

FELIPE ANGUITA

ARITMETICA

TEXTO

ADAPTADO A LOS PROGRAMAS DE LAS
ESCUELAS PRIMARIAS, ESCUELAS DE
ARTES Y OFICIOS, ESCUELAS INDUSTRIALES, Etc.



F. CRESPILO, EDITOR
BOLIVAR, 269
BUENOS AIRES
1930

OMAR GARDET

~~OMAR GARDET~~

NO 1823 EF 90R

ARITMETICA

**DONACION
OMAR GARDET
Y FAMILIA**

OBRAS DEL MISMO AUTOR

ARITMETICA, 3ª edic. para 1er. año de los Colegios Nacionales (en colaboración).

ARITMETICA, 2ª edic. para 2º año de los Colegios Nacionales (en colaboración).

ALGEBRA, 2ª edic. para 3er. año de los Colegios Nacionales (en colaboración).

ALGEBRA, 2ª edic. para 4º año de los Colegios Nacionales (en colaboración).

GEOMETRIA, 2ª edic. para 1er. año de los Colegios Nacionales (en colaboración).

GEOMETRIA, para 2º año de los Colegios Nacionales (en colaboración)

GEOMETRIA, para 3er. año de los Colegios Nacionales (en colaboración)

LA REGLA DE CALCULO - Instrucciones para su manejo - Un folleto

Venta exclusiva en Lutz Ferrando y Cía., Florida 240



ARITMETICA

Texto adaptado a los programas de las Escuelas
Primarias, Escuelas de Artes y Oficios,
Escuelas Industriales elementales y pro-
fesionales, y Escuela de Mecánica de la
Armada Nacional.

P O R

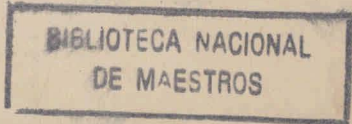
FELIPE ANGUIA

Profesor de Matemáticas y Cosmografía

Catedrático de Matemáticas de los Colegios Nacionales
"Mariano Moreno" y "Bartolomé Mitre", de la Escuela
de Mecánica de la Armada y de las escuelas de la
Sociedad de Educación Industrial.



F. CRESPILO, EDITOR
BOLÍVAR, 369
BUENOS AIRES
1930



Modelo depositado de acuerdo
con la ley de propiedad literaria.



PRÓLOGO

Con el presente libro, que presentamos a la consideración de nuestro colegas y del público en general, creemos introducir una novedad en la literatura científica elemental de nuestro país.

Nos apartamos de los libros corrientes de Aritmética en la ejemplificación, pues nos referimos especialmente a relaciones técnicas, en vez de tratar sólo cuestiones de Aritmética mercantil y bancaria. En este sentido creemos una verdadera necesidad libros de la tendencia del presente en nuestra enseñanza primaria.

Hemos tratado, en lo posible, de ser lo más simple y práctico, con el ejemplo oportuno y la aplicación respectiva, evitando las demostraciones propias de cursos superiores, ya que lo que interesa corrientemente es saber hacer, y saber hacer bien. Las propiedades de las operaciones fundamentales se constatan con verificaciones numéricas sencillas, a fin de tener conciencia de su esencia y aplicación. Ciertos temas, como las raíces cuadrada y cúbica, se presentan en el texto en forma gradual, tal como lo requiere su explicación en el pizarrón.

Una gran cantidad de ejercicios y problemas figuran en todo el libro, habiendo insistido en las cuestiones de

índole técnica, con dibujos y croquis que familiaricen a los alumnos con la comprensión de todos aquellos asuntos que en su futura profesión puedan serle de interés.

Y es que nosotros pensamos que los libros de Aritmética elementales como el nuestro, deben propender a despertar y fortalecer vocaciones hacia las artes manuales, en las que tanto campo hay en nuestro país y de las que tanto provecho ha de sacar la Patria.

Si este libro logra ser un instrumento de trabajo y aplicación y llena los fines propuestos, se habrán colmado los deseos que tuvo al escribirlo

EL AUTOR.

Buenos Aires, Marzo de 1930.

ARITMETICA

CAPITULO I

Nociones Preliminares

1. Noción de número. — Los alumnos de una escuela; las hojas de un libro; los tornillos que haya en un paquete, etcétera, constituyen, respectivamente, un conjunto de alumnos, un conjunto de hojas y un conjunto de tornillos.

Si cuando salen los alumnos de una escuela al primero lo dejo a un lado y digo *uno*; cuando sale otro lo pongo con el anterior y digo *dos*; cuando sale otro lo pongo con los anteriores y digo *tres*, y continúo así, cada vez que voy agregando un muchacho a los anteriores obtengo un nuevo conjunto al cual le hago corresponder una nueva palabra, resultando así:

uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho... etc.
que se llaman *números enteros*. Como estos números enteros se han formado de una manera natural, también se llaman *números naturales*.

La ciencia que estudia los números, las operaciones que con ellos se hacen, y sus propiedades, se llama *Aritmética*.

2. Números ordinales. — Si al número *uno* le hago corresponder la palabra *primero*; al *dos*, *segundo*; al *tres*, *tercero*; al *cuatro*, *cuarto*; al *cinco*, *quinto*; al *seis*, *sexto*; al *siete*, *séptimo*; etc., resultan:

primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto... etc.

que se llaman *números ordinales* por indicar *rango* u *orden de colocación*.

3. Número cero. — El *número cero*, que indica, por ejemplo, que en una caja de plumas no hay *ninguna*, se agrega a los números enteros.

4. Números iguales. — Dos números son *iguales*, cuando dados dos conjuntos distintos, a cada elemento de uno se le puede hacer corresponder un elemento en el otro, sin sobrar ni faltar elementos que no tengan su correspondiente.

Si se tienen el conjunto de los alumnos de una clase y el conjunto de los bancos, y a cada alumno le corresponde un banco, y a cada banco un alumno, se dice que el número de alumnos y el de los bancos son iguales.

Para expresar que dos números son iguales, se emplea el signo $=$, *igual*.

5. Cifras. — Se llama *cifra*, a todo signo convencional que sirva para representar un número. Los signos empleados corrientemente son las *cifras arábigas*:

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9

cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

También se suelen emplear las letras minúsculas y mayúsculas del abecedario, sobre todo en las fórmulas de las áreas y volúmenes de Geometría, y en las de Mecánica y Electricidad.

6. Número concreto. — Se llama *número concreto* al número que designa la naturaleza de las unidades que

representa. Así, son números concretos: *tres metros, siete pesos, dos lingotes, cien tornillos*, etc.

7. Número abstracto. — *Número abstracto* es el que no designa la naturaleza de las unidades que representa. Así, son números abstractos: *tres, siete, dos, cien*, etc.

Numeración

8. Objeto de la numeración. — La *numeración* tiene por objeto *nombrar y representar* los números.

La numeración comprende dos partes: *numeración oral y numeración escrita*.

9. Numeración oral. — La *numeración oral* da las reglas para *nombrar* los números.

Sistema de numeración es el conjunto de reglas y convenciones que sirven para expresar todos los números.

Se llama *base de un sistema de numeración*, al número de signos distintos empleados en él. En el sistema de numeración decimal, los signos distintos son *diez*:

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9
cero, uno, dos tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve
y se llaman *unidades simples*.

En el sistema de numeración decimal se tiene que:

<i>diez unidades simples ...</i>	<i>forman una decena,</i>
<i>diez decenas</i>	<i>„ una centena,</i>
<i>diez centenas</i>	<i>„ un millar o mil,</i>

<i>diez millares</i>	„	<i>una decena de mil,</i>
<i>diez decenas de mil</i>	„	<i>una centena de mil,</i>
<i>diez centenas de mil</i> ...	„	<i>un millón,</i>

Las palabras <i>diez y uno</i>	se reemplazan por	<i>once,</i>
„ „ <i>diez y dos</i>	„ „	„ <i>doce,</i>
„ „ <i>diez y tres</i>	„ „	„ <i>trece,</i>
„ „ <i>diez y cuatro</i>	„ „	„ <i>catorce,</i>
„ „ <i>diez y cinco</i>	„ „	„ <i>quince.</i>

Las palabras <i>dos decenas</i>	se reemplazan por	<i>veinte,</i>
„ „ <i>tres decenas</i>	„ „	„ <i>treinta,</i>
„ „ <i>cuatro decenas</i>	„ „	„ <i>cuarenta,</i>

„ „ <i>ocho decenas</i>	„ „	„ <i>ochenta,</i>
„ „ <i>nueve decenas</i>	„ „	„ <i>noventa.</i>

Todo número comprendido entre dos consecutivos de éstos, está compuesto de *decenas* y *unidades*, y se expresa nombrando las decenas y luego las unidades. Ejemplos: *treinta y dos, cincuenta y seis*, etc.

Las palabras <i>cinco cientos</i>	se reemplazan por	<i>quinientos,</i>
„ „ <i>siete cientos</i>	„ „	„ <i>setecientos,</i>
„ „ <i>nueve cientos</i>	„ „	„ <i>novcientos.</i>

En el cuadro siguiente tenemos los nombres de las unidades de distinto orden hasta los trillones:

Millares de Billón			Billones			Millares de Millón			Millones			Millares			Unidades		
centenas de millar de billón	decenas de millar de billón	unidades de millar de billón	centenas de billón	decenas de billón	unidades de billón	centenas de millar de millón	decenas de millar de millón	unidades de millar de millón	centenas de millón	decenas de millón	unidades de millón	centenas de millar	decenas de millar	unidades de millar	centenas	decenas	unidades simples.
18°	17°	16°	15°	14°	13°	12°	11°	10°	9°	8°	7°	6°	5°	4°	3°	2°	1°

10. Numeración escrita. — La *numeración escrita* da las reglas para *escribir* los números.

11. Convención fundamental. — *Toda cifra colocada a la izquierda de otra representa unidades del orden inmediato superior.*

Comenzando por la derecha, la primer cifra son las unidades, la segunda las decenas, la tercera las centenas, la cuarta los millares, etc.; así, el número *dos mil cuatrocientos cincuenta y seis*, o sea:

2 millares, 4 centenas, 5 decenas, 6 unidades
por la convención fundamental resulta 2456.

12. OBSERVACIONES. I. — *Cuando falten unidades de un orden dado, su lugar se ocupa con un cero.*

Así, en 407 se tienen 4 centenas, 0 decenas y 7 unidades.

II. — *Las cifras tienen dos valores: uno absoluto, según su forma, y otro relativo, según el lugar que ocupa en el número dado.*

Ejemplo: En 35, el 3 tiene un valor absoluto de 3 unidades, y un valor relativo de 3 decenas.

13. Escritura de un número dictado. — *Para escribir un número dictado se escriben de izquierda a derecha las unidades de cada orden a medida que se vayan nombrando, colocando un cero cuando falten unidades de algún orden.*

Ejemplos:

1º Escribir setecientos treinta y cinco: 735.

2º Escribir dos mil ocho: 2008.

14. Lectura de un número escrito. — *Para leer un número escrito, se lo divide en grupos de tres cifras, por medio de un punto, y se lee, comenzando por la izquierda, el número de unidades de cada período, con la terminación del orden correspondiente.*

Ejemplo: el número 2.384.506 se lee: dos millones, trescientos ochenta y cuatro mil, quinientos seis.

15. Números dígitos y polidígitos. — Se llama número *dígito*, al que consta de una sola cifra, y *polidígito* los que se componen de dos o más cifras. Así, los números 5, 4 y 8 son dígitos, mientras que los números 14, 350 y 1.432 son polidígitos.

16. Aplicaciones. — En algunos aparatos de medida, como en los *medidores de gas*, de *electricidad*, de *agua* y *contadores de vueltas* de los talleres, se hace una aplicación de la numeración.

En general, para leer lo que marcan esos aparatos, se leen sucesivamente las cifras indicadas por las agu-

jas comenzando por la de orden superior. Cuando una aguja está entre dos cifras, se lee la menor, excepto cuando está entre 9 y 0, que se lee el 9.

MEDIDORES DE GAS.— La figura 1 representa el contador de un medidor de gas de los usados corrientemente.

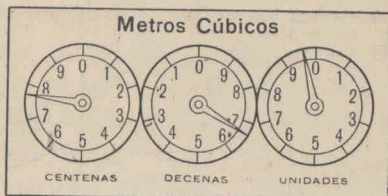


Fig. 1

Como la aguja de las centenas está entre el 7 y el 8, anotamos 7; como la aguja de las decenas está entre el 6 y el 7, anotamos 6, y como la aguja de las unidades está entre el 9 y el 0, anotamos 9, resultando así 769, que es lo que marca el medidor.

MEDIDORES DE ELECTRICIDAD.— Veamos de leer lo que marca el medidor de electricidad de la figura 2. Leyendo

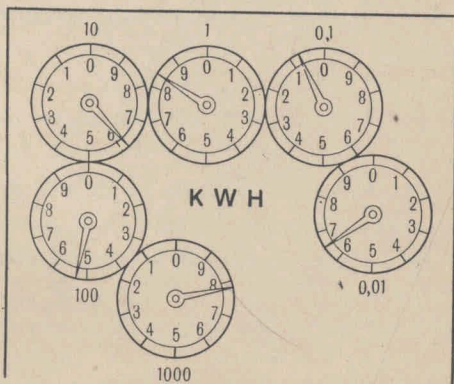


Fig. 2

sucesivamente las agujas que marcan los millares, centenas, etc., se obtiene el número 756806, pero como las dos últimas cifras se hallan a la derecha de las unidades, que son 8, pondremos una coma de separación, resultando 7.568,06, que es lo que marca el medidor. El número obtenido es un *número decimal*, que estudiaremos en el Capítulo X.

LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES

CAPITULO II

Suma de números enteros

17. Noción de la suma. — *En un taller, un obrero trabaja por su cuenta en la fabricación de una determinada pieza de máquina. El lunes hace 7, el martes 6, el miércoles 6, el jueves 8, el viernes 5 y el sábado 3. ¿Cuántas piezas ha construido en la semana?*

Para saberlo, hay que reunir las piezas de los diversos días en una sola cantidad, lo cual se hace mediante una operación llamada *suma*.

18. Definiciones. — Se llama *suma* de varios números enteros, al número que contenga todas las unidades de los números enteros dados.

La operación de sumar se llama *adición* o *suma*, y los números que se dan para sumar se llaman *sumandos*.

La adición o suma se indica con el signo $+$, que se lee *más*.

Para expresar que la suma de 2, 3 y 6 es 11, se escribe:

$$2 + 3 + 6 = 11.$$

La suma de un número y cero, es el mismo número.

Ejemplo: $5 + 0 = 5.$

19. Práctica de la suma. — Se presentan tres casos:

1º SUMAR DOS NÚMEROS DÍGITOS. — *Para sumar dos números dígitos, a uno de ellos se le suma sucesivamente las unidades del otro.*

Estas sumas se hacen de memoria sabiendo la *Tabla de sumar*.

FILAS VERTICALES	FILAS HORIZONTALES									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla de Sumar

2º SUMAR UN POLIDÍGITO Y UN DÍGITO. — *Para sumar un polidígito y un dígito se suman, sucesivamente, las unidades del dígito al polidígito.*

Ejemplos:

$$23 + 2 = 23 + 1 + 1 = 25$$

$$17 + 3 = 17 + 1 + 1 + 1 = 20$$

$$48 + 6 = 48 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 54$$

3º SUMAR POLIDÍGITOS. — *Para sumar polidígitos, se suman las unidades, las decenas, las centenas, etc., de los sumandos. Si alguna de estas sumas parciales tiene más de una cifra se escribe sólo la de la derecha, su-
mando las restantes con las del orden siguiente.*

En la práctica los sumandos se escriben en columna, de modo que queden las unidades debajo de las unida-

des, las decenas debajo de las decenas, las centenas debajo de las centenas, etc.

Ejemplo: Sumar los números 416, 2.382, 14 y 140.

La operación se dispone así:

$$\begin{array}{r}
 416 \\
 2.382 \\
 + \quad 14 \\
 \quad 140 \\
 \hline
 \text{Suma:} \quad 2.952
 \end{array}$$

Después de colocar los números en columna se suma mentalmente, empezando por la derecha, así: seis y dos, ocho; ocho y cuatro, doce; doce y cero, doce. Se coloca el 2 debajo y se lleva 1 para sumar a la segunda columna.

La suma de las decenas es 15; se escribe el 5 y se lleva 1 para sumar a las centenas, procediendo de la misma manera con las demás columnas que hubiere.

Propiedades de la suma

20. I. — *El orden de los sumandos no altera la suma.*

Sea sumar 5, 3 y 4.

Sumando en distinto orden se tiene:

$$5 + 3 + 4 = 12$$

$$4 + 3 + 5 = 12$$

luego: $5 + 3 + 4 = 4 + 3 + 5$, es decir, que: *El orden de los sumandos no altera la suma.*

21. II. — *En toda suma de varios números puede reemplazarse dos o más sumandos por su suma efectuada.*

Sea sumar 2, 5, y 3.

Se tiene: $2 + 5 + 3 = 10$

y también: $\begin{cases} 2 + 5 + 3 = 7 + 3 = 10 \\ 2 + 5 + 3 = 2 + 8 = 10 \end{cases}$

luego: $2 + 5 + 3 = 7 + 3 = 2 + 8$, es decir, que:
En toda suma de varios números se puede reemplazar dos o más de ellos por su suma efectuada.

Esta propiedad es de aplicación frecuente cuando se tienen que sumar muchos números, pues la suma dada se transforma en varias sumas chicas y luego se suman los resultados.

Ejemplo:	42	
	18	
	156	
	75	
	2.340	
	826	3.457
	4.732	
	656	
	301	
	722	
	1.928	
	5.700	14.039
	34	
	251	
	324	
	568	
	30	
	402	1.609
		19.105

La suma total es 19.105.

22. Prueba de la suma. — Para comprobar si una suma está bien hecha, puede seguirse uno de estos procedimientos:

1º *Se suman las cifras de las columnas en orden inverso, de abajo hacia arriba; si la suma está bien hecha, los resultados deben ser iguales.*

2º *Se cambia el orden de los sumandos; el resultado deberá ser el mismo.*

3º *Se descompone la suma en varias sumas parciales y luego se suman los resultados parciales, debiendo resultar la suma total.*

Suma mental y rápida

23. Se logra agilidad en la suma, teniendo en cuenta las siguientes recomendaciones:

1º *Hay que acostumbrarse a pronunciar el menor número posible de palabras al sumar.*

Ejemplo: $8 + 3 + 7 + 5 = 23$

En vez de decir: 8 y 3, 11; 11 y 7, 18; 18 y 5, 23, debe decirse mentalmente y lo más ligero que se pueda los resultados parciales, sin repetir los sumandos, así: 8, 11, 18, 23.

2º *Hay que saltar mentalmente los números cuya suma se hace rápida y mentalmente.*

Ejemplo: $17 + 9 + 3 + 21 + 5 = 55$.

Así, se suma 17 y 3, 9 y 21, diciendo: 20, 30, 55.

3º *Cuando se trata de números de una o dos cifras, suman las decenas y las unidades separadamente.*

Ejemplo: $42 + 58 + 17 + 6 = 123$.

Se dice: 40, 90, 100 100.

2, 10, 17, 23 23.

4º *Si la suma es muy larga, se descompone en sumas parciales y se suman los resultados, como se ha hecho en el ejemplo de la página 20.*

EJERCICIOS

Efectuar las sumas siguientes:

- | | | | |
|-----|---|----|---------|
| 1. | $24 + 35 + 78 + 93 + 20 + 15 + 16$ | R. | 281 |
| 2. | $85 + 37 + 42 + 24 + 74 + 56 + 32$ | " | 359 |
| 3. | $304 + 273 + 421 + 365 + 852$ | " | 2.215 |
| 4. | $1.205 + 542 + 35 + 72 + 235 + 2.368$ | " | 4.457 |
| 5. | $2.145 + 4.832 + 3.746 + 38.436 + 7.468$ | " | 56.627 |
| 6. | $368 + 4.739 + 8.495 + 567 + 3.432 + 85$ | " | 17.686 |
| 7. | $234 + 456 + 678 + 890 + 125 + 347 + 876$ | " | 3.606 |
| 8. | $2.345 + 2.139 + 3.856 + 187 + 37.425 + 5.894$ | " | 51.846 |
| 9. | $387 + 5.743 + 18.356 + 432.564 + 7.408 + 265$ | " | 464.723 |
| 10. | $9.875 + 8.796 + 7.897 + 5.798 + 6.687 + 8.765$ | " | 47.818 |

11. 5.403
4.265
18.832
476
47.256
5.382
16.805

12. 3.823
2.746
536
704
18.567
42.456
3.765

R. 98.419

R. 72.597

13. 56
35
238
473
2.576
378
456
7.364
5.325
482
2.489

14. 43
235
476
84
275
3.468
2.564
36
46
562
8.468
5.792

15. 468
234
2.768
5.432
920
7.685
6.478
3.795
5.978
4.868
7.535

R. 19.872

R. 22.049

R. 46.161

16. Un reloj de pared toca las horas y las medias horas. Calcular las campanadas que da en un día.

R. 180

✓ 17. Calcular el peso total de 4 bultos si el 1º pesa 285 kilogramos, el 2º 47, el 3º 156 y el 4º 273.

R. 761 kg.

18. Se han hecho compras por valor de 35 \$, 48 \$, 357 \$, 453 \$ y 238 \$. ¿Cuánto se gastó en total?

R. 1.131 \$.

19. Una persona compró una casa en 45.000 \$, dando 3.500 \$ al corredor. Le añadió un piso que le costó 17.456 \$ y gastó en diversos arreglos 2.853 \$. Averiguar el precio de venta, sabiendo que el propietario ganó 6.700 \$ sobre los gastos efectuados.

R. 75.509 \$.

20. Calcular la población de la Tierra, sabiendo que Europa tiene 485.000.000 de habitantes; Asia, 1.057.000.000; Africa, 140.000.000; América del Norte, 162.000.000; América del Sur, 81.000.000, y Oceanía, 10.000.000. R. 1.935.000.000.

21. Determinar la cantidad de petróleo producido en el país, y la cantidad importada, desde 1912 a 1924, con los siguientes datos:

<i>Año</i>	<i>Producción</i>	<i>Importación</i>
1912	6.864 Tm.	1.276 Tm.
1913	19.074 "	2.026 "
1914	20.126 "	1.164 "
1915	66.320 "	620 "
1916	90.215 "	130.768 "
1917	148.394 "	144.316 "
1918	176.335 "	1.541 "
1919	187.300 "	295.860 "
1920	199.843 "	488.145 "
1921	241.960 "	602.461 "
1922	329.148 "	644.428 "
1923	458.706 "	704.550 "
1924	412.036 "	707.519 "

R. 2.356.321 y 3.724.674 Tm.

22. En el dibujo de la figura 3, que representa un tornillo de morsa, anotar las medidas que faltan.

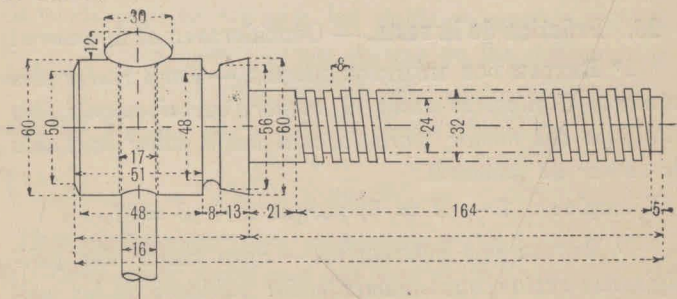


Fig. 3

CAPITULO III

Resta de números enteros

24. Noción de la resta. — *Una persona gana mensualmente 280 \$, y sus gastos ascienden a 235 \$. ¿Cuánto ahorra mensualmente?*

Se resuelve este problema hallando la diferencia entre ambas cantidades, lo que se logra mediante una operación llamada *resta*.

25. Definiciones. — Se llama *diferencia* entre dos números, al número que sumado al menor da una suma igual al mayor.

La *resta*, o *sustracción*, tiene por objeto hallar la diferencia entre dos números. El número mayor se llama *minuendo*, y el menor *sustraendo*.

La resta se indica con el signo —, que se lee *menos*.

Para expresar que la diferencia entre 8 y 3 es 5, se escribe:

$$8 - 3 = 5.$$

26. Práctica de la resta. — Consideraremos dos casos:

1º RESTAR DOS NÚMEROS DÍGITOS. — *Para restar dos números dígitos, se resta al mayor, sucesivamente, las unidades del menor, para lo cual basta saber la Tabla de sumar de memoria.*

Ejemplo: $7 - 2 = 5$, porque $2 + 5 = 7$.

2º RESTAR DOS POLIDÍGITOS. — *Para restar dos polidígitos se restan, sucesivamente, las unidades de las uni-*

dades, las decenas de las decenas, las centenas de las centenas, etc.

Ejemplo: Restar 875 y 452.

Se tiene:

5 unidades — 2 unidades = 3 unidades

7 decenas — 5 decenas = 2 decenas

8 centenas — 4 centenas = 4 centenas

resultando así: $875 - 452 = 423$.

Si alguna de estas restas parciales es imposible, se agrega, mentalmente, 10 a la cifra menor, aumentando en 1 la cifra siguiente del sustraendo.

Ejemplo: Restar 728 y 546.

Al restar las unidades se obtiene 2, pero luego es imposible restar 4 de 2, así que se aumenta 10 al 2, resultando $12 - 4 = 8$, y luego a la cifra siguiente del sustraendo, al 5, se le aumenta 1, resultando 6, que restado del 7 da 1, es decir:

$$728 - 546 = 182.$$

En la práctica, el sustraendo se escribe debajo del minuendo, de manera que las unidades queden debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, las centenas debajo de las centenas, etc.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 4.536 \\ - 2.743 \\ \hline 1.793 \end{array}$$

Para efectuar esa resta, se dice: de 3 a 6, 3; de 4 a 13, 9; y llevo 1 que con 7 es 8; de 8 a 15, 7; y llevo 1 que con 2 es 3; de 3 a 4, 1.

Propiedades de la resta

27. I. — *Si se suma un mismo número al minuendo y sustraendo, la diferencia no varía.*

Sea la resta: $6 - 2 = 4.$

Sumando un número, 5 por ejemplo, al 6 y al 2, resulta:

$$6 + 5 = 11$$

$$2 + 5 = 7$$

y restando los resultados:

$$11 - 7 = 4.$$

28. II. — *Si se resta un mismo número al minuendo y sustraendo, la diferencia no varía.*

Sea la resta: $18 - 15 = 3.$

Restando un número, 10 por ejemplo, resulta:

$$18 - 10 = 8$$

$$15 - 10 = 5$$

y restando los resultados:

$$8 - 5 = 3.$$

29. Prueba de la resta. — Para comprobar si una resta está bien hecha, puede seguirse uno de estos procedimientos:

1º *Se suman el resto y el sustraendo, debiendo dar como suma el minuendo.*

2º *Se resta el resto del minuendo, debiendo dar como diferencia el sustraendo.*

Resta mental y rápida

30. Las siguientes reglas de cálculo permiten operar rápidamente:

1º *En vez de restar al menor se agrega la diferencia.*

Ejemplo 1º $687 - 234 = 453$

diciendo: 4 y 3 7 , y poner 3
 3 y 5 8 , „ „ 5
 2 y 4 6 , „ „ 4

resultando así 453 .

Ejemplo 2º $403 - 175 = 228$

diciendo 5 y 8 13 , y poner 8
 1 y 7 , 8 y 2 10 , „ „ 2
 1 y 1 , 2 y 2 4 , „ „ 2

resultando 228 .

2º *Se descomponen los números en sus diversas unidades, y luego se restan las unidades de cada orden.*

Ejemplo 1º $87 - 53 = 34$.

Se dice: $80 - 50 = 30$
 $7 - 3 = 4$

resultando 34 .

Ejemplo 2º $532 - 285 = 247$.

Se dice: $400 - 200 = 200$
 $132 - 85 = 47$

resultando 247 .

3º *Se redondea uno de los números.*

Ejemplo: $75 - 43 = 32$.

Se dice: $75 - 40 = 35$; $35 - 3 = 32$.

EJERCICIOS

Efectuar las restas siguientes:

23.	2.382	—	830	R.	1.552
24.	16.031	—	12.835	„	3.196
25.	8.769	—	5.428	„	3.341
26.	✓ 12.864	—	8.342	„	4.522
27.	5.302	—	3.261	„	2.041
28.	✓ 53.431	—	48.219	„	✓ 5.212
29.	87.230	—	56.974	„	30.256
30.	✓ 285.003	—	233.678	„	✓ 1.325
31.	673.213	—	672.976	„	237
32.	402.050	—	397.653	„	4.397
33.	205.205	—	202.908	„	2.297
34.	567.432	—	498.000	„	69.432
35.	253.000	—	249.003	„	3.997
36.	2.538.435	—	2.498.765	„	39.670
37.	5.000.234	—	4.205.976	„	794.258

38. Si una persona debe 4.302 \$ y paga en dos oportunidades 238 \$ y 746 \$, ¿cuánto debe aún?

R. 3.318 \$.

39. Un barril contiene 238 litros de vino. Sucesivamente se han sacado 45, 76 y 59 litros, ¿cuántos litros quedan?

R. 58 lit.

40. Una persona deposita 480 \$ en el Banco, y luego deposita otra vez 343 \$. Posteriormente retira 250 \$ y 375 \$. Averiguar el saldo que queda en el Banco.

R. 198 \$.

41. Se compran tres alfagías de madera cuyas longitudes son, respectivamente, 8, 7 y 9 m. De ellas se cortan cuatro pedazos de 3, 2, 6 y 5 m. ¿Cuántos metros quedan?

R. 8 m.

42. Compro una casa en 18.500 \$. Gasto en comisión 1.500 \$ y en reparaciones 3.785 \$ y luego la vendo, después de haberla tenido alquilada tres meses a razón de 145 \$, en 27.480 \$. ¿Cuánto gano o pierdo en la operación?

R. Gano 3.260 \$.

43. Un padre tiene 32 años y su hijo 6. ¿Qué edad tendrá el padre cuando el hijo tenga 40 años, y qué edad tendrá el hijo cuando el padre tenga 50 años?

R. 66 y 24 años.

44. Un fabricante que tenía tejidos 7.000 metros de tela cedió 1.425 a otro fabricante y vendió 2.382 a un comerciante. Como no le quedó tela suficiente para servir un pe-

dido, mandó tejer otros 7.000 metros y, una vez servido éste, le sobraron 825 m. ¿De cuántos metros fué el pedido?

R. 9.368 m.

45. Un buje de bronce mide 78 milímetros de diámetro exterior y 56 milímetros de diámetro interior; calcular el espesor.

R. 11 mm.

46. Se ha comprado un torno mecánico en 1.700 \$, debiendo pagarse en cuatro cuotas trimestrales; la 1ª, de 535 \$; la 2ª, de 450 \$, y la 3ª, de 412 \$. Calcular el valor de la 4ª cuota.

R. 303 \$.

47. Un cable de 14 milímetros de diámetro puede soportar una carga máxima de 970 kg. Si el cable pesa 194 kg., ¿cuál es la carga que puede soportar?

R. 776 kg.

48. El vapor ejerce sobre el pistón de una máquina una fuerza de 4.800 kg., y del otro lado del émbolo la presión atmosférica opone una resistencia de 985 kg. ¿Cuál es la diferencia entre el esfuerzo motor y el esfuerzo de resistencia?

R. 3.815 kg.

49. Cuatro equipos de obreros colocan remaches en dos chapas que unen. El 1º pone 150 en un día, mientras que el 2º pone 27 menos; el 3er. equipo pone 15 más que el segundo, y el 4º pone tanto más que el 2º como el 1º pone más que el 3º. Calcular cuántos remaches puso cada equipo y el número total de remaches.

R. El 2º, 123; el 3º, 138, y el 4º, 135; en total 546.

50. En un cono de poleas la diferencia de los diámetros de dos poleas consecutivas es constante. Calcular los diámetros de las poleas del cono de la figura 4.

R. 240 y 180 mm.

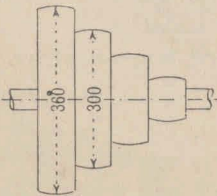


Fig. 4

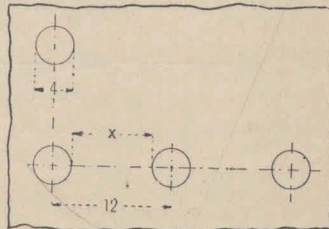


Fig. 5

51. Se han hecho en una planchuela, agujeros de 4 milímetros de diámetro separados 12 milímetros. Calcular la distancia x , figura 5.

R. $x = 4$ mm.

52. La figura 6 es el dibujo del eje de un dinamo. Calcular la longitud total y los diversos diámetros, sabiendo que el diá-

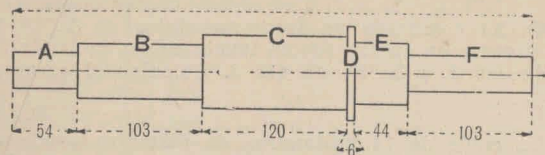


Fig. 6

metro de D mide 8 milímetros más que el de B; el diámetro de C mide 8 milímetros más que el de A; el diámetro de B mide 4 milímetros más que el de F; el de A, 12 milímetros menos que el de D; el de E, 2 milímetros menos que el de C, y el de F mide 18 milímetros.

R. 430; 18; 22; 26; 30; 24; 18 mm.

53. La figura 7 es la sección de la base de una cizalla. Anotar las medidas que faltan.

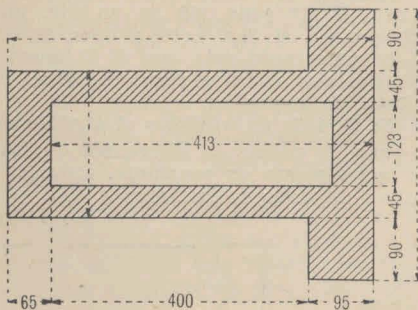


Fig. 7

CAPITULO IV

Multiplicación de números enteros

31. Noción de la multiplicación. — *Una persona gana 8 \$ diarios, ¿cuánto ganará en 4 días de trabajo?*

Solución:

En el 1er. día gana 8 \$

„ „ 2º „ „ 8 \$

„ „ 3er. „ „ 8 \$

„ „ 4º „ „ 8 \$.

Entonces, en total ha ganado:

$$8 \$ + 8 \$ + 8 \$ + 8 \$ = 32 \$$$

En vez de hacer esa suma, *cuyos sumandos son todos iguales*, se hace una operación llamada *multiplicación*, que reemplaza a esa suma especial.

32. Definiciones. — Se llama *producto* de dos números enteros, a la suma de tantas veces el primero, como unidades tenga el otro.

El primero se llama *multiplicando*, y el segundo *multiplicador*. Los dos juntos se llaman *factores del producto*.

La *multiplicación* tiene por objeto hallar el producto de dos números.

La multiplicación se indica con el signo $\times$, que se lee *multiplicado por*.

Multiplicar 5 por 3 significa:

$$5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = 15$$

El producto de un número por cero, es cero.

Ejemplo: $4 \times 0 = 0$

El producto de un número por 1, es el mismo número.

Ejemplo: $7 \times 1 = 7$

33. Práctica de la multiplicación. — Veremos varios casos:

1º **MULTIPLICAR DOS NÚMEROS DÍGITOS.** — *Para multiplicar dos números dígitos, basta saber de memoria la Tabla de multiplicar.*

Ejemplo: $7 \times 5 = 35$.

El producto de dos números se halla en la intersección de las filas encabezadas por ellos. Así el producto de 3 y 6 se halla en la intersección de la fila horizontal que empieza por 3, con la fila vertical que empieza por 6.

		FILAS HORIZONTALES							
FILAS VERTICALES	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	6	9	12	15	18	21	24	27
	4	8	12	16	20	24	28	32	36
	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	6	12	18	24	30	36	42	48	54
	7	14	21	28	35	42	49	56	63
	8	16	24	32	40	48	56	64	72
	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Tabla de Multiplicar

2º MULTIPLICAR UN POLIDÍGITO POR UN DÍGITO. — *Para multiplicar un polidígito por un dígito, se multiplica el dígito por las unidades, las decenas, las centenas, los millares, etc., del polidígito. Si algún producto parcial pasa de 9, se escribe sólo la cifra de las unidades, y se retiene la otra cifra para sumar al producto siguiente:*

$$\begin{array}{r} \text{Ejemplo:} \qquad 4.532 \\ \qquad \qquad \times 4 \\ \hline 18.128 \end{array}$$

Al multiplicar se dice: 4 por 2, 8; 4 por 3, 12 (se escribe 2 y se lleva 1); 4 por 5, 20 y 1 que llevaba, 21, (se escribe 1 y se lleva 2); 4 por 4, 16 y 2 que llevaba, 18, resultando así 18.128.

Nótese que 4.532×4 es lo mismo que sumar 4 veces 4.532:

$$\begin{array}{r} 4.532 \\ + 4.532 \\ 4.532 \\ 4.532 \\ \hline 18.128 \end{array}$$

3º MULTIPLICAR DOS POLIDÍGITOS. — *Para multiplicar dos polidígitos, se escribe el multiplicador debajo del multiplicando de manera que se correspondan las unidades del mismo orden, y se traza una raya horizontal.*

Se multiplica el multiplicando sucesivamente, por cada cifra del multiplicador, comenzando por la derecha, colocando la cifra de las unidades de cada producto parcial debajo de la cifra que se multiplica del multiplicador.

Luego se suman los productos parciales. La suma es el producto total.

Ejemplo:

	4.536	<i>Multiplicando</i>
	$\times 245$	<i>Multiplicador</i>
4.536 $\times 5 =$	22680	
4.536 $\times 4 =$	18144	
4.536 $\times 2 =$	9072	
	1.111.320	<i>Producto total</i>

34. Casos particulares. — I. *Para multiplicar por la unidad seguida de ceros, se agregan al número tantos ceros como acompañen a la unidad.*

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 253 \times 10 &= 2.530 \\ 357 \times 100 &= 35.700 \\ 170 \times 1000 &= 170.000 \end{aligned}$$

II. *Para multiplicar un número por otro seguido de ceros, se multiplica el número dado por este otro, y luego se agregan al resultado tantos ceros como acompañen al número dado.*

Ejemplos:	76	17	231
	$\times 40$	$\times 300$	$\times 5.000$
	3.040	5.100	1.155.000

III. *Si los dos factores terminan en ceros, se efectúa la operación sin tenerlos en cuenta, agregando al resultado tantos ceros como haya en el multiplicado y multiplicador.*

Ejemplos:

170	643.000	246.700
× 400	× 240	× 325.000
68.000	2572	12335
	1286	4934
	154.320.000	7401
		80.177.500.000

IV. *Si entre las cifras del multiplicador hay ceros, se saltan, y se sigue la multiplicación por la siguiente cifra significativa. La primer cifra de cada producto parcial se coloca siempre debajo de la cifra del multiplicador, por la cual se multiplica.*

Ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 564 \\
 \times 206 \\
 \hline
 3384 \\
 1128 \\
 \hline
 116.184
 \end{array}$$

35. Producto de varios números. — Se llama *producto de varios números*, llamados *factores*, al número que se obtiene multiplicando los dos primeros, el resultado por el 3º, el resultado por el 4º, el resultado por el 5º, etc.

El producto de los números 2, 5, 6 y 8, es:

$$\begin{aligned}
 2 \times 5 \times 6 \times 8 &= 10 \times 6 \times 8 \\
 &= 60 \times 8 \\
 &= 480
 \end{aligned}$$

Si todos los factores de un producto son iguales, el producto se llama *potencia*.

Ejemplo:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \quad ; \quad 16 \text{ es una potencia de } 2.$$

La potencia última se escribe abreviadamente así: $2^4 = 16$. El 4, que indica el número de factores iguales, se llama *exponente*.

Otros ejemplos:

$$3 \times 3 = 9, \quad \text{se escribe: } 3^2 = 9$$

$$5 \times 5 \times 5 = 125 \quad ,, \quad ,, \quad 5^3 = 125$$

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1.296 \quad ,, \quad ,, \quad 6^4 = 1.296$$

Propiedades de la multiplicación

36. I. *El orden de los factores no altera el producto.*

Sea multiplicar 5, 3 y 4.

Multiplicando en distinto orden, se tiene:

$$5 \times 3 \times 4 = 60$$

$$3 \times 5 \times 4 = 60$$

luego, como los resultados son iguales:

$$5 \times 3 \times 4 = 3 \times 5 \times 4.$$

37. — II. *En todo producto de varios números, se puede reemplazar dos o más de ellos por su producto efectuado.*

Sea multiplicar 2, 4 y 6.

$$\text{Se tiene: } 2 \times 4 \times 6 = 48$$

$$2 \times 4 \times 6 = 8 \times 6 = 48$$

$$2 \times 4 \times 6 = 2 \times 24 = 48$$

luego, como los resultados son iguales:

$$2 \times 4 \times 6 = 8 \times 6 = 2 \times 24.$$

38. — III. *Para multiplicar una suma indicada por un número, se multiplica cada sumando por el número dado, y luego se suman los resultados.*

Sea multiplicar la suma $4 + 3$ por 5.

Se tiene: $(4 + 3) \times 5 = 7 \times 5 = 35.$

Multiplicando cada sumando por 5, se tiene:

$$4 \times 5 = 20$$

$$3 \times 5 = 15$$

y sumando los resultados:

$$4 \times 5 + 3 \times 5 = 35$$

luego, como los resultados son iguales:

$$(4 + 3) \times 5 = 4 \times 5 + 3 \times 5.$$

39. — IV. *Para multiplicar una resta indicada por un número, se multiplica el minuendo y el sustraendo por dicho número, y luego se restan los resultados.*

Sea multiplicar la resta $8 - 3$ por 4.

Se tiene: $(8 - 3) \times 4 = 5 \times 4 = 20.$

Además: $8 \times 4 = 32$

$$3 \times 4 = 12$$

y restando estos resultados:

$$8 \times 4 - 3 \times 4 = 20$$

y como los productos son iguales:

$$(8 - 3) \times 4 = 8 \times 4 - 3 \times 4.$$

40. — V. *Para multiplicar un producto de varios números por un número, se multiplica este número por cualquiera de los del producto.*

Sea multiplicar el producto $3 \times 4 \times 5$, por el número 2.

Se tiene: $(3 \times 4 \times 5) \times 2 = 60 \times 2 = 120$.

Multiplicando ahora un factor cualquiera del producto dado, el 4, por ejemplo, por el número 2, se tiene:

$$3 \times (4 \times 2) \times 5 = 3 \times 8 \times 5 = 120$$

y como los resultados son iguales:

$$(3 \times 4 \times 5) \times 2 = 3 \times (4 \times 2) \times 5.$$

41. Prueba de la multiplicación. — Para averiguar si una multiplicación está bien hecha, puede seguirse uno cualquiera de estos procedimientos:

1º *Se invierte el orden de los factores, efectuando de nuevo la multiplicación, debiendo resultar el producto anterior si la multiplicación fué bien hecha.*

2º *Se suman las cifras del multiplicando; si el resultado tiene más de una cifra, se suman hasta obtener una cifra. Luego se hace lo mismo con el multiplicador, y se multiplican las dos sumas obtenidas, y si el resultado tiene más de una cifra se suman hasta obtener una sola.*

Si el resultado obtenido es igual al que se obtiene sumando de la misma manera las cifras del producto, la multiplicación está bien hecha; si no, está mal.

Ejemplo: Multiplicar 28.346 por 5.704.

Se tiene: 28.346 Multiplicando

$\times 5.704$ Multiplicador

161.685.584 Producto.

Prueba:

$$2 + 8 + 3 + 4 + 6 = 23 ; 2 + 3 = 5$$

$$5 + 7 + 0 + 4 = 16 ; 1 + 6 = 7$$

$$\overline{35} ; 3 + 5 = 8$$

$$1 + 6 + 1 + 6 + 8 + 5 + 5 + 8 + 4 = 44 ; 4 + 4 = 8$$

Como se ha obtenido el mismo número 8, la multiplicación está bien hecha.

Multiplicación mental y rápida

42. Las siguientes reglas permiten multiplicar con cierta rapidez:

1º *En un producto de varios factores, se saltan, mentalmente, los números cuyo producto se hace rápidamente.*

Ejemplos: $2 \times 8 \times 5 = 10 \times 8 = 80$

$$5 \times 9 \times 12 \times 7 = 60 \times 63 = 3.780$$

2º *Para multiplicar por 4, 40, 400, etc., se halla dos veces el duplo del número dado, y luego se agregan los ceros que hubiera.*

Ejemplos: $148 \times 4 = 296 \times 2 = 592$

$$372 \times 400 ; 744 ; 1.488 ; 148.800.$$

3º *Para multiplicar un número de dos cifras por 11, 110, 1.100, etc., se escribe entre las dos cifras del número dado, su suma, si es que ésta es menos que 10, y luego se agregan los ceros que hubiera.*

Ejemplos: $43 \times 11 = 473 ; 4 + 3 = 7$

$$26 \times 110 = 2.860 ; 2 + 6 = 8$$

$$13 \times 1.100 = 14.300 ; 1 + 3 = 4.$$

Si la suma es mayor que 9, se escribe entre las dos cifras las unidades de la suma de ellas, y se agrega 1 a la cifra de las decenas; luego se agregan los ceros necesarios.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 57 \times 11 &= 627 ; 5 + 7 = 12 ; 5 + 1 = 6 \\ 49 \times 110 &= 5.390 ; 4 + 9 = 13 ; 4 + 1 = 5 \\ 78 \times 1.100 &= 85.800 ; 7 + 8 = 15 ; 7 + 1 = 8 \\ 97 \times 11 &= 1.067 ; 9 + 7 = 16 ; 9 + 1 = 10 \end{aligned}$$

Si el número tiene más de dos cifras, se suma el número con sí mismo, poniendo uno en lugar corrido debajo del otro.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 4.785 \times 11 = 53.625 \quad \begin{array}{r} 4875 \\ 4875 \\ \hline 53.625 \end{array} \end{array}$$

4º Para multiplicar un número por 21, 31, 41, etc., se multiplica el número dado por 20 + 1, 30 + 1, 40 + 1, etcétera.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 46 \times 21 &= 46 (20 + 1) = 920 + 46 = 966 \\ 12 \times 31 &= 12 (30 + 1) = 360 + 12 = 372 \\ 54 \times 41 &= 54 (40 + 1) = 2160 + 54 = 2.214 \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

54.	475 × 234	R.	111.150
55.	903 × 407	,,	367.521
56.	1.827 × 124	,,	225.308
57.	5.486 × 314	,,	1.722.604
58.	5.682 × 543	,,	3.085.326
59.	4.836 × 470	,,	2.272.920
60.	3.045 × 2.308	,,	1.546.860
61.	4.008 × 8.654	,,	34.685.232
62.	14.389 × 7.089	,,	11.352.921
63.	37.887 × 8.796	,,	333.254.052
64.	24 × 32 × 16	,,	12.287
65.	14 × 18 × 30 × 25	,,	189.000
66.	58 × 73 × 48 × 37	,,	7.519.584

67. Averiguar el importe de 12 piezas de género de 285 m. cada una, a razón de 5 \$ el metro.

R. 17.100 \$.

68. El sonido recorre en el aire 340 m. por segundo. Calcular a qué distancia se halla una nube tempestuosa sabiendo que el trueno se oyó 12 segundos después de visto el relámpago.

R. 4.080 m.

69. La luz recorre 300.000 kilómetros por segundo, y tarda en llegar del Sol a la Tierra 485 segundos; calcular la distancia que hay entre la Tierra y el Sol.

R. 148.500.000 km.

70. Dos ciclistas parten al mismo tiempo en la misma dirección. Sus velocidades son 25 y 32 km. ¿A qué distancia estarán uno del otro, después de 6 horas de marcha?

R. 42 km.

71. Se compran 375 hectáreas de tierra a razón de 135 \$ la hectárea, y en varias instalaciones se invierten 6.380 \$. Calcular el costo total.

R. 57.005 \$.

72. ¿Cuántas plumas hay en 24 cajas de 12 docenas cada caja?

R. 3.456

73. En una imprenta trabajan 8 maquinistas a razón de 12 \$ diarios, 15 tipógrafos a 9 \$, 15 encuadernadores a 6 \$ y 8 medios oficiales a 5 \$. ¿Cuánto dinero se necesitará para pagar 24 días de jornales?

R. 8.664 \$.

74. Un depósito contiene 6.500 litros. Un grifo da 12 litros por minuto y ha estado abierto dos horas y cuarto una vez, y otra vez durante 35 minutos. ¿Cuántos litros de agua quedan en el depósito?

R. 4.460 lit.

75. Dos vapores se hallan a la distancia de 7.800 km. uno del otro y se acercan navegando el uno a 14 kilómetros por hora, y el otro a 18 kilómetros por hora. Después de 8 días y 5 horas, ¿a qué distancia se hallarán?

R. 1.496 km.

76. Calcular el costo total de 256 toneladas de hierro a 72 \$ la tonelada.

R. 18.432 \$.

77. Una plancha de acero de 16 milímetros de espesor pesa 126 kg. por metro cuadrado. Calcular el peso de una plancha del mismo espesor de 3 m. de ancho y 5 m. de largo.

R. 1.890 kg.

78. El metro cuadrado de chapa de zinc de un milímetro de espesor pesa 7 kilogramos. Calcular el peso de una chapa de 5 mm. de espesor, 2 m. de ancho y 6 m. de largo.

R. 420 kg.

79. Una polea da 45 vueltas por minuto y comanda a otra que va 7 veces más ligero. ¿Cuántas vueltas dará cada polea en 2 horas y 25 minutos?

R. 6.525 y 14.175.

80. El acero en barras puede soportar una carga máxima de 721 kg. por centímetro cuadrado de sección. ¿Qué esfuerzo puede soportar una barra de 37 centímetros cuadrados de sección?

R. 26.677 kg.

81. Calcular la potencia de una corriente eléctrica de 50 amperios de intensidad y una fuerza electromotriz de 110 voltios. (La potencia se determina multiplicando la intensidad y la fuerza electromotriz. La unidad de potencia es el watio).

R. 5.500 w.

CAPITULO V

División de números enteros

43. Noción de la división. — *La distancia entre dos lugares es de 120 km. ¿Qué tiempo empleará un automóvil en recorrerla a razón de 40 por hora?*

Solución

En una hora recorre 40 km., y le quedan

$$120 - 40 = 80 \text{ km.}$$

En otra hora recorre 40 km., y le quedan

$$80 - 40 = 40 \text{ km.}$$

En otra hora recorre 40 km., y le quedan

$$40 - 40 = 0 \text{ km.}$$

En total emplea 3 horas, que es el número de veces que se ha podido restar 40 de 120. En vez de hacer esas restas consecutivas *cuyos sustraendos son iguales*, se hace una operación llamada *división*, que las reemplaza.

44. División exacta. — Se llama *cociente* de dos números enteros, llamados *dividendo* y *divisor*, a otro número que multiplicado por el divisor dé un producto igual al dividendo.

Así, el cociente de los números 12 y 4 es 3, pues

$$3 \times 4 = 12.$$

Dividir dos números es hallar su cociente.

La *división* tiene por objeto hallar el cociente de dos números.

La división se indica por medio de dos puntos, $:$, o bien poniendo una rayita horizontal entre el dividendo y el divisor, que se leen *dividido por*.

Para indicar la división de 36 y 9, se escribe:

$$36 : 9 = 4 \quad , \quad \text{porque} \quad 4 \times 9 = 36$$

o bien:
$$\frac{36}{9} = 4$$

45. — *El cociente de un número por uno, es el mismo número:*

$$5 : 1 = 5 \quad , \quad \text{porque} \quad 5 \times 1 = 5.$$

El cociente de un número por sí mismo, es el número uno:

$$3 : 3 = 1 \quad , \quad \text{porque} \quad 1 \times 3 = 3.$$

El cociente de cero por un número, es cero:

$$0 : 2 = 0 \quad , \quad \text{porque} \quad 0 \times 2 = 0.$$

46. Condiciones de posibilidad. — Para que la división sea posible, se requiere:

1º *Que el divisor sea distinto de cero*, pues si el divisor fuese cero, ningún cociente por cero dará un producto igual al dividendo.

2º *Que el dividendo sea igual al producto del divisor por el cociente.*

47. Interpretación concreta de la división exacta. —

Si AB es un listón que mide 6 metros, y CD es otro listón que mide 2 metros (fig 8), el número de veces

que CD cabe en AB , en este caso 3, es el cociente de los números representados por AB y CD .

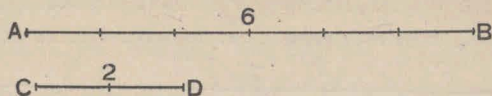


Fig. 8

48. División entera. — Puede darse el caso que el dividendo sea igual al divisor por el cociente, *más* un cierto número llamado *resto*. Entonces la división se llama *entera*. Así, la división entera de 26 y 4 tiene por objeto establecer que:

$$26 = 4 \times 6 + 2.$$

49. Cociente entero. — El *cociente entero* de dos números es el mayor número que multiplicado por el divisor, da un producto menor o igual que el dividendo.

Ejemplo:
$$\begin{array}{r} 48 \\ 3 \overline{) 9} \\ \underline{5} \end{array} ; 48 = 9 \times 5 + 3$$

48 es el *dividendo*; 9, el *divisor*; 5, el *cociente*; 3, el *resto*.

El *resto* es la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente. Así, en el ejemplo último, el resto 3 se obtiene así:

$$3 = 48 - 9 \times 5.$$

50. OBSERVACIÓN. — La *división exacta* es una *división entera* cuyo *resto* es *cero*.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 18 \\ 0 \overline{) 6} \\ \underline{3} \end{array} ; 18 = 6 \times 3 + 0 , \text{ o sea: } 18 = 6 \times 3 ,$$

que es una división exacta.

51. Interpretación concreta de la división entera.

-- Si AB es una barra de 7 metros y CD es otra barra de 2 metros (fig. 9), el *mayor número de veces* que CD cabe en AB , 3 en este caso, es el cociente entero de 7 y 2.

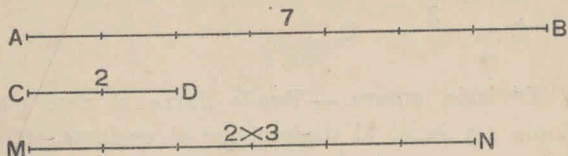


Fig. 9

52. **Práctica de la división.** — Se presentan tres casos:

1º EL DIVISOR Y EL COCIENTE SON DÍGITOS. — El cociente es dígito, cuando al agregar un cero al divisor, resulta un número mayor que el dividendo.

Sabiendo la *Tabla de multiplicar*, se obtiene el cociente.

Ejemplos:

$$63 : 9 = 7 \quad , \quad \text{porque} \quad 7 \times 9 = 63$$

$$42 : 5 = 8 \quad , \quad \text{resto } 2, \text{ porque } 8 \times 5 + 2 = 42.$$

2º EL DIVISOR ES CUALQUIERA, PERO EL COCIENTE ES DÍGITO. — *Para dividir dos polidígitos, siendo dígito el cociente, se separan a la izquierda del dividendo una o dos cifras y que contengan por lo menos una vez y menos de 10 veces a la primera del divisor. Se dividen las cifras así separadas, y el número obtenido será el cociente buscado.*

Si el producto del cociente hallado por el divisor es mayor que el dividendo, al cociente se le rebaja una unidad, y así hasta que el producto del cociente y el

divisor sea igual o menor que el dividendo. La diferencia entre el dividendo y el producto del cociente por el divisor, es el resto.

Ejemplo: Sea dividir 360 por 43.

Separando dos cifras en el dividendo, resulta:

$$\begin{array}{r|l} 36'0 & 43 \\ \hline \end{array}$$

dividiendo 36 por 4, que es la primera del divisor, resulta 9, que podrá ser el cociente buscado. Multiplicando 9 por 43 resulta 387, que es mayor que 360, luego 9 es demasiado. Probemos por 8. Multiplicando 8 por 43 se obtiene 344, que se puede restar de 360, siendo 8 el cociente:

$$\begin{array}{r|l} 36'0 & 43 \\ - 344 & 8 \\ \hline 16 & \end{array}$$

El cociente de 360 por 43 es 8, y el resto 16.

La resta anterior se efectúa al mismo tiempo que se va multiplicando.

3º DIVISIÓN DE NÚMEROS CUALESQUIERA. — *Para dividir dos números, siendo polidígito el cociente, se separan a la izquierda del dividendo las cifras necesarias para formar un número mayor que el divisor y menor que el producto de éste por 10, y se efectúa la división, resultando así la primer cifra del cociente. A la derecha del resto se coloca la cifra siguiente del dividendo, y se divide el número obtenido por el divisor, resultando la segunda cifra del cociente. Se continúa de esta manera hasta que se hayan bajado todas las cifras del divi-*

dendo. El último resto obtenido es el resto de la división.

Si algún dividendo parcial fuese menor que el divisor, se pone cero en el cociente y se baja la siguiente cifra del dividendo, prosiguiendo como ya se ha dicho.

Ejemplo: Dividir 7.871 por 38.

Separando en el dividendo dos cifras resulta 78, que es mayor que 38 y menor que 38×10 :

$$\begin{array}{r|l} 78'71 & 38 \\ \hline \end{array}$$

78 dividido por 38 resulta 2, que multiplicado por 38 da 76, y restado de 78 da 2; luego se baja la siguiente cifra, 7, del dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 78'71 & 38 \\ 27 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Como 27 no se puede dividir por 38, se pone 0 en el cociente y se baja la siguiente cifra del dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 78'71 & 38 \\ 271 & 20 \\ \hline \end{array}$$

271 dividido por 38 da 7, que multiplicado por 38 da 266, y restado de 271 resulta 5:

$$\begin{array}{r|l} 78'71 & 38 \\ 271 & 207 \\ 5 & \\ \hline \end{array}$$

El cociente de dividir 7.871 por 38 es 207, y el resto es 5.

53. Prueba de la división. — I. Una división está bien hecha cuando al multiplicar el cociente por el divi-

sor y sumar el resto al producto, el resultado es igual al dividendo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 157 & 12 \\ 37 & 13 \\ 1 & \end{array} ; \text{ Prueba: } 12 \times 13 = 156$$

$$156 + 1 = 157 = \text{dividendo.}$$

II. Se suman las cifras del divisor hasta obtener una sola cifra. Luego se hace lo mismo con el cociente y se multiplican las dos sumas obtenidas y al resultado se le suma el resto, y si tiene más de una cifra, se suman hasta obtener una sola.

Si el resultado obtenido es igual al que se obtiene sumando de la misma manera las cifras del dividendo, la división está bien hecha.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 35'82 & 24 \\ 118 & 149 \\ 222 & \\ 6 & \end{array}$$

Se tiene:

$$2 + 4 = 6$$

$$1 + 4 + 9 = 14 ; 1 + 4 = 5 ; 5 \times 6 = 30 ; 3 + 0 = 3 ; 3 + 6 = 9$$

$$3 + 5 + 8 + 2 = 18 ; 1 + 8 = 9$$

Propiedades de la división

54. I. Un número no altera cuando se lo multiplica por otro y al resultado de lo divide por ese otro, o viceversa.

Ejemplo 1º: $3 = (3 \times 5) : 5.$

En efecto: $3 \times 5 = 15 ; 15 : 5 = 3.$

Ejemplo 2º: $24 = (24 : 6) \times 6$.

En efecto: $24 : 6 = 4$; $4 \times 6 = 24$.

Al multiplicar y dividir por un mismo número, al anotar el resultado, lo que se ha hecho es *simplificar* el factor y el divisor iguales.

55. II. *Para dividir un producto de varios factores por uno de ellos, basta suprimir dicho factor.*

Ejemplo: $\frac{2 \times 3 \times 5}{5} = 2 \times 3 = 6$

En efecto: $2 \times 3 \times 5 = 30$; $30 : 5 = 6$.

56. III. *Para dividir un producto de varios factores por un divisor de uno de ellos, basta dividir a dicho factor.*

Ejemplo: $\frac{2 \times 18 \times 7}{3} = 2 \times (18 : 3) \times 7 = 2 \times 6 \times 7 = 84$

En efecto: $2 \times 18 \times 7 = 252$; $252 : 3 = 84$.

57. IV. *Si el dividendo y divisor se multiplican por un mismo número, distinto de cero, el cociente no altera.*

Ejemplo: $8 : 4 = (8 \times 5) : (4 \times 5) = 2$.

En efecto: $8 : 4 = 2$; $40 : 20 = 2$.

58. V. *Si el dividendo y divisor se dividen exactamente por un mismo número, el cociente no altera.*

Ejemplo: $18 : 6 = (18 : 2) : (6 : 2) = 3$.

En efecto: $18 : 6 = 3$; $9 : 3 = 3$.

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes divisiones:

82.	3.875 : 35	R.	225
83.	6.480 : 18	"	360
84.	7.638 : 53	"	146
85.	22.386 : 82	"	273
86.	41.140 : 68	"	605
87.	62.220 : 305	"	204
88.	56.659 : 47	"	1.205; $r = 24$
89.	18.278 : 38	"	481
90.	126.498 : 58	"	2.181
91.	124.758 : 289	"	431; $r = 199$
92.	345.651 : 87	"	3.973
93.	461.622 : 87	"	5.306
94.	3.207.594 : 767	"	4.182
95.	969.936 : 242	"	4.008
96.	1.525.957 : 5.003	"	305; $r = 42$
97.	1.040.235 : 1.389	"	748; $r = 1.263$
98.	3.862.944 : 789	"	4.896
99.	2.272.925 : 470	"	4.836; $r = 5$
100.	34.685.232 : 8.654	"	4.008
101.	3.047.175 : 725	"	4.203

Efectuar las divisiones siguientes después de haber simplificado:

102.	$\frac{4 \times 5 \times 33 \times 192}{11 \times 15 \times 48}$	R.	16
103.	$\frac{3 \times 64 \times 125 \times 14 \times 16}{16 \times 25 \times 28 \times 20}$	"	24
104.	$\frac{24 \times 18 \times 35}{4 \times 6 \times 7}$	"	90
105.	$\frac{3 \times 65 \times 50 \times 100 \times 60}{30 \times 60 \times 130}$	"	250
106.	$\frac{8 \times 12 \times 9 \times 11}{99 \times 3 \times 32}$	"	1
107.	$\frac{164 \times 321 \times 42 \times 4}{82 \times 321 \times 7}$	"	48
108.	$\frac{50 \times 20.000 \times 72}{1.060 \times 14.400}$	"	5
109.	$\frac{48 \times 63 \times 55 \times 49}{77 \times 21 \times 48}$	"	105

Efectuar las siguientes operaciones:

$$110. \quad \frac{34 \times 16 + 56 \times 15}{8 \times 14} \quad R. \quad 12; r = 40$$

$$111. \quad \frac{14 \times 16 \times 18 - 12 \times 14}{25 \times 13 + 32} \quad , \quad 10; r = 294$$

$$112. \quad \frac{95 \times 15}{25} + \frac{84 \times 35 \times 14}{21} \quad , \quad 1.821$$

113. Una persona ha recibido 1.764 \$ por 147 días de trabajo. ¿Cuál es su salario diario?

R. 12 \$.

114. Una fábrica construye 1.397.088 plumas por semana, y se empaquetan a razón de 144 por caja. ¿Cuántas cajas se necesitarán?

R. 9.702

115. En año y medio de alquiler se ha pagado 3.150 \$. ¿Cuál es el alquiler mensual?

R. 175 \$.

116. Compro una casa en 18.640 \$; pago 5.248 al contado, y el resto en 3 años. ¿Cuál debe ser el pago mensual?

R. 372 \$.

117. Se compraron 85 caballos a 72 \$ cada uno, y se vendieron 32 a 95 \$. ¿En cuánto se venderá cada uno del resto para ganar en toda la operación 1.690 \$?

R. 90 \$.

118. Un tanque de una capacidad de 3.840 litros, tiene un grifo que da 12 litros por minuto. ¿Qué tiempo necesita estar abierto el grifo para agotar el tanque?

R. 5 h. 20 m.

119. Las ruedas de un carro tienen un contorno de 5 m. ¿Cuántas vueltas deben dar para recorrer una distancia de 24.840 m. y cuánto tiempo empleará en recorrerla si da 9 vueltas por minuto?

R. 4.968 vueltas; 9 h. 12 m.

120. La velocidad de un tren es de 75 kilómetros por hora. ¿Qué tiempo empleará en recorrer 1.050 km.?

R. 14 horas.

121. La circunferencia máxima de la Tierra mide 40.000 kilómetros. ¿Qué tiempo empleará en recorrerla un tren a razón de 65 kilómetros por hora?

R. 25 d. 15 h. 23 m. 4 s.

122. La distancia de la Tierra al Sol es de 150.000.000 de kilómetros. Calcular el tiempo que emplearían en recorrerla un tren expreso a 80 kilómetros por hora, y un aeroplano a razón de 250 kilómetros por hora.

R: { El tren: 214 años y 15 días.
El aeroplano: 68 años y 6 meses.

123. La presión total ejercida sobre un émbolo de 385 centímetros cuadrados es de 10.395 kilogramos. ¿Cuál es la presión por centímetro cuadrado?

R. 27 kg.

124. Un riel mide 9 m. ¿Cuántos rieles se necesitan para construir una vía de 8.208 m.?

R. 1.824 rieles.

125. Una barra de hierro está sometida a una tracción de 5.885 kg. ¿En las condiciones en que se halla resiste 535 kg. por centímetro cuadrado, ¿qué sección tiene la barra?

R. 11 cm².

126. De una tabla que mide 303 milímetros de ancho se quieren sacar 6 alfagías. ¿Cuánto medirá cada una si cada corte de sierra come 3 milímetros?

R. 48 mm.

127. Un obrero gasta mensualmente 100 \$ entre casa y comida; en ropa y calzado, por trimestre, 120 \$; en gastos imprevistos, al año, 272 \$, y ahorra mensualmente 50 \$. Si el año tiene 360 días, y 61 días no trabaja por ser días feriados, ¿cuánto gana por día?

R. 8 \$.

128. Una fresadora circular termina un volante en 40 minutos, mientras que en el torno se necesitan 120 minutos. Además, el fresador puede atender 3 máquinas distintas, mientras que el tornero sólo atiende una.

¿Cuántos volantes podrá terminar el fresador mientras el tornero termina 20? El tornero gana 8 \$ diarios, y el fresador 10 \$. Averiguar cuál es la economía por volante, sabiendo que trabajan 8 horas al día.

R. Mientras el tornero hace 20 volantes, el fresador hace 180. La economía por volante es de 175 centavos, es decir, 1 peso y 75 centavos.

129. Una esmeril limpia 1.200 dientes de engranajes de fundición por hora, comprendido el tiempo necesario para el cambio de las piezas a limpiar. En 3 horas se han limpiado un nú-

mero igual de ruedas dentadas, unas de 18 dientes, otras de 32 y otras de 25 dientes, ¿cuántas son las ruedas de cada clase?

R. 48 ruedas.

130. El espesor de los cilindros sometidos a presiones bajas está dado por la fórmula:
$$e = \frac{P \times d}{2R}$$

en donde: e = espesor en cm.; P = presión en kg. por cm²; d = diámetro interior en cm.; R = coeficiente de resistencia por cm².

¿Qué espesor deberá tener un cilindro de 20 cm. de diámetro interior, sometido a una presión de 100 kg. por cm², siendo el coeficiente de resistencia 500 kg. por cm²?

R. 2 cm.

131. El espesor de los cilindros sometidos a fuertes presiones está dado por la fórmula:
$$e = \frac{P \times d}{2R - P}$$

en donde: e = espesor en cm.; P = presión en kg. por cm²; d = diámetro interior en cm.; R = coeficiente de resistencia por cm².

¿Qué espesor deberá tener un cilindro de acero fundido, sabiendo que la presión es de 250 kg. por cm², que el diámetro interior es de 30 cm. y que el coeficiente de resistencia es de 500 kg. por cm²?

R. 10 cm.

CAPITULO VI

Divisibilidad

59. Múltiplo de un número. — Se llama *múltiplo* de un número, al producto de ese número por un número entero.

Ejemplo: los múltiplos del número 6 son:

$$6 \times 0 = 0 = \text{múltiplo de } 6$$

$$6 \times 1 = 6 = \text{,, ,,}$$

$$6 \times 2 = 12 = \text{,, ,,}$$

$$6 \times 3 = 18 = \text{,, ,,}$$

$$6 \times 4 = 24 = \text{,, ,,}$$

.....

$$6 \times 12 = 72 = \text{,, ,,}$$

.....

$$6 \times 25 = 150 = \text{,, ,,}$$

Un número cualquiera tiene un número ilimitado de múltiplos.

60. Número divisible por otro. — Un número es *divisible* por otro, cuando es múltiplo de ese otro.

Así 12 es divisible por 3 porque es múltiplo de 3; es decir, hay un cierto número 4, que multiplicado por 3 da 12.

61. Divisibilidad. — La *divisibilidad* es la parte de la Aritmética que estudia las condiciones que debe cumplir un número para que sea divisible por otro.

Propiedades de la divisibilidad

62. I. *Si un número divide a otros varios, también divide a su suma.*

Si el número 3 divide a 6, 18 y 30, también divide a la suma $6 + 18 + 30 = 54$. En efecto:

$$54 : 3 = 18 \quad \begin{array}{r|l} 54 & 3 \\ 24 & 18 \\ 0 & \end{array}$$

63. II. *Si un número divide a otros dos, también divide a su diferencia.*

El número 5 divide a 35 y a 20, y también divide a $35 - 20 = 15$. En efecto:

$$15 : 5 = 3 \quad \begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ 0 & 3 \end{array}$$

64. III. *Si un número es divisible por otro, y éste es divisible por un tercero, el primero es divisible por el tercero.*

Si el número 60 es divisible por 12 y 12, a su vez, es divisible por 4, se comprueba que 60 es divisible por 4, pues:

$$60 : 4 = 15 \quad \begin{array}{r|l} 60 & 4 \\ 20 & 15 \\ 0 & \end{array}$$

Caracteres de divisibilidad

65. Divisibilidad por 2. — *Un número es divisible por 2, cuando termina en cero o cifra par.*

Ejemplos: 34 y 50 .

$$\begin{array}{r|l} 34 & 2 \\ 14 & 17 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 10 & 25 \\ 0 & \end{array}$$

Los números divisibles por 2 se llaman *pares*; los demás son los *impares* o *nones*.

66. Divisibilidad por 5. — *Un número es divisible por 5, cuando termina en cero o en cinco.*

Ejemplos: 15 y 75:

$$\begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ 0 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 75 & 5 \\ 25 & 15 \\ 0 & \end{array}$$

67. Divisibilidad por 4. — *Un número es divisible por 4, cuando las dos últimas cifras son ceros, cuatros, o forman un número divisible por 4.*

Ejemplos: 7500; 144 y 516.

$$\begin{array}{r|l} 7500 & 4 \\ 35 & 1875 \\ 30 & \\ 20 & \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 144 & 4 \\ 24 & 36 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 516 & 4 \\ 11 & 129 \\ 36 & \\ 0 & \end{array}$$

68. Divisibilidad por 25. — *Un número es divisible por 25, cuando las dos últimas cifras son ceros, o 25, o 50, o 75.*

Ejemplos: 400; 3425; 150 y 275.

$$\begin{array}{r|l} 400 & 25 \\ 150 & 16 \\ 00 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3425 & 25 \\ 92 & 137 \\ 175 & \\ 00 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 275 & 25 \\ 25 & 11 \\ 0 & \end{array}$$

69. Divisibilidad por 8. — *Un número es divisible por 8, cuando las tres últimas cifras son ceros, ochos, o forman un número divisible por 8.*

Ejemplos: 2.000; 1.888 y 12.024.

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 8 \\ 40 & 250 \\ 00 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1888 & 8 \\ 28 & 236 \\ 48 & \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 12.024 & 8 \\ 40 & 1503 \\ 024 & \end{array}$$

70. Divisibilidad por 125. — *Un número es divisible por 125, cuando las tres últimas cifras son ceros o forman un número divisible por 125.*

Ejemplos: 3.000; 4.250.

$$\begin{array}{r|l} 3000 & 125 \\ 500 & 24 \\ \hline 000 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4250 & 125 \\ 500 & 34 \\ \hline 00 & \end{array}$$

71. Divisibilidad por 3. — *Un número es divisible por 3, cuando la suma de sus cifras significativas es un número divisible por 3.*

Ejemplos:

$$1^{\circ}) \quad 420 ; 4 + 2 + 0 = 6 = \text{div. por } 3 ; \begin{array}{r|l} 420 & 3 \\ 12 & 140 \\ \hline 00 & \end{array}$$

$$2^{\circ}) \quad 1872 ; 1 + 8 + 7 + 2 = 18 = \text{div. por } 3 ; \begin{array}{r|l} 1872 & 3 \\ 7 & 624 \\ \hline 12 & \\ 0 & \end{array}$$

72. Divisibilidad por 9. — *Un número es divisible por 9, cuando la suma de sus cifras significativas es un número divisible por 9.*

Ejemplos:

$$1^{\circ}) \quad 675 ; 6 + 7 + 5 = 18 = \text{div. por } 9 ; \begin{array}{r|l} 675 & 9 \\ 45 & 75 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$2^{\circ}) \quad 9855 ; 9 + 8 + 5 + 5 = 27 = \text{div. por } 9 ; \begin{array}{r|l} 9855 & 9 \\ 085 & 1095 \\ \hline 45 & \\ 0 & \end{array}$$

73. Divisibilidad por 11. — *Un número es divisible por 11, cuando la diferencia entre la suma de las cifras*

de lugar par, y la suma de las cifras de lugar impar, es divisible por 11.

Ejemplos:

$$1^{\circ}) \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 39.435 \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} ; \quad \begin{array}{l} 3+4+5=12 \\ 9+3=12 \end{array} ;$$

$$12-12=0=\text{div. por } 11 ; \quad \begin{array}{r} 39435 \quad | \quad 11 \\ 64 \\ 93 \\ 55 \\ 0 \end{array}$$

$$2^{\circ}) \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 9.174.836 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \end{array} ; \quad \begin{array}{l} 9+7+8+6=30 \\ 1+4+3=8 \end{array} ;$$

$$30-8=22=\text{div. por } 11 ;$$

74. Divisibilidad por 7. — *Un número es divisible por 7, cuando la cifra de sus unidades multiplicada por 5, más el número por las cifras que están a la izquierda de las unidades, es divisible por 7.*

Ejemplos:

$$1^{\circ}) \quad 84 ; 4 \times 5 = 20 ; 20 + 8 = 28 = \text{div. por } 7. \quad \begin{array}{r} 84 \quad | \quad 7 \\ 14 \\ 0 \end{array}$$

$$2^{\circ}) \quad 112 ; 2 \times 5 = 10 ; 10 + 11 = 21 = \text{div. por } 7. \quad \begin{array}{r} 112 \quad | \quad 7 \\ 42 \\ 0 \end{array}$$

75. Aplicaciones de los caracteres de divisibilidad.
— Los caracteres de divisibilidad tienen diversas aplicaciones:

1ª *Prueba por 9 de las operaciones.* — El carácter de la divisibilidad por 9 se aplica en las pruebas de las

operaciones, tal cual hemos hecho en la multiplicación y división y veremos en la extracción de raíces. La justificación consiste en que *el resto de la división de un número por 9, es el mismo de la división por 9 de la suma de sus cifras.*

2ª *Simplificación de fracciones.* — Veremos más adelante esta aplicación, al estudiar las fracciones.

3ª *Tren de ruedas dentadas.* — Los caracteres de divisibilidad se aplican para saber, en una serie de ruedas dentadas de un torno, por ejemplo, cuáles son los números de dientes divisibles por 2, 3, 4, 5, etc., o por dos de estos números a la vez, o por tres, etc.

EJERCICIOS

132. Escribir los diez primeros múltiplos de 2.

R. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

133. Idem, ídem de 3.

R. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.

134. Escribir los múltiplos de 4 comprendidos entre 50 y 65.

R. 52, 56, 60 y 64.

135. Escribir los múltiplos de 5 comprendidos entre 200 y 230.

R. 205, 210, 215, 220, 225.

136. Se sabe que se puede repartir exactamente entre 8 obreros las sumas de 72 \$ y 40 \$. ¿Se podría repartir también exactamente la suma de ambas cantidades? ¿Por qué?

R. Sí. Por la prop. I pág. 56.

137. Si en un trabajo se ha tenido una ganancia de 77 \$ y una pérdida de 21 \$, ¿se podría repartir la utilidad líquida entre 7 obreros? ¿Por qué?

R. Sí. Por la prop. II, pág. 56.

138. La lista siguiente representa los números de dientes de las ruedas de engranajes de un torno: 18, 20, 21, 22, 24, 27, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 40, 41, 42, 45, 47, 50, 51, 55, 57, 59, 60, 65, 70, 75, 80, 83, 100, 120. Hallar las ruedas cuyos números de dientes sean múltiplos de 6, 7, 12 y 15.

R: $\left\{ \begin{array}{l} \text{de } 6: 18, 24, 30, 36, 42, 60, 120. \\ \text{,, } 7: 21, 35, 42, 70. \\ \text{,, } 12: 24, 36, 60, 120. \\ \text{,, } 15: 30, 45, 60, 75. \end{array} \right.$

139. En la lista del ejercicio anterior, ¿cuáles son las ruedas cuyos números de dientes son múltiplos de 5 y 2, y de 8 y 12?

R: $\left\{ \begin{array}{l} \text{de } 5 \text{ y } 2: 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100, 120. \\ \text{,, } 8 \text{ y } 12: 24, 120. \end{array} \right.$

140. ¿Cuáles son los múltiplos de 3 más aproximados a 137?

R. 135 y 138.

141. ¿Cuáles son los múltiplos de 6 más aproximados a 165?

R. 162 y 168.

142. ¿Cuáles son los múltiplos de 43 más aproximados a 5.395?

R. 5.375 y 5.418.

CAPITULO VII

Números primos

76. Número primo. — Un número es *primo* o *simple*, cuando solamente se puede dividir por sí mismo y por *uno*.

Un número es *compuesto*, cuando no es primo.

Ejemplos:

5 es *primo*; sus divisores son 5 y 1.

8 es *compuesto*; sus divisores son 8, 4, 2 y 1.

77. Números primos entre sí. — Varios números son *primos entre sí*, cuando tienen solamente al número *uno* como divisor común.

Ejemplo: 8 y 15 son primos entre sí porque 1 es el único divisor común.

Dos números consecutivos son siempre primos entre sí:

2 y 3 ; 8 y 9 ; 14 y 15 ; 20 y 21 ; 84 y 85 ;
432 y 433 ; etc.

78. — Tabla de números primos. — Sea hallar los números primos contenidos en los 100 primeros números:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100					

Una vez escritos los 100 primeros números, a partir del 2, de dos en dos, tachamos los números que siguen al 2. A partir del 3, de tres en tres, tachamos los números que siguen al 3. A partir del 5, de cinco en cinco, tachamos los números que siguen al 5, y así continuamos tachando de 7 en 7, de 11 en 11, de 13 en 13, etc.

Los números en negrita son los números primos que hay en los 100 primeros números. El procedimiento seguido se llama *Criba de Eratóstenes*.

79. Manera de reconocer si un número es primo. — Para reconocer si un número es primo, se lo divide sucesivamente por cada uno de los números primos hallados anteriormente, comenzando por los menores hasta que el cociente sea igual o menor que el divisor empleado. Si alguna de esas divisiones es exacta, el número no es primo. Si al continuar la división se halla un cociente *menor* o *igual* que el divisor, el número dado es primo.

Ejemplo: Reconocer si 251 es primo.

Comprobamos, mentalmente, que no es divisible por 2, 3, 5, 7 y 11; dividámoslo por 13 y 17:

$$\begin{array}{r|l} 251 & 13 \\ 121 & 19 \\ 04 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 251 & 17 \\ 81 & 14 \\ 13 & \end{array}$$

En las divisiones hasta el 13, los cocientes eran *mayores que el divisor*, pero disminuyendo cada vez, pero al dividir por 17, el cociente resulta *menor que el divisor*, luego 251 es primo.

Descomposición de un número en sus factores primos

80. Definición. — *Descomponer un número en sus factores primos* es hallar un producto de factores primos igual a ese número.

Para descomponer un número en sus factores primos, se lo divide por su menor divisor distinto de uno; el cociente obtenido, por su menor divisor distinto de uno; el cociente obtenido por su menor divisor distinto de uno, y así hasta llegar a un cociente igual a uno. Luego se forma el producto de los diversos factores primos.

Ejemplo: Descomponer el número 360 en sus factores primos.

En la práctica se hacen mentalmente las divisiones, disponiéndose la operación así:

360	2	$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ $= 2^3 \times 3^2 \times 5$
180	2	
90	2	
45	3	
15	3	
5	5	
1		

81. Aplicaciones. — La descomposición de los números en sus factores primos se aplica:

1º *Para hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números dados*, que se estudiará en el capítulo siguiente.

2º *Para reducir fracciones al mínimo común denominador*, como se verá en el Capítulo IX.

3º *Para descomponer un paso de rosca dado en un producto de factores*, como se verá al aplicar las fracciones al roscado en el torno.

EJERCICIOS

143.	Reconocer si	943	es primo.	R. No es primo
144.	"	647	" "	" Es primo
145.	"	1.187	" "	" Es primo
146.	"	4.393	" "	" No es primo.
147.	Descomponer 540 en sus factores primos.	R. $2^2 \times 3^2 \times 5$		
148.	"	1.144	" "	R. $2 \times 5^2 \times 11$
149.	"	1.260	" "	R. $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$
150.	"	3.168	" "	R. $2^5 \times 3^2 \times 11$
151.	"	4.851	" "	R. $3^2 \times 7^2 \times 11$
152.	"	5.005	" "	R. $5 \times 7 \times 11 \times 13$
153.	"	10.800	" "	R. $2^4 \times 3^2 \times 5^2$
154.	"	23.265	" "	R. $3^3 \times 5^3 \times 7$
155.	"	55.440	" "	R. $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$
156.	"	592.900	" "	R. $2^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2$
157.	"	44.100	" "	R. $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$
158.	"	77.000	" "	R. $2^3 \times 5^3 \times 7 \times 11$
159.	"	136.125	" "	R. $3^2 \times 5^3 \times 11^2$
160.	"	17.199	" "	R. $3^3 \times 7^2 \times 13$
161.	"	80.850	" "	R. $2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11$
162.	"	17.640	" "	R. $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$
163.	"	75.600	" "	R. $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$

CAPITULO VIII

Máximo común divisor y

Mínimo común múltiplo

82. Divisor común. — Se llama *divisor común* de varios números, al número que los divide exactamente.

Ejemplo: Sean los números 36, 24 y 18. Se tiene:

divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36;

divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24;

divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Los divisores comunes de 36, 24 y 18 son: 1, 2, 3 y 6.

83. Máximo común divisor. — Se llama *máximo común divisor* de varios números, al mayor divisor común de todos ellos.

En el ejemplo anterior se ha visto que los divisores comunes de 36, 24 y 18 son 1, 2, 3 y 6; pero el mayor de todos es 6, que es el máximo común divisor de 36, 24 y 18.

El máximo común divisor se indica así: *m c. d.*

84. Múltiplo común. — Se llama *múltiplo común* de varios números, al número que es divisible exactamente por ellos.

Ejemplo: Sean los números 2 y 3. Se tiene:
múltiplos de 2:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26...

múltiplos de 3:

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30...

Los múltiplos comunes de 2 y 3, son: 0, 6, 12, 18, 24...

85. Mínimo común múltiplo. — Se llama *mínimo común múltiplo* de varios números, al menor múltiplo común de todos ellos.

En el ejemplo anterior se ha visto que los múltiplos comunes de 2 y 3 son: 0, 6, 12, 18, 24...; pero el menor de todos, excepto el cero, es 6, que es el mínimo común múltiplo de 2 y 3.

El mínimo común múltiplo se indica así: *m.c.m.*

86. Aplicación. — Las ruedas de un torno tienen los números de dientes siguientes:

15, 16, 17, 18, 19, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65,
70, 75, 80, 85, 90, 100, 110, 120, 150.

Hallar:

1º La rueda cuyo número de dientes es el mayor múltiplo de un número dado, por ejemplo 12: La rueda buscada es la 120;

2º La rueda cuyo número de dientes sea el menor múltiplo posible de un número dado, por ejemplo 15: La rueda buscada es la 30;

3º Dos ruedas cuyos números de dientes sean equimúltiplos (múltiplos respecto al mismo número), de dos números dados, por ejemplo 3 y 5: Las ruedas buscadas son: 15 y 25; 18 y 30; 30 y 50; 45 y 75; 60 y 100; 90 y 150, u otras combinaciones análogas.

86 bis. Procedimiento práctico para hallar el m.c.d. de números pequeños. — Para hallar mentalmente el *m.c.d.* de varios números pequeños, se prueba si el número menor divide a los otros números; si los divide, es el *m.c.d.* de todos.

Si no los dividiese, se prueba por la *mitad* del menor, o la *tercera parte*, o la *cuarta*, etc., y el número así hallado que divida a los otros números, es el *m.c.d.* de todos los números dados.

Ejemplo 1º: Sea hallar el *m.c.d.* de 8, 24 y 40.

El número menor, el 8, divide a 24 y a 40, luego 8 es el *m.c.d.*:

$$m.c.d. \text{ de } 8, 24 \text{ y } 40 = 8.$$

Ejemplo 2º: Sea hallar el *m.c.d.* de 12, 15 y 24.

Probemos mentalmente si el número menor, el 12, divide a 15 y a 24; como no los divide, hallemos su mitad, 6, y probemos si 6 divide a 15 y a 24; como 6 tampoco es el divisor común, hallemos la tercera parte de 12, es decir, 3, y probemos si 3 divide a 15 y a 24. Como efectivamente, 3 divide a 12, 15 y 24, 3 es el *m.c.d.* de todos ellos:

$$m.c.d. \text{ de } 12, 15 \text{ y } 24 = 3.$$

87. Procedimiento práctico para hallar el *m.c.m.* de números pequeños.— Para hallar mentalmente el *m.c.m.* de varios números pequeños, se prueba si el mayor es divisible por los otros; si lo es, el número mayor es el *m.c.m.* de todos ellos.

Si no fuese, formamos el *duplo* del mayor, o el *triplo*, o el *cuadruplo*, etc., y el número así hallado, que sea divisible por los otros, es el *m.c.m.* de todos los números dados.

Ejemplo 1º: Sea hallar el *m.c.m.* de 15, 9, 6 y 45.

El número mayor, el 45, es divisible por 15, 9 y 6, luego 45 es el *m.c.m.*:

$$m.c.m. \text{ de } 15, 9, 6 \text{ y } 45 = 45.$$

Ejemplo 2º: Sea hallar el *m.c.m.* de 3, 12 y 8.

Probemos mentalmente si el número mayor 12 es divisible por 3 y por 8. Comprobamos que es divisible por 3, pero no por 8; entonces hallemos el duplo de 12, es decir, 24, y veamos si 24 es divisible por 3 y por 8. Como 24 sí es divisible por 3, 12 y 8, es el *m.c.m.*:

$$m.c.m. \text{ de } 3, 12 \text{ y } 8 = 24.$$

Ejemplo 3º: Hallar el *m.c.m.* de 2, 4 y 5.

El 5 no es divisible por 2 y por 4; tomemos el duplo, 10, que tampoco lo es; tomemos el triplo, 15, que tampoco lo es; tomemos el cuádruplo, 20, que sí es divisible por 2 y 4, luego:

$$m.c.m. \text{ de } 2, 4 \text{ y } 5 = 20.$$

88. Obtención del *m.c.d.* de varios números. — Para hallar el *m.c.d.* de varios números, se los descompone en sus factores primos, y luego se forma el producto de los factores comunes con su menor exponente.

Ejemplo: Hallar el *m.c.d.* de 120, 168 y 540.

Descompongamos esos números en sus factores primos:

120	2	168	2	540	2
60	2	84	2	270	2
30	2	42	2	135	3
15	3	21	3	45	3
5	5	7	7	15	3
1		1		5	5
				1	

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7$$

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

Los factores comunes son 2 y 3, y tomados con su menor exponente resulta:

$$m.c.d. = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12.$$

89. Obtención del m.c.m. de varios números. — Para hallar el m.c.m. de varios números, se los descompone en sus factores primos y luego se forma el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo: Hallar el m.c.m. de 72, 84 y 90.

Descompongamos esos números en sus factores primos:

72	2	84	2	90	2
36	2	42	2	45	3
18	2	21	3	15	3
9	3	7	7	5	5
3	3	1		1	
1					

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5.$$

Los factores distintos son 2, 3, 5 y 7, y tomados con su mayor exponente resulta:

$$m.c.m. = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 8 \times 9 \times 5 \times 7 = 2.520.$$

90. Aplicaciones. — El m.c.d. de dos o más números se aplica en la *simplificación de fracciones*, lo que se estudiará en el Capítulo IX.

EJERCICIOS

164.	Hallar el m.e.d. de	72, 64 y 60	R.	4
165.	" "	" " 36, 24 y 48	"	12
166.	" "	" " 360, 504 y 792	"	36
167.	" "	" " 90 y 210	"	30
168.	" "	" " 120, 300 y 360	"	60
169.	" "	" " 1.476 y 984	"	492
170.	" "	" " 10.800 y 3.168	"	144
171.	" "	" " 360, 1.260 y 204	"	12
172.	" "	" " 936, 1.820 y 1.320	"	4
173.	" "	" " 630.784, 16.332 y 7.644	"	28
174.	" "	" " 2.052 y 648	"	108
175.	Hallar el m.e.m. de	540, 504 y 528	R.	55.440
176.	" "	" " 360, 1.260 y 204	"	42.840
177.	" "	" " 231, 1.386 y 1.320	"	27.720
178.	" "	" " 936, 1.820 y 1.320	"	360.360
179.	" "	" " 784 y 630	"	35.280
180.	" "	" " 561 y 2.800	"	1.570.800
181.	" "	" " 360, 4.200 y 240	"	25.200
182.	" "	" " 100, 254 y 270	"	342.900

183. Se quiere distribuir entre un mismo número de niños un canasto de 136 duraznos y otro de 102 peras. ¿Cuál será el mayor número de niños entre quienes se podrá hacer el reparto?
R. 34.

184. Se tienen 3 piezas de tela cuyas longitudes son 90 m., 50 y 120 m., y se las quiere dividir en trozos lo más grande posible y de igual longitud. ¿Cuánto debe medir cada trozo?
R. 10 m.

185. Se tienen 3 rollos de alambre cuyas longitudes son 36 m., 60 m. y 48 m. y se los ha cortado en trozos de igual longitud. Calcular la mayor longitud de cada trozo.
R. 12 m.

186. Tres vapores parten de un puerto al mismo tiempo cierto día. Posteriormente, el 1º sale cada 5 días, el 2º cada 10 días y el tercero cada 15 días. ¿Después de qué tiempo volverán a partir juntos?
R. 30 días.

187. Alrededor de una pista corren tres ciclistas. El 1º da una vuelta en 18 minutos, el 2º en 20 minutos, y el 3º en 24 minutos.

A las 7 de la mañana parten los tres. ¿Después de qué tiempo se encontrarán en el punto de partida y cuántas vueltas habrá dado cada uno?

R. Después de 6 horas, y habrán dado 20, 18 y 15 vueltas, respectivamente.

188. Un empleado trabaja 5 días y descansa el sexto día. Si comienza a trabajar un lunes, ¿cuándo descansará un domingo?

R. El día 42º.

189. Se tienen dos ruedas de engranajes; cuando una da 15 vueltas, la otra da 40. Se marcan con tiza un diente en cada rueda, si ahora están juntos esos dientes, ¿cuál será el menor número de vueltas que deberá dar cada una para que vuelvan a hallarse juntos?

R. 3 y 8.

190. La locomotora de un tren tiene un dispositivo que permite alimentar automáticamente su hogar, quien recibe el combustible necesario cada vez que, durante la marcha, dos de las ruedas de cada costado ocupan la misma posición. Se desea saber qué tiempo transcurre entre dos alimentaciones consecutivas si las ruedas desarrollan 63 decímetros y 45 decímetros, y la velocidad de la locomotora es de 21 decímetros por segundo.

R. 15 segundos.

191. Tres ómnibus parten al mismo tiempo de una estación en tres direcciones distintas a las 7 de la mañana. El 1º llega a la estación después de 130 minutos y descansa 20 minutos; el 2º vuelve después de 108 minutos y descansa 12 minutos, y el 3º vuelve a los 96 minutos y descansa 4 minutos. ¿A qué hora volverán a salir todos juntos otra vez?

R. A las 17 horas.

CAPITULO IX

Fracciones comunes

Nociones previas

91. Concepto de igualdad.— Dos o más cosas son *iguales*, cuando se pueden sustituir o reemplazar unas por otras.

Al reemplazarse se tiene en cuenta sólo una cualidad común, suponiendo, mentalmente, que las demás cualidades no existen.

Decir que dos monedas son *iguales*, no significa nada si no especificamos cuál es la cualidad común, pues pueden serlo en cuanto al *color*, si están hechas del mismo metal o sustancia; en cuanto al *tamaño*, si pueden coincidir; en cuanto al *peso* si se equilibran en los platillos de una balanza; en cuanto al *valor*, si tienen el mismo poder adquisitivo, etc.

La *igualdad de todas las cualidades* sólo existe entre una cosa y sí misma. Esta igualdad se llama *identidad*.

Recíprocamente, si dos cosas son *iguales*, tienen una *cualidad común*.

Decir que dos muchachos argentinos son *iguales* significa que tienen la *cualidad común* de haber nacido en la Argentina. También son iguales un *chileno* y un *mejicano*, en un cierto orden de ideas, pues ambos tienen la cualidad común de ser *americanos*.

92. Magnitud.— Se llama *magnitud* a la cualidad común de las cosas que las hace susceptibles de ser iguales o desiguales a otras.

Ejemplos: La *longitud* es la cualidad común de los segmentos iguales.

La *superficie* es la cualidad común de las figuras equivalentes.

El *volumen* es la cualidad común de los cuerpos equivalentes.

La *forma* es la cualidad común de las figuras semejantes.

La *longitud*, *superficie*, *volumen*, *forma*, etc., son magnitudes.

93. Cantidad. — Cuando en un sistema de cosas se puede decir cuándo dos de ellas son iguales, y cuándo una es suma de otras varias, esas cosas se llaman *cantidades*.

Así, los números enteros, los segmentos, los arcos de circunferencia, los ángulos, los polígonos, etc., son cantidades, pues se puede decir cuándo son iguales y cuándo una de esas cosas es suma de otras.

94. Clasificación de las cantidades. — Una cantidad es *discreta*, cuando se pueden *separar* o *contar* sus elementos, y es *continúa* en caso contrario.

Una biblioteca y una caja de plumas, son cantidades discretas.

La longitud de una barra y el tiempo que dura una clase, son cantidades continuas.

95. Medida de una cantidad. — *Medir* una cantidad es compararla con otra de su misma especie tomada como *unidad de medida*.

El resultado que se obtiene al medir una cantidad siempre es un *número*.

96. Noción de fracción. — Supongamos que quisiéramos medir la longitud de la barra AB (fig 10), tomando como unidad de medida el segmento u . Para ello llevaríamos a partir de A , consecutivamente el mayor número de veces posible el segmento u sobre la barra AB . Al hacer esta operación se nos presenta uno de estos casos:

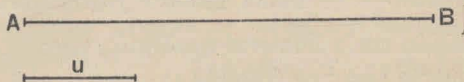


Fig. 10

1º *El segmento u cabe un número exacto de veces en la barra AB* (fig. 11). Supongamos que u quepa, exactamente, cuatro veces en AB ; entonces se dice que la barra AB mide 4 segmentos u .

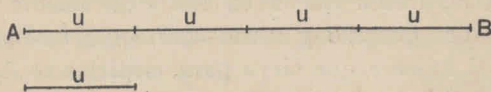


Fig. 11

El número 4 es un *número entero*.

2º *El segmento u no cabe un número exacto de veces en la barra AB* (fig. 12). Supongamos que u quepa

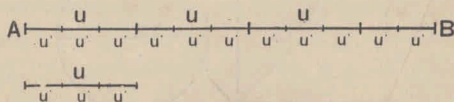


Fig. 12

tres veces, sobrando un pedazo en donde no alcanza a

caber u . Dividamos entonces el segmento u en varias partes iguales, por ejemplo 3, y sea u' una de esas partes iguales.

Veamos ahora si u' cabe exactamente en AB . Constatamos que u' cabe en AB 11 veces, pero como u' es la tercera parte de u , decimos que AB mide 11 *terceras partes* de u , lo que para mayor brevedad se dice 11 *tercios*, y se escribe así: $\frac{11}{3}$

El número $\frac{11}{3}$ se llama *número fraccionario* o *fracción*. También suele llamarse *quebrado*, pero es recomendable llamarlo siempre *fracción*.

3º *Ni el segmento u , ni ninguna parte de u , cabe un número exacto de veces en la barra AB .*

Si u no cabe exactamente en AB , se ve si cabe su mitad, o su tercera parte, o su cuarta parte, etc., pero puede suceder que, por chica que sea la parte que se tome de u , nunca quepa en AB exactamente. En tal caso, se dice que AB y u son *cantidades incommensurables*, y el número que sirve para medirlas se llama *número irracional* o *número incommensurable*.

Así el *lado* de un cuadrado (fig. 13), no cabe exactamente en su *diagonal*, ni ninguna parte del lado, por

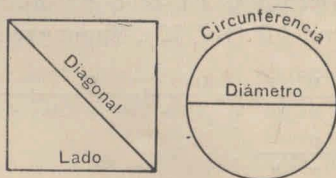


Fig. 13

chica que sea esa parte. La división de la diagonal de un

cuadrado por su lado da de resultado el número irracional $\sqrt{2}$, que es igual 1,4142...

La división de la *circunferencia* y el *diámetro* da de resultado el número irracional 3,141592..., que se representa con la letra griega π (pí).

97. Número fraccionario o fracción.— Se llama *fracción*, al cociente indicado de dos números enteros.

Uno de estos números, el divisor, indica las partes iguales en que se ha dividido la unidad, y se llama *denominador*; el otro número, el dividendo, indica cuántas de esas partes iguales caben iguales caben en la cantidad medida, y se llama *numerador*. El numerador y el denominador juntos, son los *términos de la fracción*.

98. Notación.— Se escribe una fracción colocando el numerador encima del denominador, separados por una rayita horizontal. En la fracción $\frac{2}{3}$ el 3 es el denominador e indica que la unidad de medida se ha dividido en 3 partes iguales; el 2 es el numerador e indica que en la cantidad que se mide caben 2 veces una de las partes del denominador.

99. Lectura de una fracción.— Para leer una fracción se enuncia el numerador y luego su denominador.

Si el denominador es 2, se lee medios; si 3, tercios; si 4, cuartos; si 5, quintos;; si 9, novenos; si 10, décimos; si 100, centésimos; etc. Si fuese mayor que 10, y siempre que no sea 100, 1000,, se lee con la terminación *avos*.

Ejemplos:

$\frac{1}{2}$ se lee un medio;	$\frac{4}{10}$ se lee cuatro décimos;
$\frac{5}{3}$ „ „ cinco tercios;	$\frac{2}{100}$ „ „ dos centésimos;
$\frac{2}{4}$ „ „ dos cuartos;	$\frac{1}{11}$ „ „ un onceavo;
$\frac{3}{7}$ „ „ tres séptimos;	$\frac{8}{5}$ „ „ ocho quintos;
$\frac{9}{8}$ „ „ nueve octavos;	$\frac{3}{16}$ „ „ tres dieciseisavos;
$\frac{4}{9}$ „ „ cuatro novenos;	$\frac{11}{32}$ „ „ once treintaidos-avos;

100. Fracciones iguales. — Dos fracciones son *iguales*, cuando son iguales los productos del numerador de una por el denominador de la otra y viceversa. Es decir:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \text{ porque: } 2 \times 6 = 3 \times 4$$

101. Propiedad fundamental. — *Una fracción no altera si el numerador y el denominador se multiplican o dividen exactamente por un mismo número distinto de cero.*

Ejemplo 1º: $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$

Ejemplo 2º: $\frac{16}{40} = \frac{16 : 8}{40 : 8} = \frac{2}{5}$

Dada una fracción cualquiera, por ejemplo $\frac{1}{2}$ se obtienen infinitas fracciones iguales a ella multiplicando

sus dos términos por los números enteros sucesivos: 2, 3, 4, 5,

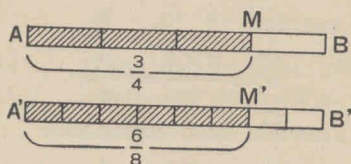
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \dots\dots$$

102. COMPROBACIÓN GRÁFICA DE LA PROPIEDAD FUNDAMENTAL. — Vamos a comprobar que, por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Sean dos longitudes iguales AB y $A'B'$ (fig. 14).

Los $\frac{3}{4}$ de $A'B'$ equivalen a dividir $A'B'$ en 3 partes iguales y tomar 3, es decir: AM .



Los $\frac{6}{8}$ de $A'B'$ equivalen a dividir $A'B'$ en 8 partes iguales y tomar 6, es decir: $A'M'$.

Fácilmente se comprueba que $AM = A'M'$, es decir:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

103. Aplicaciones de la propiedad fundamental. — La propiedad fundamental se aplica en la *reducción de un entero o una fracción a fracción de denominador dado*, en la *simplificación de fracciones*, en la *reducción de fracciones a común denominador* y en la *determina-*

ción de los engranajes necesarios para hacer *roscas en el torno* y tallar *engranajes en la fresadora*.

104. Reducción de un entero a fracción de denominador dado.— Para reducir un entero a fracción de denominador dado, se multiplica el entero por el denominador dado y el resultado es el numerador.

Ejemplos: Reducir 3 a medios:

$$3 = \frac{3 \times 2}{2} = \frac{6}{2}$$

Reducir 5 a octavos:

$$5 = \frac{5 \times 8}{8} = \frac{40}{8}$$

Reducir 6 a cuartos:

$$6 = \frac{6 \times 4}{4} = \frac{24}{4}$$

Reducir 7 a fracción de denominador 1:

$$7 = \frac{7 \times 1}{1} = \frac{7}{1}$$

105. Reducción de una fracción a otra de denominador dado.— Para reducir una fracción a otra de denominador dado, en el caso en que el segundo denominador sea múltiplo del primer denominador, se dividen los denominadores, y el cociente se multiplica por los términos de la fracción dada.

Ejemplos: Reducir $\frac{3}{4}$ a otra fracción de denominador 20.

$$\text{Se tiene: } 20 : 4 = 5 ; \frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$$

Reducir $\frac{7}{5}$ a otra fracción de denominador 15.

Se tiene: $15 : 5 = 3$; $\frac{7}{5} = \frac{7 \times 3}{5 \times 3} = \frac{21}{15}$

106. Simplificación de fracciones. — *Simplificar* una fracción es hallar otra igual pero de términos menores.

Para simplificar una fracción, se dividen ambos términos exactamente por un mismo número.

Sea simplificar la fracción $\frac{12}{18}$.

Como ambos términos son divisibles por 6, se tiene:

$$\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$$

107. Fracción irreducible. — Una fracción es *irreducible*, cuando sus términos son primos entre sí. También se dice que la fracción está *reducida a su más simple expresión*.

Para reducir una fracción a su más simple expresión, se dividen sus dos términos por su *m.c.d.*

Ejemplo: Reducir a su más simple expresión la fracción $\frac{126}{288}$.

126	2	288	2	
63	3	144	2	$m.c.d. 126 \text{ y } 288 = 2 \times 3^2 = 18.$
21	3	72	2	
7	7	36	2	$\frac{126}{288} = \frac{126 : 18}{288 : 18} = \frac{7}{16} = \text{fracción}$
1		18	2	irreducible.
		9	3	
		3	3	
		1		

108. Reducción de fracciones a común denominador.

— *Reducir fracciones a común denominador* es hallar otras respectivamente iguales a las dadas y que tengan el mismo denominador.

Para reducir fracciones a común denominador, se multiplican los términos de cada fracción por el producto de los demás denominadores.

Ejemplo: Reducir a común denominador las fracciones:

$$\frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{5}{2}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{2(4.2)}{3(4.2)} = \frac{2.8}{3.8} = \frac{16}{24} \\ \frac{3}{4} &= \frac{3(3.2)}{4(3.2)} = \frac{3.6}{4.6} = \frac{18}{24} \\ \frac{5}{2} &= \frac{5(3.4)}{2(3.4)} = \frac{5.12}{2.12} = \frac{60}{24} \end{aligned}$$

Se observa que hemos obtenido tres fracciones ordenadamente iguales a las dadas, pero todas con el mismo denominador.

109. Reducción de fracciones al mínimo común denominador.

— *Reducción fracciones al mínimo común denominador*, es hallar otras respectivamente iguales a las dadas, pero cuyo denominador sea el *m.c.m.* de los denominadores.

Para reducir fracciones al mínimo común denominador se halla el *m.c.m.* de los denominadores, el que será el mínimo común denominador, y luego se multi-

plica cada numerador por el cociente del *m.c.m.* hallado y el denominador respectivo.

Ejemplo: Reducir al mínimo común denominador:

$$\frac{4}{9}, \frac{5}{18} \text{ y } \frac{7}{12}$$

Se tiene:

m.c.m. de 4, 18 y 12 = 36 = *denominador común.*

$$36 : 9 = 4 \quad ; \quad \frac{4}{9} = \frac{4 \times 4}{36} = \frac{16}{36}$$

$$36 : 18 = 2 \quad ; \quad \frac{5}{18} = \frac{5 \times 2}{36} = \frac{10}{36}$$

$$36 : 12 = 3 \quad ; \quad \frac{7}{12} = \frac{7 \times 3}{36} = \frac{21}{36}$$

110. Observación. — Antes de reducir las fracciones a común denominador, es conveniente reducirlas a su menor expresión.

Desigualdad de fracciones

111. Fracción mayor o menor que otra. — Una fracción es *mayor que otra*, cuando el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, es mayor que el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Así: $\frac{7}{5} > \frac{1}{2}$ porque $7 \times 2 > 5 \times 1$

Recíprocamente:

$$\frac{5}{8} < \frac{4}{3} \text{ porque } 5 \times 3 < 8 \times 4$$

112. Si dos fracciones tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.

Ejemplo: $\frac{8}{12} > \frac{3}{12}$

113. Si dos fracciones tienen igual numerador, es mayor la que tiene menor denominador.

Ejemplo: $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$

114. **Fracción propia.** — Se llama *fracción propia*, a aquella cuyo numerador es *menor* que el denominador.

Ejemplos: $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{16}$

Una fracción propia siempre es menor que uno:

$$\frac{3}{4} < 1$$

115. **Fracción impropia.** — Se llama *fracción impropia*, a aquella cuyo numerador es *mayor* que el denominador.

Ejemplos: $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{9}{3}$

Una fracción impropia siempre es mayor que uno:

$$\frac{5}{2} > 1$$

Operaciones con fracciones

Suma de fracciones

116. Suma de fracciones de igual denominador. —

Para sumar fracciones de igual denominador se suman los numeradores y a la suma se le pone como denominador el común.

$$\text{Ejemplo: } \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+1+4}{5} = \frac{8}{5}$$

117. Suma de fracciones de distinto denominador. —

Para sumar fracciones de distinto denominador, se reducen a común denominador, y luego se procede como en el caso anterior.

Ejemplo: Sea sumar:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{5}{12} + \frac{7}{18}$$

Reduciendo las fracciones dadas al número común denominador, se tiene:

$$m.c.m. (4 ; 9 ; 12 ; 18) = 36$$

$$36 : 4 = 9 \quad ; \quad \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 9}{36} = \frac{9}{36}$$

$$36 : 9 = 4 \quad ; \quad \frac{2}{9} = \frac{2 \cdot 4}{36} = \frac{8}{36}$$

$$36 : 12 = 3 \quad ; \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 3}{36} = \frac{15}{36}$$

$$36 : 18 = 2 \quad ; \quad \frac{7}{18} = \frac{7 \cdot 2}{36} = \frac{14}{36}$$

y por el caso anterior:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{5}{12} + \frac{7}{18} &= \frac{9}{36} + \frac{8}{36} + \frac{15}{36} + \frac{14}{36} \\ &= \frac{9+8+15+14}{36} = \frac{46}{36} \end{aligned}$$

y simplificando, resulta: $= \frac{23}{18}$
que es la suma buscada.

117. bis. Número mixto. — Se llama *número mixto*, a la suma indicada de un número entero y otro fraccionario.

Ejemplos: $3 + \frac{1}{2}$; $5 + \frac{7}{3}$; $2 + \frac{3}{4}$

Corrientemente, el signo $+$ se suprime en los números mixtos, así los ejemplos anteriores se escriben:

$3 \frac{1}{2}$; $5 \frac{7}{3}$; $2 \frac{3}{4}$

que se lee: *tres enteros un medio; cinco enteros siete tercios; dos enteros tres cuartos.*

118. Reducción de un número mixto a fracción. — Reducir un *número mixto a fracción* equivale a efectuar la suma indicada del entero y la fracción.

Para reducir un número mixto a fracción, se multiplica el entero por el denominador, sumando el resultado al numerador, dejando a la suma como denominador el mismo.

Ejemplos: $4 \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5 + 3}{5} = \frac{23}{5}$
 $2 \frac{4}{3} = \frac{2 \times 3 + 4}{3} = \frac{10}{3}$
 $6 \frac{1}{2} = \frac{6 \times 2 + 1}{2} = \frac{13}{2}$

119. Conversión de una fracción en número mixto. — Una fracción equivale a un número mixto cuya parte entera es el cociente del numerador por el denominador.

y cuya parte fraccionaria tiene por numerador el resto y por denominador el de la fracción.

Ejemplos:

1º Reducir $\frac{32}{9}$ a número mixto.

$$\text{Se tiene: } \begin{array}{r|l} 32 & 9 \\ 5 & 3 \end{array} \quad \text{luego: } \frac{32}{9} = 3 \frac{5}{9}$$

2º Reducir $\frac{25}{3}$ a número mixto.

$$\text{Se tiene: } \begin{array}{r|l} 25 & 3 \\ 1 & 8 \end{array} \quad \text{luego: } \frac{25}{3} = 8 \frac{1}{3}$$

3º Reducir $\frac{95}{7}$ a número mixto.

$$\text{Se tiene: } \begin{array}{r|l} 95 & 7 \\ 25 & 13 \\ 4 & \end{array} \quad \text{luego: } \frac{95}{7} = 13 \frac{4}{7}$$

La operación de convertir una fracción en número mixto se llama *extraer enteros de una fracción*.

120. Suma de números mixtos. — Para sumar números mixtos se suman los enteros y luego las fracciones.

$$\text{Ejemplo: Efectuar: } 3 \frac{4}{5} + 2 \frac{1}{2} + 4 \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Se tiene: } 3 \frac{4}{5} + 2 \frac{1}{2} + 4 \frac{2}{3} &= 3 + 2 + 4 + \frac{4}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \\ &= 9 + \frac{24}{30} + \frac{15}{30} + \frac{20}{30} \\ &= 9 + \frac{59}{30} \end{aligned}$$

y extrayendo enteros de la fracción:

$$\begin{array}{r|l} 59 & 30 \\ 29 & 1 \end{array} \qquad = 9 + 1 \frac{29}{30}$$

$$= 10 \frac{29}{30}$$

que es la suma buscada.

Resta de fracciones

121. Resta de fracciones de igual denominador. —

Para restar fracciones de igual denominador se restan los numeradores y a la resta se le pone como denominador el común.

Ejemplo: $\frac{8}{5} - \frac{2}{5} = \frac{8-2}{5} = \frac{6}{5}$

122. Resta de fracciones de distinto denominador. —

Para restar fracciones de distinto denominador, se reducen a común denominador, y luego se procede como en el caso anterior

Ejemplo: Sea restar $\frac{2}{3} - \frac{5}{12}$

Reduciendo las fracciones dadas al mínimo común denominador:

$$m.c.m. \ 3 \text{ y } 12 = 12$$

$$12 : 3 = 4 \quad ; \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{12} = \frac{8}{12}$$

$$12 : 12 = 1 \quad ; \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 1}{12} = \frac{5}{12}$$

luego:

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{8}{12} - \frac{5}{12}$$

$$= \frac{8-5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

123. Restar un entero y una fracción.— Para restar un entero y una fracción, se reduce el entero a fracción, y luego se procede como en el caso anterior.

Ejemplo:

$$2 - \frac{3}{5} = \frac{2}{1} - \frac{3}{5}$$

$$= \frac{10}{5} - \frac{3}{5} = \frac{7}{5} = 1 \frac{2}{5}$$

124. Restar números mixtos.— Para restar números mixtos, se reducen a fracción, y luego se restan como éstas.

Ejemplo:

$$4 \frac{1}{2} - 2 \frac{3}{4} = \frac{9}{2} - \frac{11}{4}$$

$$= \frac{18}{4} - \frac{11}{4} = \frac{7}{4} = 1 \frac{3}{4}$$

Multiplicación de fracciones

125. Multiplicación de varias fracciones.— Para multiplicar varias fracciones se forma una fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores, y cuyo denominador es el producto de los denominadores de las fracciones dadas.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{9}{10} = \frac{2 \times 5 \times 9}{3 \times 6 \times 10}$$

$$= \frac{90}{180} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

126. Multiplicación de una fracción y un entero.— Para multiplicar una fracción y un entero, o viceversa,

se multiplica el numerador por el entero, y al resultado como denominador el de la fracción.

Ejemplo:
$$\frac{5}{8} \times 6 = \frac{5 \times 6}{8}$$
$$= \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

127. Multiplicación de números mixtos. — Para multiplicar números mixtos, se reducen a fracción, y luego se multiplican como éstas.

Ejemplo:
$$3 \frac{1}{3} \times 4 \frac{1}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{21}{5}$$
$$= \frac{10 \times 21}{3 \times 5} = \frac{210}{15} = 14$$

128. Inversa de un número entero. — Se llama *inversa* de un número entero, al cociente indicado de 1 por el número dado.

Ejemplo: la inversa de 3 es: $\frac{1}{3}$

„ „ „ 5 „ $\frac{1}{5}$

„ „ „ π „ $\frac{1}{\pi}$

„ „ „ $\sqrt{2}$ „ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

129. Fracciones inversas. — Una fracción *inversa* de otra, cuando su numerador y denominador son el denominador y numerador de esta otra.

Ejemplos: $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$ son fracciones inversas.

$$\frac{5}{8} \text{ y } \frac{8}{5} \quad , , \quad , , \quad , ,$$

130. *El producto de dos fracciones inversas es igual a 1.*

Ejemplo:

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{2 \times 5}{5 \times 2} = \frac{10}{10} = 1$$

División de fracciones

131. **División de fracciones.** — Para dividir dos fracciones se multiplica el dividendo por el divisor invertido.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} : \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

132. **División de un entero por una fracción o viceversa.** — Para dividir un entero por una fracción, o viceversa, se convierte el entero en fracción y luego se procede como en el caso anterior.

Ejemplos:

$$5 : \frac{2}{3} = \frac{5}{1} : \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7 \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2} : \frac{3}{1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

133. **División de números mixtos.** — Para dividir números mixtos se reducen a fracción, y luego se procede como en el primer caso.

Ejemplo:

$$3 \frac{1}{2} : 2 \frac{3}{5} = \frac{7}{2} : \frac{13}{5} = \frac{35}{26} = 1 \frac{9}{26}$$

134. Reducción de una fracción a otra que tenga un denominador dado. — En (105) hemos visto cómo se reducía una fracción a otra de denominador dado, en el caso en que el nuevo denominador fuese múltiplo del primero. Ahora veremos el caso general.

Para reducir una fracción a otra con un denominador dado, se pone como numerador la fracción cuyo numerador es el producto del numerador de la fracción y el nuevo denominador, y cuyo denominador es el de la fracción dada.

Ejemplos: Reducir $\frac{2}{3}$ a décimos:

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{2 \times 10}{3}}{10} = \frac{\frac{20}{3}}{10}$$

Reducir $\frac{1}{2}$ a tercios:

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1 \times 3}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3}$$

Reducir $\frac{3}{8}$ a quintos:

$$\frac{3}{8} = \frac{\frac{3 \times 5}{8}}{5} = \frac{\frac{15}{8}}{5}$$

Reducir $\frac{8}{6}$ a tercios:

$$\frac{8}{6} = \frac{\frac{8 \times 3}{6}}{3} = \frac{\frac{24}{6}}{3} = \frac{4}{3}$$

Nótese que este último ejemplo pudo hacerse simplificando.

135. Observación. — Cuando se dividen dos números enteros, el cociente indica, *concretamente, cuántas veces el dividendo contiene al divisor*, así si

$$12 : 4 = 3$$

podemos interpretar esa división diciendo *que el número 12 contiene 3 veces al número 4*, pero si se tratara de la división de dos números fraccionarios, por ejemplo:

$$\frac{1}{2} : \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

es absurdo y sin sentido decir que $\frac{1}{2}$ contiene $\frac{3}{10}$ de vez al número $\frac{5}{3}$, pues no es concebible tres décimos de vez.

EJERCICIOS

192. Reducir los números 4, 5 y 9 a medios. R: $\frac{8}{2}$, $\frac{10}{2}$, $\frac{18}{2}$
193. „ „ „ 1, 3 y 7 a tercios. „ $\frac{3}{3}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{21}{3}$
194. „ „ „ 8, 2 y 12 a quintos. „ $\frac{40}{5}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{60}{5}$
195. Reducir $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{2}$ a 20-avos. „ $\frac{15}{20}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{10}{20}$
196. „ $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$ y $\frac{1}{5}$ a 40-avos. „ $\frac{20}{40}$, $\frac{25}{40}$, $\frac{8}{40}$
197. „ $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{6}$ a 90-avos. „ $\frac{72}{90}$, $\frac{60}{90}$, $\frac{105}{90}$

Simplificar las siguientes fracciones:

- | | | | |
|------|-------------------|----|-----------------|
| 198. | $\frac{45}{75}$ | R: | $\frac{3}{5}$ |
| 199. | $\frac{84}{120}$ | „ | $\frac{7}{10}$ |
| 200. | $\frac{132}{24}$ | „ | $\frac{11}{2}$ |
| 201. | $\frac{54}{72}$ | „ | $\frac{3}{4}$ |
| 202. | $\frac{216}{120}$ | „ | $\frac{9}{5}$ |
| 203. | $\frac{96}{168}$ | „ | $\frac{4}{7}$ |
| 204. | $\frac{256}{144}$ | „ | $\frac{16}{9}$ |
| 205. | $\frac{540}{792}$ | „ | $\frac{15}{22}$ |
| 206. | $\frac{216}{333}$ | „ | $\frac{24}{37}$ |
| 207. | $\frac{256}{640}$ | „ | $\frac{2}{5}$ |

208.	$\frac{768}{1712}$		R.	$\frac{3}{7}$
209.	$\frac{170}{272}$		"	$\frac{5}{8}$

Reducir a común denominador las siguientes fracciones:

210.	$\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$		R:	$\frac{16}{24}, \frac{30}{24}, \frac{36}{24}$
211.	$\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{3}{8}$		"	$\frac{24}{48}, \frac{80}{48}, \frac{18}{48}$
212.	$\frac{5}{7}, \frac{6}{11}, \frac{7}{3}$		"	$\frac{165}{231}, \frac{126}{231}, \frac{539}{231}$
213.	$\frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}$		"	$\frac{405}{540}, \frac{300}{540}, \frac{108}{540}, \frac{360}{540}$
214.	$\frac{4}{16}, \frac{8}{3}, \frac{9}{13}, \frac{4}{5}$		"	$\frac{1170}{2145}, \frac{5720}{2145}, \frac{1485}{2145}, \frac{1716}{2145}$

Reducir al mínimo común denominador:

215.	$\frac{4}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{10}$		"	$\frac{8}{10}, \frac{15}{10}, \frac{5}{10}$
216.	$\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{4}{20}$		"	$\frac{30}{80}, \frac{25}{80}, \frac{16}{80}$
217.	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{8}$		"	$\frac{36}{72}, \frac{48}{72}, \frac{32}{72}, \frac{27}{72}$
218.	$\frac{4}{30}, \frac{1}{20}, \frac{5}{18}, \frac{7}{24}$		"	$\frac{48}{360}, \frac{18}{360}, \frac{100}{360}, \frac{105}{360}$
219.	¿Cuál es mayor, $\frac{2}{3}$ o $\frac{5}{6}$?		R.	$\frac{5}{6}$
220.	" " " $\frac{7}{9}$ o $\frac{9}{12}$?		"	$\frac{7}{9}$
221.	¿Cuál es menor, $\frac{18}{20}$ o $\frac{12}{16}$?		"	$\frac{12}{16}$
222.	" " " $\frac{6}{11}$ o $\frac{5}{9}$?		"	$\frac{6}{11}$

Efectuar las siguientes sumas:

223.	$\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{5}{12} + \frac{7}{18}$	„	$1 \frac{5}{18}$
224.	$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3}$	„	$2 \frac{3}{4}$
225.	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$	„	$1 \frac{17}{60}$
226.	$\frac{5}{12} + \frac{3}{14} + \frac{7}{18}$	„	$1 \frac{1}{252}$
227.	$\frac{3}{18} + \frac{6}{24} + \frac{9}{36} + \frac{8}{48}$	„	$\frac{5}{6}$

Reducir a fracción los siguientes números mixtos:

228.	$3 \frac{4}{5}$	R:	$\frac{19}{5}$
229.	$6 \frac{4}{7}$	„	$\frac{46}{7}$
230.	$8 \frac{3}{4}$	„	$\frac{35}{4}$
231.	$12 \frac{6}{18}$	„	$\frac{37}{3}$

Reducir a números mixtos las siguientes fracciones:

232.	$\frac{8}{3}$	R:	$2 \frac{2}{3}$
233.	$\frac{28}{5}$	„	$5 \frac{3}{5}$
234.	$\frac{125}{8}$	„	$6 \frac{17}{8}$
235.	$\frac{2924}{17}$	„	172
236.	$\frac{9867}{138}$	„	$71 \frac{1}{2}$

Sumar los números mixtos siguientes:

237.	$3 \frac{4}{5} + 1 \frac{2}{3} + 4 \frac{3}{10}$	R:	$9 \frac{23}{30}$
238.	$5 \frac{2}{7} + 2 \frac{3}{14} + 8 \frac{5}{21}$	„	$15 \frac{31}{42}$
239.	$4 + 3 \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 \frac{1}{3}$	„	$9 \frac{7}{12}$
240.	$2 + \frac{5}{18} + 4 \frac{3}{16} + 5 \frac{7}{20}$	„	$11 \frac{587}{720}$
241.	$3 \frac{1}{4} + 3 \frac{7}{8} + 4 \frac{5}{16} + 3 \frac{13}{32}$	„	$17 \frac{27}{32}$

Efectuar las siguientes restas:

242.	$\frac{12}{5} - \frac{14}{10}$	„	1
243.	$\frac{4}{6} - \frac{3}{8}$	„	$\frac{7}{24}$
244.	$\frac{4}{5} - \frac{8}{10}$	„	$\frac{9}{20}$
245.	$\frac{14}{15} - \frac{9}{12}$	„	$\frac{11}{60}$
246.	$\frac{17}{36} - \frac{10}{24}$	„	$\frac{1}{18}$
247.	$3 - \frac{2}{5}$	„	$\frac{13}{5}$
248.	$13 - \frac{4}{7}$	„	11
249.	$5 \frac{3}{4} - 2 \frac{4}{5}$	„	$2 \frac{19}{20}$
250.	$3 \frac{1}{2} - 1 \frac{5}{6}$	„	$1 \frac{2}{3}$
251.	$5 - 3 \frac{1}{2}$	„	$1 \frac{1}{2}$
252.	$4 \frac{5}{7} - \frac{4}{21}$	„	$4 \frac{11}{21}$

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

253.	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{5}{9}$	R:	$\frac{40}{189}$
254.	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$	"	$\frac{3}{14}$
255.	$\frac{5}{18} \times \frac{6}{25} \times \frac{3}{7} \times \frac{28}{9}$	"	$\frac{4}{25}$
256.	$4 \times \frac{5}{12}$	"	$\frac{5}{3}$
257.	$\frac{4}{16} \times 12$	"	3
258.	$27 \times 2 \frac{1}{3}$	"	63
259.	$5 \frac{3}{10} \times 15$	"	$79 \frac{1}{2}$
260.	$\frac{27}{7} \times 5 \frac{4}{9}$	"	21
261.	$4 \frac{3}{8} \times \frac{56}{70}$	"	$3 \frac{1}{2}$
262.	$2 \frac{1}{2} \times 5 \frac{1}{3}$	"	$13 \frac{1}{3}$
263.	$2 \frac{3}{5} \times 4 \frac{1}{13}$	"	11
264.	$5 \frac{2}{15} \times \frac{15}{11} \times 3 \frac{4}{7} \times \frac{1}{5}$	"	5

Efectuar las siguientes divisiones:

265.	$\frac{3}{4} : \frac{6}{5}$	"	$\frac{5}{8}$
266.	$\frac{9}{35} : \frac{3}{14}$	"	$\frac{6}{5}$
267.	$\frac{12}{45} : \frac{8}{36}$	"	$\frac{6}{5}$
268.	$\frac{126}{72} : \frac{280}{60}$	"	$\frac{3}{8}$

269.	$5 \frac{3}{8} : 2 \frac{5}{6}$	R:	$1 \frac{16}{17}$
270.	$4 \frac{7}{12} : 3 \frac{3}{27}$	„	$1 \frac{53}{112}$
271.	$4 \frac{2}{3} : \frac{12}{15}$	„	$5 \frac{5}{6}$
272.	$9 : \frac{27}{8}$	„	$\frac{8}{3}$
273.	$\frac{3}{8} : 6$	„	$\frac{1}{16}$
274.	$6 : \frac{12}{5}$	„	$\frac{5}{2}$
275.	$2 \frac{3}{5} : 4$	„	$\frac{13}{20}$
276.	$\frac{21}{8} : 5 \frac{4}{7}$	„	$\frac{49}{104}$
277.	Reducir $\frac{1}{2}$ a séptimos	„	$\frac{7}{2}$
278.	„ $\frac{3}{4}$ a tercios	„	$\frac{4}{3}$
279.	„ $\frac{4}{9}$ a medios	„	$\frac{9}{2}$
280.	„ $\frac{5}{3}$ a octavos	„	$\frac{3}{8}$

Efectuar los siguientes ejercicios combinados:

281.	$\left(\frac{6}{20} + \frac{12}{38} - \frac{4}{19} \right) \times \frac{12}{9}$	„	$\frac{136}{285}$
282.	$\left(12 \frac{3}{5} - \frac{3}{2} \times 2 \frac{15}{25} \right) : 2 \frac{1}{4}$	„	$\frac{274}{45}$
283.	$\left(\frac{2}{3} + 1 \right) : \frac{5}{8}$	„	$\frac{8}{3}$

284. $\frac{3}{4} + \left(1 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{8}{5}$ R: $\frac{41}{12}$

285. $\left(1 + \frac{1}{6}\right) \times \left(2 + \frac{1}{3}\right)$ „ $\frac{28}{9}$

286. $\left[\left(3 + \frac{3}{8}\right) - \left(2 - \frac{5}{6}\right)\right] \left(8 + \frac{7}{10}\right)$ „ 19 $\frac{51}{240}$

287. $\left[2\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + 3\right) + \left(3\frac{1}{5} + \frac{9}{12}\right)\right] : \frac{12}{15}$ „ 8 $\frac{9}{16}$

288. He gastado $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ de una suma de dinero, y aún quedan 20 \$. ¿Qué suma tenía?

R. 48 \$.

289. Un depósito está lleno de agua hasta los $\frac{2}{3}$ de su capacidad, y aún faltan para llenarlo 160 litros. ¿Cuál es su capacidad?

R. 480 litros.

290. Repartir 152 \$ entre 3 personas, de manera que la segunda tenga los $\frac{2}{5}$ de lo de la 1ª, y la 3ª la mitad de la parte de la segunda. ¿Cuánto toca a cada uno?

R. 95, 38 y 19 \$.

291. Dos libros costaron 14 \$. El costo de uno es $\frac{3}{4}$ del precio del otro. ¿Cuánto costó cada libro?

R. 6 y 8 \$.

292. Un obrero gana doble de lo que gana su mujer. Ambos han cobrado 144 \$. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

R. 96 y 48 \$

293. Juan tiene 48 \$ más que Pedro, siendo la parte de Pedro los $\frac{2}{5}$ de la parte de Juan. ¿Cuánto tiene cada uno?

R. 80 y 32 \$.

294. Dividir 224 \$ entre 4 personas de modo que la 1ª tenga los $\frac{2}{3}$ de la 2ª; la 2ª los $\frac{3}{4}$ de la 3ª, y la 3ª los $\frac{4}{5}$ de la 4ª. ¿Cuánto le toca a cada uno?

R. 32, 48, 64 y 80 \$.

295. Un depósito tiene 3 canillas. Una lo desagota en 3 horas, otra en 4 horas, y la última en 6 horas. Las tres canillas juntas, ¿en qué tiempo desagotarán el depósito?

R. 1 h. 20 m.

296. Una canilla llena un tanque en un día; otra, en dos días; otra, en tres días; otra, en cuatro días. ¿Qué tiempo emplearán en llenar el tanque las cuatro canillas abiertas al mismo tiempo?

R. 11 h. 31 m. 12 s

297. Una pileta tiene dos grifos y un caño de desagüe. Un grifo la llena en 2 horas y el otro en 3 horas, mientras que el caño desagüe agota la pileta en 4 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará la pileta abriendo al mismo tiempo los grifos y el caño de desagüe?

R. 1 h. 42 m. 51 s.

298. Una canilla echa en un depósito 85 litros de agua por hora, mientras que por un caño salen 58 litros por hora. El depósito tiene una capacidad de 2400 litros. ¿En cuánto tiempo se llenará abriendo al mismo tiempo la canilla y el caño?

R. 88 h. 15 m. 33 s.

299. Una pelota rebota cada vez los $\frac{2}{3}$ de la altura de donde ha caído. Al 3er. rebote se ha levantado 48 cm.; ¿desde qué altura cayó?

R. 162 cm.

300. Los gastos de instalación de una máquina a vapor alcanzan a los $\frac{3}{22}$ del precio de la máquina. Calcular el costo de una máquina, si se ha pagado 12.450 \$ por ella, instalada.

R. 10.956 \$.

301. Una rueda y su piñón pesan 150 kg. El peso del piñón es los $\frac{2}{5}$ del peso de la rueda; calcular el peso del piñón y el de la rueda.

R. 42 $\frac{6}{7}$ y 107 $\frac{1}{7}$ kg.

302. En un surtidor de nafta se ha vendido un día los $\frac{3}{20}$

del total; en otro, los $\frac{2}{15}$; en otro, los $\frac{3}{10}$, y aún quedan 2500 litros. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

R. 6.000 litros.

303. Se han unido tres planchuelas con las medidas de la figura 15. Calcular el espesor AB.

R. $2\frac{1}{2}$ "

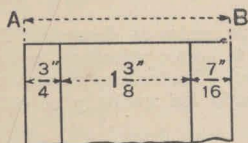


Fig. 15

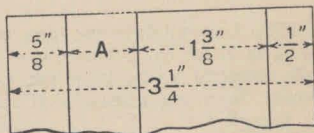


Fig. 16

304. Se han unido cuatro planchuelas como indica la figura 16. El espesor total es de $3\frac{1}{4}$ ", calcular el espesor de la planchuela A.

R. $\frac{3}{4}$ "

305. Una rosca tiene un paso de $\frac{3}{4}$ de milímetro. Calcular el avance del tornillo, estando fija la tuerca, después de 6 vueltas y media.

R. 4 mm. y $\frac{7}{8}$

306. Un obrero hace un trabajo en 12 horas; otro hace el mismo trabajo en 15 horas, y otro lo hace en 18 horas. ¿Qué tiempo emplearán los tres juntos para hacer el mismo trabajo?

R. 4 h. 51 m. 53 s

307. De una barra de hierro se han cortado trozos equivalentes a la cuarta, quinta y octava partes, y quedó un pedazo de 40 cm. ¿Cuánto medía la barra?

R. 200 cm.

308. El paso de la hélice de una fresa de dientes helicoidales es igual a 4 veces y media el diámetro. ¿Cuál es el paso de una hélice de 180 mm.?

R. 40 mm.

309. Hallar el área de un rectángulo que mide $3\frac{3}{16}$ pulgadas de ancho, y $4\frac{1}{4}$ pulgadas de largo.

R. $13\frac{35}{64}$ pulgadas cuadradas.

310. Hallar el área de un triángulo cuya base mide 8 pulgadas y media, y la altura 5 pulgadas y tres octavos.

R. $22\frac{27}{32}$ pulgadas cuadradas

311. Las dimensiones comunes de un bulón, tuerca y arandela, figura 17, son, siendo d el diámetro del bulón:

$$D = 2d ; h' = \frac{4}{5} d ; h = d ; R = \frac{3}{2} d$$

$$r = \frac{d}{2} ; D' = \frac{9}{4} d ; e = \frac{3}{20} d$$

Calcular las dimensiones de un bulón cuyo diámetro d mide 20 milímetros.

$$R: \begin{cases} D = 40 ; h' = 16 ; h = 20 ; R = 30. \\ r = 10 ; D' = 45 ; e = 3. \end{cases}$$

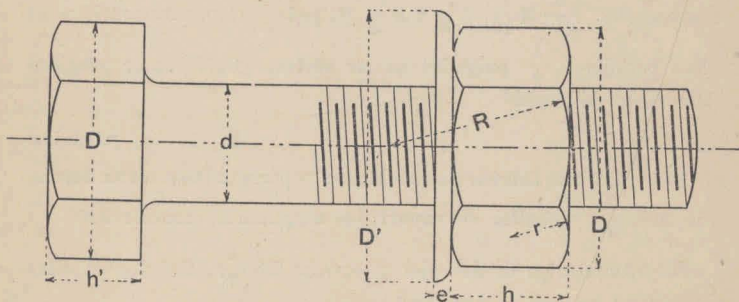


Fig. 17

312. Las máquinas y calderas de un buque a vapor pesan 180 kg. por caballo vapor. La máquina pesa los $\frac{37}{100}$ de ese peso: el árbol pesa los $\frac{15}{189}$ del resto; la caldera pesa el cuádruple del árbol, y la hélice pesa tanto como el nuevo resto. Calcular el

peso de la máquina, árbol, caldera y hélice de un buque de 3.000 caballos.

R. Máquina: 199.800 kg.; árbol: 27.000 kg.; caldera: 108.000 kg.; hélice: 205.200 kg.

313. Un tornero debe hacer 144 piezas iguales. Torneando como corrientemente se hace, termina una pieza por día. Después de 5 días y medio, hace una herramienta especial en la que emplea un día y $\frac{3}{4}$. Con esta herramienta fabrica 10 piezas en 4 días y $\frac{2}{3}$ de trabajo. Calcular el tiempo que empleará para hacer el trabajo total.

R. 71 $\frac{53}{60}$ días.

314. Para llenar un tanque, una canilla emplea 10 horas; otra lo llena en 4 horas; otra canilla lo vacía, estando lleno, en 5 horas. ¿En qué tiempo se llenará el tanque abriendo las 3 canillas al mismo tiempo?

R. 6 $\frac{2}{3}$ horas.

315. De un trozo de barra de hierro se han cortado cuatro pernos de $4\frac{3}{4}$, $4\frac{5}{16}$, $3\frac{7}{8}$ y $3\frac{13}{32}$ pulgadas, respectivamente, y se han perdido $1\frac{1}{2}$ pulgadas en los cortes. ¿Cuál era la longitud del trozo de barra?

R. 17 $\frac{27}{32}$ pulgadas.

316. En una fábrica, la máquina a vapor suministra una fuerza de 319 $\frac{3}{10}$ caballos de vapor. La maquinaria consume 210 $\frac{11}{16}$ y los rozamientos de los ejes y correas 32 $\frac{1}{7}$. ¿Cuántos caballos de vapor quedan disponibles?

R. 76 $\frac{263}{560}$ caballos de vapor

317. Una máquina a vapor quema $4\frac{3}{5}$ kilogramos de carbón por hora. ¿Qué cantidad de carbón se necesitará para hacer funcionar la máquina durante los 5 $\frac{1}{2}$ días que trabaja en una

semana, a razón de 8 horas diarias?

R. $202\frac{2}{5}$ kg.

318. Una plancha de hierro de 24 metros cuadrados de superficie pesa $362\frac{2}{5}$ kilogramos. Calcular el peso de un metro cuadrado.

R. $10\frac{2}{3}$ horas.

319. Un rollo de alambre mide $165\frac{3}{4}$ metros de largo. ¿Cuántos trozos de $1\frac{5}{8}$ metros se podrán cortar de él?

R. 102 trozos.

320. Se ha comprado $211\frac{1}{4}$ kilogramos de hierro viejo a razón de $1\frac{7}{8}$ centavos el kilogramo. Parte de él se ha vendido a $2\frac{1}{2}$ centavos el kilogramo, recibiendo la misma cantidad que se pagó por todo. ¿Qué cantidad de hierro queda?

R. $52\frac{13}{16}$ kilogramo.

CAPITULO X

Fracciones decimales

136. Fracción decimal. — Se llama *fracción decimal* a la fracción cuyo denominador es 10, ó 100, ó 1.000, etc.

Ejemplos:

$$\frac{3}{10} ; \frac{6}{100} ; \frac{1}{1.000} ; \frac{2}{10.000}$$

137. Lectura de un número decimal. — Para leer una *fracción decimal* se enuncia el numerador y luego el denominador con la terminación *ésimo*.

Ejemplos:

$$\frac{7}{10} \text{ se lee: siete décimos;}$$

$$\frac{3}{100} \text{ ,, ,, tres centésimos;}$$

$$\frac{9}{1.000} \text{ ,, ,, nueve milésimos; etc.}$$

138. Relaciones entre las unidades decimales de los diversos órdenes. — Las fracciones decimales:

$$\frac{1}{10} \quad \text{un décimo;} \quad \text{1er. orden decimal}$$

$$\frac{1}{100} \quad \text{un centésimo;} \quad \text{2º ,, ,,}$$

$$\frac{1}{1.000} \quad \text{un milésimo;} \quad \text{3er. ,, ,,}$$

$\frac{1}{10.000}$	<i>un diezmilésimo;</i>	4º	„	„
$\frac{1}{100.000}$	<i>un cienmilésimo;</i>	5º	„	„
$\frac{1}{1.000.000}$	<i>un millonésimo;</i>	6º	„	„

son, respectivamente, las unidades de *primero, segundo, tercero, cuarto, quinto y sexto orden decimal*, etc.

UNA UNIDAD *equivale a 10 décimos; o 100 centésimos; o 1.000 milésimos; o 10.000 diezmilésimos*, etc.

Es decir:

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{10}{10} = \frac{100}{100} = \frac{1.000}{1.000} = \frac{10.000}{10.000} = \text{etc.}$$

UN DÉCIMO *equivale a 10 centésimos; o 100 milésimos; o 1.000 diezmilésimos; o 10.000 cienmilésimos*, etc.

Es decir:

$$\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1.000} = \frac{1.000}{10.000} = \frac{10.000}{100.000} = \text{etc.}$$

UN CENTÉSIMO *equivale a 10 milésimos; o 100 diezmilésimos; o 1.000 cienmilésimos*; etc.

Es decir:

$$\frac{1}{100} = \frac{10}{1.000} = \frac{100}{10.000} = \frac{1.000}{100.000} = \text{etc.}$$

y así sucesivamente, podemos expresar el valor de un milésimo, un diezmilésimo, etc.

Todo lo anterior se resume diciendo que *cada orden decimal representa unidades diez veces mayor que el*

que le sigue, quedando así ordenadas las diversas unidades:

unidades de millón	centenas de millar	decenas de millar	unidades de millar	centenas	decenas	unidades	décimos	centésimos	milésimos	diez milésimos	cient milésimos	millonésimos
7°	6°	5°	4°	3°	2°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°

139. Descomposición de fracciones decimales en unidades decimales de diversos órdenes. —

1º FRACCIÓN DECIMAL PROPIA. — *Toda fracción decimal propia cuyo numerador tiene tantas cifras como ceros el denominador, es igual a la suma de varias fracciones decimales cuyos numeradores son las cifras del numerador, de izquierda a derecha, y los denominadores respectivos 10, 100, 1.000, etc.*

Ejemplo:

$$\frac{1.073}{10.000} = \frac{1}{10} + \frac{0}{100} + \frac{7}{1.000} + \frac{3}{10.000}$$

Si el numerador tiene menos cifras que ceros el denominador, se añaden ceros a la izquierda cuantos sea menester.

Ejemplo:

$$\frac{18}{10.000} = \frac{0018}{10.000} = \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1.000} + \frac{8}{10.000}$$

2º **FRACCIÓN DECIMAL IMPROPIA.** — *Toda fracción decimal impropia es igual a la suma de un número entero y varios decimales. El entero es lo que queda al separar en el numerador tantas cifras como ceros haya en el denominador. Con la parte decimal se procede como en el caso anterior.*

Ejemplo:

$$\frac{4832}{1.000} = 4 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1.000}$$

140. Escritura de las fracciones decimales en forma entera. — Una fracción decimal se escribe en forma entera así:

Se escribe el numerador, separando a la derecha una coma tantas cifras decimales como ceros haya en el denominador. Si no hay cifras bastantes, se agregan los ceros necesarios a la izquierda para que quede uno, y sólo uno, a la izquierda de la coma.

Ejemplos:

$$\frac{368}{100} = 3,68$$

$$\frac{20}{10} = 2,0$$

$$\frac{100}{100} = 1,00$$

$$\frac{2}{1.000} = 0,002$$

$$\frac{35}{100} = 0,35$$

Las fracciones decimales escritas en la forma entera se llaman *números decimales*, compuestos de dos partes:

la *parte entera* la que está a la izquierda de la coma; la *parte decimal* la que está a la derecha.

El 1er. lugar a la derecha de la coma lo ocupan los décimos; el 2º lugar los centésimos; el 3º, los milésimos; el 4º, los diezmilésimos; el 5º, los cienmilésimos; el 6º, los millonésimos; el 7º, los diezmillonésimos; el 8º, los cienmillonésimos; el 9º, los milmillonésimos; el 10º, los diezmillmillonésimos; el 11º, los cienmillmillonésimos; el 12º, los billonésimos; etc.

En el número decimal 15,432076 se tienen 15 enteros, 4 décimos, 3 centésimos, 2 milésimos, 0 diezmilésimos, 7 cienmilésimos y 6 millonésimos.

Para leer un número decimal se enuncia la parte entera, y luego la parte decimal con la terminación correspondiente a la última cifra decimal.

Ejemplos:

2,5	<i>se lee dos enteros y cinco décimos;</i>
0,32	<i>„ „ cero enteros y treinta y dos centésimos;</i>
9,058	<i>„ „ nueve enteros y cincuenta y ocho milésimos;</i>
3,0102	<i>„ „ tres enteros y ciento dos diezmilésimos;</i>
20,00008	<i>„ „ veinte enteros y ocho cienmilésimos;</i>
15,003006	<i>„ „ quince enteros y tres mil seis millonésimos;</i>

141. División de un número entero por 10, 100, 1.000, etc. — Para dividir un número entero por la unidad seguido de ceros, se separa con una coma a la izquierda del número tantas cifras como ceros acompañen a la unidad.

Ejemplos: $4.538 : 1.000 = 4,538$
 $12.475 : 100 = 124,75$

Si hubiese más ceros que cifras en el número, se agregan a la izquierda los ceros necesarios para que quede un solo cero a la izquierda de la coma.

Ejemplos: $5 : 100 = 0,05$
 $24 : 10.000 = 0,0024.$

142. Multiplicación de un número decimal por 10, 100, 1.000, etc. — *Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma a la derecha del número tantos lugares como ceros acompañen a la unidad.*

Ejemplos: $0,024 \times 100 = 2,4$
 $1,4 \times 1.000 = 1.400$
 $2,37 \times 10 = 23,7$

143. División de un número decimal por 10, 100, 1.000, etc. — *Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros haya en el divisor.*

Si no hubiera bastantes cifras, se agregan los ceros necesarios.

Ejemplos: $35,6 : 10 = 3,56$
 $134,02 : 100 = 1,3402$
 $2,34 : 1.000 = 0,00234$
 $0,05 : 10 = 0,005$

144. Propiedades de los números decimales. —
I. *Un número decimal no altera si se agregan ceros a la derecha de su última cifra decimal.*

Ejemplos:

$$3,75 = 3,750 = 3,7500 = 7,75000 = \text{etc.}$$

$$0,042 = 0,0420 = 0,04200 = \text{etc.}$$

145. II. *Un número decimal no altera si se suprimen ceros a la derecha de su última cifra decimal.*

Ejemplos:

$$45,3000 = 45,3$$

$$0,00800 = 0,008$$

$$1,320000 = 1,32$$

Suma de números decimales

146. Para sumar números decimales, se suman las unidades de cada orden, comenzando por las unidades inferiores, procediendo lo mismo que con los números enteros. En la suma se separan tantos decimales como tenga el sumando de mayor número de cifras decimales.

La operación se dispone así:

$$\begin{array}{r} 3,4 \\ 0,035 \\ 2,38 \\ 13,07 \\ 0,0096 \\ \hline 18,8946 \end{array}$$

Resta de números decimales

147. Para restar dos números decimales se coloca el sustraendo debajo del minuendo de manera que se correspondan las comas. Si tienen distinto número de cifras decimales, se agregan los ceros necesarios y lue-

go se restan como si fuesen enteros, colocando en la diferencia una coma debajo de las del minuendo y sustraendo.

Ejemplos:

12,258	2,030	7,5072
— 7,342	— 1,357	— 3,4900
4,916	0,673	4,0172

Multiplicación de números decimales

148. Para multiplicar un número decimal por un entero, o dos números decimales, se multiplican como si fuesen enteros, separando en el producto con una coma tantas cifras decimales como cifras decimales tengan ambos factores.

Ejemplos:

4,343	15,4
× 35	× 3,7
21715	1078
13029	462
152,005	56,98

División de números decimales

149. Para dividir un número decimal por un entero, o dos números decimales, se agregan al entero, o al número decimal que tenga menos cifras decimales, los ceros necesarios para igualar las cifras decimales, y luego se tachan las comas y se divide como si fuesen números enteros.

Ejemplos:

$$5,32 : 45 = 532 : 4500 ;$$

$$\begin{array}{r|l} 5320 & 4500 \\ 8200 & 0,11 \\ \hline 3700 & \end{array}$$

$$43,2 : 2,84 = 43,20 : 2,84 = 4320 : 284 ; \begin{array}{r|l} 4320 & 284 \\ 1480 & 1,52 \\ \hline 600 & \\ 32 & \end{array}$$

Para hallar el cociente con menor error que un décimo, basta obtener una cifra decimal en el cociente; con menor error que un centésimo, dos decimales; con menor error que un milésimo, tres decimales; etc.

150. Aplicaciones. — Al efectuar cálculos con números decimales no es conveniente conservar todas las cifras decimales que resulten, ni al dividir obtener muchas cifras decimales, sino las necesarias de acuerdo con la índole de los cálculos que se hagan.

Así, para determinar el tonelaje de un buque se calcula con una tonelada de aproximación; para determinar el peso de una barra se calculará con un kilogramo de aproximación; para calcular el peso de un tornillo bastará la aproximación de un gramo; y para calcular el fósforo contenido en un gramo de fundición es suficiente una aproximación de un milígramo.

Las vías férreas de un país se determinan con aproximación de un kilómetro, mientras que los rieles se miden con un centímetro de aproximación; para forjar una pieza bastan uno o dos milímetros de aproximación, mientras que para ajustar la misma pieza, el mecánico llegará hasta un centésimo de milímetro.

El volumen de un depósito de gas se medirá con un metro cúbico de error; el de un tanque con aproximación de un litro, y el de un pequeño recipiente hasta un centímetro cúbico en más o en menos.

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes sumas de decimales:

322.	$5,8523 + 0,0015 + 0,8 + 175,904$	R.	182,5578
323.	$18,10253 + 7,905 + 58,672 + 0,04$	„	84,71953
324.	$0,2143 + 0,105 + 2,3042 + 1,1417$	„	3,7652
325.	$783,5 + 21,473 + 0,2101 + 0,7816$	„	805,9647
326.	$21,78 + 137,72 + 41,8738 + 0,72 + 1,413$	„	203,5068
327.	$0,3274 + 104,15 + 21,417 + 100,042$	„	225,9364

Efectuar las siguientes restas de decimales:

328.	$7,473 - 4,586$	R.	2,887
329.	$0,05 - 0,0247$	„	0,0253
330.	$12,503 - 9,6$	„	2,903
331.	$15,7092 - 8,875$	„	6,8342
332.	$0,0903 - 0,0082$	„	0,0821
333.	$10,975 - 5,0092$	„	5,9658
334.	$407,385 - 235,0004$	„	172,3846

Efectuar las siguientes multiplicaciones de decimales:

335.	$48,36 \times 47$	R.	2.272,92
336.	$4,75 \times 234$	„	1.111,5
337.	$90,3 \times 407$	„	36.752,1
338.	$82,568 \times 238$	„	19.651,184
339.	$485 \times 2,75$	„	1.333,75
340.	$72,839 \times 12,502$	„	910,633178
341.	$4,1418 \times 4,92$	„	20,377656
342.	$53,06 \times 8,7$	„	461,622
343.	$12,762 \times 8,65$	„	110,3913
344.	$47,641 \times 59,04$	„	2.812,72464
345.	$420,98 \times 60,07$	„	25.288,2686
346.	$754,2 \times 0,075$	„	56,565
347.	$532,84 \times 174,9$	„	93.193,716
348.	$374,58 \times 297,6$	„	111.475,008
349.	$437,69 \times 89,35$	„	39.107,6015

Efectuar las siguientes divisiones de decimales:

350.	101,6688 : 2,36	R.	43,08
351.	187,12264 : 123,107	,,	1,52
352.	0,08 : 0,008	,,	10
353.	0,0003 : 3,75	,,	0,00008
354.	0,0144 : 0,024	,,	0,6
355.	0,00375 : 1,25	,,	0,003
356.	0,004 : 400	,,	0,00001
357.	2787,75 : 31,5	,,	88,5
358.	6.098 : 125	,,	48,784
359.	2.429,5 : 19,436	,,	125
360.	0,634725 : 0,75	,,	0,8463
361.	773,248 : 863	,,	0,896
362.	18.823,825 : 128	,,	147,061
363.	63.285 : 2,25	,,	28.126,666
364.	24,759 : 0,6432	,,	38,493

365. Se han comprado 14,35 m. de moldura a razón de 0,18 \$ el metro, y 73,15 m. de alfagías a 0,14 \$ el metro. ¿Cuánto importa la cuenta?

R. 12,82 \$.

366. Se han hecho compras por valor de 8,30 \$, 0,85 \$, 45 \$, 11,20 \$ y 1,65 \$ y se entrega en pago un billete de 100 \$. ¿Cuánto deben devolver?

R. 24,25 \$.

367. Un franco vale 0,0926 \$, ¿cuánto valdrán 385,12 fr.?

R. 35,66 \$.

168. Si por 240,64 \$ se han comprado 752 \$ chilenos, ¿cuánto vale el peso chileno?

R. 0,32 \$.

369. Un automovilista sale de excursión y pone en el tanque 35 litros de nafta. Se sabe que con 10 litros de nafta un automóvil liviano recorre 78 kilómetros. ¿Qué distancia podrá recorrer y cuál será el costo de nafta por kilómetro, sabiendo que el litro de nafta cuesta 0,20 \$?

R. 273 km.; 0,0256 \$ el km.

370. La circunferencia terrestre mide 40.000 kilómetros; ¿cuánto mide el diámetro?

R. 12.732 km.

370. Una persona gana por día 8,50 \$. Trabaja 25 días por mes y sus gastos ascienden a 178,35 \$. ¿Cuánto habrá economizado en 6 años?

R. 2.458,80 \$.

371. Se ha comprado un terreno de 410 varas en 100 mensualidades de 16,50 \$. Los gastos de escritura son 116.15 \$, y los impuestos municipales y nacionales llegan a la suma de 37,50 \$ al año. El adoquinado debe pagarse a razón de 15,91 \$ mensual. ¿Cuánto se habrá pagado en total una vez pagadas las deudas y a cuánto resultará la vara cuadrada?

R. 3.020,75 \$; 7,37 \$.

372. En el caso del problema anterior, ¿cuánto se ganará en la venta del terreno si se vende a razón de 10,35 \$ el metro cuadrado? Una vara cuadrada es igual a 0,75 m².

R. 161,87 \$.

373. 3 kilogramos de harina dan 4 kg. de pan. En una panadería se amasan por noche 9 bolsas de harina de 70 kg. cada una. Cada bolsa cuesta 26,50 \$ y los gastos diarios ascienden a 42,35 \$; el kilogramo de pan se vende a 40 centavos. ¿Cuál es la ganancia mensual del panadero?

R. 1.654,50 \$.

374. Un vendedor de loza compró 1.500 platos a 13,50 \$ el ciento; los vuelve a vender a 2,25 \$ la docena. ¿cuál es su ganancia si los gastos ascienden a 7,85 \$?

R. 70,90 \$.

375. Las ruedas de un automóvil miden 0,75 m. de diámetro. ¿Cuántas vueltas deben dar para recorrer una distancia de 4.732 m?

R. 2.008,31

376. Se desea empapelar una sala que mide 5,4 m. de ancho, 7,25 m. de largo y 4,55 m. de alto. La sala tiene un balcón de 3,20 m. de ancho y 3,50 m. de alto, y dos puertas de 3,85 m. de alto y 1,20 m. y 0,90 de ancho. Los rollos de papel miden 0,50 m. de ancho y 12 m. de largo y cuesta cada uno 2,75 \$. ¿Cuántos rollos se necesitarán y cuál será su costo?

R. 16 rollos; 44 \$.

377. Un cuñete de remaches pesa 100 kilogramos y contiene 8.270 remaches, ¿cuánto pesa cada remache?

R. 0,120 kg.

378. En un montaje se han empleado:

20	bulones,	pesando	c/u.	0,33	kg.
95	"	"	"	0,39	"
12	"	"	"	0,6	"
50	"	"	"	0,3	"
y 24	"	"	"	0,36	"

Calcula el precio total de los bulones si se compran a razón de 0,35 \$ el kilogramo.

R. 26,07 \$.

379. En las imprentas se emplean unas máquinas llamadas linotipos que reemplazan a los obreros tipógrafos. Un linotipista puede hacer el trabajo de 4 tipógrafos y gana por día 12,50 \$, mientras que un tipógrafo gana 9,80 \$. ¿En cuánto tiempo podrá amortizarse una linotipo que costó 20.000 \$, sabiendo que la máquina trabaja las 24 horas del día durante 5 días y medio por semana?

R. 53 semanas y 2 días.

380. Una bomba suministra 2,39 litros de agua a cada golpe de émbolo, y da 51 golpes por minuto. ¿Cuántos litros suministrará en 58,5 minutos?

R. 7.130,565 litros.

381. Una barra de hierro de 3,50 m. de largo pesa 37,450 kg. Calcular el peso de otra barra de igual grosor y de 6,75 m. de largo.

R. 72,225 kg.

382. La hélice de un aeroplano da 3.000 vueltas por minuto y avanza 0,40 m. por vuelta. Calcular la velocidad por hora.

R. 72 km.

CAPITULO XI

Conversión de fracciones ordinarias en decimales y viceversa

151. Expresión numérica con infinitas cifras decimales. — Una expresión numérica con infinitas cifras decimales no representa una fracción decimal, pero se le llama *fracción decimal inexacta*.

Sea la fracción $\frac{37}{12}$. Efectuando la división se observa que a partir del resto 10 siempre resulta un resto 4, por lo que la división no tiene fin.

$$\begin{array}{r|l} 37 & 12 \\ 100 & 3,0833.... \\ 040 & \\ 40 & \\ 4 & \end{array}$$

El cociente 3,0833... de infinitas cifras decimales no es una fracción decimal, pero a pesar de eso se le llama fracción decimal inexacta.

152. Fracciones decimales inexactas periódicas puras y mixtas. — Una *fracción decimal periódica* es un número escrito como un número decimal pero tal, que a partir de una de sus cifras, se repiten periódica e indefinidamente las mismas cifras en el mismo orden:

Ejemplos: 4,181818... ; 2,35666...

El grupo de cifras que se repite se llama *período*. Una fracción decimal periódica es *pura*, cuando el período empieza inmediatamente después de la coma.

Ejemplos: 5,333... ; 0,373737... ; 6,430430430...

Una fracción decimal periódica es *mixta*, cuando el período no empieza inmediatamente después de la coma.

Ejemplos: 0,5666... ; 2,17555... ; 9,078414141...

La parte que precede al período se llama *parte no periódica o irregular*, así en:

8,426666...

la parte irregular es 42, y 6 el período.

153. NOTACIÓN.— Se indica en las fracciones periódicas puras o mixtas el período, escribiendo uno solo con un arco encima.

Ejemplos:

$$2,636363... = 2,\widehat{63} \quad ; \quad 0,25333... = 0,25\widehat{3}.$$

154. Reducción de una fracción ordinaria a decimal.

— Para reducir una fracción ordinaria a decimal se divide el numerador por el denominador, obteniéndose el cociente con la aproximación que se desee. El cociente podrá ser exacto, o periódica puro, o mixto.

Ejemplos:

$\begin{array}{r} 9 \\ 10 \overline{) 4} \\ 20 \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 40 \\ 70 \overline{) 11} \\ 40 \\ 70 \\ 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \\ 10 \overline{) 6} \\ 40 \\ 40 \\ 4 \end{array}$
$\frac{9}{4} = 2,25$	$\frac{4}{11} = 0,\widehat{36}$	$\frac{7}{6} = 1,\widehat{16}$

Cuando la división es exacta, la fracción decimal obtenida se llama *fracción decimal exacta*.

155. Condición para que una fracción irreducible se convierta en fracción decimal exacta.— Para que una fracción irreducible se convierta en fracción decimal exacta, es necesario que al descomponer el denominador en sus factores primos (mentalmente), todos sean 2, o todos 5, o 2 y 5.

La fracción $\frac{7}{4}$ se puede convertir en fracción decimal exacta porque los factores primos del denominador 4 son todos 2. En efecto:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ 30 & 1,75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array} \quad \frac{7}{4} = 1,75$$

La fracción $\frac{9}{125}$ se puede convertir en fracción decimal exacta porque los factores primos del denominador 125 son todos 5. En efecto:

$$\begin{array}{r|l} 900 & 125 \\ 250 & 0,072 \\ 0 & \end{array} \quad \frac{9}{125} = 0,072$$

La fracción $\frac{3}{50}$ se puede convertir en fracción decimal exacta porque los factores primos del denominador 50 son 2 y 5. En efecto:

$$\begin{array}{r|l} 300 & 50 \\ 00 & 0,06 \end{array} \quad \frac{3}{50} = 0,06$$

156. Condición para que una fracción irreducible se convierta en fracción decimal periódica pura.— Para que una fracción irreducible se convierta en frac-

ción decimal periódica pura es necesario que al descomponer el denominador en sus factores primos, no figure entre ellos ni el 2 ni el 5.

La fracción $\frac{2}{3}$ se puede convertir en fracción periódica pura porque entre los factores primos del denominador 3, no figura ni el 2 ni el 5:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ 20 & 0,666.... \\ 20 & \\ 2 & \end{array} \quad \frac{2}{3} = 0,666....$$

157. Condición para que una fracción irreducible se convierta en fracción decimal periódica mixta. — *Para que una fracción irreducible se convierta en fracción decimal periódica mixta es necesario que al descomponer el denominador en sus factores primos, figure además de otros, o el 2, o el 5.*

La fracción $\frac{5}{6}$ se puede convertir en fracción periódica mixta porque entre los factores primos del denominador 6, figura el 2, no figurando el 5:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 6 \\ 20 & 0,833.... \\ 20 & \\ 2 & \end{array} \quad \frac{5}{6} = 0,8333....$$

La fracción $\frac{26}{45}$ se puede convertir en una fracción periódica mixta porque entre los factores primos del denominador 45, figura el 5, no figurando el 2:

$$\begin{array}{r|l} 260 & 45 \\ 350 & 0,577... \\ 350 & \\ 35 & \end{array} \quad \frac{26}{45} = 0,577...$$

158. — OBSERVACIÓN. — Antes de averiguar si una fracción se puede convertir en fracción decimal exacta, o periódica pura, o mixta, es imprescindible que la fracción dada sea *irreducible*, para lo cual previamente se simplifica todo lo posible.

159. Reducción de una fracción decimal exacta a ordinaria. — Para reducir una fracción decimal exacta a ordinaria se pone como numerador la parte decimal, y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya. Luego se simplifica si es posible.

$$\begin{aligned} \text{Ejemplos:} \quad 0,08 &= \frac{8}{100} = \frac{2}{25} \\ 0,352 &= \frac{352}{1.000} = \frac{44}{125} \end{aligned}$$

Si la fracción decimal tiene parte entera, ésta y la parte decimal sin la coma se pone como numerador.

$$\text{Ejemplo:} \quad 5,8 = \frac{58}{10} = \frac{29}{5}$$

160. Reducción de una fracción decimal periódica pura a ordinaria. — Para reducir una fracción decimal periódica pura a ordinaria, se pone como numerador el período y por denominador tantos 9 como cifras tenga el período.

Ejemplos: $0,333\dots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$0,\widehat{07} = \frac{7}{99}$$

Si el número decimal tiene parte entera, se obtiene un número mixto.

Ejemplos: $3,\widehat{12} = 3 \frac{12}{99} = 3 \frac{4}{33} = \frac{103}{33}$

161. Reducción de una fracción decimal periódica mixta a ordinaria. — Para reducir una fracción decimal periódica mixta a ordinaria se pone como numerador la parte no periódica seguida de un período, menos la parte no periódica, y como denominador el número formado por tantos 9 como cifras tiene el período, y tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

Ejemplos: $0,3\widehat{4} = \frac{34 - 3}{90} = \frac{31}{90}$

$$0,23\widehat{4} = \frac{234 - 2}{900} = \frac{232}{900} = \frac{58}{225}$$

Si el número decimal tiene parte entera, resulta un número mixto.

Ejemplo: $3,4\widehat{2} = 3 \frac{42 - 4}{90} = 3 \frac{38}{90} = 3 \frac{19}{45}$

162. Significado de las fracciones decimales periódicas cuyo período es 9. — *Las fracciones decimales*

periódicas cuyo período es 9, no se pueden reducir a fracción ordinaria.

Cuando la fracción es periódica pura, su valor es 1; y cuando es periódica mixta su valor se obtiene aumentando una unidad a la última cifra de la parte no periódica.

Ejemplos:

$$0,9999\dots = \frac{9}{9} = 1$$

$$0,7999\dots = \frac{79 - 7}{90} = \frac{72}{90} = 0,8$$

$$0,23999\dots = \frac{239 - 23}{900} = \frac{216}{900} = \frac{24}{100} = 0,24$$

EJERCICIOS

Reducir a decimal las siguientes fracciones:

385.	$\frac{3}{4}$	R:	0,75
386.	$\frac{5}{8}$	,,	0,625
387.	$\frac{72}{25}$	,,	2,88
388.	$\frac{17}{3}$	,,	5,66
389.	$\frac{16}{15}$	,,	1,06
390.	$\frac{11}{14}$	,,	0,7857142
391.	$\frac{9}{7}$	,,	1,285714
392.	$\frac{15}{11}$	,,	1,36
393.	$\frac{19}{75}$	,,	0,253
394.	$\frac{107}{33}$	,,	3,24
395.	$\frac{41}{333}$	,,	0,123
396.	$\frac{89}{111}$	,,	0,801
397.	$\frac{211}{900}$	,,	0,234
398.	$\frac{39.833}{9.900.000}$	,,	0,0040235
399.	$\frac{37}{1.500}$	,,	0,0246

Reducir a fracción ordinaria las siguientes fracciones decimales periódicas:

400.	0,65	R:	$\frac{13}{20}$
------	------	----	-----------------

401.	0,82	„	$\frac{41}{50}$
402.	7,585	„	$\frac{1.517}{200}$
403.	3,284	„	$\frac{821}{250}$
404.	0,25	„	$\frac{25}{99}$
405.	0,927	„	$\frac{103}{111}$
406.	3,15	„	$\frac{104}{33}$
407.	7,009	„	$\frac{778}{111}$
408.	34,274	„	$\frac{34.240}{999}$
409.	0,48	„	$\frac{16}{33}$
410.	0,01236	„	$\frac{17}{1.375}$
411.	2,14583	„	$\frac{103}{48}$
412.	1,46	„	$\frac{22}{15}$
413.	1,362	„	$\frac{1.349}{990}$
414.	2,53	„	$\frac{38}{15}$
415.	0,48932	„	$\frac{12.221}{24.975}$
416.	2,549	„	2,55
417.	8,0242	„	$\frac{1.324}{165}$
418.	0,479	„	0,48
419.	5,0749	„	5,075

CAPITULO XII

Potencias y Raíces

163. Cuadrado de un número.—Se llama *cuadrado* de un número, al producto de ese número por sí mismo.

Ejemplos: el cuadrado de 3 es: $3 \times 3 = 9$

„ „ „ 7 „ $7 \times 7 = 49$

Para expresar el cuadrado de un número se pone a la derecha y en la parte superior del número, el número 2. Así, los cuadrados de 2, 5 y 6 se indican así:

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$6^2 = 6 \times 6 = 36.$$

Elevar al cuadrado un número, es hallar su cuadrado.

Los cuadrados de los 10 primeros números son:

Números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Cuadrados: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

164. Cubo de un número.—Se llama *cubo* de un número, al producto que se obtiene al multiplicar tres factores iguales al número dado.

Ejemplos: el cubo de 2 es: $2 \times 2 \times 2 = 8$

„ „ „ 4 „ $4 \times 4 \times 4 = 64$

El cubo de un número se indica con un 3 puesto a la derecha y arriba del número. Así, los cubos de 5 y 8 se indican así:

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512.$$

Elevar al cubo un número, es hallar su cubo.

Para elevar al cubo un número, basta multiplicar su cuadrado por el mismo número. Así, si:

$$6^2 = 36 \quad ; \quad 6^3 = 36 \times 6 = 216$$

$$9^2 = 81 \quad ; \quad 9^3 = 81 \times 9 = 729.$$

Los cubos de los 10 primeros números son:

Números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Cubos: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1.000.

165. Potencia de un número.— Se llama *potencia* de un número, al producto de varios factores iguales a ese número.

El número de factores se llama *grado* de la potencia.

La potencia de grado 2, se llama *cuadrado*; la de grado 3, *cubo*; la de grado 4, *cuarta*; la de grado 5, *quinta*; etc.

Ejemplos:

$5^2 = 5 \times 5 = 25$ es la segunda potencia o cuadrado de 5;

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ es la tercera potencia o cubo de 2;

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ es la cuarta potencia de 3;

$7^5 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 16.807$ es la quinta potencia de 7;

La *elevación a potencias* tiene por objeto hallar la potencia de un número.

El número que se eleva a potencia se llama *base de la potencia*, y el que indica el grado se llama *exponente*.

En la potencia 9^3 , el 9 es la base, y el 3 el exponente.

Si el exponente es *cero*, la potencia se llama *potencia cero*, y en todos los casos es igual a 1:

$$2^0 = 1 \quad ; \quad 7^0 = 1 \quad ; \quad 15^0 = 1 \quad ; \quad 40^0 = 1.$$

Si el exponente es *uno*, la potencia se llama *primer potencia*, y en todos los casos es igual al mismo número:

$$3^1 = 3 ; 8^1 = 8 ; 12^1 = 12 ; 24^1 = 24.$$

166. Elevación a potencias. — La potencia de un número es un producto en donde todos los factores son iguales, así es que la elevación a potencias consiste en una o más multiplicaciones.

Ejemplo 1º: Elevar 24 al cubo.

24	576	$24^3 = 24 \times 24 \times 24$
$\times 24$	$\times 24$	$24^3 = 13.824$
96	2304	
48	1152	
576	13.824	

Ejemplo 2º: Elevar 1,8 a la cuarta potencia.

1,8	3,24	5,832	$1,8^4 = 1,8 \times 1,8 \times 1,8 \times 1,8$
$\times 1,8$	$\times 1,8$	$\times 1,8$	$1,8^4 = 10,4976$
144	2592	46656	
18	324	5832	
3,24	5,832	10,4976	

Ejemplo 3º: Elevar al cubo $\frac{2}{5}$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$$

y por (125):

$$= \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5}$$

$$= \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

Propiedades de las potencias

167. I. *Para multiplicar varias potencias de igual grado, se multiplican las bases y el resultado se eleva a la potencia dada.*

Sea multiplicar: $6^3 \times 15^3$.

Se tiene: $6^3 \times 15^3 = (6 \times 15)^3 = 90^3 = 729.000$.

168. II. *Para multiplicar varias potencias de igual base, se eleva la base dada a una potencia igual a la suma de los diversos exponentes.*

Sea multiplicar: $2^3 \times 2^2 \times 2$.

Se tiene: $2^3 \times 2^2 \times 2 = 2^{3+2+1} = 2^6 = 64$

169. III. *Para dividir dos potencias de igual base, se eleva la base dada a una potencia igual a la diferencia de los exponentes.*

Ejemplo: $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

170. IV. *Para elevar una potencia a potencia, se eleva la base a una potencia igual al producto de los exponentes.*

Ejemplo: $(3^3)^2 = 3^{3 \times 2} = 3^6 = 729$

171. V. *La diferencia de los cuadrados de dos números es igual a la suma por la diferencia de los números.*

Ejemplo: $23^2 - 20^2 = (23 + 20)(23 - 20)$
 $= 43 \times 3 = 129$.

Raíz cuadrada

172. Definición. — Se llama *raíz cuadrada* de un número, al número que elevado al cuadrado da un número igual al dado.

Así, la raíz cuadrada de 25 es 5, pues $5^2 = 25$.

El número cuya raíz cuadrado se desea hallar, se llama *radicando*.

Para expresar la raíz cuadrada de un número se emplea el signo $\sqrt{\quad}$, llamado *radical*, así la raíz cuadrada de 36 se indica:

$$\sqrt{36} = 6$$

Extraer la raíz cuadrada de un número es hallar su raíz cuadrada.

Un número es *cuadrado perfecto*, cuando tiene raíz cuadrada exacta.

Ejemplos: $\sqrt{4} = 2$, porque $2^2 = 4$
 $\sqrt{49} = 7$, „ $7^2 = 49$

Los números 4 y 49 son cuadrados perfectos.

Si un número no tiene raíz cuadrada exacta, el valor de ésta puede calcularse con la aproximación que se desee.

173 Casos de la raíz cuadrada. — Se presentan dos casos:

1º. Hallar la raíz cuadrada de un número menor que 100;

2º. Hallar la raíz cuadrada de un número mayor que 100.

174. Raíz cuadrada de un número menor que 100. — Las raíces cuadradas de los números cuadrados perfectos menores de 100, son:

Números: 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 , 81 , 100.

Raíces cuadradas: 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10.

Para hallar la raíz cuadrada de un número menor que 100, se debe saber de memoria la tabla anterior.

Si el número no se halla entre los cuadrados, su raíz es inexacta, así la $\sqrt{23}$ está comprendida entre 4 y 5, puesto que 23 está comprendido entre 16 y 25, siendo 4 la parte entera y una parte decimal que más adelante veremos cómo se halla.

175. Raíz cuadrada de un número mayor que 100. — Para hallar la raíz cuadrada de un número se lo divide, de derecha a izquierda, en grupos de dos cifras, y se halla la raíz cuadrada del último grupo, la que será la primera cifra de la raíz. Se eleva al cuadrado esta primer cifra y se resta del primer grupo, y a la derecha del resto se escribe el segundo grupo, separando la primera cifra a la derecha del número así formado; la parte que queda a la izquierda se divide por el duplo de la raíz y el cociente podrá ser la segunda cifra de la raíz.

Para comprobar esta cifra, se la escribe a la derecha del grupo de la raíz y se multiplica el número así formado por la misma cifra que se ensaya. Si el producto se puede restar de todo el resto, el número hallado es la segunda cifra de la raíz, y si no, se rebaja una unidad y se ensaya de nuevo, y así hasta que el producto obtenido se puede restar del resto.

A la derecha del nuevo resto se escribe el siguiente grupo del radicando, separando la primera cifra a la derecha, y la parte que queda a la izquierda se divide por el duplo de la raíz hallada, y el cociente podrá ser la tercera cifra de la raíz, continuando como más arriba se ha dicho.

Ejemplo: Calcular $\sqrt{205.245}$

La operación se dispone así, dividiendo en grupos de dos cifras:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{20.52.45} & \\ \hline \end{array}$$

La raíz cuadrada del 1er. grupo, 20, es 4, y elevada al cuadrado 16, que se resta de 20, bajando el 2º grupo, 52;

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{20.52.45} & 4 \\ -16 & \\ \hline 452 & \end{array}$$

Se separa la primer cifra de la derecha y se halla el duplo de la raíz, es decir, 8:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{20.52.45} & 4 \\ -16 & 8 \\ \hline 45,2 & \end{array}$$

La parte del resto que está a la izquierda de la coma, 45, se divide por el duplo de la raíz, 8, resultando 5 el cociente. Este 5 se pone al lado del 8 y se multiplica el número formado, 85, por 5:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{20.52.45} & 4 \\ -16 & 85 \times 5 = 425 \\ \hline & 45,2 \end{array}$$

Como el resultado, 425, es menor que el resto 452, se resta, se baja el 3er. grupo, 45, y la cifra hallada, el 5, se pone al lado de la raíz 4:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{20.52.45} & 45 \\ -16 & 85 \times 5 = 425 \\ \hline & 45,2 \\ - & 42\ 5 \\ \hline & 2\ 745 \end{array}$$

Se separa la primer cifra del resto y se halla el duplo de la raíz 45, es decir, 90:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{20.52.45} & 45 \\ -16 & 85 \times 5 = 425 \\ \hline & 45,2 \\ - & 42\ 5 \\ \hline & 2\ 74,5 \end{array}$$

La parte del resto que está a la izquierda de la coma, 274, se divide por el duplo de la raíz, 90, resultando 3, de cociente. El 3 se pone al lado de 90 y se multiplica el número formado, 903, por 3:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{20.52.45} & 45 \\ -16 & 85 \times 5 = 425 \\ \hline & 45,2 \\ - & 42\ 5 \\ \hline & 2\ 74,5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 45 \\ 85 \times 5 = 425 \\ 903 \times 3 = 2709 \end{array}$$

Como el resultado, 2709, es menor que el resto, 2745, se resta, y la cifra hallada, el 3, se pone al lado de la raíz 45:

$\sqrt{20.52.45}$ $\underline{-16}$ 45,2 $\underline{-42\ 5}$ 2 74,5 $\underline{-2\ 70\ 9}$ 3 6	453 $85 \times 5 = 425$ $903 \times 3 = 2709$
--	--

La raíz cuadrada de 205.245 es 453.

176. OBSERVACIONES. — I. La raíz cuadrada de un número entero tiene tantas cifras enteras como grupos de dos cifras resulten, contando como un grupo cuando el último de la izquierda tenga una cifra.

II. Cuando al hacer una división el cociente sea mayor que 9, se comienza el ensayo por 9.

III. Si una de las divisiones es imposible, la cifra correspondiente de la raíz es cero, y bajando otro grupo se continúa la operación.

IV. El resto de una raíz cuadrada debe ser menor que el duplo de la raíz, más uno.

V. Si se desean obtener cifras decimales, se pone una coma en la raíz y luego se bajan *dos ceros*, continuando de la manera conocida.

$\sqrt{8.43.90.57}$ $\underline{-4}$ 44,3 $\underline{-44\ 1}$ 29,05,7 $\underline{-29\ 02\ 5}$ 3 2	2905 $49 \times 9 = 441$ $5805 \times 5 = 29025$
---	--

177. Prueba de la raíz cuadrada.—I. Para comprobar si una raíz cuadrada está bien calculada, se eleva al cuadrado la raíz y se le suma el resto; si da el radicando de suma, es que está bien.

Este método es poco práctico.

II. Se procede de manera parecida a la división, siendo la raíz divisor y cociente al mismo tiempo.

Veamos como se procede con el ejemplo último:

Se suman las cifras de la raíz:

$$2 + 9 + 0 + 5 = 16 \quad ; \quad 1 + 6 = 7$$

el resultado se eleva al cuadrado:

$$7^2 = 49 \quad ; \quad 4 + 9 = 13 \quad ; \quad 1 + 3 = 4$$

se suman las cifras del resto:

$$3 + 2 = 5$$

y el resultado se suma al obtenido:

$$5 + 4 = 9$$

Ahora se suman las cifras del radicando, y si da también 9, la raíz estará bien hecha:

$$8 + 4 + 3 + 9 + 0 + 5 + 7 = 36 \quad ; \quad 3 + 6 = 9$$

Como ambos resultados son iguales, la operación está bien hecha.

178. Raíz cuadrada de un número decimal.—Para hallar la raíz cuadrada de un número decimal, *el número de cifras decimales debe su par*, y si no lo es, se agrega un cero. Luego se procede lo mismo que si el número fuese entero, colocando coma decimal en la raíz cuando se hayan bajado todos los grupos enteros.

Ejemplo: Hallar $\sqrt{12,5}$

Como tenemos *una* cifra decimal, agregamos un cero para que sea un número par de cifras decimales.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12,50} & 3,5 \\ \hline 9 & 65 \times 5 = 325 \\ \hline 35,0 & \\ 32\ 5 & \\ \hline 2\ 5 & \end{array}$$

Si el número no tiene parte entera, se procede lo mismo, cuidando de poner cero cuando se tenga raíz de cero.

Ejemplo: Hallar $\sqrt{0,00004225}$

Se tienen 8 cifras decimales, y como es número *par*, se procede inmediatamente a la extracción.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{0,00.00.42.25} & 0,0065 \\ \hline - 36 & 125 \times 5 = 625 \\ \hline 62,5 & \\ - 62\ 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

179. Raíz cuadrada aproximada con menor error que un décimo, un centésimo, un milésimo, etc. — Para obtener una raíz cuadrada aproximada con menor error que un décimo, se obtiene con una cifra decimal; con menor error que un centésimo, se obtienen dos cifras decimales; con menor error que un milésimo, se obtienen tres cifras decimales, etc.

Ejemplos: 1º *Hallar la raíz cuadrada de 32 con menor error que un décimo.*

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{32} & 5,6 \\
 - 25 & 106 \times 6 = 636 \\
 \hline
 70,0 & \\
 - 63\ 6 & \\
 \hline
 6\ 4 &
 \end{array}$$

2º) *Hallar $\sqrt{3}$ con menor error que un centésimo.*

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{3} & 1,73 \\
 - 1 & 27 \times 7 = 189 \\
 \hline
 20,0 & 343 \times 3 = 1029 \\
 - 18\ 9 & \\
 \hline
 1\ 10,0 & \\
 - 1\ 02\ 9 & \\
 \hline
 7\ 1 &
 \end{array}$$

3º) *Hallar $\sqrt{0,2}$ con menor error que un milésimo.*

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{0,20} & 0,448 \\
 - 16 & 84 \times 4 = 336 \\
 \hline
 40,0 & 887 \times 7 = 6209 \\
 - 33\ 6 & \\
 \hline
 6\ 40,0 & \\
 - 6\ 20\ 9 & \\
 \hline
 19\ 1 &
 \end{array}$$

180. Raíz cuadrada de una fracción. — Para hallar la raíz cuadrada de una fracción, se halla la raíz cuadrada del numerador y del denominador.

Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}} = \frac{6}{4}$$

Si el denominador no tiene raíz cuadrada exacta, se multiplican ambos términos por un mismo número, pero tal, que el denominador resulte cuadrado perfecto.

Sea hallar $\sqrt{\frac{5}{8}}$; como 8 no tiene raíz cuadrada exacta, multiplicamos ambos términos por un mismo número, 2 en este caso, resultando así un denominador 16 que tiene raíz exacta:

$$\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{16}} = \frac{3,16}{4} = \frac{316}{400}$$

Otro ejemplo:

$$\sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{25}} = \frac{4,48}{5} = \frac{448}{500}$$

181. Aplicaciones de la raíz cuadrada.—La raíz cuadrada se emplea para calcular el lado de un cuadrado cuya área se conoce, o para hallar el radio de un círculo, conociendo el área de éste, o el área de un triángulo conociendo sus lados.

También se emplea la raíz cuadrada para hallar la media proporcional a dos números, así como en muchas de las fórmulas de aplicación práctica en mecánica.

Se tiene:

$$\text{Lado del cuad.} = \sqrt{\text{Area del cuadrado}}$$

$$\text{Radio del círculo} = \sqrt{\frac{\text{Area del círculo}}{\pi}}$$

$$\text{Area del triángulo} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

en donde p es la mitad del perímetro, y a , b y c son los lados del triángulo.

Raíz Cúbica

182. Definiciones. — Se llama *raíz cúbica* de un número, al número que elevado al cubo dé un número igual al dado.

Así la raíz cúbica de 8 es 2, pues $2^3 = 8$.

Para expresar la raíz cúbica de un número se emplea el signo $\sqrt[3]{}$, así la raíz cúbica de 27 se indica:

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

Un número es *cubo perfecto*, cuando tiene raíz cúbica exacta.

Ejemplos: $\sqrt[3]{64} = 4$, porque $4^3 = 64$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \quad , \quad , \quad 5^3 = 125$$

Si un número no tiene raíz cúbica exacta, el valor de ésta puede calcularse con la aproximación que se desee.

183. Casos de la raíz cúbica. — Se presentan dos casos:

1º Hallar la raíz cúbica de un número menor que 1.000;

2º Hallar la raíz cúbica de un número mayor que 1.000.

184. Raíz cúbica de un número menor que 1.000. —

Las raíces cúbicas de los números cubos perfectos menores que 1.000, son:

Números: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1.000.

Raíces cúbicas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Para hallar la raíz cúbica de un número menor que 1.000, se debe saber de memoria la tabla anterior.

Ejemplos:
$$\sqrt[3]{216} = 6$$

$$\sqrt[3]{729} = 9$$

Si el número no se halla entre los cubos perfectos, su raíz es inexacta, así la $\sqrt[3]{170}$ está comprendida entre 5 y 6, puesto que 170 está comprendido entre 125 y 216, siendo 5 la parte entera y una parte decimal que más adelante veremos cómo se halla.

185. Raíz cúbica de un número mayor que 1.000. —

Para hallar la raíz cúbica de un número se lo divide, de derecha a izquierda, en grupos de tres cifras, y se halla la raíz cúbica del último grupo, la que será la primera cifra de la raíz. Se eleva al cubo esta primera cifra y se resta del primer grupo, y a la derecha del resto se escribe el segundo grupo, separando las dos primeras cifras a la derecha del número así formado; la parte que queda a la izquierda se divide por el triple del cuadrado de la raíz y el cociente podrá ser la segunda cifra de la raíz.

Para comprobar esta cifra se forma el triple del cuadrado de la raíz por el número que se ensaya, agregando dos ceros al resultado; se forma el triplo de la raíz por el cuadrado de la cifra que se ensaya, agregando un cero al resultado, y luego el cubo de la cifra que se ensaya, sumando estos tres resultados. Si la suma se puede restar del resto, el número que se ensaya es la segunda cifra de la raíz, y si no, se rebaja una unidad y se ensaya de nuevo, y así hasta que la suma obtenida se pueda restar del resto.

A la derecha del nuevo resto se escribe el siguiente grupo del radicando, separando dos cifras a la derecha, y la parte que queda a la izquierda se divide por el triplo del cuadrado de la raíz hallada y el cociente podrá ser la tercera cifra de la raíz, continuando como más arriba se ha dicho.

Ejemplo: Calcular $\sqrt[3]{96.452.506}$

La operación se dispone así, dividiendo en grupos de tres cifras:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{96.452.506} & \end{array}$$

La raíz cúbica del primer grupo, 96, es 4, y elevado al cubo da 64, que se resta de 96, bajando el segundo grupo, 452:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{96.452.506} & 4 \\ -64 & \\ \hline & 32\ 452 \end{array}$$

Se separan dos cifras a la derecha del resto y se halla el triplo del cuadrado de la raíz:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{96.452.506} & 4 \\ -64 & 3 \times 4^2 = 48 \\ \hline & 32\ 4,52 \end{array}$$

La parte del resto que está a la izquierda de la coma, 324, se divide por el triplo del cuadrado de la raíz, 48, resultando 6 de cociente. Hay que comprobar si 6 es la segunda cifra de la raíz. Para ello se forma $3 \times 4^2 \times 6$, agregando 2 ceros al resultado, más $3 \times 4 \times 6^2$, agregando un cero al resultado, más 6^3 :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{96.452.506} & 4 \\ -64 & 3 \times 4^2 = 48 \quad ; \quad 6 \\ \hline & 324,52 \\ & 3 \times 4^2 \times 6 = 28800 \\ & 3 \times 4 \times 6^2 = 4320 \\ & 6^3 = 216 \\ & \hline & 33336 \end{array}$$

Como el resultado, 33.336 no se puede restar del resto, 32.452, el 6 es demasiado, debiendo ensayar con 5:

$\begin{array}{r} \overset{3}{\sqrt{96.452.506}} \\ -64 \\ \hline 324,52 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 3 \times 4^2 = 48 \quad ; \quad 6 \\ \hline 3 \times 4^2 \times 6 = 28800 \\ 3 \times 4 \times 6^2 = 4320 \\ \hline 6^3 = 216 \\ \hline 33336 \end{array}$
	$\begin{array}{r} 6 \text{ es demasiado} \\ \hline 3 \times 4^2 \times 5 = 24000 \\ 3 \times 4 \times 5^2 = 3000 \\ \hline 5^3 = 125 \\ \hline 27125 \end{array}$

Como 27.125 es menor que 32.452, se resta, se baja el 3er. grupo, 506, y la cifra hallada, el 5, se pone al lado de la raíz 4. Se separan dos cifras a la derecha del resto y se forma el triplo del cuadrado de la raíz:

$\begin{array}{r} \overset{3}{\sqrt{96.452.506}} \\ -64 \\ \hline 324,52 \\ -271 \ 25 \\ \hline 53 \ 275,06 \end{array}$	$\begin{array}{r} 45 \\ \hline 3 \times 4^2 = 48 \quad ; \quad 6 \\ \hline 3 \times 4^2 \times 6 = 28800 \\ 3 \times 4 \times 6^2 = 4320 \\ \hline 6^3 = 216 \\ \hline 33336 \end{array}$
	$\begin{array}{r} 6 \text{ es demasiado} \\ \hline 3 \times 4^2 \times 5 = 24000 \\ 3 \times 4 \times 5^2 = 3000 \\ \hline 5^3 = 125 \\ \hline 27125 \\ \hline 3 \times 45^2 = 6075 \end{array}$

La parte del resto que está a la izquierda de la coma se divide, mentalmente, por 6075, resultando 8 de co-

ciento, que hay que comprobar como antes, resultando, finalmente:

$\sqrt[3]{96.452.506}$	458
—64	$3 \times 4^2 = 48 \quad ; \quad 6$
324,52	$3 \times 4^2 \times 6 = 28800$
—271 25	$3 \times 4 \times 6^2 = 4320$
53275,06	$6^3 = 215$
—49469 12	33336
3805 94	6 es demasiado
	$3 \times 4^2 \times 5 = 24000$
	$3 \times 4 \times 5^2 = 3000$
	$5^3 = 512$
	27125
	$3 \times 45^2 = 6075 \quad ; \quad 8$
	$3 \times 45^2 \times 8 = 4860000$
	$3 \times 45 \times 8^2 = 86400$
	$8^3 = 512$
	4946912

La raíz cúbica de 96.452.506, es 458.

186. OBSERVACIONES. — I. La raíz cúbica de un número entero tiene tantas cifras enteras como grupos de tres cifras resulten, contando como un grupo cuando el último tenga una o dos cifras.

II. Cuando al hacer una división el cociente sea mayor que 9, se comienza el ensayo por 9.

III. Si una división es imposible, la cifra correspondiente de la raíz es cero, y bajando otro grupo se continúa la operación.

IV. El resto de una raíz cúbica debe ser menor que el triple cuadrado de la raíz, más el triple de la raíz, más uno.

V. Si se desean obtener cifras decimales, se pone una coma en la raíz y luego se bajan *tres ceros*, continuando de la manera conocida.

187. Prueba de la raíz cúbica.—I. Se eleva al cubo la raíz y se le suma el resto; el resultado debe ser igual al radicando.

Por lo largo y complicado este método no debe usarse.

II. Se procede como con la raíz cuadrada, sólo que la suma de las cifras de la raíz se eleva al cubo.

188. Raíz cúbica de un número decimal.—Para hallar la raíz cúbica de un número decimal, el número de cifras decimales debe ser 3, o 6, o 9, etc., y si no lo es, se agregan los ceros necesarios. Luego se procede como si el número fuese entero, colocando coma decimal en la raíz cuando se hayan bajado todos los grupos enteros.

Ejemplo: Hallar $\sqrt[3]{9,5}$

Como tenemos una cifra decimal, agregamos dos ceros:

$\begin{array}{r} \sqrt[3]{9,500} \\ -8 \\ \hline 15,00 \\ -12 \ 61 \\ \hline 2 \ 39 \end{array}$	$\begin{array}{l} 2,1 \\ \hline 3 \times 2^2 = 12 \ ; \ 1 \\ \hline 3 \times 2^2 \times 1 = 1200 \\ 3 \times 2 \times 1^2 = 60 \\ 1^3 = 1 \\ \hline 1261 \end{array}$
--	--

189. Raíz cúbica aproximada con menor error que 0,1, 0,01, 0,001, etc. — Para hallar la raíz cúbica con menor error que un décimo, se obtiene una cifra decimal; con menor error que un centésimo, se obtienen dos cifras decimales; con menor error que un milésimo, se obtienen tres cifras decimales, etc.

Ejemplo: Hallar $\sqrt[3]{52}$ con menor error que un centésimo.

Procediendo como ya sabemos, resulta: $\sqrt[3]{52} = 3,73$

190. Raíz cúbica de una fracción. — Para hallar la raíz cúbica de una fracción, se halla la raíz cúbica del numerador y del denominador.

Ejemplos:
$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$$

Si el denominador no tiene raíz cúbica exacta, se multiplican ambos términos por un mismo número, tal, que el denominador resulte cubo perfecto.

Sea hallar $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$; como 9 no tiene raíz cúbica exacta, multiplicamos ambos términos por un mismo número, 3 en este caso, resultando así un denominador 27 que tiene raíz cúbica exacta:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{9}} = \sqrt[3]{\frac{6}{27}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1,81}{3} = \frac{181}{300}$$

191. Aplicaciones de la raíz cúbica. — Si se conoce el volumen de un cubo, se halla la longitud del lado extrayendo la raíz cúbica del volumen. También se emplea la raíz cúbica para hallar el radio de una esfera cuyo volumen es conocido, así como en algunas fórmulas aplicadas en la mecánica.

Se tiene:

$$\text{Lado del cubo} = \sqrt[3]{\text{Valumen del cubo}}$$

$$\text{Radio de la esfera} = \sqrt[3]{\frac{\text{Volumen esfera}}{4,188}}$$

192. Raíz cuarta. — Se llama *raíz cuarta* de un número, a otro número que elevado a la cuarta potencia da un resultado igual al número dado.

Para hallar la raíz cuarta de un número se halla su raíz cuadrada, y luego otra vez la raíz cuadrada del resultado.

Ejemplo: Hallar la raíz cuarta de 625.

$$\begin{aligned} \text{Se tiene: } \sqrt[4]{625} &= \sqrt{\sqrt{625}} \\ \sqrt{625} &= 25 \quad ; \quad \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

$$\text{uego: } \sqrt[4]{625} = 5$$

$$\text{Otro ejemplo: } \sqrt[4]{150} = \sqrt{\sqrt{150}} = \sqrt{12,24} = 3,5$$

193. Extracción de raíces de grado superior al cuarto. — Aplicando las raíces cuadrada o cúbica se puede extraer la raíz de grado superior al cuarto, siempre que el índice sea múltiplo de 2, o de 3, o de ambos a la vez.

Así, la raíz 6^a , ($6 = 2 \times 3$), se extrae calculando la raíz cuadrada y al resultado la raíz cúbica; la raíz 8^a , ($8 = 2 \times 2 \times 2$), se extrae calculando tres raíces cuadradas consecutivas, y la raíz 9^a , ($9 = 3 \times 3$), se extrae calculando dos raíces cúbicas consecutivas.

Otras raíces exigen procedimientos especiales.

EJERCICIOS

Elevar al cuadrado los siguientes números:

420.	35	R:	1.225
421.	43	„	1.849
422.	84	„	7.056
423.	120	„	14.400
424.	245	„	60.025
425.	$\frac{3}{4}$	„	$\frac{9}{16}$
426.	$\frac{5}{7}$	„	$\frac{25}{49}$
427.	0,47	„	0,2209
428.	2,83	„	0,080089

Elevar al cubo los siguientes números:

429.	24	R:	13.824
430.	18	„	5.832
431.	32	„	32.768
432.	$\frac{2}{3}$	„	$\frac{8}{27}$
433.	$\frac{4}{5}$	„	$\frac{64}{125}$
434.	5,02	„	126,506008
435.	0,36	„	0,046556

Calcular las siguientes raíces cuadradas:

436.	$\sqrt{7.225}$	R:	85
437.	$\sqrt{1.849}$	„	43
438.	$\sqrt{20.449}$	„	143
439.	$\sqrt{5}$	„	2,2361
440.	$\sqrt{2}$	„	1,4142
441.	$\sqrt{1.000}$	„	31,623

442.	$\sqrt{0,005}$	„ 0,070711
443.	$\sqrt{792,06}$	„ 28,144
444.	$\sqrt{61.340,224}$	„ 7.832
445.	$\sqrt{16.072.081}$	„ 4.009
446.	$\sqrt{\frac{4}{9}}$	„ $\frac{2}{3}$
447.	$\sqrt{\frac{100}{3364}}$	„ $\frac{10}{58}$
448.	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	„ $\frac{387}{500}$
449.	$\sqrt{\frac{5}{18}}$	„ $\frac{79}{150}$

Calcular las siguientes raíces cúbicas:

450.	$\sqrt[3]{12.167}$	R: 23
451.	$\sqrt[3]{1.295.029}$	„ 109
452.	$\sqrt[3]{500.566.184}$	„ 794
453.	$\sqrt[3]{33}$	„ 3,21
454.	$\sqrt[3]{2}$	„ 1,2599
455.	$\sqrt[3]{150}$	„ 5,31
456.	$\sqrt[3]{0,696}$	„ 0,88621
457.	$\sqrt[3]{78.347,81}$	„ 42,79
458.	$\sqrt[3]{50,9327}$	„ 3,7068

- | | | |
|------|---------------------------|---------------------|
| 459. | $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ | „ $\frac{2}{5}$ |
| 460. | $\sqrt[3]{\frac{3}{16}}$ | „ $\frac{229}{400}$ |
| 461. | $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ | „ $\frac{79}{100}$ |

Calcular las siguientes raíces cuartas:

- | | | |
|------|--------------------|---------|
| 462. | $\sqrt[4]{2,375}$ | R: 1,24 |
| | $\sqrt[4]{2,209}$ | „ 6,85 |
| | $\sqrt[4]{29,929}$ | „ 13,15 |

463. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado de 324 milímetros cuadrados?

R. 18 mm.

464. La fórmula $e = 1,15 \times \sqrt{P}$ da en milímetros el espesor de los dientes de una rueda de engranaje, siendo P el esfuerzo transmitido en kilogramos. Calcular el espesor de los dientes de los engranajes sometidos a esfuerzos de 200, 300 y 400 kg.

R. 16,2; 19,9; 23 mm.

465. La fórmula $d = 0,5 \times \sqrt{P}$ da el valor del diámetro en milímetros de un bulón que debe soportar un esfuerzo de P kilogramos. ¿Qué diámetro deberán tener los bulones que soportan cargas de 50, 150 y 1.000 kilogramos?

R. 1,1; 6,1; 15,8 mm.

466. El volumen de un cubo es de 2.744 centímetros cúbicos. ¿Cuánto mide la arista?

R. 14 cm.

467. La fórmula $d = 120 \times \sqrt[3]{\frac{A}{n}}$ expresa el diámetro del eje de una transmisión, en donde A es la potencia a transmitir en caballos de vapor, y n el número de vueltas por minuto. Calcular el diámetro de un eje que debe girar 80 vueltas por minuto y transmitir una fuerza de 36 caballos de vapor.

R. 91,92 mm.

CAPITULO XIII

Sistema métrico Decimal

194. Definiciones. — Se llama *Sistema Métrico Decimal* al conjunto de pesas y medidas que tienen por base el *metro*, y que sirven para medir las longitudes, superficies, volúmenes, pesos, y los valores monetarios. El sistema métrico se llama *decimal*, porque sus diversas unidades siguen los principios de la numeración decimal.

195. El metro. — *El metro es la longitud a 0° de temperatura de una barra de platino iridiado, depositada en París.* Esta longitud es, aproximadamente, la diezmilésima parte del cuarto del meridiano terrestre (fig. 18).

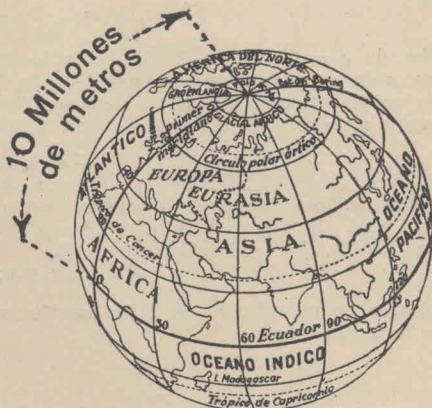


Fig. 18

196. Unidades fundamentales. — Las unidades fundamentales del sistema métrico decimal, son: el *metro* para las *longitudes*, y el *kilogramo* para los *pesos*.

Las unidades derivadas son: el *metro cuadrado* para las *superficies*; el *metro cúbico* para los *volúmenes*; el *litro* para las *capacidades*, y el *peso* para los *valores monetarios*.

197. Ventajas del sistema métrico decimal. — Sobre los demás sistemas, el sistema métrico decimal tiene las siguientes ventajas:

1ª Es *fijo*, pues las unidades están representadas por medidas invariables;

2ª Es *uniforme*, pues es el usado en todos los países civilizados del mundo;

3ª Es *simple*, pues los múltiplos y submúltiplos de las diversas unidades aumentan y disminuyen de 10 en 10, siendo fácil la conversión, así como su lectura y escritura.

198. Medidas de longitud. — La unidad principal es el *metro*; las unidades secundarias son:

NOMBRE	VALOR	ABREVIATURA
<i>Miriámetro</i>	<i>diez mil metros</i>	Mm
<i>Kilómetro</i>	<i>mil metros</i>	Km
<i>Hectómetro</i>	<i>cien metros</i>	Hm
<i>Decámetro</i>	<i>diez metros</i>	Dm
METRO		m
<i>decímetro</i>	<i>décimo de metro</i>	dm
<i>centímetro</i>	<i>centésimo de metro</i> ..	cm
<i>milímetro</i>	<i>milésimo de metro</i> ...	mm

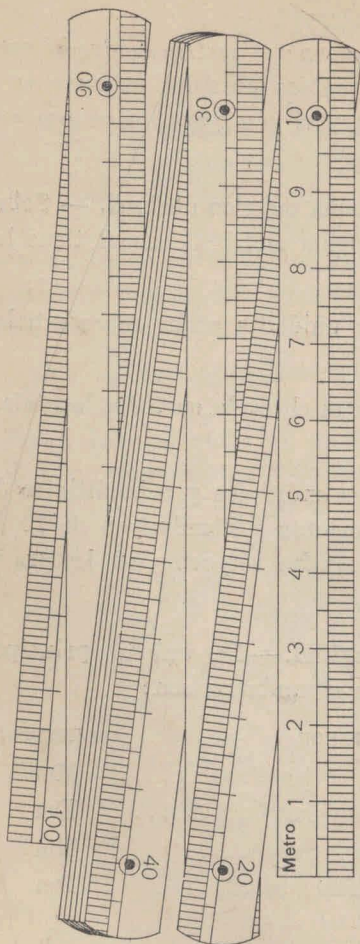


Fig. 19

Las medidas efectivas son: *decímetro*, *doble decímetro*, *metro*, *doble metro*, *decámetro* y *doble decámetro*.

Cada medida es *diez veces* mayor que la inmediata inferior.

199. Medidas itinerarias. — Se llaman *medidas itinerarias* a las que sirven para medir grandes distancias geográficas.

La unidad principal es el *kilómetro*; las unidades secundarias son el *hectómetro* y el *miriámetro*.

Para medir las distancias terrestres se usa la *legua*, que es igual a *cinco kilómetros*, y para las distan-

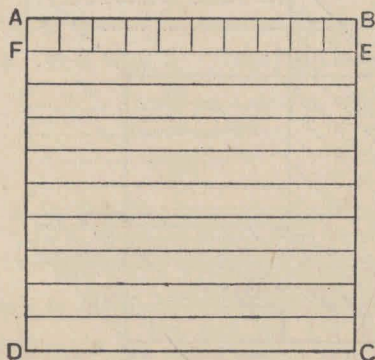
cias marítimas se usa la *milla*, que es igual a *1,852 metros*.

200. Medidas de superficie. — La unidad principal es el *metro cuadrado*, o área de un cuadrado de un metro de lado. Las unidades secundarias son:

NOMBRE	VALOR	ABREVIATURA
<i>Miriámetro cuadrado</i>	100.000.000	Mm^2
<i>Kilómetro cuadrado</i>	1.000.000	Km^2
<i>Hectómetro cuadrado</i>	10.000	Hm^2
<i>Decámetro cuadrado</i>	100	Dm^2
METRO CUADRADO ...		m^2
<i>decímetro cuadrado</i>	0,01	dm^2
<i>centímetro cuadrado</i>	0,0001	cm^2
<i>milímetro cuadrado</i>	0,000001	mm^2

Todas estas medidas son *teóricas*; ninguna es *efectiva*.

Cada medida es *cien veces* mayor que la inmediata inferior.



Metro cuadrado

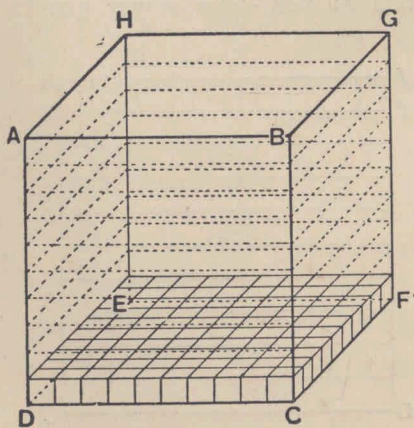
Fig. 20

201. Medidas de volumen. — La unidad principal es el *metro* cúbico, o volumen de un cubo de un metro de arista. Las unidades secundarias son:

NOMBRE	VALOR	ABREVIATURA
<i>Miriámetro cúbico</i> ..	1.000.000.000.000	Mm^3
<i>Kilómetro cúbico</i> ...	1.000.000.000	Km^3
<i>Hectómetro cúbico</i> ..	1.000.000	Hm^3
<i>Decámetro cúbico</i> ...	1.000	Dm^3
METRO CÚBICO		m^3
<i>decímetro cúbico</i>	0,001	dm^3
<i>centímetro cúbico</i> ..	0,000001	cm^3
<i>milímetro cúbico</i> ...	0,000000001	mm^3

Todas estas medidas son *teóricas*.

Cada medida es *mil veces* mayor que la inmediata inferior.



Metro cúbico
Fig. 21

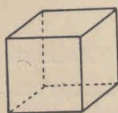
202. Medidas de capacidad.—La unidad principal es el *litro*, que es el volumen de un decímetro cúbico. Las unidades secundarias son:

NOMBRE	VALOR	ABREVIATURA
<i>Kilólitro</i>	<i>mil litros</i>	Kl
<i>Hectólitro</i>	<i>cien litros</i>	Hl
<i>Decálitro</i>	<i>diez litros</i>	Dl
LITRO		l
<i>decílitro</i>	<i>décimo de litro</i>	dl
<i>centílitro</i>	<i>centésimo de litro</i> ...	cl
<i>milílitro</i>	<i>milésimo de litro</i>	ml

Para la medida de los líquidos se construyen estas unidades en cilindros de metal cuya altura es doble de diámetro; para los áridos se construyen en cilindros de madera cuya altura es igual al diámetro.

Cada medida es *diez veces* mayor que la inmediata inferior.

203. Medidas de peso.—La unidad principal es el *gramo*, que es el peso de un centímetro cúbico de agua pura a 4º de temperatura. Las unidades secundarias son:



Centímetro cúbico

Fig. 22

NOMBRE	VALOR	ABREVIATURA
<i>Kilógramo</i>	<i>mil gramos</i>	Kg
<i>Hectógramo</i>	<i>cien gramos</i>	Hg
<i>Decágramo</i>	<i>diez gramos</i>	Dg
GRAMO		g
<i>decígramo</i>	<i>décimo de gramo</i>	dg
<i>centígramo</i>	<i>centésimo de gramo</i> ..	cg
<i>milígramo</i>	<i>milésimo de gramo</i> ...	mg

Todas estas unidades son efectivas. Tomando como unidad práctica el *Kilogramo*, se tienen estos múltiplos:

Quintal métrico, que vale 100 kg. Qm

Tonelada métrica, que vale 1.000 kg. .. Tm

Cada medida es *diez veces* mayor que la inmediata inferior.

204. Correspondencia entre las unidades de volumen, de capacidad y de peso. — Recordando las definiciones de las unidades de *volumen*, *capacidad* y de *peso*, y suponiendo que las medidas de volumen estén llenas de agua pura, se tienen estas correspondencias:

$$1 \text{ m}^3 = 1 \text{ kl} \quad \dots \quad 1 \text{ Tm}$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l} \quad \dots \quad 1 \text{ kg}$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml} \quad \dots \quad 1 \text{ g}$$

205. Peso específico. — El peso de un decímetro cúbico (metro cúbico, centímetro cúbico) en kilogramos (toneladas, gramos), de un cuerpo o sustancia, se llama *peso específico* o *densidad* de dicho cuerpo.

Si D es el peso de un decímetro cúbico de una sustancia, el peso P de un volumen de V decímetros cúbicos es:

$$P = V \times D$$

es decir: *El peso P de un cuerpo es igual a su volumen V expresado en dm^3 (m^3 , cm^3) por su densidad D expresada en Kg (Tm , g).*

El volumen se obtiene dividiendo el peso por la densidad:

$$V = \frac{P}{D}$$

La densidad se obtiene dividiendo el peso por el volumen:

$$D = \frac{P}{V}$$

Ejemplos:

1º *Hallar el peso de 20 litros de nafta ($20 dm^3$), sabiendo que la densidad de la nafta es: $D = 0,76$.*

Se tiene: $P = V \times D$

$$P = 20 \times 0,76 = 15,200 \text{ kg.}$$

2º *Hallar el volumen de un lingote de hierro que pesa 30 Kg. La densidad del hierro es: $D = 7,5$.*

Se tiene: $V = \frac{P}{D}$

$$V = \frac{30}{7,5} = 4 dm^3$$

3º *Una barra de bronce pesa 22,250 Kg., y su volumen es de $2,5 dm^3$. Determinar la densidad de ese bronce.*

Se tiene:

$$D = \frac{P}{V}$$

$$D = \frac{22,250}{2,5} = 8,9$$

Tabla de densidades

METALES

Acero	7,82	Mercurio	13,6
Aluminio	2,56	Níquel	8,66
Antimonio	6,72	Oro	19,3
Bronce	8,8	Plata	10,5
Cobre	8,9	Plata de monedas	10,12
Estaño	7,3	Platino laminado	23
Hierro dulce	7,8	Platino fundido	21,4
Hierro fundido	7,5	Plomo	11,3
Latón	8,5	Zinc	7,2
Metal blanco	8,6		

MATERIALES DE CONSTRUCCION

Arena seca	1,43	Mármol	2,7
Cal viva	0,86	Piedra de yeso	2,2
Granito	2,7	Piedra común	2,2
Ladrillo	2	Pizarra	2,1

LÍQUIDOS

Aceite de oliva	0,92	Agua de mar	1,03
Aceite de ricino	0,97	Agua destilada	1,00
Aceite mineral	0,82	Nafta	0,76
Alcohol	0,79	Petróleo	0,9
Acido sulfúrico	1,84	Querosén	0,78

MADERAS SECAS

Alamo	0,54	Nogal	0,66
Cedro	0,5	Pino	0,52
Corcho	0,24	Roble	0,82
Fresno	1,1		

VARIOS

Caucho	0,93	Ebonita	1,15
Cerámica	2,24	Hulla	1,35
Cristal	2,5	Vidrio	2,52

206. Medidas monetarias. — Las *medidas monetarias* son las que sirven para determinar el valor de las cosas.

La *unidad monetaria argentina* es el *peso*, \$, que no tiene múltiplos; el único submúltiplo es la centésima parte del peso, llamada *centavo*.

Las monedas argentinas son de *oro*, *plata*, *níquel* y *cobre*.

De *oro* son: el *argentino*, que vale 5 pesos oro, y el *medio argentino*, que vale 2,50 pesos oro.

De *plata* son: las de 1 peso, de 50 centavos, de 20 centavos, de 10 centavos y de 5 centavos.

De *níquel* son: las de 20, 10 y 5 centavos.

De *cobre* son: las de 2 y de 1 centavos.

En la práctica se usa, en vez de las monedas de oro y plata, el *papel moneda*, que son billetes de circulación forzosa emitidos por el Estado y garantizados por el depósito de oro de la *Caja de Conversión*. Cada peso papel, o *peso moneda nacional*, equivale a 44 centavos oro, de donde resulta que un *peso oro* (\$ o/s.) equivale a 2,27 pesos *moneda nacional*.

207. Reducción de pesos oro a moneda nacional. — Para reducir pesos oro a moneda nacional, se multiplican los pesos oro por 2,27, o se divide por 0,44.

Ejemplo 1º: Reducir 3,45 \$ o/s a pesos moneda nacional:

$$3,45 \times 2,27 = 7,83 \text{ \$ } \frac{m}{n}.$$

Ejemplo 2º: Reducir 14,50 \$ o/s. a pesos moneda nacional:

$$14,50 : 0,44 = 32,95 \text{ \$ } \frac{m}{n}.$$

208. Reducción de pesos moneda nacional a pesos oro.

— Para reducir pesos moneda nacional a pesos oro, se dividen los pesos moneda nacional por 2,27, o se multiplica por 0,44.

Ejemplo 1º: Reducir 84,30 \$ $\frac{m}{n}$ a pesos oro:

$$84,30 : 2,27 = 37,13 \text{ \$ o|s.}$$

Ejemplo 2º: Reducir 746,25 \$ $\frac{m}{n}$ a pesos oro:

$$746,25 \times 0,44 = 328,35 \text{ \$ o|s.}$$

Medidas diversas

209. **Medidas de tiempo.**— La unidad de tiempo es el *día solar medio*, o simplemente *día*, que es el tiempo que emplea la Tierra en dar una vuelta sobre su eje.

El día se divide en 24 horas; una hora en 60 minutos, y un minuto en 60 segundos. Los segundos se aprecian en *décimos*.

Como múltiplos del día se consideran:

la semana	= 7 días;
el mes	= 30 días, término medio;
el año	= 12 meses = 365 días;
el lustro	= 5 años;
el siglo	= 100 años.

210. **Medidas de los ángulos.**— La unidad principal es el *ángulo recto*, que vale 90 grados. El ángulo recto está formado por dos rectas que al cortarse determinan dos ángulos adyacentes iguales.

El *grado* se divide en 60 minutos ('), y el *minuto* en 60 segundos ('').

211. **Medidas mecánicas.**— El *trabajo* de la fuerza ejercida sobre un cuerpo es igual al producto de la fuerza expresada en kilogramos, por la longitud en metros del camino recorrido por el cuerpo en la dirección de la fuerza.

La unidad de trabajo es el *kilográmetro*, (*kgm*), que es el trabajo necesario para elevar 1 kilogramo a 1 metro de altura.

La *potencia* de una máquina es el trabajo que ejecuta en un segundo. La unidad de potencia es el *caballo-vapor*, (*H.P.*), que es el trabajo de 75 kilográmetros en un segundo.

Ejemplo. Una caída de agua de 6 m. de alto da 90 litros de agua por segundo, y mueve una turbina cuyo rendimiento es del 70 por 100. Calcular la potencia de la turbina.

Solución:

Los 90 litros de agua equivalen a 90 kg. por segundo.

Potencia de la caída: $6 \times 90 = 540$ Kgm.

Potencia en H.P. : $540 : 75 = 7,2$ H.P.

Potencia útil : $\frac{7,2 \times 70}{100} = 5,04$ H.P.

La turbina desarrolla una potencia útil de 5 H.P.

212. Medidas eléctricas.—El *voltio* es la unidad de fuerza electromotriz (*E*), el *amperio* la unidad de intensidad eléctrica (*I*), y el *ohmio* es la unidad de resistencia eléctrica (*R*). Estas tres unidades están ligadas por la fórmula:

$$I = \frac{E}{R}$$

La unidad de trabajo eléctrico es el *julio*, que equivale un décimo de kilográmetro.

El *watio* es la unidad de potencia eléctrica; equivale a 1 *julio* por segundo. El caballo-vapor equivale a 736 watios:

$$1 \text{ H.P.} = 736 \text{ w.}$$

213. Medida de las cantidades de calor.—La unidad es la *caloría grande* (*C*), o *caloría-kilogramo*, que es la cantidad de calor necesaria para que un 1 kilogramo de agua eleve un grado su temperatura. La *caloría chica* (*c*), o *caloría-gramo*, es la cantidad de calor necesaria para que 1 gramo de agua eleve un grado su temperatura; la *caloría chica* es mil veces menor que la *caloría grande*.

La cantidad de calor *Q* que se necesita para una masa *M* de agua se leve *t*° su temperatura, se obtiene por la fórmula:

$$Q = M \times t$$

El trabajo se convierte en calor a razón de 426 kilográmetros por cada *caloría grande*.

214. Medidas inglesas y su reducción al sistema métrico.—En Inglaterra y en Estados Unidos no se emplea el sistema métrico decimal, por lo que es necesario

conocer las principales medidas usadas en la industria y su reducción a nuestro sistema.

MEDIDAS DE LONGITUD	EQUIVALENTE
1 milla = 1.760 yardas = 5.280 pies	1.609,35 m.
1 yarda = 3 pies = 36 pulgadas	0,914 m.
1 pie = 12 pulgadas	0,3048 m.
1 pulgada	2,54 cm

MEDIDAS DE SUPERFICIE	
1 yarda cuadrada = 9 pies cuadrados	0,8361 m ²
1 pie cuadrado = 144 pulgadas cuadradas	0,0929 m ²
1 pulgada cuadrada	6,45 cm ²

MEDIDAS DE VOLUMEN Y DE CAPACIDAD	
1 yarda cúbica = 27 pies cúbicos	0,76456 m ³
1 pie cúbico = 7,48 galones norteam. ..	28,317 litros
1 galón norteam. = 231 pulgadas cúbicas	3,785 litros
1 galón inglés = 277,27 pulgadas cúbicas	4,546 litros

MEDIDAS DE PESO	
1 tonelada corta = 2.000 libras	907 Kg.
1 tonelada larga = 2.240 libras	1.016 Kg.
1 libra = 16 onzas	0.453 Kg.
1 onza	28 gramos

EQUIVALENTES DE LAS UNIDADES MÉTRICAS EN UNIDADES INGLESA

MEDIDAS DE LONGITUD
1 kilómetro = 0,621 yardas = 1.093,6 yardas
1 metro = 1,09 yardas = 3,28 pies
1 centímetro = 0,39 pulgadas

MEDIDAS DE SUPERFICIE

$$\begin{aligned} 1 \text{ m}^2 &= 1,196 \text{ yardas}^2 = 10,76 \text{ pies}^2 \\ 1 \text{ dm}^2 &= 0,107 \text{ pies}^2 = 15,34 \text{ pulgadas}^2 \\ 1 \text{ cm}^2 &= 0,153 \text{ pulgadas}^2. \end{aligned}$$

MEDIDAS DE VOLUMEN Y DE CAPACIDAD

$$\begin{aligned} 1 \text{ m}^3 &= 1,307 \text{ yardas}^3 = 35,314 \text{ pies}^3 \\ 1 \text{ litro} &= 0,035 \text{ pies}^3 = 0,264 \text{ galones norteam.} \\ 1 \text{ litro} &= 0,22 \text{ galones ingleses.} \end{aligned}$$

MEDIDAS DE PESO

$$\begin{aligned} 1 \text{ Tm.} &= 0,984 \text{ tonel. largas} = 1,102 \text{ tonel. cortas} = \\ &= 2204,62 \text{ libras.} \\ 1 \text{ Kg.} &= 2,204 \text{ libras.} \end{aligned}$$

215. Monedas inglesas. — La unidad es la *libra esterlina*, (£), que consta de 20 chelines (*sh*), y cada chelín consta de 12 peniques (*d*).

$$\begin{aligned} 1 \text{ £} &= 20 \text{ sh} = 240 \text{ d} \dots\dots\dots = 11,45 \text{ \$} \\ 1 \text{ sh} &= 12 \text{ d} \dots\dots\dots = 0,5725 \text{ \$} \\ 1 \text{ d} \dots\dots\dots &= 4,8 \text{ centavos} \end{aligned}$$

Recíprocamente:

$$\begin{aligned} 1 \text{ \$} \frac{\text{m}}{\text{n}} &= 0,0873 \text{ £} \\ 1 \text{ \$} \frac{\text{m}}{\text{n}} &= 1,746 \text{ sh.} \\ 1 \text{ \$} \frac{\text{m}}{\text{n}} &= 20,96 \text{ d.} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Calcular X en las siguientes expresiones:

468. $31 \text{ Hm} + 12 \text{ Dm} + 4,2 \text{ Km} = x \text{ m}$

R. 7.420 m.

469. $3 \text{ Dm} + 5 \text{ m} + 37 \text{ dm} + 42 \text{ mm} = x \text{ cm.}$

R. 3.874,2 cm.

470. $57 \text{ mm} + 38 \text{ cm} + 14 \text{ dm} + 0,35 \text{ Dm} = x \text{ m.}$

R. 5,337 m.

471. $25 \text{ cm} + 17 \text{ Hm} + 56 \text{ Dm} + 0,03 \text{ Km} = x \text{ Mm}$

R. 0,178625 Mm.

472. $2 \text{ Hm}^2 + 7 \text{ Dm}^2 + 0,58 \text{ Km}^2 = x \text{ m}^2$

R. 600.700 m².

473. $5 \text{ Km}^2 + 48 \text{ m}^2 + 342 \text{ cm}^2 = x \text{ Dm}^2$

R. 50.000,480342 Dm²

474. $75 \text{ dm}^2 + 48 \text{ mm}^2 + 5 \text{ cm}^2 + 3 \text{ Dm}^2 = x \text{ m}^2$

R. 300,750548 m²

475. $5 \text{ m}^3 + 357 \text{ cm}^3 + 4.384 \text{ mm}^3 = x \text{ dm}^3$

R. 5.000,361384 dm³.

376. $583 \text{ mm}^3 + 2 \text{ dm}^3 + 0,002 \text{ m}^3 = x \text{ cm}^3$

R. 4.000,583 cm³.

477. $4 \text{ dm}^3 + 72 \text{ cm}^3 + 0,435 \text{ dm}^3 = x \text{ mm}^3$

R. 4.507.000 mm³.

478. $3 \text{ Kl} + 5 \text{ Dl} + 12 \text{ Hl} = x \text{ l}$

R. 4.250 l.

479. $4536 \text{ l} + 45 \text{ Dl} + 3482 \text{ cl} = x \text{ Hl}$

R. 90,7082 Hl.

480. $3,05 \text{ l} + 438 \text{ cl} + 745 \text{ ml} = x \text{ dl}$

R. 81,75 dl.

481. $0,3 \text{ Tm} + 3,4 \text{ Qm} + 4,7 \text{ Kg} + 84,56 \text{ Qm} = x \text{ Tm.}$

R. 9,2007 Tm.

482. $2,5 \text{ Kg} + 3 \text{ g} + 5 \text{ Qm} = x \text{ Kg}$

R. 502,503 Kg.

483. $305 \text{ cg} + 58 \text{ mg} + 4 \text{ Hg} = x \text{ g}$

R. 403,108 g.

484. ¿Cuánto cuestan 24,50 m de género a 1,25 \$ el metro?

R. 30,63 \$.

485. Para llegar al 3er. piso de una casa hay que subir 95 escalones. ¿A qué altura estará el 3er. piso si la distancia de un escalón a otro es de 22 cm.?

R. 20,90 m.

486. La distancia entre dos ciudades es de 4500 Km. ¿Qué tiempo empleará en recorrerla un automóvil a razón de 35 km por hora?

R. 12 h y 51 m.

487. ¿Qué longitud de hilo de hierro de 5 mm de diámetro se necesitará para recubrir un cilindro de madera de 20 cm de diámetro y 0,9 m de largo?

R. 12 h 51 m 25 s.

488. Hay que enrollar en un tambor de 40 cm de diámetro un cable de 17 mm de diámetro. ¿Qué longitud deberá tener el tambor para enrollar en una sola capa un cable de 45 m de largo, sabiendo que el paso de enrollamiento es de 18 mm.?

R. 63 cm.

489. ¿Cuánto cuesta el piso de una habitación que mide 8,75 m de largo por 5,60 de ancho a razón de 12,50 \$ el metro cuadrado?

R. 612,50 \$.

490. Una habitación mide 6,25 m de largo, 5,30 m de ancho y 4,20 m de alto. Tiene dos ventanas de 2,10 m de alto y 1,10 m de ancho, y dos puertas de 3,50 m de alto y 1,20 m de ancho. El techo y las paredes se pinta a razón de 1,60 \$ el m² y las puertas y ventanas a razón de 3,20 \$ el m², ¿cuánto importa todo el trabajo?

R. 229,06 \$.

491. Una tela pierde $\frac{1}{20}$ de su ancho al lavarla. ¿Qué longitud debe tener una tela de 0,75 m de ancho para que después de lavada dé una superficie de 14,50 m²?

R. 20,35 m.

492. Una habitación mide 6,50 m de largo, y su ancho los $\frac{3}{4}$ de largo. El piso ha costado 320 \$, ¿cuánto cuesta el metro cuadrado?

R. 10,10 \$.

493. Calcular el volumen de una habitación que mide 5 m de largo, 3,80 m de ancho y 4 m de alto.

R. 76 m³.

494. Un kilogramo de carbono consume 4,5 m³ de aire para arder. ¿Qué cantidad de aire se necesita por minuto para quemar 1.000 kg de carbón de coke en 24 horas, sabiendo que los $\frac{4}{5}$ de su peso es carbono?

R. 2,5 m³

494 bis. El volumen de un gasómetro es de 25.000 m³. Con los $\frac{3}{4}$ de su capacidad se ha alimentado, durante 6 horas, 3.500 picos. Término medio, por cada 100 picos hay una pérdida de 40 litros de gas. ¿Cuál es el consumo de gas por hora y por pico?

R. 892,314 litros.

495. Un pico de gas consume 150 litros de gas en hora y media. Por 6 picos iguales, estando encendidos 5 horas diarias, en un mes se ha pagado 35 \$, ¿cuánto vale el metro cúbico de gas?

R. 0,39 \$.

496. Se tiene una planchuela de hierro de 14 mm de espesor, 6 cm de ancho y 20 cm de largo, y se la quiere convertir en otra de 10 mm de espesor y 45 mm de ancho. ¿Qué largo deberá tener?

R. 373 mm.

497. Un hombre respira 16 veces por minuto, y cada vez aspira 4,5 dl de aire. ¿Cuántos metros cúbicos de aire habrán pasado por sus pulmones en 24 horas?

R. 10,368 m³.

498. — Un depósito contiene 5 Hl y 3 Dl de agua. ¿Qué tiempo necesitará para vaciarlo un sobinete que da 37 litros de agua por minuto?

R. 14 h 19 m 27 s.

499. — Evaporando 100 litros de agua de mar se obtienen 5,125 kg. de sal. En un tanque que mide 38 cm de ancho y 1,20 m de largo se puso cierta cantidad de agua de mar y después de evaporarla se recogió 2,400 kg. de sal, ¿qué cantidad de agua de mar hubo que evaporar, y qué altura tomó el agua en el tanque?

R. 46,829 l; 10,2 cm.

500. — Un automóvil *Chevrolet* consume 10 litros de nafta cada 80 Km, y 5 litros de aceite cada 1.000 Km. El litro de nafta cuesta 0,20 \$ y el de aceite 1,10 \$. Calcular el costo de la nafta y aceite consumidos para ir desde Buenos Aires a Mar del Plata, cuya distancia es de 420 Km.

R. 12,80 \$.

501. — Calcular el peso de un anillo de oro cuyo volumen es de 0,7 cm³.

R. 13,51 g.

502. — Calcular el peso de 45 cm³ de mercurio.

R. 612 g.

503. — Una placa de hierro mide 40 cm de largo, 25 cm de ancho y 5 mm de espesor. Al niquelar sus dos caras, la placa pesa,

en total, 4248 g. Calcular el espesor de la capa de níquel. Densidad del hierro: 7,8; densidad del níquel: 8,7.

R. 0,4 mm.

504. — Calcular el peso del vidrio de un escritorio; mide 1,30 m de largo, 0,90 m de ancho y 7 milímetro de espesor. $D = 2,52$.

R. 20,839 Kg.

505. — ¿Cuántos litros hay en 10 kilogramos de aceite de oliva?

R. 10,870 litros

506. — 15 dm³ de una substancia pesan 36 kilogramos y $\frac{3}{4}$.

Calcular la densidad.

R. 2,45

507. — Reducir 38 \$ o/s a pesos moneda nacional.

R. 86,26 \$ m/n.

508. — Reducir 0,15 \$ o/s a pesos moneda nacional.

R. 0,34 \$ m/n.

509. — Reducir 4.532,20 \$ o/s a pesos moneda nacional.

R. 10.288,09 \$ m/n.

510. — Reducir 285 \$ m/n a pesos oro.

R. 125,40 \$ o/s.

511. — Reducir 8,35 \$ m/n a pesos oro.

R. 3,67 \$ o/s.

512. — Reducir 7.005,15 \$ m/n a pesos oro.

R. 3.080,07 \$ o/s.

513. — Un kilogramo de hulla da 7.000 calorías, y un kilogramo de leña da 3.600. Un metro cúbico de leña pesa 525 kg y cuesta 12 \$, mientras que un hectólitro de hulla pesa 135 kg y cuesta 4 \$. Calcular el precio comparativo de los dos calores.

R. Mil calorías de hulla cuestan 0,0057 \$,
y de leña 0,0063 \$.

514. — Calcular en caballos-vapor la potencia desarrollada por una locomotora que remolca un tren a una velocidad de 65 Km por hora con una fuerza de 1.500 Kg.

R. 361 H.P.

515. — Calcular la potencia de una corriente eléctrica de 40 amperios de intensidad y una fuerza electromotriz de 220 voltios, y el trabajo en kilográmetros por hora.

R. 11,95 H.P. y 896,25 kgm.

516. — Un motor a gas de 5 caballos consume 250 litros de gas por caballo-hora. Se calculan en 150 \$ anuales los gastos generales, amortización e intereses, y en 1,30 \$ diario los gastos

de entretenimiento, engrasado y repuestos. Calcular el precio del caballo-hora sabiendo que el motor trabaja 300 días al año a razón de 8 horas diarias, y que el metro cúbico de gas cuesta 0,12 \$.

R. 0,075 \$.

517. — Un motor a explosión de 3 caballos-vapor acciona un dínamo. Calcular la potencia en HP y en watos, del dínamo sabiendo que el rendimiento es del 80 por ciento.

R. 2,4 H.P.; 1.766,4 W.

518. — Un buque navega a una velocidad de 18 millas por hora. Calcular su velocidad en kilómetros.

R. 33,336 km.

519. — Un toldo mide 8 yardas de largo y 14 pies de ancho. Calcular su superficie en metros cuadrados.

R. 31,2137 m².

520. — ¿Cuántos litros son 14 galones norteamericanos?

R. 52,990 l.

521. — El transporte de 645 libras de peso cuesta 38 \$. ¿Cuánto cuesta el kilogramo de transporte?

R. 0,13 \$.

522. — Reducir 4.700 m a yardas.

R. 5133 yardas.

523. — Reducir 2,5 m² a pulgadas cuadradas.

R. 3873,6 pulg. cuad.

524. — Reducir 75 kg a libras.

R. 165,3 libras.

525. — Reducir 100 litros a galones norteamericanos.

R. 26,4 galones.

526. — Reducir 2 £ 6 sh 7 d a pesos moneda nacional.

R. 26,67 \$.

527. — Reducir 875 \$ m/n a moneda inglesa.

R. 76 £ 10 d.

CAPITULO XIV

Números complejos

216. Definición. — Se llaman *números complejos* a los números formados por unidades que no siguen la regla decimal.

Así, son números complejos:

3 años, 2 meses, 4 días, 8 horas, 15 minutos;

2 pies, 7 pulgadas:

7 £, 15 sh, 6 d; etc.

Operaciones con números complejos

217. Adición. — Para sumar números complejos se procede lo mismo que con los números decimales, sumando las unidades de cada orden, independientemente unas de otras. Si alguna suma contiene unidades del orden superior, se sacan para agregarlas al orden que corresponda.

Ejemplo. — Hallar la suma de 3 horas 15 minutos 50 segundos; 2 horas 50 minutos 45 segundos; 6 horas 25 minutos 38 segundos.

$$\begin{array}{r} 3 \text{ h } 15 \text{ m } 50 \text{ s} \\ + 2 \text{ h } 50 \text{ m } 45 \text{ s} \\ 6 \text{ h } 25 \text{ m } 38 \text{ s} \\ \hline 11 \text{ h } 90 \text{ m } 133 \text{ s} \end{array}$$

En 133 segundos hay 2 minutos, de manera que si sacamos 120 s, o sea 2 minutos, quedan 13 segundos, y sumándolos a 90 minutos resulta:

$$11 \text{ h } 92 \text{ m } 13 \text{ s}$$

Pero en 92 minutos hay una hora, de modo que al sacar los 60 minutos quedan 32 minutos, y las 11 horas se convierten en 12 horas, resultando:

12 h 32 m 13 s

que es la suma buscada.

Otros ejemplos:

4º 18' 38"	5 v 2 p 8 pulg.	4 £ 8 sh 7 d
12º 28' 42"	4 v 1 p 7 pulg.	5 £ 12 sh 10 d
7º 56' 16"	3 v 2 p 3 pulg.	6 £ 4 sh 9 d
23º 102' 96"	12 v 5 p 18 pulg.	15 £ 24 sh 26 d
24º 43' 36"	14 v 0 p 6 pulg.	16 £ 6 sh 2 d

218. Sustracción. — Para restar números complejos se procede de la misma manera que para restar números decimales.

Ejemplo: De 15 £ 6 sh 10 d, restar 3 £ 15 sh 11 d.

Tenemos:

15 £	6 sh	10 d
— 3	15	11

Notamos que de 6 no se puede restar 15, y que de 10 no se puede restar 11. Entonces a las 15 £ quitamos una y la convertimos en chelines y los sumamos a los 6 que tenemos, resultando:

14 £	26 sh	10 d
— 3	15	11

Ahora sacamos un chelín de los 26 y lo convertimos en peniques y los sumamos a los 10 que tenemos:

14 £	25 sh	22 d
— 3	15	11
11 £	10 sh	11 d

Otros ejemplos:

$$\begin{array}{r} 6\text{v } 0\text{p } 4\text{ pulg.} \\ \hline 2 \quad 2 \quad 9 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 6\text{v } 0\text{p } 4\text{ pulg.} \\ \hline 2 \quad 2 \quad 9 \end{array}} \right\} \text{ o sea: } \begin{array}{r} 5\text{v } 2\text{p } 16\text{ pulg.} \\ \hline 2 \quad 2 \quad 9 \\ \hline 3\text{v} \quad \quad 7\text{ pulg.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75^{\circ} \quad 24' \quad 16'' \\ \hline 43^{\circ} \quad 35' \quad 40'' \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 75^{\circ} \quad 24' \quad 16'' \\ \hline 43^{\circ} \quad 35' \quad 40'' \end{array}} \right\} \text{ o sea: } \begin{array}{r} 74^{\circ} \quad 83' \quad 76'' \\ \hline 43^{\circ} \quad 35' \quad 40'' \\ \hline 31^{\circ} \quad 48' \quad 36'' \end{array}$$

219. Multiplicación por un entero. — Para multiplicar un número complejo por un número entero, se multiplica sucesivamente el número entero por cada una de las unidades de los diversos órdenes.

Ejemplo: Sea multiplicar 2 d 6 h 26 m, por 5.

$$\begin{array}{r} 2 \text{ d} \quad 6 \text{ h} \quad 26 \text{ m} \\ \quad \quad \quad 5 \\ \hline 10 \text{ d} \quad 30 \text{ h} \quad 130 \text{ m} \\ \text{o sea:} \quad \quad \quad 11 \text{ d} \quad 8 \text{ h} \quad 10 \text{ m} \end{array}$$

Otros ejemplos:

$$5 \text{ v } 2 \text{ p } 8 \text{ pulg.} \times 3 = 15 \text{ v } 6 \text{ p } 24 \text{ pulg.} = 17 \text{ varas } 2 \text{ pies}$$

$$7^{\circ} 16' 14'' \times 8 = 56^{\circ} 128' 112'' = 58^{\circ} 9' 52''$$

$$4 \text{ £ } 15 \text{ sh } 10 \text{ d} \times 2 = 8 \text{ £ } 30 \text{ sh } 20 \text{ d} = 9 \text{ £ } 11 \text{ sh } 8 \text{ d}$$

Si hubiera que multiplicar dos números complejos, previamente se reducen a incomplejos de la especie inferior, y luego se multiplican como números enteros.

220. División por un entero. — Para dividir un número complejo por un número entero, se divide sucesivamente cada especie de unidad por el número entero dado.

Ejemplo: Dividir $45^{\circ} 35' 18''$ por 2.

45°	$35'$	$18''$	2
15			$27^{\circ} 47' 39''$
$1 \times 60 = 60'$			
	$95'$		
	15		
	$1 \times 60 = 60''$		
		$78''$	
		18	
		0	

Si el divisor fuese un número complejo, previamente se deduce a incomplejo de la especie inferior.

221. Reducción de un número complejo a incomplejo de la especie inferior. — Para reducir un número complejo a incomplejo de la especie inferior, se reducen las unidades superiores a las del orden inmediato inferior y se suman con las que haya de este orden, procediendo de la misma manera con las unidades siguientes.

Ejemplo: Reducir 4 v 2 p 5 pulg. a pulgadas.

Se tiene:

$$4 \text{ v} \times 3 = 12 \text{ p.} \quad ; \quad 12 + 2 = 14 \text{ p.}$$

$$14 \text{ p} \times 12 = 168 \text{ pulg.} \quad ; \quad 168 + 5 = 173 \text{ pulg.}$$

Otro ejemplo: Reducir 3 meses 2 semanas 4 días a días.

$$3 \text{ m} \times 30 = 90 \text{ d}$$

$$2 \text{ s} \times 7 = 14 \text{ d}$$

$$90 \text{ d} + 14 \text{ d} + 4 \text{ d} = 108 \text{ días.}$$

222. Reducción de un número complejo a incomplejo de la especie superior. — Para reducir un número

complejo a incomplejo de la especie superior, se convierte la especie inferior en la inmediata superior y se suma con las unidades que haya de esta especie, procediendo de la misma manera con las unidades siguientes:

Ejemplo: Reducir 6 £ 8 sh 6 d a libras esterlinas.

Se tiene:

$$6 \text{ d} : 12 \text{ d} = 0,5 \text{ sh} \quad ; \quad 0,5 + 8 = 8,5 \text{ sh.}$$

$$8,5 \text{ sh} : 20 \text{ sh} = 0,425 \text{ £} \quad ; \quad 0,425 + 6 = 6,425 \text{ £.}$$

Otro ejemplo: Reducir 4 v 1 pulg. a varas.

$$9 \text{ pulg.} : 12 \text{ pulg.} = 0,75 \text{ p.} \quad ; \quad 0,75 + 1 = 1,75 \text{ p.}$$

$$1,75 \text{ p.} : 3 \text{ p.} = 0,583 \text{ v} \quad ; \quad 0,583 + 4 = 4,583 \text{ varas.}$$

223. Reducción de un número incomplejo de la especie inferior a complejo. — Para reducir un número incomplejo de la especie inferior a complejo, se reduce el incomplejo a las unidades de la especie inmediata superior, reteniendo el resto, procediendo de la misma manera con las demás unidades.

Ejemplo: Reducir 211 pulgadas a número complejo.

Se tiene:

$$211 \text{ pulg.} : 12 \text{ pulg.} = 17 \text{ p } 7 \text{ pulg.}$$

$$17 \text{ p} : 3 \text{ p} = 5 \text{ v } 2 \text{ p.}$$

De manera que las 211 pulg. equivalen a 5 v 2 p 7 pulg.

Otro ejemplo: Reducir 575 peniques a número complejo.

$$575 \text{ d} : 12 \text{ d} = 47 \text{ sh } 11 \text{ d}$$

$$47 \text{ sh} : 20 \text{ sh} = 2 \text{ £ } 7 \text{ sh.}$$

Luego: 575 d equivalen a 2 £ 7 sh 11 d.

224. Reducción de un número incomplejo de la especie superior a complejo. — Para reducir un número incomplejo de la especie superior a complejo, se multiplica la parte decimal, con cero como parte entera, por el número de unidades de la especie inmediata inferior que valga una unidad del orden dado. La parte entera del producto es el número de unidades del orden inmediato inferior al dado. Si resulta parte decimal, se procede de manera análoga.

Ejemplo: Reducir 3,875 yardas a número complejo.

Se tiene:

$$0,875 \text{ y} \times 3 = 2,625 \text{ pies}$$

$$0,265 \text{ p} \times 12 = 3,18 \text{ pulg.}$$

$$0,18 \text{ pulg.} \times 8 = 1,44 \text{ octavos}$$

Las 3,875 yardas equivalen 3 y 2 p 3 pulg. 1,44 octavos.

Otro ejemplo: Reducir 5,796 días a número complejo.

$$0,796 \text{ d} \times 24 = 19,104 \text{ horas}$$

$$0,104 \text{ h} \times 60 = 6,24 \text{ minutos}$$

$$0,24 \text{ m} \times 60 = 14,4 \text{ segundos}$$

Luego: 5,796 días equivalen a 5 d 19 h 6 m 14 s.

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes sumas:

- 527 *bis.* $\begin{array}{r} 8 \text{ h } 45 \text{ m } 26 \text{ s} \\ 4 \quad 25 \quad 37 \\ 2 \quad 40 \quad 28 \\ \hline \end{array}$ R. 15 h 1 m 31 s.
528. $\begin{array}{r} 4^{\circ} 30' 15'' \\ 16 \quad 28 \quad 45 \\ 12 \quad 32 \quad 30 \\ \hline \end{array}$ R. 33° 31' 30''.
529. $\begin{array}{r} 4 \text{ £ } 8 \text{ sh } 3 \text{ d} \\ 12 \quad 7 \quad 2 \\ 6 \quad 14 \quad 9 \\ \hline \end{array}$ R. 23 £ 10 sh 2 d.
530. $\begin{array}{r} 4 \text{ h } 13 \text{ m } 46 \text{ s} \\ 2 \quad 18 \quad 12 \\ 3 \quad 12 \quad 22 \\ 5 \quad 23 \quad 9 \\ \hline \end{array}$ R. 15 h 7 m 29 s.
531. $\begin{array}{r} 14 \text{ h } 28 \text{ m } 15 \text{ s} \\ - 8 \quad 43 \quad 25 \\ \hline \end{array}$ R. 5 h 44 m 50 s.
532. $\begin{array}{r} 18^{\circ} 27' 36'' \\ - 10 \quad 40 \quad 45 \\ \hline \end{array}$ R. 7° 46' 51''.
533. $\begin{array}{r} 20 \text{ £ } 12 \text{ sh } 8 \text{ d} \\ - 14 \quad 17 \quad 9 \\ \hline \end{array}$ R. 5 £ 14 sh 11 d.
534. $\begin{array}{r} 90^{\circ} 0' 0'' \\ - 38 \quad 17 \quad 25 \\ \hline \end{array}$ R. 51° 42' 35''.

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

535. $20^{\circ} 18' 25'' \times 7$ R. $142^{\circ} 8' 35''$.
536. $4 \text{ h } 25 \text{ m } 30 \text{ s} \times 3$ „ $13 \text{ h } 16 \text{ m } 30 \text{ s}$
537. $3 \text{ £ } 12 \text{ sh } 8 \text{ d} \times 5$ „ $18 \text{ £ } 3 \text{ sh } 4 \text{ d}$
538. $12 \text{ y } 2 \text{ p } 8 \text{ pulg.} \times 12$ „ $154 \text{ y } 2 \text{ p.}$

Efectuar las siguientes divisiones:

539.	$165^{\circ} 28' 46'' : 14$	R.	$11^{\circ} 49' 11''$.
540.	$159^{\circ} : 13$	„	$12^{\circ} 13' 50''$, 76.
541.	$820 \text{ y } 2 \text{ p } 9 \text{ pulg.} : 112$	„	$7 \text{ y } 0 \text{ p } 11 \text{ pulg.}$
542.	$47 \text{ p. } 3 \text{ pulg.} : \frac{5}{3}$	„	$28 \text{ p } 4,2 \text{ pulg.}$

Reducir los siguientes números complejos a incomplejos de la especie inferior:

543.	$5 \text{ y } 2 \text{ p } 7 \text{ pulg.}$	R.	211 pulg.
544.	$7 \text{ y } 2 \text{ p } 10 \text{ pulg.}$	„	286 pulg.
545.	$2 \text{ £ } 8 \text{ sh } 6 \text{ d}$	„	582 d.
546.	$5^{\circ} 12' 20''$	„	$18.740''$.

Reducir los siguientes números complejos a incomplejos de la especie superior:

547.	$5 \text{ d } 3 \text{ h } 20 \text{ m}$	R.	$5,138 \text{ d.}$
548.	$4 \text{ y } 1 \text{ p } 5 \text{ pulg.}$	„	$4,472 \text{ y.}$
549.	$20^{\circ} 30' 30''$	„	$20^{\circ} 508.$
550.	$4 \text{ £ } 8 \text{ sh } 2 \text{ d}$	„	$4,408 \text{ £.}$

Reducir los siguientes números incomplejos a complejos:

551.	$3.140''$	R.	$52' 2''$.
552.	536 pulg.	„	$14 \text{ y } 2 \text{ p } 8 \text{ pulg.}$
553.	7.345 d	„	$3 \text{ £ } 12 \text{ sh } 1 \text{ d.}$
554.	14.650 horas.	„	$1 \text{ año } 7 \text{ m } 27 \text{ d } 22 \text{ h.}$
555.	$8^{\circ} 45$	„	$8^{\circ} 27'.$
556.	$1,342 \text{ £}$	„	$1 \text{ £ } 6 \text{ sh } 10,08 \text{ d.}$
557.	$7,35 \text{ horas.}$	„	$7 \text{ h } 21 \text{ m.}$
558.	$3,64 \text{ yardas}$	„	$3 \text{ y } 1 \text{ p } 11 \text{ pulg.}$

559. Se han comprado 50 galones norteamericanos de vino en 200 \$. ¿Cuánto vale el litro de ese vino?

R. 1,05 \$.

560. Si un tren marcha a razón de 48 millas por hora, ¿qué tiempo empleará en recorrer 450 km?

R. 5 h. 41 m.

561. Se han unido dos ejes que miden 2 yardas, 2 pies y 3 pulgadas, 4 yardas, 1 pie y 9 pulgadas. ¿Cuántos metros miden en conjunto?

R. 6,703 m.

562. Reducir 5 yardas, 2 pies, 7 pulgadas a pulgadas.

R. 211 pulg.

563. Reducir 496 pulgadas a pies y yardas.

R. 13 y. 2 p. 4 pulg.

CAPITULO XV

Ecuaciones

225. Igualdad. — Se llama *igualdad*, a la expresión que resulta al unir con el signo igual a dos expresiones de igual valor, aunque de distinta forma.

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 8 + 4 = 3 \times 7 - 9 \\ \underbrace{\quad\quad}_{12} \qquad \underbrace{\quad\quad}_{12} \\ 2 + 7 - 4 = 10 - 2 \times 4 + 3 \\ \underbrace{\quad\quad}_{5} \qquad \underbrace{\quad\quad}_{5} \end{array}$$

Primer miembro es la parte que está a la izquierda del signo igual, y *segundo miembro* la parte que está a la derecha. Cada número separado de otro por los signos $+$ o $-$ se llama *término*.

226. Ecuación. — Se llama *ecuación*, a la igualdad en la que se desconoce el valor de algunos de los números que en ella figuran.

Esos números desconocidos se llaman *incógnitas*, y se representan con las letras x , y , z , y sus valores respectivos son las *raíces de la ecuación*.

Nosotros veremos sólo las ecuaciones con una incógnita.

Ejemplos:

$$\begin{array}{rcl} 3x - 2 = 2x + 3 & ; & x = 5 \\ 4 + x = 7 & ; & x = 3 \\ 3x^2 = 12 & ; & x = 2 \end{array}$$

Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita, lo que se consigue mediante ciertas *transformaciones* cuyo objeto es aislar la incógnita en el primer miembro, dejando en el segundo miembro todos los datos. Esas transformaciones se fundan en las propiedades siguientes.

Propiedades de las ecuaciones

227. I. — *Si a ambos miembros de una ecuación se suma un mismo número, el valor de la incógnita no varía.*

Sea la ecuación: $2x + 6 = 4x - 2$; $x = 4$.

Sumando a ambos miembros un mismo número 3, por ejemplo, resulta:

$$2x + 6 + 3 = 4x - 2 + 3$$

o sea: $2x + 9 = 4x + 1$

en donde se comprueba que $x = 3$.

228. II. — *Si a ambos miembros de una ecuación se resta un mismo número, el valor de la incógnita no varía.*

Sea la ecuación: $4x + 8 = 7x + 5$; $x = 1$

Resultando a ambos miembros un mismo número 4, por ejemplo, resulta:

$$4x + 8 - 4 = 7x + 5 - 4$$

o sea: $4x + 4 = 7x + 1$

en donde se comprueba que $x = 1$.

229. III. — *Si a ambos miembros de una ecuación se multiplican por un mismo número, distinto de cero, el valor de la incógnita no varía.*

Sea la ecuación: $2x = 8$; $x = 4$.

Multiplicando ambos miembros por 3, por ejemplo, resulta:

$$2x \times 3 = 8 \times 3$$

o sea: $6x = 24$

en donde $x = 4$.

230. IV. — *Si a ambos miembros de una ecuación se dividen por un mismo número, distinto de cero, el valor de la incógnita no varía.*

Sea la ecuación: $8x = 4$; $x = 0,5$.

Dividiendo ambos miembros por 2, por ejemplo, resulta:

$$\frac{8x}{2} = \frac{4}{2}$$

o sea: $4x = 2$

en donde se comprueba que $x = 0,5$.

231. Consecuencias. — 1ª) De las propiedades I y II se deduce que:

Si un número está en un miembro como sumando (o como sustraendo), puede pasar al otro miembro como sustraendo (o como sumando).

Así, en la ecuación:

$$3x - 2 = 4$$

el número 2 que está restando puede pasar al otro miembro sumando:

$$3x = 4 + 2$$

pues hacer eso equivale a sumar 2 a ambos miembros.

En la ecuación: $x + 3 = 5$

el número 3 que está sumando en el primer miembro, puede pasar restando al segundo miembro:

$$x = 5 - 3$$

pues eso equivale a restar 3 a ambos miembros.

2ª) De la propiedad III se deduce que: *Para suprimir un denominador en una ecuación, basta multiplicar todos los términos, menos el suyo, por dicho número.*

Así, en la ecuación:

$$x + 3 = \frac{x}{2} + x$$

para suprimir el 2 basta multiplicar todos los términos, menos $\frac{x}{2}$ por 2:

$$2x + 6 = x + 2x$$

3ª) De la propiedad IV se deduce que: *Si un número está como factor en un miembro, puede pasar como divisor del otro miembro.*

En la ecuación: $3x = 15$

el 3 que está como factor en el primer miembro, puede pasar como divisor del segundo miembro, quedando:

$$x = \frac{15}{3}$$

232. Regla práctica para resolver una ecuación. — Para resolver una ecuación se procede así:

1º *Se suprimen los denominadores, para lo cual se multiplica cada término de la ecuación por el denominador que se suprime;*

2º *Los términos que contengan incógnitos se pasan al primer miembro y los datos al segundo miembro, haciendo una operación contraria;*

3º *Se efectúan las operaciones indicadas en cada miembro;*

4º *El número que esté multiplicando a la incógnita se pasa como divisor del segundo miembro, resultando así el valor de la incógnita. X*

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$\frac{x}{2} + x - 4 = \frac{x}{5} + 9$$

1º *Supresión de denominadores.* Para suprimir el denominador 2 se multiplica todo por 2, menos el numerador suyo:

$$x + 2x - 8 = \frac{2x}{5} + 18$$

Para suprimir el denominador 5 se multiplica todo por 5, menos el numerador suyo:

$$5x + 10x - 40 = 2x + 90.$$

2º *Trasposición de términos.* — El término $2x$ que está como sumando en el segundo miembro, se lleva al primero como sustraendo:

$$5x + 10x - 2x - 40 = 90$$

y el término 40 que está como sustraendo, se lleva al segundo miembro como sumando:

$$5x + 10x - 2x = 90 + 40.$$

3º *Se efectúan las operaciones indicadas.* — En el primer miembro se tiene:

$$5x + 10x = 15x \quad ; \quad 15x - 2x = 13x.$$

En el segundo miembro se tiene:

$$90 + 40 = 130,$$

luego:

$$13x = 130.$$

4º *Valor de la incógnita.* — El número 13 que está multiplicando, se pasa como divisor del segundo miembro:

$$x = \frac{130}{13}$$

de donde:

$x = 10$

233. Aplicaciones. — I. *Hallar un número que multiplicado por 3 y sumado el producto a 8, el resultado sea igual a 20.*

Solución:

Sea x el número. Entonces el producto por 3 es $3x$, y sumando este producto a 8, se tiene $3x + 8$, y como la suma es 20, resulta la ecuación:

$$3x + 8 = 20.$$

Resolvámosla: trasponiendo el 8, resulta:

$$3x = 20 - 8$$

o sea:

$$3x = 12$$

y pasando el 3 como divisor:

$$x = \frac{12}{3} = 4$$

El número buscado es 4. En efecto, multiplicado por 3 da 12, y sumado con 8 da 20.

II. *Un depósito tiene 3 canillas. Una lo desagota en 3 horas, otra en 4 horas, y la última en 6 horas. Las tres canillas juntas, ¿en qué tiempo desagotarán el depósito?*

Solución:

Sea x el número de horas necesario para desagotar el depósito.

La primera canilla lo vacía en 3 horas, luego en una hora vaciará $\frac{1}{3}$ del depósito, y en x horas variará $\frac{x}{3}$.

De la misma manera la segunda canilla vaciará $\frac{x}{4}$, y la tercera $\frac{x}{6}$. Las tres canillas juntas desagotan tanto como

$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6}$, y como hemos supuesto que el depósito es la unidad, resulta:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 1$$

El *m.c.m.* de los denominadores es 12, luego:

$$\frac{4x}{12} + \frac{3x}{12} + \frac{2x}{12} = 1$$

multiplicando todo por 12:

$$4x + 3x + 2x = 12$$

$$9x = 12$$

$$x = \frac{12}{9} = 1 \text{ h } 20 \text{ m}$$

Las 3 canillas juntas tardan 1 hora 20 minutos.

III. *Calcular la longitud de una correa que une a dos poleas de 90 cm. y 25 cm. de diámetro, sabiendo que la distancia entre los ejes es de 2,80 m.*

Solución:

La fórmula que da la longitud de la correa es:

$$l = 2d + \pi(R + r) + 0,06m$$

en donde se tiene que:

$$d = 2,8m ; R = 0,9m ; r = 0,25m ; \pi = 3,14$$

luego:

$$l = 2 + 2,8 + 3,14 (0,9 + 0,25) + 0,06$$

y calculando:

$$l = 5,6 + 3,14 \times 1,15 + 0,06$$

$$l = 5,6 + 3,61 + 0,06$$

$$l = 9,27m.$$

La correa debe medir 0,27 m.

IV. *Calcular la altura que debe tener un depósito cilíndrico de 30 cm. de diámetro, para que pueda contener 50 litros.*

Solución:

El volumen de un cilindro está dado por la fórmula:

$$V = \pi R^2 h$$

en donde tenemos que:

$V = 50$ litros (dm^3) ; $R = 1,5 dm.$; $R = x$,
entonces:

$$50 = 3,1416 \times 1,5^2 \times h$$

o sea: $50 = 3,1416 \times 2,25 \times h$

y calculando: $50 = 7,068 \times h$

y pasando 7,068 como divisor, queda:

$$h = \frac{50}{7,068} = 7,07 \text{ dm}$$

Debe tener 0,707 m de altura.

V. *La resistencia eléctrica de un conductor está dada por la fórmula:*

$$R = \frac{\rho \times l}{s}$$

Calcular la resistencia que ofrece al paso de la corriente un conductor de cobre, de 85 m de largo y 2 mm² de sección. Para el cobre $\rho = 0,018$ ().*

Solución:

Tenemos: $l = 85 \text{ m}$; $s = 2 \text{ mm}^2$, luego, reemplazando estos datos en la fórmula, resulta:

$$R = \frac{0,018 \times 85}{2}$$

y calculando, resulta:

$$R = 0,765$$

La resistencia es de 0,765 omios.

VI. *El área de un trapecio mide 3 m². La base menor mide 3,20 m y la altura 0,60 m. Calcular la longitud de la base mayor.*

(*) ρ Es una letra griega que se pronuncia ró.

Solución:

La fórmula de la superficie del trapecio es:

$$S = \frac{B+b}{2} \times h$$

en donde sabemos que:

$$S = 3 \text{ m}^2 ; b = 3,2 \text{ m} ; h = 0,6 \text{ m} ; B = x,$$

luego, reemplazando estos valores en la fórmula, resulta:

$$3 = \frac{B + 3,2}{2} \times 0,6$$

Pasando 0,6 como divisor:

$$\frac{3}{0,6} = \frac{B + 3,2}{2}$$

pasando 2 como factor:

$$\frac{3 \times 2}{0,6} = B + 3,2$$

pasando 3,2 como sustraendo:

$$\frac{3 \times 2}{0,6} - 3,2 = B$$

y efectuando los cálculos, se obtiene:

$$B = 6,80 \text{ m.}$$

La base mayor mide 6,80 m.

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones:

564. $x + 42 = 12$ R. $x = 8$
 565. $x - 6 = 9$ „ $x = 15$
 566. $2x + 3 = x + 8$ „ $x = 5$
 567. $5x + 50 = 4x + 56$ „ $x = 6$
 568. $16x - 11 = 7x + 70$ „ $x = 9$
 569. $13x - 2(3x - 5) = 59$ „ $x = 7$
 570. $2x + 5 = 17 - x$ „ $x = 4$
 X 571. $\frac{3x}{2} + 5 = x$ „ $x = 10$
 X 572. $\frac{x}{2} = \frac{x}{5} + 3$ „ $x = 10$
 573. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11$ „ $x = 6$
 574. $\frac{x}{2} + 1 = \frac{2x}{4} + 3$ „ Ecuación absurda
 575. $\frac{3x}{4} + 5 = \frac{5x}{6} + 2$ „ $x = 36$
 576. $(x + 5)^2 - 140 = (x - 9)^2$ „ $x = 7$
 577. $\frac{3x}{8} - \frac{0,25x}{0,4} + 3,642 - \frac{x}{0,8} + 0,01 = 0$ R. $x = 2,43466\dots$
 X 578. $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + 20 = x$ „ $x = 80$
 579. $x - \frac{8x}{9} = \frac{100}{3}$ „ $x = 300$
 X 580. $\frac{5x - 5}{x + 1} = 3$ „ $x = 4$
 581. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + x} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + x}$ R. $x = \frac{2}{3}$

582. — El duplo de un número disminuído en 5 es igual al mismo número aumentado en 7. Hallar el número.

R. 12.

583. — Un padre tiene 35 años y su hijo tiene 3. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será cinco veces la del hijo?

R. 5.

584. — Se ha cortado de una barra de hierro trozos iguales a la tercera, cuarta y sexta parte de su longitud, y aún quedan 20 cm. Calcular la longitud de la barra.

R. 80 cm.

585. — Hallar cinco números consecutivos cuya suma sea 150.

R. 28, 29, 30, 31 y 32.

586. — Hallar un número que disminuído en sus $\frac{2}{3}$, la diferencia sea igual al quinto del mismo número aumentado en 2.

R. 15.

587. — El cociente de dos números es 4 y el resto de su división es 2. Calcular esos dos números, sabiendo que su diferencia es 38.

R. 50 y 12.

588. — Un ciclista sale a las 6 de la mañana con intención de volver al mediodía. Irá a 15 km por hora, descansará una hora y regresará en el tren, cuya velocidad es de 50 km por hora. ¿A qué distancia máxima podrá alejarse?

R. 57 km y 692 m.

589. — Repartir 100 \$ entre 3 personas de modo que la 2ª tenga 10 \$ más que la 1ª, y que la 3ª tenga 20 \$ más que la 2ª.

R. 20, 30 y 50 \$.

590. — Dividir el número 45 en dos partes tales que una sea duplo de la otra.

R. 15 y 30.

591. — Se tienen 5 horas para pasear en bote en un río. Yendo río abajo, la velocidad del bote es de 6 km por hora, y río arriba de 4 km por hora. ¿Cuál es la distancia máxima que podrá recorrerse en el bote?

R. 12 km.

592. -- La superficie de un triángulo es de 24 m^2 , y la altura mide 7 m. Calcular la base.

R. 6,857 m.

593. -- La superficie de un triángulo mide $28,2750 \text{ m}^2$ y la base 6,50 m. Calcular la altura.

R. 4,35 m.

594. -- ¿Qué altura debe tener un depósito que mide 35 cm de altura y 58 cm de alto para que contenga 180 litros?

R. 88,6 cm.

595. -- Una zanja mide 60 cm de ancho y 1,30 m de profundidad. ¿Qué largo deberá tener para que tenga un volumen de 32 m^3 ?

R. 41,03 m.

596. -- Un caño cilíndrico mide de largo 3,50 m y tiene una capacidad de 17,605 litros. Calcular el diámetro.

R. 8 cm.

597. -- La fórmula:
$$L = \frac{9l + 90}{8}$$

expresa el ancho L de una polea en relación con el ancho l de la correa. Calcular el ancho de la correa para una polea de 80 mm de llanta.

R. 61 mm.

598. -- La fórmula:
$$e = \frac{2l + h}{48}$$

expresa el espesor e de una pared, conociendo la longitud l de la misma y su altura h . Calcular la altura que debe tener una pared de 45 cm de espesor y 7 m de largo.

R. 7,60 m.

599. -- Calcular, utilizando la fórmula anterior, la longitud de una pared de 8 m de altura y 50 cm de espesor.

R. 8 m.

600. -- La fórmula:
$$e = \frac{P \times d}{2R}$$

expresa el espesor e en cm de los cilindros sometidos a presiones débiles, siendo P la presión en kg por cm^2 , d el diámetro interior en cm y R el coeficiente de resistencia por centímetro cuadrado. Calcular el diámetro interior que deberá tener un cilindro de fundición, de 2 cm de espesor, sometido a una presión de 100 kg por cm^2 , con un coeficiente de resistencia de 500 kg.

R. 20 cm.

601. -- Calcular, utilizando la fórmula anterior, el coeficiente de resistencia de un cilindro de 16 cm de diámetro interior, 1 cm de espesor y una presión de 85 kg por cm².

R. 688 kg.

602. — La fórmula:
$$e = \frac{P \times d}{2R - P}$$

expresa el espesor e en cm de los cilindros sometidos a presiones fuertes, siendo P la presión en kg por cm², d el diámetro interior en cm, y R el coeficiente de resistencia. Calcular el coeficiente de resistencia de un cilindro de acero fundido de un martillo-filón, sometido a una presión de 300 kg por cm², de 90 cm de diámetro interior y 18 cm de espesor.

R. 900 kg.

603. — Calcular, utilizando la fórmula anterior, la presión que puede soportar un cilindro de 30 cm de diámetro interior, 8 cm de espesor y un coeficiente de resistencia de 500 kg por cm².

R. 210,5 kg.

CAPITULO XVI

Razones y Proporciones

234. Razón. — Se llama razón de dos números, al cociente exacto de dividir el uno por el otro. El primero se llama *antecedente*, y *consecuente* el segundo.

Así, la razón de 15 y 5 es 3, pues:

$$15 : 5 = 3$$

15 es el antecedente y 5 el consecuente.

235. Proporción. — Se llama *proporción*, a la igualdad de dos razones. Los antecedentes y consecuentes de las dos razones son los antecedentes y consecuentes de la proporción.

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} \text{Si: } \frac{20}{4} = 5 \\ \text{y } \frac{35}{7} = 5 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{20}{4} = 5 \\ \frac{35}{7} = 5 \end{array}} \right\} \text{ se obtiene la proporción: } \frac{20}{4} = \frac{35}{7}$$

La proporción anterior se lee así: *20 es a 4, como 35 es a 7.*

Los números 20 y 35 son los antecedentes; 4 y 7 son los consecuentes; los cuatro números son los *términos* de la proporción. El primero y el último términos, 20 y 7, son los *extremos*; el segundo y el tercero, 4 y 35, son los *medios*. El último término, 7, se llama *cuarto proporcional* entre los números 20, 4 y 35.

También suele escribirse la proporción anterior así:

$$20 : 4 :: 35 : 7$$

aunque no se usa mucho ni es recomendable esa manera.

Haremos notar que una proporción, es una igualdad entre dos fracciones, a la que se le da aquel nombre especial.

236. Proporción continua.—Se llama *proporción continua* a aquella en que los medios son iguales.

Ejemplos:

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8} \quad ; \quad \frac{27}{9} = \frac{9}{3}$$

En una proporción continua, el medio se llama *medio proporcional* o *medio geométrico*, y un extremo se llama *tercero proporcional*.

En la proporción continua

$$\frac{72}{12} = \frac{12}{2}$$

el medio 12 es el medio geométrico entre 72 y 2; y el 2 es el tercero proporcional entre 72 y 12.

Propiedades de las proporciones

237. I. Propiedad fundamental.—*En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

En la proporción $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ se tiene:

$$8 \times 5 = 4 \times 10.$$

238. II. *Si el producto de dos números es igual al de otros dos, con los cuatro números se puede formar una proporción, siendo extremos los dos factores de un producto, y medios los dos factores del otro producto.*

Si $3 \times 6 = 2 \times 9$, se tiene la proporción:

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$$

239. III. *En una proporción continua el producto de los extremos es igual al cuadrado del medio proporcional.*

En la proporción: $\frac{3}{9} = \frac{9}{27}$ se tiene:

$$3 \times 27 = 9^2$$

240. IV. Cálculo de un extremo desconocido en una proporción. — *Un extremo de una proporción es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.*

En la proporción: $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ se tiene que:

$$12 = \frac{6 \times 10}{5}$$

Ejemplo: Calcular x en la proporción $\frac{12}{5} = \frac{8}{x}$

Se tiene: $x = \frac{5 \times 8}{12} = 3,33$

241. V. Cálculo de un medio desconocido en una proporción. — *Un medio de una proporción es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio.*

En la proporción $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ se tiene que:

$$10 = \frac{5 \times 12}{6}$$

Ejemplo: Calcular x en la proporción $\frac{6}{8} = \frac{x}{3}$

Se tiene: $x = \frac{6 \times 3}{8} = 2,25$

242. VI. *En una proporción continua el medio proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.*

En la proporción $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$ se tiene que:

$$4 = \sqrt{8 \times 2}$$

Ejemplo: Calcular x en la proporción $\frac{3}{x} = \frac{x}{27}$

Se tiene: $x = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$

243. VII. *En una proporción se pueden cambiar los medios o los extremos entre sí.*

En la proporción $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ se pueden cambiar los medios, resultando:

$$\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$$

o bien cambiar los extremos, obteniéndose:

$$\frac{12}{4} = \frac{9}{3}$$

Cambiar los medios o extremos de una proporción es *alternar* la proporción.

244. VIII. *En una proporción se puede cambiar cada antecedente con su propio consecuente.*

En la proporción $\frac{10}{3} = \frac{50}{15}$ pueden pasar los antecedentes a ser consecuentes, y viceversa, resultando:

$$\frac{3}{10} = \frac{15}{50}$$

Cambiar antecedente con consecuente en una proporción es *invertir* la proporción.

245. IX. *En toda proporción se puede sumar a los antecedentes los respectivos consecuentes, subsistiendo la proporción.*

Si en la proporción $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

sumamos al 8 su consecuente 6, y al 4 su consecuente 3, resulta:

$$\frac{8+6}{6} = \frac{4+3}{3}$$

o sea $\frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

que es una proporción, pues $14 \times 3 = 6 \times 7$.

246. Aplicación. — La distancia entre dos ejes paralelos es de 24 cm. Calcular los diámetros que deben tener los engranajes que vayan en cada eje, sabiendo que el eje *O* debe dar 50 vueltas mientras el *O'* da 70, fig. 23.

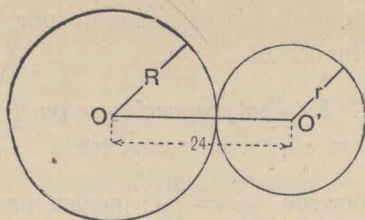


Fig. 23

Solución:

Si los radios son R y r se debe tener:

$$\frac{70}{50} = \frac{R}{r}$$

y por la propiedad última:

$$\frac{70 + 50}{50} = \frac{R + r}{r}$$

pero $R + r = 24 \text{ cm}$, luego:

$$\frac{120}{50} = \frac{24}{r}$$

de donde:
$$r = \frac{24 \times 50}{120} = 10 \text{ cm}$$

Como la suma de los radios es 24 cm y uno mide 10 cm el radio R mide 14 cm .

Los engranajes deben tener 20 cm y 28 cm de diámetro.

247. X. En toda proporción se puede restar a los antecedentes los respectivos consecuentes, subsistiendo la proporción.

Si en la proporción
$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

restamos al 8 su consecuente 6, y al 4 su consecuente 3, resulta:

$$\frac{8-6}{6} = \frac{4-3}{3}$$

o sea:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

que es una proporción, pues: $2 \times 3 = 1 \times 6$.

248. XI. *Si se multiplican las primeras razones y las segundas razones de dos proporciones, resulta una nueva proporción.*

Si se tienen las proporciones:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

y se multiplican ordenadamente, resulta:

$$\frac{2}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{3}{6} \times \frac{1}{3}$$

o sea:

$$\frac{4}{24} = \frac{3}{18}$$

que es una proporción, pues:

$$4 \times 18 = 72$$

$$3 \times 24 = 72$$

249. *Las siete proporciones deducidas de otra. — De la proporción:*

1^a

$$\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

resultan :

$$2^a \quad \frac{10}{5} = \frac{4}{2} \quad \text{obtenida cambiando los medios en la } 1^a;$$

$$3^a \quad \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad \text{,,} \quad \text{invirtiendo la } 1^a;$$

$$4^a \quad \frac{5}{10} = \frac{2}{4} \quad \text{,,} \quad \text{invirtiendo la } 2^a;$$

$$5^a \quad \frac{4}{2} = \frac{10}{5} \quad \text{,,} \quad \text{cambiando los medios en la } 3^a;$$

$$6^a \quad \frac{5}{2} = \frac{10}{4} \quad \text{,,} \quad \text{cambiando los medios en la } 4^a;$$

$$7^a \quad \frac{2}{5} = \frac{4}{10} \quad \text{,,} \quad \text{invirtiendo la } 6^a;$$

$$8^a \quad \frac{2}{4} = \frac{5}{10} \quad \text{,,} \quad \text{cambiando los medios en la } 7^a.$$

En cada una de estas ocho proporciones se verifica la propiedad fundamental:

$$10 \times 2 = 5 \times 4.$$

250. Serie de razones iguales. — Si tres o más razones son tales que la primera es igual a la segunda, ésta es igual a la tercera, etc., se dice que las razones dadas constituyen una *serie de razones iguales*.

Ejemplo:

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{20}{15} = \frac{16}{12}$$

Nótese que dos a dos esas razones forman una proporción.

251. Propiedad fundamental. — *En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes y la suma de los consecuentes forma proporción con cualquier razón de la serie.*

En la serie de razones:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

se tiene:

$$\frac{1 + 2 + 3}{2 + 4 + 6} = \frac{1}{2}$$

o sea:

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

que es una proporción, pues: $6 \times 2 = 12 \times 1$.

252. Aplicaciones. — Las proporciones se aplican en la resolución de problemas de regla de tres, interés, repartición proporcional, etc., así como en muchos problemas técnicos, de los cuales resolveremos en el Capítulo XX los más interesantes.

EJERCICIOS

Resolver las siguientes proporciones:

+ 604. $\frac{12}{15} = \frac{28}{x}$

R. $x = 35$

+ 605. $\frac{6}{9} = \frac{x}{21}$

„ $x = 14$

- 606. $\frac{x}{85} = \frac{10}{17}$

„ $x = 50$

- 607. $\frac{24}{x} = \frac{15}{40}$

„ $x = 64$

- 608. $\frac{18}{94} = \frac{2}{x}$

„ $x = 10.44$

609.	$\frac{x}{15} = \frac{10}{21}$	„ $x = 7,14$
610.	$\frac{15}{5} = \frac{x}{75}$	„ $x = 225$
611.	$\frac{21}{x} = \frac{100}{10}$	„ $x = 2,1$
612.	$\frac{5}{x} = \frac{x}{180}$	„ $x = 30$
613.	$\frac{4}{x} = \frac{x}{36}$	R. $x = 12$
614.	$\frac{12}{x} = \frac{x}{27}$	„ $x = 18$
615.	$\frac{27}{x} = \frac{x}{3}$	„ $x = 9$
616.	$\frac{36}{x} = \frac{x}{16}$	„ $x = 24$
617.	$\frac{3+x}{x} = \frac{14}{8}$	„ $x = 4$
618.	$\frac{8-x}{x} = \frac{1}{3}$	„ $x = 6$
619.	$\frac{12}{9} = \frac{x}{7-x}$	„ $x = 4$
620.	$\frac{6}{14} = \frac{x}{x+4}$	„ $x = 3$
621.	$\frac{5,35}{x} = \frac{0,75}{2,65}$	„ $x = 18,903$

622. La suma de los cuatro antecedentes de una serie de razones iguales es 15, y la de los consecuentes es 45. Calcular los antecedentes sabiendo que los consecuentes son 9, 15, 18 y 3.

R. 3, 5, 6 y 1.

CAPITULO XVII

Magnitudes proporcionales

252. Magnitudes directamente proporcionales. — Dos magnitudes son *directamente proporcionales*, cuando la razón de dos valores cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los valores correspondientes de la otra.

Ejemplos: Son magnitudes proporcionales el *precio* de una mercadería que se vende al Kilogramo y su *peso*; el *precio* de una mercadería que se vende al metro y su *longitud*; el *salario* de un obrero y la *duración* del trabajo; el *espacio* recorrido por un móvil con movimiento uniforme y el *tiempo* empleado; el *área* de un triángulo y su *altura*; el *volumen* de un cilindro y su *altura*; la *longitud* de una circunferencia y su *diámetro*; los *ángulos* y los *arcos* de circunferencia; etc.

En algunos casos la proporcionalidad es una convención establecida por la observación; tal el *interés* de un capital y el *tiempo* que se lo tiene en un negocio.

253. Magnitudes inversamente proporcionales. — Dos magnitudes son *inversamente proporcionales*, cuando la razón de dos valores cualesquiera de una de ellas es igual a la inversa de la razón de los valores correspondientes de la otra.

Ejemplos: Son magnitudes inversamente proporcionales el *tiempo* necesario para hacer un trabajo y el *número* de obreros necesarios; los *volúmenes* ocupados por un gas

y las presiones que sufre; el *número* de vuelta de dos poleas unidas por una correa y los *diámetros* respectivos, etc.

254. Magnitud proporcional a varias otras. — Una magnitud es *directa* o *inversamente proporcional a varias otras*, cuando es directa o inversamente proporcional con cada una de estas otras.

Ejemplo: El *interés* que produce un capital es directamente proporcional al valor del *capital* y al *tiempo* de imposición.

Regla de tres simple y compuesta

255. Reglas de tres. — Se llama *regla de tres* al procedimiento aritmético para resolver los problemas que dependen de una o varias proporciones

Si el problema se resuelve con una proporción, la regla de tres es *simple*, y *compuesta* cuando depende de varias proporciones.

La regla de tres es *directa*, cuando las magnitudes que intervienen en el problema son *directamente proporcionales*; es *inversa*, cuando las magnitudes son *inversamente proporcionales*.

256. Regla de tres simple directa. — PROBLEMA. — Si 12 m de tela han costado 72 \$, ¿cuánto costarán 8 m de la misma tela?

Solución:

En el problema se advierte un caso completo: que 12 m costaron 72 \$, y es lo que se llama *supuesto*; también se

nota que en el otro caso: 8 m costarán x \$, se desconoce una cantidad, y es lo que se llama *pregunta*. Como *mayor cantidad de tela costará mayor cantidad de pesos*, las magnitudes son directamente proporcionales, luego:

$$\begin{array}{l} \text{supuesto: } 12m \dots 72 \$ \\ \text{pregunta: } 8m \dots x \$ \end{array} \left\{ \right.$$

$$\therefore \frac{12m}{8m} = \frac{72 \$}{x \$} \quad \therefore x \$ = 72 \$ \cdot \frac{8m}{12m} = 48 \$$$

Luego: Para resolver un problema de regla de tres simple directa, se forma una proporción cuyos antecedentes son los datos del supuesto, y los consecuentes los datos de la pregunta en el mismo orden.

257. Regla de tres simple inversa. — PROBLEMA. — Si 9 obreros hacen una obra en 20 días, ¿cuántos días tardarán 12 obreros?

Solución:

Notamos que las magnitudes dadas son inversamente proporcionales, pues *más obreros tardarán menos días*, luego:

$$\begin{array}{l} \text{supuesto: } 9 \text{ ob. } \dots 20 \text{ d. } \\ \text{pregunta: } 12 \text{ ob. } \dots x \text{ d} \end{array} \left\{ \right.$$

$$\therefore \frac{9 \text{ ob.}}{12 \text{ ob.}} = \frac{x \text{ d}}{20 \text{ d}} \quad \therefore x \text{ d} = 20 \text{ d.} \cdot \frac{9 \text{ ob.}}{12 \text{ ob.}} = 15 \text{ d}$$

Luego: Para resolver un problema de regla de tres simple inversa, se forma una proporción como en el caso directo, pero invirtiendo la segunda razón.

258. Regla de tres compuesta. — Si un problema es de regla de tres compuesta, se descompone en varios problemas de reglas de tres simples, suponiendo, en cada problema, constantes todas las condiciones menos una.

PROBLEMA. — Si 15 obreros necesitan 8 días para levantar una pared de 40 m de largo, 3 m de alto y 0,45 m de espesor, ¿cuántos días necesitarán 20 obreros para levantar una pared de 54 m de largo, 2,50 m de alto y 0,30 m de espesor?

Planteo:

15 ob. 40m largo 3m alto .. 0,45m esp..... 8d.
 20 ob. 54m largo 2,50 ,, ... 0,30m esp..... xd .

Solución:

Consideremos los obreros y los días: Si 15 obreros hacen una pared en 8 días, cuánto tardarán 20 obreros?

inversa:

$$\left. \begin{array}{l} 15 \text{ ob.} \dots 8d \\ 20 \text{ ob.} \dots xd \end{array} \right\} \therefore \frac{15 \text{ ob.}}{20 \text{ ob.}} = \frac{xd}{8d} \therefore x = \frac{15 \times 8}{20} = 6 \text{ días}$$

Consideremos el largo y los días: Si una pared de 40 m de largo se hace en 6 días, ¿en qué tiempo se hará una pared de 54 m?

directa:

$$\left. \begin{array}{l} 40m \dots 6d \\ 54m \dots xd \end{array} \right\} \therefore \frac{40m}{54m} = \frac{6d}{xd} \therefore x = \frac{54 \times 6}{40} = 8,1 \text{ días}$$

Si una pared de 3 m de alto se hace en 8,1 días, en qué tiempo se haría si tuviese 2,50 de alto?

directa:

$$\left. \begin{array}{l} 3m \dots 8,1 d \\ 2,5m \dots xd \end{array} \right\} \therefore \frac{3m}{2,5m} = \frac{8,1d}{xd} \therefore x = \frac{2,5 \times 8,1}{0,45} = 6,75 \text{ días}$$

Si una pared de 0,45 m de espesor se hace en 6,75 días, ¿en qué tiempo se haría si fuese de 0,30 m de espesor?

directa:

$$\left. \begin{array}{l} 0,45m \dots 6,75d \\ 0,3m \dots xd \end{array} \right\} \therefore \frac{0,45m}{0,3m} = \frac{6,75d}{xd}$$

$$\therefore x = \frac{0,3 \times 6,75}{0,45} = 4,5 \text{ días}$$

Los obreros necesitarán 4 días y medio.

259. Observación. — Si en vez de haber ido efectuando los cálculos se hubiesen dejado indicados, se habría obtenido:

$$x = \frac{8d \times 15 \times 54 \times 2,5 \times 0,30}{20 \times 40 \times 3 \times 0,45}$$

y simplificando resulta:

$$x = \frac{18 \times 2,5}{10} = 4,5$$

260. Método directo. — Escribamos el planteo del problema último, marcando con + las cantidades directamente proporcionales, y con — las inversamente proporcionales:

15 ob.....	40m largo.....	3m alto.....	0,45m esp.....	8d.
20 ob.....	54m largo.....	2,5m alto.....	0,30m esp.....	xd.
—	+	+	+	

y como la expresión obtenida es:

$$x = \frac{8d \times 15 \times 54 \times 2,5 \times 0,30}{20 \times 40 \times 3 \times 0,45} = 8d \times \frac{15}{20} \times \frac{54}{40} \times \frac{2,5}{3} \times \frac{0,30}{0,45}$$

podemos decir que: *La incógnita de un problema de regla de tres compuesta se halla multiplicando su valor homogéneo por la razón inversa de las cantidades directamente proporcionales y por la razón directa de las cantidades inversamente proporcionales.*

261. Método de reducción a la unidad. — Por medio de este método se halla el valor de la cantidad homogénea con x que corresponde al valor de una unidad de la otra cantidad hallando el valor multiplicando o dividiendo, según el caso.

Sean los mismos problemas anteriores:

1º) Si 12 m de tela han costado 72 \$, ¿cuánto costarán 8 m de la misma tela?

Solución:

Si 12 m cuestan	72 \$
1 m costará 12 veces menos, o sea:	$\frac{72}{12}$ \$
y 8 m costarán 8 veces más:	$\frac{72 \times 8}{12}$ \$ = 48 \$

2º) Si 9 obreros hacen una obra en 20 días, ¿cuántos días tardarán 12 obreros?

Solución:

Si 9 obreros tardan la obra en 20 días
 1 obrero tardará 9 veces más $20 \times 9 d$
 y 12 obreros tardarán 12 veces menos $\frac{20 \times 9}{12} d = 15 d$

3º) Si 15 obreros necesitan 8 días para levantar una pared de 40 m de largo, 3 m de alto y 0,45 m de espesor, ¿cuántos días necesitarán 20 obreros para levantar una pared de 54 m de largo, 2,50 m de alto y 0,30 m de espesor?

Solución:

15 ob.	40m	largo,	3m	alto,	0,45m	esp.	8 días
1	„	40	„	3	„	0,45	„ $8d \times 15$
1	„	1	„	3	„	0,45	„ $\frac{8d \times 15}{40}$
1	„	1	„	1	„	0,45	„ $\frac{8d \times 15}{40 \times 3}$
1	„	1	„	1	„	1	„ $\frac{8d \times 15}{40 \times 3 \times 0,45}$
1	„	54	„	1	„	1	„ $\frac{8d \times 15 \times 54}{40 \times 3 \times 0,45}$
1	„	54	„	2,5	„	1	„ $\frac{8d \times 15 \times 54 \times 2,5}{40 \times 3 \times 0,45}$
1	„	54	„	2,5	„	0,30	„ $\frac{8d \times 15 \times 54 \times 2,5 \times 0,30}{40 \times 3 \times 0,45}$
20	„	54	„	2,5	„	0,30	„ $\frac{8d \times 15 \times 54 \times 2,5 \times 0,30}{40 \times 3 \times 0,45 \times 20}$

y simplificando y efectuando, resulta 4,5 días.

Regla del Tanto por ciento

262. Definición. — Se llama *tanto por ciento* de un número o cantidad, a lo que corresponde a ese número cuando a 100 de sus unidades corresponde un tanto por ciento dado.

Así, si al comprar un libro me hacen un descuento del 10 por ciento, es decir 10 centavos por cada 100, o sea un peso, y el libro vale 5 pesos, el descuento que deberán hacerme es de 50 centavos, que es el 10 por ciento de 5 \$.

El tanto por ciento se indica así: %, y el tanto por mil: ‰

263. Resolución de las cuestiones sobre el tanto por ciento. — Las cuestiones sobre el tanto por ciento se resuelven de igual manera que las de la regla de tres simple.

Veamos algunos ejemplos:

I. *Se ha hecho una compra por valor de 235 \$ y nos hacen un descuento del 8 %. ¿Cuánto deberá pagarse?*

Solución:

$$\begin{array}{l} 100 \$ \dots 8 \$ \\ 235 \$ \dots x \$ \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 100 \\ 235 \end{array}} \right\} \dots \frac{100}{235} = \frac{8}{x} \dots x = \frac{8 \times 235}{100} = 18,80 \$$$

$$235 - 18,80 = 216,20 \$.$$

Deberá pagarse 216,20 \$.

II. *Una máquina pesa con su embalaje, 2.350 kg. El peso del embalaje se calcula en el 3 % del peso bruto. Calcular el peso de la máquina.*

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 100 \text{ kg.} \dots 3 \text{ kg.} \\ 2.350 \text{ kg.} \dots x \text{ kg.} \end{array} \right\} \therefore \frac{100}{2.350} = \frac{3}{x}$$

$$\therefore x = \frac{3 \times 2.350}{100} = 70,5 \text{ kg.}$$

$$2.350 - 70,5 = 2.279,5 \text{ kg.}$$

La máquina pesa 2.279,5 kg.

III. *Compro una partida de tablas con un descuento del 5 %, el que alcanza a 32,25 \$. Calcular el importe de la factura.*

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 100 \$ \dots 5 \$ \\ x \$ \dots 32,25 \end{array} \right\} \therefore \frac{100}{x} = \frac{5}{32,25}$$

$$\therefore x = \frac{100 \times 32,25}{5} = 645 \$$$

La compra importaba 645 \$.

IV. *De una usina de electricidad sale un cable que conduce una corriente de 440 voltios, pero debido a la caída de tensión, en el extremo del cable la fuerza es de 415 voltios. Calcular el tanto por ciento de la pérdida.*

Solución:

$$\text{Pérdida: } 440 - 415 = 25 \text{ voltios.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 \text{ v.} \dots x \text{ v.} \\ 440 \text{ v.} \dots 25 \text{ v.} \end{array} \right\} \therefore \frac{100}{440} = \frac{x}{25}$$

$$\therefore x = \frac{100 \times 25}{440} = 5,68 \%$$

La pérdida es del 5,68 %.

EJERCICIOS

★ 623. — 12 m de tela cuesta 42 \$. ¿Cuántos metros se comprarán con 25 \$?

R. 10,71 m.

624. — He comprado 7 cuadernos con 50 centavos. ¿Cuántos compraré con 2,50 \$?

R. 31 cuad.

625. — 34 metros de barra de acero son necesarios para fabricar 100 piezas. ¿Cuántos metros se necesitan para fabricar 912 piezas?

R. 310 m.

★ 626. — Un taller con 16 máquinas produce un cierto número de piezas en 10 horas. ¿Cuántas máquinas se necesitarán para hacer la misma producción en 8 horas?

R. 20 máquinas

627. — Si una bomba que da 4 litros de agua por segundo llena un depósito en 20 minutos, ¿cuánto tiempo necesitará una bomba que da 12 litros por segundo?

R. $6\frac{2}{3}$ segundos.

628. — Si un hombre hace un viaje en 15 días a razón de 16 horas diarias, ¿en cuánto tiempo lo hará viajando a 8 horas al día?

R. $18\frac{3}{4}$ días.

★ 629. — En 26 días de trabajo he cobrado 175,50 \$. ¿Cuánto cobraré en 18 días y medio?

R. 124,87 \$.

630 — Al cambiar 75 \$ chilenos me dieron 25,50 \$ m/n. ¿Con 270 \$ m/n cuantos pesos chilenos podré comprar?

R. 794,12 \$ ch.

★ 631. — De 320 Tm de mineral se obtienen 25 Tm de hierro. ¿Qué cantidad de mineral será necesario para obtener 3250 Tm de hierro?

R. 41.800 Tm.

632. — La impresión de 3.200 ejemplares de una obra de 350 páginas cuesta 2688 \$, ¿cuánto costará la impresión de 1.500 ejemplares de una obra de 200 páginas?

R. 720 \$.

633. — Si 12 albailes construyen una pared de 40 m. de largo trabajando 10 horas diarias durante 24 días, ¿qué largo tendrá la pared si trabajaran 16 hombres 9 horas durante 18 días?

R. 36 m.

634. — Cuando la altura de la columna de mercurio de un barómetro mide 759 mm., la presión del aire es de 0,982 atmósferas. Calcular la presión que corresponde a una columna de mercurio de 746 mm.

R. 0,965 atmósferas.

635. — Trabajando 10 horas por día durante 30 días, 12 cajistas componen 25 pliegos de 16 páginas cada uno, y cada página tiene 32 líneas, ¿en cuántos días de 8 horas podrán 18 cajistas componer 64 pliegos de 12 páginas y 40 líneas por página?

R. 60 días.

636. — Si 15 máquinas hacen cierto trabajo en 3 días, 16 horas y 52 minutos, ¿cuánto tiempo empleará una sola máquina en ejecutar el mismo trabajo?

R. 55 días y 13 horas.

637. — Una bomba que da 5 litros de agua por segundo llena un depósito en 85 minutos, ¿en cuánto tiempo lo llenará una bomba que de 12 litros por segundo?

R. 35m 25s.

638. — Si 12 hombres cavan una zanja de 40 m de largo en 14 días trabajando 10 horas al día, ¿cuántos metros de zanja cavarán 16 hombres en 15 días trabajando 8 horas al día?

R. 25,71 m.

639. — Un obrero que construye 40 bulones en un día de 10 horas de trabajo, gana 7,20 \$ al día. ¿Cuánto ganará por día un obrero que construye 48 bulones por jornada de 8 horas?

R. 10,80 \$.

640. — Para hacer un trabajo de 500 m, 60 obreros trabajando 10 horas diarias, emplean 10 días. ¿Cuántos días emplearán 25 obreros trabajando 8 horas para hacer 150 m del mismo trabajo?

R. 9 días.

641. — Se obtienen 25 Tm de hierro de 320 Tm de mineral. ¿Cuál es el tanto por ciento de hierro que contiene el mineral?

R. 7,81 o/o.

642. — Se compraron mercaderías por valor de 768 \$ y se vendieron en 645 \$. Calcular el tanto por ciento de pérdida.

R. 16,01 o/o.

643. — La carne pierde el 38 o/o de su peso al cocerse. ¿Cuánto pesará después de cocida 2,5 kg de carne?

R. 1,550 kg.

644. — ¿Cuánto costará 1 kg de ácido fosfórico sacado de fosfato natural, que cuesta 63,30 \$ la tonelada, sabiendo que el fosfato da el 16 o/o de ácido?

R. 0,40 \$.

645. — La remolacha da el 13,8 o/o de su peso de azúcar. ¿Cuánto costará el kilo de azúcar si el quintal métrico de remolacha cuesta 2,40 \$?

R. 0,17 \$

646. — El agua aumenta el 8 o/o de su volumen al congelarse. ¿Qué volumen ocupará 53 litros de agua al ser convertido en hielo?

R. 57,240 dm³.

647. — Un empleado de comercio gana 150 \$ al mes y el 2,5 o/o de comisión por las ventas que haga. Ha hecho 4.890,35 \$ de venta. Calcular su sueldo total.

R. 272,26 \$.

648. — Un librero ha comprado 12 libros en 27,50 \$. ¿A cuánto deberá vender cada libro para ganar el 25 o/o?

R. 2,86 \$.

649. — El bronce duro empleado en los cojinetes tiene la siguiente composición: cobre, 83 o/o; estaño, 15 o/o; zinc, 1,5 o/o; plomo, 0,5 o/o. Calcular la composición de un cojinete que pesa 2,380 kg.

R. cobre, 1,975 kg; estaño, 0,357 kg; zinc, 0,0357 kg; plomo, 0,0119 kg.

650. — El metal antifricción empleado en la fabricación de cojinetes sometido a pequeñas cargas tiene la siguiente composición: estaño, 85 o/o; antimonio, 10 o/o; cobre, 5 o/o. Calcular la cantidad de cada sustancia que entra en 12 kg. de metal antifricción.

R. estaño, 10,200 kg; antimonio, 1,200 kg; cobre, 0,600 kg.

CAPITULO XVIII

Cuestiones de Aritmética Comercial

Regla de Interés

264. Definiciones. — Se llama *interés de un capital* a la ganancia que éste produce prestado bajo ciertas condiciones.

Se llama *capital regulador* al que se toma como base para fijar el interés; corrientemente el capital regulador consta de 100 unidades monetarias, 100 \$ en nuestro país.

El *tanto por ciento* es el interés producido por 100 \$ (capital regulador) en la *unidad de tiempo*, que generalmente es el *año comercial*, compuesto de 360 días. A veces se llama al tanto por ciento *tasa del interés* o *razón*.

El interés es *simple* cuando el producido por el capital no se suma al capital; es *compuesto* cuando el producido por el capital se suma a éste, produciendo, a su vez, intereses en las sucesivas unidades de tiempo.

Se llama *Regla de Interés* al procedimiento que permite resolver los problemas en que intervengan un *capital*, *tanto por ciento*, *interés* y *tiempo*.

265. Convenciones. — Suponiendo constante el tanto por ciento, en el *Comercio* y en la *Banca* se aceptan estas *convenciones*, fundamentos de la *Regla de Interés*:

I. *Los intereses producidos por dos capitales iguales son proporcionales a los tiempos.*

Es decir, que a mayor tiempo corresponde mayor interés.

II. *Los intereses producidos en tiempos iguales por capitales distintos son proporcionales a los capitales.*

Es decir, que a mayor capital corresponde mayor interés.

III. *Los intereses producidos por dos capitales distintos impuestos durante tiempos distintos, son proporcionales a los productos de los capitales por los tiempos respectivos.*

Es decir, que si se tiene:

C = capital; r = tanto por ciento; t = tiempo; I = interés,
 C' = capital; r' = tanto por ciento; t' = tiempo; I' = interés,
 resulta que:

$$\frac{I}{I'} = \frac{C \cdot t}{C' \cdot t'}$$

266. Deducción de fórmulas. — Suponiendo que en la expresión anterior:

$$\frac{I}{I'} = \frac{C \cdot t}{C' \cdot t'}$$

C' es un capital de 100 \$, y que I' es el interés r producido por esos 100 \$ en un tiempo t' de un año, resulta:

$$\frac{I}{r} = \frac{C \cdot t}{100 \cdot 1}$$

y de esta proporción se deducen las siguientes fórmulas:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \quad (I)$$

luego: *El interés es igual al producto del capital, el tiempo y la razón, dividido por 100.*

$$r = \frac{I.100}{C.t} \quad (\text{II})$$

luego: *La razón (o tanto por ciento) es igual al producto del interés por 100, dividido por el producto del capital por el tiempo.*

$$C.t = \frac{I.100}{r} \quad \therefore \quad C = \frac{I.100}{r.t} \quad (\text{III})$$

luego: *El capital es igual al producto del interés por 100, dividido por el producto de la razón por el tiempo.*

$$C.t = \frac{I.100}{r} \quad \therefore \quad t = \frac{I.100}{C.r} \quad (\text{IV})$$

luego: *El tiempo es igual al producto del interés por 100, dividido por el producto del capital por la razón.*

Si el año se expresa en 12 meses, 52 semanas, o 360 días, las fórmulas anteriores se convierten en éstas:

$$t = \text{meses} \quad \left\{ \begin{array}{l} I = \frac{C.t.r}{1200} ; r = \frac{I.1200}{C.t} \\ C = \frac{I.1200}{r.t} ; t = \frac{I.1200}{C.r} \end{array} \right.$$

$$t = \text{semanas} \quad \left\{ \begin{array}{l} I = \frac{C.t.r}{5200} ; r = \frac{I.5200}{C.t} \\ C = \frac{I.5200}{r.t} ; t = \frac{I.5200}{C.r} \end{array} \right.$$

$$t = \text{días} \quad \left\{ \begin{array}{l} I = \frac{C \cdot t \cdot r}{36000} ; r = \frac{I \cdot 36.000}{C \cdot t} \\ C = \frac{I \cdot 36000}{r \cdot t} ; t = \frac{I \cdot 36.000}{C \cdot r} \end{array} \right.$$

267. **Aplicaciones.** — PROBLEMA I. — ¿Qué interés producen 430 \$ al 5 % durante 4 años?

Solución:

$$I = \frac{C \cdot t \cdot r}{100} = \frac{430 \times 3 \times 5}{100} = 64,50 \text{ \$}$$

PROBLEMA II. — Si 675 \$ producen en 5 meses un interés de 16,95, ¿a qué tanto por ciento estuvo impuesto?

Solución:

$$r = \frac{I \cdot 1200}{C \cdot t} = \frac{16,95 \times 1200}{675 \times 5} = 6 \%$$

PROBLEMA III. — Calcular el capital necesario para obtener, al 7 %, una renta de 250 \$ cada 4 semanas.

Solución:

$$C = \frac{I \cdot 5200}{r \cdot t} = \frac{250 \times 5200}{7 \times 4} = 46.428,57 \text{ \$}$$

PROBLEMA IV. — Un capital de 25.000 \$ produce al 5,5 % un interés de 53,47 \$. Calcular el tiempo de imposición.

Solución:

$$t = \frac{I \cdot 36000}{C \cdot r} = \frac{53,47 \times 36000}{25.000 \times 5,5} = 14 \text{ días}$$

Regla de interés compuesto

268. Definiciones. — El interés es *compuesto*, cuando el producido por el capital se suma a éste, produciendo a su vez intereses en las sucesivas unidades de tiempo, que es lo que se llama *capitalización de los intereses*.

Se llama *monto*, a la suma del capital inicial más los intereses.

269. Fórmula del monto. — Se puede calcular el interés compuesto que produce un capital durante un cierto número de años, calculando lo que produce en el 1er. año; luego calculando lo que produce en el 2º año la suma del capital y el interés hallado; luego, lo que produce en el 3er. año la suma del capital anterior y el interés hallado, y así sucesivamente.

Ejemplo: ¿Qué interés compuesto producirán 500 \$ al 6 % durante 3 años?

Solución:

$$\text{Interés del 1}^{\text{er}} \text{ año: } \frac{500 \times 6}{100} = 30 \$$$

$$\text{Monto del 1}^{\text{er}} \text{ año: } 500 + 30 = 530 \$$$

$$\text{Interés del 2}^{\text{o}} \text{ año: } \frac{530 \times 6}{100} = 31,80 \$$$

$$\text{Monto del 2}^{\text{o}} \text{ año: } 530 + 31,80 = 561,80 \$$$

$$\text{Interés del 3}^{\text{er}} \text{ año: } \frac{561,80 \times 6}{100} = 33,71 \$$$

$$\text{Monto del 3er. año: } 561,80 + 33,71 = 595,51 \$.$$

$$\text{El interés compuesto es: } 595,51 - 500 = 95,51 \$.$$

En vez de seguir este procedimiento lento, se emplea la fórmula:

$$M = C(1 + r)^n$$

siendo: M , el monto; C , el capital dado; r , el tanto por uno, es decir, el interés de un peso; n , el número de años, o períodos de capitalización.

270. Fórmula del capital inicial. — De la fórmula se deduce:

$$C = \frac{M}{(1+r)^n} \quad (I)$$

271. Observación. — No damos las fórmulas del valor de r porque para su cálculo se aplican raíces de grado superior al 3º, y la de n porque hay que aplicar logaritmos.

272. Aplicaciones. — I. *¿Qué monto se obtiene en 10 años con un capital de 100 \$ colocado a interés compuesto, al 8 % anual?*

Solución:

$$M = C(1 + r)^n = 100 (1 + 0,08)^{10} = 215,87 \$.$$

En 10 años los 100 \$ se convierten en 215,87 \$.

II. *Un capital colocado a interés compuesto al 5 % anual se convirtió, al cabo de 10 años, en 12.640 \$. Calcular el capital inicial.*

Solución:

$$C = \frac{M}{(1+r)^n} = \frac{12.640}{(1+0,05)^{10}} = 7.760 \$$$

El capital inicial era 7.760 \$.

Regla de Descuento

273. Definiciones. — Se llama *descuento* a la cantidad que hay que restar de un documento de crédito (letra, cheque, pagaré, etc.) que se paga antes de su vencimiento.

El descuento puede ser *comercial* o *matemático*.

El *descuento comercial*, comúnmente usado en el comercio, es el interés del *valor nominal*, o cantidad que figura en el documento, al tanto por ciento dado y por el tiempo que falte para su vencimiento.

El *descuento matemático* o *racional*, es la diferencia entre el *valor nominal* y el *valor efectivo*, que es la cantidad que realmente se paga.

Se justifica el descuento por el hecho de que el *tomador* de un documento, al entregar una cierta cantidad, pierde los intereses que le producirían hasta su vencimiento, obteniéndolos el *tenedor*. Ahora bien; el tomador no entrega todo el valor nominal, así que al hacer el descuento cobra intereses de una cantidad que no entregó, cosa que no sucede cuando se emplea el descuento matemático.

274. Deducción de las Fórmulas del Descuento Comercial. — Por definición, el descuento comercial es el interés de la cantidad que se paga antes de su vencimiento, de manera que en la *Fórmula del Interés*:

$$I = \frac{C \cdot t \cdot r}{100}$$

se tiene que I es el descuento Dc , y C es valor nominal Vn

del capital, resultando así esta *Fórmula del Descuento*:

$$D_c = \frac{V_n \cdot t \cdot r}{100} \quad (\text{I})$$

Reemplazando los valores I y C por D_c y V_n , respectivamente, en las fórmulas (II) a (IV) de (266), resultan:

$$r = \frac{D_c \cdot 100}{V_n \cdot t} \quad (\text{II})$$

$$V_n = \frac{D_c \cdot 100}{r \cdot t} \quad (\text{III})$$

$$t = \frac{D_c \cdot 100}{V_n \cdot r} \quad (\text{IV})$$

Como el año tiene 12 meses, o 52 semanas, o 360 días, las fórmulas anteriores se pueden convertir en otras análogas a las del párrafo (266).

275. Aplicaciones. — I. *Calcular el descuento que debe hacerse a un pagaré de 350 \$ que se descuenta al 6 %, 2 meses antes de su vencimiento.*

Solución:

$$D_c = \frac{V_n \cdot t \cdot r}{1.200} = \frac{350 \times 2 \times 6}{1.200} = 3,50 \text{ \$}$$

II. *A un pagaré de 2.700 \$ se le ha hecho un descuento de 21 \$ por haberse pagado 35 días antes de su vencimiento. Calcular la tasa de descuento.*

Solución:

$$r = \frac{D_c \cdot 36000}{V_n \cdot t} = \frac{21 \times 36000}{2.700 \times 35} = 8\%$$

276. Fórmula del descuento matemático.—La fórmula del descuento matemático es:

$$D_m = \frac{V_n \cdot r \cdot t}{100 + rt}$$

siendo: V_n , el valor nominal; r , el tanto por ciento; t , el tiempo.

Ejemplo: Calcular el descuento matemático de un pagaré de 270 \$, al 5 %, si se paga 2 meses antes de su vencimiento.

Solución:

$$D_m = \frac{V_n \cdot r \cdot t}{100 + rt} = \frac{270 \times 5 \times 2}{1200 + 5 \times 2} = 2,25 \$$$

EJERCICIOS

651. — Calcular el interés de 738 \$ al 4 o/o durante 60 días.
R. 4,92 \$.
652. — Idem, ídem, de 400 \$ al 5 o/o en 2 años, 6 meses y 13 días.
R. 50,72 \$.
653. — Calcular el capital que produce 96 \$ en 2 años, al 4 o/o.
R. 1.200 \$.
654. — Idem, ídem, de 124,30 \$ en 4 meses y 20 días al 5 o/o.
R. 6.392,57 \$.
655. — ¿A qué tanto por ciento estuvo impuesto un capital de 2.875 \$ si en 4 años, 7 meses y 6 días produjo 529 \$?
R. 4 o/o.
656. — Calcular el tiempo de imposición de 5.628,40 \$ si al $3\frac{4}{5}$ o/o produjo 1,211,39 \$ de interés.
R. 5 años, 7 m, 29 días.
- 657. — Se depositaron 4.700 \$ en un banco al interés compuesto del 4 o/o, ¿en cuánto se convertirán al cabo de 20 años?
R. 10.283 \$.
- 658. — ¿Cuál es el capital que al interés compuesto del 5 o/o después de 10 años se convirtió en 8.590 \$?
R. 5.494 \$.
659. — Calcular el descuento que hay que hacer a un pagaré de 484,50 \$, al 6 o/o, pagado 40 días antes de su vencimiento.
R. 2,13 \$.
660. — El 31 de Diciembre debe pagarse 5.000 \$. El documento se descuenta el 17 de Octubre al 4 o/o. Calcular cuánto debe pagarse.
R. 4.958,33 \$.
661. — Al 8 o/o se descontó un pagaré de 538 \$, obteniendo 7,65 \$ de descuento; calcular el tiempo.
R. 64 días.
662. — ¿Cuál es el capital que descontado 4 meses antes del vencimiento al 6 o/o produjo 68 \$ de descuento?
R. 3.400 \$.
663. — Un pagaré de 3.700 \$ fué descontado al 8 o/o 3 meses antes de su vencimiento. Calcular el descuento matemático y el valor efectivo.
R. Dm. = 72,55 \$; Ve = 3.627,45 \$.

CAPITULO XIX

Repartición Proporcional

277. Números proporcionales. — Dos conjuntos de números que se corresponden uno a uno son proporcionales, cuando las razones de los números que se corresponden, son iguales.

Dados los conjuntos:

$$6 \quad ; \quad 15 \quad ; \quad \frac{3}{2} \quad ; \quad 1,8$$

$$2 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad \frac{1}{2} \quad ; \quad 0,6$$

se dice que los primeros son proporcionales a los segundos, o viceversa, pues:

$$\frac{6}{2} = \frac{15}{5} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1,8}{0,6} = 3$$

278. División de un número en partes proporcionales a otros números dados. — *Dividir un número en partes proporcionales a otros números dados*, es descomponerlo en tantos sumandos como números nos den, y proporcionales a éstos.

Ejemplo: Descomponer el número 20 en partes proporcionales a 6 y 4, consiste en descomponer a 20 en dos partes, 12 y 8, tales que se tenga:

$$\frac{12}{6} = \frac{8}{4} = 2$$

Para dividir un número en partes proporcionales a otros varios, se lo divide por la suma de éstos, y el cociente se multiplica por cada uno de ellos.

Si los números dados fueran fraccionarios, se reducen las fracciones a común denominador y luego se divide el número en partes proporcionales a los numeradores.

Ejemplo 1º: *Dividir el número 68 en partes proporcionales a los números 2, 3, 5 y 7.*

Solución:

Suma de los números: $2 + 3 + 5 + 7 = 17$.

Valor de una parte: $68 : 17 = 4$.

Parte correspondiente a 2: $4 \times 2 = 8$

„ „ „ 3: $4 \times 3 = 12$

„ „ „ 5: $4 \times 5 = 20$

„ „ „ 7: $4 \times 7 = 28$

Comprobación: 68

Las partes en que debe dividirse 64 son: 8, 12, 20 y 28.

Ejemplo 2º: *Dividir el número 175 en partes proporcionales a $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3}$ y $\frac{3}{4}$.*

Solución:

Suma de los números:

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{3} + \frac{3}{4} = \frac{6 + 20 + 9}{12} = \frac{35}{12}$$

Valor de cada parte: $175 : 35 = 5$.

Parte correspondiente a 6: $5 \times 6 = 30$

„ „ „ 20: $5 \times 20 = 100$

„ „ „ 9: $5 \times 9 = 45$

Comprobación: 175

279. Aplicaciones. — La división de un número en partes proporcionales, se aplica en las reglas de *compañía* y de *aligación*, así como en la *repartición de cargas y composición de los cuerpos*, que estudiaremos en el capítulo siguiente.

Regla de Compañía

280. Definiciones. — Se llama *compañía*, o sociedad *comercial* o *mercantil*, al conjunto de varias personas que aportan sus capitales a fin de explotar un negocio con el objeto de obtener un *lucro* o *utilidad*. Cada uno de los componentes de la sociedad se llama *socio*, llamándose *imposición* el capital de cada socio.

Dividendo general es la utilidad total que corresponde al capital social; *dividendo parcial* es la utilidad que corresponde al capital de cada socio.

La *Regla de Compañía* tiene por objeto hallar la ganancia o pérdida que corresponde a cada socio. Es *simple* si los capitales han estado impuestos el mismo tiempo; es *compuesta*, si los capitales han estado impuestos tiempos diferentes.

281. Convenciones. — I. *Las ganancias o pérdidas de dos capitales iguales impuestos durante tiempos distintos son proporcionales a los tiempos.*

Es decir, a mayor tiempo corresponde mayor ganancia.

II. *Las ganancias o pérdidas de dos capitales distintos impuestos durante tiempos iguales, son proporcionales a los capitales.*

Es decir, a mayor capital corresponde mayor ganancia.

III. *Las ganancias o pérdidas producidas por dos capitales distintos impuestos durante tiempos distintos, son proporcionales a los productos de los capitales por los tiempos respectivos.*

Es decir, que si se tiene:

C = capital ; t = tiempo ; g = ganancia o pérdida ;

C' = capital ; t' = tiempo ; g' = ganancia o pérdida,

resulta que:

$$\frac{g}{g'} = \frac{C \times t}{C' \times t'}$$

282. Casos de la Regla de Compañía. — Se presentan sólo estos casos:

1º *Capitales iguales y tiempos iguales;*

2º *Capitales iguales y tiempos desiguales;*

3º *Capitales desiguales y tiempos iguales;*

4º *Capitales y tiempos desiguales.*

1º **CAPITALES Y TIEMPOS IGUALES.** — Como cada uno de los socios ha tenido impuesto el mismo capital durante el mismo tiempo, cada uno tendrá la misma ganancia o pérdida. Luego: *la ganancia o pérdida se divide por el número de socios.*

2º **CAPITALES IGUALES Y TIEMPOS DESIGUALES.** — En este caso por la convención I, *la ganancia o pérdida se reparte proporcionalmente a los tiempos.*

3º CAPITALES DESIGUALES Y TIEMPOS IGUALES. — De acuerdo a la *convención II*, la ganancia o pérdida se reparte proporcionalmente a los capitales.

4º CAPITALES Y TIEMPOS DESIGUALES. — Según la *convención III*, la ganancia o pérdida se reparte proporcionalmente a los productos de los capitales por los tiempos respectivos.

283. Aplicaciones. — PROBLEMA I. — *Tres personas forman una sociedad que duró 4 años. Cada una puso 5 000 \$ de capital, y resultó una ganancia de 12.000 \$. ¿Cuánto le toca a cada socio?*

Solución:

A cada socio le corresponde la misma parte, y como son 3 socios, resulta:

$$12.000 : 3 = 4.000 \$.$$

PROBLEMA II. — *Tres personas forman una sociedad. Cada una aporta el mismo capital: A tuvo su aporte durante 2 años; B durante 3 años, y C durante 4 años. Si la ganancia fué de 36.000 \$, calcular cuánto corresponde a cada socio.*

Solución:

Por el 2º caso se tiene: $2 + 3 + 4 = 9$.

Valor de cada parte: $36.000 : 9 = 4.000 \$$.

Parte de A: $4.000 \times 2 = 8.000 \$$

„ „ B: $4.000 \times 3 = 12.000 \$$

„ „ C: $4.000 \times 4 = 16.000 \$$

Comprobación: $\underline{36.000 \$}$

A cada socio le corresponde 8.000, 12.000 y 16.000 \$, respectivamente.

PROBLEMA III. — *A, B y C jugaron un billete de lotería, que les costó 17 \$, en esta forma: A jugó 4 \$; B, 7 \$, y C, 6 \$. Les tocó un premio de 8.500 \$; calcular cuánto corresponde a cada socio.*

Solución:

Por el 3er. caso se tiene:

Velor de cada parte: $8.500 : 17 = 500 \$$

Parte de A: $500 \times 4 = 2.000 \$$

„ „ B: $500 \times 7 = 3.500 \$$

„ „ C: $500 \times 6 = 3.000 \$$

Comprobación: $\underline{8.500 \$}$

PROBLEMA IV. — *Tres socios, Juan, Pedro y Diego, constituyen una sociedad. Juan aportó 2.400 \$, durante 5 meses; Pedro, 3.500 \$, durante 3 meses, y Diego, 3.800 \$, durante 4 meses. El negocio produjo una pérdida de 5.655 \$. Calcular la pérdida de cada socio.*

Solución:

Por el 4º caso se tiene:

La pérdida de A es prop. a: $2.400 \times 5 = 12.000$

La pérdida de B es prop. a: $3.500 \times 3 = 10.500$

La pérdida de C es prop. a: $3.800 \times 4 = 15.200$

$12.000 + 10.500 + 15.200 = 37.700$

Valor de una parte: $5.655 : 37.700 = 0,15 \$$.

Pérdida de Juan:	$0,15 \times 12.000 = 1.800 \$$
„ „ Pedro:	$0,15 \times 10.500 = 1.575 \$$
„ „ Diego:	$0,15 \times 15.200 = 2.280 \$$
Comprobación:	5.655 \$

284. OBSERVACIÓN. — *El problema último, correspondiente al 4º caso de la Regla de Compañía, es completamente teórico.* En efecto, no se concibe, ni lo acepta el *Código de Comercio*, que una persona que entre a formar parte de una sociedad, participe de las ganancias o pérdidas que esa sociedad hubiera tenido *antes* de formar parte de ella. Tampoco es admisible que un socio que se retire de la sociedad espere a que los demás socios la liquiden, y tenga que participar en las pérdidas o ganancias que *después* de su salida se hubieren producido.

Regla de Aligación o Mezclas

285. Definiciones. — Se llama *Regla de Aligación* al procedimiento que permite resolver los problemas referentes a las *mezclas*.

Mezcla es la unión íntima de varias sustancias, conservando cada una de ellas su naturaleza, como la reunión de maíz y trigo.

Aleación o *aligación* es la unión íntima de varios metales fundidos, como el *bronce*, formado por *cobre* y *estaño* fundidos.

Precio de una sustancia es el valor, en pesos mⁿ, de la unidad de medida de esa sustancia. *Precio medio* es el precio de la unidad de la mezcla.

286. Casos de la Regla de Aligación. — Se presentan estos casos: 1º *Dadas las cantidades a mezclar y sus pre-*

cios, hallar el precio medio de la mezcla; 2º Dado el precio medio y el de las cantidades, calculan éstas.

287. Primer caso. — DADAS LAS CANTIDADES A MEZCLAR Y SUS PRECIOS, HALLAR EL PRECIO MEDIO DE LA MEZCLA. — Para hallar el precio medio se divide la suma de los productos de cada cantidad por su precio, por la suma de las cantidades.

Ejemplo: *Se mezclan 8 litros de vino de 0,40 \$ el litro, con 12 litros de vino de 0,70 \$, con 6 litros de vino de 1,20 \$. Calcular el precio medio de la mezcla.*

Solución:

$$\begin{array}{rcl} 8 \text{ l a } 0,40 \$ \text{ valen:} & 8 \times 0,4 & = 3,20 \$ \\ 12 \text{ l a } 0,70 \$ \text{ valen:} & 12 \times 0,7 & = 8,40 \$ \\ 6 \text{ l a } 1,20 \$ \text{ valen:} & 6 \times 1,2 & = 7,20 \$ \\ \hline 26 \text{ litros de la mezcla valen} & & 18,80 \$ \end{array}$$

luego el precio medio de un litro es:

$$pm = 18,80 : 26 = 0,72 \$.$$

288. Segundo caso. — DADO EL PRECIO MEDIO Y EL DE LAS CANTIDADES, CALCULAR ÉSTAS. — Las cantidades a mezclar son inversamente proporcionales a las diferencias entre sus precios y el precio medio, de manera que si son dos las cantidades a mezclar, de la primera se toma tanto como la diferencia entre el precio medio y el precio de la segunda sustancia; y de la segunda sustancia se toma tanto como la diferencia entre el precio medio y el precio de la primera sustancia.

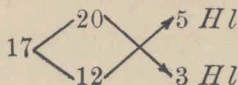
Ejemplo: *¿Cuántos hectólitros de trigo de 20 \$ y de trigo de 12 \$ el hectólitro hay que mezclar para que el hectólitro de la mezcla valga 17 \$?*

Solución:

De trigo de 20 \$ se debe tomar: $17 - 12 = 5$ Hl.

De trigo de 12 \$ se debe tomar: $20 - 17 = 3$ Hl.

La operación se dispone así

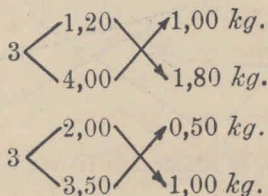


En realidad, el problema es indeterminado, pues lo único que se determina es la proporción en que deben mezclarse las sustancias.

289. Si las sustancias que se van a mezclar son cuatro, el problema se reduce al anterior, comparando cada dos sustancias que comprendan al precio medio.

Ejemplo: *Se desea obtener 30 kg de café a un precio de 3 \$ el kilogramo, mezclando café de 1,20, 2, 3,50 y 4 \$ el kilogramo.*

Solución:



Como queremos obtener 30 kg. de mezcla, debemos repartir 30 proporcionalmente a 1, 1,8, 0,5 y 1:

$$1 + 1,8 + 0,5 + 1 = 4,3.$$

Valor de una parte: $30 : 4,3 = 6,976.$

Parte proporcional a 1:

$$6,975 \times 1 = 6,976 \text{ kg. de café de } 1,20 \$ \text{ el kg.}$$

Parte proporcional a 1,8:

$$6,976 \times 1,8 = 12,557 \text{ kg. de café de } 4,00 \$ \text{ el kg.}$$

Parte proporcional a 0,5:

$$6,976 \times 0,5 = 3,488 \text{ kg. de café de } 2,00 \$ \text{ el kg.}$$

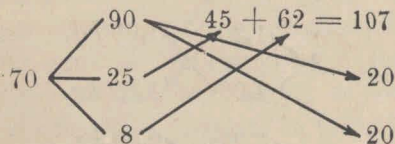
Parte proporcional a 1:

$$6,976 \times 1 = 6,976 \text{ kg. de café de } 3,50 \$ \text{ el kg.}$$

290. Si las sustancias que se van a mezclar son tres, y el precio medio es menor (mayor) que una componente y mayor (menor) que las demás, se asigna a cada una de las componentes menores, la diferencia entre el precio medio y la primer sustancia, y a la primer sustancia la suma de las diferencias entre el precio medio y cada una de las sustancias menores.

Ejemplo: *Se tienen 3 líquidos cuyas temperaturas son 8°, 25° y 90°. ¿Cuántos litros de cada una habrá que tomar para que la mezcla tenga una temperatura de 70°?*

Solución:



Del de 90° se debe tomar 107 litros, del de 25°, 20 litros, y del de 8°, 20 litros.

EJERCICIOS

664. — Dividir el número 42 en partes proporcionales a 5, 7 y 9.

R. 10, 14 y 18.

665. — Dividir el número 20 en partes proporcionales a 21, 15 y 24.

R. 7, 5 y 8.

666. — Dividir 2.600 \$ en partes proporcionales a 8, 12 y 20.

R. 520 \$, 789 \$ y 1.300 \$.

667. — La pólvora negra se compone de 74 partes de salitre, 16 de carbón y 10 de azufre. Calcular la cantidad que hay de cada componente en una carga de 4,500 kg.

R. 3,300 kg de salitre; 0,720 kg de carbón y 0,450 kg de azufre.

668. — Un comerciante, al quebrar, deja un capital de 3.750 \$, el cual ha de dividirse entre cuatro acreedores. Al 1º debía 2.310 \$; al 2º, 3.000 \$; al 3º, 7.500 \$; y al 4º, 5.730 \$. Calcular lo que toca a cada uno.

R. Al 1º, 467,23 \$; al 2º, 606,80 \$; al 3º, 1.516,99 \$; al 4º, 1.158,98 \$.

669. — Para cementar las piezas de hierro se las recubre de una mezcla de sal marina y carbón pulverizado. Calcular la cantidad que hay que tomar de cada sustancia para obtener 15.720 kg de mezcla, sabiendo que están en la razón 1 a 19.

R. 768 kg de sal; 14.934 kg de carbón.

670. — Tres personas formaron una sociedad. La 1ª aportó 500 \$; la 2ª, 600 \$, y la 3ª, 700 \$. La ganancia fué de 1.620 \$. Calcular la ganancia de cada socio.

R. 450 \$; 540 \$; 630 \$.

671. — A, B y C, se asocian aportando 8.000 \$, 1.100 \$ y 1.300 \$, respectivamente, y perdieron 3.520 \$. ¿Cuánto perdió cada uno?

R. A, 2.707,69 \$; B, 372,31 \$; C, 440 \$.

672. — Cuatro personas formaron una sociedad, aportando cada una 2.800 \$. La 1ª estuvo en la sociedad 2 años; la 2ª, 10 meses; la 3ª, año y medio, y la 4ª, 20 meses. Si la utilidad fué de 9.000 \$, ¿cuánto toca a cada uno?

R. 3.000 \$ al 1º; 1.250 \$ al 2º; 2.250 \$ al 3º; 2.500 \$ al 4º.

673. — Si dos personas forman una sociedad aportando la 1ª 4.800 \$ durante 5 meses, y la 2ª 3.500 \$ durante 9 meses, y la utilidad es de 7.104 \$, ¿cuánto corresponderá a cada uno?

R. Al 1º, 3.072 \$; al 2º, 4.032 \$.

— 674. — Si se mezclan 35 kg de café de 2.50 \$ el kilogramo, con 20 kg de 2,80 \$, con 28 kg de 3 \$, ¿cuánto costarán 3 kilogramos y medio de la mezcla?

R. 9,59 \$.

675. — Se mezclan 17 litros de vino de 1.20 \$ el litro, con 8 litros de 0,90 \$, con 5 litros de agua. ¿Cuánto vale el litro de la mezcla?

R. 0,92 \$.

— 676. — Se mezclan café de 5,50 \$ el kilogramo con café de 3,20 \$, y se desea que la mezcla valga 3,40 \$ el kilogramo. Calcular cuánto hay que mezclar de cada clase para obtener 92 kg. de la mezcla.

R. 8 kg y 84 kg.

677. — ¿Cuántos hectólitros de trigo de 20 \$, de 22 \$, de 25 \$ y de 30 \$ hay que mezclar, para que 26 Hl de la mezcla valgan 624 \$.

R. 12 Hl de 20 \$; 2 Hl de 22 \$; 4 Hl de 25 \$; 8 Hl de 30 \$.

678. — Se mezclan 4 litros de agua a 15º con 7 litros de agua a 37º. ¿Cuál es la temperatura de la mezcla?

R. 29º

679. — Se tienen 3 líquidos cuyas densidades son 1,20, 1,35 y 1,5. Del 1º se toman 2 litros, del 2º, 3 litros, y del 3º, 4 litros. Calcular la densidad de la mezcla.

R. 1,383

680. — Una lavandera abre una canilla y echa 10 litros de agua a 8º en un tacho, y luego agrega 4 litros de agua hirviendo. Calcular la temperatura de la mezcla.

R. 34º,3.

681. — Se tienen dos líquidos cuyas densidades son 1 y 1,5. Calcular en qué proporción deberán mezclarse para que la mezcla tenga una densidad de 1,3.

R. 2 l de 1 por cada 3 l de 1,5.

682. — Se tiene agua a 8º de temperatura, a 20º y a 100º. ¿Cuántos litros deberá tomarse de cada clase para obtener 10 litros de 36º de temperatura?

R. 2,558 l de 100º; 3,721 l de 20º; y 3,721 de 8º

CAPITULO XX

Aplicaciones de la Aritmética a la Física, Química, Mecánica y Electricidad

291. Importancia de la Aritmética en la práctica del taller. — Todos los problemas o cuestiones prácticas que se presentan a diario en el taller, se resuelven aplicando la Aritmética, de manera que el jefe del taller, el mecánico, electricista, etc., que deseen destacarse, deben completar su conocimiento del oficio con la lectura de manuales técnicos y obras de mecánica práctica, teniendo como base el conocimiento de la Aritmética práctica. Con frecuencia se presentan pequeños cálculos sobre la relación de las velocidades de dos poleas, los engranajes a poner en el torno para filetear determinada rosca, la cantidad de alambre de resistencia para hacer un calentador eléctrico, etc., y generalmente cuestiones como esas, en que basta un simple y fácil cálculo para hacerlo con seguridad y exactitud, se resuelven a ojo de buen cubero o siguiendo un procedimiento rutinario.

Los cálculos aritméticos son absolutamente necesarios para la más eficaz fabricación o utilización de las máquinas, conjuntamente con una instrucción técnica elemental, y a fin de ilustrar con ejemplos muchas de las aplicaciones que la Aritmética tiene en el taller, resolvemos a continuación una buena cantidad de problemas prácticos.

Aplicaciones a la Física

292. Equilibrio de la palanca. (Fig. 24). — El equilibrio de una palanca está dado por la fórmula:

$$\frac{P}{R} = \frac{r}{p}$$

siendo: P = potencia en kg ; R = resistencia en kg ;
 r = brazo de resistencia, en cm ; p = brazo de potencia, en cm .

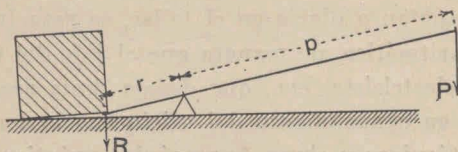


Fig. 24

PROBLEMA. — Se quiere levantar un cajón que pesa 650 kg con una palanca de 1,50 de largo. Calcular la potencia necesaria, sabiendo que el brazo de resistencia mide 32 cm .

Solución:

Se tiene: $\frac{P}{R} = \frac{r}{p}$; $\frac{P}{650} = \frac{32}{118}$

de donde: $P = \frac{650 \times 32}{118} = 17,627 \text{ } kg.$

Se necesita una fuerza de 17,627 kg .

293. Plano inclinado. (Fig. 25). — La fórmula del plano inclinado es:

$$\frac{P}{R} = \frac{h}{l}$$

siendo: P = fuerza en kg paralela a la inclinación;
 R = peso en kg del cuerpo; h = altura en m del plano;
 l = longitud en m del plano.

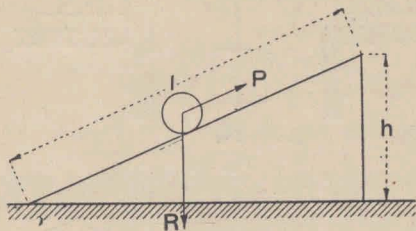


Fig. 25

PROBLEMA. — Calcular la fuerza necesaria para mantener un peso de 450 kg en un plano inclinado de 6 m de largo y 0,80 m de alto.

Solución:

$$\text{Se tiene: } \frac{P}{R} = \frac{h}{l} ; \frac{P}{450} = \frac{0,8}{6}$$

$$\text{de donde: } P = \frac{450 \times 0,8}{6} = 60 \text{ } kg.$$

Se necesita una fuerza de 60 kg .

294. Equilibrio de un torno. (Fig. 26). — La fórmula del torno es:

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}$$

siendo: P = potencia en kg ; Q = resistencia en kg ;
 r = radio en cm del tambor; R = radio en cm de la manivela.

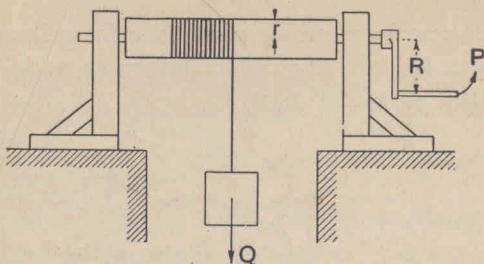


Fig. 26

PROBLEMA. — *El radio del tambor de un torno mide 8 cm y el de la manivela 50 cm. La fuerza normal de un hombre es de 40 kg; calcular cuánto podría levantar en ese torno.*

Solución:

Se tiene:
$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} ; \quad \frac{40}{Q} = \frac{8}{50}$$

de donde:
$$Q = \frac{40 \times 50}{8} = 250 \text{ kg.}$$

Un hombre normal puede elevar 250 kg.

295. Masa de un cuerpo. — *La masa de un cuerpo está dada por la fórmula:*

$$m = \frac{F}{a} = \frac{P}{g}$$

siendo: m = masa en kg-masa; F = fuerza en kg-peso;
 a = aceleración en metros; P = peso en kg; $g = 9,81 \text{ m.}$

PROBLEMA. — *Si una locomotora desarrolla una fuerza constante de 4.000 kg, ¿qué aceleración comunicará a un tren de 250 Tm?*

Solución:

$$\text{Se tiene: } \frac{F}{a} = \frac{P}{g} ; \quad \frac{4000}{a} = \frac{250000}{9,81}$$

$$\text{de donde: } a = \frac{4000 \times 9,81}{250000} = 0,156 \text{ m.}$$

La aceleración será de 0,156 m por segundo.

296. Escalas termométricas. -- El termómetro usado comúnmente es el *centígrado* o *Celsius*, dividido en 100 partes llamadas *grados*. El punto 0° corresponde a la temperatura del hielo fundente, y el punto 100° corresponde a la temperatura de los vapores de agua hirviendo.

En Inglaterra y en Estados Unidos suele emplearse el termómetro de *Fahrenheit*, en donde la temperatura del hielo fundente se designa por 32, y la temperatura de los vapores de agua hirviendo por 212.

Para reducir grados *Fahrenheit* a centígrados, se emplea la fórmula:

$$C = \frac{F - 32}{1,8}$$

Para reducir grados centígrados a *Fahrenheit* se emplea la fórmula:

$$F = 32 + C.1,8$$

PROBLEMA I. — Reducir 68° F a grados C.

$$\text{Se tiene: } C = \frac{F - 32}{1,8} = 20^0$$

$$C = \frac{68 - 32}{1,8} = 20^0$$

PROBLEMA II. — Reducir 46° centígrados a grados F .

Se tiene: $F = 32 + C.1,8$

$$F = 32 + 46 \times 1,8 = 114^{\circ},8.$$

Aplicaciones a la Química

297. Composición de aleaciones o mezclas. — PROBLEMA I. — *El bronce de las campanas se compone de 78 partes de cobre y 22 de estaño. Calcular la cantidad de cobre y estaño que hay en una campana que pesa 380 kg.*

Solución:

Cantidad de cobre:

$$\frac{380}{78+22} = \frac{x}{78} \quad \therefore \quad x = \frac{380 \times 78}{100} = 296,400 \text{ kg.}$$

Cantidad de estaño:

$$\frac{380}{78+22} = \frac{y}{22} \quad \therefore \quad y = \frac{380 \times 22}{100} = 83,600 \text{ kg.}$$

De cobre hay que fundir 296,400 kg y 83,600 kg de estaño.

PROBLEMA II. — *El esmeril contiene 7,5 partes de corindón y 2,25 partes de óxido de hierro. Calcular la cantidad de corindón y de óxido de hierro que haya en 5 kg de esmeril.*

Solución:

$$7,5 + 2,25 = 9,75$$

Cantidad de corindón:

$$\frac{5}{9,75} = \frac{x}{7,5} \quad \therefore \quad x = \frac{5 \times 7,5}{9,75} = 3,847 \text{ kg.}$$

Cantidad de óxido de hierro:

$$\frac{5}{9,75} = \frac{x}{2,25} \quad \therefore \quad x = \frac{5 \times 2,25}{9,75} = 1,153 \text{ kg.}$$

En 5 kg. de esmeril hay 3,847 kg de corindón y 1,153 kg de óxido de hierro.

PROBLEMA III. — *El metal antifricción empleado para grandes velocidades se compone de 17 partes de estaño, 77 de antimonio y 6 de cobre. Calcular la cantidad que hay de cada componente en 30 kg de aleación.*

Solución:

$$17 + 77 + 6 = 100$$

Cantidad de estaño:

$$\frac{30}{100} = \frac{x}{17} \quad \therefore \quad x = \frac{30 \times 17}{100} = 5,100 \text{ kg.}$$

Cantidad de antimonio:

$$\frac{30}{100} = \frac{x}{77} \quad \therefore \quad x = \frac{30 \times 77}{100} = 2,310 \text{ kg.}$$

Cantidad de cobre:

$$\frac{30}{100} = \frac{x}{6} \quad \therefore \quad x = \frac{30 \times 6}{100} = 1,800 \text{ kg.}$$

En 30 kg de aleación hay 5,100 kg de estaño, 2,310 kg de antimonio y 1,800 kg de cobre.

PROBLEMA IV. — *Se mezclan 3 litros de agua a 100° con 2 litros de agua 20°. ¿Cuál será la temperatura de la mezcla?*

Solución:

$$3 \times 100 + 2 \times 20 = 300 + 40 = 340$$

$$3 + 2 = 5$$

$$340 : 5 = 68^{\circ}$$

La mezcla tendrá una temperatura de 68°.

PROBLEMA V. — *Las densidades de dos líquidos son 1,4 y 0,9. ¿Qué cantidad hay que tomar de cada uno para que la densidad de la mezcla sea de 1,3?*

Solución:

$$1,3 \left| \begin{array}{cc} 1,4 & 4 \\ 0,9 & 1 \end{array} \right.$$

Del de 1,4 hay que tomar 4 litros, y 1 litro del de 0,9.

298. Título de una aleación. — Se llama *título* de una aleación, al cociente de dividir la cantidad de metal fino que contiene una aleación por el peso total de ella. Es decir:

$$t = \frac{p}{P} \quad (1)$$

en donde es: t , el título de la aleación; p , el peso del metal fino; P , el peso de la aleación.

De la fórmula (1) se deduce:

$$p = t \cdot P \quad ; \quad P = \frac{p}{t}$$

PROBLEMA. — ¿Qué cantidad de cobre hay que agregar a 240 gramos de plata pura para que resulte plata de 800 milésimos?

Solución:

Se tiene: $P = \frac{p}{t}$

$$P = \frac{240}{0,800} = 300$$

$$300 - 250 = 50 \text{ gr.}$$

Hay que agregar 50 gr de cobre.

Aplicaciones a la Mecánica

299. Velocidad de las poleas unidas con correas. (Fig. 27). — Las velocidades de dos poleas unidas con una correa son inversamente proporcionales a sus diámetros, expresándose esa relación por la fórmula:

$$\frac{N}{n} = \frac{d}{D}$$

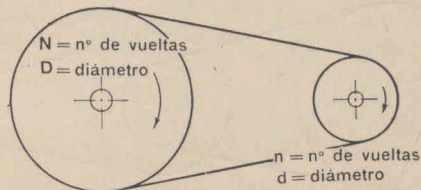


Fig. 27

en donde N y n expresan los números de vueltas, y D y d los diámetros de las poleas.

PROBLEMA. — *La transmisión de un taller está accionada por un motor eléctrico que da 1.200 vueltas por minuto, siendo de 15 cm el diámetro de la polea transmisora.*

Calcular el diámetro de la polea de la transmisión para que ésta dé 300 vueltas por minuto.

Solución:

Se tiene:
$$\frac{N}{n} = \frac{d}{D}$$

en donde:

$$N = 300 ; n = 1.200 ; d = 15 ; D = x,$$

luego:

$$\frac{300}{1200} = \frac{15}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{15 \times 1200}{300} = 60 \text{ cm.}$$

La polea debe medir 60 cm de diámetro.

300. Transmisión compuesta. (Fig. 28. — Si se conocen las revoluciones de la primera y últimas poleas y se desean conocer los diámetros de todas las poleas, se procede así:

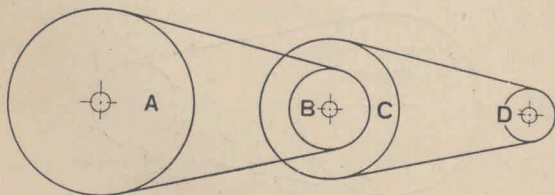


Fig 28

Se escribe una fracción cuyo numerador es el número de vueltas de la primera polea, y cuyo denominador es

el número de vueltas de la última polea y se simplifica todo lo posible. Luego se transforma el numerador y el denominador en un producto de dos factores y se multiplican numerador y denominador por un mismo número. Los números del numerador representan los diámetros posibles para las poleas transmisoras, mientras que los números del denominador representan los diámetros posibles de las poleas transmitidas.

PROBLEMA. — *En la fig. 28 la polea transmisora A da 120 vueltas por minuto, mientras que la polea D debe dar 1800 vueltas. Calcular los diámetros de las poleas A, B, C y D, para obtener esas velocidades.*

Solución:

Escribamos la fracción $\frac{120}{1800}$ cuyo numerador es el número de vueltas de la primera polea, y cuyo denominador es el número de vueltas de la última. Simplificando se obtiene:

$$\frac{120}{1800} = \frac{12}{180} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Convertimos los términos de la última fracción en productos:

$$\frac{1}{15} = \frac{1 \times 1}{3 \times 5}$$

Multiplicamos cada uno de estos factores por un mismo número:

$$\frac{(1 \times 20) \times (1 \times 10)}{(3 \times 20) \times (5 \times 10)} = \frac{20 \times 10}{60 \times 50}$$

Los diámetros de las poleas B y D miden 20 cm y 10 cm, y los diámetros de las poleas A y C miden 60 cm y 50 cm, respectivamente.

301. Velocidad de dos engranajes (Fig. 29. — Las velocidades de dos engranajes son inversamente proporcionales a sus números de dientes, expresándose esa relación por la fórmula:

$$\frac{N}{n} = \frac{d}{D}$$

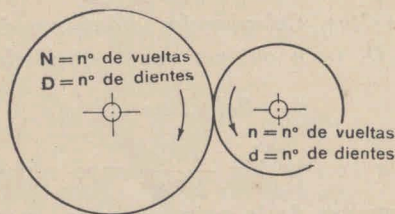


Fig. 29

en donde N y n expresan los números de vueltas, y D y d los números de dientes.

PROBLEMA. — *Dos engranajes tienen 120 y 75 dientes. La primera rueda da 50 vueltas por minuto, ¿cuántas dará la segunda?*

Solución:

Se tiene:

$$\frac{N}{n} = \frac{d}{D}$$

en donde: $N = 50$; $n = x$; $d = 75$; $D = 120$, luego:

$$\frac{50}{x} = \frac{75}{120} \therefore x = \frac{120 \times 50}{75} = 48$$

La segunda dará 48 vueltas.

Si se tratara de un engranaje compuesto, se procede lo mismo que en la transmisión compuesta, (300).

302. Remaches de una caldera a vapor. (Fig. 30). Las fórmulas siguientes dan las medidas de los remaches de una caldera conociendo el espesor de la chapa:

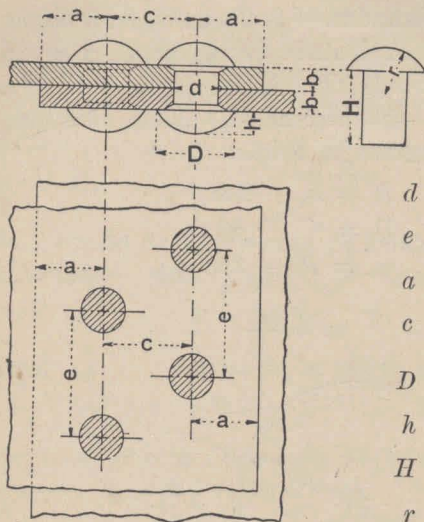


Fig. 30

$$d = 4 + 1,5 b$$

$$e = 10 + 2 d$$

$$a = 1,5 d$$

$$c = 2 d$$

$$D = a$$

$$h = 0,5 d$$

$$H = 1,6 d$$

$$r = d$$

Calcular estos valores para chapas de 4 y 6 milímetros de espesor.

Se tiene:

$$b = 4 \quad ; \quad d = 4 \times 1,5 \times 4 = 10 \quad D = 15$$

$$e = 10 + 2 \times 10 = 30 \quad h = 0,5 \times 10 = 5$$

$$\begin{array}{lll} a = 1,5 \times 10 & = 15 & H = 1,6 \times 10 = 16 \\ c = 2 \times 10 & = 20 & r = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} b = 6 & ; & d = 4 + 1,5 \times 6 = 13 \quad D = 19,5 \\ e = 10 + 2 \times 13 = 36 & & h = 0,5 \times 13 = 6,5 \\ a = 1,5 \times 13 & = 19,5 & H = 1,6 \times 13 = 20,8 \\ c = 2 \times 13 & = 26 & r = 13 \end{array}$$

303. Ruedas dentadas. — Se llama *circunferencia primitiva* de una rueda dentada de engranaje, a la circunferencia de una rueda de fricción que la sustituya. El diámetro de esta circunferencia se llama *diámetro primitivo*. En los engranajes se tiene:

$$D = d + 2m$$

$$D = (2 + n)m$$

$$d = D - 2m$$

$$m = \frac{d}{n}$$

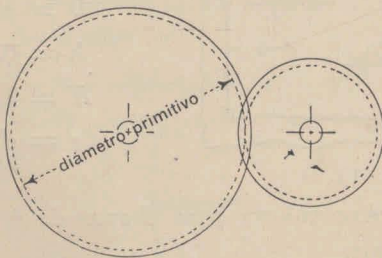


Fig. 31

siendo: D = diámetro exterior en milímetros; d = diámetro primitivo en milímetros; m = módulo o paso diametral.

PROBLEMA. — *Un engranaje tiene 18 dientes y un módulo de 5. Calcular el diámetro de la rueda no tallada y el diámetro primitivo.*

Solución:

Se tiene:

$$D = (2 + n)m$$

$$D = (2 + 18)5 = 100 \text{ mm}$$

$$d = D - 2m$$

$$d = 100 - 2 \times 5 = 90 \text{ mm.}$$

El diámetro exterior mide 10 cm y el diámetro primitivo 9 cm.

304. Ancho de una correa en relación con el ancho de la polea. — Está dado por la fórmula siguiente:

$$l = 0,9 L - 10$$

en donde es: l = ancho de la correa en mm; L = ancho de la polea en mm (fig. 32).

PROBLEMA. — *Una polea tiene 12 cm de ancho, ¿cuánto debe medir el ancho de la correa?*

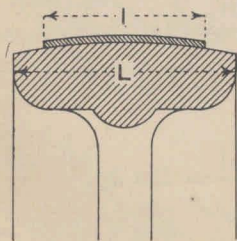


Fig. 32

Solución:

Se tiene:

$$l = 0,9 L - 10$$

$$l = 0,9 \times 120 - 10 = 98 \text{ mm.}$$

La correa debe tener 98 mm de ancho.

305. Repartición de cargas. — PROBLEMA. — *Un engranaje de 660 kg de peso está situado a 30 cm y a 80 cm de los cojinetes asentados en sendas ménsulas. Calcular la carga de cada cojinete (fig. 33).*

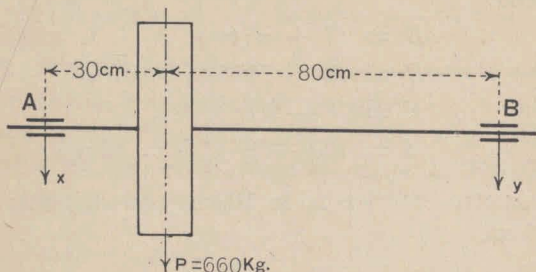


Fig. 33

Solución:

Se trata de repartir 660 kg en partes inversamente proporcionales a 30 y 80, luego:

Carga en A:

$$\frac{660}{30+80} = \frac{x}{80} \quad \therefore \quad x = \frac{660 \times 80}{110} = 480 \text{ kg.}$$

Carga en B:

$$\frac{660}{30+80} = \frac{y}{30} \quad \therefore \quad y = \frac{660 \times 30}{110} = 180 \text{ kg.}$$

Los cojinetes cargan 480 y 180 kg.

Aplicaciones a la Electricidad

306. Ley de Ohm. — La intensidad de una corriente es el cociente de la fuerza electromotriz y la resistencia; es decir:

$$I = \frac{E}{R} \text{ de donde: } E = I.R \quad ; \quad R = \frac{E}{I}$$

siendo: I = intensidad en amperios; E = fuerza electromotriz; R = resistencia en omios.

PROBLEMA. — *Calcular la fuerza electromotriz de un circuito de 20 amperios de intensidad y 11 omios de resistencia.*

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Se tiene:} \quad E &= I.R \\ E &= 20 \times 11 = 220 \text{ voltios.} \end{aligned}$$

307. Fórmula de la resistencia. — La resistencia de un conductor está dada por la fórmula:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{s} \text{ de donde: } l = \frac{R \cdot s}{\rho} \quad ; \quad s = \frac{\rho \cdot l}{R}$$

siendo: R = resistencia en omios; l = longitud en metros; s = sección en mm^2 ; ρ = coeficiente de resistividad, variable con cada metal.

PROBLEMA. — *Calcular la longitud que debe tener un alambre de maillechort de medio mm^2 de sección, para ofrecer una resistencia de 7 omios. $\rho = 0,21$*

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Se tiene:} \quad l &= \frac{R \times s}{\rho} \\ l &= \frac{7 \times 0,5}{0,21} = \frac{3,5}{0,21} = 16,67 \text{ m} \end{aligned}$$

Se necesita un alambre de 16,67 m de largo.

CAPITULO XXI

Gráficos de variación proporcional Coordenadas cartesianas ortogonales

308. Posición de un punto en un plano. — La posición de un punto en un mapa está determinada por la longitud y latitud, que son las distancias angulares del punto dado a dos círculos perpendiculares: el ecuador y un meridiano dado.

Como en un mapa, la posición de un punto en un plano está determinada por sus distancias a dos rectas de referencia, análogas al ecuador y al meridiano.

Sean xx' , e yy' figura 34, las dos rectas de referencia, perpendiculares, y supongamos que se trata de fijar la posición del punto P , conociendo:

distancia de P a $x'x = 3$ unid.

distancia de P a $y'y = 4$ unid.

Comprobamos en la figura que existen cuatro puntos que cumplen la misma condición, de manera que, en realidad, no tenemos determinada la posición de *un solo punto* P , sino de cuatro.

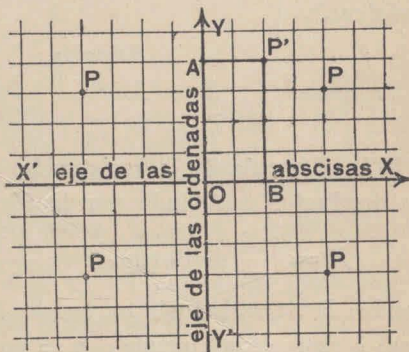


Fig. 34

Supongamos que se conozcan las distancias *relativas*, y sean:

distancia de P' a $x'x = + 4$ unid.

distancia de P' a $y'y = + 2$ unid.

Comprobamos que con esos datos se determina la posición de un punto P' , único.

Las distancias $P'A$ y $P'B$ son la *abscisa* y *ordenada* del punto P' .

309. Ejes, origen, cuadrantes. — Se llaman *ejes*, a las rectas perpendiculares que se emplean como líneas de referencia para determinar la posición de un punto en un plano.

El eje $x'x$ se llama *eje de las x* , y el eje $y'y$ *eje de las y* , fig. 34.

El punto O , común a los dos ejes, se llama *origen*.

Cada una de las cuatro partes iguales en que las dos rectas perpendiculares dividen el plano, se llaman *cuadrantes*.

310. Abscisa y ordenada. — Se llama *abscisa* de un punto perteneciente al eje de las x , a la medida de su distancia al origen.

Ejemplos, fig. 35:

El eje de las x también se llama *eje de las abscisas*.

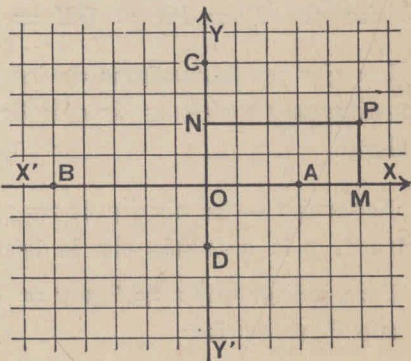


Fig. 35

Se llama *ordenada* de un punto perteneciente al eje de las y , a la medida de su distancia al origen.

Ejemplos, fig. 35.

$$\text{ordenada de } C = OC = 4$$

$$\text{ordenada de } D = OD = -2$$

El eje de las y también se llama *eje de las ordenadas*.

Dado un punto de un plano, sus *abscisas* y *ordenadas* son, respectivamente, las de sus proyecciones sobre ambos ejes.

La abscisa y ordenada de un punto son las *coordenadas* del mismo.

Ejemplo, fig. 35.

$$\begin{array}{l} \text{ordenada de } P = PM = ON = 2 \\ \text{abscisa de } P = PN = OM = 5 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{coordenadas de } P. \end{array} \right.$$

Los ejes perpendiculares de las abscisas y ordenadas constituyen un *sistema de ejes de coordenadas rectangulares*.

NOTACIÓN. — La abscisa de un punto se denota con la letra x , y la ordenada con la letra y .

Para indicar que $x = 5$, e $y = 2$ son coordenadas del punto P , se escribe:

$$P \left(\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 2 \end{array} \right), \text{ o bien: } P(5/2)$$

En general, las coordenadas de un punto M se indican así: $M(x/y)$.

311. Signos. — CONVENCIÓN. — *Las abscisas situadas a la derecha del origen son positivas, y las situadas a la izquierda, negativas. Las ordenadas situadas arriba del origen son positivas, y las situadas debajo, negativas.*

El sentido positivo en ambos ejes se marca con una flecha, como se observa en las figuras 34 y 35.

312. Dado un punto de un plano, hallar sus coordenadas, y recíprocamente.

Ejemplos, fig. 36:

1º) *Hallar las coordenadas del punto P.*

Se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \text{abscisa de } P = PA = 3 \\ \text{ordenada de } P = PB = 4 \end{array} \right\} \therefore P \left(\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \end{array} \right)$$

2º) *Hallar las coordenadas del punto Q.*

Se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \text{abscisa de } Q = OC = -5 \\ \text{ordenada de } Q = OD = -\frac{3}{2} \end{array} \right\} \therefore Q \left(-5 \mid -\frac{3}{2} \right)$$

3º) *Hallar las coordenadas del punto R.*

Se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \text{abscisa de } R = O \\ \text{ordenada de } R = OR = 3 \end{array} \right\} \therefore R(O/3)$$

4º) *Determinar la situación del punto de coordenadas*

$$x = 5, y = -4.$$

Trazo $x = OE = 5$, e $y = OF = -4$, y el punto S , común a las perpendiculares en E y en F , es el punto buscado.

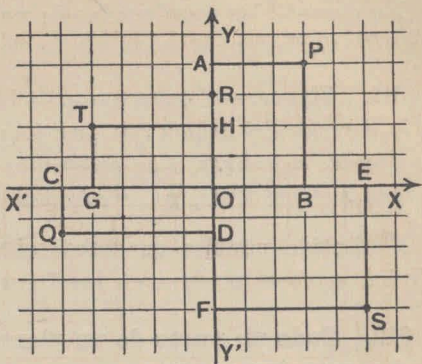


Fig. 36

5º) *Determinar la posición del punto de coordenadas*

$$x = -4, y = 2.$$

Trazo $x = OG = -4$, e $y = OH = 2$, y el punto T , común a las perpendiculares en G y en H , es el punto buscado.

OBSERVACIÓN. — De los ejercicios anteriores se deduce que, dado un sistema de ejes de coordenadas, a todo punto del plano le corresponde dos números, y recíprocamente, a cada par de números, considerados como abscisa y como ordenada, le corresponde un punto del plano.

Según sea la expresión, así es su gráfico o imagen, pudiendo ser una recta, o circunferencia, o eclipse, o parábola, o hipérbola, etc.

313. Gráfico de temperaturas. — Durante los 10 días que duró la enfermedad de una persona se anotaron día a día las siguientes temperaturas:

días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
temp ^a .	39°	39,5°	41°	40°	40,5°	40°	38,5°	37,4°	37,2°	37°

Representar gráficamente las variaciones de la temperatura de ese enfermo.

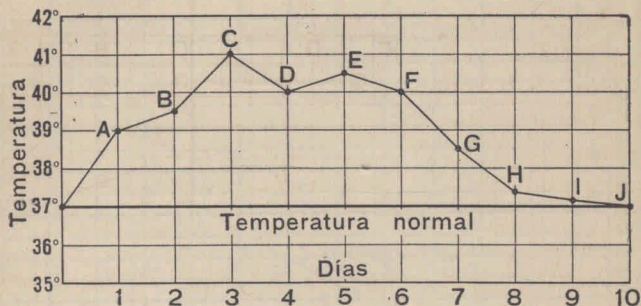


Fig. 37

En un sistema de coordenadas dado por el cuadrículado de la figura 37, consideramos las abscisas como días, y las ordenadas como temperaturas.

Como el día 1 tubo 39°, marcamos el punto *A*; el día 2, 39,5°, resultando el punto *B*; el día 3, 41°, resultando el punto *C*, y procediendo de la misma manera obtenemos los puntos *D*, *E*, ... *I*, *J*, que unidos consecutivamente nos da una quebrada que es el *gráfico de la temperatura*, que buscábamos.

Observando el *gráfico* se nota cómo el enfermo en los tres primeros días agravaba su estado, mientras que permanecía grave y estacionario entre el 3° y 6° días, pero a partir del 6° día el enfermo entra en franca mejoría hasta que el día 10° su temperatura era normal.

314. Gráfico de población. — En el gráfico de la figura 38 tenemos representado el *crecimiento de la población de la República* desde el año 1865 hasta 1925, de cinco en cinco años.

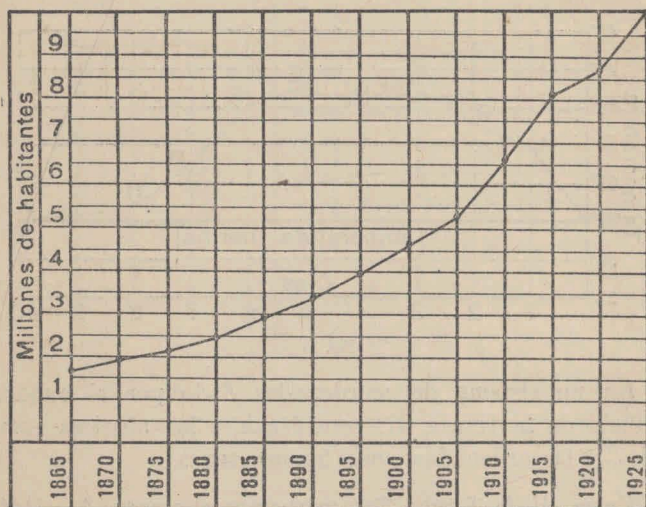


Fig. 38

Las abscisas son los quinquenios, y las ordenadas las cifras de la población.

315. Gráfico de Ferrocarriles. — Los *gráficos de ferrocarriles* consisten en unos cuadros en donde las abscisas marcan las horas, y las ordenadas las estaciones.

Se supone que entre dos estaciones el movimiento de los trenes es uniforme, representándose por un segmento

de recta, y la mayor o menor inclinación de éste indica la mayor o menor velocidad del tren. El cruce de dos segmentos indica el cruce de los trenes correspondientes, lo que debe suceder sólo en las rectas horizontales o estaciones.

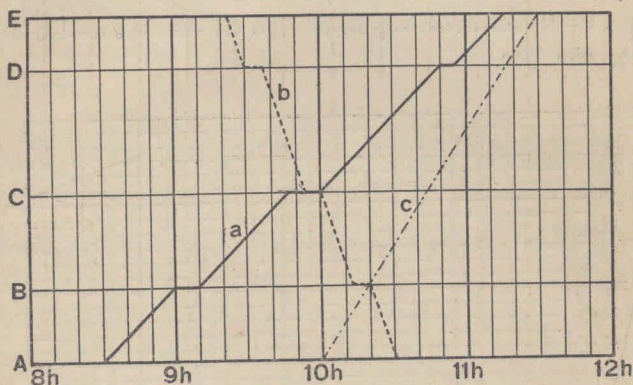


Fig. 39

La figura 39 representa un detalle de un gráfico. La línea *a* indica que un tren sale de la estación *A* a las 8 y media y llega a la estación *B* a las 9, en donde para 10 minutos. De *B* sale a las 9 y 10 y llega a la estación *C* a las 9 y 47. En *C* demora 13 minutos, en donde espera un cruce con un tren *b* que salió de *E* a las 9 y 23. El tren *a* llega a la estación *E* a las 11 y cuarto.

La recta *c* es el gráfico de un tren rápido que sale de *A* a las 10, se cruza en *B* con el tren *b* y llega a la estación *E* a las 11 y media.

Estos gráficos se utilizan sólo en las líneas en que por una sola vía van y vienen los trenes.

316. Gráfico de conversión de monedas. — En una casa de cambio nos han dado 109 francos franceses por 10 pesos moneda nacional, resultando el franco a poco más de 9 centavos, según el tipo de cambio de los últimos tiempos.

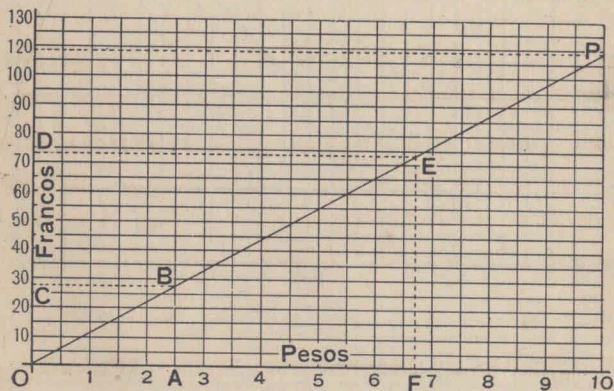


Fig. 40

Con esos datos vamos a construir un gráfico que nos permita, a ese tipo de cambio, convertir pesos en francos y viceversa.

Tomemos en el sistema de la figura 40, como abscisas los \$ $\frac{m}{n}$ y como ordenadas los francos y determinemos el punto P de abscisa 10 ($\$ \frac{m}{n}$) y de ordenada 109 (francos); la semirrecta OP nos permite la conversión que deseamos.

Ejemplos:

1º) *¿Cuántos francos equivalen a 2,50 \$?*

Tomo el punto *A* de abscisa 2,50 y trazo *AB* perpendicular al eje de las abscisas. Por el punto *B* trazo *BC* perpendicular al eje de las ordenadas, obteniendo el punto *C* de ordenada 27,25, que son los francos que equivalen a 2,50 \$.

2º) *He comprado varios libros por 73 fr.; calcular cuántos pesos importa la compra.*

Tomo el punto *D* de ordenada 73 y trazo *DE* perpendicular al eje de las ordenadas. Por *E* trazo *EF* perpendicular al eje de las abscisas, obteniendo el punto *F* de abscisa 6,70, que son los pesos que equivalen a 73 francos.

317. Gráfico de reducción de metros cuadrados a pies cuadrados. — En el sistema de la figura 39 las abscisas representan metros cuadrados, y las ordenadas pies cuadrados.

Sabemos que $1\text{ m}^2 = 10,76\text{ pies}^2$, de manera que podemos determinar el punto *P* de abscisa 1 m^2 y de ordenada $10,76\text{ pies}^2$. Uniendo *O* con *P* tenemos una semirrecta que nos permite reducir m^2 a pies^2 y viceversa.

Ejemplos: 1º) *¿Cuántos pies cuadrados equivalen a 3,5 m^2 ?*

Tomo el punto *A*, de abscisa $3,5 \text{ m}^2$, y así determino el punto *B*. Por *B* trazo una paralela al eje horizontal y encuentro en *C* que los $3,5 \text{ m}^2$ equivalen a $32,28 \text{ pies}^2$.

2º) ¿Cuántos metros cuadrados equivalen a 23 pies^2 ?

Tomo el punto *D*, de ordenada 23 pies^2 , y trazo una paralela al eje horizontal, resultando así el punto *E*. Por *E* trazo una perpendicular al eje horizontal y encuentro en *F* que los 23 pies^2 equivalen a $2,14 \text{ m}^2$.

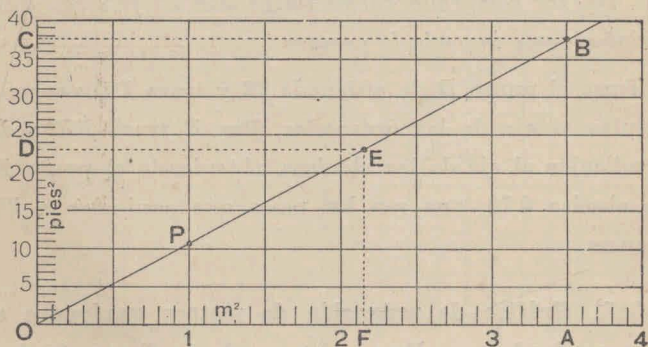


Fig. 41

318. Gráfico de reducción de litros a galones norteamericanos. — En el sistema de la figura 42 las abscisas representan litros, y las ordenadas galones norteamericanos.

Sabemos que $1 \text{ galón norteam.} = 3,785 \text{ litros}$, de manera que podemos determinar el punto *P* de ordenada 1 galón y de abscisa $3,785 \text{ litros}$. Uniendo *O* con *P* tene-

mos una semirrecta que nos permite reducir *galones* a *litros* y viceversa.

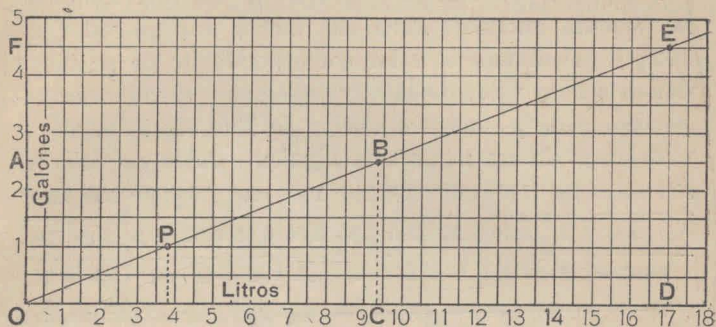


Fig. 42

Ejemplos: 1º) ¿Cuántos litros son 2,5 galones?

Tomo el punto *A*, de ordenada 2,5 galones y procediendo como ya sabemos, se halla en *C* que los 2,5 galones equivalen a 9,460 litros.

2º) ¿Cuántos galones son 17 litros?

Tomo el punto *D*, de abscisa 17 litros, encontrando en *F* que equivalen a 4,5 galones, aproximadamente.

319. Gráfico de la equivalencia entre las temperaturas del vapor de agua y su tensión en kilogramos por cm^2 . — La temperatura del vapor de agua saturado determina su tensión en kilogramos por cm^2 , es decir, en atmósferas de presión.

Entre las temperaturas 100º y 200º, se determina con suficiente aproximación la tensión máxima en atmósferas del vapor de agua por medio de la siguiente fórmula empírica:

$$p = \left(\frac{t}{100} \right)^4$$

en donde p es la presión en $kg.$ por cm^2 , y t es la temperatura en $grados\ C.$

Veamos de determinar el gráfico de las variaciones de la fórmula anterior. Para ello damos a t un valor de 100° , y calculamos el valor correspondiente de p ; luego damos a t un valor de 110° , y calculamos el valor correspondiente de p ; luego un valor de 120° , de 130° , etc, y obtenemos de esa manera la siguiente *tabla de valores*:

si t vale:	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	190°	200°
p vale:	1	1,46	2,27	2,85	3,84	5,06	6,55	8,35	10,5	13,03	16
punto:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K

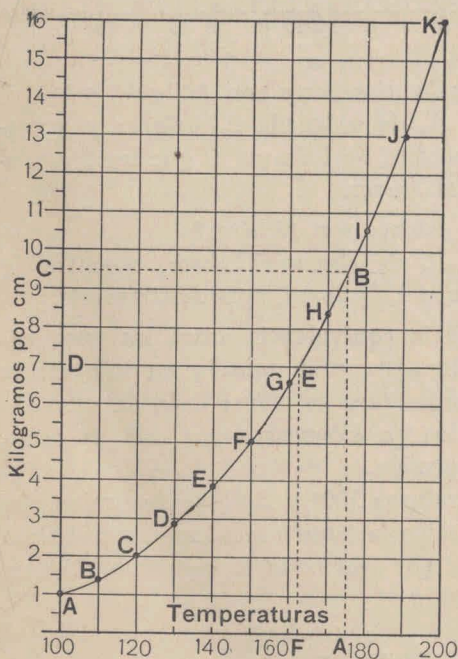


Fig. 43

Consideremos en el sistema de la figura 43 las temperaturas de 10 en 10 grados, como abscisas, y las ordenadas kg por cm^2 .

Cada par de valores de la tabla de valores nos da un punto, que unidos por un trazo continuo, nos da la curva representativa de los diversos valores de la fórmula

$$p = \left(\frac{t}{100} \right)^4$$

Procediendo como en los ejemplos anteriores, podemos saber qué presión corresponde a una temperatura dada, y qué temperatura corresponde a una cierta presión.

1º) *¿Qué presión corresponde a 175º de temperatura?*

Siguiendo la quebrada *ABC*, se halla 9,5 *kg*, que es la presión que tiene el vapor de agua a 175 grados de temperatura.

2º) *¿Para obtener en una caldera una presión de 7 atmósferas, qué temperatura deberá tener el vapor?*

Siguiendo la quebrada *DEF*, se halla 162º, que es la temperatura que deberá tener el vapor para obtener 7 atmósferas de presión.

INDICE

CAPITULO I

	Pág.
Nociones preliminares	9
Numeración	11

CAPITULO II

Suma de números enteros	17
Propiedades de la suma	19
Suma mental y rápida	21
Ejercicios	22

CAPITULO III

Resta de números enteros	24
Propiedades de la resta	26
Resta mental y rápida	27
Ejercicios	28

CAPITULO IV

Multiplicación de números enteros	31
Propiedades de la multiplicación	36
Multiplicación mental y rápida	39
Ejercicios	41

CAPITULO V

División de números enteros	43
Propiedades de la división	49
Ejercicios	51

CAPITULO VI

Divisibilidad	55
Propiedades de la divisibilidad	56
Caracteres de divisibilidad	56
Aplicaciones	59
Ejercicios	61

CAPITULO VII

Números primos	62
Descomposición de un número en sus factores primos	64
Ejercicios	65

CAPITULO VIII

Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo	66
Obtención del m.c.d. de varios números	69
Obtención del m.c.m. de varios números	70
Ejercicios	71

CAPITULO IX

	Pág.
Fracciones comunes	73
Propiedad fundamental	78
Aplicaciones	79
Simplificación de fracciones	81
Reducción a común denominador	82
Desigualdad de fracciones	83
Suma de fracciones	85
Resta de fracciones	88
Multiplicación	89
División de fracciones	91
Ejercicios	94

CAPITULO X

Fracciones decimales	106
Operaciones con fracciones decimales	112
Ejercicios	115

CAPITULO XI

Conversión de fracciones ordinarias en decimales y vice-versa	119
Ejercicios	126

CAPITULO XII

Potencias y raíces	128
Propiedades de las potencias	131
Raíz cuadrada	131
Raíz cúbica	141
Ejercicios	151

CAPITULO XIII

Sistema Métrico Decimal	154
Medidas de longitud	155
Medidas de superficie	157
Medidas de volumen	158
Medidas de capacidad	159
Medidas de peso	159
Densidades	162
Medidas monetarias	163
Medidas diversas	164
Medidas inglesas	165
Ejercicios	168

CAPITULO XIV

Números complejos	173
Operaciones con números complejos	173
Ejercicios	179

CAPITULO XV

	Pág.
Ecuaciones	181
Propiedades de las ecuaciones	182
Ejercicios	191

CAPITULO XVI

Razones y proporciones	195
Propiedades de las proporciones	196
Serie de razones iguales	202
Ejercicios	203

CAPITULO XVII

Magnitudes proporcionales	205
Regla de tres simple y compuesta	206
Regla del tanto por ciento	218
Ejercicios	214

CAPITULO XVIII

Cuestiones de Aritmética Comercial	217
Regla de Interés	217
Regla de Interés Compuesto	221
Regla de Descuento	223
Ejercicios	226

CAPITULO XIX

Repartición proporcional	227
Regla de Compañía	229
Regla de Alegación o Mezclas	233
Ejercicios	237

CAPITULO XX

Aplicaciones de Aritmética	239
Aplicaciones a la Física	240
Aplicaciones a la Química	244
Aplicaciones a la Mecánica	247
Aplicaciones a la Electricidad	255

CAPITULO XXI

Gráficos de variación proporcional	257
Coordenadas cartesianas ortogonales	257
Gráfico de temperaturas	261
Gráfico de población	263
Gráfico de ferrocarriles	263
Gráfico de conversión de monedas	265
Gráfico de reducción de metros cuadrados a pies cuad.	266
Gráfico de reducción de litros a galones	267
Gráfico de equivalencia entre las temperaturas del vapor y su tensión en kg. por cm. cuadrado	268

Abril, 11, 1930.

Obras de Enseñanza Secundaria Publicadas por la Casa

COBOS DARACT (J.) — Historia Argentina, 4ª edición:	
Primera parte, un tomo encuadernado	\$ 4.—
Segunda parte, un tomo encuadernado	„ 4.—
— Lógica (última edición), un tomo enc.	„ 7.—
DAGNINO PASTORE (L.) — El Universo, la Tierra y el Hombre (4ª edición un tomo encuadernado),	
— Estadística. Trabajos prácticos de geografía, tomo IV, para el 4º año de los colegios nacionales; 1 tomo enc.	„ 6.50
DAVILA SOTO (ALCIRA ISABEL). — Formulario pedagógico para la enseñanza de la composición en los grados 4, 5 y 6 (de utilidad para los maestros y alumnos). 1 tomo enc.	
	„ 4.—
GOURVILLE (H. D. de). — The modern pandbook of english	
1ª parte, para 2º año, 1 tomo enc.	„ 3.—
2ª parte, para 3er. año, 1 tomo enc.	„ 3.—
3ª parte, para 4º año, 1 tomo enc.	„ 3.—
— Observaciones sobre la enseñanza de las lenguas vivas en colegios nacionales, con referencias especiales al idioma inglés, un folleto	„ 0.50
La misma obra encuadernada en tela	„ 2.—
LEGRAND (A.) et ROUSTAN (Vital). — Méthode rationnelle et pratique pour l'enseignement du français:	
1er. año, un tomo encuadernado	„ 2.—
2º año, un tomo encuadernado	„ 2.—
3er. año, un tomo encuadernado	„ 2.—
4º año, (Literatura) un tomo enc.	„ 3.—
— Précis de Phonetique et de prononciation de la langue française, 1 folleto	„ 1.—
— Les sécretes de la conjugaison, 1 tomo enc. ..	„ 2.50
PERALTA (J. M.) — Historias de las civilizaciones antiguas (Oriente, Grecia y Roma), 1 tomo enc.	
	„ 4.—
PIZZURNO (CARLOS H.) — Pequeño Atlas y Geografía de la República Argentina, edición 1927, corregido y aumentado, un tomo enc.	
	„ 3.—
POIRIER-LALANNE (G.) — Curso de francés, primer año, un tomo encuadernado	
	„ 2.—
PORCEL (CARLOS A.) — Tratado de contabilidad, un tomo encuadernado	
	„ 5.—
— Resumen de historia americana y argentina. Con- testa punto por punto a los programas de 3er. año de los colegios nacionales; un tomo rústica	
	„ 1.50
— Resumen de historia americana y argentina. id. id. Para 4º año	
	„ 1.50
RUBIO (N.) — Tratado de prosodia y ortografía, un tomo encuadernado	
	„ 3.—
TORRES IBÁÑEZ (C. M.) — Pedagogía, un t. tela	
	„ 4.—