-14+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=13\frac{4}{15}.$$

252. Si el minuendo o el substraendo son cantidades enteras, se supondrá que son fraccionarias con denominador igual a 1. Así:

$$3-\frac{4}{5}=\frac{3}{1}-\frac{4}{5}=\frac{15-4}{5}=\frac{11}{5}=2\frac{1}{5};$$

$$\frac{7}{2}-2=\frac{7}{2}-\frac{2}{1}=\frac{7-4}{2}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

EJERCICIOS

Efectuar las substracciones siguientes:

139. $\frac{14}{31}-\frac{6}{31}$; $\frac{431}{999}-\frac{73}{999}$; $\frac{16}{81}-\frac{7}{165}$.

140. $1-\frac{35}{49}$; $7\frac{9}{11}-4\frac{9}{11}$.

141. $45\frac{39}{71}-17\frac{20}{71}$; $51-9\frac{8}{7}$.

142. $28\frac{9}{14}-7\frac{3}{11}$; $20\frac{4}{15}-9\frac{5}{9}$.

143. Una persona ha gastado $\frac{2}{3}$ de su patrimonio, ¿qué parte de éste le queda?

144. Después de vendido las $\frac{2}{7}$ y las $\frac{3}{5}$ partes de una pieza de género, ¿qué parte de ésta queda?

145. Un acontecimiento tuvo lugar el 17 de septiembre a las $3\frac{1}{4}$ de la tarde, otro el 24 del mismo mes a las 3 horas y 20 minutos de la mañana, ¿qué tiempo ha transcurrido entre ambos acontecimientos? (Recuérdese que un día tiene 24 horas y cada hora 60 minutos).

146. Con el vino contenido en un tonel de $225\frac{4}{5}$ unidades de capacidad, se han llenado otros tres más pequeños. Los dos primeros contienen juntos $131\frac{9}{10}$

unidades; el tercero $15\frac{3}{7}$ unidades más que el segundo, ¿cuál es la capacidad de estos tres toneles?

Efectuar las operaciones siguientes:

147. $9\frac{7}{16} + 16\frac{11}{80} - 10\frac{1}{2} + 26 - 1\frac{11}{20}$.

148. $4\frac{7}{12} - 2\frac{4}{9} - \frac{25}{144} + 14\frac{1}{7}$.

149. $4\frac{1}{9} - 1\frac{5}{8} + 3\frac{5}{8} + 12\frac{9}{16} - \frac{11}{27} - \frac{1}{4}$.

Reemplazar los asteriscos por dígitos convenientes en las expresiones siguientes:

150. $\frac{4}{27} + \frac{1}{*} + \frac{5}{63} = \frac{10}{27}$.

151. $1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} - \frac{*}{y} - \frac{1}{12} = 3\frac{1}{2}$.

152. $7\frac{1}{57} - *\frac{1}{19} = 2\frac{55}{57}$.

153. $4\frac{3}{17} + *\frac{*}{**} - 7\frac{9}{187} - 2\frac{5}{33} = 3\frac{3}{187}$.

253. Multiplicación y división. — Sea $\frac{13}{4}$ unidades a multiplicar por 5; tendremos: $\frac{13}{4}$ unidades $\times 5 = \frac{13}{4}$ unidades $+ \frac{13}{4}$ unidades $+ \frac{13}{4}$ unidades $+ \frac{13}{4}$ unidades $+ \frac{13}{4}$ unidades $= \frac{13 + 13 + 13 + 13 + 13}{4}$ unidades $= \frac{13 \times 5}{4}$ unidades; y en general, $\frac{a}{b} \times c \equiv \frac{ac}{b}$.

Luego, para multiplicar un número fraccionario por uno entero, se multiplica el numerador por el multiplicador y se deja el mismo denominador.

254. Inversamente, sea dividir $\frac{65}{4}$ unidades por 5; o bien, sea dividir $\frac{65}{4}$ unidades por $\frac{13}{4}$ unidades. En el primer caso, se reemplazará en $\frac{65}{4}$ unidades, 65 por 65 : 5, dejando el mismo denominador 4. En el segundo caso, se reemplazará 65, por 65 : 13, y 4 por 4 : 4. Tendremos así que $\frac{65}{4}$ unidades $: 5 = \frac{65 : 5}{4}$ unidades; y que $\frac{65}{4}$ unidades $: \frac{13}{4}$ unidades $= \frac{65 : 13}{4 : 4} = 5$. Esos resultados son exactos, pues verifican, de acuerdo a lo establecido en el número anterior, que $\frac{65 : 5}{4}$ unidades $\times 5$, iguala $\frac{65}{4}$ unidades; y que $\frac{13}{4}$ unidades $\times$ $\frac{65 : 3}{4 : 4} \times 5$, iguala $\frac{65}{4}$ unidades. En vez de escribir $\frac{65 : 5}{4}$, podremos escribir $\frac{65}{4 \times 5}$, según el principio del n.° **128**, pág. 64; lo mismo, en vez de escribir $\frac{65 : 3}{4 : 4}$, podemos escribir $\frac{65 \times 4}{4 \times 3}$. En general se tiene $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$ y $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, pues $\frac{a}{bc} \times c = \frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \times \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b}$ n^{os}. **253** y **231**).

Luego, *para dividir una cantidad fraccionaria por un número entero, se substituye, en el número fraccionario que afecta aquélla, el denominador por el producto de él por el entero; y para dividir dos cantidades fraccionarias se multiplica el numerador del divi-*

dendo por el denominador del divisor y se divide este producto por el producto del denominador del dividendo multiplicado por el numerador del divisor; el número así obtenido es el cociente.

255. Multiplicadores fraccionarios. — El multiplicador, por su naturaleza, debe ser siempre un número entero; sin embargo, como $\frac{a}{b}$ unidades $\times c \equiv \frac{ac}{b}$ unidades, se conviene, a fin de conservar la propiedad conmutativa de la multiplicación, que c unidades $\times \frac{a}{b}$, represente $\frac{ca}{b}$ unidades, y que $\frac{a}{b}$ unidades $\times \frac{c}{d}$ represente $\frac{ac}{bd}$ unidades. En resumen, el multiplicador fraccionario es un **operador** que significa que el multiplicando debe multiplicarse por el numerador de dicho operador y el producto dividirse por el denominador; por consiguiente, si el multiplicando es una cantidad fraccionaria, un multiplicador fraccionario expresa que el producto debe ser otra cantidad fraccionaria, cuyo numerador es el producto de los numeradores de los factores y el denominador el producto de los denominadores de los mismos; así se conserva la propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación (véase también n.º 128, pág. 64).

256. Efectivamente, si $\frac{a}{b}$ unidades $\times \frac{c}{d}$ se define como expresando $\frac{ac}{bd}$ unidades, tendremos que $\frac{c}{d}$ unidades $\times \frac{a}{b}$ representará también $\frac{ac}{bd}$ unidades; la propiedad conmutativa de la multiplicación queda, por tanto, conservada. Prescindiendo de la unidad podemos, por consiguiente, escribir que

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \equiv \frac{c}{d} \times \frac{a}{b} \equiv \frac{ac}{bd};$$

tendremos también que

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} \equiv \frac{ac}{bd} \times \frac{e}{f} \equiv \frac{ace}{bdf}; \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right) \equiv \frac{a}{b} \times \frac{ce}{df} \equiv \frac{ace}{bdf}$$

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right);$$

lo que demuestra que la propiedad asociativa de la multiplicación está conservada.

Finalmente:

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \pm \frac{e}{f} \pm \dots\right)\frac{m}{n} = \frac{adf\ldots \pm cbf\ldots \pm cbd\ldots \pm \dots}{bdf\ldots} \times \frac{m}{n}$$

$$= \frac{adf\ldots m \pm cbf\ldots m \pm cbd\ldots m \pm \dots}{bdf\ldots n}$$

$$= \left(\frac{adf\ldots}{bdf\ldots} \times \frac{m}{n}\right) \pm \left(\frac{cbf\ldots}{bdf\ldots} \times \frac{m}{n}\right) \pm \left(\frac{ebd\ldots}{bdf\ldots} \times \frac{m}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{b} \times \frac{m}{n}\right) \pm \left(\frac{c}{d} \times \frac{m}{n}\right) \pm \left(\frac{e}{f} \times \frac{m}{n}\right) \pm \dots$$

Luego, queda también conservada la propiedad completamente distributiva de la multiplicación respecto de la adición y substracción.

257. NOTA. — La expresión de la forma anterior $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$ constituye lo que se llama a veces *fracción de fracción*, y se lee: *los* $\frac{a}{b}$ *de* $\frac{c}{d}$ *de* $\frac{e}{f}$.

258. Veamos algunas explicaciones.

Se ha comprado $\frac{2}{5}$ *unidades de longitud de género a 3 pesos la unidad, ¿cuánto debe pagarse?*

Haremos el siguiente raciocinio: si en vez de $\frac{2}{5}$ de unidad se hubiera comprado 2 unidades, se habría pagado, a razón de 3 pesos por cada unidad, 3 pesos $\times\ 2 = 6$ pesos; pero como se ha comprado cinco veces menos longitud, se deberá pagar cinco veces menos o sea 6 pesos $: 5$, esto es, $\frac{6}{5}$ pesos o sea $\frac{3 \times 2}{5}$ pesos. Al mismo resultado llegamos usando el multiplicador fraccionario $\frac{2}{5}$, como quedó definido, pues tendríamos que 3 pesos $\times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{5}$ pesos. Se ve claramente que el multiplicador fraccionario $\frac{2}{5}$ viene a funcionar como un *operador* que expresa que el multiplicando debe multiplicarse por el numerador de dicho operador y dividirse por el denominador del mismo. Un raciocinio análogo haría ver que si se hubiera pagado en vez de 3 pesos, $\frac{3}{7}$ de pesos, se habría gastado $\frac{2}{5}$ pesos $\times \frac{3}{7} = \frac{2 \times 3}{5 \times 7}$ pesos; bastaría, para ello, suponer primero que sólo se hubiera pagado 3 pesos la unidad, y entonces, ya sabemos que el gasto hubiera sido de $\frac{3 \times 2}{5}$ pesos, de suerte que si hubiéramos pagado 7 veces veces menos la unidad, el gasto habría sido 7 veces menor, esto es $\frac{3 \times 2}{5 \times 7}$ pesos.

Los dos ejemplos anteriores justifican, por consiguiente, la introducción, en el cálculo, de los multiplicadores fraccionarios tal cual han sido definidos.

259. El admitir multiplicadores fraccionarios implica también admitir divisores y cocientes numéricos fraccionarios. Así tendremos que

$$\frac{6}{5} \text{ pesos} : 3 \text{ pesos} = \frac{6}{3 \times 5} = \frac{2}{5}, \qquad (1)$$

y que

$$\frac{6}{5} \text{ pesos} : \frac{3}{7} \text{ pesos} = \frac{6 \times 7}{5 \times 3} = \frac{42}{15} = \frac{14}{5}; \qquad (2)$$

lo que significa en resumen que, en base a la definición dada de multiplicador fraccionario, se tiene

$$\frac{6}{5} \text{ pesos} = 3 \text{ pesos} \times \frac{2}{5}; \quad \frac{6}{5} \text{ pesos} = \frac{3}{7} \text{ pesos} \times \frac{14}{5}.$$

Igualmente se tiene:

$$6 \text{ pesos} : \frac{2}{5} = \frac{6 \times 5}{2} \text{ pesos} = 15 \text{ pesos}; \qquad (3)$$

$$\frac{6}{5} \text{ pesos} : \frac{2}{5} = \frac{6 \times 5}{2 \times 5} \text{ pesos} = 3 \text{ pesos}; \qquad (4)$$

$$\frac{6}{35} \text{ pesos} : \frac{2}{5} = \frac{6 \times 5}{2 \times 35} \text{ pesos} = \frac{3}{7} \text{ pesos} \qquad (5)$$

Lo que significa que un divisor fraccionario es un *operador* que expresa que debe multiplicarse el dividendo por el denominador de dicho operador y dividirse el producto por el numerador.

260. Los problemas inversos de los anteriores justifican la noción de divisor y cociente numéricos fraccionarios. Si se preguntara, en efecto:

¿Habiéndose gastado en una compra de género $\frac{6}{5}$ *pesos a razón de 3 pesos la unidad de longitud de género, cuántas unidades de éste se ha comprado?* Diríamos: si se hubiera pagado a razón de 1 peso la unidad, se habría podido comprar $\frac{6}{5}$ unidades; como se pagó 3 veces más, sólo se habrá podido comprar tres veces menos género, esto es $\frac{6}{5 \times 3} = \frac{2}{5}$ unidades; luego el número de unidades buscado es el del cociente de $\frac{6}{5}$ pesos: 3 pesos tal cual ha sido hallado más arriba (1).

Si en vez de haber pagado 3 pesos se hubiera pagado $\frac{3}{7}$ pesos, es decir 7 veces menos, hubiera podido comprarse 7 veces más unidades, esto es $\frac{6 \times 7}{5 \times 3}$ unidades, es decir $\frac{2 \times 7}{5} = \frac{14}{5}$ unidades; número que resulta también de dividir $\frac{6}{5}$ pesos por $\frac{3}{7}$ pesos (2).

Identidades de las formas (3), (4), (5) se aplicarían respectivamente a los enunciados siguientes:

Habiendo gastado 6 pesos en la compra de género a razón de $\frac{2}{5}$ *pesos la unidad, ¿cuántas unidades se han comprado?*

Habiéndose gastado $\frac{6}{5}$ *pesos comprando género a razón de* $\frac{2}{5}$ *pesos la unidad, ¿cuántas unidades se han comprado?*

Habiéndose gastado $\frac{6}{35}$ *pesos en comprar género a razón de* $\frac{2}{5}$ *pesos la unidad, ¿cuántas unidades se han comprado?*

Al resolver estos problemas se llegaría a justificar plenamente el uso de las identidades (3), (4) y (5).

261. En resumen, si prescindimos ahora de la unidad y consideramos exclusivamente los números fraccionarios, tendremos las siguientes identidades:

$$c \times \frac{a}{b} \equiv \frac{ac}{b} \tag{1}$$

$$\frac{c}{d} \times \frac{a}{b} \equiv \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \equiv \frac{ac}{bd} \tag{2}$$

$$c : \frac{a}{b} \equiv \frac{cb}{a} \tag{3}$$

$$\frac{c}{d} : \frac{a}{b} \equiv \frac{cb}{ad}. \tag{4}$$

262. Todo lo cual se expresa diciendo que:

Para multiplicar un número entero por otro fraccionario, se multiplica el entero por el numerador del fraccionario y se divide el producto por el denominador.

Para multiplicar un número fraccionario por otro, se multiplica entre sí los numeradores y se divide el producto por el producto de los denominadores.

Para dividir un número entero por uno fraccionario, se multiplica el entero por el denominador del fraccionario y se divide por el numerador.

Para dividir un número fraccionario por otro, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor y el producto se divide por el producto de los otros dos términos.

Se deduce de lo anterior que:

Si el numerador de un número fraccionario se multiplica o divide por un número entero, el número fraccionario resulta multiplicado o dividido, respectivamente, por el mismo número entero.

263. Tratándose de números fraccionarios mixtos, podrían reducirse éstos a ordinarios, o efectuarse el producto por partes. Así:

$$2\frac{3}{5} \times 4\frac{2}{3} = \frac{13}{5} \times \frac{14}{3} = \frac{182}{15} = 12\frac{2}{15},$$

o también

$$\left(2+\frac{3}{5}\right)\left(4+\frac{2}{3}\right) = 2 \times 4 + 4 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} =$$

$$= 8 + \frac{12}{5} + \frac{4}{3} + \frac{6}{15} = 8 + \frac{36+20+6}{15} =$$

$$= 8 + \frac{62}{15} = 8 + 4 + \frac{2}{15} = 12\frac{2}{15}.$$

264. Inversas de cantidades. — Se dice que un número es *inverso* de otro, cuando el producto de ellos es 1; así, 3 es inverso de $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{7}$ es inverso de $\frac{7}{3}$.

Dos cantidades expresadas en base a una misma unidad, se dicen *inversas*, cuando vienen afectadas por números inversos. Así, $5u$ es inversa de $\frac{1}{5}u$; $\frac{3}{7}u$ es inversa de $\frac{7}{3}u$.

EJERCICIOS

Efectuar las operaciones siguientes:

154. $\frac{57}{61} \times \frac{4}{7}$; $\left(11 + \frac{9}{17}\right) \times \left(7 + \frac{15}{23}\right)$.

155. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{9}{11}$; $9 \times \frac{7}{30} + 11\frac{80}{81}$

156. $\frac{7}{15} . 44$; $\left(8\frac{4}{7}\right) . \frac{3}{5}$; $\left(19 + \frac{3}{7}\right) . \left(1 + \frac{3}{5}\right)$.

157. $\left(13 + \frac{3}{17}\right) . \left(2 + \frac{25}{71}\right)$; $\left(11 + \frac{4}{81}\right) . \left(13 + \frac{2}{3}\right)$.

158. $\left(17 + \frac{4}{11}\right) \times 5 \times \frac{45}{7} \times \left(6 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{15}{24}$.

159. $10\frac{13}{34} \times 17$; $2\frac{27}{35} \times 22$; $\frac{19}{56} \times 3514$.

160. $2\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{8}$ de $2\frac{2}{5}$.

161. $\frac{3}{14}$ de $\dfrac{4\frac{5}{9}}{6\frac{1}{6}}$ de $\dfrac{6\frac{8}{11}}{11\frac{5}{7}}$; $1\frac{1}{2} \times \frac{7}{8} : 5\frac{1}{3}$ de $2\frac{2}{5}$.

162. $\frac{8}{15} : \frac{11}{3}$; $\left(40 + \frac{8}{15}\right) : \left(21 + \frac{49}{55}\right)$.

163. $\left(7 : \frac{8}{9}\right)\left(69 : \frac{48}{5}\right)$; $125 : 21\frac{13}{17}$; $\dfrac{\frac{7}{8} \times \frac{11}{3} \times 12\frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{2}{15} \times 8\frac{3}{4}}$

164. $16\frac{2}{7} : 32$; $\frac{243}{560} : 81$; $1\frac{8}{55} : 6\frac{2}{7}$; $3\frac{3}{8} : 1\frac{81}{133}$.

165. $\dfrac{3\frac{1}{2}}{2\frac{1}{4}} : \dfrac{6}{4\frac{1}{2}}$; $\dfrac{\frac{7}{8} \times 3\frac{2}{3} : \frac{2}{25}}{\frac{1}{3} \times 8\frac{3}{4} : 7\frac{1}{2}}$; $\dfrac{\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} : \frac{1}{18}}{\frac{4}{5} \times 6 : 1\frac{7}{12}}$.

166. Demostrar que los $\frac{5}{6}$ de los $\frac{3}{10}$ de un número equivale a la cuarta parte de dicho número.

167. Hallar las $\frac{3}{5}$ parte de las $\frac{4}{11}$ partes de un día.

168. En una bolsa hay 324 bollilas, se distribuye la tercera parte entre cuatro niños y el resto entre otros seis niños, ¿cuántas bolillas le toca a cada niño?

169. Hallar $3\frac{2}{5} \times \frac{10}{11} : 3\frac{1}{7}$ de $3\frac{2}{7}$ de $\frac{5}{44}$ de $1\frac{16}{33}$.

170. ¿Cuántos minutos y segundos hay en $\frac{12}{100}$ de hora?

171. ¿Cuál es el valor, en minutos, de $1\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ siglos, 7 segundos?

172. Se ha comprado por 450 pesos de mercaderías y se quiere, al vorverlas a vender, realizar un beneficio igual a los $\frac{2}{3}$ del precio de compra, ¿cuál debe ser el precio de venta de esas mercaderías?

173. Si de un espacio de tiempo de $8\frac{3}{4}$ días han transcurrido los $\frac{5}{6}$, ¿cuántas horas quedan aún por transcurrir?

265. Potenciación. — De lo dicho anteriormente resulta que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \equiv \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \ldots \equiv \frac{a^m}{b^m}.$$

Por tanto

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right)^m \equiv \left(\frac{ac}{bd}\right)^m \equiv \frac{a^m c^m}{b^m d^m} \equiv \frac{a^m}{b^m} \cdot \frac{c^m}{d^m} \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m;$$

y análogamente

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^m \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{c}{d}\right)^m;$$

lo que demuestra que las propiedades distributivas de la potenciación se han conservado.

266. Es fácil comprobar que la potencia de un número fraccionario irreducible es otro número fraccionario irreducible; y recíprocamente. Y que por lo tanto:

Cuando un número entero no es potencia de otro número entero, tampoco lo es de un fraccionario.

Se comprueba también que:

Para que un número fraccionario irreducible sea potencia de un número fraccionario, es preciso y suficiente que sus dos términos sean potencias exactas.

Si se tratara de números mixtos, podría elevárseles a la potencia n considerándolos como una suma. Por ejemplo:

$$\left(4\frac{1}{3}\right)^2 = \left(4+\frac{1}{3}\right)^2 = 4^2 + 2 \times 4 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2;$$

pero es preferible reducirlos a la forma ordinaria; se tendrá en nuestro ejemplo

$$\left(4\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{13^2}{3^2}.$$

EJERCICIOS

Efectuar las operaciones siguientes:

174. $\left(3\frac{5}{7}\right)^2$. 175. $\left(\frac{17}{6}\right)^3$. 176. $\left(2\frac{1}{2}\right)^4$.

267. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más cantidades fraccionarias. — El m. c. d. de varias cantidades fraccionarias o de varias cantidades, unas enteras y otras fraccionarias, es la mayor de las cantidades enteras o fraccionarias contenidas en aquéllas un número entero de veces. Luego, si se divide cada una de aquellas cantidades por su m. c. d., los cocientes deben ser números enteros.

De lo anterior resulta que el denominador del m. c. d. debe ser un múltiplo común de los denominadores, y el numerador un divisor común de los numeradores, y que el primero debe ser lo más pequeño posible y el segundo, contrariamente, lo más grande posible. Luego:

El m. c. d. de dos o más cantidades fraccionarias (o de cantidades enteras y fraccionarias) tiene por numerador el m. c. d. de los numeradores y por denominador el m. c. m. de los denominadores.

Por ejemplo, el m. c. d. de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{21}$ tiene por numerador el m. c. d. de 1, 3, 4 y 5, esto es, 1, y por denominador el m. c. m. de 2, 5, 7 y 21, o sea 210; dicho m. c. d. es, por consiguiente, $\frac{1}{210}$.

Si se tratara de los números $1\frac{11}{24}$, $1\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $2\frac{1}{7}$, y 10, o sea de $\frac{35}{24}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{15}{7}$ y $\frac{10}{1}$, el m. c. d. sería $\frac{5}{168}$.

268. El m. c. m. de dos o más cantidades fraccionarias es la menor de las cantidades enteras o fraccionarias que contiene a cada una de aquéllas un número entero de veces.

Luego, si el m. c. m. de un cierto número de cantidades fraccionarias se divide por cada una de ellas, los cocientes son números enteros, y por tanto, es menester que el *numerador de dicho m. c. m. sea el m. c. m. de los numeradores de las cantidades fraccionarias, en tanto que el denominador debe ser el m. c. d. de los denominadores.*

Por ejemplo, el m. c. m. de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{21}$ tiene por numerador el m. c. m. de 1, 3, 4 y 5, esto es, 60, y tiene por denominador el m. c. d. de 2, 5, 7, 21, o sea 1. Luego, dicho m. c. m. es 60.

Análogamente, el m. c. m. de $1\frac{11}{24}$, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{6}$ y $2\frac{7}{9}$, o sea de $\frac{35}{24}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{6}$ y $\frac{25}{9}$, es $\frac{175}{3}$, o sea $58\frac{1}{3}$.

EJERCICIOS

Hallar el m. c. d. y el m. c. m. de los siguientes números fraccionarios:

177. $2\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $7\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$.

178. $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{3}$.

179. $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$.

180. $\frac{4}{15}$, $4\frac{4}{9}$, $3\frac{1}{3}$, $13\frac{1}{3}$.

181. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$.

182. $3\frac{2}{7}$, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{8}$, $2\frac{2}{9}$, $3\frac{10}{12}$.

183. $1\frac{5}{28}$, $1\frac{1}{21}$, $3\frac{1}{7}$.

184. $7\frac{1}{9}$, $19\frac{9}{25}$, $20\frac{1}{4}$.

CAPÍTULO IX

CÁLCULO MENTAL

1. — ADICIÓN Y SUBSTRACCIÓN

269. Ejercicios fundamentales. — Para poder calcular pronto y bien, es menester, desde la edad temprana, ejercitarse en el **cálculo mental**, o **cálculo de cabeza**, o **de memoria**, sin el auxilio del papel, lápiz o pluma.

Unas de las operaciones más simples a ese respecto es retener en la memoria los complementos a 10 de los dígitos; a saber:

dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
complementos: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Y acostumbrarse a sumar, de cabeza, enunciando de inmediato la suma de varios dígitos, cuando esa suma es diez o un número exacto de decenas.

Haciendo así, se puede, en efecto, cada vez que se hace la suma de los dígitos de una columna, reunir dos, tres y cuatro cifras en bloque. Por ejemplo, si esas cifras son: 6, 2, 7, 2, se dirá, de cabeza: seis y dos, ocho; y dos diez; luego la suma es 17.

Otro ejercicio muy necesario es acostumbrarse a **redondear un número**, o sea, agregarle otro tal que la suma sea un *número redondo*, o sea, terminado en uno o más ceros. Se hace uso, para ello, del *complemento aritmético* (n.º 77, pág. 41), de la cifra de la derecha o del guarismo constituído por las dos cifras de la derecha, o por el de las tres, etc.

Así, sea redondear 4357; se puede hacerlo, ya agregándole 3, ya agregándole 43; ya 643; ya 5643, que son los complementos respectivamente de 7, de 57, de 357 y de 4357. Obtiénese así 4360, 4400, 5000, 10000.

He aquí otros ejercicios:

270. Descomponer un número en la suma de otros y calcular, de inmediato, lo que debe agregarse a un número para obtener otro mayor.

Empezando por los dígitos se dirá: 8 puede ser $7+1$, o $6+2$, o $5+3$, etc. Luego se pasará a un polidígito, y entonces será fácil realizar la operación mental de saber lo que debe agregarse a un número para obtener otro mayor dado. Por ejemplo: ¿Qué debe agregarse a 746 para obtener 810?; es 64.

Suma mental de números. — Se empezará ejercitándose con números cuyos guarismos tengan dos cifras.

Para ello se hará la suma mental de las decenas y, separadamente, la de las unidades y se sumará, de cabeza, los resultados.

Así, para sumar 53 con 64 se dirá mentalmente: $50+60=110$, $3+4=7$; total, 117.

Cuando la suma de las unidades simples pasa de 10, y aun mejor, cuando la cifra de las unidades de uno de los números sea 7, 8 y 9, conviene redondear el mayor de esos números, y al número obtenido con ese redondeamiento, agregarle el otro disminuído del número que se agregó, para redondear, haciendo los cálculos de cabeza.

Así, se dirá: $38+54=92$, pues $38+2=40$, $54-2=52$, $40+52=92$.

Cuando se trata de números con guarismos de más de dos cifras, se descompone mentalmente cada uno en sus unidades de los diversos órdenes, y se hacen las sumas mentales *empezando por las más altas.*

Así, si se quiere sumar de cabeza 543 con 697, se dirá: quinientos, más seiscientos son 1100; cuarenta más noventa son 130; tres más siete son 10; 1100 más 130 son 1230, y 10, 1240.

Si se logra practicar la tabla de sumar hasta $99+99$, se procederá más rápidamente sumando los números por secciones de dos cifras.

Agregar a otro, un número poco diferente de 100, 1000, 10000, etc.

Se agrega 100, 1000 y 10000, y se resta o suma de cabeza, respectivamente, lo que se agregó o restó para redondear el número dado.

Así, para agregar 98 a un número cualquiera, se agrega a este 100 y se le resta 2, todo de cabeza.

$$46905 + 997 = 46905 + 1000 - 3 = 47905 - 3 = 47902;$$
$$75 + 103 = 75 + 100 + 3 = 175 + 3 = 178.$$

271. Restar de otro, un número poco diferente de un múltiplo de 10.

Se resta este múltiplo y se agrega o resta de cabeza, respectivamente, lo que se agregó o quitó para redondear.

Así, $48615 - 997 = 48615 - 1000 + 3 = 49615 + 3 = 49618;$
$$6781 - 1003 = 6781 - 1000 - 3 = 7778.$$

Con bastante ejercicio o práctica pueden extenderse estos cálculos al caso en que la aproximación con el múltiplo de 10 hecha para redondear, sea un guarismo de dos o más cifras. Habrá entonces que redondear las cifras de las unidades, decenas, centenas, etc.

$$1000 - 872 = 1000 - 880 + 8 = 120 + 8 = 128.$$

Ejecutar mentalmente la diferencia entre dos números dados. Se hace la operación mental basándose en las substracciones sucesivas de las unidades de los distintos órdenes empezando por las más altas.

Sean los números 8349 y 5857. Mentalmente se dirá:

$$\begin{aligned} 8349 - 5000 &= 3349, \\ 3349 - 800 &= 2549, \\ 2549 - 50 &= 2499, \\ 2499 - 7 &= 2492. \end{aligned}$$

2. — Multiplicación y División

272. Multiplicación por 2, 4, 8, 16, ... — Para multiplicar por 2, se suma, de cabeza, el número dado consigo mismo; si se vuelve a repetir la operación con el resultado obtenido, el número dado quedará evidentemente multiplicado por $2 \times 2 = 4$; y así siguiendo otra vez, tendremos la multiplicación por 8, etc.

273. Multiplicación por 11. — Si se trata de un dígito, bastaría repetir la cifra. Así: $8 \times 11 = 88$.

Si el número dado tiene dos cifras, se suman estas dos cifras y el resultado, si es un dígito, se intercala entre las dos cifras. Así, sea 54×11: $5 + 4 = 9$; $54 \times 11 = 594$.

Si la suma de las dos cifras tiene decenas, se intercala la cifra de las unidades; y la de las decenas se agrega a la cifra de la izquierda del número dado.

Sea, por ejemplo, la operación 68×11: $6 + 8 = 14$; intercalo 4 entre 6 y 8 y cambio 6 en 7; tengo efectivamente que $68 \times 11 = 748$.

Si el número tiene más de dos cifras, se deja como está la cifra de las unidades; la cifra de las decenas se obtiene sumando la cifra de las decenas al de las unidades; la cifra de las centenas se obtiene sumando la cifra de las decenas con el de las centenas, etc. La última cifra de la izquierda es también la cifra de la izquierda del producto. Si una suma parcial pasa de 10, se traslada a la suma siguiente.

Así, sea multiplicar 548×11; se dirá $8 + 4 = 12$, escribo 2 y retengo 1; $4 + 5 = 9 + 1$ retenido, 10; escribo 0 y retengo 1; $5 + 1$ (retenido) $= 6$; escribo 6; el producto, por consiguiente, es 6028.

También puede multiplicarse el número dado por 10, para lo cual basta agregarle un 0 a la derecha; y luego, ese producto, sumarlo con el número dado: así en el ejemplo anterior

$$548 \times 11 = 548 \times (10 + 1) = 5480 + 548.$$

274. Multiplicación por 101, 1001, etc. — Si se trata de un dígito, se cambian las cifras 1 de 101, de 1001, etc., por ese dígito.

Así:
$$8 \times 101 = 808,$$
$$9 \times 1001 = 9009.$$

Si el número dado tiene dos cifras, se procede análogamente, pero suprimiendo el 0 de las decenas de 101, 1001.

Así:
$$39 \times 1001 = 39039.$$

Si el número tiene más cifras, se le multiplica por 100, 1000, etc., y al producto se le suma el número dado.

Así:

$$5724 \times 1001 = 5724\,(1000 + 1) = 5724000 + 5724 = 5729724.$$

275. Multiplicación por 9, 99, 999, ... — Como $9 = 10 - 1$; $99 = 100 - 1, \ldots$ basta multiplicar el número dado, por 10, 100, 1000, etc., y al producto restarle el número dado.

Así:

$$6729403 \times 9 = 67294030 - 6729403 = 60564627.$$

La regla anterior relativa a la multiplicación por 9, 99, ..., explica los curiosos resultados de algunas multiplicaciones especiales. Por ejemplo, las siguientes:

$$\begin{array}{r}
9 \times 1 + 2 = 11 \\
9 \times 12 + 3 = 11 \\
9 \times 123 + 4 = 1111 \\
9 \times 1234 + 5 = 11111 \\
\cdots\cdots \\
9 \times 12345 + 9 = 111111 \\
9 \times 123456 + 7 = 1111111
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
9 \times 9 + 7 = 88 \\
9 \times 98 + 6 = 888 \\
9 \times 987 + 5 = 8888 \\
9 \times 9876 + 6 = 88888 \\
\cdots\cdots \\
9 \times 98765 + 3 = 888888 \\
9 \times 987654 + 2 = 8888888 \\
9 \times 9876543 + 1 = 88888888 \\
9 \times 9876543 \times 2 + 11 = 888888888
\end{array}$$

276. Combinación de las reglas anteriores. — a) Para multiplicar un número por otro, cuyo guarismo es 2, 4, 8, 16, seguido de ceros, se multiplica aquel por 2, 4, 8, 16, ..., y se agrega el número de ceros correspondientes a la derecha del producto.

Para multiplicar por 12, 15, se tiene en cuenta que $12 = 3 \times 4$; $15 = 3 \times 5$.,. También para mutiplicar por 15, puede multiplicarse por 10 y agregarse al producto la mitad de éste $(15 = 10 + 5)$.

b) **Para multiplicar por 19, 29, 39, ...,** se multiplica por 20, 30, 40, ..., y se resta el número dado del resultado $(19 = 20 - 1, \ldots)$.

c) **Para multiplicar por 21, 31, 41, ...,** se multiplica por 20, 30, 40, ..., y se suma el número dado al resultado $(21 = 20 + 1, \ldots)$.

d) **Para multiplicar por 98, 998, 9998, ...,** se multiplica por 100, 1000, 10000, ..., y se resta del resultado el duplo del número dado $(98 = 100 - 2, \ldots)$.

e) **Tomar la mitad de un número dado, o sea, dividirlo por 2, 4, 8, ...** Se aplica de cabeza la división por un dígito (n.º 154, pág. 79, último párrafo). Tratándose de la división por 2, para saber si la división es exacta, basta fijarse si el número dado termina en cero o en cifra par (2, 4, 6, 8). Si termina en cifra impar (1, 3, 5, 7, 9), dará un resto igual a 1. Para dividir por 4, 8, ..., se repetirá la operación anterior las veces necesarias.

f) **Multiplicación y división por 5, 25, 125, ...** Para la multiplicación por 5, se agrega un cero a la derecha y se divide por 2:

$$5 = 10 : 2.$$

Para la división por 5, se duplica el número y se divide por 10.

Análogamente, para proceder por 25, 125, ..., se tiene en cuenta que $25 = \frac{100}{4}$; $125 = \frac{1000}{8}$. Así es que para multiplicar un número por 25, 125, se agregan dos, tres ceros a la derecha del número y se divide por 4, 8, ... También puede multiplicarse dos o tres o más veces consecutivas por 5, ($25 = 5 \times 5$; $125 = 5 \times 5 \times 5$).

Para dividir por 25, 125, ..., se multiplica el número dado respectivamente por 4, 8, ..., y se divide por 100, 1000, ...; o, también, se divide dos o tres o más veces consecutivas por 5.

Naturalmente, esto supone que las divisiones son exactas; caso contrario habría que proveer al resto. Si se trata de la división por 5, basta suprimir la cifra de la derecha y duplicar el número así obtenido previa agregación de la unidad, si la cifra suprimida es igual o mayor que 5.

Así, sea dividir 67438 por 5; se duplica 6743, lo que da 13486, se agrega 1 porque la cifra apartada es 8, superior a 5. El cociente, entonces, es 13487 y el resto $8 - 5 = 3$.

g) **Dividir un número por 3.** Si se retiene en la memoria los múltiplos de tres de muchos números, se facilitará la operación, la cual, por otra parte, puede realizarse de acuerdo con la regla para dividir un número por un dígito.

277. Combinación de las reglas. — Para dividir por 6, se divide por 3 y por 2.

Para dividir por 12, se divide primero por 3 y luego por 4.

Para dividir por 15, se divide primero por 3 y luego por 5, etc.

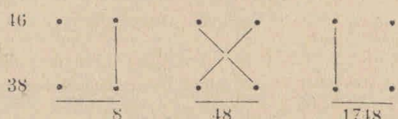
278. **Tabla de multiplicación de los dígitos por números comprendidos entre 10 y 20.** — Prolongando la tabla de Pitágoras hasta que tenga 19 filas horizontales, se obtiene una tabla complementaria que, si se retiene en la memoria, suministra un poderoso recurso para el cálculo mental.

He aquí la tabla de referencia:

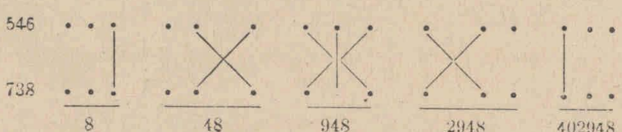
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
11	22	33	44	55	66	77	88	99
12	24	36	48	60	72	84	96	108
13	26	39	52	65	78	91	104	117
14	28	42	56	70	84	98	112	126
15	30	45	60	75	90	105	120	135
16	32	48	64	80	96	112	128	144
17	34	51	68	85	102	119	136	153
18	36	54	72	90	108	126	144	162
19	38	57	76	95	114	133	152	171

279. **Multiplicación rápida.** — Sea multiplicar 46×38; el producto de 8×6 o sea 48, nos indica que el producto contiene desde luego 8 unidades simples, que pueden ya escribirse y 4 decenas que se retienen; ahora bien, las decenas del producto, aparte esas 4 retenidas, provienen también del producto de las decenas de uno de los factores multiplicados por las unidades del otro; en el ejemplo serían $4 \times 8 = 32$ más $3 \times 6 = 18$. En total, pues, $4 + 32 + 18 = 54$; escribo 4 a la izquierda del 8 y retengo las 5 centenas.

En cuanto a las centenas del producto, aparte de esas 5 retenidas, provienen del producto de las decenas de los factores; en el ejemplo son $4 \times 3 = 12$; más las 5 retenidas son 17 centenas que se escriben a la izquierda del número 48 ya escrito. Las operaciones sucesivas pueden verse gráficamente en el siguiente esquema:



Este otro esquema corresponde al producto de dos números de tres cifras.



Se dirá sucesivamente:

$6 \times 8 = 48$ escribo 8 y retengo 4 8

$4 \times 8 = 32$; $6 \times 3 = 18$; $32 + 18 + 50$; más lo retenido $= 54$; escribo 4 y retengo 5........................ 48

$5 \times 8 = 40$; $4 \times 3 = 12$; $7 \times 6 = 42$; $40 + 12 + 42 + 5$ (retenido) $= 99$; escribo 9 y retengo 9 948

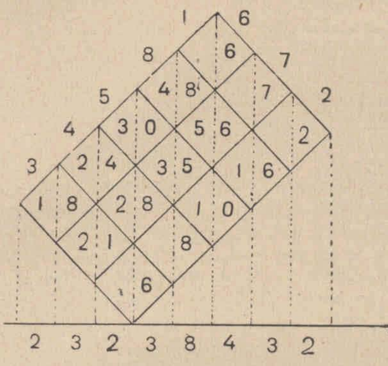
$5 \times 3 = 15$; $4 \times 7 = 28$; $15 + 28 + 9$ (retenido) $= 52$; escribo 2 y retengo 5 2948

$5 \times 7 = 35 + 5$ retenido $= 40$; escribo 40 402948

Podría extenderse fácilmente la regla al caso del producto de números con guarismos de cuatro o más cifras.

280. **Diposición musulmana.** — Puede realizarse la multiplicación escribiendo directamente los productos elementales.

La siguiente disposición *musulmana* da cuenta del procedimiento: sea multiplicar 34581×672. En una hoja de papel cuadriculado, dispuesta de manera que las diagonales del cuadriculado estén colocadas verticalmente, se traza un rectángulo constituído por tres líneas de cinco cuadrados cada una y se escribe de izquierda a derecha, las cifras del multiplicando y del multiplicador como indica la figura, encabezando cada cifra de uno de los factores una línea y cada una del multiplicador una columna. Los productos elementales $1 \times 6 = 6$, $1 \times 7 = 7$, $1 \times 2 = 2$, $8 \times 6 = 48$, $8 \times 7 = 56$, $8 \times 2 = 16$, etc., se escriben en la intersección de la línea y de la columna oblicua que encabeza las cifras que se multiplican. Fácilmente se comprueba que las cifras de esos productos parciales, relativos a unidades del mismo orden, están bien en columna vertical, de modo que sumando ordenamente se obtiene el producto buscado.



281. **Multiplicación aproximada.** — Cuando se debe multiplicar dos números de varias cifras, ocurre a menudo, que sólo interesa conocer las primeras cifras de la izquierda del producto, pudiéndose reemplazar las otras por ceros (cuyo objeto es expresar el valor relativo de las cifras conservadas). En esos casos pueden abreviarse los procedimientos empleando el método llamado de la *multiplicación abreviada*, cuya regla enunciaremos aquí sin demostración dejando que ésta la halle el lector, como ejercicio.

Supongamos que sólo se quiere conservar, en el producto, las cifras que representan unidades a lo menos del orden $k + 2$. Se escribe el multiplicando y debajo el multiplicador *escrito al revés* colocando la cifra de las unidades simples debajo de la cifra del multiplicando (completando con ceros a la izquierda, si es necesario), que representa las unidades del orden k. Para efectuar cada producto parcial no se toman en consideración, en el multiplicando, las cifras colocadas a la derecha de la columna vertical que contiene la cifra del multiplicador que se emplea; cada producto parcial así obtenido representa unidades del orden k; se dispondrán, por consiguiente, esos productos parciales los unos debajo de los otros, de manera que las últimas cifras de la derecha estén en una misma columna vertical. Se efectúa la suma, la cual representa entonces las unidades del orden k; se suprimen las dos últimas cifras y el número obtenido, que representa unidades del orden $k + 2$, es igual al número de unidades del orden $k + 2$ del producto buscado, o bien lo es inferior en una unidad.

Sea por ejemplo, multiplicar 4532169 por 3141592 teniendo en cuenta que sólo se desea conocer las unidades de octavo orden, se dispondrá la operación así:

$$
\begin{array}{r}
4532169 \\
2951413 \\
\hline
90 \\
4077 \\
22660 \\
45321 \\
1812864 \\
4532169 \\
135965070 \\
\hline
142382251
\end{array}
$$

El resultado 142382251 expresa el número de decenas de millones del producto. Se evita escribir los productos parciales que resultan nulos.

3. Mínimo Común Múltiplo

282. Mínimo común múltiplo. — Para calcular el m. c. m. de varios números pequeños (es decir de los primeros de la serie natural), se observa que, desde luego, si esos números son primos, su m. c. m. es el producto de ellos. Para los otros, hay que acostumbrarse a descomponerlos, de cabeza, en factores primos. Se empieza por descomponerlos en el producto de dos factores, y si éstos no son primos se les descompone a su vez en dos factores, y así se continúa hasta obtener factores primos. Por ejemplo, $77 = 7 \times 11$; $120 = 3 \times 4 \times 10$; $4 = 2 . 2$; $10 = 2 . 5$, $\therefore$ $120 = 3 \times 2^3 \times 5$.

Efectuadas estas operaciones para todos los números dados, es fácil obtener mentalmente el m. c. m. aplicando la regla del n.° 213 (pág. 112).

APÉNDICE

EQUIDIFERENCIAS. ECUACIONES

283. **Comparación de dos cantidades.** — Dadas dos cantidades a y b (supondremos $a > b$), **comparar** una con otra es: o investigar de cuánto es mayor una que otra, es decir, hallar la diferencia $a - b$, o determinar cuántas veces es mayor una que otra, o sea, hallar la relación o *razón* $a : b$. Considerada la cuestión bajo este punto de vista, el valor $a - b$ se dice ser la **razón por diferencia** entre a y b; la razón $a : b$ se dice entonces ser **por cociente,** para distinguirla de la primera. La primera cantidad se llama el **antecedente** de la razón (por diferencia o por cociente); la segunda se llama el **cosecuente.** La igualdad de dos razones por cociente se llaman una **proporción**; así también la igualdad de dos razones por diferencia se llama una proporción, pero para distinguirla de la primera, se llama a ésta. **proporción por cociente** y a la otra, **proporción por diferencia** o **equidiferencia.** Según ésto, cuatro cantidades a, b, c, d, consideradas en cierto orden, se dicen estar en **proporción por diferencia** si se verifica que $a - b = c - d$ siendo $a > b$; o que $b - a = d - c$ siendo $a < b$ (supondremos, como hemos dicho, que $a > b$ en lo que sigue); es decir, que la razón por diferencia entre las dos primeras, es igual a la razón por diferencia entre las dos segundas, teniendo cuidado de que el orden en que debe tomarse las cantidades sea el mismo en la primera y segunda razón; a, b, c, y d son los **términos** de la proporción; el antecedente de la primera razón y el consecuente de la segunda son los **extremos** de la proporción, los otros dos términos son los **medios** de la proporción. Si los medios son iguales, es decir, si se tiene $a - b = b - c$, b se dice ser **un medio diferencial** entre a y c, y que la proporción es **continua.**

Por ejemplo, en la equidiferencia $15 - 8 = 8 - 1$, 8 es un medio diferencial entre 15 y 1.

Sin dificultad se comprueban las siguientes proposiciones.

En toda equidiferencia, la suma de los extremos es igual a la suma de los medios.

Efectivamente, si se tiene $a - b = c - d$, resulta, sumando a ambos miembros de esta igualdad la cantidad $b + d$ y simplificando, que

$$a - b + b + d = c - d + b + d \therefore a + d = c + b.$$

Si la suma de dos cantidades es igual a la suma de otras dos, con las cuatro puede formarse una equidiferencia, siendo los extremos los sumandos de una suma y los medios los sumandos de la otra.

Por ejemplo, si se tiene $a + d = c + b$, restando $d + b$ a ambos miembros de esta igualdad se tendrá, después de simplificar, $a - b = c - d$.

Notemos que la igualdad $a - b = c - d$ implica las siguientes:

$$a - c = b - d \text{ o } c - a = d - b \text{ (según que } a > c \text{ o } a < c),$$
$$a = b - d + c, \quad b = a - c + d, \quad c = a - b + d, \quad d = c - a + b.$$

Tratándose de proporciones continuas se tiene que si $a - b = b - c$ se verifica

$$a + c = b + b \text{ o sea } a + c = 2b$$

y luego

$$a = 2b - c, \quad c = 2b - a, \quad b = \frac{a + c}{2}.$$

Todo lo cual se expresa diciendo que: *Si se cambia de lugar los medios o de los extremos de una equidiferencia se obtiene siempre una equidiferencia.*

En toda equidiferencia, un extremo es igual a la suma de los medios menos el otro extremo, y un medio es igual a la suma de los extremos menos el otro medio. Si la equidiferencia es continua, el medio es igual a la semisuma de los extremos, y un extremo es igual al duplo del término medio menos el otro extremo.

Por último, se tiene también que:

I. *Si a los cuatro términos de una equidiferencia se les suma o se les resta una misma cantidad, o si ésto se hace sólo con los antecedentes o con los consecuentes o con los términos de una u otra razón, las cuatro cantidades así obtenidas están también en proporción por diferencia.*

En efecto, si $a - b = c - d$, se tendrá, en virtud de lo establecido en el n.º 59, pág. 36, que:

$$(a \pm m) - (b \pm m) = (c \pm m) - (d \pm m)$$
$$(a \pm m) - (b \pm m) = c - d; \quad a - b = (c \pm m) - (d \pm m);$$

también se tiene que:

$$(a \pm m) - b = (c \pm m) - d; \quad a - (b \pm m) = c - (d \pm m).$$

En todas estas igualdades se supone que las substracciones indicadas tengan sentido.

II. *Si los antecedentes de una equidiferencia son iguales, también lo son los consecuentes.*

Pues si $a - b = a - d$, es menester que $b = d$, en virtud de la propiedad de la substracción (n.º 52, pág. 34).

III. *Si dos equidiferencias tienen una razón común, con las otras dos puede formarse una equidiferencia.*

Pues si $a - b = m - n$ y $c - d = m - n$, se tiene que:

$$m - n = a - b = c - d \therefore a - b = c - d.$$

284. Ecuaciones. — Una igualdad que contiene una o varias letras cuyo valor es desconocido, que sólo se verifica para ciertos valores de esas letras o *incógnitas*, y que se expresa en forma de preguntar cuáles son esos valores, se llama una *ecuación*.

Resolver una ecuación, es hallar los valores que deben darse a las incógnitas para verificar la ecuación.

Así la igualdad $7 = 3 + x$ considerada como expresando la pregunta: ¿qué número debe agregarse a 3 para obtener 7?, es una ecuación, pues contiene una letra x cuyo valor se busca; y se ve que esa igualdad sólo se satisface por un valor 4, de x.

El estudio detenido de las ecuaciones se reserva para el álgebra, pero, aun en aritmética, las ecuaciones pueden prestar muy útiles servicios para facilitar la resolución de problemas.

El ejemplo siguiente muestra la diferencia existente entre un raciocinio sin empleo de ecuaciones, y otro con el empleo de ellas, y hace ver la conveniencia de este último.

PROBLEMA. — *Diofantes, matemático griego, pasó la sexta parte de su vida en la infancia; la doceava parte en la adolescencia; luego tomó esposa y pasó con ella la séptima parte de su vida más cinco años, antes de tener un hijo, a quien sobrevivió 4 años; habiendo el hijo vivido la mitad del padre; ¿a qué edad murió Diofantes?*

Solución sin el uso de ecuaciones

En la infancia y adolescencia pasó Diofantes la sexta más la doceava parte de su vida, esto es, dos doceavas más una doceava partes de ella o sea la cuarta parte de la vida.

Entre su casamiento y el nacimiento de su hijo, transcurrió un séptimo de su vida más cinco años; luego, desde su nacimiento hasta su paternidad, transcurrió un cuarto, más un séptimo, más cinco años, o sea $\left(\frac{7}{28} + \frac{4}{28}\right)$ de su vida, más cinco años, es decir, $\frac{11}{28}$ de su vida, más cinco años.

Desde el nacimiento del hijo hasta la muerte de Diofantes, transcurrió un tiempo igual al que vivió el hijo más 4 años y como el hijo vivió la mitad del tiempo que vivió el padre, resulta que Diofantes, después del nacimiento del hijo, vivió la mitad de su vida más cuatro años. Luego, en todo vivió $\frac{11}{28} + \frac{1}{2}$ de su vida, más 5 años, más 4 años, es decir

Solución con el empleo de ecuaciones

Llamemos x la edad, en años, que tenía Diofantes al morir.

La sexta parte de la vida de Diofantes estará expresada así: $\frac{x}{6}$; la doceava parte de la misma, así $\frac{x}{12}$; la séptima parte más cinco años, así: $\frac{x}{7} + 5$. Los años que vivió el hijo $\frac{x}{2}$. Como la vida de Diofantes se compone de la que pasó en la infancia $\left(\frac{x}{6}\right)$, más la que pasó en la adolescencia $\left(\frac{x}{12}\right)$, más la que vivió casado y sin hijos $\left(\frac{x}{7} + 5\right)$, más la que vivió su hijo $\left(\frac{x}{2}\right)$; más la que sobrevivió a éste, 4 años. Se debe tener:

$$+\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \left(\frac{x}{7} + 5\right) + \frac{x}{2} + 4 = x$$

$\frac{11}{28} + \frac{14}{28}$ de su vida $+ 9$ años, o sea

$\frac{25}{28}$ de su vida $+ 9$ años.

Como la vida de Diofantes se compuso de $\frac{28}{28}$ de ella, resulta que los 9 años representan la duración de los $\frac{3}{28}$ que faltan a los $\frac{25}{28}$.

Luego, si $\frac{3}{28}$ de la vida de Diofantes viene a ser 9 años, $\frac{1}{28}$ de ella viene a ser $\frac{9}{3} = 3$ años, y los $\frac{28}{28}$ serán $3 \times 28 = 84$ años.

Luego Diofantes murió a los 84 años.

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por 1008, se obtiene $168x + 84x + 114x + 5040 + 504x + 4032 = 1008x$.

$\therefore\ 900x + 9072 = 1008x$; restando a ambos miembros $900x$ resulta:

$\therefore\ (1008 - 900)x = 9072$

$\therefore\ 108x = 9072$

$$\therefore\ x = \frac{9072}{108} = 84 \text{ años.}$$

Este ejemplo hace ver que la resolución de un problema por medio de las ecuaciones se basa en ciertas transformaciones que debe hacerse sufrir a los miembros de la misma hasta dejar x solo en un miembro, o, como se dice, hasta *despejar* x y resolver por lo tanto la ecuación.

Dejaremos para el Algebra el estudio detenido de los fundamentos de estas transformaciones y entre tanto sólo daremos algunas nociones y procedimientos para resolver las ecuaciones más sencillas.

Haremos observar que las ventajas del uso de las ecuaciones para resolver los problemas se nota especialmente en ciertas soluciones largas, poco claras, llenas de circunlocuciones o basadas en observaciones que no siempre se le ocurren al que debe resolver el problema.

285. **Principio en que se basa el empleo de ecuaciones.** — Se dice que dos ecuaciones son equivalentes *cuando admiten las mismas soluciones.*

I. *Cuando se adiciona o substrae una misma cantidad a los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra equivalente.*

Así, la ecuación $2x + 13 = 5x + 4$ tiene la raíz 3, y también tienen las mismas raíces las ecuaciones $13 = 3x + 4$ y $9 = 3x$, que se obtienen restando de los dos miembros de la primera $2x$ y $2x + 4$ respectivamente.

II. *Cuando se multiplica o divide los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad que no sea nula ni fraccionaria con denominador nulo, se obtiene otra ecuación equivalente.*

Así, la ecuación $9 = 3x$ tiene la raíz 3, así como la $x = \frac{9}{3} = 3$, obtenida dividiendo ambos miembros de aquélla por 3.

Si la incógnita no figura bajo un denominador, se llama *grado* de la ecuación, que supondremos con una sola incógnita, al mayor de los exponentes en que figura esta incógnita.

En lo que sigue consideraremos únicamente ecuaciones de primer grado.

286. *Procedimiento a seguir.* — Designado con la letra x la incógnita, se escribe, de acuerdo con las indicaciones del enunciado del problema a resolver, la igualdad que permitiría verificar el valor de x si fuera conocido. La igualdad así obtenida constituye la ecuación del problema y se dice que éste está *planteado.* Así, en el ejemplo anterior, el problema quedó planteado cuando obtuvimos la ecuación $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$.

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, se aplica el principio II, mientras la ecuación contenga denominadores, y se quita éstos multiplicando ambos miembros de la ecuación por un comúltiplo de los mismos; luego, aplicando el principio I, se hace pasar todos los términos conocidos de la ecuación en un miembro y los desconocidos en el otro, la ecuación presenta entonces la forma $ax = b$, y resulta que $x = \frac{b}{a}$. Puede comprobarse sin dificultad que, para hacer pasar un término de la ecuación de un miembro a otro, se borra dicho término en el miembro en que se encuentra y se escribe en el otro con signo contrario.

Así, si tenemos $2x + 4 = x - 2$ resulta $2x = x - 2 - 4 = x - 6$.

Los dos ejemplos siguientes aclaran las reglas anteriores.

Ejemplo 1.° — *Un colegio tiene en total* 300 *alumnos. Hay* 10 *alumnos más en* 4.° *año que en el* 5.°, 40 *alumnos más en el* 3.° *que en el* 4.°, 10 *más en el* 2.° *que en el* 3.°, *y* 20 *más en el* 1.° *que en el* 2.°, *¿cuántos alumnos hay en el primer año?*

Llamemos x al número de alumnos que hay en el primer año, entonces, en el segundo habrá $x - 20$; en el tercero $x - 20 - 10$; en el cuarto $x - 20 - 10 - 40$, y en el quinto $x - 20 - 10 - 40 - 10$.

Como el total de alumnos es de 300, tendremos:

$$x + (x - 20) + (x - 20 - 10) + (x - 20 - 10 - 40) + (x - 20 - 10 - 40 - 10) = 300.$$

o también

$$5x - 200 = 300;$$

pasando 200 del primer miembro al otro, se tiene

$$5x = 300 + 200 = 500;$$

luego

$$x = \frac{500}{5} = 100.$$

Ejemplo 2.° — *Un tonel lleno de vino tiene tres canillas, la primera lo vacía en dos horas, la segunda en tres horas y la tercera en cuatro. Una cuarta canilla, comunicando con un depósito de vino, lo llenaría en cinco horas estando vacío, ¿en cuánto tiempo se vaciaría el tonel si las cuatro canillas estuvieran simultáneamente abiertas?*

Llamemos x al tiempo en cuestión, expresado en horas, y tomemos como unidad de capacidad la del tonel. Como la primera canilla puede vaciar el tonel en dos horas, en una hora vaciará la mitad del tonel y en x horas una parte del tonel expresada por $\frac{x}{2}$. De igual manera, la segunda canilla vaciará en x horas una parte igual a $\frac{x}{3}$, y la tercera una parte expresada por $\frac{x}{4}$. La cuarta canilla, en cambio, habrá llenado durante x horas una parte igual a $\frac{x}{5}$. Como después de este tiempo el tonel queda vacío, debemos establecer que la cantidad de vino salida, menos la entrada, corresponde a la capacidad total del tonel, tomado, según convinimos, como unidad. Luego:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 1.$$

Multiplicando ambos miembros por 60, múltiplo común de 2, 3, 4 y 5, desaparecerán estos denominadores y se tendrá:

$$30x + 20x + 15x - 12x = 60 \quad \therefore \quad 53x = 60 \quad \therefore \quad x = \frac{60}{53}$$

de hora, o sea 1 hora 7 minutos 55 segundos.

EJERCICIOS

185. Dos banqueros hacen un balance de su caja, el uno posee el doble del otro, y juntos tienen 38700 pesos, ¿cuánto tiene cada uno en caja?

186. Repartir 1800 pesos entre dos personas A y B, de tal manera que la parte de A sea los 2/7 de la de B.

187. Dos personas desean comprar en sociedad un objeto, la primera sólo puede pagar la quinta parte del costo, la otra la séptima parte. Para adquirirlo aún les faltaría 276 pesos, ¿cuál es el precio de dicho objeto?

188. Se debe repartir 1160 pesos entre tres personas A, B, C, en relación a sus edades. La edad de B es un tercio mayor que la de A, la cual es la mitad de la de C, ¿cuánto les toca recibir a cada uno?

189. Cuatro acreedores A, B, C, D, deben repartirse 21000 pesos. La parte de A es 2/3 a la de B; la de B es 4/5 de la de C, y la de C es 6/7 de la de D, ¿cuánto les toca a cada uno?

190. Un negociante ha efectuado tres ventas en un mismo día; en la primera perdió la sexta parte del valor total de los objetos vendidos durante el día; en la segunda perdió la décima parte de lo mismo; en la tercera ganó la tercera parte. Efectuado el balance, resulta haber ganado 3 pesos, ¿cuál es el importe total de los objetos vendidos?

191. Un padre deja 2520 pesos a sus cuatro hijos A, B, C, D; C recibe 860 pesos, B tanto como C y D juntos; A el doble de B menos 1000, ¿cuánto reciben A, B y D?

192. Un cuartel tiene 1250 hombres entre caballería e infantería; cada hombre de caballería recibe 15 pesos mensuales, y los de infantería 10 pesos; el sueldo total mensual es de 13500 pesos, ¿cuántos hombres de cada clase existe en el cuartel?

Problemas de Recapitulación General

193. Sabiendo que los ríos más grandes del mundo tienen las siguientes extensiones:

Miss-Mo	6.758 kilómetros	Niger	5.200 kilómetros
Nilo	6.436 „	Mackenzie	4.063 „
Amazonas	5.793 „	Mekong	4.022 „
Ob	5.249 „	Mississippí	4.900 „
Tang-tsé	5.188 „	Paraná	3.942 „
Missouri	4.738 „	Murray	3.657 „
Congo	4.266 „	La Plata	3.717 „
Amur	4.466 „	Volga	3.640 „
Lena	4.602 „	Yucón	3.300 „
Yenissei	5.305 „	Madeira	3.518 „
Hoang-ho	4.144 „	Colorado, Arizona	3.218 „

Indicar qué longitud abarcarían si se pusieran unos a continuación de los otros, y cuántas veces daría esa corriente de agua la vuelta de la Tierra, sabiendo que una vuelta abarca 40.077 kilómetros.

194. El área de bajo cultivo del suelo argentino de acuerdo con las cifras del año 1933-36, se distribuye así:

Granos (cereales y lino)	20.191.480 hectáreas
Frutales y otros árboles	638.715 „
Cultivos industriales	737.932 „
Forrajeras (alfalfa y sorgos)	5.725.366 „
Hortalizas y legumbres	300.450 „
Otros	142.150 „

Suponiendo que el área de la República Argentina sea de 2.987.553 kilómetros cuadrados, y que un kilómetro cuadrado tenga un millón de metros cuadrados y un hectárea 10.000 metros cuadrados, ¿qué fracción de la República corresponde a la extensión de los bajos cultivos?

195. El Censo Ganadero Nacional acusaba, el 1.º de julio de 1930, los datos que constan en la página siguiente.

Indicar cuántos de esos ganados (vacuno, lanar, etc.), corresponde a cada habitante de la República, suponiendo que la población de ésta sea de 12.028.646 habitantes.

CENSO GANADERO NACIONAL (1.º DE JULIO DE 1930)

Provincias	Vacunos	Lanares	Porcinos	Yeguarizos	Caprinos	Mulares Asnales	Gallinas
Buenos Aires	11.639.442	14.086.741	1.838.494	2.989.964	15.832	14.276	15.260.303
Capital Federal	9.600	5.990	3.860	47.589	2.142	2.810	979.373
Catamarca	292.845	176.536	15.777	55.984	439.478	61.908	149.077
Córdoba	3.074.697	1.109.783	513.528	1.778.596	745.184	169.312	4.893.604
Corrientes	3.832.553	3.298.657	55.479	570.650	20.991	31.123	717.005
Entre Ríos	2.534.729	3.396.295	118.705	842.474	17.839	19.394	3.265.656
Jujuy	170.740	741.469	13.286	41.817	185.806	86.318	171.890
La Rioja	224.440	124.421	11.468	40.081	386.793	55.604	123.331
Mendoza	237.097	184.025	53.241	112.653	197.980	42.973	727.453
Salta	843.348	383.686	70.484	133.402	410.461	63.846	342.005
San Juan	69.711	80.719	21.494	41.568	125.617	38.383	379.630
San Luis	721.235	529.812	22.801	224.652	457.406	80.116	391.248
Santa Fe	3.641.804	532.600	542.940	1.273.923	89.184	22.314	6.220.210
Santiago del Estero .	869.981	1.108.714	109.762	354.883	1.232.822	154.805	719.477
Tucumán	469.863	136.707	95.684	142.195	158.354	102.631	660.063
Territorios							
Misiones	117.626	9.613	62.705	39.443	4.018	7.660	418.211
Los Andes	694	57.372	18	147	26.250	15.140	724
Chaco	1.178.371	150.491	64.676	140.353	98.921	13.655	524.947
Formosa	984.974	88.265	8.984	44.750	76.153	4.549	100.211
La Pampa	894.974	2.253.070	114.553	464.118	115.165	23.370	850.027
Río Negro	110.920	2.315.985	13.821	160.886	241.556	8.188	197.473
Neuquén	156.591	914.366	4.458	83.798	413.433	10.701	71.328
Chubut	112.241	5.004.173	9.270	180.555	176.972	8.343	178.383
Santa Cruz	17.982	6.880.392	3.095	87.761	9.023	1.998	83.769
Tierra del Fuego ...	4.914	843.339	155	5.869	16	3	3.029

196. Sabiendo que las extensiones y las poblaciones de los diversos estados de la América del Sur eran, en 1937, las siguientes:

	Extensión en centenas de kilómetros cuadrados	Población en centenas de habitantes
República Argentina	27.971	122.270
Bolivia	13.328	37.500
Brasil	85.512	478.039
Chile	7.418	44.655
Colombia	11.622	83.682
Ecuador	4.512	27.300
Paraguay	4.577	9.633
Perú	13.784	69.000
Posesiones inglesas	2.436	3.241
,, francesas	1.160	350
,, neerlandesas	1.417	2.450
Uruguay	1.869	22.300
Venezuela	10.204	34.000

Determinar la población y la extensión total de la América del Sur, así como la densidad de la población para las diversas naciones y para la totalidad de la América del Sur. Por densidad de la población se entiende el número de habitantes por kilómetro cuadrado.

197. Iguales preguntas para la República Argentina, exclusivamente, con los siguientes datos:

	Superficie en millares de kilómetros cuadrados	Población en centenas de habitantes
Capital Federal	185 : 1000	22.467
Pvcia. de Buenos Aires	307	32.874
,, Catamarca	78	1.380
,, Córdoba	168	11.688
,, Corrientes	89	4.737
,, Entre Ríos	78	6.700
,, Jujuy	43	1.040
,, La Rioja	86	1.040
,, Mendoza	149	4.680
,, Salta	126	1.921
,, San Juan	89	1.935
,, San Luis	77	1.798
,, Santa Fe	135	14.392
,, Santiago del Estero	138	4.331
,, Tucumán	23	4.940

Territorio de	Chaco	98	876
,,	Chubut	226	594
,,	Formosa	75	330
,,	La Pampa	144	2.220
,,	Los Andes	73	28
,,	Misiones	30	920
,,	Neuquén	96	430
,,	Río Negro	201	667
,,	Santa Cruz ...	243	301
,,	Tierra del Fuego	21	38

198. ¿Qué número, multiplicado por 172, da el mismo producto que 163 multiplicado por 860?

199. Se quiere hacer al número 83547, diez mil veces mayor. ¿Qué número hay que agregarle?

200. Un comandante, que tiene cierto número de hombres a sus órdenes, observa que si los hace desfilar de a cuatro en fondo, en vez de seis, tiene 132 filas más. ¿Cuántos hombres tiene en total?

201. ¿Cuántos saltos debe dar un galgo para alcanzar a una liebre que le lleva 75 pasos de ventaja, sabiendo que el galgo da dos saltos mientras la liebre da tres, y que cinco saltos de ésta valen dos pasos de aquél?

202. Tres personas tienen respectivamente 275, 150 y 225 pesos, con los que quieren comprar caballos al más alto precio, por cabeza, que les permita invertir todo su dinero pagando cada uno con su moneda los caballos que compra, ¿cuál debe ser el precio de cada caballo?

203. Un maestro de escuela quiere distribuir sus alumnos, consistentes en 221 varones y 143 mujeres, de tal manera que formen clases separadamente de varones y de mujeres de igual número de alumnos cada una y que cada clase tenga el mayor número posible de alumnos. ¿Cómo hará?

204. Dos cuerpos de ejército se componen respectivamente de 12028 y de 12772 soldados. ¿Cuál es el regimiento más numeroso que puede formarse suponiendo que cada cuerpo esté dividido en un número exacto de regimientos de igual número de soldados cada uno.

205. El m. c. d. de dos números puede siempre ser considerado como la diferencia entre un múltiplo del primero y un múltiplo del segundo.

206. En un país sólo existen dos tipos de monedas de oro, equivalente la una a 45 pesos y la otra a 18 pesos, ¿cuál es la suma menor que puede pagarse en ese país usando únicamente monedas de oro (apoyarse en el ejercicio anterior).

207. Un número no puede simultáneamente ser múltiplo de 8 aumentado de 1 y múltiplo de 12 aumentado de 3.

208. $a + b$ y $2a + 3b$ tienen el mismo m. c. d. que a y b.

209. ¿Cuál es el número mayor que origina un resto igual a 7 cuando divide 151, y uno igual a 3 cuando divide 43?

210. Hallar el mayor número que divide 4352 y 9039 dejando el resto 9 en cada caso.

211. ¿Cuál es el mayor número que divide 2000 y 2708 y deje restos iguales a 11 y 17 respectivamente?

212. Hallar el mayor de los números tales que, cuando 12288, 19139 y 28200 se dividen por él, los restos son iguales.

213. Hallar el mayor de los números tales que, cuando 142408, 153599 y 166402 se dividen por él, los restos son iguales.

214. Si dos productos son tales que cada factor del uno es primo con cada factor del otro, los dos productos son primos entre sí.

215. Dos números consecutivos son siempre primos entre sí.

216. Si dos números son primos entre sí, uno de ello es primo con toda potencia del otro; toda potencia del uno es prima con toda potencia del otro.

217. ¿Cuál es el m. c. d. de los productos 360×473; 172×361?

218. Entre los números inferiores a 100, ¿cuáles son los que tienen con 360 el m. c. d. 4?

219. Si b es primo con a y si se dividen por b los números $a, 2a, 3a, \ldots, (b-1)a$, se obtendrán $(b-1)$ restos distintos y no nulos; estos restos son los números $1, 2, 3, \ldots, b-1$, ordenados de cierta manera.

220. Si a_1 es primo con b y si b_1 es primo con a, el m. c. d. de a y b es el mismo que el m. c. d. de aa_1 y de bb_1.

221. Si el m. c. d. de los números m, b, c, es 1, el m. c. d. de los tres números ma, b y c es el mismo que el de los tres números a, b y c.

222. Si d es el m. c. d. de a y b, y si d_1 es el m. c. d. de a_1 y b_1 y si d y d_1 son primos entre sí, el m. c. d. de aa_1 y de bb_1 es dd_1.

223. Si se aplica el método para hallar el m. c. d. a dos términos sucesivos de la serie (de Fibonacci) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... $(u_{n+2} = u_{n+1} + u_n)$, se obtienen como restos sucesivos, los términos de la misma serie que preceden a los que se considera. Dos términos consecutivos de esta serie son primos entre sí.

224. Si el m. c. d. de los números m, a, b es 1, el m. c. d. de m y de ab es igual al producto del m. c. d. de m y de a por el m. c. d. de m y de b.

225. Hallar la relación que liga tres restos consecutivos en la investigación del m. c. d. de dos números y demostrar, basándose en ella, que cada resto es mayor que el doble del que le sigue de dos lugares.

226. La condición necesaria y suficiente para que m sea el m. c. m. de los números $a, b, c, \ldots$ es que m sea divisible por cada uno de esos números y que los cocientes sean primos entre sí.

227. Cuando se multiplica o divide varios números $a, b, c, \ldots$ por un mismo número n, el m. c. m. de los números $a, b, c, \ldots$ resulta multiplicado o dividido por n.

228. El m. c. m. de dos números es 96; uno de esos números es 6, ¿cuál puede ser el otro?

229. Si n es primo con b, el m. c. m. de na y b es igual al producto por n, del m. c. m. de a y b.

230. Si A es el m. c. m. de p números, $a_1\ a_2, \ldots, a_p$, y si B es el m. c. m de q números $b_1, b_2, \ldots, b_q$; el m. c. m. de los pq productos que pueden formarse tomando un factor entre los números $a, a_2, \ldots, a_p$ y el otro factor entre los números $b_1, b_2, \ldots\ b_q$ es AB.

231. Demostrar el ejercicio anterior reemplazando las palabras m. c. m. por m. c. d.

232. Hallar el menor cuadrado múltiplo común de dos o más números dados.

233. Descomponer en factores primos el número
$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times \ldots \times 100.$$

234. El producto $n(n+1)\ (2n+1)$ es siempre divisible por 6.

235. Todo número primo puede escribirse en la forma $6n \pm 1$.

236. Pruébese que $(a + b + c + \ldots)^n = (a^n + b^n + c^n + \ldots) +$ múltiplo de n.

237. Si k no es un múltiplo del número primo p, la diferencia $k^{p-1} - 1$ es divisible por p.

238. Si a y b son primos entre sí, $a \pm b$ es primo con ab.

239. Disponer los números 1, 2, 3, 5, 9, 9 de tal manera que se obtenga un número divisible por 1375.

240. Se tiene cuatro números primos, el producto de los tres primeros es 2431, el de los tres últimos 4199, el del primero, segundo y cuarto 2717, el del primero, tercero y cuarto 3553. Hallar dichos cuatro números.

241. Hallar el número que, dividido por los factores de 231, empezando por el menor y siguiendo en orden de magnitud, origina como restos 2, 5 y 9, siendo 21 el cociente del número dividido por 231.

242. Hallar el número tal que, dividido por los factores de 264 origina como restos 2, 3, 6, siendo 3562 el cociente del número buscado dividido por 264.

243. Demostrar que el número 1321 es primo.

244. Demostrar que para hallar el m. c. m. de varios números puede procederse de la siguiente manera: 1.° se escriben los números al lado de los otros separados por comas; 2.° se dividen por cada número primo que divide exactamente dos por lo menos de los números; 3.° se escribe debajo de los números los cocientes de la división anterior, escribiendo nuevamente los números que no eran divisibles por el divisor primo empleado; 4.° se continúa ensayando así todo los divisores primos en orden hasta que los números obtenidos como cocientes sean todos primos; 5.° el producto de los divisores por estos últimos cocientes es el m. c. m. buscado; si algunos de los números dados u obtenidos sucesivamente fuera divisor de otro de los mismos se suprimirán aquéllos. Por ejemplo, hallar el m. c. m. de 8, 10, 15, 16, 18, 20 se procederá así:

$$\begin{array}{r|l} 2 & \cancel{8},\ \cancel{10},\ 15,\ 16,\ 18,\ 20 \\ 2 & 15,\ 8,\ 9,\ 10 \\ 3 & 15,\ 4,\ 9,\ \cancel{5} \\ & 5,\ 4,\ 3 \end{array}$$

el m. c. m. es $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 3$.

245. Dado el número 144, y otro tal que el m. c. d. de ambos sea 16 y el m. c. m. 2880, hallar ese otro número. Mismo problema siendo uno de los números 12096, el m. c. d. 168 y el m. c. m. 3060288.

246. ¿Cuál es el menor de los números tales que, divididos por 16, 24, 30 y 32, dejan el resto 5?

247. Mismo ejercicio siendo los divisores 15, 20, 48 y 36 y el resto 9.

248. Hallar los tres números comprendidos entre 2500 y 3500, que son divisibles por los números 21, 24 y 28.

249. Hallar un número entre 30000 y 31000 exactamente divisible por 79 y 97.

250. Hallar el menor número mayor que 6 que deja el mismo resto cuando se divide por 15, 35 y 42.

251. Mismo problema siendo el número mayor que 5, el resto 5 y los divisores 121, 145 y 319.

252. ¿Cuál es el menor número que, cuando se divide por 12, 20 y 30 ó 54 deja el resto 4?

253. ¿Cuál es el menor número que, dividido por 9, 99, 999 ó 9999, deja 4 como resto?

Reemplazar los asteriscos por dígitos convenientes en las ecuaciones siguientes:

254. $*\frac{1}{5} + 2\frac{1}{*} = 9$; $\quad 5\frac{8}{27} \times *\frac{6}{13} = 18\frac{1}{*}$.

255. $4\frac{*}{27} \times *\frac{*}{16} = 35$; $\quad 30\frac{*}{17} : *\frac{20}{51} = 6\frac{*}{7}$;

$10\frac{4}{**} : *\frac{2}{27} = 9\frac{9}{17}$.

256. Un recipiente contiene 1000 unidades de capacidad de agua, otro tiene $\frac{5}{8}$ de la capacidad del primero, un tercer recipiente tiene una capacidad igual a los $\frac{9}{10}$ del segundo, ¿qué capacidad tiene cada uno de esos recipientes?

Efectuar las operaciones siguientes:

257. $1 : \left\{4 - 1 : \left[2 - 1 : \left(1 - \frac{5}{13}\right)\right]\right\}$; $\quad \left(\frac{5}{7} \text{ de } 1\frac{6}{13}\right) : \left(2\frac{5}{5} : 3\frac{1}{4}\right)$.

258. $\left(3\frac{1}{5} + 4\frac{1}{3} - 5\frac{1}{4} \text{ de } \frac{6}{7}\right) : \left(3\frac{1}{2} - 4\frac{1}{3} \text{ de } \frac{7}{26} + 4\frac{1}{5} \text{ de } \frac{3}{7}\right)$

259. Una persona recibe $\frac{1}{8}$ de una herencia, que resulta importar 15000 pesos, ¿cuánto habría recibido si hubiera tenido derecho a $\frac{2}{5}$ de la herencia?

Efectuar las operaciones siguientes:

260. $\dfrac{3\frac{7}{11} - 2\frac{5}{8}}{3\frac{3}{11} \times 2\frac{5}{8}} \times \dfrac{3\frac{7}{11} : 2\frac{5}{8}}{3\frac{7}{11} \text{ de } 2\frac{5}{8}}$; $\quad \dfrac{1\frac{2}{3} \text{ de } 1\frac{1}{4}}{3\frac{2}{5} + \dfrac{5}{1\frac{19}{41}}} + \dfrac{4}{5 + \dfrac{6}{7 + \frac{8}{9}}} \text{ de } \frac{15}{6}$.

261. Un sastre emplea los $\frac{3}{5}$ de una unidad de longitud de género para hacer un chaleco, ¿cuántos chalecos podría hacer con 18 unidades de género?

Efectuar las operaciones siguientes:

262. $$\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right) \text{de } \frac{5}{6}+\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}+\frac{4}{5} \text{ de } \left(\frac{5}{6}+\frac{7}{8}\right)}; \qquad \frac{1}{4-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{5}{13}}}} \text{ de 3 siglos 8 días.}$$

263. Se han comprado $16\frac{7}{12}$ unidades de longitud de género por $298\frac{1}{2}$ pesos, ¿cuál es el precio de la unidad de dicho género?

264. La diferencia entre dos números es $2\frac{62}{91}$ y el menor de ellos es $\dfrac{54\frac{2}{5}}{\frac{1}{5} \text{ de } 8\frac{2}{3}}$, ¿cuál es el mayor?

265. ¿Qué número, multiplicado por $\frac{3}{13}$ de 3, da como producto $\frac{12}{19}$ de 8 dividido por $\frac{26}{57}$?

266. Con $298\frac{1}{2}$ pesos se desea comprar una tela de 18 pesos la unidad de longitud, ¿cuántas unidades puede comprarse?

267. ¿Cuántas veces la diferencia entre $\dfrac{\frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$ y $\dfrac{\frac{2}{5} \text{ de } \frac{5}{8}}{\frac{2}{9} \text{ de } 4\frac{1}{2}}$ está contenida en su suma?

268. Una familia consume diariamente 2 unidades de una bebida compuesta de $\frac{1}{3}$ de vino y $\frac{2}{3}$ de agua, ¿qué gasto efectuará en 90 días si paga 60 pesos las 100 unidades de vino?

269. Un zorro hace $2\frac{1}{3}$ pasos por segundo; ha hecho $30\frac{3}{4}$ pasos cuando un galgo ha sido lanzado tras él. Sabiendo que el galgo da $4\frac{1}{2}$ pasos por segundo, ¿en qué tiempo alcanzará al zorro?

270. El producto de tres números es $3057\frac{183}{256}$; el mayor de ellos es $17\frac{3}{4}$; y, de los otros dos, el mayor no sobrepasa de $3\frac{1}{16}$ ni baja de $2\frac{1}{4}$ del otro, hallar los límites entre los que debe estar el menor de dichos números.

271 Un estanque puede ser llenado por una fuente en $1\frac{1}{4}$ día, por otra en $2\frac{1}{3}$, por otra en $3\frac{1}{6}$; estando las tres fuentes abiertas, ¿que fracción del estanque llenarán en $7\frac{2}{7}$ horas?

272. Simplificar

$$\frac{\left\{\left(5\frac{1}{18}-2\frac{5}{6}\right)\text{ de }2\frac{3}{5}\right\}\times\frac{3}{4}}{1\frac{3}{4}+2\frac{7}{12}}.$$

273. Un viajero hace el primer día los $\frac{2}{5}$ del recorrido que debe efectuar; el segundo día hace los $\frac{7}{40}$, el tercero los $\frac{6}{19}$ y el cuarto el trayecto restante, que es de $20\frac{4}{5}$ unidades. ¿Cuál es el recorrido total y cuánto ha recorrido cada día?

274. Efectuar la operación:

$$\frac{55\frac{7}{11}\text{ de }23\frac{9}{13}\text{ de }13\frac{13}{17}-43\frac{1}{5}\text{ de }17\frac{1}{7}\text{ de }15\frac{5}{9}}{5\frac{2}{15}\text{ de}\left(1\frac{1}{2}-\dfrac{1}{2\frac{3}{4}}\right)+5\frac{1}{3}\text{ de}\left(1-\dfrac{1\frac{1}{4}}{2\frac{1}{12}-\frac{3}{4}}\right)+5\frac{7}{9}\text{ de}\dfrac{3\frac{1}{4}\text{ de }2\frac{1}{2}-1}{5\frac{5}{6}\text{ de }2\frac{1}{5}}}$$

275. Un tren hace $2\frac{7}{25}$ unidades de recorrido en $3\frac{3}{14}$ minutos; otro hace $3\frac{8}{15}$ unidades en $4\frac{11}{21}$ minutos, ¿cuál anda más ligero y, admitiendo que salen juntos y andan en el mismo sentido, ¿qué distancia los separará en $2\frac{2}{3}$ horas?

276. Los productos obtenidos multiplicando dos a dos tres números son 3, $4\frac{3}{8}$ y $8\frac{2}{5}$; hallar dichos números.

277. Dos obreros trabajando juntos emplearían 25 días para hacer cierto trabajo; pero después de haber trabajado juntos durante 10 días, uno de ellos abandona la labor y el otro la termina solo en 18 días. ¿Cuántos días invertiría cada obrero si trabajara solo para ejecutar el trabajo?

278. Un legado se divide entre tres hermanos de tal manera que el menor recibe $\frac{2}{3}$ de él, el segundo $\frac{3}{8}$ y el tercero lo restante, que es 35 pesos menos que la parte del menor, ¿de cuánto es el legado?

279. Repartir 18515 pesos entre cuatro personas de tal manera que la segunda tenga los $\frac{3}{4}$ de la primera, la tercera los $\frac{5}{8}$ de la segunda y la cuarta los $\frac{9}{13}$ de la tercera.

280. En una elección, A recibe promesas de votos de parte de la mitad de los votantes, B de los $\frac{19}{40}$; 400 votos, sin embargo, se han prometido a ambos candidatos, a saber, eventualmente 300 a B y 100 a A. Los electores no comprometidos no votaron. B ganó por 80 votos. ¿Cuál era el número de votantes para cada uno?

281. Un negociante ha comprado una pieza de género a razón de 20 pesos la unidad de longitud; vende la mitad a 24 pesos la unidad, $\frac{1}{6}$ a 20 pesos, $\frac{1}{12}$ a 30 pesos y el resto a 27 pesos; ha ganado en todo 220 pesos, ¿cuántas unidades tiene la pieza?

282. En una votación, los $\frac{16}{33}$ de los votantes prometieron su voto a X y los $\frac{15}{33}$ a Y; los demás no votaron, pero el $\frac{1}{22}$ de los votantes habían prometido simultáneamente sus votos a X e Y. El día de la elección, los $\frac{9}{10}$ de estos últimos votaron por Y, quien ganó por 40 votos, ¿cuántos votantes estaban inscriptos en el registro?

283. Dos personas han heredado de una suma total de 18300 pesos. La primera ha gastado los $\frac{2}{5}$ de su parte y la segunda los $\frac{3}{7}$ de la suya; le queda entonces a la primera dos veces más que a la segunda. ¿Cuáles eran las partes de cada una en la herencia?

284. El mayor de dos hermanos heredó de su padre $\frac{2}{5}$ más que el otro. Desde el día de la herencia, el hermano mayor aumentó su capital en $\frac{3}{7}$ de su valor original y el menor perdió 707 pesos; resulta que éste tiene 43 pesos por cada 100 que tiene el otro hermano, ¿cuánto heredó cada uno?

285. Un tonel contiene 100 unidades de capacidad de vino, se saca 20 unidades y se reemplaza por agua. Se secan nuevamente 20 unidades de la mezcla y se reemplazan por agua, y se repite una tercera vez esta operación. ¿Cuántas unidades de agua y de vino contiene entonces el tonel?

286. Un padre deja $\frac{8}{15}$ de su fortuna al mayor de sus hijos y lo demás al menor. El primero gasta $\frac{4}{25}$ de su parte y divide lo restante por partes iguales entre sus tres hijos; el menor gasta $\frac{24}{175}$ de su parte y reparte igualmente lo restante entre sus cuatro hijos. Uno de los hijos de aquél se casa con una de las hijas de éste. ¿Qué parte de la herencia resulta tener el matrimonio?

287. El mar cubre los $\frac{11}{14}$ de la superficie del globo terrestre. La superficie del Asia es $\frac{121}{27}$ veces la de Europa; la de Africa es $\frac{22}{7}$ la de Europa; la de América y Oceanía, respectivamente la $\frac{111}{29}$ y $\frac{31}{27}$ partes de la de Europa. Suponiendo que la superficie del Africa sea de 297×10^7 unidades de superficie (*hectáreas*), calcular la de las otras partes del mundo y la superficie del globo.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

11. 5398. **12.** 2947. **16.** 19.

17. 117598. **18.** 37662. **19.** 222215.

21. 111110. **23.** 56264, 7495.

25. 16091. **26.** 2275, 10049.

27. 860, 341. **28.** Aumenta de 125; aumenta de 181; disminuye de 138; disminuye de 253; aumenta de 191; disminuye de 623.

33. 741212307. **34.** 60366022822; 31087012380; 162355279826. **35.** 100200200100.

40. 333; 1045. **42.** 914667.

43. 7200. **44.** 301920; 82122000.

45. 46017554423. **46.** 14365, 14366.

48. 40, 1600, 64000, 2560000, 102400000.

50. 5775; 2275; 81964; 98699; 8842.

51. 1111111; 80595479, 22334; 840076; 40700. **52.** 38040. **53.** 20.

54. 1848396.

63. 3, 4, 0. **64.** 4, 7, 0, 01, 25.

65. 2, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 2. **66.** 2, 8; 0, 0; 0, 0; 4, 4; 1, 7; 0, 6; 2, 2; 00.

67. 4, 4; 4, 4; 0, 0; 2, 8; 1, 7; 0, 3; 0, 0; 0, 0; 0, 0; 0, 0.

68. 2, 8; 1, 7; 1, 1.

69. 2, 8; 1, 1; 1, 7; 0, 6; 2, 5; 1, 1; 0, 0; 0, 0; 0, 0.

70. 79674367194. **71.** 111098889; 5737830696.

72. 50609. **73.** 131; 6543;865312.

74. 283402; 1542; 2834; 5289; 1294; 14795; 1878; 163.

75. 46; 45; 18; 13. **76.** 425; 16; 9; 378.

77. 216; 297; 1; 7; 7. **78.** 8; 147; 2.

79. 1; 2431; 1507.

80. 970200; 6307453152; 1080; $27 \times 260 \times 21$.

81. 209509; 39312; 121481.

82. 71299; 310284; 720; 2520; 334639305.

83. 3786. **84.** 35. **85.** 120. **86.** 20 segundos.

87. 14 y 15.

91. 2 y 5.

88. 3^2, 5; 3, 5, 7; 2, 3, 5, 7, 11; 2^3, 3^2, 5; 2, 3^3, 11^2, 19; 2^6; 3^7. 11^2, 19; 2^6; 3^7.

89. 2^4, 3, 5, 7, 13, 17; 2^3, 3^3, 5^3, 7^3; 2^4, 3^2, 5^2, 13^3; 3^2, 5^3, 11, 47, 101; 13, 29, 61, 151.

92. 2^4, 31; $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$.

93. 2^8, 3^4, 5^2, 7.

94. 5^4; $2^4.3^6$; $2^2.179^2$; $2^4.5^2.47^2$; 25; 108; 358; 940.

95. $2^3.3^3$; $2^6.7^3$; $2^9.41^3$; 6; 28; 328. **96.** 6.

97. 4, 3. 100. 1; 90.

101. 63; 834.

102. 45. 103. 144. 104. 20, 28453200. 105. 72000.

107. 10 y 315, 14 y 225, 15 y 210, 18 y 175, 21 y 150, 25 y 126, 30 y 105, 35 y 90, 42 y 75, 45 y 70, 50 y 63.

108. $\frac{9}{15}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{1025}{2222}$, $\frac{43043}{52000}$. 111. $\frac{137}{450}$.

112. $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{18}{5}$, $\frac{23}{5}$, $\frac{35}{6}$, $\frac{55}{8}$, $\frac{53}{9}$, $\frac{41}{9}$, $\frac{101}{8}$.

113. $\frac{151}{17}$, $\frac{123}{10}$, $\frac{53}{3}$, $\frac{104}{5}$, $\frac{98}{8}$, $\frac{73}{5}$, $\frac{95}{6}$.

114. $\frac{10947}{53}$, $\frac{4716}{15}$; $\frac{8693}{14}$; $\frac{75609}{29}$; $\frac{3751}{21}$; $\frac{3569}{28}$.

115. 20, 30, 40, 100.

116. $\frac{10}{50}$, $\frac{24}{50}$ y $\frac{11}{50}$; $\frac{159795}{258084}$ y $\frac{20972}{258084}$; $\frac{189}{360}$, $\frac{204}{360}$ y $\frac{184}{360}$; $\frac{16}{24}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{14}{24}$, $\frac{9}{24}$, $\frac{11}{24}$; $\frac{19}{57}$, $\frac{3}{57}$, $\frac{38}{57}$, $\frac{15}{57}$, $\frac{21}{57}$, $\frac{54}{57}$.

117. $\frac{6}{10}$, $\frac{15}{22}$, $\frac{27}{36}$, $\frac{8}{9}$; $\frac{23}{72}$, $\frac{12}{27}$, $\frac{14}{18}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{31}{35}$; $\frac{15}{28}$, $\frac{19}{35}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{11}{14}$, $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{16}$, $\frac{15}{32}$, $\frac{19}{24}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{36}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{9}{10}$; $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{17}{33}$; $\frac{3}{8}$, $\frac{13}{27}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{19}{36}$.

118. $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{2}$; $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$.

119. $\frac{2}{3}$, $\frac{35}{91}$, $\frac{52}{5381}$. 120. $\frac{19}{27}$, $\frac{44}{105}$. 121. $\frac{284}{2997}$, $\frac{288}{28163}$.

122. $\frac{8}{27}$, $\frac{19}{34}$. 123. $\frac{51}{107}$, $\frac{40}{223}$. 124. $\frac{901}{1900}$, $\frac{15}{17}$.

125. $\frac{658}{897}$, $\frac{497}{631}$. 126. $\frac{28}{35}$. 127. $\frac{1000}{3280}$. 128. $\frac{175}{1000}$.

129. $\frac{92}{405}$. 130. $\frac{35}{60}$. 131. $\frac{60}{105}$.

132. $\frac{36}{17}$; $39\frac{5}{11}$. 133. $1\frac{17}{60}$; $2\frac{1903}{5460}$; $1\frac{427}{492}$.

134. $30\frac{19}{70}$; $16\frac{1}{4}$. 135. $68\frac{17}{18}$; $7\frac{47}{70}$; $5\frac{439}{1320}$.

136. $\frac{869}{2340}$. 137. $\frac{46}{525}$, $\frac{48}{567}$, $\frac{52}{675}$, $\frac{589}{4725}$.

138. $\frac{3}{5}$. 139. $\frac{8}{27}$, $\frac{358}{999}$, $\frac{691}{4455}$.

139. $\frac{8}{31}$; $\frac{358}{999}$, $\frac{691}{4455}$. 140. $\frac{2}{7}$, $3\frac{2}{11}$.

141. $28\frac{19}{71}$, $41\frac{1}{8}$.

142. $21\frac{57}{154}$, $10\frac{25}{45}$. 143. $\frac{1}{3}$.

144. $\frac{4}{35}$. 145. 6 días 12 horas 5 minutos.

146. $53\frac{3}{7}$, $78\frac{23}{70}$, $93\frac{9}{10}$. 147. $39\frac{21}{40}$.

148. $16\frac{109}{1008}$. 149. $18\frac{157}{432}$.

150. $\frac{1}{7}$. 151. $\frac{5}{6}$. 152. $4\frac{1}{19}$.

153. $8\frac{2}{51}$. 154. $\frac{228}{427}$, $88\frac{88}{391}$.

155. $\frac{72}{385}$; $14\frac{71}{810}$. 156. $20\frac{8}{15}$; $5\frac{1}{7}$; $31\frac{3}{35}$.

157. $30\frac{1198}{1207}$, $151\frac{2}{243}$. 158. $2325\frac{75}{154}$.

159. $176\frac{1}{2}$; $60\frac{34}{35}$; $1174\frac{11}{28}$.

160. $1\frac{1}{4}$. 161. $\frac{1}{11}$; $\frac{105}{1024}$.

162. $\frac{8}{55}$, $1\frac{769}{903}$.

163. $56\frac{77}{128}$; $5\frac{55}{74}$; $103\frac{1}{8}$

164. $\frac{57}{112}$; $\frac{243}{45360}$; $\frac{441}{2420}$; $\frac{3591}{1712}$

165. $1\frac{1}{6}$; $103\frac{1}{8}$; $2\frac{139}{168}$

167. 5 horas, 14 minutos $10\frac{50}{55}$ segundos

168. 27, 36.

169. $1\frac{7}{10}$

170. 7 minutos, 12 segundos.

171. $61320000\frac{7}{60}$

172. 750.

173. 35.

174. $13\frac{39}{40}$. 175. $24\frac{23}{72}$.

176. $39\frac{1}{15}$. 177. $\frac{1}{60}$, 36. 178. $\frac{1}{420}$.

179. $\frac{1}{144}$, 1 180. $\frac{2}{45}$, $13\frac{1}{3}$

181. $\frac{2}{135}$, 24. 182. $\frac{1}{504}$, 5060.

183. $\frac{11}{84}$, $9\frac{3}{7}$ 184. $\frac{1}{900}$, 627264.

185. 12900 \$, 25800 \$. 186. 400 \$, 1400 \$.

187. 420 \$. 188. 270 \$, 360 \$, 530 \$.

189. 3200 \$, 4800 \$, 6000 \$, 7000 \$.

190. 45 \$. 191. 60 \$, 880 \$, 20 \$.

192. 200, 1050

193. 100122 km., $2\frac{6656}{13359}$.

194. $\frac{27736093}{298755300}$.

195. Totales: vacunos, 32.211.372; lanares, 44.413.221; porcinos, 3.768.738; yeguarizos, 9.858.111; caprinos, 5.647.396; mulares - asnales, 1.039.420; gallinas, 37.428.427. Por cada habitante respectivamente: $2\frac{4.077.040}{6.014.323}$; $3\frac{8.327.283}{12.428.646}$;

$\frac{1.884.369}{6.014.324}$; $\frac{9.858.111}{12.028.646}$; $\frac{2.823.698}{6.014.323}$; $\frac{519.710}{6.014.323}$; $3\frac{1.342.489}{12.028.646}$.

196. Area total, 1858100 km.^{2}; población, 93442000 habitantes; densidad, $5\frac{537}{18581}$.

197. Area total, 2793000 km.^{2}; población, 12232700; densidad, $4\frac{10607}{27930}$.

198. 815. **199.** 835.386.453.

200. 1584. **201.** 75. **202.** 25 $.

203. Varones, 17 clases; mujeres, 11; total, 18 clases.

204. 124. **206.** 9 $; el comprador podrá dar una moneda de 45 $ y el vendedor devolverle dos de 18 $ cada una.

209. 8. **210.** 43. **211.** 117.

212. 221, resto 133. **213.** 31, resto 25.

217. 172. **218.** 28, 44, 52, 68, 76, 92.

228. 32. **233.** 2^{97}, 3^{48}, 5^{24}, 7^{16}, 11^{9}, 13^{17}, 17^{5}, 19^{5}, 23^{4}, 29^{3}, 31^{3}, 37^{2}, 41^{2}, 43^{2}, 47^{2}, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

239. 939125. **240.** 11, 13, 17, 19.

241. 940523. **242.** 5057. **245.** 320, 42504.

246. 485. **247.** 729. **248.** 2520, 2688, 2856.

249. 306520. **250.** 216. **251.** 17550.

252. 544. **253.** 1109893.

254. $4\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{7}$; $5\frac{8}{27} \times 3\frac{6}{13} = 18\frac{1}{3}$.

255. $4\frac{4}{27} \times 8\frac{7}{16}$; $30\frac{2}{17} : 4\frac{20}{51} = 6\frac{6}{7}$; $10\frac{4}{17} : 1\frac{2}{27}$.

256. 1000, 625, $562\frac{1}{2}$. **157.** $\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{4}$.

258. $\frac{91}{124}$. **259.** 48000. **260.** $\frac{712}{46305}$, 1.

261. 30. **262.** $1\frac{3}{127}$, 82121 días.

263. 18. **264.** $34\frac{6}{91}$. **265.** 16.

266. $16\frac{7}{12}$. **267.** $1\frac{2}{3}$. **268.** 36.

269. $14\frac{5}{26}$ segundos.

270. $8\frac{3}{4}$ y $7\frac{1}{2}$. 271. $\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\frac{1}{76}\right)\frac{51}{7}$.

272. 1. 273. $190\frac{38}{83}$, $76\frac{76}{415}$, $33\frac{137}{415}$, $60\frac{228}{1577}$.

274. $345\frac{3}{5}$. 275. el segundo; $11\frac{677}{1425}$ unidades.

276. $1\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, 2, $3\frac{1}{2}$.

277. 150, 30. 278. 200 $.

279. 7280, 5460, $3412\frac{1}{2}$, $2362\frac{1}{2}$.

280. 2100, 2180. 281. 48.

282. 6600. 283. 12000, 6300.

284. 7070, 5050. 285. $48\frac{4}{5}$, $51\frac{1}{5}$.

286. $\frac{1}{4}$. 287. Europa, 945 millones; Asia, 4235 millones; Africa, 297 millones; América, $3617068965\frac{15}{29}$; Oceanía, 1085 millones. Total: $59976321839\frac{7}{87}$.

ÍNDICE GENERAL

Este libro se terminó de imprimir el 30 de Junio de 1937, en los Talleres Gráficos de la Editorial Estrada. — Bolívar 466. — Bs. As.