M. Coppetti

Geometría del espacio

ESTUDIANTE ....

DOMICILIO .... N.º .....

PROVINCIA ....

OBRAS DEL MISMO AUTOR

PARA LOS COLEGIOS NACIONALES (de estricto acuerdo con los programas de Matemáticas de fecha enero 9 de 1937).

Aritmética (Primer año) . . . . 2.ª edición
Geometría (Primer año) . . . . 2.ª edición
Aritmética (Segundo año) . . . . 1.ª edición
Geometría del Espacio (para el 2.º año) . . . . . 1.ª edición

EN PREPARACION:

Algebra y Geometría (para el 3.er año).

PARA ENSEÑANZA SECUNDARIA, NORMAL, COMERCIAL, etc.

Elementos de Aritmética . . . . 3.ª edición
Algebra Elemental . . . . 4.ª edición
Algebra y Nociones de Trigonometría . . . . . . 3.ª edición
Curso de Trigonometría Plana . . . . 2.ª edición
Curso de Trigonometría Esférica (agotada) . . . . 1.ª edición
Elementos de Geometría Plana . . . . 4.ª edición
Geometría Racional . . . . 4.ª edición
Elementos de Geometría del Espacio . . . . . . 2.ª edición
Matemáticas Aplicadas - 1.ª parte . . . . 2.ª edición
Matemáticas Aplicadas - 2.ª parte . . . . 2.ª edición
Tabla de Logaritmos, Anualidades, etc. . . . . . . 3.ª edición

Ing. MARIO COPPETTI

GEOMETRIA DEL ESPACIO

PARA EL SEGUNDO AÑO

TEXTO AJUSTADO A LOS NUEVOS PROGRAMAS DE MATEMATICAS PARA LOS COLEGIOS NACIONALES

BUENOS AIRES
"LIBRERIA DEL COLEGIO"
ALSINA Y BOLIVAR
1937

P R E F A C I O

El presente volumen contiene el desarrollo del programa de Geometría del espacio para el segundo año de los Colegios Nacionales.

Nos hemos ajustado estrictamente al nuevo programa ministerial (de fecha enero 9 de 1937), tratando de exponer la materia en forma simple y fácil, y, al mismo tiempo, rigurosa, suprimiendo dificultades inútiles inherentes al método clásico; nos hemos apartado, en lo posible, pues, del método formal y axiomático, que constituye un inconveniente para el desarrollo de la mentalidad del alumno.

Como en nuestras obras anteriores para los Colegios Nacionales, hemos seguido el método inductivo razonado que establece el programa oficial, apoyándonos en imágenes reales y concretas. Hemos tratado de sustituir el estudio estático de los fenómenos por el estudio dinámico, tendencia ésta característica del método moderno ya adoptado con gran éxito en otros países.

Al efecto, hemos empleado con frecuencia las consideraciones de simetría, desplazamientos y rotaciones, obteniendo así demostraciones más sencillas y más fáciles que con el método euclidiano.

Esperamos que el profesorado de enseñanza secundaria acogerá favorablemente este método, y nos trasmita las valiosas observaciones que les sugerirá su adopción con el alumnado, impresiones que tendremos muy en cuenta al editar las futuras ediciones, si la presente tuviese la misma aceptación que las anteriores obras.

El Autor.

Buenos Aires, noviembre de 1937.

INDICE DE CAPITULOS
Y
PROGRAMA OFICIAL

PARA EL SEGUNDO AÑO DE LOS COLEGIOS NACIONALES
APROBADO EL 9 DE ENERO DE 1937.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

CAPÍTULO VI

CAPÍTULO VII

CAPÍTULO VIII

CAPÍTULO IX

* * *

CAPITULO I

RECTAS Y PLANOS

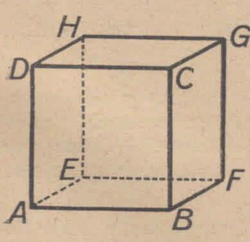
Generalidades

Para abreviar la exposición, y para mantener la unidad indispensable entre la materia de este curso y la del anterior, al referirnos a una propiedad ya tratada en el primer año de Geometría plana, lo haremos con la abreviatura (G. P. N.° ...), correspondiendo el número al párrafo de nuestro texto "Geometría, Primer año" para los Colegios Nacionales.

1. **Geometría del espacio.** — En el Primer Curso de Matemáticas nos hemos ocupado de las *figuras planas,* cuyo estudio geométrico constituye la *Geometría plana.*

Nos ocuparemos ahora de las *figuras del espacio,* es decir, de las figuras que no se encuentran completamente en un mismo plano, cuyo estudio constituye la **Geometría del espacio** (o Estereometría). (*)

2. **Representación de figuras.** — Para dibujar las figuras del espacio sobre una superficie plana (generalmente en la pizarra, en una hoja de papel, etc.), es necesario hacerlo en *perspectiva,* es decir, tal como se presentarían en una fotografía. Así, la (fig. 1) representa *un dado,* cuyas caras son todas, en realidad, cuadrados; pero en perspectiva pueden presentarse como cuadrados solamente dos de las caras opuestas.

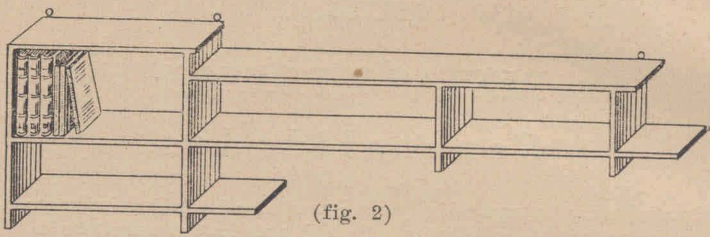


(fig. 1)

(*) Véase al final del Capítulo, "Notas históricas" referentes a la Geometría.

Las líneas que se presentan ocultas al observador se dibujan entrecortadas o punteadas.

La (fig. 2) es el dibujo de una repisa construída con tablas *rectangulares*, las que resultan representadas en perspectiva mediante *paralelogramos*.



(fig. 2)

Cuando el alumno se haya habituado a *ver* las figuras del espacio y dibujarlas en el plano, el estudio de esta parte de la Geometría le resultará muy fácil, puesto que volverá a encontrar muchas propiedades análogas a las ya estudiadas en Geometría plana.

3. **El plano**. — Como vimos en el primer curso (G. P. N.° 13), se caracteriza por los siguientes

POSTULADOS. — 1.° **El plano es una superficie ilimitada que divide el espacio en dos partes llamadas semiespacios.**

2.° **Toda recta que tiene dos puntos sobre un plano, está toda ella contenida en el plano.**

Son imágenes aproximadas de superficies planas: la de los pizarrones, espejos, aguas tranquilas, puertas, mesas, libros, etc.

Para verificarlo experimentalmente, tomemos un hilo y, manteniéndolo en tensión, apliquemos sus dos extremos sobre una mesa; veremos que todos los puntos del hilo se hallarán sobre la mesa. Podemos efectuar análoga verificación con el borde de una regla previamente verificada (G. P. N.° 14).

NOTA. — Existen otras superficies que no son planas y sobre las que puede aplicarse una recta (por ej., la superficie lateral de una columna); pero sobre ellas no se puede aplicar la recta *en cualquier dirección*.

Para representar un plano lo suponemos limitado por un rectángulo; por consiguiente, en perspectiva, lo representamos con un paralelogramo.

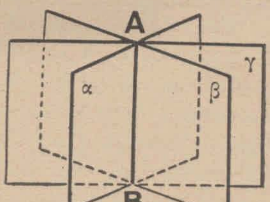
Para distinguir un plano de otro, es costumbre emplear para cada uno de ellos una letra mayúscula o una letra *griega*: α (*alfa*), β (*beta*), γ (*gama*), δ (*delta*), ...

Como *propiedad* importante del plano, haremos notar que:

Siempre es posible hacer coincidir dos planos α y β; *luego, manteniendo esa coincidencia, y supuesto fijo uno de los planos* α, *se puede desplazar el otro,* β, *de modo que una recta cualquiera de plano* β *coincida con una recta cualquiera del plano* α.

Así, por ej., la experiencia nos muestra que las superficies de dos cristales bien pulidas, desplazándose una sobre la otra, coinciden constantemente.

4. Como consecuencia inmediata del Postulado 2.° del plano, tenemos:



(fig. 3)

Por una recta pasan infinitos planos.

Así, por ejemplo, por la recta AB (fig. 3), pasan los planos: α, β, γ, etc.

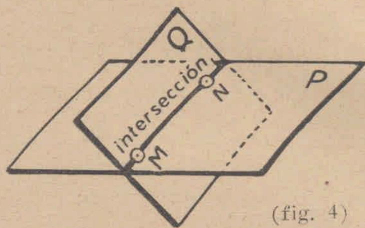
El conjunto de estos planos forma lo que se llama un *haz de planos*, o de *semiplanos*, siendo la recta AB el *eje*.

Intersección de planos

5. Dos superficies que no coinciden y que tienen puntos comunes, pueden tener, en general, una infinidad de puntos comunes, los que forman una línea: ésta se llama la *línea de intersección*, o, simplemente, la *intersección* de las dos superficies.

6. TEOREMA. — **La intersección de dos planos es una línea recta.**

En efecto: sean P y Q los planos (fig. 4), y la línea MN su intersección. Si por dos puntos cualesquiera M y N de esta intersección trazamos una recta, ella se *encontrará al mismo tiempo en cada uno de los planos* (en virtud del Postulado 2.° del N.° 3); esta recta coincidirá, pues, con la intersección de los dos planos.

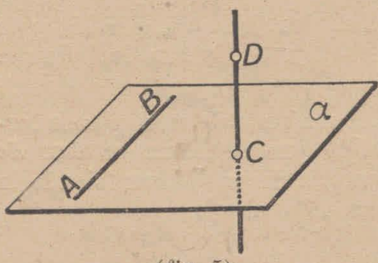


(fig. 4)

EJEMPLO. — En la generalidad de las habitaciones, las líneas de intersección de las paredes entre sí, las paredes con el techo y con el piso, son rectas.

Posiciones relativas de rectas y planos

7. Ya vimos que, si una recta tiene *dos* puntos comunes con un plano, está toda ella contenida en el plano (N.° 3. Postulado 2.°). Así, por ejemplo, si A y B son dos puntos del plano α (fig. 5), la recta AB está contenida en el plano α.



(fig. 5)

Dos rectas situadas en un mismo plano, se llaman *coplanares.*

Si una recta tiene solamente *un* punto común con un plano, se dice que la recta y el plano se *cortan*, o que se *intersecan*, o se *interceptan;* el punto común se llama la *intersección, traza*, o *pie* de la recta sobre el plano. Por ejemplo, en la (fig. 5) el punto C es la intersección de la recta CD con el plano α.

Si una recta y un plano no tienen *ningún* punto común (aun cuando se imaginen indefinidamente prolongados) se llaman *paralelos*, o mejor aún, se dice que *la recta es paralela al plano*, o que *el plano es paralelo a la recta.*

En consecuencia, podremos dar la siguiente

DEFINICIÓN. — **Una recta es paralela a un plano cuando no tiene ningún punto común con el plano.**

NOTACIÓN. — Si una recta a y un plano α son paralelos, escribiremos: $a \parallel \alpha$, o bien: $\alpha \parallel a$.

8. En **resumen**, una recta sólo puede ocupar con respecto a un plano, una de las tres posiciones siguientes:

a) *Puede estar contenida en el plano.*

b) *Puede cortar al plano en un solo punto.*

c) *Puede no tener ningún punto común con el plano* (decimos que es paralela al plano).

NOTA. — Como indicamos en el (N.º 3), un plano α divide el espacio en dos semiespacios (que se llaman *opuestos*); éstos son tales que:

a) *Dos puntos de diferentes semiespacios determinan un segmento de recta que corta el plano* α.

b) *Dos puntos de un mismo semiespacio determinan un segmento de recta que no corta al plano* α.

Determinación de un plano

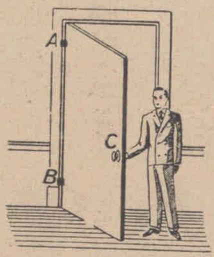
9. *Determinar un plano* mediante condiciones prefijadas, quiere decir que existe *un plano,* y *sólo uno,* que cumple dichas condiciones. Según esto, los elementos dados *fiján* la posición del plano.

10. **Determinación por tres puntos.** — Al tratar las propiedades del plano en el curso anterior (G. P. N.º 13), vimos cómo tres puntos determinan su posición.

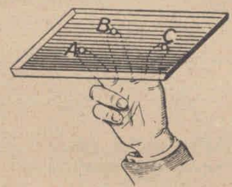
Así, recordemos que si la (fig. 6) representa el plano del tablero de una puerta que está sujeta al marco mediante las *dos* bisagras A y B, la recta AB está toda ella contenida en el plano de la puerta (Post. 2.º del N.º 3). Este plano puede girar alrededor de la recta AB y tomar infinitas posiciones, es decir, que puede formar un haz de planos.

Pero si sujetamos la puerta por un *tercer punto,* por ej., el C (que puede ser el pestillo, pasador, etc.), logramos así *fijar* su posición, siempre que el punto C no se encuentre sobre la recta AB. Este hecho nos justifica la siguiente

Propiedad. — *Tres puntos no situados en línea recta determinan un plano.*



(fig. 6)



(fig. 7)

El plano determinado por los tres puntos A, B y C se llama *plano* ABC.

Ejemplos. — En virtud de la propiedad anterior, resulta fijado el plano de una mesa de *tres* patas. Análogamente, se utiliza el *trípode* (que indica tres pies), para fijar una máquina fotográfica, un nivel, un teodolito, etc.

La (fig. 7) indica el plano de una bandeja, fijado por los tres puntos A, B y C, extremos de los dedos.

11. Determinación por una recta y un punto. — Sabemos que dos puntos determinan una recta que pasa por ellos; en consecuencia, en la determinación del plano dada en el párrafo anterior, podemos reemplazar los dos puntos A y B por la recta AB, y tendremos, pues, la siguiente

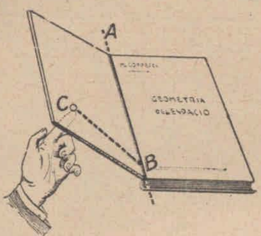
Propiedad. — *Una recta y un punto no perteneciente a ella, determinan un plano.*

Por ejemplo, en la (fig. 8) se determina la posición del plano de la tapa de un libro, mediante la recta AB del lomo del libro y un punto fijo C, que podría ser el extremo de un dedo.

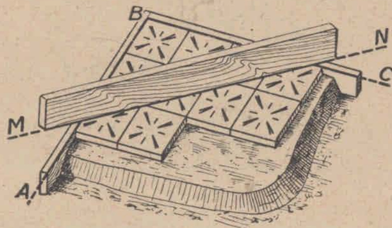
12. Determinación por dos rectas. — Si en la (fig. 8) unimos los puntos *fijos* B y C mediante la *recta* BC que se corta con la BA en el punto B, podemos enunciar, pues, la siguiente

Propiedad. — *Dos rectas que se cortan determinan un plano.*

El plano determinado por las rectas a y b, se llama *plano* ab..



(fig. 8)



(fig. 9)

Ejemplo. — La propiedad anterior la utilizan los albañiles para colocar las baldosas de un piso, o para construirlo de hormigón. Colocan dos reglas AB y BC (fig. 9) que se cortan en B; luego, apoyan una tercera regla MN sobre las primeras. El movimiento de la regla MN, se realiza sobre el plano que determinan las rectas AB y BC, en virtud de la propiedad anterior. En consecuencia, basta colocar las baldosas de manera que toquen la regla móvil MN, para lograr una superficie plana.

13. Sabemos que dos rectas son paralelas cuando, estando en un mismo *plano*, no tienen ningún punto común; podemos enunciar, pues, la siguiente

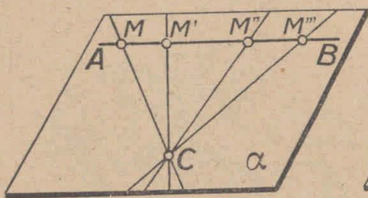
Propiedad. — *Dos rectas paralelas determinan un plano.*

En **resumen**, un plano resulta determinado por una de las cuatro formas siguientes: a) **Por tres puntos no situados en línea recta.** — b) **Por una recta y un punto no perteneciente a ella.** — c) **Por dos rectas que se cortan.** — d) **Por dos rectas paralelas.**

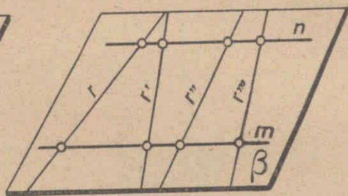
Como ejercicio, indique el estudiante qué planos del salón de clase resultan determinados por dos rectas paralelas.

14. Generación del plano. — Como indicamos en el ejemplo del (N.° 12) ,el movimiento de la recta MN (fig. 9), que se apoya constantemente sobre dos rectas fijas AB y BC que se cortan en B, genera el plano ABC.

15. Análogamente, la determinación del plano indicada en el (N.° 11) fundamenta la generación del plano α (fig. 10), obtenido haciendo girar la recta CM alrededor del punto



(fig. 10)



(fig. 11)

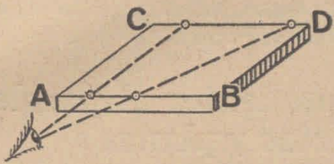
fijo C, y apoyándola constantemente sobre una recta fija AB, en los puntos M', M'', M''',...

16. La determinación del plano indicada en el (N.° 13) justifica la generación del palno β (fig. 11), mediante el movimiento de la recta r que se apoya constantemente sobre las rectas paralelas m y n, tomando las sucesivas posiciones r', r'', r''', ...

APLICACIONES PRACTICAS. — *a*) Para cerciorarse si una tabla cepillada es bien plana, los carpintéros le aplican el borde de una regla en varias direcciones; ensayan primeramente aplicando la regla en dirección longitudinal, luego transversal, y finalmente en varias direcciones diagonales; si en todas estas posiciones el borde de la regla coincide con la tabla, su superficie es plana (definición de plano).

b) Otras veces se emplea un procedimiento *visual*: se mira uno de los bordes de la pieza a verificar, por ejemplo, el AB (fig. 12), y se hace girar la pieza alrededor de ese borde hasta que el otro borde CD desaparezca, previa coincidencia visual con el anterior AB y manteniéndose visible, al mismo tiempo, toda la superficie comprendida entre los segmentos AB y CD. Logrando este resultado, el plano determinado por el ojo y AB contiene CD, e inversamente AB y CD están en un mismo plano. No logrando este resultado, significa que la superficie de la pieza a verificar, no es plana; se le llama entonces *superficie alabeada.*

c) Para preparar piezas de *ajuste* que deben presentar una gran precisión, se emplea la *platina* (fig. 13), que es una amplia pieza de acero de superficie muy plana, de esmerada construcción. Se la cubre con un débil enlucido de aceite coloreado con pintura en polvo, aplicando luego sobre ella la pieza a verificar, que se desplaza en varias direc-



(fig. 12)

(fig. 13)

ciones. Se obtienen, así, puntos o zonas de contacto coloreadas, que indican los lugares donde debe rebajarse el material de la pieza. Después de varias de estas verificaciones seguidas de retoques, se logra obtener superficies bien planas.

Posiciones relativas de dos rectas

17. Dos rectas pueden **estar situadas en un mismo plano**; se presentan, entonces, tres casos:

a) *Tienen un solo punto común;* este es el caso general; decimos que las rectas son *concurrentes,* o que se *cortan.*

b) *Tienen más de un punto común;* en este caso las dos rectas se confunden (definición de recta); se les llama rectas *coincidentes.*

c) *No tienen ningún punto común;* las rectas son *paralelas.*

18. Dos rectas pueden **no estar situadas en un mismo plano.** Para demostrarlo, sea AB una recta trazada en el plano α (fig. 5); por un punto C del plano, tomado fuera de la recta AB, tracemos la recta CD que intercepte el plano; decimos que las rectas AB y CD no pueden estar en un mismo plano. En efecto, si un plano contuviera AB y CD, pasaría por la recta AB y por el punto C, por tanto se confundiría con el plano α (N.° 11), lo que es absurdo, porque el plano α no contiene a la recta CD, sólo la intercepta.

De dos rectas no situadas en el mismo plano se dice que **se cruzan.**

Así, por ej., en el dado de la (fig. 1) se cruzan las rectas de los bordes AD y EF; DC y GF; ... etc.

Como ejercicio, indique el estudiante un par de rectas que se cruzan pertenecientes a objetos del salón de clase.

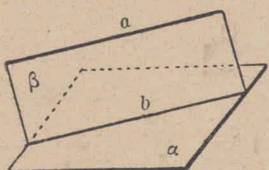
Propiedades correspondientes al paralelismo entre rectas y planos

19. Postulado del paralelismo. — El postulado de Euclides que enunciamos en el curso anterior (G. P. N.° 69), subsiste en Geometría del espacio:

Por un punto O exterior a una recta A B, sólo pasa una paralela a dicha recta.

En efecto, para trazar por O una paralela a AB, tendremos que trazar primeramente un plano que pase por la recta AB y por el punto O, existiendo solamente *un* plano en esas condiciones (N.° 11); luego, en ese plano, tenemos que trazar por el punto O una paralela a la recta AB, existiendo *sólo una* (Postulado de Euclides).

20. Teorema. — **Si una recta es paralela a otra recta de un plano, es paralela al plano** (fig. 14).



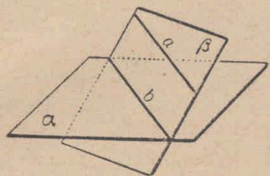
(fig. 14)

Hipótesis $\begin{cases} a \parallel b\ ; \\ b \text{ recta de } \alpha \end{cases}$

Tesis: $a \parallel \alpha$

Demostracion. — La recta a, por encontrarse con la recta b en un mismo plano β, no podría encontrar al plano α sino en su intersección con el anterior, es decir, sobre la recta b; pero, por hipótesis, la recta a no puede encontrar a la b; por consiguiente, la recta a tampoco encontrará al plano α, vale decir que le es *paralela* (lo que constituye la tesis).

21. TEOREMA RECÍPROCO. — **Si una recta es paralela a un plano, todo plano que pase por ella y corte al primero, determina con éste una recta paralela a la dada** (fig. 15).



(fig. 15)

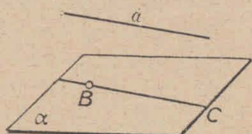
HIPÓTESIS $\begin{cases} a \parallel \alpha; \\ \beta \text{ pasa por } a; \\ b \text{ intersección} \\ \text{de } \alpha \text{ y } \beta \end{cases}$

TESIS: $b \parallel a$

DEMOSTRACION. (Método por "reducción al absurdo". *) — Si la recta a encontrase a la b tendría un punto común con el plano α, lo que es absurdo por resultar contrario a la hipótesis; por consiguiente, a y b no se cortan, y, como están en un mismo plano, son *paralelas* (lo que constituye la tesis).

22. Como consecuencia de los teoremas anteriores, tenemos los siguientes

COROLARIOS. — 1.° **Si una recta es paralela a un plano, toda paralela a ella trazada por un punto del plano, pertenece a éste** (fig. 16).



(fig. 16)

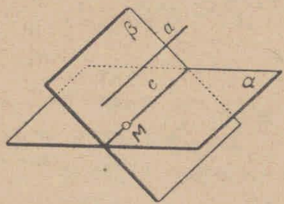
HIPÓTESIS $\begin{cases} a \parallel \alpha, \\ B \text{ está en } \alpha \\ B\,C \parallel a \end{cases}$

TESIS: $B\,C$ está en α

En efecto: el plano determinado por la recta a y el punto B corta al plano α por cierta recta a' que es paralela a la recta a (N.° 21); pero, por el punto B sólo se puede trazar una paralela a la recta a (Postulado de Euclides); por consiguiente, dicha paralela a' coincide con la recta $B\,C$ del plano α.

(*) Véase nuestra "Geometría -- Primer año": llamada de la pág. 70.

2.° **Si una recta es paralela a dos planos que se cortan, es paralela a la intersección de ambos** (fig. 17).



(fig. 17)

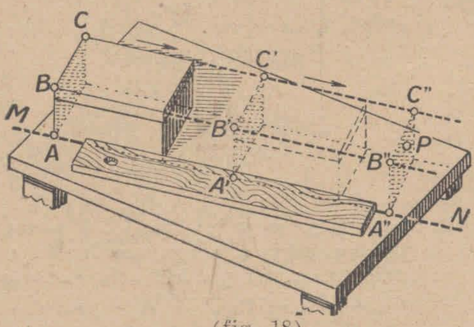
HIPÓTESIS $\begin{cases} a \parallel \alpha;\ a \parallel \beta \\ \alpha \text{ y } \beta \text{ se cortan} \\ \text{en } c \end{cases}$

TESIS: $a \parallel c$

En efecto: si por el punto M de la intersección c de los planos α y β trazamos la paralela a la recta a, dicha paralela se encontrará en el plano α (en virtud del corolario anterior), y por igual razón se encontrará también en el plano β; es, pues, la intersección c de ambos planos.

Traslación

23. Concepto de traslación. — Al tratar las rectas paralelas en el curso de Geometría plana, vimos que, si deslizábamos una escuadra a lo largo del borde de una regla, lográbamos así un movimiento de traslación con guía, o directriz, en dicho borde (G. P. N.° 67).



(fig. 18)

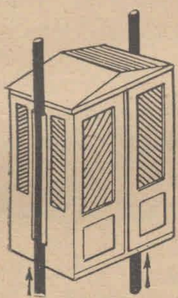
Análogamente en Geometría del espacio, si sobre la escuadra apoyamos un cuerpo limitado por planos, por ej., una caja, o mejor aún, si deslizamos directamente la caja apoyando una de sus caras sobre el plano de la mesa (fig. 18), y uno de sus bordes en la regla MN, decimos que en este caso se efectúa, también, una *traslación*. El borde $M N$ de la regla es la *directriz* o *guía* del movimiento.

Todos los puntos del cuerpo describen rectas $A A'$, $B B'$, $C C'$, ... paralelas a la guía $M N$, las cuales se deslizan sobre sí mismas y son, por tanto, otras tantas guías de traslación.

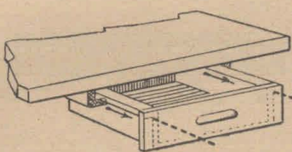
Podríamos prescindir del plano sobre el que se apoya el cuerpo, si fijáramos dos de esas guías, las que determinarían la traslación.

Puntos como los B, B', B'', ... se llaman *puntos homólogos;* análogamente, $A B$, $A' B'$, $A'' B''$, ... son *rectas homólogas*, y $A B C$, $A' B' C'$, ... son *planos homólogos.*

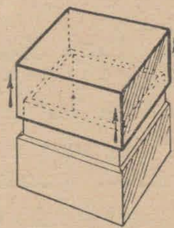
EJEMPLOS. — El movimiento de traslación de un ascensor resulta determinado por dos guías paralelas (fig. 19); análogamente, el movimiento



(fig. 19)



(fig. 20)



(fig. 21)

del cajón de una mesa (fig. 20). El movimiento de la tapa de una caja, por más de dos guías (fig. 21).

24. Planos paralelos. — Observemos que, durante la traslación anteriormente indicada, todos los puntos de una de las caras planas, por ej., de la cara $A B C$ (fig. 18), se alejan *igualmente* de su posición inicial; análogamente sucede con cada punto de las prolongaciones de esa cara.

El plano $A' B' C'$ determinado por una cualquiera de estas nuevas posiciones, *no puede encontrar* al plano $A B C$. Los planos homólogos $A B C$ y $A' B' C'$ se llaman *paralelos.* Daremos, pues, la siguiente

DEFINICIÓN. — **Dos planos son paralelos cuando no tienen ningún punto común.**

Suele decirse que dos planos paralelos *se cortan en el infinito.*

Como se comprende fácilmente, puede darse también para planos paralelos la siguiente

DEFINICIÓN. — **Dos planos son paralelos cuando pueden coincidir mediante una traslación.**

Si trasladamos la caja hasta que la cara ABC pase por el punto P, decimos que *hemos trazado por* P *el plano* $A''B''C''$ *paralelo al* ABC.

Los planos homólogos ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, ... forman un *sistema o un haz de planos paralelos.*

NOTACIÓN. — Si dos planos α y β son paralelos, escribiremos: $\alpha \parallel \beta$, o bien: $\beta \parallel \alpha$.

25. Propiedades de los planos paralelos. — Como consecuencia de la operación descrita anteriormente, podemos establecer las siguientes propiedades:

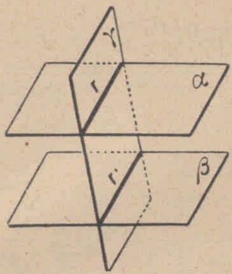
1.° **Por un punto exterior a un plano, sólo pasa un plano paralelo al primero.**

2.° **Dos planos paralelos a un tercero lo son entre sí** (puesto que los tres planos pueden obtenerse mediante una misma traslación).

3.° **Si una recta corta a un plano, corta también a todos sus paralelos** (puesto que bastaría tomar la recta como guía).

26. TEOREMA. (*) — **Las intersecciones de dos planos paralelos por un tercero, son rectas paralelas** (fig. 22).

(*) Este teorema y el siguiente son también una consecuencia inmediata del concepto de traslación anteriormente expuesto; no obstante, como ejercicio de razonamiento, los demostraremos independientemente de aquel concepto.



(fig. 22)

HIPÓTESIS $\begin{cases} \alpha \parallel \beta \\ \gamma \text{ intercepta: } \alpha \text{ en } r \\ \text{y } \beta \text{ en } r' \end{cases}$

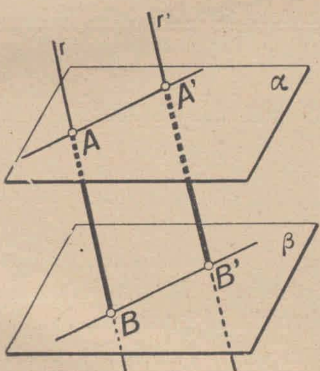
TESIS: $r \parallel r'$

DEMOSTRACIÓN. — Las rectas r y r', además de estar en un mismo plano γ no pueden tener ningún punto común (lo que constituye la tesis), puesto que este punto, por pertenecer a las rectas r y r' estaría en los planos α y β, lo que es contrario al paralelismo de estos planos.

EJEMPLO. — Siendo el piso y el techo del salón de clase planos paralelos, las rectas de intersección con una cualquiera de las paredes son *paralelas*.

NOTA. — El recíproco del teorema anterior no es verdadero.

27. TEOREMA. — **Dos segmentos de rectas paralelas comprendidos entre planos paralelos son iguales** (fig. 23).



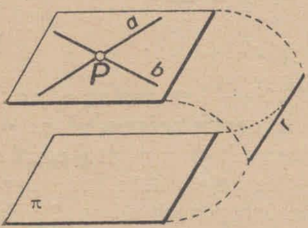
(fig. 23)

HIPÓTESIS $\begin{cases} r \parallel r'; \quad \alpha \parallel \beta \\ A \text{ y } B \text{ interseccio-} \\ \text{nes de } r \text{ con } \alpha \text{ y } \beta. \\ A' \text{ y } B' \text{ intersec-} \\ \text{ciones de } r' \text{ con } \alpha \\ \text{y } \beta. \end{cases}$

TESIS: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

DEMOSTRACIÓN. — Los segmentos AB y $A'B'$ de rectas paralelas r y r' están en un mismo plano, el que intercepta α y β por las paralelas AA' y BB' (N.° 26). En consecuencia, el cuadrilátero $AA'B'B$ es un paralelogramo; y según sabemos del curso anterior (G. P. N.° 208), los lados opuestos AB y $A'B'$ son iguales (lo que constituye la tesis).

28. TEOREMA. — **Si por un punto exterior a un plano se trazan dos rectas paralelas al mismo, el plano que determinan es paralelo al primero** (fig. 24).



(fig. 24)

HIPÓTESIS $\begin{cases} a \parallel \pi;\ b \parallel \pi \\ a \text{ y } b \text{ pasan por } P \end{cases}$

TESIS: $a\,b \parallel \pi$

DEMOSTRACIÓN. — Si ambos planos se cortasen en una recta r, tendríamos:

$a \parallel r$ en virtud del teorema del (N.° 21).
$b \parallel r$ ” ” ” ”

Pero como en el plano $a\,b$ no pueden haber dos rectas a y b que pasen por un mismo punto P y sean a la vez paralelas a otra recta r (Postulado de Euclides), es absurda la hipótesis de que ambos planos se cortan; en consecuencia, aquellos planos son *paralelos*.

Angulo de dos rectas en el espacio

29. **Definición.** — Si dos rectas se cortan, su ángulo es el que forman las mismas rectas, estando el vértice en su punto de intersección.

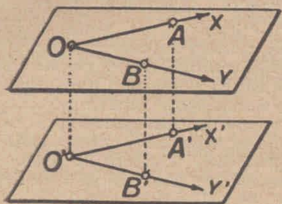
Si las rectas no se cortan, *se llama ángulo de las dos rectas al formado por una cualquiera de ellas y la paralela a la otra trazada por un punto cualquiera de la primera.*

Así, por ej., si las rectas dadas son $A\,B$ y $C\,D$, y por el punto A trazamos la recta $A\,E$ de modo que $A\,E \parallel C\,D$, el ángulo de aquellas rectas es el $B\,A\,E$.

30. El ángulo de las dos rectas es el mismo cualquiera que sea el punto de una de ellas por donde se trace la paralela a la otra; y es también igual al formado por las

paralelas a las rectas dadas trazadas por un punto cualquiera del espacio. Esto resulta inmediatamente del siguiente

TEOREMA. — **Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son iguales** (fig. 25).



(fig. 25)

HIPÓTESIS $\begin{cases} OX \parallel O'X' \text{ y} \\ \text{del mismo sentido.} \\ OY \parallel O'Y' \text{ y} \\ \text{del mismo sentido} \end{cases}$

TESIS:

áng. $XOY =$ **áng.** $X'O'Y'$

DEMOSTRACIÓN. — La traslación que lleve a coincidir el punto O con O', hará coincidir también la recta OX con su paralela $O'X'$, y análogamente hará coincidir OY con su paralela $O'Y'$. Coincidiendo los lados de los ángulos XOY y $X'O'Y'$, son, pues, iguales.

NOTAS. — 1.ª Este teorema presenta los casos análogos a los de Geometría plana, cuando los sentidos de los lados son opuestos, o bien, dos en el mismo y dos en sentido contrario (G. P. N.^{os} 109 y 110). Como ejercicio, enuncie el estudiante estos casos.

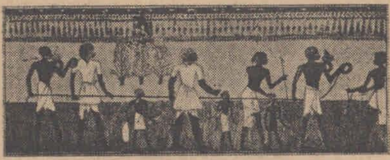
2.ª Los planos XOY y $X'O'Y'$ resultan paralelas por ser planos homólogos de una traslación (N.° 23); o bien, en virtud del teorema del (N.° 28).

NOTAS HISTORICAS

Se acepta generalmente que la Geometría tuvo su origen en los problemas sobre deslindes de tierras, originados por las inundaciones periódicas del Nilo. Geometría significa, precisamente, medida de la tierra (**Geos**, tierra; **metron**, medida).

En tiempos muy remotos, toda la ciencia geométrica se reducía a las reglas que sirven para medir y calcular áreas y volúmenes sencillos, como las que se enseñan en las escuelas primarias.

Los documentos más antiguos provienen de Babilonia y Egipto. Los primeros se escribieron unos 2000 años antes de la era cristiana, en pequeñas tablas o planchas de arcilla, cocidas luego al sol. Revelan que los autores ya tenían algunos conocimientos de los procedimientos de medidas de tierras, y probablemente, ya habían llegado hasta determinar el área del trapecio.



MEDIDORES DE TIERRAS EGIPCIOS
(1400 años antes de J. C.)
Escena de la tumba de un inspector de límites en Tebas. (De una fotografía en el Museo de Ciencias Británico.)

El primer documento que da una idea clara del estado de las Matemáticas en el antiguo Egipto, es una copia hecha en papiro por **Ahmés**, sacerdote egipcio, que probablemente floreció unos 1700 años antes de nuestra era. El original que copió, escrito por el año 2300, no se conoce; la copia se conserva en el Museo Británico. Este manuscrito, que está casi todo consagrado a las fracciones, contiene algo relativo a la medida de áreas. Pero mucho antes de **Ahmés**, es evidente que los egipcios tenían conocimientos importantes de geometría práctica, como lo atestiguan las construcciones de las pirámides y de muchos templos y canales.

Los griegos cimentaron en base científica la geometría práctica de los egipcios. **Thales** (siglo VI antes de J. C.), que figuraba entre los siete sabios de Grecia, fundó la célebre escuela jónica de Matemáticas y Filosofía, e importó de Egipto valiosos conocimientos.

El discípulo más célebre de Thales, así como uno de los hombres más famosos de la antigüedad, fué **Pitágoras**, a quien se debe el famoso teorema que lleva su nombre, que relaciona los tres lados de un triángulo rectángulo.

Tres siglos más tarde **Euclides**, llamado el padre de la Geometría, formó una recopilación magistral de diversas proposiciones y propiedades geométricas que se hallaban dispersas entre las escuelas griegas de Thales de Mileto y la pitagórica, legándonos sus famosos ''Elementos''.

Siguen a Euclides otros genios en el campo de la Geometría: **Arquímedes** (siglo III antes de J. C.), **Apolonio, Herón** (contemporáneo de J. C.), **Menelao** (siglo I), **Ptolomeo** (siglo II), **Pappus** (siglo III), etc.

Más tarde (siglo XVII), **Cavalieri, Descartes, Fermat, Roverbal y Pascal**, llevaron a un alto grado de adelanto la Geometría de los antiguos.

Se crea luego la Geometría moderna (siglo XVIII), figurando, en primera línea, **Monge, Chasles, Carnot, Poncelet, Cremona** y muchos otros, a quienes debemos el estado actual de perfeccionamiento de esta importante rama de la Matemática.

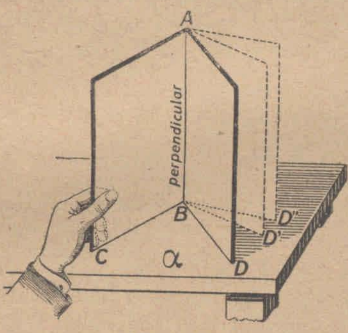
* * *

CAPITULO II

PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA

Propiedades correspondientes

31. **Recta y plano perpendicular.** — Apoyemos las tapas de un libro abierto sobre el plano α de una mesa, como indica la (fig. 26), es decir, de modo que los bordes inferiores BC y BD de las tapas se encuentren sobre la mesa. Si fijamos una de las tapas, por ejemplo, la ABC, y luego hacemos girar la otra alrededor del lomo AB (que es perpendicular a los bordes inferiores de las tapas), la experiencia nos dice que el borde BD describe un plano, que contiene la recta móvil BD en sus infinitas posiciones BD', BD'', ... todas ellas perpendiculares a la recta AB.



(fig. 26)

De la experiencia anterior resulta la siguiente

Propiedad. — **Todas las perpendiculares a una recta por un punto de ella están en un mismo plano.**

Este plano se llama PERPENDICULAR o NORMAL a la recta en ese punto, o bien, se dice que la recta es perpendicular o normal al plano.

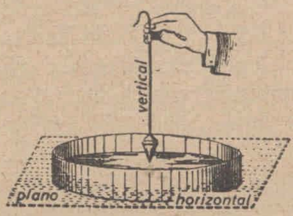
Nota. — La operación anteriormente descripta, de hacer girar una figura alrededor de una recta fija, se llama *rotación alrededor de un eje;* AB es el eje de rotación.

Como de cualquier punto del espacio no situado sobre el eje, se puede trazar una perpendicular a dicho eje (N.° 11 y G. P. N.° 32), vemos, pues, que: *durante una rotación alrededor de un eje, los puntos del eje permanecen inmóviles, y cualquier punto del espacio describe una circunferencia cuyo centro se encuentra sobre el eje y cuyo plano es perpendicular a dicho eje.*

Si una recta encuentra un plano y no le es perpendicular, se llama *oblicua* al plano.

NOTACIÓN. — Si una recta a y un plano α son perpendiculares, escribiremos: $a \perp \alpha$, o bien: $\alpha \perp a$

Otro ejemplo de recta y plano perpendiculares se presenta en el movimiento de una puerta cuyo borde inferior es perpendicular a la recta que contiene las bisagras; aquel borde describe un plano que casi coincide con el del piso, y diremos que la recta que contiene las bisagras de la puerta es *perpendicular* al plano del piso.



(fig. 27)

Los planos horizontales y las rectas verticales, constituyen también otros ejemplos de perpendicularidad que se presentan frecuentemente en la práctica. Así, en la (fig. 27), la recta (vertical) del hilo de la plomada, resulta perpendicular al plano (horizontal) de la superficie libre de las aguas en reposo.

32. Como consecuencia de la propiedad indicada en el párrafo anterior, podemos establecer la siguiente

DEFINICIÓN. — **Una recta es perpendicular a un plano cuando lo es a todas las rectas que pasan por su pie en el plano.**

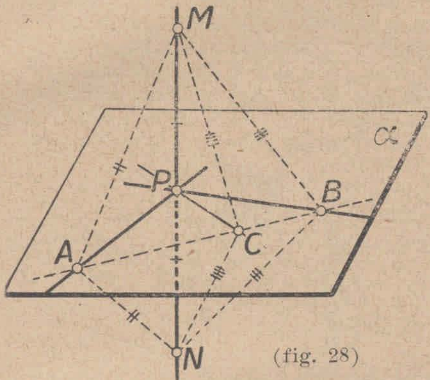
33. La condición de perpendicularidad anterior resulta abreviada en la práctica en virtud del siguiente

TEOREMA. — **Si una recta es perpendicular a otras dos que pasan por su pie en el plano, es perpendicular al plano.**

Sea en la (fig. 28) PM la perpendicular a las dos rectas PA y PB que pasan por el pie P de la primera en el plano α.

Para demostrar que PM es perpendicular a α, basta demostrar que lo es a *cualquier otra recta*, por ejemplo, a la PC, que pasa por su pie en el plano α (N.° 32).

Podremos, en consecuencia, establecer el siguiente resumen:



(fig. 28)

Hip. $\begin{cases} PM \perp PA; \\ PM \perp PB; \\ PA,\ PB \text{ y } \\ PC \text{ pasan por } \\ P \text{ y están en } \\ \text{el plano } \alpha \end{cases}$

Tesis: $PM \perp PC$

Demostración. — Sea PN la prolongación de la recta MP. Es siempre posible elegir los puntos A y B sobre las rectas dadas, de manera que se hallen separados por la recta PC. Trazando la recta AB, ésta corta la PC en C; unimos los puntos A, B y C con los M y N.

Como PA es mediatriz de MN, el punto A equidista de M y N (G. P. N.° 52), y análogamente B equidista de M y N; es decir, que tendremos:

$$AM = AN\,, \quad BM = BN$$

En consecuencia, los triángulos AMB y ANB son iguales por tener dos pares de lados iguales y el AB común.

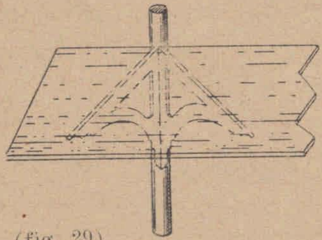
Si hacemos girar uno de estos triángulos alrededor del lado AB, coincidirá con su igual, es decir, que el punto M coincidirá con N; pero como en este movimiento el punto C no ha cambiado de posición, resulta: $MC = NC$.

Esto nos dice que el triángulo MCN es isósceles; pero, por construcción, PC es mediana del triángulo MCN, y sabemos que la mediana correspondiente a la base de un triángulo isósceles es *perpendicular* a esta base (G. P. N.° 145), es decir, que $PC \perp PM$, lo que constituye la tesis.

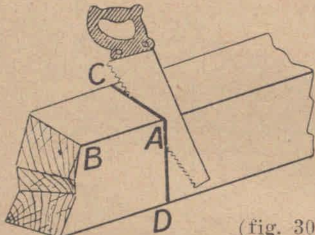
34. Trazado del plano perpendicular a una recta. — Según el teorema anterior, para trazar el plano perpendicular a una recta *por un punto de ella*, basta trazarle *dos* rectas perpendiculares por ese punto, y el plano que determinan dichas perpendiculares es el que se deseaba obtener.

EJEMPLOS. — Para colocar un estante (horizontal), perpendicular a una columna (vertical), basta colocar *dos* escuadras de manera que un borde de cada una de ellas y el vértice del ángulo recto coincidan con la columna, como indicamos en la (fig. 29), y apoyar luego el estante sobre el otro par de bordes.

Análogamente, para cortar un tirante (fig. 30) en el punto A, por



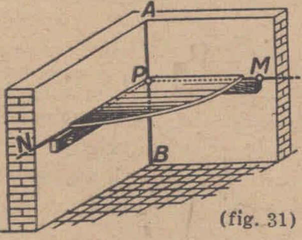
(fig. 29)



(fig. 30)

un plano perpendicular a la arista longitudinal AB, trazamos primeramente las perpendiculares AC y AD a la recta AB, que nos determinan el plano CAD por donde debemos efectuar el corte.

Para trazar el plano perpendicular a una recta AB (fig. 31) *por un punto M exterior de ella*, trazamos primeramente la perpendicular MP a la recta AB en el palno determinado por ésta y el punto M; luego, por el pie P trazamos la perpendicular PN a la misma recta AB en otro plano cualquiera que contenga la recta AB.



(fig. 31)

El plano MPN de las rectas PM y PN es el *perpendicular* pedido (N.° 33).

35. Como la perpendicular MP desde M es *única*, así también como la PN, y siendo éstas las que determinan el plano MPN, podemos establecer la siguiente

PROPIEDAD. — **Por un punto no se puede trazar más que un plano perpendicular a una recta.**

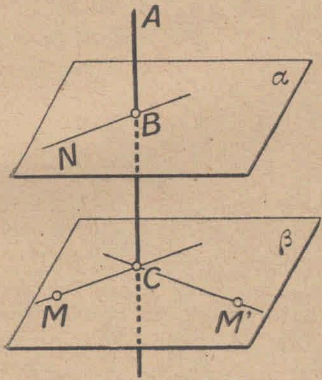
Los ejemplos del (N.° 34) nos inducen a afirmar que la propiedad anterior es válida también cuando el punto se encuentra sobre la recta.

36. Análogamente, la experiencia indicada en el (N.° 31) nos dice que, si sujetamos el lomo del libro por un punto, la perpendicular obtenida es *única;* de aquí, la siguiente

PROPIEDAD. — **Por un punto no se puede trazar más que una perpendicular a un plano.**

Es natural que el punto puede estar sobre el plano o fuera de él.

37. TEOREMA. — **Si una recta es perpendicular a uno de dos planos paralelos, es perpendicular al otro** (fig. 32).



(fig. 32)

HIPÓTESIS $\begin{cases} \alpha \parallel \beta \\ AB \perp \alpha \end{cases}$

TESIS: $AB \perp \beta$

DEMOSTRACIÓN. — Sea C el punto de intersección de AB con β y M un punto cualquiera de β. El plano ACM interceptará al α en la recta BN y al β en CM, que es paralela a BN (N.° 26).

Siendo la recta AB perpendicular a α lo será también a BN (N.° 32), y por consiguiente, a su paralela CM.

Repitiendo el razonamiento anterior para otro punto cualquiera M' del plano β, demostraríamos análogamente que $AB \perp CM'$.

En consecuencia, según el teorema del (N.° 33), AB resultará perpendicular al plano β (lo que constituye la tesis).

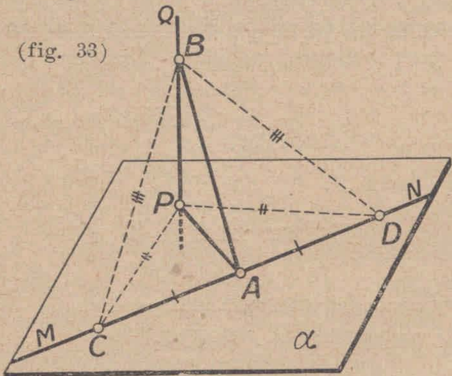
EJEMPLOS. — 1.° Las aristas longitudinales de las patas de una mesa son perpendiculares al plano de la misma; cuando la mesa es paralela al plano del piso, aquellas aristas resultarán perpendiculares al piso.

2.° Una recta vertical es perpendicular a un plano horizontal; en consecuencia, será también perpendicular a cualquier otro plano horizontal (los planos horizontales son paralelos).

Teorema de las tres perpendiculares

38. Teorema. — **Si una recta PQ es perpendicular a un plano α, y desde su pie P se traza la perpendicular PA a una recta MN del plano, la recta AB que une el pie A de esta segunda perpendicular con un punto cualquiera B de la primera, es perpendicular a aquella recta MN** (fig. 33).

(fig. 33)



Hip. $\begin{cases} PQ \perp \alpha \\ MN \text{ recta de } \alpha \\ PA \perp MN \\ B \text{ está en la recta } PQ \end{cases}$

Tesis: $AB \perp MN$

(Nótense las *tres perpendiculares* referidas en el enunciado del teorema, que son: PQ, PA y AB.)

Construcción.—Sobre la recta MN tomamos $AC = AD$; unimos C y D con P y B.

Demostración. — Los segmentos de oblicuas PC y PD trazadas desde P serán iguales, por tener proyecciones iguales sobre la recta MN (G. P. N.° 35), es decir, que: $PC = PD$.

Los triángulos BPC y BPD son rectángulos en P, por definición de recta perpendicular a un plano (N.° 32); y como tienen iguales dos catetos y común el otro, son iguales; luego $BC = BD$. Pero como en un triángulo isósceles BCD sabemos que la mediana BA es perpendicular a la base CD, tendremos $AB \perp MN$, que constituye la tesis.

39. NOTAS. — 1.ª La recta MN, que es perpendicular a AP y AB, es perpendicular al plano PAB, que determinan estas dos últimas rectas, propiedad esta que justifica este otro enuncialo del teorema anterior:

Si una recta PQ es perpendicular a un plano α que pasa por otra recta MN, ésta es perpendicular al plano PAB que pasa por la primera.

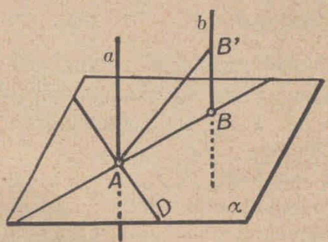
2.ª El **recíproco** del teorema de las tres perpendiculares sería:

Si una recta PQ es perpendicular a un plano α, y desde un punto cualquiera B de ella se traza la perpendicular BA a una recta MN del plano, la recta AP que une el pie A de esta segunda perpendicular con el pie P de la primera, es perpendicular a la recta MN.

Dejamos esta demostración como ejercicio para el estudiante; empleará la (fig. 33).

40. Como aplicación del teorema de las tres perpendiculares, demostraremos el siguiente

TEOREMA. — **Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas** (fig. 34).



(fig. 34)

HIPÓTESIS $\begin{cases} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{cases}$

TESIS: $a \parallel b$

CONSTRUCCION. — Trazamos las rectas AB', AB, AD; estas dos últimas en el plano α, de modo que $AD \perp AB$, y la primera en el plano de las paralelas a y b.

DEMOSTRACION. — El plano BAB' es perpendicular a la recta AD, en virtud del (N.º 39); por consiguiente, dicho plano contiene la recta a, puesto que ésta es perpendicular a AD. Estando, pues, las rectas a y b en un mismo plano y siendo ambas perpendiculares a la misma recta AB, son paralelas.

41. TEOREMA RECÍPROCO. — **Si dos rectas son paralelas, todo plano perpendicular a una de ellas lo es también a la otra** (fig. 34).

HIPÓTESIS: $a \parallel b$ y $\alpha \perp b$; TESIS: $\alpha \perp a$.

DEMOSTRACION. — Si por el punto A de la recta a suponemos trazada una perpendicular al plano α, dicha perpendicular tendrá que ser paralela a la recta b, en virtud del teorema anterior; se confundirá, pues, con la recta a, puesto que por un punto sólo se puede trazar una paralela a una recta dada.

42. COROLARIO. — **Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí** (carácter transitivo del paralelismo).

Sea $a \parallel c$ y $b \parallel c$. Si por un punto cualquiera de la recta c suponemos trazado un plano perpendicular a dicha recta, este plano será también perpendicular a las rectas a y b, en virtud del (N.° 41); en consecuencia, estas dos últimas rectas son paralelas (N.° 40).

43. Distancia entre planos paralelos. — Como consecuencia de los teoremas de los (N.os 27 y 37), tenemos:

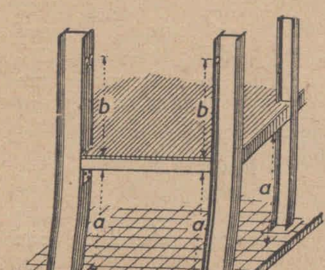
Los segmentos de perpendicular común a dos planos paralelos son iguales.

La medida de esos segmentos se llama **distancia** entre los planos paralelos.

Todos los puntos de un plano distan, pues, igualmente, del plano paralelo, es decir:

Dos planos paralelos son equidistantes.

44. La equidistancia anteriormente indicada tiene una aplicación interesante, en la práctica, para la construcción de planos paralelos, que indicamos en el ejemplo que sigue.

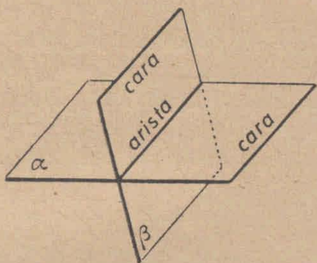


(fig. 35)

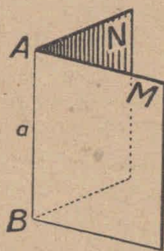
EJEMPLO. — En las columnas verticales que han de soportar los pisos de una construcción (fig. 35), ya se encuentran marcados los puntos donde se acoplarán las vigas horizontales de apoyo de los distintos pisos; de manera que, siendo equidistantes estos puntos, basta colocar los pies de las columnas en el mismo plano horizontal, para que también resulten horizontales los distintos pisos que con ellas se obtienen.

Angulo de dos planos. — Diedro

45. Si dos planos α y β se cortan (fig. 36), dividen el espacio en cuatro partes que llamamos *ángulos diedros,* o simplemente diedros. Cada diedro está limitado por dos *caras,* que son semiplanos que tienen el *borde* común con la intersección, llamada *arista.* (La palabra *diedro* quiere decir: *dos caras*).



(fig. 36)



(fig. 37)

En consecuencia tendremos la siguiente

DEFINICIÓN. — **Se llama DIEDRO a la parte de espacio limitada por dos semiplanos que tienen el mismo borde.**

Dos de los semiplanos indicados forman *dos* diedros: uno *convexo* y el otro *cóncavo* (fig. 37).

Teniendo presentes las definiciones dadas en Geometría plana, el estudiante podrá definir fácilmente, en forma análoga, los diedros cóncavos, convexos y llanos (G. P. N.^{os} 25 y 27).

En el salón de clase podemos observar varios ángulos diedros; por ejemplo, los formados por dos paredes consecutivas, o por las paredes y el techo, o por las paredes y el piso. (Indique el estudiante cuántos son estos ángulos.)

46. Para leer un diedro se leen ordenadamente: un punto de una cara, la arista, y un punto de la otra cara. Así, por ej., el diedro de la (fig. 37) se leerá: $M\,A\,B\,N$, o bien

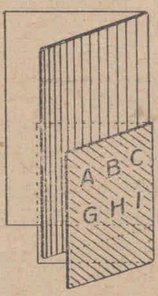
$NABM$. Si la arista AB la designamos con la letra a, podemos leer también: MaN, o bien NaM.

Nota. — De los dos diedros formados por dos semiplanos (el convexo y el cóncavo), consideramos generalmente el primero. Si queremos referirnos al ángulo cóncavo, será necesario decirlo expresamente.

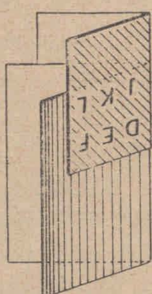
Algunos autores sustituyen el convencionalismo anterior definiendo el ángulo diedro así:

Diedro es la parte de espacio común a dos semiespacios.

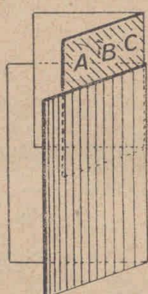
47. Igualdad de diedros. — Como los ángulos planos, también los diedros pueden ser iguales. Esto puede verificarse construyendo un tercer diedro de cartón u hoja de lata (marcado con letras A, B, C, D, ... en las tres figuras siguientes), y observando si puede coincidir con los primeros.



(fig. 38)



(fig. 39)



(fig. 40)

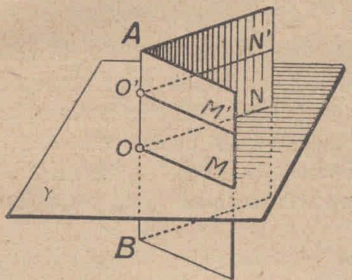
Esta coincidencia puede realizarse de dos maneras, como indican las (figs. 38 y 39), si los diedros son convexos; si son cóncavos, será necesario colocar el diedro de cartón empleado para la comparación, como indica la (fig. 40).

Así, por ej., son iguales los diedros de una caja de cartón y de su tapa.

La comparación de diedros es aun más sencilla, puesto que se reduce a la comparación de dos ángulos planos, como indicaremos en el párrafo siguiente.

Angulo plano correspondiente a un diedro

48. Definición. — Si en un punto O (fig. 41) de la arista AB de un diedro y en cada una de las caras, trazamos las perpendiculares OM y ON a la arista, formaremos un ángulo plano MON, que se llama el *rectilíneo* o *ángulo plano correspondiente al diedro*, o, simplemente, *ángulo plano del diedro.*



(fig. 41)

Como las perpendiculares en un mismo punto de una recta determinan un plano γ perpendicular a la recta AB (N.º 33), podremos decir:

El rectilíneo de un diedro, es el ángulo formado por las intersecciones de sus caras con un plano perpendicular a la arista; por este motivo se le llama, también, **sección recta o normal del diedro.**

Si en lugar del punto O tomamos otro punto cualquiera O', y repetimos la construcción, obtendremos otro ángulo, el $M'O'N'$, que resulta igual al primero. En efecto, si efectuamos una traslación tomando como directriz la recta AB, y llevamos el punto O a coincidir con O', las perpendiculares OM y ON a la recta AB coincidirán con las perpendiculares $O'M'$ y $O'N'$ en el punto O' a dicha arista; el ángulo MON coincidirá con el $M'O'N'$ y, por tanto, serán iguales.

49. En virtud de la propiedad anterior de las secciones normales, tenemos:

Todas las secciones normales de un mismo diedro son iguales.

En consecuencia, para comparar dos diedros basta comparar dos cualesquiera de sus secciones normales. Así, por ejemplo, diremos que un diedro es mayor que otro cuando el rectilíneo del primero es mayor que el del segundo; dos diedros son iguales cuando tienen los rectilíneos respectivamente iguales.

También resulta que, para medir un diedro, no es necesario emplear un diedro unidad, sino que puede medirse empleando el rectilíneo correspondiente; en otros términos:

Un ángulo diedro se mide por el rectilíneo correspondiente.

50. Propiedades de los ángulos diedros. — Según la propiedad anterior, todo lo que se ha estudiado en Geometría plana referente a los ángulos planos de vértice común, se aplica también a los ángulos diedros de arista común.

Como ejercicio, dejamos para el estudiante los enunciados de las definiciones y propiedades correlativas. Así, por ejemplo, dirá:

Dos diedros son complementarios, cuando su suma vale un recto. Dos diedros opuestos por la arista son iguales. Etcétera.

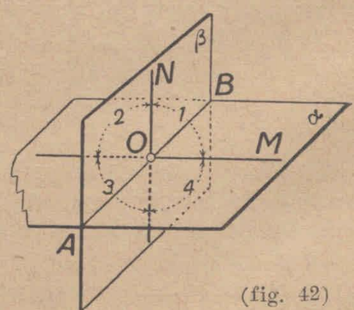
Planos perpendiculares

51. Definición. — Como para las rectas perpendiculares tratadas en Geometría plana, damos la siguiente

Definición. — **Dos planos son PERPENDICULARES, cuando al cortarse forman cuatro ángulos diedros iguales.**

La (fig. 42) representa dos planos perpendiculares, α y β, que forman los diedros 1, 2, 3 y 4, iguales entre sí. Cada uno de estos diedros es un *diedro recto.*

Para asegurar la perpendicularidad, basta que *dos* diedros adyacentes sean iguales, pues los otros también lo serán, por resultar opuestos por la arista.



(fig. 42)

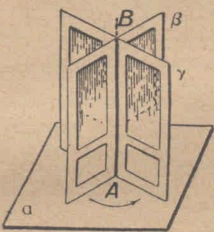
Ejemplo. — Los diedros formados por dos paredes que se cortan en las habitaciones corrientes, son rectos; esto se verifica, observando su sección recta determinada por el techo o por el piso (supuestos horizontales).

52. TEOREMA. — **Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pase por ella es perpendicular al primero** (fig. 42).

HIPÓTESIS $\begin{cases} O\,N \perp \alpha \text{ en } O. \\ \beta \text{ pasa por } O\,N. \end{cases}$ TESIS: $\beta \perp \alpha$

DEMOSTRACIÓN. — Sea $A\,B$ la intersección de α y β. Por O, trazamos en el plano α la recta $O\,M$ perpendicular a $A\,B$. El ángulo $M\,O\,N$ es recto, puesto que $O\,N$ es perpendicular a α; siendo, además, dicho ángulo el rectilíneo del diedro formado por los planos α y β, estos planos son *perpendiculares*.

EJEMPLOS. — 1.° Las puertas giratorias de los hoteles, cafés, etc. (fig. 43), constan de un eje $A\,B$ perpendicular al plano del piso; las hojas de la puerta pasan por aquel eje, y, en consecuencia, resultan perpendiculares al piso.



(fig. 43)

2.° Toda recta vertical es perpendicular a un plano horizontal (ej. del N.° 31); en consecuencia, todo plano que contenga una recta vertical resultará perpendicular a cualquier plano horizontal.

53. TEOREMA RECÍPROCO. — **Si dos planos son perpendiculares, toda recta de uno de ellos perpendicular a la intersección es perpendicular al otro.**

En efecto: en la misma figura del teorema directo (fig. 42), si desde un punto cualquiera del plano β trazamos la perpendicular a la intersección $A\,B$ de los planos α y β, dicha perpendicular será paralela a la recta $O\,N$, y, en consecuencia, *perpendicular* al plano α, en virtud del (N.° 41); resulta, pues, demostrado el teorema.

Observemos también que, conteniendo el plano β todas las perpendiculares trazadas desde sus distintos puntos al plano α, podremos enunciar, en consecuencia, el siguiente

COROLARIO 1.° — *Si dos planos son perpendiculares, la perpendicular a uno de ellos trazada por un punto del otro está contenida en este último plano.*

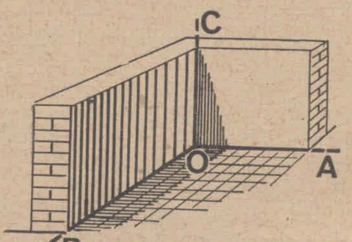
COROLARIO 2.° — *La intersección de dos planos perpendiculares a un tercero, es perpendicular a éste* (fig. 43).

En efecto: si por un punto B de la intersección de los planos β y γ trazamos la perpendicular al plano α, ésta se encontrará en el plano β y en el plano γ (en virtud del corolario anterior); coincidirá, pues, con la intersección AB de estos dos planos.

Triedro trirrectángulo

54. Concepto de triedro. — Si observamos un rincón del salón de clase, notamos *tres* planos (los de dos paredes contiguas y el piso), que forman una figura geométrica llamada ángulo **triedro.** La misma figura se nos presenta en muchos objetos; por ejemplo, en las esquinas de un cajón, o del pupitre, etc.

Así, en la (fig. 44) se representa el triedro a que nos referimos recientemente. Vemos que está formado por tres planos que pasan por un mismo punto O, que se llama **vértice** del triedro. Los tres planos están limitados por tres rectas OA, OB, OC, que se llaman **aristas.** Los ángulos planos AOB, BOC, COA, se llaman **caras,** y los diedros formados por dos caras consecutivas se llaman **diedros del triedro.**



(fig. 44)

Si las tres caras son diferentes, el triedro se llama *escaleno;* si sólo tiene dos caras iguales se llama *isósceles,* y si las tres caras son iguales se llama *equilátero.*

55. Triedro trirrectángulo. — Si las tres caras de un triedro son ángulos rectos, los tres diedros también son rectos. En efecto (fig. 44), **siendo los ángulos** $AOC=BOC=90°$, el ángulo AOB es el rectilíneo del diedro $ACOB$; pero como el ángulo $AOB = 90°$ (por hipótesis), aquel diedro será, pues, recto. Análogamente se demostraría que son rectos los otros dos diedros del triedro.

El ángulo triedro cuyas tres caras son ángulos rectos (y en consecuencia también los tres diedros), *se llama TRIEDRO TRIRRECTANGULO.*

Los triedros trirrectángulos se presentan corrientemente en los rincones de las habitaciones, cajones, muebles, etc.

Si una de las caras de un triedro trirrectángulo es *horizontal,* **las** otras dos serán *verticales;* es el caso del piso de una habitación y **las** dos paredes que forman un rincón de la misma. (fig. 44).

Recordemos del primer curso (G. P. N.° 9), que un plano es horizontal cuando es paralelo a la superficie de las aguas en reposo.

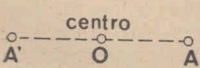
Para averiguar si un plano es horizontal, se emplea el *nivel* (ya sea el de aire, de agua. de albañil, etc.), investigando si son horizontales dos rectas del plano que no sean paralelas, de preferencia rectas aproximadamente perpendiculares; si ellas son horizontales, lo es también el plano que las contiene.

Un plano es vertical, cuando contiene una recta vertical (G. P. N.° 10). Para averiguar la verticalidad de una recta, se emplea la *plomada,* instrumento de trabajo muy conocido.

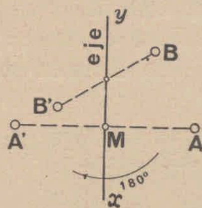
La intersección de dos planos verticales es una recta vertical (N.° 53, Cor. 2.°, y último ej. del N.° 31).

Simetría respecto a un eje, a un plano y a un punto

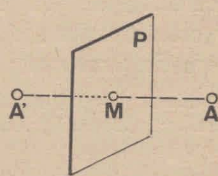
56. Definiciones. — En el curso anterior de Geometría, tratamos de la simetría en el plano, ya respecto de un eje, como respecto de un punto (G. P. N.^{os} 22 y 98). Trataremos ahora de la simetría de las figuras en el espacio.



(fig. 45)



(fig. 46)



(fig. 47)

Dos puntos *A* y *A'* son *simétricos respecto a un punto O*, cuando *O* es el punto medio del segmento de recta *A A'* (fig. 45). El punto *O* se llama *centro de simetría.*

Dos puntos A y A' *son simétricos respecto a un eje* $x\ y$ (fig. 46) o *respecto a un plano* P (fig. 47), cuando aquel eje o este plano es perpendicular en el punto medio de la recta $A\,A'$.

Dos **FIGURAS** son **SIMETRICAS** respecto a un punto, a un eje o a un plano, cuando cada punto de la primera tiene su simétrico en la segunda, y recíprocamente.

Los puntos simétricos de dos figuras se llaman *homólogos*.

57. Propiedad. — **Dos figuras simétricas respecto a un eje son iguales.**

Así, por ej., si A y A' (fig. 46), son puntos homólogos de dos figuras simétricas respecto al eje $x\,y$, es evidente que haciendo girar la primera figura alrededor del eje un ángulo de 180°, el punto A coincidirá con el A' en virtud de la perpendicularidad del eje y $A\,A'$, y por ser $M\,A = M\,A'$; análogamente, para cualquier otro par de puntos homólogos, B y B', etc. Cada punto de la primera figura coincidirá con su homólogo de la segunda, y las dos figuras coincidirán, es decir, que son iguales.

58. El razonamiento empleado en el párrafo anterior, nos justifica esta otra

Definición. — **Dos figuras son simétricas respecto a un eje, cuando pueden coincidir mediante una rotación de 180° de una de las figuras alrededor del eje.**

Cuando una figura coincide consigo misma mediante una rotación de 180° alrededor de un eje, se llama *simétrica* respecto a dicho eje; o bien, decimos que admite aquel eje como *eje de simetría*.

Nota. — La simetría respecto a un eje, no ofrece nada de particular; por consiguiente, en lo sucesivo, sólo nos ocuparemos de las otras dos simetrías.

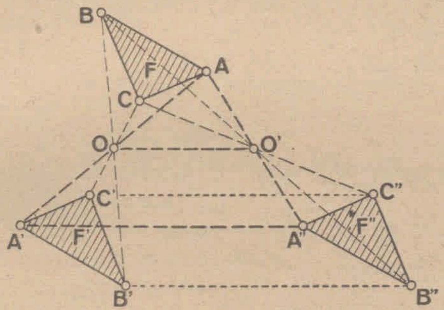
59. Teorema. — **Dos figuras** F' **y** F'' **simétricas de una misma figura** F **con respecto a dos centros diferentes** O **y** O', **son iguales** (fig. 48).

Si A' y A'' son puntos homólogos de A respecto de los centros O y O', respectivamente, tenemos:

$$OA = OA', \quad O'A = O'A''$$

Por tanto, en el triángulo $AA'A''$, el segmento OO' que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado $A'A''$, e igual a su mitad (G. P. N.° 225); análogamente, con los triángulos $BB'B''$ y $CC'C''$, se demuestra que OO' es paralelo a $B'B''$ y a $C'C''$, e igual a su mitad.

Siendo los segmentos $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ iguales al duplo de un mismo segmento OO', son, pues, iguales entre sí; son también paralelos, en virtud del carácter transitivo del paralelismo (N.° 42).



(fig. 48)

Por consiguiente, si tomando como guías las paralelas $A'A''$, $B'B''$, ..., efectuamos una traslación de la figura F' en una magnitud $A'A'' = 2(OO')$, A' coincidirá con A''; el B' con B''; etc.; coincidiendo todos los puntos de la figura F' con los de la F'', esas figuras serán, pues, iguales.

60. Como **corolario** del teorema anterior, podemos decir, que todas las figuras simétricas de una figura dada, cualquiera sea el centro de simetría adoptado, son iguales; o sea:

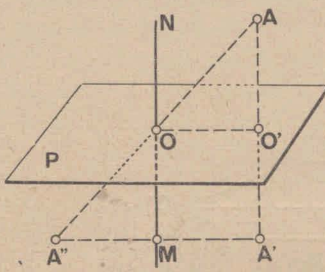
La posición del centro de simetría no influye en la forma de la figura simétrica de una figura dada.

Relaciones entre las diversas simetrías

61. Teorema. — **Dos figuras** F' **y** F'' **simétricas de una misma figura** F**, la primera con respecto a un plano** P**, y la otra respecto a un punto, son iguales** (fig. 49).

En virtud del corolario del (N.° 60), podemos tomar el centro de simetría en un punto cualquiera O del plano P.

Sean A un punto cualquiera de la figura F, A' su simétrico respecto al plano P, y A'' su simétrico respecto al centro O; el segmento $A'A''$ es paralelo a $O\,O'$, en virtud de unir este último los puntos medios de $A\,A'$ y de $A\,A''$ (G. P. N.° 225).



(fig. 49)

El plano $A\,A'A''$ que pasa por $A\,A'$ es perpendicular al plano P (N.° 52). Si en el punto O trazamos la perpendicular $M\,N$ al plano P, tendrá las siguientes propiedades: está contenida en el plano $A\,A'A''$ (N.° 53, Cor. 1.°); es paralela a $A\,A'$ (N.° 40) y perpendicular a $O\,O'$ (N.° 32); por consiguiente, $M\,N$ es también perpendicular a $A'A''$ por ser $A'A'' \parallel O\,O'$. Los triángulos rectángulos $A\,O'\,O$ y $O\,M\,A''$ son iguales, por tener, respectivamente, iguales la hipotenusa y un ángulo; en consecuencia, $O\,O' = M\,A''$. Pero también tenemos $OO' = M\,A'$ (por ser lados opuestos de un rectángulo); de donde resulta $M\,A' = M\,A''$

Es decir, que *los dos puntos A' y A'' son simétricos respecto al eje $M\,N$*. Como esto sucede cualquiera que sea el punto A, las dos figuras F' y F'' son *simétricas respecto del eje fijo $M\,N$*, y, por consiguiente, **son iguales** (N.° 57).

62. Corolario. — **Dos figuras simétricas de una misma figura** F **respecto a dos planos diferentes, son iguales entre sí.** En efecto, cada una de ellas es igual a la simétrica de F respecto a un punto cualquiera O del espacio.

63. En resumen, *las figuras simétricas de una figura dada F, ya sea respecto a un punto cualquiera del espacio, o a un plano cualquiera, son siempre superponibles.*

En consecuencia, al tomar la figura simétrica de una figura dada, no es necesario indicar con qué clase de simetría ha sido obtenida.

64. Aplicaciones. — 1.ª *La figura simétrica de una figura plana F es una figura plana igual a la primera.* En efecto, si tomamos la figura simétrica de F con respecto al plano que la contiene, hallamos la misma figura F.

Como caso particular, la figura simétrica (respecto a un punto, o a un plano), de una recta, es una recta; de un segmento de recta, un segmento igual; de un ángulo, un ángulo igual; de una circunferencia, una circunferencia igual; etc.

2.ª *La figura simétrica de un ángulo diedro es un diedro igual al primero.* En efecto, si tomamos la figura simétrica respecto a un punto de la arista, hallamos el diedro opuesto por la arista, que es igual al primero.

Elementos de simetría de las figuras

65. Centro y plano de simetría de una figura. — Cuando los simétricos de todos los puntos de una figura F respecto a un punto O se hallan sobre la misma figura, decimos que *O es el centro de simetría de la figura.*

Análogamente, cuando los simétricos de todos los puntos de F respecto a un plano P se hallan sobre la misma figura, decimos que *P es un plano de simetría de la figura.*

Como ejercicio, justifique el estudiante las propiedades siguientes:

a) *Si una figura tiene dos planos de simetría perpendiculares entre sí, la intersección de esos planos es eje de simetría de la figura.*

b) *Si una figura tiene tres planos de simetría perpendiculares entre sí dos a dos, el punto de intersección de esos tres planos es centro de simetría de la figura.*

Como caso particular de esta última propiedad, tenemos:

Si una figura plana tiene dos ejes de simetría perpendiculares entre sí, su punto de intersección es centro de simetría de la figura.

Así, por ej., en el cuadrado, la intersección de sus dos diagonales es centro de simetría.

66. Nota. — En el (N.° 58) vimos que dos figuras simétricas respecto a un eje, pueden coincidir mediante un giro, y por tanto, son iguales. Pero fácilmente puede constatarse que dos figuras simétricas respecto de un centro, o de un plano, no pueden coincidir, a pesar de tener respectivamente iguales sus elementos: *distancias, ángulos y diedros;* en este último caso, las figuras se llaman *inversamente iguales.*

Así, por ej., nuestras dos manos, o nuestros dos pies, son figuras simétricas respecto al plano de simetría que tiene la figura humana; no obstante, no pueden cambiarse de manos los guantes, ni de pies los zapatos, etc.

Figuras con plano de simetría, con centro y con eje

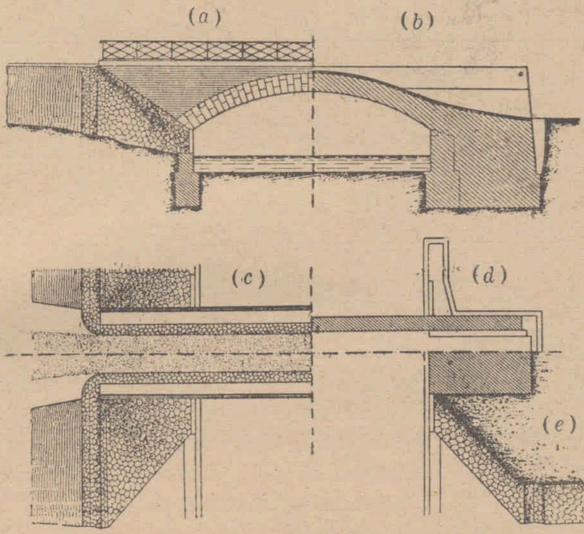
67. En la práctica se presentan infinidad de *figuras con plano de simetría;* así, por ej,. las fachadas de muchos edificios, puertas, muebles, vehículos, etc., etc. (fig. 50), hasta

(fig. 50)

en la naturaleza se presentan figuras con planos de simetría, como ser la figura humana, la de animales, etc.

Muchas construcciones, como ser, puentes, alcantarillas, piezas de máquina, etc., nos presentan dos planos de simetría perpendicular entre sí, cuya intersección es un eje de simetría (N.° 66). En estos casos, para representarlos en un dibujo técnico, suele limitarse su representación, ya sea a una mitad, o mejor aun, a la cuarta parte comprendida en uno de los diedros rectos formados por los planos de simetría.

Así, por ej., en la (fig. 51), que representa un puente sobre un canal, la parte indicada con la letra (*a*) representa la mitad del frente; (*b*) es la mitad del corte longitudinal; (*c*) es la mitad vista a

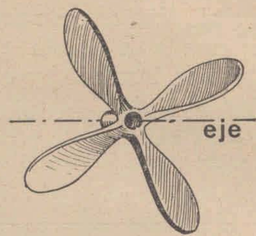


(fig. 51)

vuelo de pájaro; (*d*) es la cuarta parte cortando por un plano horizontal antes de colocar las veredas; y (*e*) es la cuarta parte cortando por un plano horizontal, a la altura del arranque del arco que forma la bóveda del puente.

Vemos, pues, que con la representación anteriormente indicada, se logra presentar en un solo dibujo, lo que hubiera requerido dos, tres, o más dibujos.

68. *Figuras con eje de simetría,* también se presentan muy frecuentemente en la práctica; así, por ej., tienen eje de simetría los jarrones, lámparas, hélices de barcos cuando tienen un número par de paletas, etc.



69. *Figuras con centro de simetría* no se presentan tan frecuentemente en la práctica; lo son, por ej., una bocha, un dado (fig. 1), una caja de conservas, etc.

Las figuras del espacio con un centro de simetría, que suelen presentarse en la práctica, tienen, también, uno o más planos de simetría.

Al estudiar las figuras geométricas en los capítulos que siguen, veremos otros ejemplos de figuras con planos, ejes o centro de simetría.

La simetría desempeña un papel importante en el estudio de la materia cristalizada. Las formas primitivas de los cristales poseen centros, ejes y planos de simetría, cuya determinación es muy útil para la especificación de los cuerpos que los presentan, y de sus propiedades físicas.

* * *

CAPITULO III

ESFERA

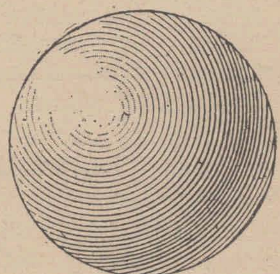
Centro — Radio — Diámetro

70. Definiciones. — **El lugar geométrico de los puntos del espacio equidistantes de un punto fijo O, se llama SUPERFICIE ESFERICA.**

El punto O se llama **centro** de la superficie esférica.

Los puntos que distan menos que el radio se dicen *interiores*, y los que distan más, *exteriores* a la esfera.

El conjunto de los puntos interiores y los de la superficie esférica, forman un cuerpo llamado **esfera** (fig. 52).



(fig. 52)

Un radio de la esfera es el segmento de recta que tiene su origen en el centro de la esfera y su extremo en un punto cualquiera de la superficie esférica.

Por definición de superficie esférica, resulta:

Todos los radios de una misma esfera son iguales.

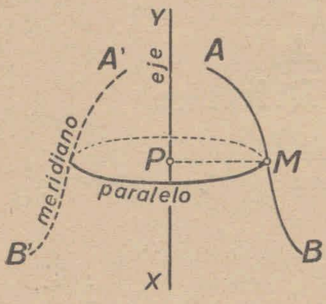
Una cuerda de la esfera es el segmento de recta que tiene sus extremos sobre la superficie esférica.

Un diámetro es una cuerda que pasa por el centro. La *longitud de un diámetro* es igual al duplo de un radio.

Es evidente que, *todos los diámetros de una esfera son iguales entre sí* (porque son *duplos* del radio), *y mayores que cualquier cuerda.*

Idea de superficie de revolución

71. Definiciones. — Ya hemos visto en otras oportunidades (G. P. N.° 8), que el movimiento de una línea en el espacio engendra una superficie.



(fig. 53)

Sea ahora una recta XY, y una línea plana cualquiera AB, situada en un plano que contenga XY (fig. 53).

Haciendo girar el plano alrededor de XY hasta que vuelva a la posición inicial, la línea AB describe una superficie, que se llama *superficie de revolución* alrededor del eje XY.

Daremos, pues, la siguiente

DEFINICIÓN. — **Se llama SUPERFICIE DE REVOLUCION la engendrada por una línea plana al girar alrededor de una recta situada en su plano.**

La línea AB que engendra la superficie, se llama **generatriz, meridiano,** o **línea meridiana** de la superficie, y la recta fija XY es el **eje.**

Las circunferencias descritas por los diversos puntos del meridiano, se llaman **paralelos.**

Un plano meridiano de la superficie es el que contiene el eje; en consecuencia, intercepta a la superficie por un meridiano.

Análogamente, se llama cuerpo de revolución el engendrado por la rotación de una figura superficial.

Ejemplos de superficies y cuerpos de revolución se presentan frecuentemente en la vida práctica: la generalidad de las botellas, patas redondas de las mesas, columnas, trompos, etc. La construcción de muchos de estos cuerpos suele hacerse empleando el *torno* de carpintero o de alfarero.

El plano puede considerarse como una superficie de revolución: la generatriz sería una semirrecta perpendicular al eje.

72. Propiedades. — Como consecuencia inmediata de la definición de superficie de revolución, tenemos:

a) *En una rotación alrededor de su eje, una superficie de revolución se desliza sobre sí misma.*

b) *Todos los meridianos de una superficie de revolución son iguales,* puesto que pueden coincidir mediante una rotación alrededor del eje.

c) *Un punto cualquiera del eje equidista de los puntos de un mismo paralelo,* por ser esa distancia diferentes posiciones de un mismo segmento de recta.

d) *Una superficie de revolución tiene infinitos planos de simetría que pasan por el eje de la superficie; este último es también eje de simetría de la superficie* (N.° 65, a).

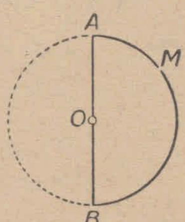
73. Teorema. — **Si se corta una superficie de revolución por un plano perpendicular al eje, se obtiene una circunferencia con el centro sobre el eje.**

En efecto, si desde un punto M de AB (fig. 53) se traza MP perpendicular al eje, puesto que durante la rotación MP se conserva perpendicular al eje XY, las infinitas posiciones de MP se hallarán en un mismo plano perpendicular a XY (según vimos en el N.° 31); por consiguiente, el punto M describirá una circunferencia de centro P.

Esta circunferencia se llama **paralelo** de la superficie.

La esfera como superficie de revolución

74. Dada la semicircunferencia AMB (fig. 54) de centro O, si la hacemos girar alrededor de su diámetro AB, engendrará una superficie de revolución, cuyos puntos distarán todos del punto fijo O una magnitud igual al segmento OM; en consecuencia, dicha superficie de revolución es también una superficie esférica (N.° 70). Podemos dar, pues, para la superficie esférica, esta otra



(fig. 54)

DEFINICIÓN. — **La superficie de revolución que tiene por generatriz una semicircunferencia** AMB **de centro** O **y por eje el diámetro** AB **que la limita, se llama SUPERFICIE ESFERICA de centro** O **y radio** OA.

75. Es evidente que la superficie esférica puede considerarse como superficie de revolución de infinitas maneras, puesto que cualquiera de sus diámetros puede considerarse como eje de revolución.

En consecuencia, para aplicar a la superficie esférica, con precisión, las denominaciones de meridiano y paralelo, será menester indicar, previamente, cuál de los diámetros se considera como eje de revolución.

Intersección de una esfera con un plano

76. Secciones planas. — Como cualquier diámetro de la superficie esférica puede tomarse como eje de rotación, y como vimos en el (N.° 73) que las secciones de una superficie de revolución por planos perpendiculares al eje son circunferencias, tendremos:

Todas las secciones planas de la superficie esférica son circunferencias; vale decir, que *la intersección de una esfera con un plano es un círculo.*

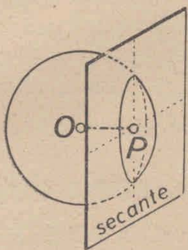
El plano que pasa por el centro de una esfera se llama *plano diametral*, el que divide a la esfera en dos *hemisferios*.

77. Posiciones de un plano respecto a una esfera. — Para que un plano intercepte una esfera (fig. 55), es necesario que el segmento de *perpendicular* OP trazado desde el centro de la esfera al plano, sea menor que el radio de la esfera.

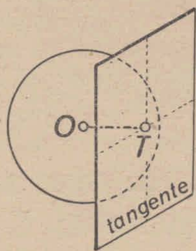
El segmento OP se llama *distancia* de O al plano P; este último se llama **plano secante**.

Si aquella distancia es ahora OT (fig. 56) igual al radio de la esfera, el plano tiene un solo punto común con la esfera, y se llama **plano tangente.** (Volveremos sobre ello en el N.° 83).

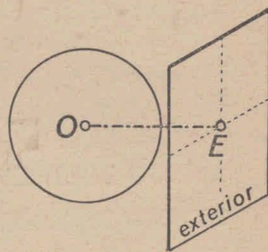
Si la distancia OE (fig. 57), es mayor que el radio de la esfera, el plano no tiene ningún punto común con la esfera, y se llama **plano exterior**.



(fig. 55)



(fig. 56)



(fig. 57)

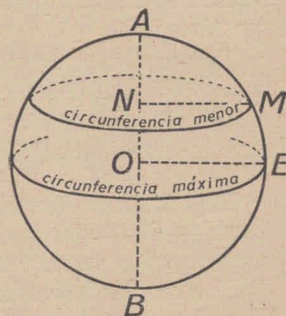
Círculos máximos y menores

78. **Definiciones y propiedades.** — Las secciones de la esfera por planos que pasan por el centro de la misma, se llaman **círculos máximos**, y en la superficie esférica, **circunferencias máximas**.

Como todos estos círculos tienen el mismo radio (el de la esfera), *son iguales entre sí.*

La denominación de *círculo máximo* se justifica, puesto que cualquier otra sección que no contenga el centro de la esfera, resulta un círculo de radio menor que el primero; de allí que este último se llame *círculo menor.*

Así, en la (fig. 58), siendo O el centro de la esfera, la distancia MN del punto M al diámetro AB es menor que el radio OE de la esfera (por ser MN una semicuerda que no pasa por el centro); por consiguiente, el círculo de radio MN será menor que el de radio OE.



(fig. 58)

79. Se necesitan *tres puntos* de la superficie esférica para determinar un círculo menor (N.° 10 y G. P. N.° 91), mientras que *dos puntos* bastan para determinar un círculo máximo, puesto que debe pasar por el centro dado de la esfera. En este último caso, los dos puntos no tienen que encontrarse alineados con el centro de la esfera, porque entonces se encontrarían sobre un mismo diámetro, y por él pasarían infinitos círculos máximos (N.° 4).

Polos correspondientes a un círculo de la esfera; aplicación a la Tierra como esfera

80. **Definiciones.** — Los extremos A y B del diámetro perpendicular al plano de un círculo cualquiera de una esfera, se llaman **polos** de aquel círculo (fig. 58).

Si consideramos la esfera como cuerpo de revolución alrededor del diámetro AB, en virtud del (N.° 72, c), tenemos:

Cada polo de un círculo equidista de todos los puntos de la circunferencia de dicho círculo.

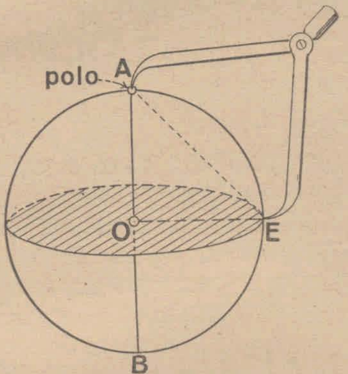
Esta distancia se llama **distancia polar** del círculo dado. Como un círculo tiene dos polos, para eliminar la ambigüedad, nos referiremos únicamente al de menor distancia polar, salvo que se indique lo contrario; cuando el círculo es máximo, ambos polos equidistan de la circunferencia respectiva.

Inversamente, el lugar geométrico de los puntos de una superficie esférica situados a una distancia constante (menor que el diámetro) de un punto de aquella superficie, es una circunferencia que tiene dicho punto como polo.

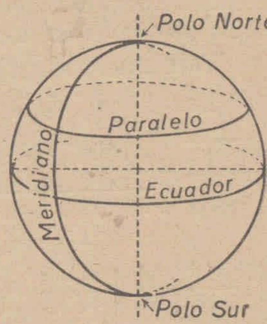
81. **Trazado de circunferencias sobre la superficie esférica.** — La equidistancia anteriormente indicada (N.° 80), nos permite trazar una circunferencia sobre una esfera sólida; para ello se emplea el *compás* de piernas curvas (fig. 59), llamado *compás esférico.*

Colocando una de sus puntas sobre un punto A de la superficie esférica y desplazando la otra sobre la superficie, se traza una circunferencia de polo A.

Desde un mismo polo A de una esfera de centro O, se pueden trazar infinidad de circunferencias, siendo todas ellas *paralelos* de la esfera considerada como cuerpo de revolución alrededor del eje OA.



(fig. 59)



(fig. 60)

Para trazar en la superficie esférica arcos de circunferencia máxima, es necesario que la separación AE entre las puntas del compás, sea igual a la cuerda de un cuadrante de circunferencia máxima.

82. Aplicaciones a la Tierra. — La Tierra es aproximadamente esférica, y gira alrededor de un eje que pasa por los polos, llamado *eje del mundo* (fig. 60); es, pues, una superficie de revolución alrededor de dicho eje. Los meridianos y paralelos de esta superficie se llaman *meridianos y paralelos terrestres,* respectivamente.

Los meridianos terrestres y el Ecuador son circunferencias máximas; los paralelos terrestres son circunferencias menores. Los polos del Ecuador se llaman *polos terrestres* (Polo Norte y Polo Sur).

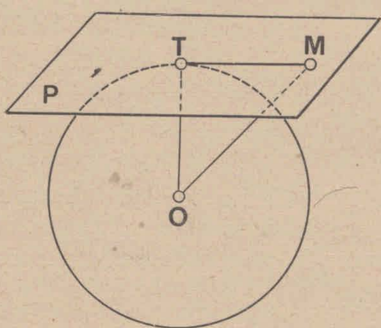
Las denominaciones de meridiano, paralelo, ... etc., empleadas en Geografía, provienen de su empleo en Astronomía y Geodesia.

Plano tangente a una esfera; propiedad fundamental

83. En el (N.° 77) indicamos que un plano es tangente a una esfera de centro O (fig. 56), cuando sólo tiene un punto común T con la superficie esférica; el punto T se llama **punto de contacto,** o **de tangencia.**

Demostraremos ahora la siguiente

PROPIEDAD. — **El plano P perpendicular en el extremo T de un radio es tangente a la esfera** (fig. 61).



(fig. 61)

En efecto, tomando un punto cualquiera M del plano P, excepto el punto T, y trazando los segmentos MT y MO, se forma un triángulo rectángulo MTO (N.° 32); como la hipotenusa OM es siempre mayor que el cateto OT (C. P. N.° 125, 4.°), el punto M es *exterior* a la esfera (N.° 70), y, por consiguiente, no puede ser común. Siendo T el único punto común entre la superficie esférica y el plano P, éste es tangente a la esfera.

84. Como **corolario** de la propiedad anterior, tenemos: *Por un punto de la superficie esférica, siempre se puede trazar un plano tangente a dicha superficie, y sólo uno* (N.° 35).

NOTA. — El plano tangente a la superficie esférica en un punto T contiene las tangentes en ese punto a todas las curvas que se pueden trazar por dicho punto sobre la superficie esférica.

Simetrías en la esfera: centro, ejes y planos de simetría

85. Como los extremos de un diámetro equidistan del centro de la esfera (N.° 70), tenemos:

El centro de una esfera es CENTRO DE SIMETRIA de la superficie esférica que la limita.

86. *La figura simétrica de una esfera es otra esfera igual a la primera,* puesto que puede llevarse el centro de simetría a coincidir con el centro de la esfera (N.° 60), y éste es centro de simetría (N.° 85).

87. Siendo la esfera un cuerpo de revolución alrededor de uno cualquiera de sus diámetros (N.° 75), y siendo el eje de una superficie de revolución, eje de simetría de la misma (N.° 72, e), tenemos:

Cualquier diámetro de la esfera es EJE DE SIMETRIA de la superficie esférica; cualquier plano que pasa por el centro de la esfera (plano diametral), es PLANO DE SIMETRIA de la superficie esférica.

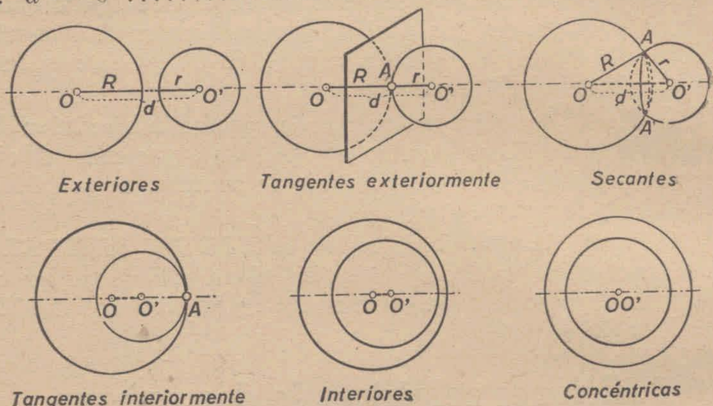
Posiciones relativas de dos esferas

88. Sean O y O' los centros de dos circunferencias; si las hacemos girar alrededor de la recta de los centros $O\,O'$ engendrarán dos esferas, cuyas posiciones relativas estudiaremos. Para ello se estudiarán las posiciones relativas de las circunferencias meridianas, que son dos circunferencias máximas de las esferas; se presentan, pues, *seis casos,* análogos a los estudiados en el primer curso para las posiciones relativas de dos circunferencias (G. P. N.° 57).

En la (fig. 62) presentamos las posiciones relativas de dos esferas, en los seis casos posibles, cuyas denominaciones respectivas se indican en la figura.

Conociendo la distancia entre los centros de dos esferas, que representaremos con d, y comparándola con la suma o diferencia de los radios R y r, podemos prever cuál de las posiciones relativas le corresponderá; las indicamos a continuación:

RELACIONES ENTRE d, R y r	POSICIONES Relat. de 2 ESFERAS
1.ª $d > R + r$	Exteriores.
2.ª $d = R + r$	Tangentes exteriormente.
3.ª $d < R + r$ y $d > R - r$ ..	Secantes.
4.ª $d = R - r$	Tangentes interiormente.
5.ª $d < R - r$	Interiores.
6.ª $d = 0$	Concéntricas.



Exteriores — Tangentes exteriormente — Secantes

Tangentes interiormente — Interiores — Concéntricas

(fig. 62)

La 1.ª posición no requiere explicación alguna.

Para la 2.ª (esferas tangentes exteriormente), observemos que los meridianos son tangentes en un punto A del eje; por tanto, las dos esferas tienen el plano tangente en A común, y están situadas a uno y otro lado de ese plano tangente. El punto A común a las dos esferas se llama *punto de contacto*.

Para la 3.ª (esferas secantes), observemos que los meridianos se cortan en dos puntos A y A' simétricos respecto al eje, y que durante la rotación el punto A describe una circunferencia común a las dos esferas, circunferencia de diámetro AA' y cuyo plano es perpendicular al eje.

La 4.ª posición es análoga a la 2.ª; la 5.ª y 6.ª tampoco requieren explicación alguna.

CAPITULO IV

CILINDRO DE REVOLUCION
Eje — Radio — Generatrices

89. **Definiciones.** — Sea el rectángulo $O\,A\,A'\,O'$ (fig. 63), que hacemos girar alrededor del lado $O\,O'$; el lado opuesto $A\,A'$ engendra una superficie de revolución de eje $O\,O'$ (N.° 71) que se llama *superficie cilíndrica;* los lados $O\,A$ y $O'\,A'$ engendran dos círculos de centros O y O' cuyos planos son perpendiculares al eje.

Para el cuerpo de revolución engendrado por el rectángulo $O\,A\,A'\,O'$ daremos la siguiente

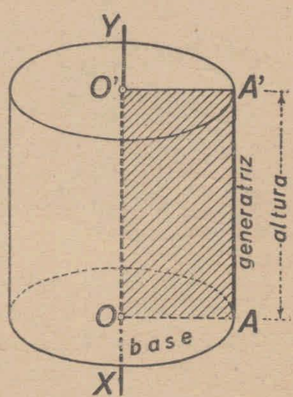
DEFINICIÓN. — **Se llama CILINDRO DE REVOLUCION al sólido engendrado por un rectángulo al girar alrededor de uno de sus lados.**

La recta $X\,Y$ que contiene el lado fijo $O\,O'$ del rectángulo, se llama **eje** del cilindro.

Los círculos de centros O y O' se llaman **bases,** y su radio $O\,A = O'\,A'$ se llama **radio** del cilindro.

La superficie cilíndrica que limita lateralmente el cilindro, se llama **superficie lateral;** una cualquiera de las generatrices $A\,A'$ de esta superficie, se llama **generatriz del cilindro.**

La distancia $O\,O' = AA'$ entre las dos bases, se llama **altura** del cilindro.



(fig. 63)

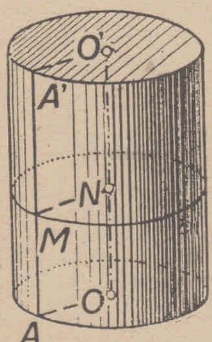
Cualquier sección del cilindro paralela a las bases, es decir, perpendicular al eje, se llama **sección recta** o **sección normal** del cilindro, y es un círculo igual al de las bases (N.° 73).

NOTA. — Si la generatriz del cilindro es una recta en lugar de un segmento de recta *A A'*, la faja comprendida entre ambas paralelas describe una región del espacio que se llama *cilindro indefinido de revolución.*

Si cortamos el cilindro indefinido por dos planos perpendicular al eje, obtenemos el cilindro de revolución indicado antes (fig. 63).

Muchos objetos que se presentan en la vida práctica, son cilíndricos. Así, por ej., un lápiz sin cortar, es un cilindro cuya altura es grande con respecto al radio de la base; una moneda es otro cilindro cuya altura es pequeña con respecto al radio.

90. Otro modo de engendrar el cilindro. — En la rotación del rectángulo *O A A' O'* alrededor de *O O'*, cualquier punto *M* de la generatriz *A A'* (fig. 64), engendra una circunferencia cuyo plano es perpendicular al eje y cuyo centro *N* está sobre el eje; esta circunferencia es, pues, un *paralelo* de la superficie lateral del cilindro (N.° 71).



(fig. 64)

Todos los paralelos del cilindro son circunferencias iguales a las de las bases, por tener el radio igual a la distancia entre las paralelas *O O'* y *A A'*.

Un paralelo cualquiera de la superficie cilíndrica puede coincidir, por tanto, con cualquier otro paralelo.

Podemos decir, pues, que

Un cilindro de revolución puede considerarse engendrado por el movimiento de traslación de un círculo de radio constante, cuyo centro se desplaza sobre una recta, llamada eje del cilindro, siendo el plano del círculo perpendicular al eje.

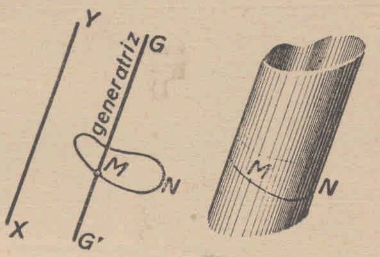
El movimiento de traslación del círculo de centro *N* es análogo al de un pistón de un motor dentro de su cilindro. El pistón es un cilindro macizo, que se desliza dentro de un cilindro hueco.

91. Al cilindro de revolución se le llama, también, **cilindro circular recto**. La denominación de *circular* por ser la base un círculo; la de *recto*, por ser las generatrices perpendiculares a los planos de las bases.

92. **Generalización.** — Sea una *curva plana cerrada* MN (fig. 65) y una recta XY *no paralela* al plano de la curva. Consideremos una recta indefinida GG' que se desplaza *manteniéndose paralela a* XY *y apoyándose constantemente* sobre la curva MN.

La recta GG' engendra una superficie ilimitada que se llama **superficie cilíndrica indefinida.**

La recta móvil GG', en cualquiera de sus posiciones, se llama una *generatriz* de la superficie. La curva MN es la **directriz** de la superficie cilíndrica.



(fig. 65)

Es evidente que: *Una superficie cilíndrica puede deslizarse sobre sí misma*, puesto que basta tomar como guías, dos cualesquiera de sus generatrices.

Las secciones de una superficie cilíndrica por dos planos paralelos son iguales, puesto que mediante una traslación pueden superponerse.

Si cortamos una superficie cilíndrica por dos planos paralelos (que no lo sean a las generatrices), **el sólido limitado por las dos secciones y por la parte de superficie cilíndrica comprendida entre los planos de las secciones, se llama CILINDRO.**

Las dos secciones indicadas se llaman *bases*, y la distancia entre ellas, *altura* del cilindro.

Un cilindro es **recto** *cuando los planos de las bases son perpendiculares a las generatrices;* de lo contrario es **oblicuo.**

Si la base de un cilindro recto es un *círculo*, obtenemos lo que llamamos **cilindro circular recto** (N.° 91).

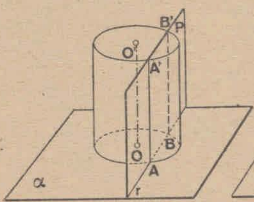
Intersección con un plano paralelo al eje

93. **Plano secante.** — Sea P un plano *paralelo* al eje OO' de un cilindro, y r la recta de intersección de P con el plano α de la base del cilindro; pueden presentarse tres casos:

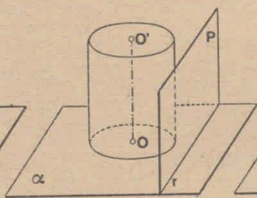
a) La recta r es *secante* en los puntos A y B a la circunferencia de la base (fig. 66).

Las generatrices AA' y BB' del cilindro, estarán entonces contenidas en el plano P (N.° 22, Cor. 1.°). En este caso decimos que el plano P es **secante** al cilindro **por dos de sus generatrices.**

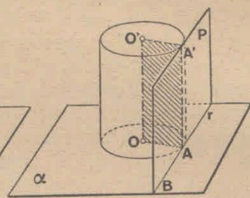
b) La recta r es *exterior* a la circunferencia de la base (fig. 67). En este caso, el plano P no tiene **ningún punto común** con el cilindro, y se llama plano *exterior*.



(fig. 66)



(fig. 67)



(fig. 68)

c) La recta r es *tangente* en el punto A a la circunferencia de la base (fig. 68). La generatriz AA' del cilindro estará entonces contenida en el plano P (N.° 22, Cor. 1.°), y es única, por ser A el único punto común de la recta r y la circunferencia de la base.

En este caso decimos que el plano P es **tangente** al cilindro **por una de sus generatrices.** Esta última se llama *generatriz de contacto.*

Así, apoyando un cilindro material sobre una mesa, por ejemplo un rodillo de madera, el plano de la mesa es tangente al cilindro por la generatriz que está en contacto con la mesa.

Plano tangente. — Propiedad fundamental

94. En el párrafo anterior indicamos cuándo un plano es tangente a un cilindro (N.° 94, *c*). Como *propiedad fundamental* del plano tangente a un cilindro, daremos el siguiente

TEOREMA. — **El plano tangente a un cilindro es PERPENDICULAR al plano meridiano que contiene la generatriz de contacto.**

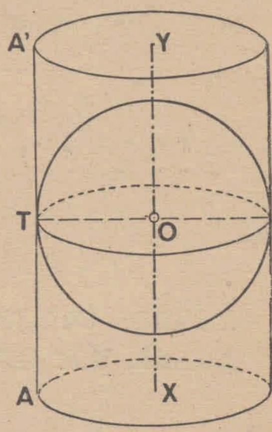
Sea P el plano tangente al cilindro (fig. 68), y $O A A'$ el plano meridiano que contiene la generatriz de contacto $A A'$. Si $A B$ es la recta de intersección de P con el plano α de la base del cilindro, tendremos que demostrar que el diedro $B A A' O$ es recto.

En efecto, siendo $B A$ perpendicular en el extremo A del radio $O A$ de la base (G. P. N.° 54), tenemos que el ángulo $B A O$ es recto. Pero este último ángulo es el rectilíneo del diedro $B A A' O$ (N.° 32), por tanto, dicho diedro es recto.

Esfera inscripta

95. Definiciones. — Sea O el centro de una circunferencia (fig. 69) de radio $O T$, y $A A'$ la perpendicular en el extremo de un radio, es decir, la tangente a la circunferencia.

Si hacemos girar aquella figura alrededor del eje $X Y$ que pasa por O y es paralelo a la recta $A A'$, la circunferencia engendrará una superficie esférica (N.° 74) y la recta engendrará una superficie cilíndrica (N.° 89). Los únicos puntos comunes a ambas superficies son los engendrados por la rotación del punto T que es el único punto común de la recta $A A'$ con la circunferencia generatriz de la superficie esférica; el lugar de estos puntos comunes es una *circunferencia máxima* de la esfera, porque tiene por radio $O T$ el de la esfera, y es también una *sección recta* del cilindro, porque su plano es perpendicular al eje.



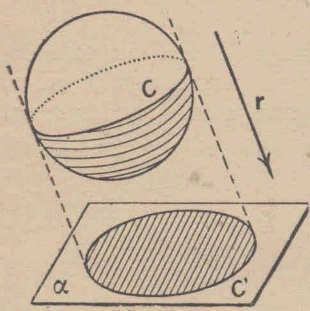
(fig. 69)

DEFINICIÓN. — Una esfera se llama **INSCRIPTA EN UNA SUPERFICIE CILINDRICA**, o una superficie cilíndrica **CIRCUNSCRIPTA A UNA ESFERA**, cuando sólo tienen común una circunferencia máxima de la esfera.

96. **Propiedad.** — *La esfera y la superficie cilíndrica tienen el mismo plano tangente en todos los puntos de la circunferencia de contacto.*

En efecto, en un punto cualquiera T de la circunferencia de contacto (fig. 69), el plano tangente a la esfera y el plano tangente al cilindro son ambos perpendiculares al radio $O\,T$ en su extremo T (N.^{os} 83 y 94); por consiguiente, coinciden (N.° 35).

EJEMPLO. — Cuando una esfera es iluminada por un haz de rayos paralelos a una dirección dada r (fig. 70), inciden en la superficie esférica un conjunto de rayos luminosos que forman un cilindro circunscripto a la esfera, siendo el plano de la circunferencia C de contacto perpendicular a r. Esta circunferencia se llama *contorno de la sobra propia*, y divide a la superficie esférica en dos hemisferios: uno iluminado y otro en sombra.



(fig. 70)

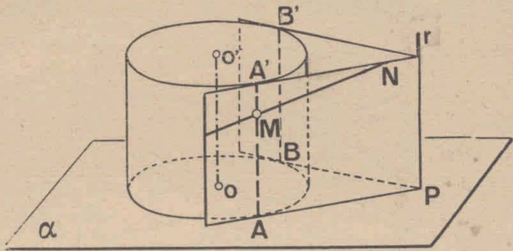
El cilindro circunscripto se llama *cilindro de sombra;* la sombra que origina la esfera sobre un plano α se llama *sombra arrojada*, la que está limitada por una curva C', intersección del cilindro de sombra con el plano. Más adelante veremos que C' es una curva especial llamada *elipse* (N.° 104).

Planos tangentes a un cilindro, que pasan por una recta paralela al eje

97. Sea el cilindro de revolución de eje $O\,O'$ (fig. 71), α el plano de una sección recta, y r una recta paralela al eje del cilindro. La recta r es, pues, perpendicular al plano α (N.° 41).

Si desde el pie P de esta perpendicular en el plano α, trazamos las tangentes PA y PB a la base del cilindro, determinarán dos planos rA y rB, que son *tangentes* al cilindro y que pasan por la recta r.

En efecto, los planos rA y rB son perpendiculares al α (N.° 52), y, por consiguiente, contienen las generatrices AA' y BB' del cilindro (N.° 53, Cor. 1.°); los planos rA y rB



(fig. 71)

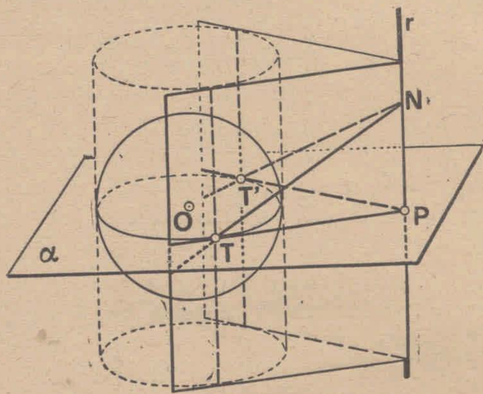
que sólo tienen común con el cilindro las generatrices AA' y BB' respectivamente, son, pues, tangentes al cilindro (N.° 94).

98. Si la recta dada r es *exterior* al cilindro, vemos, pues, que existen *dos* planos tangentes; si la recta r estuviera *sobre* el cilindro, los dos planos se reducirían a *uno* solo, es decir, al plano tangente por una de las generatrices; si la recta r fuera *interior* del cilindro, *ningún* plano se podría trazar por ella tangente al cilindro.

99. Recta tangente al cilindro. — Si en el plano rA tangente a un cilindro, trazamos una recta MN que corte a la generatriz de contacto AA' en un punto M (fig. 71), éste será el único punto común de la recta con el cilindro; dicha recta se llama *tangente al cilindro*, siendo M el punto de tangencia.

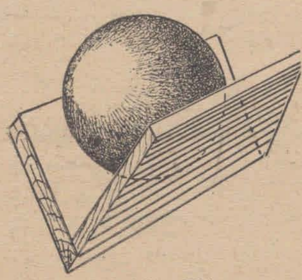
Planos tangentes a una esfera, que pasan por una recta determinada

100. Para trazar los planos tangentes a una esfera de centro O, que pasan por una recta determinada r (fig. 72), se empieza por circunscribir a la esfera un cilindro de generatrices paralelas a la recta r; luego se trazan los planos tangentes a ese cilindro que pasan por dicha recta (N.° 97),



(fig. 72)

cada uno de los cuales tendrá común con la esfera un solo punto: T y T' respectivamente. Dichos planos rT y rT' son los planos tangentes a la esfera, siendo T y T' los puntos de *tangencia* o de *contacto*.



(fig. 73)

Sólo existirá solución cuando la recta dada no corta a la esfera.

Así, por ejemplo, si apoyamos una bocha entre dos tablas, como indica la (fig. 73), la bocha se apoyará sobre cada tabla en un solo punto y será, pues, tangente a los planos de dichas tablas.

101. Recta tangente a la esfera. — Si en el plano rT tangente a una esfera, trazamos una recta TN que pase por el punto de tangencia T (fig. 72), éste será el único punto común de la recta con la esfera; dicha recta se llama *tangente a la esfera*, siendo T el punto de tangencia.

102. Si desde un punto N exterior trazamos dos tangentes NT y NT' a la esfera, *los segmentos de tangentes son iguales*, es decir, que $NT = NT'$.

En efecto, el plano determinado por el punto N y los dos puntos de tangencia T y T', corta a la esfera por una circunferencia, cuyo único punto común con la recta NT es el punto T, y con la recta NT' es el punto T'; es decir, que dichas rectas son tangentes a aquella circunferencia, y, en consecuencia, según una conocida propiedad de las tangentes a una circunferencia trazada desde un punto (G. P. N.° 170), dichos segmentos de tangentes son iguales.

Propiedades de simetría del cilindro
Eje, centro y planos de simetría

103. Un *cilindro indefinido de revolución* admite como **planos de simetría**, todos los planos que pasan por el eje, y todos los planos perpendiculares al eje; admite como **ejes de simetría**, el eje del cilindro y todas las perpendiculares a este eje en todos sus puntos; admite como **centro de simetría** todos los puntos del eje del cilindro.

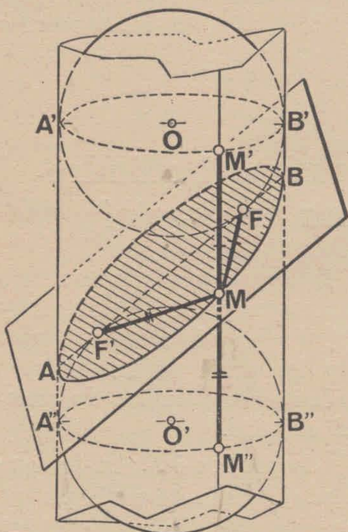
Un *cilindro de revolución* (limitado por los dos círculos que forman las bases perpendiculares al eje), admite como **planos de simetría** todos los planos que pasan por el eje, y el plano perpendicular a dicho eje en su punto medio; admite como **eje de simetría** el eje del cilindro y todas las perpendiculares al mismo trazadas en su punto medio; admite como **centro de simetría** el punto medio del eje.

Intersección de un cilindro con un plano cualquiera. — Forma y nombre de las curvas que resultan

104. Ya vimos que si cortamos un cilindro de revolución por un plano *perpendicular* al eje, obtenemos un *círculo* (N.° 89); si lo cortamos por un plano *paralelo* al eje, obtenemos *dos rectas paralelas* (N.° 93).

Estudiaremos ahora la intersección de un cilindro con un plano *cualquiera*.

Sea $O\,O'$ el eje de un cilindro (fig. 74), $A\,M\,B$ un plano secante cualquiera, y $A\,A'\,B\,B'$ un plano meridiano del cilindro perpendicular a dicho plano secante. Consideremos las esferas O y O' inscriptas en el cilindro y tangentes al plano secante en los puntos F y F'.



(fig. 74)

Tomemos un punto M cualquiera de la línea de intersección del cilindro con el plano secante; tracemos las rectas $M\,F$, $M\,F'$ y la generatriz que pasa por M, que cortará en M' y en M'' a las circunferencias de contacto del cilindro con las esferas.

Siendo $M\,F$ y $M\,M'$ tangentes a la esfera O desde el punto M, tendremos (N.° 102), $M\,F = M\,M'$; análogamente, respecto de la esfera O', $M\,F' = M\,M''$. Sumando ordenadamente estas dos igualdades, resulta:

$$M\,F + M\,F' = M\,M' + M\,M'' =$$

$$= M'\,M'' = A'\,A'' = B'\,B'' = const.$$

Vemos, pues, que para cualquiera que sea el punto M de la línea de intersección, tenemos:

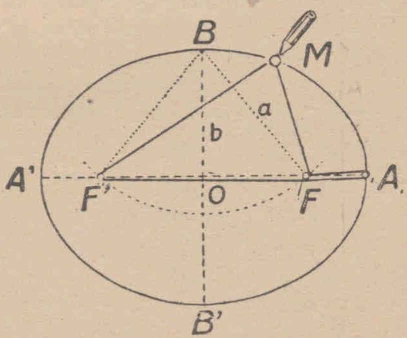
$$MF + MF' = const.$$

Pero en el curso de Geometría plana vimos (G. P. N.º 52, Ej. III), que *el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante, es una curva cerrada, llamada elipse.* En consecuencia, tenemos:

La curva de intersección de un cilindro de revolución con un plano cualquiera, es una ELIPSE.

Los focos son, pues, los puntos F y F'.

105. Forma de la elipse. — Recuérdese del primer curso de Geometría que, la propiedad anteriormente indicada de los puntos de la elipse, se utiliza para su trazado (método del jardinero).



(fig 75)

Para ello se toma un cordel y se fijan sus extremos en los **focos** F y F' de la elipse (fig. 75); luego se desliza la punta M de un lápiz sobre el cordel en tensión, obteniendo así el dibujo de la elipse por *trazo continuo.*

Es natural que variando la longitud del cordel, o la distancia entre los focos, o ambas cosas a la vez, se obtienen elipses diferentes.

106. Generalmente disponemos como *datos* para el trazado de una elipse, de las longitudes de las cuerdas *mayor* y *menor* que se pueden trazar en ella, que son AA' y BB'; estas cuerdas se llaman **ejes de la elipse** ($AA' = 2a$ es el eje mayor, y $BB' = 2b$ el eje menor), siendo rectas *perpendiculares entre sí en su punto medio.* Se llaman ejes, porque son *ejes de simetría* de la curva. El punto O de intersección de los ejes se llama **centro** de la elipse, por ser el *centro de simetría* de la curva.

Para la *determinación de los focos* F y F' cuando se conocen los ejes $A A'$ y $B B'$ de la elipse (fig. 75), se hace centro en uno de los extremos B o B' del semieje menor, y con radio igual al semieje mayor ($B F = O A$), se corta a este último eje en los puntos F y F' que son los focos de la elipse.

El procedimiento anteriormente empleado para el trazado evidencia que *la elipse es una curva cerrada.*

* * *

CAPITULO V

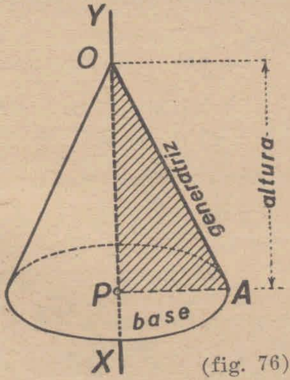
CONO DE REVOLUCION

Eje. — Vértice. — Generatrices

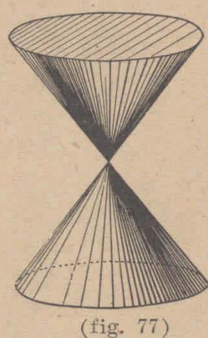
107. Definiciones. — Sea el triángulo OPA (fig. 76) rectángulo en P, que hacemos girar alrededor del cateto OP; la hipotenusa OA engendra una superficie de revolución de eje OP (N.° 71), que se llama *superficie cónica;* el otro cateto PA engendra un círculo de centro P cuyo plano es perpendicular al eje.

Para el cuerpo de revolución engendrado por el triángulo OPA daremos la siguiente

DEFINICIÓN. — **Se llama CONO DE REVOLUCION el sólido engendrado por un triángulo rectángulo al girar alrededor de uno de sus catetos.**



(fig. 76)



(fig. 77)

La recta XY que contiene el cateto fijo OP del triángulo, se llama **eje**, y el punto O se llama **vértice** del cono.

El círculo de centro P se llama **base**, y su radio PA se llama **radio** del cono.

La superficie cónica que limita lateralmente al cono, se llama **superficie lateral**; una cualquiera de las generatrices OA de esta superficie, se llama **generatriz, lado** o **apotema** del cono.

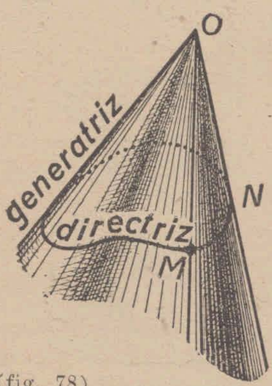
El segmento OP de perpendicular a la base trazado por el vértice, se llama **altura** del cono.

El ángulo POA formado por el eje y una cualquiera de las generatrices, se llama **semiángulo al vértice.**

Cualquier sección del cono paralela a la base, es decir, perpendicular al eje, se llama **sección recta**, y es un círculo (N.° 73).

Nota. — Si la generatriz del cono es una semirrecta en lugar de un segmento de recta OA, el semiángulo al vértice describe una región del espacio que se llama *cono indefinido de revolución;* y si es una recta completa, el cono que origina consta de dos partes llamadas *hojas* del cono (fig. 77).

108. Generalización. — Sea una *curva plana cerrada* MN (fig. 78) y un punto O *exterior* al plano de la curva. Consideremos una semirrecta OM que tenga su origen en O y que se desplace *apoyándose constantemente* sobre la curva MN.



(fig. 78)

La semirrecta OM *engendra* una superficie indefinida que se llama **superficie cónica.**

La semirrecta móvil OM, en cualquiera de sus posiciones, se llama **generatriz** de la superficie. La curva MN es la **directriz,** y el punto O el **vértice** de la superficie cónica.

Si la generatriz, en lugar de ser una semirrecta, es una recta, la superficie cónica consta de dos partes, que se llaman *hojas* de la superficie cónica.

Si cortamos una superficie cónica por un plano que encuentre todas las generatrices, **el sólido limitado por la sección y por la parte de superficie cónica que contiene el vértice se llama CONO.**

La sección indicada se llama *base,* y el segmento de perpendicular a la base trazado desde el vértice, se llama *altura* del cono.

Un cono es **recto** *cuando tiene su vértice en la perpendicular trazada al plano de la base en el centro de la misma;* de lo contrario, es **oblicuo.**

Si la base de un cono recto es un *círculo*, obtenemos lo que llamamos **cono circular recto.** Obsérvese que un cono circular recto es, pues, un *cono de revolución.*

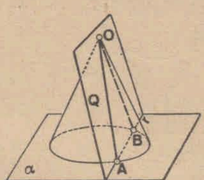
Intersección con un plano que pasa por el vértice

109. **Plano secante.** — Sea Q un plano que pasa por el vértice O de un cono, y r la recta de intersección de Q con el plano α de la base del cono; pueden presentarse tres casos:

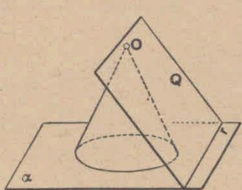
a) La recta r es *secante* en los puntos A y B a la circunferencia de la base (fig. 79). Las generatrices OA y OB del cono estarán entonces contenidas en el plano. En este caso decimos que el plano Q es **secante** al cono **por dos de sus generatrices.**

b) La recta r es *exterior* a la circunferencia de la base (fig. 80). En este caso el plano Q no tiene **ningún punto común** con el cono (excepto el vértice).

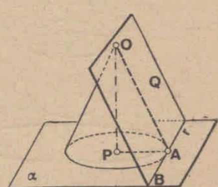
c) La recta r es *tangente* en el punto A a la circunferencia de la base (fig. 81). La generatriz OA del cono estará entonces contenida en el plano Q y es única, por ser A el



(fig. 79)



(fig. 80)



(fig. 81)

único punto común de la recta r y la circunferencia de la base.

En este caso, decimos que el plano Q es **tangente** al cono **por una de sus generatrices**; esta última se llama *generatriz de contacto.*

Plano tangente. Propiedad fundamental

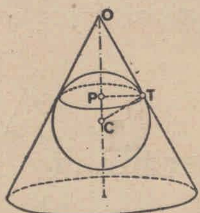
110. En el párrafo anterior indicamos cuando un plano es tangente a un cono (N.° 109, *c*). Como *propiedad fundamental* del plano tangente a un cono, daremos el siguiente

TEOREMA. — **El plano tangente a un cono es PERPENDICULAR al plano meridiano que contiene la generatriz de contacto.**

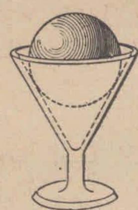
Sea Q el plano tangente al cono (fig. 81) y $O P A$ el plano meridiano que contiene la genetratriz de contacto $O A$. Si $A B$ es la recta de intersección de Q con el plano α de la base del cono, esta recta es perpendicular al plano meridiano $O P A$ (N.° 39, Nota 1.ª); en consecuencia, el plano Q que pasa por la recta $A B$, es perpendicular a dicho plano meridiano (N.° 52).

Esfera inscripta

111. Definiciones. — Sea C el centro de una circunferencia (fig. 82) de radio $C T$, y $T O$ la perpendicular en el extremo del radio, es decir, la tangente a la circunferencia.



(fig. 82)



(fig. 83)

Si hacemos girar aquella figura alrededor del eje $C O$ que no es paralelo a la recta $T O$, la circunferencia engendrará una superficie esférica (N.° 74) y la recta engendrará una superficie cónica (N.° 107). Los únicos puntos comunes a ambas superficies son los engendrados por la rotación del punto T, que es el único punto común de la recta $T O$

con la circunferencia generatriz de la superficie esférica; el lugar de estos puntos comunes es una *circunferencia menor* de la esfera, porque tiene por radio PT (menor que el CT de la esfera), y es también una *sección recta* del cono, porque su plano es perpendicular al eje.

DEFINICIÓN. — **Una esfera se llama INSCRIPTA EN UNA SUPERFICIE CONICA, o una superficie cónica CIRCUNSCRIPTA A UNA ESFERA, cuando sólo tienen común una circunferencia menor de la esfera.**

La circunferencia común a la esfera y al cono, se llama **circunferencia de contacto** o de **tangencia.**

EJEMPLO. — Si apoyamos un cuerpo esférico, como ser una bola de billar, en un vaso cónico, como lo indica la (fig. 84), tenemos la imagen de una esfera inscripta en un cono.

112. Propiedad. —*La esfera y la superficie cónica tienen el mismo plano tangente en todos los puntos de la circunferencia de contacto.*

En efecto, en un punto cualquiera T de la circunferencia de contacto (fig. 82), el plano tangente a la esfera y el plano tangente al cono son ambos perpendiculares al radio CT en su extremo T (N.os 83 y 110); por consiguiente, coinciden (N.° 35).

Planos tangentes a una esfera, que pasan por un punto determinado

113. Sea C el centro de la esfera y O el punto dado (fig. 82); si circunscribimos a la esfera el cono de vértice O, todos los planos tangentes a este cono serán también tangentes a dicha esfera (N.° 112), y pasarán por el punto O.

En este caso, decimos que *los planos tangentes a una esfera trazados por un punto O* **envuelven** *un cono de revolución de vértice O, circunscripto a la esfera.*

Propiedades de simetría del cono
Eje, centro y planos de simetría

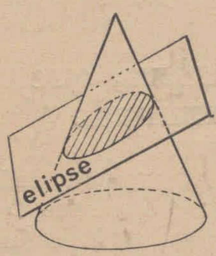
114. Un *cono indefinido de revolución* de dos hojas, admite como **planos de simetría**, todos los planos que pasan por el eje, y el plano perpendicular al eje trazado por el vértice del cono; admite como **ejes de simetría**, el eje del cono y todas las perpendiculares a este eje trazadas por el vértice; admite como **centro de simetría**, el vértice del cono.

Un *cono de revolución* (limitado por el vértice y una sección recta) admite como **planos de simetría** todos los planos que pasan por el eje; admite como **eje de simetría**, el eje del cono; no tiene centro de simetría.

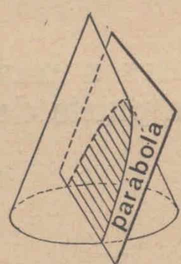
Intersección del cono con un plano cualquiera: forma y nombre de las curvas que resultan

115. Ya vimos que si cortamos un cono de revolución por un plano que *pase por el vértice*, obtenemos *dos rectas* o *una* (generatrices), o *un punto* (vértice) (N.° 109).

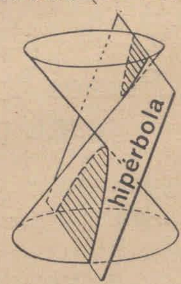
Si lo cortamos por un plano que *no pase por el vértice*, y es *perpendicular* al eje del cono, obtenemos un *círculo* (N.° 107).



(fig. 84)



(fig. 85)



(fig. 86)

Si el plano secante *no es perpendicular* al eje, pero corta a todas las generatrices de una misma hoja del cono, la sección es una *elipse* (fig. 84); si el plano secante es paralelo a una sola de las generatrices, la sección es una curva llamada *parábola* (fig .85); si el plano es uno cualquiera que secciona las dos hojas del cono, se obtiene una curva llamada *hipérbola,* formada por dos *ramas* (fig. 86).

Estudiaremos separadamente cada uno de estos tres casos.

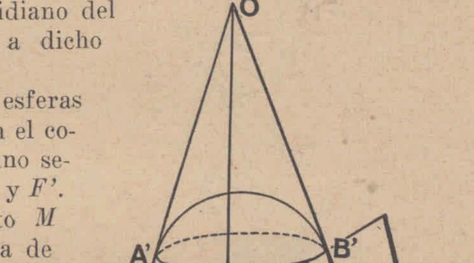
116. Plano que intercepta todas las generatrices de una misma hoja del cono. — Sea $O\,O''$ el eje del cono de revolución (fig. 87), $A\,M\,B$ un plano secante cualquiera, y $A\,O\,B$ un plano meridiano del cono, perpendicular a dicho plano secante.

Consideremos las esferas O' y O'' inscriptas en el cono y tangentes al plano secante en los puntos F y F'.

Tomemos un punto M cualquiera de la línea de intersección del cono con el plano secante; tracemos las rectas MF, MF' y la generatriz que pasa por M, que cortará en M' y en M'' a las circunferencias de contacto del cono con las esferas.

Razonando como lo hicimos para el cilindro (N.° 104), resulta:

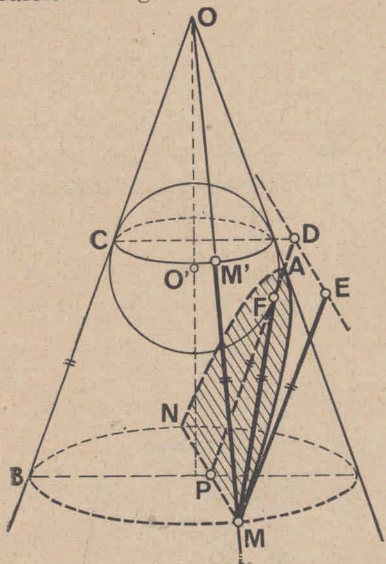
$$M\,F + M\,F' = const.$$



(fig. 87)

En consecuencia (G. P. N.° 52, Ej. III), en este caso, **la curva de intersección del plano secante con el cono de revolución, es una ELIPSE**, siendo F y F' los focos, y el segmento $A\,B$, el eje mayor. En el (N.° 106) ya indicamos la forma y trazado de la elipse.

117. Plano de intersección paralelo a una sola de las generatrices. — Sean MAN (fig. 88) el plano secante paralelo a la generatriz OB del cono de revolución del vértice O, y BOA el plano meridiano perpendicular a dicho plano secante, los que se cortan por la recta PD.



(fig. 88)

Consideremos la esfera O' inscripta en el cono y tangente al plano secante en el punto F.

Tomemos un punto M cualquiera de la línea de intersección del cono con el plano secante, y tracemos la generatriz OM, que cortará en M' a la circunferencia de contacto del cono con la esfera. Siendo MBN el paralelo que pasa por M, tenemos:

$$MF = MM' = BC$$

Por otra parte, la intersección del plano secante con el plano de la circunferencia de contacto, es una recta DE perpendicular al plano meridiano, y $PD = ME$ es, pues, la distancia del punto M a la recta DE; pero $PD = BC$ (por partes de paralelas entre paralelas), por consiguiente resulta:

$$MF = BC = PD = ME.$$

Vemos, pues, que cualquiera que sea el punto M de la línea de intersección, tenemos: $MF = ME$.

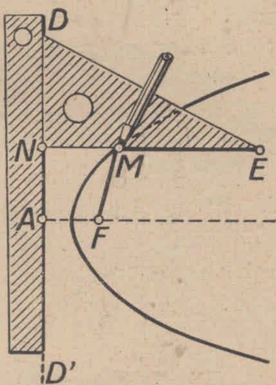
Es decir, que el punto M equidista del punto F y de la recta DE. Pero el *lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta fija llamada directriz, y de un punto fijo llamado foco, es una curva que se llama parábola.*

En consecuencia, en este caso, **la curva de intersección del plano secante con el cono de revolución es una PARÁBOLA.**

El foco es, pues, el punto F, y la directriz, la recta DE.

118. Forma de la parábola. — La propiedad anteriormente indicada de los puntos de la parábola se utiliza para su trazado.

Sean (fig. 89) la recta DD' la directriz, y el punto F el foco de la parábola que deseamos trazar. Para ello, hacemos coincidir uno de los bordes de una regla con la directriz, y apoyamos en ella uno de los bordes del ángulo recto de una escuadra; luego tomamos un hilo cuya longitud sea la del otro borde NE de la escuadra, y sujetamos los extremos del hilo, uno en el foco F, y el otro en el extremo E de la escuadra. Después deslizamos la escuadra contra la regla, y mediante la punta de un lápiz, mantenemos el hilo en tensión, pero apoyando parte de él en el borde NE de la escuadra; el punto M pertenecerá a la parábola.



(fig. 89)

En efecto, es evidente que la longitud MF del trozo de hilo en tensión entre los puntos M y F es igual al trozo MN que falta del borde de la escuadra perpendicular a la directriz; resultando entonces iguales los segmentos MF y MN, que son respectivamente las distancias del punto M al foco F y a la directriz DD', significa que M pertenece a la parábola.

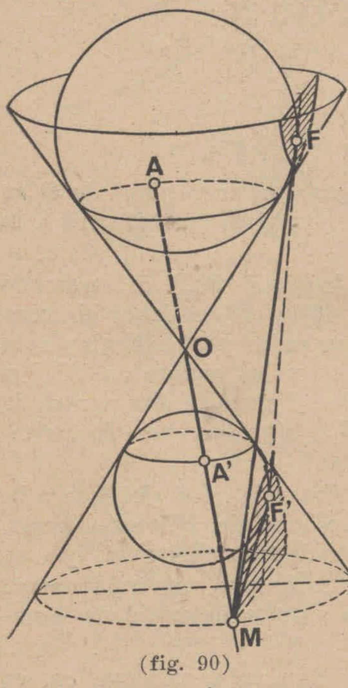
Es natural que, si variamos la distancia FA del foco a la directriz DD', se obtendrán parábolas de diferente forma. En consecuencia, para cada valor de esta distancia, que se llama *parámetro* de la parábola, tendremos una sola curva. Diremos, pues, que una parábola resulta determinada conociendo su parámetro.

Como la construcción puede realizarse igualmente en el otro semiplano que limita la recta AF, es evidente, pues, que cada punto M tendrá su simétrico M' respecto de dicha recta AF; ésta es, pues, *eje de simetría*, y por tal motivo se llama **eje** de la parábola.

Fácilmente se concibe que, si el hilo NE empleado para el trazado fuera suficientemente largo, los puntos M y M' se alejarían todo lo que querríamos de la directriz y del foco, y la parábola se extendería, pues, indefinidamente.

El procedimiento anteriormente empleado para el trazado evidencia que *la parábola es una curva abierta que se extiende al infinito.*

119. Plano que intercepta las dos hojas del cono. — Procediendo como en el caso anterior (N.° 117), pero considerando las esferas inscriptas en cada una de las hojas del cono (fig. 90), tenemos:



(fig. 90)

$$MF = MA \text{ y } MF' = MA'$$

Restando ordenadamente estas dos igualdades, resulta:

$$MF - MF' = MA - MA'$$

Pero $MA - MA' = A'A =$ $= const.$

Vemos, pues, que para cualquier punto M de la línea de intersección, tenemos:

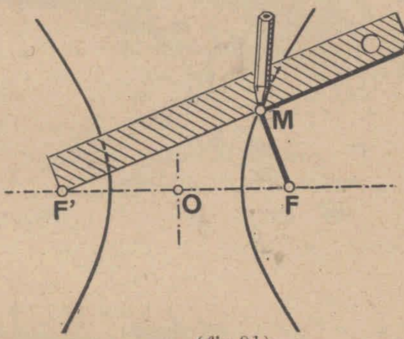
$$MF - MF' = const.$$

Pero, *el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante, es una curva abierta, llamada hipérbola, que consta de dos ramas.*

En consecuencia, en este caso, **la curva de intersección del plano secante con el cono de revolución es una HIPÉRBOLA.**

120. Forma de la hipérbola. — La propiedad anteriormente indicada de los puntos de la hipérbola se utiliza para su trazado.

Sean F y F' (fig. 91) los focos de la hipérbola. Se apoya el extremo F' de una regla en el foco F'; luego tomamos un hilo cuya longitud sea menor que el borde EF' de la regla, y sujetamos los extremos del hilo, uno en el foco F, y el otro en el extremo E de la regla. Después deslizamos la punta M de un lápiz sobre el hilo en tensión, como indica la (fig. 91), y haciendo girar la regla alrededor de F' obtenemos el dibujo de una de las ramas de la hipérbola por *trazo continuo*.



(fig.91)

En efecto, la diferencia de distancias del punto M a los focos F y F', es constantemente igual a la diferencia entre la longitud $F'E$ de la regla y la del hilo.

Permutando los papeles de F y F' se engendra la otra rama de la hipérbola.

Es natural que variando la magnitud de la diferencia entre la longitud de la regla y la del hilo, o variando la distancia entre los focos, o ambas cosas a la vez, se obtienen hipérbolas diferentes.

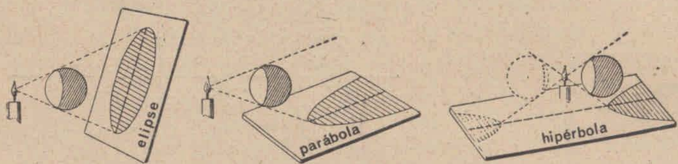
La recta de los focos FF' es *eje de simetría* de la hipérbola, así como también lo es la mediatriz del segmento FF'. El punto O de intersección de los ejes se llama **centro** de la hipérbola por ser *centro de simetría* de la curva.

121. Cónicas. — Las tres curvas indicadas, elipse, parábola e hipérbola, se llaman *cónicas*, porque se originan de las secciones de un cono.

Además de los procedimientos empleados para el dibujo de las cónicas por trazo continuo, existen otros, que se expondrán en el próximo curso de Geometría, conjuntamente con algunas de las muchas propiedades de interés teórico y práctico que tienen dichas curvas.

Ejemplo. — Cuando una esfera es iluminada por un foco tan pequeño que pueda considerarse como un punto, inciden en la superficie esférica un conjunto de rayos luminosos que forman un cono de revolución circunscripto a la esfera, que se llama *cono de sombra.*

La *sombra arrojada* por la esfera sobre un plano, es la intersección del cono de sombra con dicho plano; es, pues, una de las tres *cónicas.*



(fig. 92)

En la (fig. 92) se presentan las tres cónicas. Obsérvese que en el tercer caso, la sombra arrojada por la esfera es sólo *una* de las ramas de la hipérbola; para obtener prácticamente la otra rama, sería necesario disponer de otra esfera simétrica de la primera respecto del foco luminoso (se ha dibujado con líneas entrecortadas esta segunda esfera y la otra rama de la hipérbola).

* * *

CAPITULO VI

PERPENDICULARES Y OBLICUAS A UN PLANO DESDE UN PUNTO EXTERIOR

Proyección de un punto sobre un plano

122. DEFINICIÓN. — **Se llama PROYECCION ORTOGONAL de un punto sobre un plano al pie de la perpendicular trazada del punto al plano.**

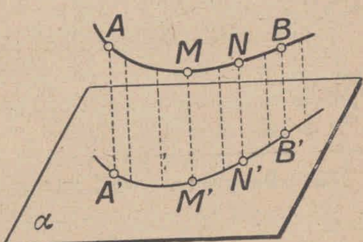
Así, por ej., si $A A' \perp \alpha$ (fig. 93), el punto A' es la proyección ortogonal del punto A sobre el plano α.

La proyección de un punto sobre un plano puede ser también *oblicua*: en ese caso, la proyección se realiza *paralelamente a una dirección dada*. Para ello se traza por el punto una paralela a dicha dirección; y su intersección con el plano dado es la *proyección oblicua* del punto.

En lo sucesivo, sólo nos ocuparemos de las proyecciones ortogonales y diremos, simplemente, *proyección*.

El plano sobre el que se proyecta, se llama *plano de proyección*. La perpendicular trazada del punto al plano es la *proyectante* del punto.

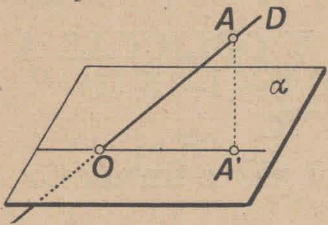
123. Proyección de una línea. — *Se llama proyección de una línea sobre un plano, a la formada por las proyecciones de todos los puntos de la línea dada.*



(fig. 93)

Sea, por ej. (fig. 93), la línea $A B$ y el plano α. Si imaginamos trazadas desde todos los puntos $A, M, N, B, \ldots$ de la línea las proyectantes $A A'$, $M M'$, $N N'$, $B B'$ ... el lugar geométrico de los puntos A', M', N', B', ... es una línea $A' B'$ del plano α, que constituye la proyección de la línea $A B$.

124. Proyección de una recta. — *La proyección de una recta sobre un plano que no le es perpendicular, es otra recta determinada por las proyecciones de dos puntos cualesquiera de la primera.*



(fig. 94)

Sea $O\,D$ la recta (fig. 94) que intercepta al plano α de proyección en el punto O.

La proyección de O es el mismo punto (punto doble); la de otro punto cualquiera A, es A'; *la recta* $O\,A'$ es la proyección de la recta $O\,A$. El plano $A\,O\,A'$ se llama *plano proyectante* de la recta dada, y es perpendicular al plano α (N.° 52).

Como *corolario* de la propiedad anterior, tenemos:

Las proyecciones de dos rectas paralelas sobre un mismo plano son paralelas.

Sean a y b las rectas, a' y b' las proyecciones respectivas sobre un plano α. (Como ejercicio, construya el estudiante la figura respectiva).

Si p es la proyectante de un punto cualquiera de la recta a, y q la de un punto cualquiera de la recta b, ambas son paralelas (N.° 40), y los ángulos de las rectas $a\,p$ y $b\,q$ tienen sus planos paralelos (N.° 30); por consiguiente, las rectas a' y b' de intersección de estos planos con el α son paralelas (N.° 26).

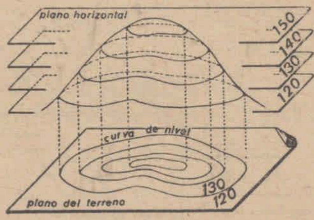
Nota. — Si la recta es perpendicular al plano, su proyección se reduce a *un solo punto.*

Si la recta es paralela al plano, su proyección es paralela a la recta dada (N.° 21).

125. Proyección de figuras. — *La proyección de una figura sobre un plano, es la formada por el conjunto de las proyecciones de los diferentes puntos de aquella figura sobre dicho plano.*

Lo que llamamos *plano* o *planta* de una construcción, de un terreno, etc., es el dibujo de las proyecciones de los puntos y líneas notables de la construcción, o del terreno, etc., sobre un plano horizontal.

Así, por ejemplo, cuando un terreno es muy accidentado, se emplean para su representación las llamadas *curvas de nivel*, que son las que unen en el plano puntos que tienen igual nivel en el terreno; las curvas de nivel son, pues, las proyecciones de las intersecciones del terreno con planos horizontales a distintas alturas. Cada curva se acompaña de un número, que indica la altura de todos los puntos de la misma sobre cierto plano horizontal, llamado *plano de referencia;* esos números se llaman *cotas* de los puntos.



(fig. 95).

Para dar una idea ajustada de la magnitud del relieve, es necesario que la cota de cada uno de aquellos planos de intersección difiera de la del inmediato en una cantidad constante. En el ejemplo de la (fig. 95), las cotas varían cada diez metros.

La equidistancia que se adopte varía según que el terreno sea más o menos accidentado.

Relaciones entre perpendiculares y oblicuas

126. Si desde un punto O exterior a una plano α (fig. 96), trazamos el segmento perpendicular OP y diversos segmentos de oblicuas OA, OB, OC, OD, ..., tendremos las siguientes

Propiedades. — **De todos los segmentos de recta comprendidos entre un punto y un plano:**

1.ª **El segmento perpendicular es el más corto.**

2.ª **Dos segmentos oblículos que tengan proyecciones iguales, son iguales.**

3.ª **Dos segmentos oblicuos que tengan proyecciones desiguales, son desiguales, y es mayor el que tiene proyección mayor.**

Recíprocamente, de todos los segmentos de recta comprendidos entre un punto y un plano:

1.° *El más corto es perpendicular al plano.*

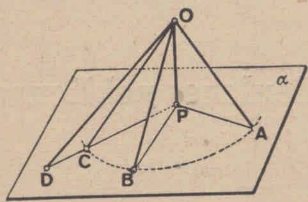
2.ª *Dos segmentos oblicuos iguales, tienen proyecciones iguales.*

3.ª *Dos segmentos oblicuos desiguales, tienen proyecciones desiguales; el mayor tiene mayor proyección.*

Demostraremos en su orden las propiedades:

1.° La esfera de centro O y radio OP es tangente en P al plano α (N.° 83); por consiguiente, todos los puntos del plano α son exteriores a dicha esfera, y su distancia al centro O es mayor que el radio OP (N.° 70).

2.° Sea OA un esgmento de oblicua; si hacemos girar el triángulo rectángulo OPA alrededor del cateto OP, se engendrará un cono de radio PA. Las diversas posiciones de OA, como ser OB, OC, ... etc., son segmentos de oblicuas iguales; también son iguales las diversas posiciones de PA, como ser PB, PC, ... etc., que son las proyecciones de aquellos segmentos de oblicuas.



(fig. 96)

3.° Sean OA y OD los segmentos de oblicuas que queremos comparar, tales que para sus respectivas proyecciones sobre el plano α se tenga $PA < PD$.

Considerando, como en el caso anterior, el cono de generatriz OA, el segmento OD tiene su pie en el exterior del círculo ABC... de la base de dicho cono, y se encuentra en cierto plano meridiano OPC conjuntamente con la oblicua OD. Pero en este plano meridiano, sabemos del curso anterior (G. P. N.° 35) que siendo $PC < PD$, tenemos $OC < OD$, y recíprocamente; como $PC = PA$ y $OC = OA$, tendremos, pues, que para $PA < PD$, resulta $OA < OD$, y recíprocamente.

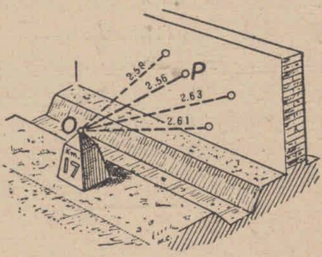
NOTA. — Téngase presente, como en Geometría plana, que en la propiedad anterior, en lugar de decir ''oblicuas que tienen proyecciones iguales o desiguales'', también suele decirse, respectivamente: ''oblicuas que se apartan igualmente o desigualmente del pie de la perpendicular''.

Distancia de un punto a un plano

127. La primera de las propiedades del (N.° 126), puede también expresarse así:

La menor distancia de un punto a un plano, se obtiene sobre la perpendicular trazada del punto al plano.

Esta propiedad puede utilizarse en el terreno para obtener la perpendicular desde un punto a un plano. Basta sujetar el origen de una cinta métrica en el punto dado, y luego, manteniéndola en tensión, medir las distancias a varios puntos del plano; cuando por tanteos convenientes logramos la menor lectura en la cinta, es decir, cuando se encuentra en posición de medir la menor distancia, la recta así determinada por la cinta métrica resulta perpendicular al plano dado. (Es conveniente que el estudiante practique esta operación, aun valiéndose de una cuerda o piola.)



(fig. 97)

En la (fig. 97), que representa uno de los mojones kilométricos que se encuentran en el camino de San Juan a Mendoza, la perpendicular desde el vértice O del mojón al plano de la pared, es la recta OP, que corresponde a la distancia 2,56 m., *menor* que cualquiera de las otras: 2,58 m., 2,61 m., 2,63 m. ...

Angulo de una recta con un plano
Propiedad fundamental

128. Angulos de una recta con aquellas que pasan por su pie en el plano. — En la (fig. 94) vimos que la recta OA' es la proyección de la recta OA en el plano a; el ángulo AOA', es decir, el ángulo *agudo* que forma una recta con su proyección sobre un plano, se llama **ángulo de la recta con el plano.**

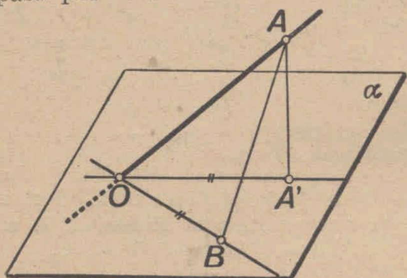
Si la recta OA es perpendicular al plano, forma ángulo recto con cualquier recta que pasa por su pie; en este caso, decimos que la recta forma ángulo *recto* con el plano.

Si la recta OA es paralela al plano, su proyección sobre el plano es paralela a la recta dada (N.° 21); en este caso, decimos que la recta forma un ángulo *nulo* con el plano.

Si una recta OA es oblicua a un plano α (fig. 98), fácilmente puede verse que dicha recta no forma el mismo ángulo con todas las rectas OA', OB, ... que pasan por su pie O en el plano.

129. Teorema fundamental. — **El ANGULO DE UNA RECTA CON UN PLANO es el menor de los ángulos que forma la recta con las diferentes rectas que pasan por su pie en el plano.**

Sean en la (fig. 98) OA la recta, OA' su proyección sobre el plano α, y OB otra recta cualquiera del plano α, y que pasa por O.



(fig. 98)

Hipótesis $\left\{ \begin{array}{l} OA' \text{ proyección de } OA \text{ sobre } \alpha. \\ OB \text{ recta de } \alpha \text{ por el pie de } OA. \end{array} \right.$

Tesis:

$\text{áng. } AOA' < \text{áng. } AOB.$

Construcción. — Tomemos el segmento $OB = OA'$.

Demostración. — Los triángulos AOA' y AOB tienen:

AO común; $OB = OA'$, por construcción; $AA' < AB$, en virtud del (N.° 126, 1.°).

Según un conocido teorema (G. P. N.° 143), si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y el tercero desigual, al menor de estos últimos lados se le opone menor ángulo; es decir, que tendremos: *áng.* $A\,O\,A' <$ *áng.* $A\,O\,B$, lo que constituye la tesis.

Nota. — En virtud de la propiedad de igualdad de ángulos de lados paralelos (N.° 30), resulta:

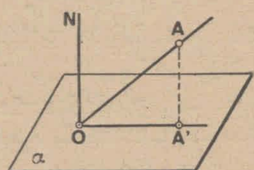
El ángulo de una recta r *y un plano* α, *es igual al ángulo de una recta cualquiera* r' *paralela a* r *y un plano cualquiera* α' *paralelo al* α.

130. Se comprende fácilmente que el ángulo que forma una recta con la *prolongación* de su proyección sobre un plano, es *el mayor* de los ángulos que forma la recta con las que pasan por su pie en el plano, siendo éste el suplemento del ángulo de la recta con el plano.

Angulo de una recta con la normal a un plano

131. Teorema. — **El ANGULO DE UNA RECTA CON LA NORMAL A UN PLANO es el complemento del ángulo que forma la recta con el plano.**

Sean en la (fig. 99) $O\,A$ la recta, $O\,A'$ su proyección sobre el plano α, y $O\,N$ la normal a dicho plano.



(fig. 99)

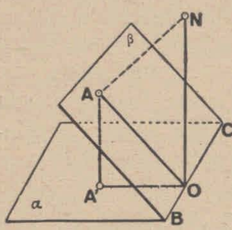
El plano proyectante $A\,O\,A'$, siendo perpendicular al α, contiene la recta $O\,N$ (N.° 53, Cor. 1.°); estando las rectas $O\,A$, $O\,A'$ y $O\,N$ en un mismo plano, y siendo recto el ángulo $N\,O\,A'$, los ángulos $N\,O\,A$ y $A\,O\,A'$ son, pues, *complementarios.*

Nota. — Al estudiar triedros en el próximo capítulo veremos que, si las tres rectas $O\,A$, $O\,A'$, $O\,N$ *no están en un mismo plano,* el ángulo $N\,O\,A'$ ya *no es igual* a la suma de los ángulos $N\,O\,A$ y $A\,O\,A'$, sino que es *menor.*

Línea de máxima pendiente

132. TEOREMA. — **Si dos planos se cortan, la recta de uno de los planos que forma el mayor ángulo con el otro, es perpendicular a la intersección de los dos planos.**

Sean los dos planos α y β (fig. 100), que se cortan por la recta BC. Según el teorema anterior (N.° 131), la recta del plano β que formará el *mayor* ángulo posible con el plano α será la que forme el *menor* ángulo con la normal ON al plano α. Pero la recta del plano β que forma el menor ángulo con dicha normal, es la proyección OA de ON sobre el plano β (N.° 129).



(fig. 100)

Sólo nos falta demostrar que la recta OA es *perpendicular* a BC. En efecto, puesto que el plano NOA que proyecta ON sobre β es perpendicular a este plano, y es también perpendicular al α (en virtud de contener $ON \perp \alpha$, N.° 52), dicho plano NOA será perpendicular, pues, a la intersección BC de los planos α y β (N.° 53, Cor. 2.°); por consiguiente, las rectas OA y BC son perpendiculares (N.° 31).

Cuando el plano α es *horizontal*, la línea OA se llama **línea de máxima pendiente del plano** β, o, simplemente, *línea de pendiente.*

133. **Propiedades de la línea de máxima pendiente.** — Como corolarios del teorema anterior, tenemos:

1.° *Por cada punto del plano β pasa una línea de pendiente, y una sola.*

2.° *Todas las líneas de pendiente del plano β son paralelas entre sí, y sus proyecciones sobre el plano α lo son también.*

3.° *El ángulo de una línea de pendiente del plano β con el plano α, es igual al rectilíneo del diedro formado por los planos α y β.*

4.° *El ángulo de dos planos es el complemento del ángulo que forma uno de los planos con la normal al otro.*

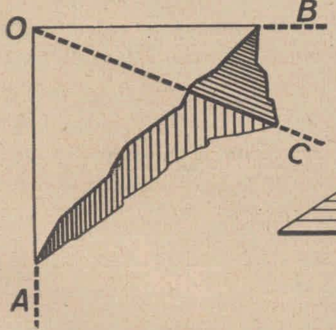
CAPITULO VII

TRIEDROS

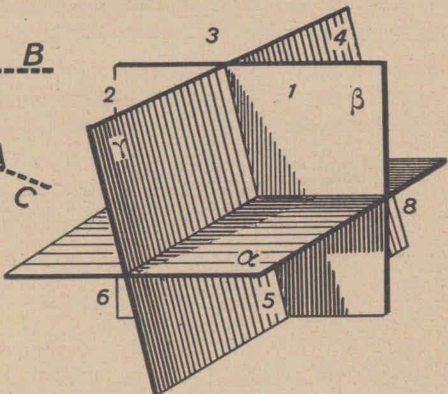
Elementos de los triedros

134. Definiciones. — En el (N.° 54) ya dimos el concepto de ángulo triedro, o simplemente, *triedro*. Así, recordemos que, en la práctica, esta figura geométrica se nos presenta, por ej., en un rincón del salón de clase; la forman tres planos: los de dos de las paredes y el del techo (fig. 101). Daremos, pues, la siguiente

DEFINICIÓN. — **Se llama TRIEDRO la parte de espacio limitada por los planos de tres ángulos cuyos lados son tres semirrectas** OA, OB, OC, **no situadas en un mismo plano, y de origen común** O.



(fig. 101)



(fig. 102)

El punto O es el **vértice** del triedro; las semirrectas OA, OB, OC son las aristas; los ángulos planos AOB, BOC, COA, son las **caras**, y los diedros formados por dos caras consecutivas, son los **diedros** del triedro, que se designan generalmente leyendo su arista; así, leeremos: diedros OA, OB, OC.

NOTA. — Tres planos que se cortan forman *ocho* triedros, como se indica en la (fig. 102). Para determinar *uno* de ellos, diremos:

Triedro, es la parte de espacio común a tres semiespacios.

Por ej., en la misma figura, si suponemos el plano α horizontal y el β vertical, el triedro N.° 1, es la parte de espacio común a los siguientes semiespacios: el que está arriba del plano α, delante del β y a la derecha del γ

Como ejercicio, indique el estudiante qué semiespacios forman el triedro N.° 6.

135. Para leer un ángulo triedro, se lee primeramente el vértice y después un punto de cada arista. Así, el triedro de la (fig. 101) se leerá: $OABC$.

Dicho triedro consta de *seis elementos*: las tres *caras*, cuyas *medidas* designaremos con a, b, c, y los tres *diedros*, cuyas medidas designaremos con A, B, C.

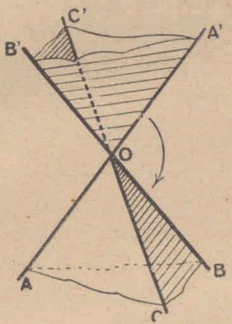
Se dice que las aristas y los diedros OA, OB, OC, son respectivamente *opuestos* a las caras $BOC = a$, $COA = b$, $BOA = c$.

Triedros iguales y simétricos

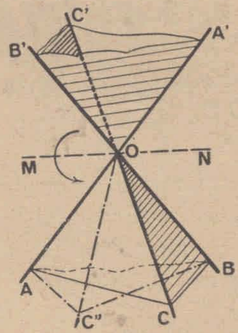
136. Dos triedros son **iguales** cuando pueden superponerse. Es natural que, en ese caso, los triedros tendrán sus *seis elementos respectivamente iguales.*

Pero la recíproca no es verdadera; es decir, que dos triedros pueden tener sus elementos respectivamente iguales, sin ser figuras superponibles. Veremos que esto acontece para un triedro escaleno (N.° 54) y su simétrico con respecto a un punto, por ej., con respecto al vértice del triedro.

137. Triedros simétricos escalenos. — Sea $OABC$ un triedro cualquiera (fig. 103); prolonguemos las aristas del otro lado del vértice, por las semirrectas OA', OB', OC'. Formaremos así otro triedro $OA'B'C'$, que se llama *simétrico* del primero.



(fig. 103)



(fig. 104)

Dos triedros simétricos $OABC$ y $OA'B'C'$, tienen sus seis elementos respectivamente iguales: las caras AOB y $A'OB'$, BOC y $B'OC'$,... son iguales por ser ángulos planos opuestos por el vértice; los diedros OA y OA', OB y OB',..., son iguales por ser opuestos por la arista.

Pero, a pesar de tener todos sus elementos respectivamente iguales, **dos triedros simétricos no son figuras superponibles.**

En efecto, si para fijar ideas, suponemos que la arista OC se encuentra *delante* del plano AOB, su prolongación OC' se encontrará *detrás* de dicho plano. Ensayaremos la superposición de los dos modos posibles.

1.° En la (fig. 103) supongamos que se haya trazado por el punto O la perpendicular al plano AOB; si luego hacemos girar el triedro $OA'B'C'$ un ángulo de 180° alrededor de aquella perpendicular, la arista OA', que en ese movimiento no sale del plano AOB, irá a coincidir con OA; análogamente OB' coincidirá con OB. Pero la arista OC' permanecerá siempre *detrás* del plano AOB; por consiguiente, en esta nueva posición, el triedro $O\,A'\,B'\,C'$ no coincidirá con $O\,A\,B\,C$.

2.° En la (fig. 104) sea $M\,N$ la bisectriz del ángulo $A\,O\,B'$; si luego hacemos girar el triedro $O\,A'\,B'\,C'$ un ángulo de 180° alrededor de aquella bisectriz, la arista $O\,B'$ saldrá del plano $A\,O\,B$ e irá a coincidir con $O\,A$, y análogamente $O\,A'$ coincidirá con $O\,B$. La cara $B'O\,A'$ coincidirá, pues, con la cara $A\,O\,B$, y, además, la arista $O\,C'$ ocupará la posición $O\,C''$ *delante* del plano $A\,O\,B$.

Esta nueva posición $O\,C''$ de $O\,C'$ no podrá coincidir con la arista $O\,C$, porque siendo en general desiguales los ángulos diedros de aristas $O\,A$ y $O\,B$, también serán desiguales los diedros de aristas $O\,A'$ y $O\,B$, y, por consiguiente, no podrán coincidir los planos $B\,O\,C''$ y $B\,O\,C$, por resultar desigualmente inclinados sobre el plano $B\,O\,A$.

138. **Triedros simétricos isósceles.** — La superposición es posible únicamente cuando el triedro $O\,A\,B\,C$ tiene iguales entre sí dos ángulos diedros $O\,A$ y $O\,B$; en efecto, en este caso, los planos $B\,O\,C''$ y $B\,O\,C$ resultarán igualmente inclinados sobre el plano $B\,O\,A$, y, por consiguiente, coincidirán. Igualmente sucederá con los planos $A\,O\,C''$ y $A\,O\,C$, y, por consiguiente, las aristas $O\,C$ y $O\,C''$ se confundirán.

Observemos que, en este caso, la cara $C'\,O\,A'$, que es igual a $C\,O\,A$, llega a coincidir con $C\,O\,B$; vale decir, que la igualdad de dos diedros OA y $O\,B$ implica la igualdad de las caras opuestas $C\,O\,B$ y $C\,O\,A$, o sea, que el triedro es *isósceles.*

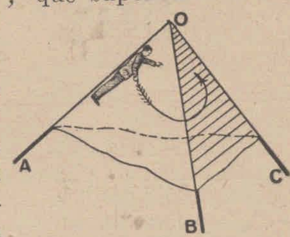
Podemos enunciar, pues, la siguiente

Propiedad. — **Un triedro podrá superponerse con su simétrico, únicamente en el caso de que tenga dos ángulos diedros iguales; en este caso, las caras opuestas a los diedros iguales son iguales, es decir, que el triedro es isósceles.**

Sentido de un triedro

139. La imposibilidad de hacer coincidir dos triedros simétricos, se debe a la diversidad de disposición de sus elementos, la que da origen a una noción importante en este estudio: la del *sentido* de un triedro.

Sea el triedro $OABC$ (fig. 105), es decir, el triedro de vértice O y aristas OA, OB, OC, que suponemos leídas en un orden perfectamente determinado. Si imaginamos que un observador se halle colocado sobre la arista OA, con la cabeza en O y los pies en A, pero mirando hacia el interior del triedro $OABC$, verá que las aristas OA, OB, OC (leídas en este orden), se le presentan de *derecha a izquierda;* mientras que, observadas en otro orden, por ej., OB, OA, OC, se le presentan de *izquierda a derecha.* En este caso decimos que los dos triedros tienen **sentidos** contrarios.



(fig. 105)

Se ha convenido en llamar *sentido positivo* el de *derecha a izquierda,* y *sentido negativo* al otro.

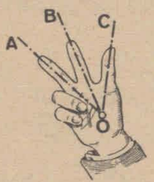
Para abreviar el lenguaje, decimos que un *triedro es positivo,* cuando sus aristas se escriben o leen en ese sentido; análogamente para un *triedro negativo,* cuando sus aristas se leen o escriben en sentido negativo.

Así, por ej., son positivos los triedros $OABC$, $OBCA$, $OCAB$; son negativos los triedros $OBAC$, $OACB$, $OCBA$.

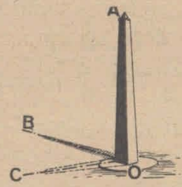
Obsérvese que, *si se permutan dos aristas, el triedro cambia de signo;* así, por ej., son de signos contrarios los triedros $OABC$, y $OBAC$.

EJEMPLOS. — 1.° Si se separan los dedos de la mano derecha como indica la (fig. 106), el dedo medio, índice y pulgar, considerados en ese orden, nos dan una idea de triedro positivo, $OABC$. En cambio, considerados los mismos dedos en igual orden, pero de la mano izquierda, nos dan una idea de triedro negativo.

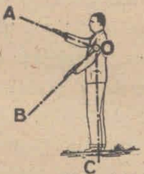
2.º El obelisco OA de la Plaza de la República (fig. 107), su sombra OB a cierta hora y su sombra OC algunas horas más tarde, nos presenta una imagen de un triedro negativo. En cambio, si se tratara de un ejemplo análogo pero para una torre situada en el hemisferio Norte, el triedro sería positivo.



(fig. 106)



(fig. 107)



(fig. 108)

3.º Un hombre de pie, extendiendo sus dos brazos hacia adelante y separándolos uno del otro, forman la imagen de un triedro positivo: su brazo derecho OA, su brazo izquierdo OB, y su columna vertebral OC, considerados estos elementos en el orden indicado.

140. *Dos triedros simétricos tienen sentidos opuestos.* Así, el triedro $OABC$ (fig. 103), es de sentido negativo, mientras que su simétrico $OA'B'C'$ es positivo (sobreentendiéndose que el orden respectivo de las aristas es el mismo en ambos triedros).

En consecuencia, podemos decir que dos triedros que tengan sus elementos respectivamente iguales y sean de distinto signo, no pueden coincidir; mientras que coincidirán dos triedros que tengan sus elementos respectivamente iguales y sean del mismo signo.

Nota. — Obsérvese la analogía entre los resultados de esta convención de signos de los triedros y la de signos de los números reales; éstos también podrán coincidir en una gráfica cuando tengan igual valor absoluto y el mismo signo, mientras que no coincidirán cuando tengan igual valor absoluto y signos contrarios.

Planos orientados y diedros dirigidos

141. Planos orientados. — Un ángulo plano y un arco, también tienen un sentido, y, en consecuencia, podemos asignarle un signo. Este se determina fijando previamente el lado desde donde se mira el plano que contiene aquellas figuras.

Para ello, consideremos una normal cualquiera ON al plano dado P (fig. 109), la que resulta dividida por el plano en dos semirrectas: una se llama *normal positiva* y la otra *normal negativa;* todas las normales positivas estarán situadas, pues, del mismo lado del plano.

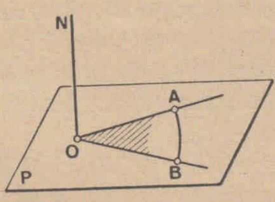
Cuando para un plano determinado se ha optado por un sentido de las normales positivas, decimos que el plano es *orientado.*

Para un ángulo AOB de ese plano orientado, podemos asignarle, pues, un signo, de acuerdo con la siguiente convención:

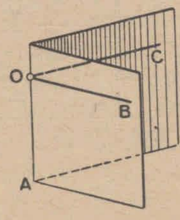
Un ángulo menor que 180° *es positivo o negativo, según lo sea respectivamente el triedro* ONAB *formado por la normal positiva* ON *y los lados del ángulo, considerando esos lados en el orden como se escriben para designar el ángulo.*

Así, por ej., en el plano orientado de la (fig. 109), el ángulo AOB es positivo, mientras que el ángulo BOA es negativo.

Para un arco AB de centro O rige la misma convención: AB sería un arco positivo, y BA negativo.



(fig. 109)



(fig. 110)

142. Diedros dirigidos. — Un ángulo diedro tiene también, como los ángulos planos, un sentido, y, en consecuencia, podemos asignarle un signo. Este se determina fijando previamente un *sentido positivo sobre la arista;* en ese caso, decimos que el diedro es *dirigido.*

Así, por ej., si en el diedro $B\,O\,A\,C$ de la (fig. 110) fijamos el sentido positivo sobre la arista mediante la semirrecta $O\,A$, al diedro le asignamos un signo, de acuerdo con la siguiente convención:

Un diedro menor que 180° *es positivo o negativo, según lo sea respectivamente el triedro* O A B C *formado por la semirrecta* O A *que define el sentido positivo sobre la arista, y las semirrectas* O B *y* O C *normales a la arista trazadas en las caras* B *y* C *del diedro.*

As, por ej., en el diedro dirigido de la (fig. 110), $B\,O\,A\,C$ es un diedro positivo, mientras que el diedro $C\,O\,A\,B$ es negativo.

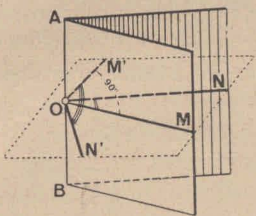
EJEMPLO. — Si abrimos este libro de modo que sus tapas no lleguen a formar un ángulo de 180°, y fijamos como sentido positivo de la arista el indicado por el orden natural de las palabras impresas en el lomo, el diedro formado por la tapa de atrás y la del frente es positivo.

Angulo de las normales a las caras de un diedro

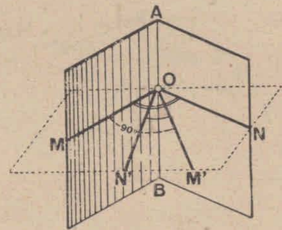
143. TEOREMA. — **Si desde un punto de la arista de un diedro se trazan las semirrectas normales a las caras del diedro y en el mismo semiespacio que se halla el diedro, el ángulo que forman dichas normales es suplementario del rectilíneo del diedro.**

Sean $M\,A\,B\,N$ el diedro (fig. 111), $O\,N'$ y $O\,M'$ las semirrectas respectivamente las normales a las caras $N\,A\,B$ y $M\,A\,B$, semirrectas situadas en el mismo semiespacio que se halla el diedro, y $M\;O\,N$ el rectilíneo del diedro. Demostraremos que los ángulos $N'O\,M'$ y MON son *suplementarios.*

En efecto, las cuatro rectas $O\,M$, $O\,N$, $O\,M'$, $O\,N'$ están contenidas en un mismo plano perpendicular en O a la arista AB (N.° 48); además, siendo ON' perpendicular al plano NOA, es perpendicular a ON, y análogamente OM' es perpendicular a OM. Los ángulos MON y $M'ON'$ que están en un mismo plano y tienen sus lados respectiva-



(fig. 111)



(fig. 112)

mente perpendiculares, son iguales o suplementarios (G. P. N.° 111); para demostrar que son suplementarios, falta demostrar, pues, que son de distinta clase, es decir, uno agudo y el otro obtuso. Al efecto, si el ángulo MON es *agudo* (fig. 111), el ángulo $M'ON'$ encierra el ángulo recto MOM' y, por consiguiente, es *obtuso;* si MON es *obtuso* (fig. 112), el ángulo $M'ON'$ está contenido en el ángulo recto MOM' y, por consiguiente, es *agudo.*

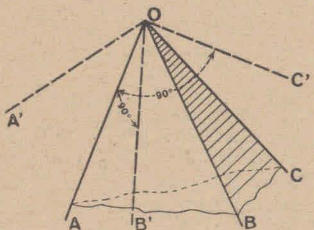
Triedros suplementarios

144. Definición. — **Si desde el vértice de un triedro se trazan las semirrectas normales a las caras del triedro y en el mismo semiespacio que se encuentra el triedro, el nuevo triedro que se forma se llama SUPLEMENTARIO del primero.**

En el triedro $OABC$ (fig. 113), si OA', OB', OC', son las semirrectas respectivamente perpendiculares a las caras BOC, COA, AOB, semirrectas situadas en el mismo semiespacio que se encuentra el triedro dado, el triedro $OA'B'C'$ es *suplementario* del $OABC$.

145. TEOREMA. — **Si un triedro es suplementario de otro, el segundo es suplementario del primero.**

Sea $OA'B'C'$ el triedro suplementario del $OABC$ (fig. 113); decimos que este último es suplementario del $O\,A'\,B'\,C'$. Bastará con demostrar, pues, que las aristas del triedro $O\,A\,B\,C$ son respectivamente perpendiculares a las caras del $O\,A'\,B'\,C'$ y colocadas en el mismo semiespacio de este triedro.



(fig. 113)

En efecto, siendo $O\,C'$ perpendicular a la cara $A\,O\,B$, es perpendicular a $O\,A$; análogamente, por ser $O\,B'$ perpendicular a la cara $A\,O\,C$, es perpendicular a $O\,A$. Resultando $O\,A$ perpendicular a $O\,C'$ y $O\,B'$, será perpendicular, pues, a la cara $B'\,O\,C'$. Además, $O\,A$ se encuentra en el mismo semiespacio que $O\,A'$, y por consiguiente que el triedro $O\,A'\,B'\,C'$, respecto de la cara $B'\,O\,C'$.

Análogamente se demostraría para las otras aristas OB y OC.

NOTA. — De acuerdo con el teorema anterior, podemos decir que *la relación entre un triedro y su triedro suplementario es recíproca.*

146. Las *caras* de un triedro se llaman **correspondientes** de los *diedros* del otro cuyas aristas son perpendiculares a las caras del primero. Así, por ej., la cara $A\,O\,B$ es correspondiente del diedro de arista $O\,C'$, y la cara $A'\,O\,B'$ es correspondiente del diedro de arista $O\,C$.

Empleando las notaciones indicadas en el (N.° 135), tenemos: la cara c es correspondiente del diedro C'; la cara c' es correspondiente del diedro C; ... etc.

147. TEOREMA. — **Si dos triedros son suplementarios, las caras de cada uno de ellos son los suplementos de los diedros correspondientes del otro.**

Sean los dos triedros suplementarios $O\,A\,B\,C$ y $O\,A'\,B'\,C'$

(fig. 113); decimos que la cara $A\,O\,B$ es el suplemento del rectilíneo del diedro de arista $O\,C'$; o sea, que $c + C' = 180°$.

En efecto, la arista $O\,A$ es perpendicular a la cara $B'\,O\,C'$ y se halla situada en el mismo semiespacio que el diedro de arista $O\,C'$; análogamente, $O\,B$ es perpendicular a la cara $A'\,O\,C'$ y se halla situada en el mismo semiespacio que el diedro de arista $O\,C'$. En virtud del teorema del (N.° 143) resulta, pues, demostrada la propiedad.

148. El teorema anterior es muy importante en el estudio de triedros; en efecto, nos permite establecer las fórmulas:

$$a' = 180° - A\,, \qquad b' = 180° - B\,, \qquad c' = 180° - C\,;$$
$$A' = 180° - a\,, \qquad B' = 180° - b\,, \qquad C' = 180° - c\,.$$

De manera que, conociendo una propiedad cualquiera de un ángulo triedro, es decir, una relación entre sus elementos a, b, c, A, B, C, y aplicando aquellas fórmulas a los elementos a', b', c', A', B', C', del triedro suplementario, y luego sustituyendo estos elementos por los valores que dan aquellas fórmulas, tendremos una nueva relación entre a, b, c, A, B, C, es decir, una nueva propiedad del triedro primitivo.

Casos de igualdad de triedros

149. Definición. — **Dos triedros son iguales cuando las caras y diedros de uno de ellos son respectivamente iguales a las caras y diedros del otro, y los dos triedros tienen el mismo sentido** (N.° 139).

De la definición anterior, deducimos inmediatamente las siguientes

Propiedades. — 1.ª *Dos triedros iguales a un tercero son iguales entre sí.*

2.ª *Si dos triedros son iguales, sus triedros suplementarios también son iguales* (N.° 148).

150. Inversamente, para investigar si dos triedros son iguales, es indispensable investigar previamente si tienen el *mismo sentido*, y luego basta investigar si tienen *tres elementos* respectivamente iguales. Trataremos los **cuatro casos clásicos de igualdad de triedros.**

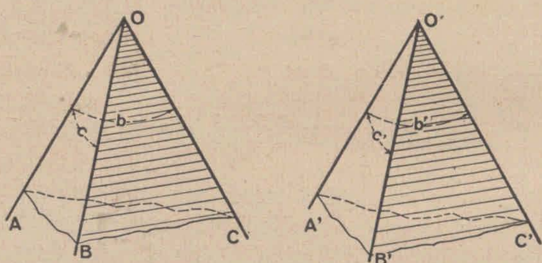
Para abreviar la exposición, designaremos una cara o un diedro de un triedro con la letra que indica su medida (N.° 135); así, para un triedro $O\,A\,B\,C$ designaremos la cara $A\,O\,B$ con la letra c; el diedro de arista $O\,A$ con la letra A; ... etc.

NOTA IMPORTANTE. — En los cuatro casos que trataremos, supondremos siempre que **los triedros tienen el mismo sentido.**

151. PRIMER CASO. — **Dos triedros son iguales si tienen respectivamente iguales dos caras y el diedro comprendido.**

Sean $O\,A\,B\,C$ y $O'\,A'\,B'\,C'$ los dos triedros (fig. 114) que suponemos tengan: $b = b'$, $c = c'$, $A = A'$.

Demostraremos la igualdad de los triedros, por superposi-



(fig. 114)

ción. Al efecto, si hacemos coincidir la cara b con su igual b', de modo que la arista $O\,A$ coincida con $O'\,A'$, y $O\,C$ con $O'\,C'$, las aristas $O\,B$ y $O'\,B'$ se hallarán en el mismo semiespacio respecto al plano de la cara b, en virtud de tener ambos triedros el mismo sentido. Siendo iguales los diedros A y A', la cara c coincidirá con su igual c', y la arista OB coincidirá con $O'B'$; coincidiendo las tres aristas, coinciden las tres caras y los tres planos que forman los diedros, es decir, que coinciden también los diedros; coincidiendo los seis elementos, los triedros son, pues, iguales (N.° 149).

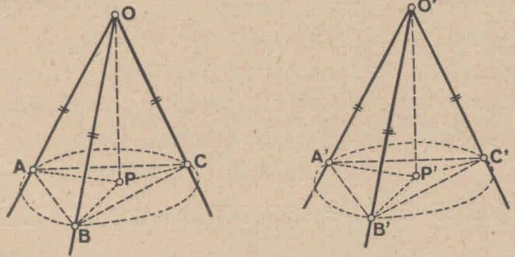
152. SEGUNDO CASO. — **Dos triedros son iguales si tienen respectivamente iguales una cara y los dos diedros adyacentes.**

Este caso resulta inmediatamente del primero. En efecto, como los dos triedros suplementarios de los propuestos tienen respectivamente iguales un diedro y las dos caras que lo comprenden (N.° 148) son, pues, iguales; por consiguiente, también serán iguales los triedros primitivos (N.° 149, Prop. 2.ª).

También se puede realizar fácilmente la demostración directa de este caso, empleando la superposición, como lo hicimos en el primer caso; como ejercicio, dejamos la realice el estudiante.

153. TERCER CASO. — **Dos triedros son iguales si tienen respectivamente iguales las tres caras.**

Sean $OABC$ y $O'A'B'C'$ los dos triedros (fig. 115) que suponemos tengan: $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.



(fig. 115)

Demostraremos la igualdad de los triedros, por superposición. Al efecto, tomemos sobre las aristas seis segmentos todos iguales, y formemos luego los triángulos ABC y $A'B'C'$.

Los triángulos isósceles OAB y $O'A'B'$, OBC y $O'B'C'$, OCA y $O'C'A'$, son iguales dos a dos, por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido, por consiguiente, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y $AC = A'C'$; es decir, que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

Si proyectamos el punto O sobre el plano ABC, por ser iguales las tres oblicuas OA, OB, OC, la proyección P equidistará de A, de B, y de C (N.° 126, Recíp. 2.ª); será, pues, el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo ABC. Análogamente, proyectando el punto O' sobre el plano $A'B'C'$, la proyección P' será el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo $A'B'C'$. Por consiguiente, si superponemos los triángulos iguales ABC y $A'B'C'$, el punto P' coincidirá con P, y la semirrecta PO coincidirá con la $P'O'$. Pero los dos triángulos rectángulos APO y $A'P'O'$ son iguales, por tener respectivamente iguales la hipotenusa y un cateto ($PA = P'A'$); por consiguiente, $PO = P'O'$, y el vértice O' coincide con O. Coincidiendo las aristas de ambos triedros, coinciden, pues, los triedros, es decir, que son iguales.

154. CUARTO CASO. — **Dos triedros son iguales si tienen respectivamente iguales sus tres ángulos diedros.**

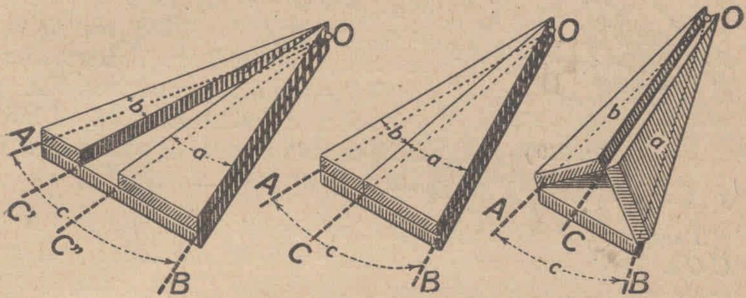
Este caso resulta inmediatamente del anterior. En efecto, los triedros suplementarios de los propuestos, tienen respectivamente iguales las tres caras (N.° 148), son, pues, iguales; por consiguiente, también serán iguales los triedros primitivos (N.° 149, Prop. 2.ª).

Relaciones entre las caras de un triedro

155. **Comparación de caras.** — Recortemos en cartón o cartulina, tres ángulos $AOB = c$; $AOC = b$; $BOC = a$, de los cuales supondremos que c es el mayor de todos ellos.

Hagamos coincidir los tres vértices, los lados OA por una parte y los lados $O\,B$ por otra; los lados $O\,C$ podrán o no coincidir. Se presentarán tres casos:

1.° (Fig. 116). Si $c > b + a$ los lados $O\,C$ de los ángulos a y b no podrán coincidir, y tomarán las posiciones $O\,C'$ y $O\,C''$ *sobre* el plano del ángulo c; en este caso, no se forma triedro.



(fig. 116) (fig. 117) (fig. 118)

2.° (Fig. 117). Si $c = b + a$ los lados $O\,C$ de los ángulos a y b coincidirán, pero se encontrarán *sobre* el plano del ángulo c; en este caso tampoco se forma triedro.

3.° (Fig. 118). Si $c < b + a$ los lados $O\,C$ de los ángulos a y b coincidirán, encontrándose *fuera* del plano del ángulo c; en este caso se forma el triedro $O\,A\,B\,C$.

Por consiguiente, para que exista triedro, es necesario que se cumpla la siguiente

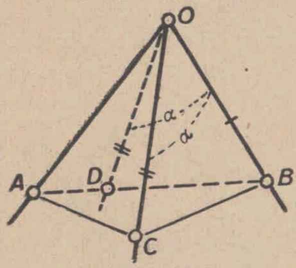
PROPIEDAD. — **La mayor de las caras de un triedro debe ser menor que la suma de las otras dos.**

156. En consecuencia, análogamente que para los lados de un triángulo, podemos enunciar el siguiente

TEOREMA. — **Cada cara de un triedro es menor que la suma de las otras dos.**

Si bien hemos evidenciado el teorema anterior mediante un procedimiento intuitivo, estimamos conveniente exponer su demostración racional.

En el triedro $O\,A\,B\,C$ (fig. 119), consideremos la cara $A\,O\,B$, que podremos suponer mayor que cada una de las otras dos, puesto que si fuera menor o igual a una de ellas, sería, con mayor razón, menor que la suma de las otras dos. Tomemos en dicha cara: *áng.* $B\,O\,D$ = *áng.* $B\,O\,C = a$ y tracemos la recta $A\,B$; sea D su intersección con $O\,D$. Tomemos luego $O\,C = O\,D$, y tracemos $C\,A$ y $C\,B$. En el triángulo $A\,B\,C$ el lado $A\,B$ es menor que la suma de $A\,C$ y $C\,B$, o sea: $A\,D + D\,B < A\,C + C\,B$.



(fig. 119)

Pero, en virtud de la igualdad de los triángulos $D\,O\,B$ y $C\,O\,B$ (por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido), tenemos $D\,B = C\,B$; por consiguiente, la desigualdad anterior se simplifica y nos da: $A\,D < A\,C$. Los triángulos $A\,O\,D$ y $A\,O\,C$ tienen, pues, dos lados respectivamente iguales y los terceros $A\,D$ y $A\,C$ desiguales; sabemos (G. P. N.° 143), que al menor de estos lados se le opone menor ángulo, es decir, que *áng.* $A\,O\,D$ < *áng.* $A\,O\,C$. Sumando a los dos miembros de esta desigualdad el ángulo a, resulta:

$$\text{áng. } A\,O\,D + \text{áng. } D\,O\,B < \text{áng. } A\,O\,C + \text{áng. } C\,O\,B$$

que simplificada, nos expresa la propiedad que deseábamos demostrar:

$$\text{áng. } A\,O\,B < \text{áng. } A\,O\,C + \text{áng. } C\,O\,B$$

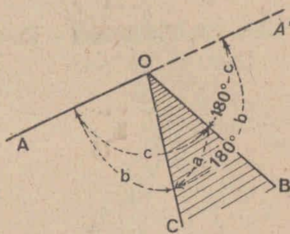
157. Como consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos que

Cada cara de un triedro es mayor que la diferencia de las otras dos.

Se demuestra como en los triangulos planos (G. P. N.° 119).

158. TEOREMA. — **La SUMA DE LAS CARAS de un triedro es menor que cuatro rectos.**

Sea $O\,A\,B\,C$ el triedro (fig. 120). Trazando la semirrecta $O\,A'$ opuesta a la arista $O\,A$, se forma otro triedro $O\,B\,C\,A'$ que tiene la cara $B\,O\,C$ común con el primero. Siendo a, b, c, las caras del triedro dado, las del nuevo triedro serán: a, $(180° - b)$, $(180° - c)$.



(fig. 120)

Aplicando al triedro $O\,B\,C\,A'$ la propiedad del (N.° 156), tenemos:

$$a < (180° - b) + (180° - c)$$

y pasando los términos b y c al primer miembro, resulta $\quad a + b + c < 360°$

o sea: $\quad a + b + c < 4$ *rectos*

que expresa la propiedad que deseábamos demostrar.

159. Como aplicación de la propiedad anterior, daremos el siguiente

TEOREMA. — **La SUMA DE LOS DIEDROS de un triedro está comprendida entre dos y seis rectos.**

En efecto, sea $O\,B\,A\,C$ un triedro y $O'A'B'C'$ su triedro suplementario. Por la propiedad anterior (N.° 158), tenemos:

$$a' + b' + c' < 360°$$

Pero las fórmulas del (N.° 148) nos dan:

$$a' = 180° - A\,, \quad b' = 180° - B\,, \quad c' = 180° - C$$

y sustituyendo estos valores en la desigualdad anterior, resulta: $\quad 180° - A + 180° - B + 180° - C < 360°$

de donde $180° < A + B + C$, o sea, 2 *rectos* $< A + B + C$

Resulta demostrada, pues, la primera parte del teorema.

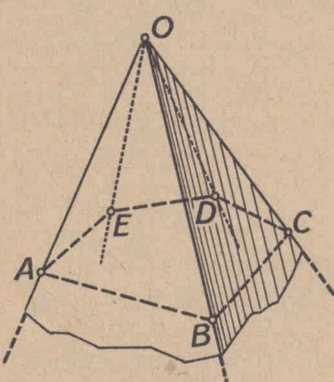
La suma $A + B + C$ es evidentemente menor que 6 rectos, porque cada una de sus partes es menor que 2 rectos, con lo cual queda demostrada la segunda parte del teorema.

Podemos resumir las dos propiedades en la expresión:

$$2 \text{ rectos} < A + B + C < 6 \text{ rectos}$$

Angulos poliedros; cóncavos y convexos

160. Definiciones.—Dado un polígono cualquiera $ABCDE$ (fig. 121) y un punto cualquiera O, no situado en el plano del polígono, considérense los ángulos convexos AOB, BOC, COD, DOE, EOA, formados por las semirrectas que unen O con los vértices del polígono. La superficie formada por esos ángulos limitará una parte del espacio, que se llama **ángulo poliedro.**



(fig. 121)

Como en el caso de triedros: O es el *vértice;* las semirrectas OA, OB, ... son las *aristas;* los ángulos planos AOB, BOC, ... son las *caras;* los diedros $EOAB$, $AOBC$,... formados por dos caras consecutivas, son los *diedros* del ángulo poliedro. Si tiene *tres* caras obtenemos el *triedro* ya definido anteriormente (N.° 134). (Triedro, quiere decir *tres* caras; y poliedro, *varias* caras).

161. Un ángulo poliedro se llama **convexo** o **cóncavo,** según lo sea respectivamente el polígono empleado para construirlo (G. P. N.° 175).

Un ángulo poliedro convexo se encontrará situado, pues, completamente en el semiespacio determinado por el plano de una cualquiera de sus caras.

Para leer un ángulo poliedro se procede como para los triedros: se lee primeramente el vértice y después un punto de cada arista. Así, el ángulo poliedro de la (fig. 121) se lee: $OABCDE$.

Relación entre una cara y la suma de las demás

162. **Comparación de caras.** — En el (N.° 156) ya demostramos que en todo triedro una cara cualquiera es menor que la suma de las otras dos. Para un ángulo poliedro *convexo* cualquiera, demostraremos ahora el siguiente

TEOREMA. — **Cada cara de un ángulo poliedro es menor que la suma de las demás.**

En efecto, en el ángulo poliedro de la (fig. 121) aplicando convenientemente a cada uno de los triedros $O\,A\,B\,C$, $O\,A\,C\,D$, $O\,A\,D\,E$, la propiedad del (N.° 116) tenemos:

$$\text{áng. } A\,O\,B < \text{áng. } B\,O\,C + \text{áng. } C\,O\,A$$
$$\text{áng. } C\,O\,A < \text{áng. } C\,O\,D + \text{áng. } D\,O\,A$$
$$\text{áng. } D\,O\,A < \text{áng. } D\,O\,E + \text{áng. } E\,O\,A$$

Sumando ordenadamente estas desigualdades y suprimiendo los términos comunes de ambos miembros, resulta:

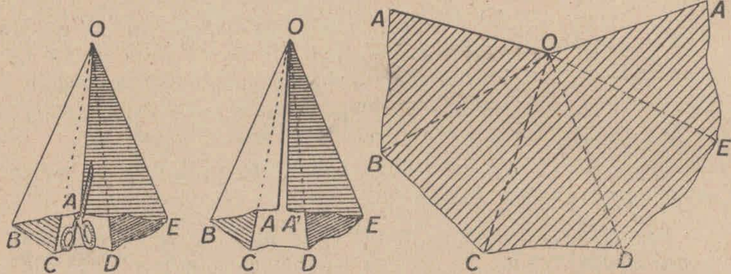
$$\text{áng. } AOB < \text{áng. } BOC + \text{áng. } COD + \text{áng. } DOE + \text{áng. } EOA$$

que expresa la propiedad que deseábamos demostrar para el ángulo poliedro de cinco caras de la (fig. 121). Es natural que el razonamiento hubiera sido el mismo para cualquiera que fuere el número de caras del ángulo poliedro dado.

163. Un ángulo poliedro no resulta *determinado* conociendo solamente sus caras, es decir, que se puede *deformar*, de manera análoga que no resultan determinados los polígonos con sólo dar sus lados.

164. **Suma de las caras.** — Construya el estudiante un ángulo poliedro de cartón o cartulina (fig. 122); córtelo luego a lo largo de una de sus aristas como indica la figura, y extiéndalo sobre un plano. Verá así, que la suma de las caras del ángulo poliedro primitivo resulta *menor* que 360°, o sea, menor que 4 *rectos;* con esta experiencia, resulta verificada la siguiente

PROPIEDAD. — **La suma de las caras de un ángulo poliedro convexo es menor que cuatro rectos.**

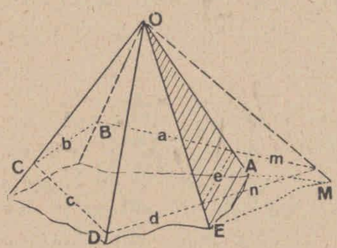


(fig. 122)

Esta propiedad puede observarse en las sombrillas japonesas, las que se pueden abrir hasta que las varillas se encuentren en un mismo plano; en este caso, la suma de los ángulos planos formados por cada dos varillas consecutivas es igual a cuatro rectos. Cerrando en parte la sombrilla, las varillas se dispondrán según las aristas de un ángulo poliedro. De esta manera, los ángulos formados por cada dos varillas consecutivas resultarán ahora menores que antes y, por consiguiente, su suma será también menor que la anterior, es decir, menor que cuatro rectos.

165. La propiedad anterior, evidenciada mediante un procedimiento intuitivo, puede enunciarse en forma de *teorema;* expondremos, pues, su *demostración racional.*

Sea $O\,A\,B\,C\,D\,E$ el ángulo poliedro (fig. 123). Como las dos caras $A\,O\,B$ y $D\,O\,E$ tienen el punto común O, se interceptarán por una recta $O\,M$ que, con las rectas $O\,A$ y $O\,E$ forman el triedro $O\,M\,A\,E$, cuya cara $A\,O\,E$ es común con el ángulo poliedro dado.



(fig. 123)

Si para abreviar notaciones, a la cara $A\,O\,B$ la designamos con a, la $B\,O\,C$ con b, ..., la $E\,O\,M$ con n, y la $M\,O\,A$ con m, aplicando al triedro $OMAE$ la propiedad del (N.° 156) tenemos:

$$e < m + n$$

Sumando a los dos miembros de esta desigualdad las caras del ángulo poliedro dado exceptuando la cara e común con el triedro $OMAE$, resulta:

$$(a + b + c + d) + e < (m + a) + b + c + (d + n)$$

Pero, por estar en un mismo plano las caras m y a, tenemos: $m + a = \text{áng. } MOB$.

Análogamente, $d + n = \text{áng. } DOM$.

Por consiguiente, la desigualdad anterior puede escribirse así: $a + b + c + d + e < \text{áng. } MOB + b + c + \text{áng. } DOM$

Por ser la suma indicada en el primer miembro de la desigualdad anterior, la de las *cinco* caras del ángulo poliedro dado, la representaremos con S_5, y la del segundo miembro, por ser la de las *cuatro* caras del ángulo poliedro $OMBCD$ la representaremos con S_4; podemos escribir, pues:

$$S_5 < S_4$$

Repitiendo el razonamiento para el poliedro de cuatro caras, demostraríamos que la suma de sus caras es menor que la suma de las caras de un triedro, que representamos con S_3, y tendríamos, pues:

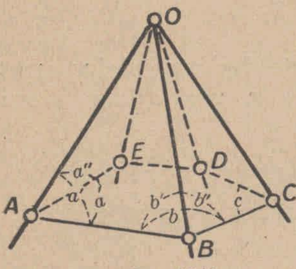
$$S_4 < S_3$$

Pero como en virtud del (N.° 158) tenemos $S_3 < 4 \text{ rectos}$ aplicando a estas desigualdades la ley transitiva, resulta:

$$S_5 < S_4 < S_3 < 4 \text{ rectos}, \quad \text{o sea} \quad S_5 < 4 \text{ rectos}$$

Se comprende fácilmente que el razonamiento será el mismo cualquiera que fuese el número de caras del ángulo poliedro dado.

166. Para satisfacer la curiosidad del buen estudiante, a continuación daremos **otra demostración** del teorema anterior.



(fig. 124)

Sea (fig. 124) el ángulo poliedro $OABCDE$. Cortemos todas sus aristas por un plano, determinando así un polígono $ABCDE$. Cada vértice de este polígono es, a su vez, vértice de un ángulo triedro; aplicando a cada uno la propiedad del (N.° 156) y empleando las notaciones de la figura, tendremos:

$$a < a' + a'' \quad ; \quad b < b' + b'' \quad ; \quad c < c' + c'' \quad ; \quad \ldots \text{ etc.}$$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades, resulta:

$$a + b + c + d + e < a' + a'' + b' + b'' + c' + \ldots + e''.$$

Pero el primer miembro expresa la suma de los ángulos del polígono $ABCDE$; en general, si suponemos tenga n lados, dicha suma (véase G. P. N.° 176) valdrá $180° (n - 2)$.

Por otra parte, si representamos con $(S.O)$ a la suma de los ángulos planos (o caras) del ángulo poliedro de vértice O, y recordando que la suma de los ángulos de un triángulo vale 180°, tendremos, para el conjunto de los n triángulos OAB, OBC, ... etc.

$$(S.O) + (a' + a'' + b' + b'' + \ldots + e'') = 180° \times n$$

de donde

$$a' + a'' + b' + b'' + \ldots + e'' = 180° \, n - (S.O).$$

Sustituyendo estos valores en la última desigualdad, tendremos:

$$180° \, (n - 2) < 180° \, n - (S.O)$$

y simplificando resulta:

$$-360° < -(S.O) \quad , \text{ o sea, } \quad (S.O) < 360°$$

* * *

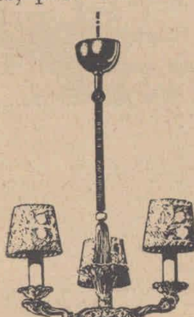
CAPITULO VIII

EJES DE SIMETRIA DE ORDEN SUPERIOR

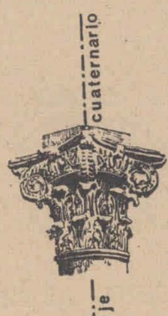
167. Definiciones. — En el (N.° 58) vimos que, cuando una figura coincide consigo misma mediante una rotación de 180° alrededor de un eje, es decir, de 360° : 2, se llama simétrica respecto a dicho eje. Pero, para distinguir dicha simetría de otras que veremos en seguida, se le llama *simetría binaria* (o de orden *dos*), para indicar que la figura puede ocupar *dos* posiciones diferentes, pero coincidentes.

Así, por ejemplo, tiene eje de simetría binaria el jarrón dibujado en la página 40.

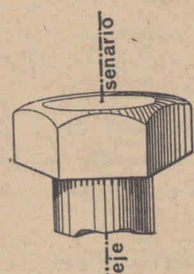
También puede ocupar una figura *tres* posiciones diferentes, pero coincidentes, mediante rotaciones de 360° : 3 = 120°



(fig 125)



(fig. 126)



(fig. 127)

alrededor de un eje; en ese caso, decimos que la figura tiene *simetría ternaria* (o de orden *tres*) respecto a dicho eje.

Así, por ejemplo, tiene simetría ternaria la lámpara de tres luces indicada en la (fig. 125).

Análogamente, mediante rotaciones de $360° : 4 = 90°$ se define la *simetría cuaternaria* (o de orden *cuatro*); mediante rotaciones de $360° : 5 = 72°$ se define la simetría de *orden cinco;* mediante rotaciones de $360° : 6 = 60°$ la *simetría senaria* (o de orden *seis*); etc.

Estas simetrías se llaman de **orden superior.** En general, podemos dar la siguiente

DEFINICIÓN. — **Cuando una figura puede tomar n posiciones diferentes, pero coincidentes, mediante rotaciones de $360° : n$, decimos que tiene un eje de simetría de orden n.**

EJEMPLOS. — El capitel de la (fig. 127) tiene un eje de simetría cuaternaria; la cabeza de bulón de la (fig. 127) tiene un eje de simetría senaria; la hélice dibujada en la pág. 40 tiene un eje de simetría cuaternaria.

Se comprende fácilmente que, si un eje de simetría es de orden n, es también de orden d, siendo d un divisor cualquiera de n.

Un eje de simetría de orden par es, pues, también, un eje binario.

Un cuerpo de revolución puede considerarse como una figura con un eje de simetría de cualquier orden, es decir, que a n puede asignársele cualquier valor; decimos entonces que un cuerpo de revolución es una figura con un eje de simetría de orden infinito.

El estudio de la simetría de orden superior tiene gran aplicación en Cristalografía y, en esepcial, las simetrías binaria, ternaria, cuartenaria y senaria.

Simetría del plano, de la recta y de los triedros

168. El conocimiento de los elementos de simetría de las figuras simples es de inmediata aplicación para determinar elementos de simetría de las figuras compuestas de aquéllas; al efecto, serán elementos de simetría de las figuras compuestas los elementos *comunes* de las figuras simples que las componen.

169. **Simetría del plano.** — Recordando las definiciones de simetría dadas en el (N.° 56) y siguientes, podemos decir que un plano α admite los siguientes *elementos de simetría*:

a) Como *PLANOS DE SIMETRIA: el mismo plano* α, *y todos los perpendiculares al* α.

b) Como *EJES DE SIMETRIA: todas las rectas situadas en el plano* α, *y todas las que le son perpendiculares.*

c) Como *CENTRO DE SIMETRIA: todos sus puntos.*

NOTA. — Si se tratara de un *semiplano*, tendría como planos de simetría: el mismo semiplano, y todos los planos perpendiculares a su **borde.**

Como ejercicio, determine el estudiante si el semiplano tiene ejes y centro de simetría.

170. **Simetría de la recta.** — Como en el párrafo anterior, podemos decir que una recta r admite los siguientes *elementos de simetría*:

a) Como *PLANOS DE SIMETRIA: todos los planos que contienen la recta* r, *y todos los planos que le son perpendiculares.*

b) Como *EJES DE SIMETRIA: la misma recta* r, *y todas las que le son perpendiculares.*

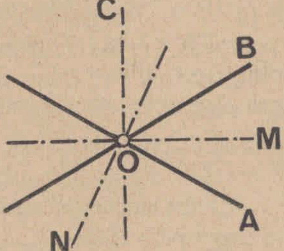
c) Como *CENTRO DE SIMETRIA: todos sus puntos.*

NOTA. — Si se tratara de una *semirrecta*, tendría como planos de simetría todos los planos que la contienen; como eje de simetría la misma semirrecta; no tendría centro de simetría.

Como ejercicio, determine el estudiante los elementos de simetría de un *segmento de recta.*

171. **Simetría de figuras compuestas de planos y rectas.** — Sea, por ej., la figura formada *por dos rectas* O A *y* O B *que se cortan* en O (fig. 128).

De acuerdo con el (N.° 168) dicha figura tendrá como elementos de simetría los elementos comunes a las rectas OA y OB. Tendrá, pues: como *plano de simetría*, el plano AOB que forman las rectas dadas; como *eje de simetría*, la perpendicular OC al plano AOB; como *centro de simetría*, el punto O de intersección de las dos rectas dadas.

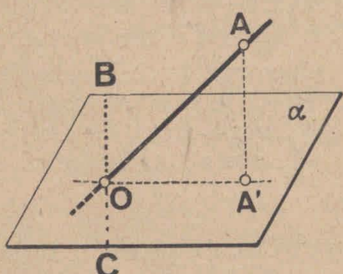


(fig. 128)

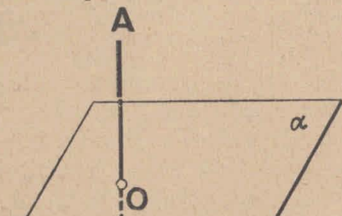
Nótese que los elementos así determinados *pueden no ser los únicos*. Así, la figura anterior tiene además: como *ejes de simetría*, las bisectrices OM y ON de los ángulos de las rectas dadas; como *planos de simetría*, los planos que contienen dichas bisectrices y son perpendiculares al plano AOB de las dos rectas dadas.

En resumen, la figura formada por dos rectas OA y OB que se cortan en O tiene como elementos de simetría: *tres ejes, tres planos* y *un centro* de simetría, que son respectivamente las tres aristas, las tres caras y el vértice del triedro trirrectángulo $OMNC$ formado por las bisectrices OM, ON de los ángulos de las rectas dadas, y la perpendicular OC al plano de dichas rectas.

172. Como otro ejemplo, sea la figura formada por *una recta OA y un plano α que se intercepton en O* (fig. 129).



(fig. 129)



(fig. 130)

Si la recta es *oblicua* al plano, de acuerdo con el (N.° 168), tendrá, pues: como *plano de simetría,* el plano $A\ O\ A'$ perpendicular al α y que contiene la recta $O\ A$; como *eje de simetría,* la recta $B\ C$ trazada por O en el plano α, perpendicularmente a $O\ A$, es decir, perpendicular al plano $A\ O\ A'$; como *centro de simetría,* el punto O .

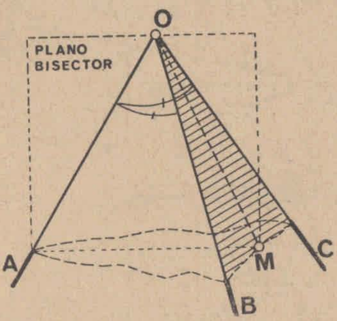
Si la recta dada es *perpendicular al plano* (fig. 130), tendrá: como *plano de simetría,* todo plano que contenga la recta $O\ A$, así como el mismo plano α.

Como ejercicio, determine el estudiante los restantes elementos de simetría.

173. Simetría del triedro. — El triedro no tiene elementos de simetría, excepto cuando es **isósceles**, que admite *un plano de simetría.*

Sea, por ej., el triedro $O\ A\ B\ C$ (fig. 131), que suponemos tenga iguales las caras $A\ O\ B$ y $A\ O\ C$.

El plano $A\ O\ M$, bisector del diedro de arista $O\ A$, es



(fig. 131)

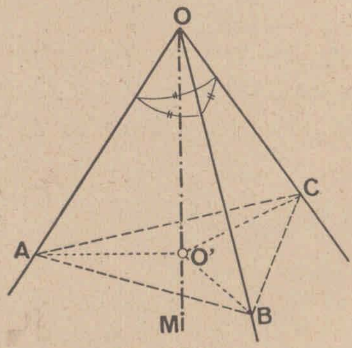
plano de simetría del triedro dado. En efecto, la recta simétrica de $O\ B$ respecto a dicho plano está contenida en el plano $A\ O\ C$ y forma con $O\ A$, por hipótesis, un ángulo igual al $A\ O\ B$; es, pues, la recta $O\ C$. Las rectas $O\ B$ y $O\ C$ se encuentran, por consiguiente, en un mismo plano *B O C* perpendicular al plano bisector *A O M*, y se cortan por la bisectriz *O M* del ángulo *B O C*.

Con esta simetría resulta demostrado, pues, que los diedros *O B* y *O C* opuestos a caras iguales de un triedro isósceles son iguales, por ser figuras simétricas respecto a un plano (N.° 64, 2.ª).

174. Cuando el triedro es **equilátero**, admite *tres planos y un eje de simetría.*

Sea, por ej., el triedro *O A B C* (fig. 132) que suponemos tenga iguales las tres caras; de acuerdo con la propiedad del párrafo anterior, admitirá como *planos de simetría* los tres planos bisectores de los diedros del triedro.

Como la figura formada por dos de dichos planos, admite



(fig. 132)

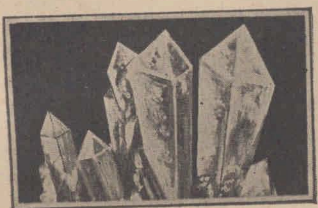
el tercero como plano de simetría, y por ser esos tres planos los bisectores de los diedros de un triedro, se interceptarán por una misma recta (lugar geométrico de los puntos equidistantes de las tres caras del triedro); aquellos tres planos contendrán, pues, una misma recta *O M*, que es el *eje de simetría* del triedro.

La recta *O M* es un *eje de simetría ternaria.* En efecto, si trazamos un plano *A B C* perpendicular a la recta *O M*, la interceptará en *O'* y a las aristas del triedro en los puntos

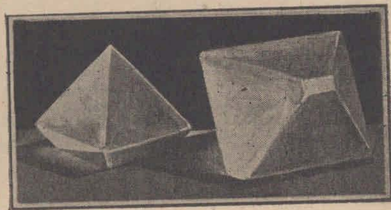
A, B, C; el triángulo $A\,B\,C$ así formado, por tener como ejes de simetría las rectas $A\,O'$, $B\,O'$, $C\,O'$, es equilátero (G. P. N.° 148) y admite como eje de simetría ternaria la perpendicular $O\,M$ trazada en O' a su plano; análogamente respecto del triedro dado.

Poliedros

175. Definiciones. — Si observamos un cristal, que es la forma que toman ciertos cuerpos en la naturaleza (por ej., en el grupo de cristales de cuarzo de la fig. 133), o los que se obtienen en laboratorio cuando dichos cuerpos pasan al estado sólido (por ej., los cristales de alumbre de la fig. 134),



(fig. 133)



(fig. 134)

vemos que está limitado por polígonos planos; esta forma geométrica se llama *poliédrica.*

En general, tendremos la siguiente

DEFINICIÓN. — **Se llama POLIEDRO la parte de espacio limitada por polígonos planos.**

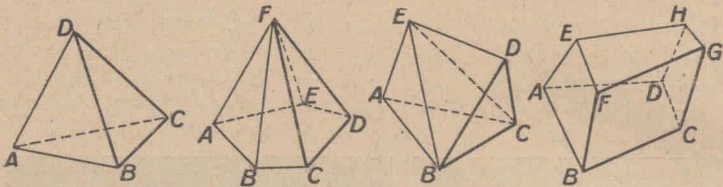
Los polígonos que limitan el poliedro se llaman **caras**; los *lados* y los *vértices* de dichos polígonos se llaman, respectivamente, **aristas y vértices del poliedro.**

Se llaman **diagonales** de un poliedro los segmentos de rectas que tienen sus extremos en dos vértices no pertenecientes a una misma cara.

Un poliedro no puede tener menos de *cuatro caras;* en este caso se llama *tetraedro.* Si tiene *cinco* caras es un *pentae-*

dro; . . . ; de 15, *pentadecaedro; de* 20 *icosaedro.* Se sigue una nomenclatura análoga a la empleada en Geometría plana para los polígonos.

Un poliedro se llama **convexo** si el plano de una cualquiera de sus caras deja al poliedro en uno solo de los semiespacios que determina. En caso contrario, es **cóncavo.** En lo sucesivo, trataremos solamente de los poliedros convexos. En la (fig. 135) presentamos algunos poliedros convexos.



(fig. 135)

Para designar un poliedro, se leen las letras de sus vértices. Así, por ejemplo, el tetraedro de la figura se leerá: $A\,B\,C\,D$.

Prismas — Caras y bases

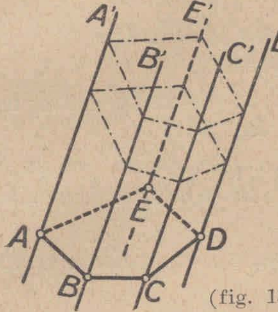
176. Superficie prismática. — Dado un polígono convexo $A\,B\,C\,D\,E$ (fig. 136), tracemos por sus vértices las rectas $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$, $D\,D'$, $E\,E'$, paralelas entre sí y no situadas en el plano del polígono. Las fajas limitadas por dos paralelas sucesivas forman una superficie, que se llama *superficie prismática indefinida;* el espacio que limita esta superficie se llama *prisma indefinido.*

Las rectas $A\,A'$, $B\,B'$, . . . se llaman *aristas,* y las fajas, *caras* del prisma indefinido.

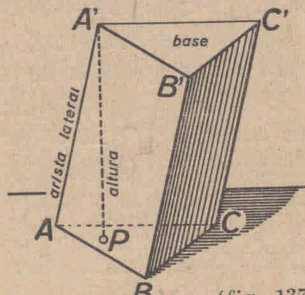
Un plano que corte una de las aristas, cortará a todas las otras, y por tanto, cortará al prisma según un polígono, que se llama una *seccción* del prisma; si el plano es perpendicular a las aristas, se obtiene lo que llamamos **sección recta,** de lo contrario se obtiene una **sección oblicua.**

177. Teorema. — **Las secciones paralelas de una superficie prismática indefinida son iguales.**

En efecto, consideremos dos secciones paralelas cualesquiera, indicadas con líneas de punto y raya en la (fig. 136).



(fig. 136)



(fig. 137)

Serán polígonos de lados ordenadamente paralelos e iguales (por ser lados opuestos de paralelogramos); los ángulos de las secciones también resultarán ordenadamente iguales en virtud del (N.° 30), por tanto, los polígonos serán iguales.

Como *corolario* de la propiedad anterior, tenemos:

Todas las secciones rectas de una superficie prismática son iguales.

178. **Definiciones.** — Si se corta una superficie prismática indefinida por dos planos paralelos, se determinan, como *secciones*, dos polígonos iguales, y sobre las caras tantos paralelogramos como lados tenga uno de aquellos polígonos. En consecuencia, daremos la siguiente

Definición. — **Se llama PRISMA el poliedro limitado por dos polígonos iguales, situados en planos paralelos, y por tantos paralelogramos como lados tenga uno de aquellos polígonos** (fig. 137).

Los dos polígonos indicados, *ABC* y *A'B'C'*, se llaman **bases** del prisma, y los paralelogramos, *A B B'A'*, *B C C'B'*, ..., **caras** del prisma.

El conjunto de las caras laterales de un prisma se llama *superficie letaral,* y el de todas las caras, *superficie total.*

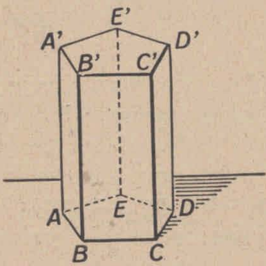
Las aristas del prisma no pertenecientes a las bases se llaman **aristas laterales**; en el prisma de la (fig. 137) son los segmentos: AA', BB', CC'.

Las aristas laterales de un prisma son iguales (por ser dos a dos lados opuestos de un paralelogramo).

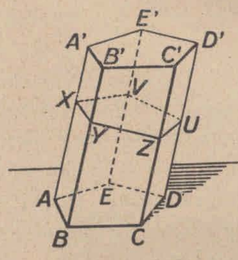
Se llama **altura** de un prisma a la distancia entre las dos bases (PA' en el prisma de la fig. 137).

Un prisma se llama *triangular, cuadrangular, pentagonal, ...* etc., según que la base sea un *triángulo,* un *cuadrilátero,* un *pentágono,* ... etc.

Así, por ej., en la (fig. 137) presentamos un prisma trian-



(fig. 138)



(fig. 139)

gular; en las (figs. 138 y 139), prismas pentagonales (el polígono $XYUZV$ es la sección recta del segundo prisma).

Prisma recto y oblicuo — Prisma regular

179. Definición. — **Un prisma es RECTO cuando las aristas son perpendiculares a los planos de las bases; de lo contrario es OBLICUO.**

En la (fig. 138) presentamos un prisma recto, y en las (figs. 137 y 139), prismas oblicuos.

En un prisma recto, se puede tomar como altura una cualquiera de sus aristas laterales; las caras laterales son rectángulos.

Un prisma es REGULAR cuando es recto y tiene como bases un polígono regular.

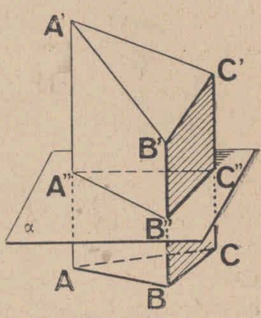
En la (fig. 138) presentamos un prisma regular.

180. Tronco de prisma. — La parte de prisma indefinido comprendida entre dos planos no paralelos, se llama *tronco de prisma.* Si el prisma indefinido es triangular, cuadrangular, pentagonal, ... se obtiene, respectivamente, un *tronco de prisma triangular, cuadrangular,* ... etc.

En la (fig. 140) presentamos un tronco de prisma triangular *A B C A'B'C'*.

Los polígonos determinados por aquellos dos planos, se llaman *base* del tronco de prisma; en el de la (fig. 140) las bases son los triángulos *ABC* y *A'B'C'*.

Las aristas del tronco no pertenecientes a las bases, se llaman *aristas laterales* (*A A'*, *B B'*, ...).



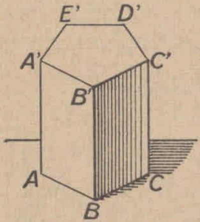
(fig. 140)

El triángulo *A'' B'' C''* obtenido seccionando el tronco de prisma por un plano *α* perpendicular a las aristas laterales, se llama *sección* recta del tronco de prisma.

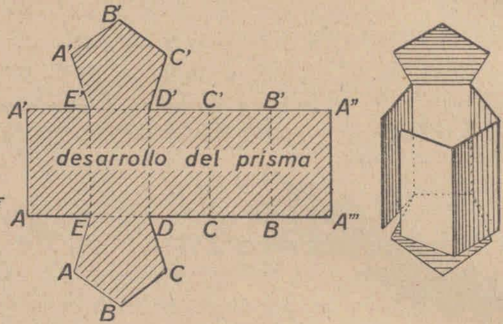
181. Desarrollo del prisma recto. — Supongamos que construímos con cartulina un prisma recto (fig. 141) *A B C D E A' B' C' D E'*; si lo cortamos por una de las aristas laterales y por las de las bases, excepto una en cada base, y extendemos luego la figura obtenida sobre un plano, obtendremos lo que se llama el *desarrollo del prisma.*

Como las caras laterales del prisma recto son rectángulos de igual altura, resulta fácil ver en la figura, que su desarrollo estará formado por un rectángulo *A A' A'' A'''* de altura igual a la del prisma y de base igual al perímetro de uno de los polígonos de las bases, y además, dos polígonos *A B C D E* y *A' B' C' D' E'* iguales a las bases.

Inversamente, si recortamos dos polígonos iguales y un rectángulo cuya base sea igual al perímetro de uno de aquellos polígonos, y los doblamos convenientemente, podremos construir un modelo de prisma recto (fig. 142). La unión



(fig. 141)



(fig. 142)

de las caras se realiza pegando unas tiras de papel del lado exterior, o dejando a algunas aristas unas tiras de la misma cartulina, que luego se pegan del lado interior.

NOTA. — Consideramos muy conveniente que, empleando el procedimiento recientemente indicado, construya el estudiante un prisma recto, para luego emplearlo en la verificación del cálculo previo que hará del número de vértices, aristas, ángulos planos, caras y diedros.

Paralelepípedos. — Propiedades fundamentales

182. DEFINICIÓN. — **Se llama PARALELEPÍPEDO el prisma cuyas bases son paralelogramos** (figs. 143 y 144).

Todas las caras de un paralelepípedo son, pues, *paralelogramos.*

Se llaman *caras opuestas* de un paralelepípedo, las que no tienen aristas comunes; por ej., las caras *ABCD* y *A'B'C'D'*.

Dos aristas paralelas y no situadas en una misma cara, se dice que son *opuestas;* por ej., las aristas *B C* y *A' D'*.

183. *Un paralelepípedo puede considerarse como prisma de tres modos diferentes;* es decir, considerando como bases dos caras opuestas cualesquiera. En consecuencia, y por ser iguales las bases de un prisma, podemos enunciar la siguiente

PROPIEDAD. — **Las caras opuestas de un paralelepípedo son paralelas e iguales.**

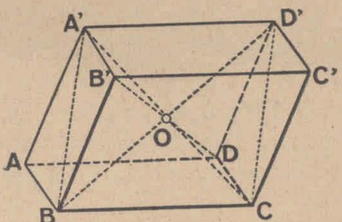
Como consecuencia inmediata de esta propiedad, tenemos:

Las aristas de un paralelepípedo son iguales y paralelas cuatro a cuatro.

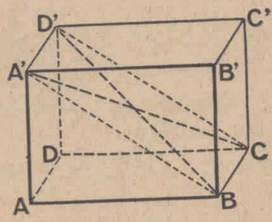
184. Si las doce aristas de un paralelepípedo son iguales entre sí, sus caras serán entonces seis *rombos* iguales, y el paralelepípedo se llama *romboedro.*

Ciertos cristales importantes, como el *espato de Islandia,* tienen la forma romboédrica. Nótese que, en un romboedro se pueden elegir dos vértices opuestos, donde los tres ángulos planos sean agudos, o los tres obtusos.

185. TEOREMA. — **Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en su punto medio.**



(fig. 143)



(fig. 144)

Sea *A B C D A'B'C'D'* el paralelepípedo (fig. 143), cuyas cuatro diagonales son *A C'*, *B D'*, *C A'*, *D B'*. Demostraremos que el punto medio *O* de dos cualesquiera de ellas, por ej., de *B D'* y *C A'*, es común. En efecto, en el cuadrilátero *B C D'A'*, que es un paralelogramo, por tener los lados *B C* y *A'D'* iguales y paralelos, sabemos (G. P. N.° 208, 3.°), que las diagonales se cortan en su punto medio.

186. Paralelepípedo rectangular. — Un paralelepípedo, como el prisma, puede ser *recto* (fig. 144) u *oblicuo.* Si la base de un *paralelepípedo recto* es un *rectángulo,* se llama **paralelepípedo rectangular,** y sus seis caras son entonces rectángulos.

Un paralelepípedo rectangular es un prisma recto, cualquiera que sea la cara que se considere como base, puesto que cada arista es perpendicular a sus aristas contiguas y, por consiguiente, a los planos de las caras que ellas determinan.

Todo paralelepípedo rectangular consta de ocho triedros trirrectángulos, y se le llama, también, *ortoedro.*

La generalidad de las habitaciones y cajas tienen la forma de paralelepípedos rectangulares.

En un paralelepípedo rectangular las tres aristas concurrentes en un vértice se llaman *dimensiones* del paralelepípedo. (Por ej., en la fig. 144 las tres dimensiones pueden ser: AB, AD, AA').

A las tres dimensiones de un paralelepípedo rectangular se les suele llamar, también: *largo, ancho* y *alto,* respectivamente.

187. Teorema. — **En un paralelepípedo rectangular las diagonales son iguales.**

Demostraremos que dos diagonales cualesquiera, por ej., BD' y CA' son iguales. En efecto, si el paralelepípedo $ABCD\ A'B'C'D'$ (fig. 144) es rectangular, el cuadrilátero $BCD'A'$, formado por dos aristas opuestas BC y $A'D'$, es un rectángulo, porque las aristas BC y $A'D'$ son perpendiculares a las caras paralelas $ABB'A'$ y $DCC'D'$; pero sabemos (G. P. N.° 219), que las diagonales BD' y CA' de un rectángulo son iguales entre sí.

188. Cubo. — El paralelepípedo rectangular cuyas tres dimensiones son iguales se llama *cubo* (fig. 1).

Las caras de un cubo son seis cuadrados iguales.

El cubo resulta determinado con sólo dar la arista.

Pirámide — Vértice — Caras laterales y base

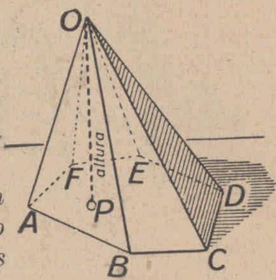
189. DEFINICIÓN. — **Se llama PIRAMIDE la parte de ángulo poliedro comprendida entre el vértice del mismo y un plano que corte todas las aristas** (fig. 145).

El *vértice* O del ángulo poliedro se llama **vértice de la pirámide.**

El *polígono* de sección, o sea la cara $A\,B\,C\,D\,E\,F$ es la **base.**

Es natural que esta definición equivale a esta otra:

Se llama PIRAMIDE al poliedro en el que una de las caras es un polígono cualquiera, y las otras son triángulos que tienen por bases respectivas los diferentes lados de la cara poligonal y, como vértice común, un punto exterior a dicha cara.



(fig. 145)

Las caras triangulares $A\,B\,O$, $B\,C\,O$, ... se llaman **caras laterales.**

El conjunto de las caras laterales de una pirámide se llama *superficie lateral*, y el de todas las caras, *superficie total.*

Las aristas $O\,A$, $O\,B$, ... no pertenecientes a la base, son las **aristas laterales.**

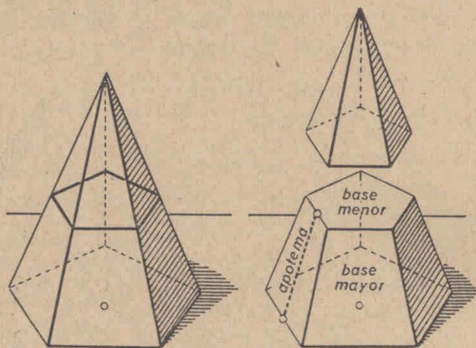
La distancia $O\,P$ del vértice al plano de la base es la **altura** de la pirámide.

Una pirámide se llama *triangular, cuadrangular, pentagonal, ...* etc., según que la base sea un *triángulo*, un *cuadrilátero*, un *pentágono*, ..., etc.

Así, por ej., es hexagonal la pirámide representada en la (fig. 145).

En la pirámide triangular, que se llama también *tetraedro* (N.° 175), una cualquiera de sus caras puede considerarse como base, y como vértice, el opuesto a esa base.

190. Tronco de pirámide. — Si seccionamos una pirámide por un plano paralelo al de la base, queda descompuesta en una pirámide menor y un poliedro llamado **tronco de pirámide** o **pirámide truncada** (fig. 146).



(fig. 146)

Esta sección y la base de la pirámide se llaman **bases** del tronco (base *menor* y base *mayor* respectivamente).

La *distancia* entre las dos bases se llama **altura** del tronco.

Pirámide regular

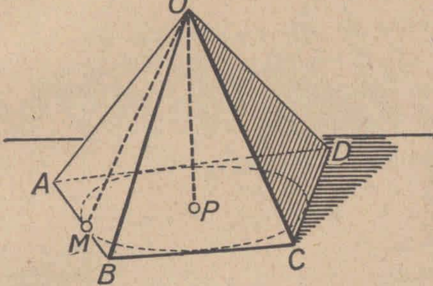
191. Definiciones. — Una pirámide es *recta*, cuando *su base es un polígono circunscripto a una circunferencia, cuyo centro es el pie de la altura de la pirámide;* de lo contrario, la pirámide es *oblicua.*

Las (figs. 147 y 148) representan pirámides rectas, y la (fig. 145), una pirámide oblicua, siendo $O P$ las alturas respectivas.

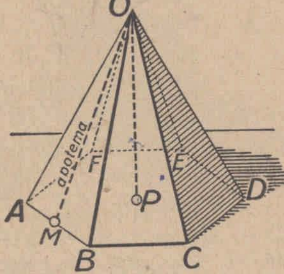
Como caso particular, en una pirámide recta la base puede ser un *polígono regular* (fig. 148); damos entonces la siguiente

DEFINICIÓN. — **Una pirámide es REGULAR, cuando es recta y tiene como base un polígono regular.**

192. Propiedades. — 1.ª *Las aristas laterales de una pirámide regular son iguales.* En virtud de ser OA, OB, OC, ... (fig. 148) segmentos de oblicuas de proyecciones iguales (N.° 126).



(fig. 147)



(fig. 148)

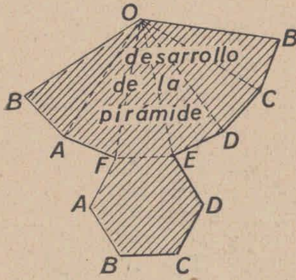
2.ª *Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles iguales.* Son isósceles, en virtud de la propiedad anterior, e iguales, por tener también iguales entre sí los lados del polígono de la base (por ser regular).

193. La altura OM común a las caras laterales de una pirámide regular, se llama **apotema.**

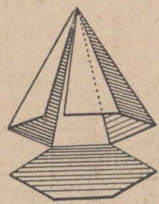
La apotema de una pirámide es, pues, *mayor* que la altura de la misma (por ser la primera el segmento de oblicua, y la segunda el de perpendicular, desde el vértice al plano de la base).

Si un tronco de pirámide ha sido obtenido seccionando una *pirámide regular*, se llama **tronco de pirámide regular.** En este caso, las caras laterales son *trapecios isósceles* iguales; la altura común de todos ellos, se llama **apotema** del tronco.

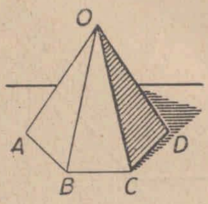
194. Desarrollo de la pirámide. — Análogamente que para el prisma, podremos construir una pirámide regular mediante su desarrollo, recortando en cartulina el polígono de la base y tantos triángulos equiláteros iguales como lados tenga la base, que dispondremos como indica la (fig. 149). Doblando luego el desarrollo por las aristas como indica la (fig. 150) y pegando los bordes convenientemente, obtendremos la pirámide que nos proponíamos construir (fig. 151).



(fig. 149)



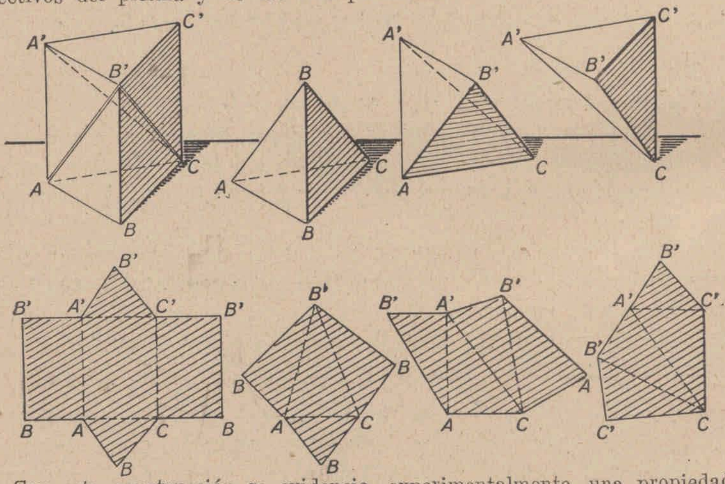
(fig. 150)



(fig. 151)

Como aplicación muy útil del desarrollo de prismas y pirámides, construya el estudiante un prisma recto triangular $A\,B\,C\,A'B'C'$, como indica la figura que sigue; luego, con sus elementos, constrúyanse las tres pirámides $A\,B\,C\,B'$, $A\,A'C\,B'$, $A'B'C'C$ que, yuxtapuestas, forman aquel prisma.

En la parte inferior de la figura se presentan los desarrollos respectivos del prisma y de las tres pirámides.

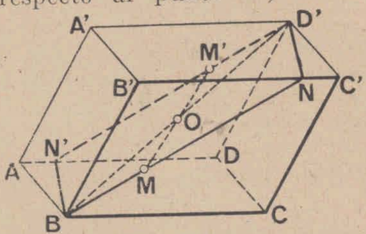


Con esta construcción se evidencia, experimentalmente, una propiedad que se estudiará en el cuarto curso de Matemáticas: que *el volumen de una pirámide triangular es la tercera parte del volumen de un prisma de igual base e igual altura.*

Propiedades de simetría de prismas y pirámides
Plano, ejes y centro de simetría

195. Simetría de un paralelepípedo cualquiera. — TEOREMA. — *El punto de intersección de las diagonales de un paralelepípedo, es CENTRO de simetría del mismo.*

Sea el paralelepípedo $A\ B\ C\ D\ A'B'C'D'$ (fig. 152) y O el punto de intersección de sus diagonales. Si M es un punto cualquiera de la superficie del paralelepípedo, demostraremos que su simétrico M' respecto al punto O, se encuentra también sobre la superficie del paralelepípedo.



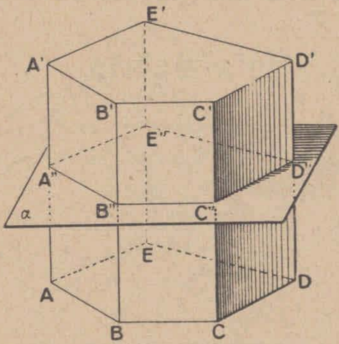
(fig. 152)

En efecto, el plano $M\ B\ D'$ que contiene el punto M y una cualquiera de las diagonales del paralelepípedo, intercepta al poliedro por el cuadrilátero $B\ N\ D'N'$, que es un paralelogramo, porque siendo paralelas las caras opuestas de un paralelepípedo, sus secciones por un plano son rectas paralelas (N.° 26). Pero el punto medio O de la diagonal $B\ D'$ del paralelogramo $B\ N\ D'\ N'$ es centro de simetría del mismo (G. P. N.° 209, 3.°), vale decir que el punto M' simétrico del M respecto al punto O, se encuentra sobre la superficie del paralelepípedo, porque se halla sobre la recta $D'\ N'$ de intersección del plano $B\ N\ D'$ con la cara $A\ D\ D'A'$ del paralelepípedo.

196. Simetría del prisma recto. — TEOREMA. — *El plano que pasa por los puntos medios de las aristas laterales de un prisma recto, es PLANO de simetría del mismo.*

Sea $A\ B\ C\ D\ E\ A'B'C'D'E'$ un prisma recto (fig. 153) y α el plano que pasa por los puntos medios A'', B'', C'', ... de las aristas laterales; demostraremos que α es plano de simetría del prisma.

En efecto, por ser $AA'' = A''A'$, $BB'' = B''B'$, $CC'' = C''C'$, los planos de las bases del prisma son, pues, paralelos al α y equidistantes de él (N.° 43); por consiguiente, todo punto de una de las bases tendrá su simétrico, con respecto al plano α, sobre la otra base.

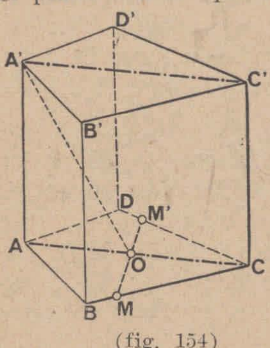


(fig. 153)

Análogamente, todo punto de una de las caras laterales del prisma, por ej., de la cara $ABB'A'$, tendrá su simétrico sobre la misma cara, por ser ésta perpendicular al plano α, e interceptarse por la recta $A''B''$ que es eje de simetría del rectángulo (G. P. N.° 221).

197. Teorema. — *Si la base de un prisma recto tiene eje de simetría, el plano que lo contiene y es perpendicular a la base es PLANO de simetría del prisma.*

Sea, por ej., $ABCDA'B'C'D'$ un prisma recto (fig. 154) cuya base es un romboide ($AB = AD$, $CB = CD$); como la diagonal AC es eje de simetría del romboide (G. P. N.° 232), y la arista AA' del prisma recto es perpendicular a las bases, el plano CAA' que contiene la diagonal AC, es perpendicular a las bases (N.° 12), y es plano de simetría del prisma.



(fig. 154)

En efecto, si M es un punto cualquiera del lado BC del rombo, su simétrico M' respecto a la diagonal AC se encuentra sobre el lado DC, es decir, sobre la superficie del prisma, teniéndose:

$$OM = OM' \quad \text{y} \quad MM' \perp AC$$

Además, MM' es perpendicular al plano CAA' en virtud del teorema de las tres perpendiculares (N.° 39).

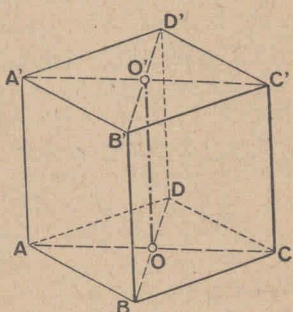
En consecuencia, los puntos M y M' son simétricos respecto al plano $C\,A\,A'$.

Si M no fuera un punto de una de las bases, sino cualquier punto de una de las caras del prisma, trazaríamos por él la sección recta del prisma, que sería un polígono igual al de las bases, y se demostraría como antes la simetría respecto del plano $C\,A\,A'$.

Nota. — El teorema anterior se demostraría análogamente si el eje de simetría de la base no fuera una de las diagonales; por ej., si la base fuera un polígono regular, se demostraría para el eje que une el punto medio de un lado con el centro de la base.

198. Teorema. — *Si la base de un prisma recto tiene centro de simetría, la recta que lo contiene y es perpendicular a la base es EJE de simetría del prisma.*

Sea, por ej., $A\,B\,C\,D\,A'B'C'D'$ un prisma recto (fig. 155) cuya base es un rombo, siendo el centro de simetría de la base el punto O de intersección de las diagonales.



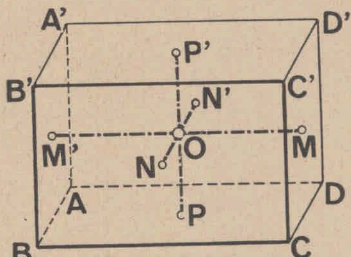
(fig. 155)

Si hacemos girar el prisma 180° alrededor de la perpendicular $O\,O'$ a las bases, el punto A coincidirá con C, y B con D; igualmente coincidirán las perpendiculares a las bases en dichos puntos, es decir, que coincidirán las aristas $A\,A'$ con $C\,C$; y $B\,B'$ con $D\,D'$. La recta $O\,O'$ es, pues, eje de simetría del prisma.

Nota. — En resumen, el prisma recto rombal tiene tres planos de simetria (N.os 196 y 197), que forman un triedro trirrectángulo cuyo vértice se encuentra en el punto medio de la recta $O\,O'$ que une los centros de las bases; tiene tres ejes de simetría que son las aristas de dicho triedro (N.° 65, a), siendo el vértice de este último, centro de simetría del prisma (N.° 65, b).

199. Simetría del paralelepípedo rectangular.—Sea, por ej., $ABCDA'B'C'D'$ el paralelepípedo dado (fig. 156). El punto O de intersección de las diagonales es *centro de simetría* (N.° 195).

El plano que pasa por los puntos medios de cuatro aristas paralelas entre sí es *plano de simetría* (N.° 196); este plano pasa por el centro y es paralelo a las bases; como el paralelepípedo rectangular se puede considerar como prisma recto de tres modos diferentes tiene, pues, *tres* planos de simetría (MON, MOP, NOP).



(fig. 156)

Siendo los tres planos de simetría perpendiculares entre sí dos a dos, el paralelepípedo rectangular admite, pues, *tres ejes de simetría* (N.° 65. a), que son las perpendiculares a las caras trazadas por el centro del paralelepípedo (MM', NN', PP').

200. Simetría del prisma regular. — Sea, por ej., el prisma hexagonal regular de la (fig. 157). El polígono de la base tiene como ejes de simetría las rectas que unen el centro de dicho polígono con los vértices, o con los puntos medios de los lados, es decir, las apotemas (G. P. N.^{os} 195-196); en consecuencia, como un prisma regular es también un prisma recto, en virtud del teorema del (N.° 197) tenemos:

Todo plano que contenga la recta de los centros de las bases de un prisma regular y una arista lateral, es un PLANO de simetría del prisma.

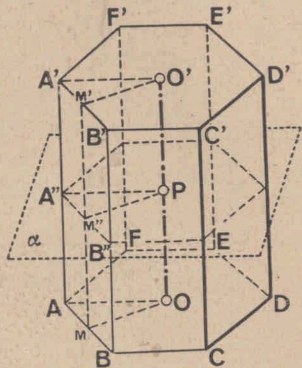
Todo plano que contenga la recta de los centros de las bases de un prisma regular y una apotema, es un PLANO de simetría del prisma.

En el prisma hexagonal de la (fig. 157), son planos de simetría los seis planos $OO'A'A$, $OO'M'M$, $OO'B'B$, ...

En virtud del teorema del (N.° 196) tendrá también como plano de simetría el α, que une los puntos medios de las aristas laterales.

El prisma hexagonal regular tiene, pues, **siete planos de simetría.**

De acuerdo con el teorema del (N.° 198), el prisma regular tendrá como *eje de simetría* la recta $O\,O'$ que une los centros de las bases. También serán *ejes de simetría* las seis intersecciones del plano α con los planos de simetría que contienen el eje $O\,O'$, es decir, las rectas PA'', PM'', PB''.



(fig. 157)

El prisma hexagonal regular tiene, pues, **siete ejes de simetría.**

Si el polígono de la base tiene un número *par* de lados, dos por lo menos de los planos de simetría que contienen $O\,O'$ son perpendiculares entre sí, y como también son perpendiculares al plano α se forma, pues, con esos planos de simetría, un triedro trirrectángulo, cuyo vértice P (punto medio del segmento $O\,O'$) es **centro de simetría.**

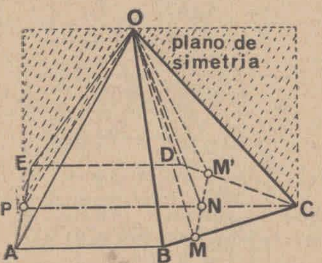
Si el polígono de la base tiene un número *impar* de lados, ya no tiene planos de simetría que conteniendo el eje $O\,O'$, sean perpendiculares entre sí; en consecuencia, en este caso la pirámide *no tiene centro de simetría.*

En general, si el polígono de la base de un prisma recto tiene n lados, el prisma admite: $n + 1$ planos de simetría; $n + 1$ ejes de simetría; un centro de simetría si n es par.

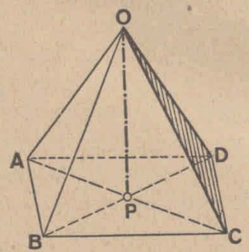
201. Simetría de la pirámide. — TEOREMA. — *Si la base de una pirámide tiene eje de simetría y el vértice se halla en el plano que, conteniendo dicho eje, es perpendicular a la base, dicho plano normal es PLANO de simetría de la pirámide.*

Sea, por ej., la pirámide pentagonal $O\,A\,B\,C\,D\,E$ (fig. 158), cuya base suponemos tenga $P\,C$ como eje de simetría, encontrándose el vértice O en el plano $O\,P\,C$ perpendicular a la base; demostraremos que $O\,P\,C$ es plano de simetría.

En efecto, si M es un punto cualquiera del lado $B\,C$ de la base, su simétrico M' respecto al eje $P\,C$ se encuentra sobre el lado $D\,C$, es decir, sobre la superficie de la pirámide, teniéndose: $N\,M = N\,M'$, y $M\,M' \perp P\,C$; además, $M\,M'$ es perpendicular al plano $O\,P\,C$ (N.° 53). En consecuencia, los puntos M y M' son simétricos respecto al plano $O\,P\,C$; pero como el punto O es simétrico de sí mis-



(fig. 158)



(fig. 159)

mo respecto a dicho plano $O\,P\,C$, las rectas $O\,M$ y $O\,M'$ que unen puntos simétricos son, pues, rectas simétricas con respecto a aquel plano.

Las infinitas rectas como las $O\,M$ que forman la cara $O\,B\,C$ de la pirámide, tienen sus simétricas sobre la cara $O\,D\,C$, y recíprocamente; en consecuencia, dichas caras son simétricas respecto del plano $O\,P\,C$. Igualmente se demostraría para las restantes caras de la pirámide.

202. Teorema. — *Si la base de una pirámide tiene centro de simetría y el vértice se halla en la recta que, pasando por dicho centro, es perpendicular a la base, dicha normal es EJE de simetría de la pirámide.*

Sea, por ej., la pirámide $O\,A\,B\,C\,D$ (fig. 159) cuya base es un paralelogramo de centro P, siendo $O\,P$ perpendicular a la base; decimos que $O\,P$ es eje de simetría de la pirámide.

Se demuestra, como lo hicimos ya para el prisma en el (N.° 198), mediante una rotación de 180° alrededor de la normal $O\,P$.

NOTAS. — 1.ª Como la base de una pirámide es única, y ésta a lo sumo tiene un centro de simetría, la pirámide tendrá, pues, a lo sumo, *un eje* de simetría.

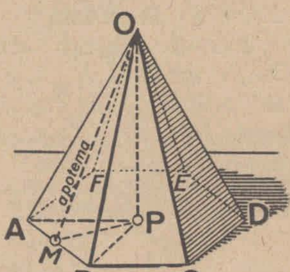
2.ª Se concibe fácilmente que una pirámide *no tiene centro* de simetría.

203. Simetría de la pirámide regular. — Como la base de una pirámide regular es un polígono regular, razonando como lo hicimos para el prisma regular (N.° 200) y aplicando el teorema del (N.° 201), tenemos:

Todo plano que contenga la altura de una pirámide regular y una arista lateral, es PLANO de simetría de la pirámide.

Todo plano que contenga la altura de una pirámide regular y una apotema, es PLANO de simetría de la pirámide.

En la pirámide hexagonal de la (fig. 160) son planos de simetría los seis planos $O\,P\,A$, $O\,P\,M$, $O\,P\,B$, ...



(fig. 160)

Si la base de la pirámide es un polígono de un número *par* de lados, ese polígono tiene centro de simetría (G. P. N.° 198); en consecuencia, en virtud del teorema del (N.° 202), la altura de la pirámide es **eje de simetría** de la misma.

Si la base de la pirámdie tiene un número *impar* de lados, ese polígono no tiene centro de simetría; en consecuencia, en este caso la pirámide *no tiene eje de simetría.*

Ejes de simetría de orden superior en los prismas y pirámides regulares

204. De acuerdo con la definición de simetría de orden superior dada en el (N.° 167), un prisma o una pirámide regular tienen ejes de simetría de dicho orden.

En efecto, como la base de ambos poliedros es un polígono regular, si lo hacemos girar sobre su plano y alrededor de su centro, podrá coincidir consigo mismo tantas veces como lados tenga el polígono (G. P. N.° 186).

Fácilmente se comprende, pues, que si se trata de un prisma (fig. 157), la arista AA' pasará a ocupar sucesivamente las posiciones de todas las aristas BB', CC' ...; si se trata de una pirámide (fig. 160), la arista OA pasará a ocupar sucesivamente las posiciones de todas las aristas OB, OC, ... En consecuencia, tenemos:

La recta que une los centros de las bases de un prisma regular es EJE DE SIMETRIA, de un orden igual al número de caras laterales del prisma.

La altura de una pirámide regular es EJE DE SIMETRIA, de un orden igual al número de caras laterales de la pirámide.

Este eje de orden superior se llama *eje* del prisma o de la pirámide, respectivamente.

Los otros ejes de simetría de un prisma regular (por ej., PA'', PM'', ... fig. 157), son ejes *binarios*.

EJEMPLOS. — Un prisma regular triangular tiene: un eje de simetría ternaria y tres ejes binarios. Un prisma octogonal regular tiene un eje de simetría de orden 8, y ocho ejes de simetría binaria. Una pirámide triangular regular tiene eje de simetría ternaria.

* * *

CAPITULO IX

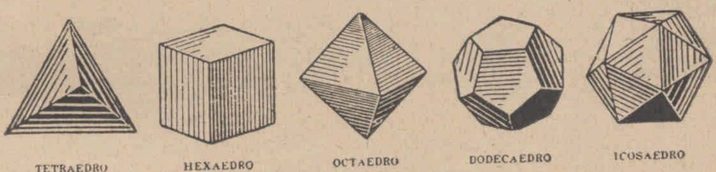
POLIEDROS REGULARES

205. DEFINICIÓN. — **Se llama POLIEDRO REGULAR el poliedro convexo cuyas caras son todas polígonos regulares iguales y concurren el mismo número de ellas en cada vértice.**

Como consecuencia de la definición, tenemos:

Los ángulos diedros de un poliedro regular son iguales.

Son poliedros regulares los indicados en la (fig. 161), que tienen 4, 6, 8, 12 o 20 caras, y se llaman respectivamente, *tetraedro, hexaedro* (o cubo), *octaedro, dodecaedro* e *icosaedro regular.*



(fig. 161)

206. TEOREMA. — **Los poliedros regulares no pueden ser más de cinco.**

En efecto; intentemos construir ángulos poliedros de caras iguales, empleando los distintos polígonos regulares, empezando con el triángulo equilátero, y siguiendo con el cuadrado, el pentágono regular, etc. Para que la construcción sea posible, recordemos que *la suma de los ángulos planos de un ángulo poliedro tiene que ser menor que* 360° (N.° 162).

Caras triangulares. — Como el ángulo del triángulo equilátero vale 60°, se podrá formar ángulos poliedros con 3, o con 4, o con 5 triángulos equiláteros iguales; con 6 ya no es posible, porque la suma de sus ángulos planos sería $60° \times 6 = 360°$; con mayor razón no podrá construirse ángulo poliedro con 7 o más triángulos equiláteros, porque la suma de los ángulos planos del poliedro sería *mayor* que 360°.

Los poliedros formados con el triángulo equilátero son, respectivamente: *el tetraedro, el hexaedro y el octaedro regular.*

Caras cuadradas. — Como el ángulo del cuadrado vale 90°, sólo se podrá formar un ángulo poliedro reuniendo 3 cuadrados iguales; con 4 ya no es posible, porque la suma de sus ángulos planos sería $90° \times 4 = 360°$, y tampoco con mayor número de cuadrados, porque la suma de los ángulos planos del poliedro resultaría *mayor* que 360°.

El poliedro formado con el cuadrado es el *hexaedro regular.*

Caras pentagonales. — Como el ángulo del pentágono regular vale 108°, sólo se podrá formar un ángulo poliedro reuniendo 3 pentágonos regulares iguales; con 4 ya no es posible, porque la suma de sus ángulos planos sería $108° \times 4 = 432° > 360°$ y, con mayor razón, reuniendo más pentágonos.

El poliedro formado con el pentágono regular es el *dodecaedro regular.*

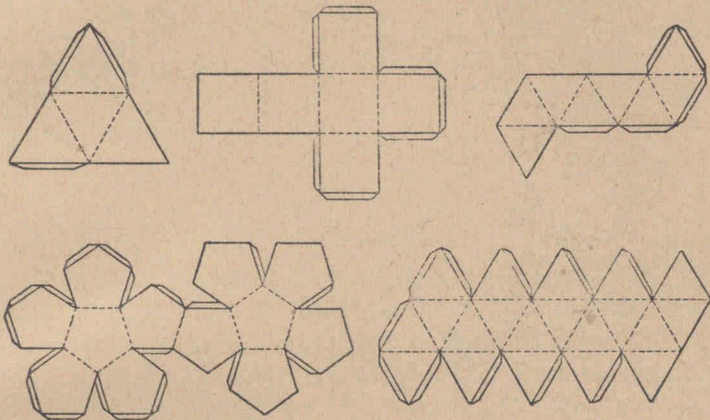
Caras hexagonales, heptagonales, etc. — Como el ángulo del hexágono regular vale 120°, con 3 hexágonos ya no es posible formar ángulo poliedro, porque la suma de sus ángulos planos sería $120° \times 3 = 360°$ y, con mayor razón, reuniendo más hexágonos.

Como el ángulo del heptágono y el de los otros polígonos regulares de mayor número de lados es mayor aún que el del hexágono, la reunión de 3 o más de esos polígonos no permitirá la construcción de ángulos poliedros y, en consecuencia, de poliedros regulares.

Hemos demostrado, pues, que solamente existen los cinco poliedros regulares mencionados, mostrando cómo podemos efectuar su construcción.

207. Desarrollo y construcción de los poliedros regulares. — En la (fig. 162) presentamos los desarrollos de los cinco poliedros regulares, en el orden indicado en el (N.° 205).

Para su *construcción,* recórtese en cartulina el desarrollo correspondiente y péguense tiras de papel en los bordes.



(fig. 162)

Luego dóblense según las líneas de puntos, y péguense los bordes mediante las tiras de papel.

Estimamos muy conveniente que el estudiante construya los poliedros regulares en la forma indicada; dispondrá así de modelos para la verificación práctica de sus propiedades.

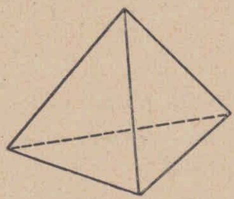
Número de caras, aristas y vértices de cada uno de los cinco poliedros regulares

208. En las figuras que siguen, presentamos los cinco poliedros regulares, cuyos elementos enumeraremos:

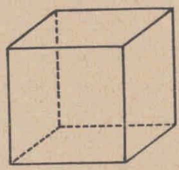
1.° El **tetraedro regular** (fig. 163) tiene: 4 *caras* (triángulos equiláteros), 6 *aristas* y 4 *vértices.*

2.° El **cubo**, o **hexaedro regular** (fig. 164) tiene: 6 *caras* (cuadrados), 12 *aristas* y 4 *vértices.*

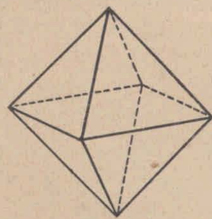
3.° El **octaedro regular** (fig. 165) tiene: 8 *caras* (triángulos equiláteros), 12 *aristas* y 6 *vértices.*



(fig. 163)



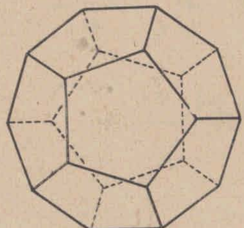
(fig. 164)



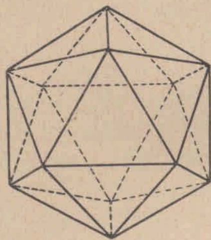
(fig. 165)

4.° El **dodecaedro regular** (fig. 166) tiene: 12 *caras* (pentágonos regulares), 30 *aristas* y 20 *vértices.*

5.° El **icosaedro regular** (fig. 167) tiene: 20 *caras* (triángulos equiláteros), 30 *aristas* y 12 *vértices.*



(fig. 166)



(fig. 167)

209. Compruebe el estudiante que, en todos los poliedros indicados, se verifica la misma relación entre el número de *caras* (que representamos con c), el de *vértices* (v) y el de aristas (a), siendo esa relación la siguiente:

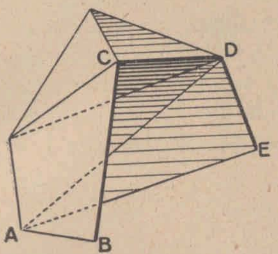
$$c + v = a + 2.$$

Así, por ej., para el dodecaedro regular, siendo $c = 12$, $v = 20$, $a = 30$, tenemos: $c + v = 12 + 20 = 32$, y $a + 2 = 30 + 2 = 32$; como vemos, se verifica la relación anterior.

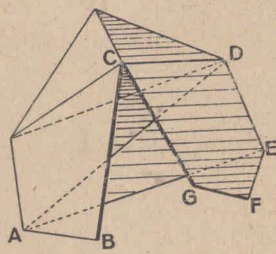
Esta relación es general, es decir, que se cumple para cualquier poliedro convexo, y constituye el llamado *teorema de Euler.* (*)

210. TEOREMA. — **En todo poliedro convexo, el número de caras aumentado en el número de vértices es igual al número de aristas más 2.**

Con las notaciones ya empleadas en el párrafo anterior, si consideramos primeramente una superficie poliédrica *abierta* (fig. 168), limitada por una línea quebrada plana o alabeada



(fig. 168)



(fig. 169)

$ABCDE$, demostraremos que los elementos de esa superficie satisfacen la siguiente relación:

$$c + v = a + 1 \qquad [\alpha]$$

En efecto, la fórmula se cumple para el caso de una sola cara, es decir, para $c = 1$, puesto que, en ese caso, la $[\alpha]$ nos da: $v = a$, y, efectivamente, en un polígono, el número de vértices es igual al de aristas.

Empleando un procedimiento de demostración muy usado en Matemáticas, bastará demostrar que si la $[\alpha]$ se cumple para c caras, se cumplirá también para $(c + 1)$ caras.

Para ello, modifiquemos la línea quebrada que termina la superficie poliédrica agregando a dicha superficie un polígono $CDEFG$ (fig. 169) de n lados y n vértices ($n = 5$

(*) EULER, Leonardo (1707 a 1783), nació en Basilea. En 1752 dió a conocer la fórmula que lleva su nombre.

en el caso de la figura) que, sin cerrar la superficie poliédrica, tendrá con la línea quebrada anterior p aristas comunes, y, en consecuencia $(p+1)$ vértices comunes ($p=2$ en el caso de la figura). Designando con c', a', v', los números de caras, vértices y aristas de la nueva superficie poliédrica, tendremos:

$$c' = c + 1 \; ; \quad a' = a + n - p \; ; \quad v' = v + n - (p + 1).$$

Sustituyendo estos valores en la $[\alpha]$ y simplificando, veríamos que dicha fórmula también se cumple en este caso; resulta demostrada, pues, su generalidad.

Consideremos ahora un poliedro convexo. Para pasar de este poliedro a la superficie poliédrica abierta, basta suprimirle una cara. En este caso, los números de vértices y de aristas no se habrán modificado, y serán v y a; pero habiéndose disminuído una cara, su número será $(c-1)$. Aplicando la relación $[\alpha]$ ya demostrada, tendremos:

$$(c - 1) + v = a + 1$$

de donde $$c + v = a + 2$$

que constituye la relación de Euler que nos proponíamos demostrar. Este tipo de demostración pertenece a Cauchy. (*)

Poliedros que resultan tomando como vértice a los centros de las caras de un poliedro regular

211. Poliedros regulares conjugados. — Consideremos, por ejemplo, el *cubo* $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H$ (fig. 170), y sean M, N, P, Q, R, S, los centros de sus caras, obtenidos por intersecciones de los ejes $X\,Y$, $U\,V$, $Y\,Z$, ... de dichas caras.

El poliedro $M\,N\,P\,Q\,R\,S$ que resulta tomando como vértices aquellos centros, es un *octaedro regular*.

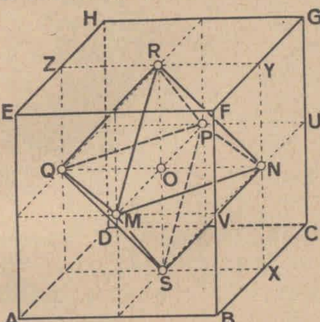
En efecto, la construcción indicada evidencia que el nuevo poliedro es un octaedro de caras triangulares. Para demostrar

(*) CAUCHY, Agustín Luis (1789 a 1857), Ingeniero de puentes y caminos, es, para el Análisis matemático, el más destacado representante de la Escuela francesa del siglo XIX.

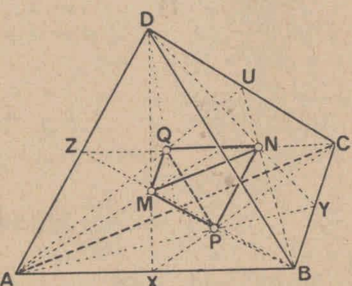
que es un octaedro *regular*, sólo nos falta demostrar que las caras que lo forman son triángulos equiláteros e igulaes (N.° 205). Esto resulta fácilmente de la comparación de los triángulos rectángulos RYN, NXS, NVM, ... que tienen iguales los catetos (por ser mitades de la arista del cubo).

El octaedro así obtenido se llama *conjugado* del cubo. En general, tenemos la siguiente

DEFINICIÓN. — **Un poliedro regular se llama CONJUGADO de otro poliedro regular, cuando los vértices del primero son los centros de las caras del segundo.**



(fig. 170)



(fig. 171)

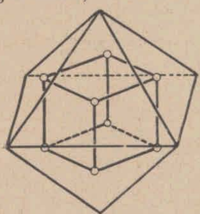
212. En la (fig. 171) se indica la construcción del poliedro conjugado del *tetraedro regular*, que es otro *tetraedro regular*.

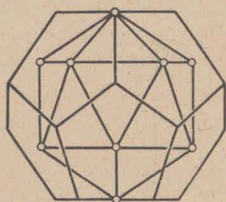
Si $A\,B\,C\,D$ es el *tetraedro regular* dado, y M, N, P, Q, son los centros de sus caras, obtenidos por intersecciones de los ejes DX, BZ, DY, BU, ... de dichas caras, el tetraedro conjugado del $A\,B\,C\,D$ es el $MNPQ$.

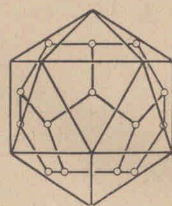
Esto resulta demostrando que las caras de este último tetraedro son triángulos equiláteros iguales (N.° 205), lo que fácilmente se evidencia por la comparación de los triángulos MXP, NYP, MZQ, ... que tienen iguales los lados con vértices en X, Y, Z, ... (por ser las terceras partes de la apotema del tetraedro dado), y que también tienen iguales el ángulo que forman dichos lados (por ser el rectilíneo del diedro del tetraedro dado).

213. En la (fig. 172) se indica la construcción del poliedro conjugado del *octaedro regular*, que es un *cubo*; en la (fig. 173) vemos que el poliedro conjugado del *dodecaedro regular* es un *icosaedro regular*, y en la (fig. 174), que el poliedro conjugado de un *icosaedro regular* es un *dodecaedro regular*.

En forma análoga que para el tetraedro, se demuestra que los tres últimos poliedros conjugados, cuyas construcciones indicamos en las (figs. 172 - 173 - 174), son regulares. Como ejercicio, efectúe el estudiante estas demostraciones.


(fig. 172)


(fig. 173)


(fig. 174)

214. Propiedades de los poliedros conjugados. — a) *La relación entre dos poliedros conjugados es recíproca*; vale decir, que si un poliedro es conjugado de otro, recíprocamente, el segundo es conjugado del primero.

Como es limitado el número de poliedros regulares, rápidamente se verifica esta propiedad.

Así, vimos que el poliedro conjugado del tetraedro regular es otro tetraedro regular (N.° 211), y recíprocamente. El conjugado de un cubo es un octaedro regular (N.° 211), y recíprocamente, el conjugado de un octaedro regular es un cubo (N.° 213). El conjugado de un dodecaedro regular es un icosaedro regular, y recíprocamente (N.° 213).

También se verifica fácilmente que:

b) *El número de caras de un poliedro regular es igual al número de vértices del poliedro conjugado e inversamente.*

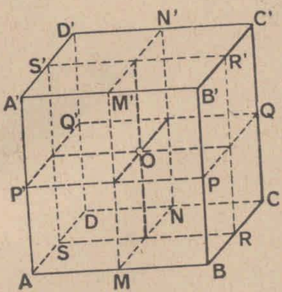
c) *El número de aristas de dos poliedros conjugados es el mismo.*

d) *El número de aristas que forma cada ángulo poliedro de dos poliedros conjugados, es igual al número de lados de cada cara del otro poliedro.*

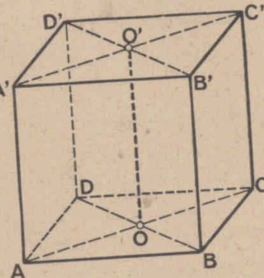
Propiedades de simetría de los poliedros regulares

215. Simetría del cubo. — a) Centro de simetría. — Como un cubo es también un paralelepípedo, admite **un centro de simetría**: el punto de intersección de sus diagonales (N.° 195).

b) Planos de simetría. — Por ser un cubo un prisma regular, admite como planos de simetría los que pasan por



(fig. 175)



(fig. 176)

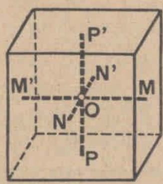
los puntos medios de cuatro aristas paralelas (N.° 200); en el cubo $A\,B\,C\,D\,A'B'C'D'$ de la (fig. 175), son los 3 *planos* $M\,N\,M'N'$, $P\,Q\,P'Q'$, $R\,S\,R'S'$.

Por igual razón admite como planos de simetría, los que contienen un par de aristas opuestas, es decir, 6 *planos;* en el cubo de la (fig. 176) se han dibujado los 2 planos $A\,C\,C'A'$ y $B\,D\,D'B'$, que son los que corresponderían al cubo considerado como prisma regular de bases $A\,B\,C\,D$ y $A'B'C'D'$. Considerando como bases los otros dos pares de caras opuestas, se tendrían los otros cuatro planos de simetría

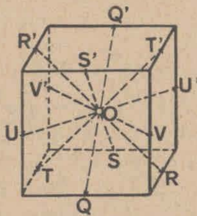
En *resumen*, el cubo tiene **9 planos de simetría**.

c) Ejes de simetría. — Como un cubo es también un prisma regular, tiene como ejes de *simetría cuaternaria* las rectas que unen los centros de dos caras opuestas (N.° 204). en el cubo de la (fig. 177) son los 3 *ejes* $M\,M'$, $N\,N'$, $P\,P'$, que pasan por el centro O de simetría del cubo.

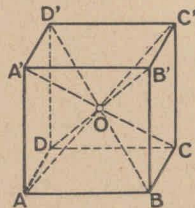
Por igual razón admite como ejes de *simetría binaria* las rectas que unen los puntos medios de dos aristas opuestas; en el cubo de la (fig. 178) son los 6 *ejes* QQ', RR', SS', TT', UU', VV', que pasan por el centro O de simetría del cubo.



(fig. 177)



(fig. 178)



(fig. 179)

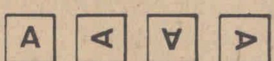
Si consideramos uno de los triedros trirrectángulos del cubo, por ser equilátero, tiene eje de simetría ternaria (N.° 174). Por consiguiente, si hacemos girar el cubo de la (fig. 179) un ángulo de $360° : 3 = 120°$ alrededor de dicho eje ternario, el vértice A' quedará fijo, A coincidirá con B', B' con D', y D' con A. El cubo coincide, pues, consigo mismo y, como el vértice C opuesto al A no cambia de posición, el eje de simetría pasa por C y es, por consiguiente, una diagonal del cubo.

Los 4 *ejes ternarios* son: $A'C$, AC', DB', $D'B$.

En *resumen*, el cubo tiene **3 ejes cuaternarios, 6 ejes binarios y 4 ejes ternarios de simetría.**

NOTA. — Podemos verificar que no se ha omitido ningún eje. En efecto, si suponemos que el cubo ocupa una posición determinada, que llamaremos *fundamental*, al girar alrededor de un eje cuaternario ocupará *tres* posiciones diferentes de la fundamental, y como son 3 los ejes cuaternarios, se originan, pues, $3 \times 3 = 9$ posiciones nuevas.

Al girar alrededor de un eje binario, ocupará *una* posición diferente de la fundamental, y como son 6 los ejes cuaternarios, se originarán, pues, $1 \times 6 = 6$ posiciones nuevas.



(fig. 180)

Razonando análogamente para los 4 ejes ternarios, tenemos $2 \times 4 = 8$ posiciones nuevas.

En total $9 + 6 + 8 = 23$ posiciones nuevas, a las que agregándole la fundamental, forman 24 posiciones diferentes para el cubo.

Y efectivamente, un cubo puede ocupar 24 posiciones diferentes, como se verifica con un cubo cuyas seis caras se han marcado con distintas letras, por ej., A, B, C, D, E, F. El cubo puede ocupar las cuatro posiciones diferentes indicadas en la (fig. 180), manteniendo siempre la misma letra, en la parte superior, y en consecuencia, la misma cara. Repitiendo la operación para las otras cinco caras, se tienen en total las $4 \times 6 = 24$ posiciones diferentes anteriormente indicadas.

216. Simetría del octaedro regular. — Como el octaedro regular es el poliedro conjugado del cubo, se comprende fácilmente que *tiene los mismos elementos de simetría del cubo* ya indicados en el (N.° 215), puesto que toda simetría que haga coincidir el cubo consigo mismo, hará concidir también el octaedro consigo mismo, y recíprocamente.

Así, en el octaedro $MNPQRS$ de la (fig. 170), los ejes cuaternarios son las tres diagonales RS, MP, NQ. Los ejes ternarios son las cuatro rectas que unen los centros de las caras opuestas. Los ejes binarios son las seis rectas que unen los puntos medios de aristas opuestas. El centro es el punto O, coincidiendo con el del cubo.

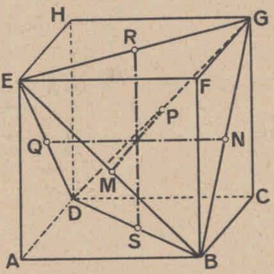
217. Simetría del tetraedro regular. — Si trazamos las diagonales de las caras de un cubo $ABCDEFGH$, como se indica en la (fig. 181), vemos fácilmente que se forma un tetraedro regular $BDEG$. Si trazáramos las diagonales que unen los vértices restantes, también formaríamos otro tetraedro regular $AHCF$ igual al anterior.

Observemos que el tetraedro regular puede coincidir consigo mismo de 12 modos diferentes. En efecto, apoyando un tetraedro sobre una de sus 4 caras, como cada cara puede coincidir consigo mismo de 3 modos diferentes, tenemos en total $3 \times 4 = 12$ posiciones.

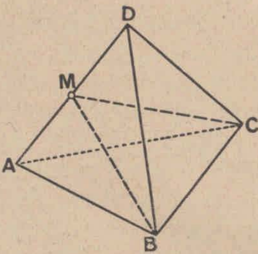
Decimos que la simetría del tetraedro regular es una *hemiedría* de la simetría del cubo, porque sólo la *mitad* de las rotaciones que hacen coincidir el cubo consigo mismo, lo hacen con el tetraedro regular.

a) Ejes de simetría. — Los ejes cuaternarios del cubo (fig. 181), RS, MP, NQ, son los 3 *ejes binarios* del tetraedro regular; una rotación de 180° alrededor de RS hará coincidir E con G, y D con B.

Los ejes ternarios del cubo (que son sus diagonales), son los 4 *ejes ternarios* del tetraedro. Por ej., la diagonal $E\,C$ es uno de los ejes ternarios, y resulta perpendicular a la cara $D\,B\,G$ del tetraedro; es, pues, la altura del tetraedro considerado como pirámide de vértice E.



(fig. 181)



(fig. 182)

Los ejes ternarios del tetraedro regular resultan también de considerar el tetraedro como una pirámide regular, pudiéndose tomar como base, cualquiera de sus cuatro caras (N.° 204).

Los ejes binarios del cubo no son ejes de simetría del tetraedro.

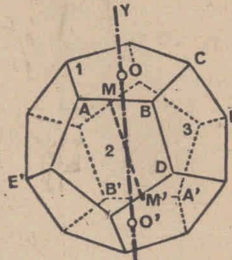
En *resumen*, el tetraedro regular tiene **3 ejes binarios y 4 ejes cuaternarios de simetría.**

b) PLANOS DE SIMETRÍA. — Sea el tetraedro regular $ABCD$ (fig. 182). Fácilmente se demuestra que el plano que contiene una arista $B\,C$ y pasa por el punto medio M de la opuesta, es un *plano de simetría;* este plano resulta perpendicular a la arista $A\,D$.

El tetraedro regular tiene, pues, **4 planos de simetría.**

El tetraedro regular no tiene centro de simetría.

218. Simetría del dodecaedro regular. — Sea el dodecaedro regular de la (fig. 183), cuyas caras designamos con los números 1 al 12, y $O\,Y$ la perpendicular a una de las caras, trazada en su centro O. Si efectuamos una rotación de $360° : 5 = 72°$ alrededor de $O\,Y$, el lado $A\,B$ coincidirá con BC, y la cara 2 concidirá con la 3, en virtud de ser iguales los diedros de aristas AB y BC; la arista BD coincidirá con CE. Repitiendo sucesivamente esta rotación, y debido siempre a la igualdad de todos los diedros, veríamos que el dodecaedro coincide 5 veces consigo mismo; la recta OY es, pues, un *eje de simetría de orden* 5.



(fig. 183)

Esta recta pasa también por el centro O' de la cara opuesta.

El dodecaedro regular tiene **6 ejes de simetría de orden 5.**

El punto de intersección de estos ejes es el **centro de simetría** del dodecaedro regular.

Las rectas que unen dos vértices opuestos, como por ej., BB', EE', ... son *ejes ternarios de simetría.*

Las rectas que unen los puntos medios de dos aristas opuestas, como por ej., MM', son *ejes binarios de simetría.*

El dodecaedro regular tiene **15 ejes binarios de simetría.**

El plano que contiene dos aristas opuestas, como por ej. el plano $ABA'B'$, es *plano de simetría.*

El dodecaedro regular tiene **15 planos de simetría.**

219. Simetría del icosaedro regular. — Como en el caso del octaedro regular (N.° 216), siendo el icosaedro el poliedro homólogo del dodecaedro regular, tendrá los mismos elementos de simetría que este último.

220. Nótense en los 5 poliedros regulares las siguientes **propiedades:**

El plano perpendicular a una arista en su punto medio, es plano de simetría.

El plano bisector de un diedro del poliedro, es plano de simetría.

* * *

PROBLEMAS PARA RESOLVER

CAP. I. — RECTAS Y PLANOS

1. Indique el estudiante cómo están determinadas las posiciones de algunos planos que se presentan en los objetos de la vida práctica (por ej., la tapa de un piano de cola, cuando se encuentra abierto; un cuadro colgado de una pared mediante un clavo; ...).

2. Se consideran cuatro puntos A, B, C, D, no situados en el mismo plano. ¿Cuántos planos diferentes determinan esos cuatro puntos y cuáles son las intersecciones de los planos?

3. Indicar dos aristas del dado de la (fig. 1) que se intercepten y dos que se crucen.

4. Indicar una recta del salón de clase que intercepte el plano del piso y otra que le sea paralela.

5. (*) Dadas dos rectas que se cruzan, por un punto exterior de las mismas pasa una recta y solamente una que intercepta aquéllas. (Considérense los planos determinados por el punto y las rectas).

6. Dadas tres rectas que se cruzan dos a dos, se pueden trazar infinitas rectas que intercepten a las tres dadas. ¿Qué particularidad tiene el resultado del ejercicio cuando dos de las rectas se cortan?

7. En todo cuadrilátero alabeado (*es decir, cuyos lados no se encuentran todos en el mismo plano*), los puntos medios de los lados son vértices de un paralelogramo. (*Trácese una diagonal, etc. ... y luego se aplicará el N.º 225 de nuestra ''Geometría'' - Primer año*).

8. Poner algunos ejemplos de planos paralelos obtenidos por traslación (por ej., durante el movimiento de un vehículo en un tramo rectilíneo).

9. Indicar dos rectas paralelas del salón de clase, obtenidas mediante dos planos paralelos interceptados por un tercero.

10. Indicar algún objeto que contenga segmentos iguales, determinados por rectas paralelas interceptadas por planos paralelos.

11. Dadas dos rectas que se cruzan, trazar un plano que contenga una de las rectas y sea paralelo a la otra.

12. Dadas dos rectas que se cruzan, trazar por un punto exterior a las mismas un plano paralelo a las dos rectas.

13. Por un punto dado, trazar una recta que encuentre a otra recta dada y sea paralela a un plano dado.

14. Trazar una recta paralela a una recta dada y que intercepte a otras dos rectas dadas.

(*) En este ejercicio, como en los siguientes, demuéstrese la propiedad enunciada y constrúyase la figura correspondiente.

CAP. II. — PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA

1. Empleando dos escuadras, verifíquese la perpendiculardad de una de las aristas verticales de una puerta respecto del plano horizontal del piso.

2. Empleando dos escuadras, clávese la lapicera en una tabla (por ej., en el pizarrón), de modo que le sea perpendicular.

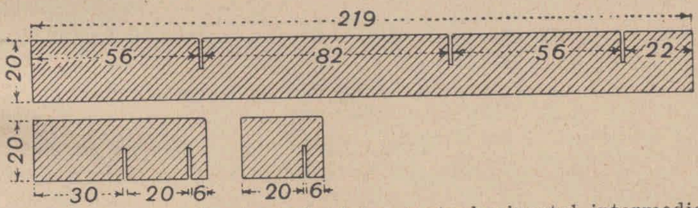
3. Si una recta y un plano son perpendiculares a una misma recta en puntos diferentes, la primera recta y el plano son paralelos.

4. La recta OX intercepta un plano α en el punto O. Trazar por este punto y en el plano α una recta perpendicular a OX.

5. Enunciar algunas propiedades de los diedros, por comparación con las correspondientes de los ángulos estudiadas en Geom. plana. (Por ej.: si un plano corta a dos planos paralelos, los diedros correspondientes son iguales; etc.).

6. ¿Cuántos ángulos diedros tiene la repisa de la (fig. 2) suponiendo que el espesor de las tablas sea nulo?

7. Dibujar e indicar las medidas correspondientes a las plantillas que sería necesario dar a un carpintero, para construir una repisa análoga a la de la (fig. 2). Como iniciación del ejercicio, damos en la figura adjunta las medidas de tres de las plantillas,



expresadas en centímetros: la del estante horizontal intermedio y las de dos divisiones verticales intermedias, empleando tablas de un centímetro de espesor.

8. Sobre cada una de las caras de un diedro se da un punto; trazar sobre ellas la línea quebrada más corta que une los dos puntos dados.

9. Tres diedros contiguos forman un diedro llano. El primero es los $^2/_3$ del segundo y el segundo los $^3/_4$ del tercero. Calcular las medidas de los tres diedros.

10. Cuatro diedros consecutivos cuya suma mide 360° son tales que: el segundo es doble del primero, el tercero doble del segundo y el cuarto doble del tercero. Calcular los valores de los diedros.

11. Los planos bisectores de dos diedros adyacentes son perpendiculares entre sí.

12. Si una recta es perpendicular a un plano, es perpendicular a todas las rectas trazadas en dicho punto.

13. Si desde un punto se trazan las perpendiculares a las caras de un diedro, y desde sus pies se trazan las perpendiculares a la arista del diedro, estas dos últimas normales tienen el pie común.

14. Lugar geométrico de las normales trazadas desde un mismo punto a los planos que pasan por una misma recta.

15. La figura simétrica de una recta y un plano perpendiculares entre sí, es otra recta y plano perpendiculares entre sí.

16. Si dos figuras son simétricas de una tercera respecto a dos planos paralelos, ¿cuál es el desplazamiento que lleva a coincidir las dos primeras figuras?

17. Por dos puntos del rectilíneo de un diedro, equidistantes de la arista, se traza un plano cualquiera. Demostrar que dicho plano forma diedros iguales con las caras del diedro dado. (Considérese la simetría respecto al plano bisector del diedro dado).

CAP. III. — ESFERA

1. Demostrar que toda cuerda de una esfera es menor que un diámetro de la misma.

2. Lugar, en el espacio, de los vértices de los ángulos rectos cuyos lados pasan por dos puntos dados.

3. Determinar. en el plano, el lugar de los puntos desde los cuales se ve un segmento de recta dado bajo un ángulo recto (G. P. N.º 166).

4. Lugar de los centros de las esferas que pasan por dos puntos dados.

5. Lugar de los centros de las esferas tangentes a dos planos dados.

6. Lugar de los puntos medios de las cuerdas de longitud dada en una esfera dada.

7. Los planos que cortan a una esfera por una circunferencia de radio dado son tangentes a una esfera concéntrica.

8. Trazar por una recta un plano que intercepte una esfera por una circunferencia de radio dado.

9. El plano perpendicular a una cuerda de una esfera en su punto medio pasa por el centro de la esfera.

10. Por cuatro puntos no situados en un mismo plano, sólo pasa una superficie esférica.

11. Lugar de los puntos situados a distancias dadas de dos puntos dados.

12. Dado un triángulo isósceles PAB ($PA = PB$), ¿cómo se obtendría una esfera en la que un círculo máximo de la misma contuviera A y B, siendo P el polo de otra circunferencia que pasara por A y B?

CAP. IV. — CILINDRO DE REVOLUCION

1. Si una recta tiene más de dos puntos comunes con una superficie cilíndrica de revolución, es una generatriz de la misma.

2. Defínase el plano como superficie cilíndrica indefinida.

3. Trazar por un punto dado del espacio, los planos tangentes a un cilindro de revolución.

4. Si trazamos los dos planos tangentes a una esfera, que pasan por una recta determinada, la recta que une los puntos de contacto es perpendicular a la intersección de aquellos planos tangentes, es decir, a la recta dada.

5. Lugar geométrico de las rectas desde las cuales se puede trazar a un cilindro de revolución los planos tangentes que forman un ángulo dado.

6. ¿Cómo se construiría una superficie cilíndrica de revolución conociendo dos planos tangentes no paralelos y el radio del cilindro?

8. Idem, conociendo tres de sus generatrices.

9. Los planos tangentes a una esfera en los puntos de una circunferencia máxima son tangentes a un cilindro cuyas generatrices son perpendiculares al plano de aquella circunferencia.

10. ¿Cuál es el lugar geométrico de los ejes de los cilindros de revolución de los que se conocen dos planos tangentes?

CAP. V. — CONO DE REVOLUCION

1. Si una recta tiene más de dos puntos comunes con una superficie cónica de revolución, es una generatriz de la misma.

2. Defínase el plano como superficie cónica indefinida.

3. ¿De qué se compone el sólido engendrado por un triángulo cualquiera al girar alrededor de uno de sus lados?

4. ¿Cuál es la generatriz de un cono de revolución que forma el menor ángulo con una recta dada, y cuál el mayor?

5. El ángulo al vértice de un cono de revolución es mayor que el ángulo que forman dos generatrices no situadas en el mismo plano meridiano.

6. ¿Cómo se trazan los planos tangentes a un cono de revolución, que pasan por un punto dado?

7. ¿Cómo se construiría una superficie cónica de revolución conociendo el eje y un plano tangente?

8. ¿Cómo se construiría una superficie cónica de revolución, conociendo tres de sus generatrices?

9. Lugar de los ejes de los conos de revolución tangentes a dos planos dados.

10. Lugar de los ejes de las superficies cónicas de revolución de las que se dan el vértice y dos de sus puntos.

11. Lugar de las rectas que pasan por un punto dado y se hallan situadas a una distancia dada de un punto dado.

12. ¿Cuál es la intersección de un cono de revolución con una esfera cuyo centro es el vértice del cono?

CAP. VI. — PERPENDICULARES Y OBLICUAS A UN PLANO DESDE UN PUNTO EXTERIOR

1. Empleando una cinta métrica, medir la distancia de uno de los vértices de un mueble del salón de clase a una de sus paredes.

2. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos dados?

3. Hallar el lugar geométrico de los puntos equidistantes de tres puntos dados no situados en línea recta.

4. Hallar sobre una recta dada, un punto equidistante de otros dos puntos dados situados fuera de la recta.

5. Dados dos puntos A y B exteriores a un plano α y en el mismo semiespacio determinado por el plano, hallar el lugar geométrico de los puntos de α equidistantes de A y B.

6. Lugar de los puntos del espacio equidistantes de dos planos que se cortan.

7. Hallar sobre una recta dada, un punto equidistante de dos planos dados.

8. Construir un plano que pase por dos puntos dados y que equidiste de otros dos puntos dados.

9. Dados dos puntos M y N, ¿dónde estarán los puntos P del espacio, tales que PM sea menor que PN?

10. Si por un punto de la bisectriz de un ángulo se traza la perpendicular al plano del ángulo, cada punto de ésta equidista de los lados del ángulo.

11. Lugar de los puntos del espacio equidistantes de dos rectas que se interceptan, o bien de dos rectas paralelas.

12. Si desde un punto exterior a un plano se trazan dos segmentos de oblicuas desiguales, el mayor forma con el plano ángulo menor.

13. La proyección de un segmento oblicuo a un plano sobre el plano es menor que el segmento, o a lo sumo igual al mismo.

14. Desde dos puntos P y Q se trazan dos segmentos de oblicuas a un plano; si estos segmentos tienen sobre el plano proyecciones iguales, ¿podrá decirse que aquellos segmentos son iguales?

15. Por el centro de un círculo se traza una oblicua al plano del mismo, y se toma sobre ella un punto A. ¿Cuál es el menor, y cuál el mayor de los segmentos que se pueden trazar del punto A a los puntos del círculo?

16. La proyección, sobre un plano, de un ángulo recto que tiene un lado paralelo al plano, es un ángulo recto.

17. Desde un punto trazar el plano perpendicular a dos planos dados.

18. Por un punto exterior a un plano, trazar un plano que pase por otro punto y sea perpendicular al primero.

CAP. VII. — TRIEDROS

1. La suma de los ángulos que forma una semirrecta cuyo origen es el vértice de un triedro y se encuentra en el interior del mismo, está comprendida entre la suma de las caras del triedro y la mitad de esa suma.

2. La suma de los diedros de un ángulo poliedro convexo de n caras es mayor que $180^\circ \times (n - 2)$.

3. Todo diedro de un triedro es mayor que el exceso sobre 180° de la suma de los otros dos ángulos.

4. Hallar el lugar de los puntos equidistantes de tres planos que pasan por un mismo punto, y no por una misma recta.

5. Los planos que contienen cada arista de un diedro de un triedro y la bisectriz de la cara opuesta pasan por una misma recta. (Considérese el triángulo que tiene sus vértices en tres puntos de las aristas, equidistantes del vértice del triedro,... etc.).

6. Los tres planos perpendiculares a las caras de un triedro, trazados por las bisectrices de dichas caras, se cortan por una misma recta.

7. Los tres planos perpendiculares a las caras de un triedro trazados respectivamente por las aristas opuestas, se cortan por una misma recta.

8. Un triedro trirrectángulo es suplementario de sí mismo.

9. Dado un triángulo ABC, hallar un triedro trirrectángulo cuyas aristas pasen por los vértices de aquel triángulo.

10. En todo triedro isósceles, el plano bisector del diedro que comprenden las dos caras iguales, es perpendicular a la tercera cara y la divide en dos partes iguales.

11. Dos triedros suplementarios tienen el mismo signo.

CAP. VIII. — EJES DE SIMETRIA DE ORDEN SUPERIOR

1. ¿Qué ejes de simetría de orden superior tiene el poliedro compuesto por un cubo y una pirámide regular, cuya base es una de las caras del cubo?

2. El paralelepípedo más general que admite un eje de simetría ternaria es el romboedro (N.º 184).

3. Demostrar que un prisma con dos caras laterales consecutivas rectangulares, es recto.

4. La suma de los doce diedros de cualquier paralelepípedo es igual a doce rectos. (*Considerar los prismas indefinidos de los cuales se obtiene el paralelepípedo*).

5. La suma de los diedros de un prisma recto de n lados es igual a $360^\circ \times (n - 1)$.

6. En un cubo, los extremos de tres aristas que salen de un mismo vértice, son los vértices de un triángulo equilátero, cuyo plano es perpendicular a la diagonal que sale del primer vértce.

7. Si por el centro de un cubo se traza un plano perpendicular a una de las diagonales del mismo, la sección resultante es un hexágono regular.

8. Un paralelepípedo se secciona por un plano que pasa por los puntos medios de tres aristas consecutivas no situadas en un mismo plano. Demostrar que dicha sección es un hexágono cuyos lados opuestos son iguales y paralelos, y que el plano secante pasa por el centro del paralelepípedo.

9. Dos paralelepípedos son iguales si tienen, respectivamente, iguales un diedro y las tres aristas que la forman.

10. El plano que pasa por los extremos de tres aristas que salen de un mismo vértice A de un paraleiepipdeo corta el poliedro por un triángulo cuyas medianas se interceptan sobre la diagonal que sale de A.

11. Si las cuatro diagonales de un paralelepípedo son iguales, el paralelepípedo es rectangular.

12. Las diagonales de un paralelepípedo y los segmentos que unen los centros de dos caras opuestas, pasan por un mismo punto.

13. Demostrar que dos tetraedros son iguales: 1.º cuando tienen un ángulo diedro igual comprendido entre dos caras respectivamente iguales y dispuestas en el mismo orden; 2.º cuando tienen una cara igual adyacente a tres ángulos diedros respectivamente iguales y dispuestas en el mismo orden; 3.º cuando tienen tres caras respectivamente iguales y dispuestas en el mismo orden.

14. Dos pirámides son iguales si tienen un ángulo poliedro igual comprendido entre caras ordenadamente iguales.

15. ¿Qué poliedro se obtiene trazando por cada arista de un tetraedro un plano paralelo a la arista opuesta?

16. Seccionando un tetraedro por un plano paralelo a dos aristas opuestas AB, CD, se obtiene como sección un paralelogramo. (*A la arista* AB *resultan paralelas las secciones con las caras* ABC *y* ABD *; a la arista* AD *resultan paralelas, etc.*).

17. Los segmentos que unen cada vértice de un tetraedro con el punto de intersección de las medianas de la cara opuesta, pasan por un mismo punto. Cada uno de estos segmentos resulta dividido por dicho punto en dos partes tales que, la que tiene un extremo en el vértice del tetraedro es triple de la otra.

18. Los planos perpendiculares a las seis aristas de un tetraedro en su punto medio pasan por un mismo punto, que equidista de los cuatro vértices.

19. Demostrar que son iguales todas las alturas de las caras laterales de una pirámide recta (esta altura se llama *apotema* de la pirámide).

CAP. IX. — POLIEDROS REGULARES

(Para la mejor interpretación de los ejercicios de este capítulo, construir los modelos en cartón de los cinco poliedros regulares)

1. Trazando desde los vértices de un tetraedro regular los planos paralelos a las caras opuestas se obtiene otro tetraedro regular.

2. Los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular son los vértices de un octaedro regular.

3. Empleando el modelo del icosaedro regular, determinar sus ejes de simetría y el orden respectivo.

4. Las cuatro alturas de un tetraedro regular se cortan en un mismo punto, situado a un cuarto de la altura a partir de la cara correspondiente.

5. Prolongando cuatro caras convenientemente elegidas de un octaedro regular, se forma un tetraedro regular. Con las caras de dicho octaedro se pueden formar así dos tetraedros regulares.

6. Existen cinco cubos tales que cada uno de ellos tiene sus vértices entre los de un dodecaedro regular dado. Cada arista de uno de esos cubos es diagonal de una de las caras del dodecaedro.

7. Prolongando caras convenientemente elegidas de un icosaedro regular se pueden formar cinco octaedros regulares.

8. Por todos los vértices de un poliedro regular puede pasar una superficie esférica, y sólo una. (En este caso decimos que el poliedro es *inscripto* en la superficie esférica, o que ésta es *circunsscripta* al poliedro).

9. Los centros de las caras de un poliedro regular son los puntos de contacto de una superficie esférica tangente a las caras del poliedro. (En este caso decimos que el poliedro es *circunscripto* a la superficie esférica, o que ésta es *inscripta* al poliedro). El centro de la superficie esférica inscripta a un poliedro regular coincide con el de la superficie esférica circunscripta; cuando el poliedro tiene centro de simetría, éste coincide con el centro de las superficies esféricas antedichas.

10. Una de las caras de un cubo se pinta de color diferente al de las otras cinco. Determinar los elementos de simetría del sólido así obtenido.

11. Idem pintando de un mismo color dos de las caras. Considerar los dos casos que las caras pintadas tengan o no una arista común.

12. Idem pintando tres de las caras, y considerar los diferentes casos según la posición relativa de las caras pintadas.

13. Idem para el octaedro regular suponiendo que se pintan sucesivamente, una, dos, tres o cuatro caras.

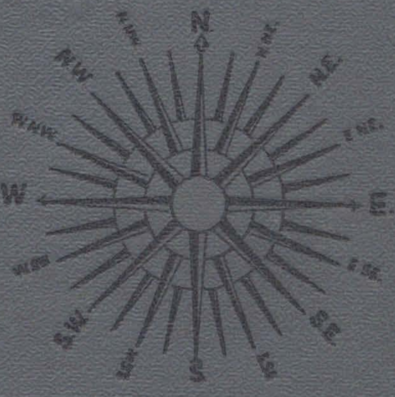
14. Dos de las caras opuestas de un cubo se pintan de un color, otras dos opuestas de otro color y las restantes de un tercer color. ¿Cuáles son los elementos de simetría del cubo así pintado?

15. Cuatro esferas de igual diámetro forman una pila (las esferas resultan tangentes tres a tres). Determinar los elementos de simetría de la figura así formada.

* * *

Este libro se terminó de imprimir el 30 de noviembre de 1937, en los Talleres Gráficos de Sebastián Amorrortu e Hijos Ayacucho 774 - Buenos Aires

"LIBRERIA DEL COLEGIO"
CASA EDITORA
BUENOS AIRES


N
N.E.
E.
S.E.
S
S.W.
W
N.W.