

COLECCIÓN DIDÁCTICA
DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES

PUBLICADA POR
J. REY PASTOR

PARA LOS PROGRAMAS DE 1937 DE ENSEÑANZA SECUNDARIA

ARITMÉTICA

PRIMERA PARTE

Librería "El Ateneo" de Pedro García

BUENOS AIRES

1937

PABLO GANTALUPPI

COLECCIÓN DIDÁCTICA
DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES

PUBLICADA POR

J. REY PASTOR

PARA LOS PROGRAMAS DE 1937 DE ENSEÑANZA SECUNDARIA

ARITMÉTICA

PRIMERA PARTE

OBSEQUIO
DEL EDITOR

Librería "El Ateneo" de Pedro García

BUENOS AIRES

1937

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

PROLOGO

No es tarea grata la preparación de textos elementales bajo la opresión de programas no acordes con las propias ideas, públicamente expuestas en ocasiones varias; pero la eficaz ayuda de nuestra ex alumna señorita Frenkel ha facilitado nuestra labor.

El voluminoso estudio publicado por la Inspección general de Enseñanza hacía esperar un fruto más sazonado; pero quizás por premura de tiempo, la preocupación urgente de la comisión parece haber sido la de derribar la construcción anterior, no dejando piedra sobre piedra, para volver a una situación poco distinta sustancialmente de la anterior a 1916, sin duda con el ánimo de levantar más tarde sobre el solar así despejado, un discreto armazón que responda a las normas modernas de enseñanza matemática elemental en los países más cultos.

Un estudio sistemático de tal evolución fué expuesto en nuestras conferencias de Montevideo, las cuales tuvieron al menos la utilidad de detener la ola logicista que a través del Río de la Plata estaba a punto de irrumpir en las playas orientales.

Antídoto infalible de todo extremismo es el estudio de la Historia; la falta de curiosidad por lo acontecido en otros países explica este vaivén entre dos direcciones antagónicas, igualmente anticuadas. Hecho paradójico:

los libritos para párvulos de nueve y diez años escritos en colaboración con nuestro colega Puig Adam, inservibles antes para la enseñanza argentina, por ser excesivamente intuitivos, resultan ahora terriblemente lógicos y abstractos para adolescentes de catorce años. Mientras en ellos se introduce la designación por letras desde las primeras páginas, en forma tan gradual y sencilla que la práctica la ha aprobado sin tropiezo alguno, en el nuevo programa no se admite el uso de letras hasta el final del segundo año.

La publicación de nuestra colección de Matemática elemental axiomática tendía a moderar el furor lógico de aquellos programas, rechazando de paso todo vestigio de complicidad en ellos; fin de esta nueva colección es atenuar el extremismo antagónico, que por ahora parece triunfar en las esferas directivas.

CAPITULO I

NUMERACION

§ 1. LOS NUMEROS NATURALES Y LA ARITMETICA

1.—Los números ordinales.

En los pueblos pequeños se designan las casas por el nombre de su propietario; así habrá quien diga “vivo en la casa de Pérez”, y todos los del pueblo saben el lugar de su domicilio. En las grandes ciudades tal procedimiento sería inaplicable y a cada casa de cada calle se le asigna un símbolo fijo, llamado *número*, que permite encontrarla rápidamente (*).

Si en un guardarropa se disponen numerosas perchas para colgar los sombreros de los concurrentes a una reunión y en cada percha se pone el nombre de la persona a quien pertenece el sombrero, al solicitarlos luego sus dueños será difícil encontrar rápidamente el sombrero requerido, pues habrá que ir revisando las perchas una por una hasta dar con el nombre buscado; y si además hay varias personas del mismo nombre, podrá haber confusión; pero si a cada percha se le pone ordenadamente un número, y a cada persona se le indica el número de su percha, al pedir por ejemplo el sombrero

(*) Este sistema de numerar las casas es el seguido en casi todos los países; en la Argentina y otras repúblicas americanas no se numeran las casas sino más bien las puertas.

N.º 18 se podrá encontrarlo rápidamente, porque este símbolo corresponde a una percha de posición bien determinada.

Así vemos que al manejar grandes colecciones o conjuntos de objetos, como son los sombreros de este ejemplo, las casas de una larga calle, las camas de una gran sala de hospital, los automóviles de una ciudad populosa, etc.; es muy cómodo asignarle a cada uno un símbolo, que desde ahora llamaremos *número ordinal*, para poder localizar rápidamente cualquiera de ellos, es decir, determinar su posición.

Número ordinal es un símbolo que se asigna a cada objeto de un conjunto, para determinar su lugar en éste. Los números ordinales pueden ser signos cualesquiera (*) pero los usados casi exclusivamente son los 1, 2, 3, ... designados por los nombres: *uno, dos, tres, ...* ya conocidos por los alumnos y decimos, p. ej., siglo *dieciocho*, Luis *catorce* de Francia, día *treinta* de enero. En general se pone la desinencia castellana que indica el carácter ordinal del número hasta el 10, y rara vez para los posteriores; así decimos: siglo *tercero*, Pío *nono*, León *trece*; y solamente en lenguaje literario suele decirse: año *cuadragésimo quinto*, siglo *décimonono*.

2.—Los números cardinales.

Si varios amigos se reúnen a comer y notan que alguno queda sin asiento, ¿se les ocurrirá tal vez cambiar la ordenación, sentándose en orden distinto, para ver si

(*) P. ej.: los toques de campana que indican la hora, los asteriscos simples, dobles, que distinguen las notas puestas al pie de página; los símbolos convencionales (cruces, banderas, asteriscos, ...) que usan con éste objeto muchos libros ingleses; etc.

de otro modo encuentran todos asiento? El sentido común no aconsejaría tal ensayo, pues la experiencia nos dice que, si sentados de un modo faltan sillas, lo mismo sucederá en cualquier otra ordenación; y, si todos tienen silla, lo mismo sucederá de cualquier otro modo que se sienten los comensales, es decir, no faltará ni sobrará asiento.

Ahora bien; ¿qué operación efectuará el encargado del comedor para saber si habrá o no habrá sillas suficientes para todos los comensales? Irá fijándose en cada uno sucesivamente, en un orden cualquiera, y asignará mentalmente a cada uno un número, diciendo mentalmente: el pelado, *uno*; el militar, *dos*; la señora de azul, *tres*; la de anteojos, *cuatro*; el gordo, *cinco*; el de la barba, *seis*; don Paco, *siete*; son *siete* personas. Procederá análogamente con las sillas y si llega como final al mismo número *siete*, afirmará sin titubeos que cada comensal tendrá silla sin faltar ni sobrar sillas, *cualquiera que sea el orden* en que se sienten.

El número *siete* tiene en este caso un doble significado: designa a don Paco, que es el último comensal, y lo usamos también para representar el *conjunto* de comensales o el *conjunto* de sillas o el de servilletas que tienen, como vemos, algo de común, que responde a la vaga idea de ¿cuántos? y que se llama *coordinabilidad*, esto es la propiedad de corresponder un elemento de un conjunto a cada elemento de otro conjunto, y recíprocamente; propiedad que es independiente de la naturaleza de los elementos y de su ordenación. Para evitar confusiones diremos: Don Paco es el 7º (séptimo) comensal; hay 7 (siete) comensales.

Contar los elementos de un conjunto es ordenarlos y asignarles sucesivamente los números ordinales 1, 2, 3, ... hasta llegar al último elemento. Este último número representa al conjunto, cualquiera que sea la ordenación, y se llama *número cardinal* del conjunto.

EJEMPLOS. — Contemos las letras de la palabra POSTULADO, en el orden en que están escritas y en orden alfabético, y se observa que resulta el mismo número 9.

	P O S T U L A D O P O S T U L A D O													
Números ordinales:	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	6°	4°	7°	8°	9°
Número cardinal:	9									9				

3.—La Aritmética.

Demostrar una afirmación cualquiera es reducirla a otras más sencillas, de cuya verdad resulta aquélla como consecuencia.

Las relaciones primeras, esto es, las más sencillas, cuya verdad se impone con evidencia, se llaman *postulados* (de *postular*, pedir) y una vez admitidas éstas se *deducen* o *demuestran* otras muchas proposiciones, que se llaman *teoremas*.

Más adelante analizaremos la esencia de la *demonstración*, en el sentido riguroso de la palabra; los razonamientos de este curso, basados en imágenes concretas, no son demostraciones en este sentido estricto; y sólo cuando lo sean, a modo de ejemplo del *método racional*, usaremos el título de *teorema*.

Como ejemplo de postulado tenemos ya este: “El número cardinal es independiente de la ordenación del conjunto”. Este es el fundamento de la Aritmética, o *ciencia de los números*.

Prescindir de la naturaleza de los elementos y de su ordenación se llama *hacer abstracción* de ellas. La Aritmética hace abstracción de la forma y propiedades físicas y químicas de los objetos; todos ellos son equivalentes en Aritmética, que es, por tanto, la *más abstracta* de las ciencias.

La palabra *cinco*, p. ej., que designa un *número abstracto*, evoca en nosotros la idea de una colección de objetos arbitrarios, con la sola condición de ser coordinable con los dedos de la mano; la frase *cinco manzanas* designa, en cambio, una colección de *especie* bien definida; y aunque se hace abstracción del tamaño, variedad, calidad, etc., tales expresiones reciben el nombre de *números concretos*.

EJERCICIOS.

1. — El número cardinal es independiente del orden, por el postulado fundamental de la Aritmética. Compruébese que al formar todas las posibles permutaciones de la letras *A, B, C, D*, resultan conjuntos coordinables.

2. — Obsérvese que al agregar nuevos elementos se complica rápidamente la formación de todas las posibles coordinaciones. Por ejemplo: si los doce apóstoles hubieran querido comprobar experimentalmente esa propiedad, suponiendo que tardasen dos minutos en cada nueva permutación, no habrían terminado todavía.

Y, sin embargo, a pesar de esta imposibilidad de comprobar experimentalmente la verdad de la proposición, se impone a nuestro espíritu con tal fuerza de evidencia, que puede establecerse como postulado fundamental de la Aritmética.

3. — A un hotel cuyas habitaciones son *A, B, C, D, E, F*, llegan siete viajeros y el hostelero los aloja de este modo: En la habitación *A* coloca dos, en la *B* el tercero, en la *C* el cuarto, en la *D* el quinto, en la *E* el sexto, y como queda una habitación libre, *F*, en ella ubica al huésped que provisoriamente se había alojado en la habitación *A*, quedando los siete alojados, cada uno en una habitación. ¿Cómo se explica la paradoja?

§ 2. LA SUCESION NATURAL DE LOS NUMEROS

4.—El número 1 y el número 0.

Al tener un solo objeto, una manzana, por ejemplo, el lenguaje vulgar no permite decir que se tiene “una colección de una manzana”; pero nosotros para uniformar las expresiones consideraremos cada objeto como una colección o conjunto; por ejemplo, si un alumno dispuesto a coleccionar estampillas japonesas tiene por el momento una sólo, ésta es ya una colección incipiente; diremos que *el número 1 representa las colecciones de un solo objeto.*

Si otro alumno dispuesto a coleccionar estampillas, no tiene todavía ninguna, es decir, si su álbum está vacío, diremos también que tiene una colección vacía o conjunto nulo. *Para designar una colección vacía se utiliza el símbolo 0 (cero). El número 0 no puede emplearse como ordinal, pues no indica ningún objeto, sino la ausencia de todo objeto.*

5.—Los números naturales.

Tanto los números ordinales como los cardinales se llaman números *naturales*; pero si se dice: *número natural*, sin especificar su naturaleza, se sobreentiende que se trata de un cardinal.

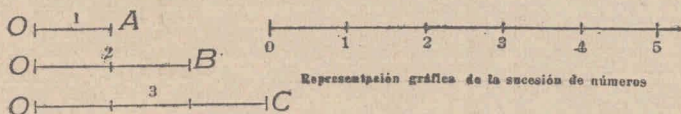
La sucesión 1, 2, 3, 4, 5, que forman los números cardinales representativos de una colección que se incrementa indefinidamente de unidad en unidad se llama sucesión natural de los números. También el 0 suele

incluirse entre los números naturales iniciando la sucesión.

La sucesión natural no tiene fin; pues por grande que sea una colección de objetos, siempre es posible agregarle un elemento más y hallar el número correspondiente en la sucesión natural. Por carecer de término final la sucesión natural se llama *indefinida*.

6.—Representación geométrica de los números.

En vez de elegir objetos cualesquiera para representar a los números, elijamos segmentos todos iguales entre sí, por ejemplo de 1 cm., para fijar mejor las ideas.



Si sobre una semirrecta llevamos, a partir de su origen, O , centímetros sucesivos, obtenemos puntos A , B , C , D , El número 1 está representado por el segmento OA ; el número 2 por el segmento OB , el número 3 por el segmento OC ; etc.

Como cada uno de estos segmentos tiene un extremo A , B , C , D , y a cada extremo corresponde un segmento de origen O que tiene ese extremo, resulta que en vez de los segmentos se puede tomar sus extremos como representantes de los números naturales, y así resulta la representación indicada en la adjunta figura.

EJEMPLOS. — Así proceden los agrimensores al medir longitudes en el suelo, poniendo al final de cada segmento una estaca con el número de unidades medidas a partir de un cierto origen. Lo mismo sucede en las medidas de los caminos y líneas de ferrocarril; cada número se coloca al final del segmento que representa.

Escalas. — En la representación gráfica asignamos un número a cada uno de los puntos *O, A, B, C,*; y a cada número natural le corresponde un punto. El número que corresponde a cada punto se llama su *abscisa*, y la recta provista de las abscisas de sus puntos equidistantes, se llama *escala*.

Así se dice: la *escala termométrica*, la *escala barométrica*, la *escala* de un mapa, etc.

EJERCICIOS.

1. — Construir la escala cuya unidad sea 1 cm. Idem 4 mm.
2. — Sabiendo que la altura de cada letra del texto de este libro, incluso el blanco de interlínea, es un *cíbero* (unidad tipográfica de longitud, que también se llama *pica*), construir una escala tipográfica, y con ella determinar cuántos cíberos tiene cada página de anchura y altura.
3. — Hágase lo mismo con las páginas de otros libros y se verá que tienen un número exacto de cíberos. Esta operación se llama *medir*.
4. — La Avenida de Mayo puede considerarse como una escala en que cada calle trasversal está representada por las centenas del número final de cada cuadra; así, por ejemplo: 3, Balcarce; 4, Defensa; 5, Bolívar; 6, Perú; 7, Chacabuco; 8, Piedras; 9, Tacuarí; 10, Irigoyen; 11, Lima; 12, Salta; etc. ¿Cuál es el origen de esta escala?
5. — Manejo de escalas en que cada segmento representa otro mayor, por ejemplo un km. como sucede en las escalas de los mapas.

§ 3. IGUALDAD Y DESIGUALDAD ENTRE NUMEROS

7.—Igualdad y desigualdad.

Si al repartir manzanas, dando una a cada niño, no sobran manzanas, ni queda ningún niño sin la suya, estos dos conjuntos: el de niños y el de manzanas, se llaman *coordinables* como dijimos en (2) y tienen por tanto el *mismo* número. Escribiremos esta relación con el signo $=$, que se lee *igual*, así:

número de niños $=$ número de manzanas
o más brevemente en abreviatura, con sus iniciales:

$$n = m$$

llamando n al número de niños y m al de manzanas. Tales relaciones se llaman *igualdades* y escribir $a = b$ equivale a expresar que los dos conjuntos tienen el mismo número, es decir, son *coordinables*.

Supongamos ahora que al efectuar el reparto, quedan niños sin manzanas; no podremos decir que el conjunto de manzanas es coordinable con el de niños, ya que comparados ambos sobran elementos en el conjunto de niños. Si contamos ahora las manzanas y los niños, resultarán números diferentes; al conjunto de niños le corresponderá un número que diremos *mayor* que el número de manzanas, o bien éste *menor* que aquél.

Números desiguales son aquellos que representan conjuntos no coordinables.

Número mayor es el que corresponde al conjunto en que sobran elementos, y menor el que corresponde al conjunto en que faltan elementos.

Si a es mayor que b , o sea b menor que a , escribiremos

$$a > b, \text{ o bien } b < a$$

Obsérvese que el número menor se pone del lado del vértice del signo y el mayor del lado más ancho. El número que precede se llama *primer miembro* y el que sigue *segundo miembro*.

La sucesión de los números naturales, incluyendo el cero, es:

$$0, 1, 2, 3, 4 \dots$$

Como el conjunto que representa a cada número es parte del conjunto que representa el número siguiente, se tiene para la sucesión de los números naturales de acuerdo con la definición dada

$$0 < 1 < 2 < 3 < \dots$$

Es decir, los números naturales dados por la sucesión fundamental están ordenados en forma creciente.

8.—Relaciones entre los signos $>$, $=$, $<$.

Hemos visto que al tratar de coordinar dos conjuntos, o resultan coordinables, o sobran objetos de uno, o sobran del otro.

La experiencia nos dice que sólo caben estos tres casos y que estas tres posibilidades son independientes de la naturaleza de los objetos, y del orden en que se efectúe la coordinación.

EJEMPLOS.—Si se trata de repartir lápices a los alumnos de una clase y faltan lápices, a nadie se le ocurrirá intentar nuevamente el reparto en otro orden para ver si cada alumno obtiene su lápiz o si todavía sobran lápices.

Si al sentarse los comensales de un banquete, quedan algunos sin asiento, cualquiera que sea la nueva distribución siempre faltarán asientos.

Es decir, las tres posibilidades: $a = b$, $a < b$, $a > b$ se excluyen y se completan.

Decir que *se excluyen* expresa que si es cierta una de estas tres relaciones, no lo son las otras. Decir que *se completan* equivale a expresar que entre dos números cualesquiera debe verificarse alguna de estas tres relaciones.

El mismo razonamiento prueba que:

Si un número es menor que otro, y éste menor que un tercero, el primero es menor que el tercero. Si un número es mayor que otro, y éste mayor que un tercero, el primero es mayor que el tercero.

Expresado en símbolos:

Si es $a < b$ y $b < c$ es $a < c$

Si es $a > b$ y $b > c$ es $a > c$.

Esta segunda proposición coincide con la primera, cambiando las letras. Una y otra admiten este enunciado: *De dos desigualdades del mismo sentido (es decir, ambas con el signo $<$ o ambas con el signo $>$) tales que el primer miembro de la segunda es el segundo miembro de la primera, sale otra desigualdad del mismo sentido entre el primero y el último de las dos desigualdades dadas.*

En cambio, de las desigualdades de sentidos opuestos:

$$a > b, b < c$$

ninguna relación puede deducirse entre a y c , pudiendo verificarse entre estos números, cualquiera de las tres relaciones, mayor, igual o menor.

EJEMPLO. — Se tienen las desigualdades:

$5 > 2$	$2 < 8$	y es	$5 < 8$.
$5 > 2$	$2 < 4$	y es	$5 > 4$.
$5 > 2$	$2 < 5$	y es	$5 = 5$.

9.—Combinación de igualdades y desigualdades.

Dadas varias relaciones de igualdad o desigualdad, tales que el primer miembro de cada una es el segundo miembro de la anterior, se suelen reunir en una sola expresión de varios miembros. Así p. ej.: las relaciones

$$a = b, \quad b < c, \quad c < d, \quad d > f$$

pueden escribirse de este otro modo:

$$a = b < c < d > f.$$

De esta relación, ninguna otra puede deducirse entre el primero y el último miembro, a y f , a causa de haber signos opuestos de desigualdad. Pero entre a y d puede asegurarse la relación: $a < d$, pues se deduce sucesivamente:

$$a = b, \quad b < c, \text{ de donde: } a < c;$$

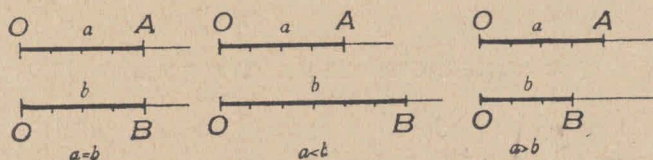
$$a < c, \quad c < d, \text{ de donde: } a < d.$$

En general: *Dados varios números, tales que cada uno está ligado con el siguiente por el signo $<$ ó $=$, se deduce la relación de $<$ entre el primero y el último número, excepto cuando todos los signos intermedios sean $=$.*

Si los signos intermedios son $>$ ó $=$, habiendo por lo menos un signo $>$, se deduce entre el primero y el último número la relación de $>$.

10.—Representación geométrica de la desigualdad.

Si se adopta para los números naturales la representación geométrica explicada (6) y son OA y OB los segmentos que representan a los números a y b , caben tres casos:



1.° Si A y B coinciden, $a = b$.

2.° Si A precede a B en la ordenación de los puntos de la semirrecta, es decir, si OA está contenido en OB , el conjunto de segmentos que componen OA es parte del conjunto de segmentos que componen OB , luego es $a < b$.

3.° Si A es posterior a B , el segmento OB es parte del OA , y resulta $a > b$.

De acuerdo con las definiciones establecidas en Geometría, resulta: a segmento *menor* corresponde número *menor* y a segmento *mayor* número *mayor*.

NOTAS.

En la vida corriente utilizamos esta correspondencia que hay entre los números y los segmentos. Así decimos: la casa número 1453 de Rivadavia está más lejos de la plaza de Mayo que la 745 de la misma calle, y más lejos que la 1450 de la calle Balcarce.

EJERCICIOS.

1. — Para cortar una varilla en n partes iguales ¿hay que hacer n cortes, o más de n o menos de n ?

2. — ¿Y si en vez de varilla es un aro?

3. — Por comparación directa de las letras, sin contarlas, dígame inmediatamente cuál de estas dos palabras tiene mayor número de letras:

Telefónicamente, Telegráficamente.

4. — He aquí el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números pares:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,

El segundo es parte del primero, y sin embargo ambos son coordinables.

¿Hay contradicción con lo dicho en el texto?

§ 4. NUMERACION DECIMAL Y ROMANA

11.—Objeto de la numeración.

Para representar los números verbalmente y por escrito, se han adoptado desde tiempo remoto (*) ciertos símbolos que se utilizan en todos los países cultos, y nombres que son distintos en los diversos idiomas. En castellano, estos nombres son:

1	2	3	4	5	
uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	

Siendo ilimitada la sucesión de los números, pues a cada uno sigue otro, se comprende la imposibilidad de adoptar un símbolo especial y un nombre para cada número: pero es posible combinar los nombres y las cifras que representan los nueve primeros números, más el símbolo *cero*, de tal modo que a cada número se le pueda asignar un nombre compuesto y un símbolo compuesto de varias cifras.

El conjunto de reglas que permiten asignar a cada número un nombre, se llama *numeración oral* y el sistema que permite asignar a cada número un símbolo compuesto de cifras, se llama *numeración escrita*.

12.—Números de una y de dos cifras.

En muchos casos son suficientes los números 1 a 9 llamados *digitos*, porque se pueden contar con los dedos;

(*) La numeración decimal, de origen indio, fué introducida en Europa por los árabes en el siglo XI, sustituyendo a la numeración romana.

pero si se trata de contar las letras del abecedario, los soldados de un regimiento, etc., será preciso ampliar la serie de números.

¿Cómo procede, por ejemplo, un librero para saber la existencia de un libro determinado?; empaquetándolos por *docenas* o por *decenas* y contando el número de paquetes, más el número de libros sobrantes. Si hay, por ejemplo, 5 decenas y 3 libros, basta anotar 5 *decenas*, 3 *libros*; pero todavía más breve es anotar: 53, con el convenio siguiente: la cifra de la derecha representa unidades simples; la siguiente decenas.

En este principio del *valor relativo* de las cifras, según el lugar que ocupan, se basa la numeración, que estudiaremos más adelante con toda generalidad.

Para designar los números de dos cifras se usan nombres bien conocidos ya de los alumnos. Así, por ejemplo: en vez de enunciar: *cinco decenas y tres unidades* se dice más brevemente: *cincuenta y tres*.

Queda así prolongada la sucesión de números naturales: 10, 11, 12, . . . , 99.

El número siguiente, o sea *ciento*, se considera ya como unidad de segunda especie y se representa así: 100.

Irregularidades en la numeración oral.

He aquí las modificaciones que el uso ha introducido en la nomenclatura de los cien primeros números:

En vez de leer: <i>diez y uno</i> ,	se dice: <i>once</i> ;
En vez de leer: <i>diez y dos</i> ,	se dice: <i>doce</i> ;
En vez de leer: <i>diez y tres</i> ,	se dice: <i>trece</i> ;
En vez de leer: <i>diez y cuatro</i> ,	se dice: <i>catorce</i> ;
En vez de leer: <i>diez y cinco</i> ,	se dice: <i>quince</i> .

Desde diez y seis hasta diez y nueve, la nomenclatura es regular, pero formando una sola palabra, cambiando la letra *z* por la *c*. Así se dice: *dieciseis*, *diecisiete*, *dieciocho*, *diecinueve*.

Los números formados de dos, tres, . . . , nueve decenas, se llaman así: *veinte*, *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *setenta*, *ochenta*, *noventa*.

La nomenclatura desde veinte hasta ciento es regular con pequeñas modificaciones indispensables para formar una sola palabra. Así se dice: *veintiuno*, *veintidós*, *veintitrés*, *veinticuatro*, *veinticinco*, *veintiseis*, *veintisiete*, *veintiocho*, *veintinueve*.

Desde treinta en adelante la nomenclatura es completamente regular.

13.—Principio general de la numeración.

El fundamento de la numeración es la agrupación de unidades en grupos de igual número (*docenas* o *decenas*, p. ej.) anotando las restantes que no llegan a formar un grupo. Esta operación se llama *división entera*; el número de grupos formados es el *cociente* y el número de unidades sobrantes es el *resto*.

Con los grupos así formados, que llamaremos *unidades de 1.º orden*, para distinguirlos de las unidades simples, se forman grupos o *unidades de 2.º orden*, anotando el resto, y así se sigue hasta llegar a un cociente menor que el divisor fijo, número que suele llamarse *base* del sistema.

Muchos objetos se agrupan por *docenas* en el comercio; con doce docenas se forma una *gruesa*, etc. He aquí un sistema *duodecimal* o de base *doce*; pero el sistema universal es el *decimal*, así llamado por ser su base *diez*.

EJEMPLO: Vamos a representar en el sistema decimal el número que corresponde al conjunto siguiente de puntos:

Para dividir este número por 10 no necesitamos representarlo por cifras; basta agrupar sus elementos de diez en diez en esta forma:

diez	diez	diez	diez
.....			
diez	diez	diez	diez
.....			
diez	diez	diez	tres
.....			

Tenemos, pues, un cociente que representa el número de decenas y un resto de 3 unidades simples. Representando las decenas por puntos gruesos, donde suronemos encerrados diez puntos, el conjunto es:

.....

Las decenas podemos agruparlas formando con cada diez una *centena*, es decir, haremos la división por 10 del cociente que hemos obtenido en la división anterior, y resulta 1 decena de resto.

diez decenas 1 decena 3 unidades

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

o sea 1 *centena*, 1 *decena* y 3 *unidades simples*; y como ya no puede proseguirse la división, las unidades que contiene el número han quedado clasificadas y basta anotarlas en este mismo orden, sin necesidad de escribir la clase de cada una, en esta forma: 113.

14.—Numeración decimal escrita.

He aquí las unidades sucesivas en el sistema decimal:

Una unidad de 1º orden contiene 10 unidades simples ;

” ” ” 2º ” ” ” ” de 1º orden ;

” ” ” 3º ” ” ” ” ” 2º ”

” ” ” 4º ” ” ” ” ” 3º ”

.....

Prosiguiendo las divisiones sucesivas explicadas en (13) hasta que ya no sea posible formar una unidad del orden superior siguiente, resulta :

Todo número se puede descomponer en unidades de órdenes sucesivos, siendo el número de unidades de cada orden menor que 10.

Por tanto, el número de unidades de cada orden se puede expresar por una sola cifra 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

Para representar cualquier número se adopta el símbolo formado por las cifras que representan las unidades simples, de primer orden, de segundo, etc., escritas de derecha a izquierda, y poniendo un cero en el lugar correspondiente, cuando el número no tenga unidades de algún orden. Así, por ejemplo, el símbolo

8 0 1 3 0 5

representa el número que tiene 5 unidades simples, ninguna de primer orden, 3 de segundo, 1 de tercero, ninguna de cuarto y 8 de quinto.

Compréndese que es esencial poner 0 en el lugar correspondiente al orden de unidades que no figuran en el número. Si omitiéramos los ceros en el símbolo anterior, el nuevo símbolo 8135 representaría el número formado por 5 unidades simples, 3 de primer orden, 1 de segundo y 8 de tercero.

Cada cifra tiene, por tanto, valor distinto según el lugar que ocupa; si está en el primer lugar de la derecha, representa unidades simples; si está en el siguiente representa unidades de primer orden, si está en el siguiente representa unidades de segundo orden, etc. En general:

Una cifra colocada a la izquierda de otra representa unidades del orden inmediatamente superior al de ésta.

Este principio del *valor relativo* es el fundamento de la numeración escrita.

15.—Numeración decimal oral.

Números menores que mil.

Hemos comenzado por la numeración escrita, por ser la más importante y universalmente admitida en todos los países cultos. Vamos a explicar ahora cómo se leen los números en lengua castellana; y como no solamente las palabras, sino también el principio en que se basa la numeración oral, son distintos que en otros países, la llamaremos hispano-americana, por ser en España y América hispánica donde casi exclusivamente se usa.

Para los números de dos cifras ya se ha explicado en el párrafo (12) cómo se enuncian sus dos clases de unidades. Para los números de tres cifras, basta enunciar el número de centenas (que se leen *cientos*) y a continuación las decenas y unidades, como ya se explicó para los números de dos cifras.

Las únicas irregularidades son éstas: en vez de decir cinco cientos se dice *quinientos*, en vez de siete cientos se dice *setecientos* y en vez de nueve cientos suele preferirse *novecientos*.

Con estas pequeñas modificaciones, se lee cualquier número de tres cifras.

EJEMPLOS:

115 se lee: *ciento quince.*

128 se lee: *ciento veintiocho.*

512 se lee: *quinientos doce.*

943 se lee: *novecientos cuarenta y tres.*

Números desde mil a un millón.

La lectura de los números de 4, 5 ó 6 cifras, no se hace enumerando las unidades de cada orden, sino enunciando por separado los millares y unidades, en esta forma:

Se separan las tres cifras de la derecha y se lee el primer grupo, agregando la palabra mil y a continuación se lee el grupo de la derecha.

EJEMPLOS: El número 34608 se lee así:
treinta y cuatro *mil* seiscientos ocho.

El número 909 909 se lee así:
novecientos nueve *mil* novecientos nueve.

El número 222 222 se lee así:
doscientos veintidós *mil* doscientos veintidós.

Números mayores que un millón.

La unidad de sexto orden se llama *millón*; la de orden 12 se llama *billón*; la de orden 18 se llama *trillón*; etc., pero son innecesarias unidades superiores.

Es innecesario también dar nombre a las unidades intermedias, porque la lectura se hace del modo siguiente:

Se agrupan las cifras de 6 en 6, a partir de la derecha, y se enuncian sucesivamente los trillones, billones, millones y unidades, aplicando a cada uno la regla anterior.

EJEMPLOS: El número 5 690 732 se leerá así:
cinco *millones*, seiscientos noventa *mil*, setecientos treinta y dos.

El número 108 649 302 se leerá así:
ciento ocho *millones*, seiscientos cuarenta nueve *mil*, trescientos dos.

El número 1 009 005 007 000 se leerá así:
un *billón*, nueve *mil* cinco *millones*, siete *mil*.

Adjetivos ordinales.

En lengua castellana, son:

Primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno o nono.

Décimo, undécimo, duodécimo, décimo tercero, décimo cuarto, ... décimo nono.

Vigésimo, vigésimo primero, vigésimo segundo, ...

Trigésimo, trigésimo primero, ...

Cuadragésimo, ...

16.—Las numeraciones romana y griega.

La numeración romana. Para apreciar mejor las ventajas de generalidad y sencillez de la numeración decimal, examinemos la numeración que antes de ella se usaba en Europa, y que también puede considerarse como decimal, pero más complicada, por no utilizar el cero ni el principio del valor relativo. Las unidades simples, las decenas, centenas y millares se representan por los signos siguientes:

I	X	C	M
uno	diez	cientos	mil

y cada número se representa escribiendo tantos signos de cada especie como unidades tenga del orden respectivo. Ejemplo: el número 1123 se escribirá así: MCXXIII.

Como la repetición de símbolos daría a los números longitud excesiva, se introduce el símbolo V=5, el L=50 y el D=500, y se conviene en que una o más unidades inferiores antepuestas a un signo deben restarse del mismo. mientras que deben sumarse si están a la derecha. Así, los números sucesivos son:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X;
 XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX;
 XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII, XXVIII,
 XXIX XXX;

.....
 Así siguiendo se llega al número XC=90, y después:

XCI, XCII, XCIII, XCIV, XCV, XCVI, XCVII, XCVIII, XCIM, C
 y a partir de C=100 se prosigue agregando a su derecha los anteriores. El número 999 se representa así: CMXCIX y el año actual es MCMXXXVII. El número 64 es LXIV.

La numeración griega. Consistía en lo siguiente: Los nueve primeros números se representaban por las nueve primeras letras del alfabeto $\alpha, \beta, \dots$, las nueve primeras colecciones de decenas por las letras siguientes; las nueve primeras colecciones de centenas, por las nueve últimas letras; para los millares se adoptaban nuevamente las primeras letras con ciertos distintivos, etc.

Por ejemplo, el número 64 se escribía así: ξδ, donde ξ representaba 60 y δ representa 4. Nótese que no se aplica el principio del valor relativo, pues 6 unidades simples se representan por la letra ζ.

NOTAS

Los dos sistemas actuales de numeración oral.

Conviene que los conozcan los alumnos, para facilitarles la lectura de libros extranjeros, evitándose confusiones, por el distinto sentido de las palabras.

Puede ser útil hacerles notar que el *billón*, según la numeración más generalizada en el mundo, es el millar de millones y el *trillón* es el millar de billones.

Este sistema, suele llamarse *corto*, en oposición al sistema hispánico que se llama *largo*, y que tiene adeptos especialmente en Inglaterra y Alemania. Según este sistema corto, la lectura de los números se hace mediante la descomposición siguiente:

850621040510=850 billones, 621 millones, 40 mil, 510

El sistema hispánico es más ventajoso para números muy grandes, y tiene la ventaja de su uniformidad en la gradación de los millones, billones, trillones, etc. Tiene, en cambio, la desventaja de carecer de nombre especial para el millar de millones; pero ya se va aclimatando la palabra *miliarda*, de uso internacional. Así diremos, por ejemplo, que la indemnización en la guerra franco-prusiana fué de 5 *miliardas*.

Ejemplos de palabras formadas con los numerales griegos:

mono, *di*, *tri*, *tetra*, *pente*, *hexa*, *hepta*, *octo*, *ennea*, *déca*.
monarca=jefe único; *monografía*=escrito sobre un solo asunto;
diedro=de dos caras; *diálogo*=plática entre dos personas;
trípode=de tres pies; *triángulo*=de tres vértices;
tetraedro=de cuatro caras; *tetralogía*=conjunto de cuatro obras;
pentateuco=colección de los cinco libros del Antiguo Testamento;
pentágrama=cinco rectas paralelas sobre las que se escriben las notas musicales;
exámetro=verso de seis medidas; *exápodo*=de seis patas
eptasílabo=de siete sílabas; *hebdomadario*=semanal;
octosílabo=de ocho sílabas; *octubre*=octavo mes de los romanos;
decámetro=diez metros; *década*=decena; *decálogo*=código de los diez mandamientos.

EJERCICIOS

1.—Hágase leer a los alumnos números de muchas cifras, y una vez que dominen la numeración oral hágase que escriban los nombres de los números leídos.

2.—Díctense números, según la numeración hispano-americana, y hágase que los escriban los alumnos.

3.—Encárguese que cada alumno lleve algunas palabras del lenguaje vulgar, donde intervengan numerales griegos.

NOTAS AL CAPITULO PRIMERO

Evolución histórica de la numeración. — Las ideas fundamentales del sistema actual de numeración, son éstas: *agrupación, valor relativo e introducción del cero*, y han aparecido en este mismo orden en la historia del conocimiento humano. Los pueblos primitivos hicieron los primeros cálculos aritméticos representando los números por piedras (*calculi*) que coleccionaban en grupos, formando así una especie de ábaco rudimentario; parece que así procedieron los chinos, y aún hoy, así cuentan algunos pueblos incivilizados. Los babilonios tenían un sistema de numeración mucho más perfeccionado; los números se representaban por símbolos *cuneiformes (forma de cuña)*, escribiendo por agrupación y cambio de carácter unidades de diversos órdenes. Para números algo grandes tomaban la base 60. Así se ha visto en tablas cuya antigüedad se remonta a unos veinte siglos antes de J. C.

La numeración griega de la escuela de Alejandría era ya *decimal*, pero no utilizaba todavía el principio del valor relativo ni el cero. Así, p. ej., la letra ξ representaba 60 en cualquier lugar.

Los celtas usaban la base *veinte*; y de esta numeración queda recuerdo en la numeración oral francesa. P. ej.: *quatre-vingts* = 80.

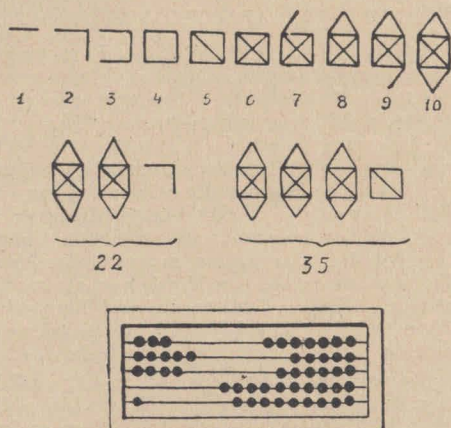
En la Edad Media se usa el sistema del romano *Boecio* (siglo VI), que no utiliza el cero, pero sí el principio del valor relativo, distribuyendo las nueve cifras cuyas formas indicamos abajo, escritas sobre tacos de madera (*ápices*), en las distintas columnas de una tabla o ábaco, indicadoras de los órdenes decimales. Este fué el origen de los *abacistas* o calculadores con el ábaco.

El sistema de escritura india, utilizando el cero, fué introducido en Europa por los árabes españoles del siglo XI y adoptado por los matemáticos que se instruyeron en su ciencia, como *Leonardo de Pisa, Sacrobosco, etc.* (siglos XII y XIII). El nuevo sistema llamado *algoritmo*, encontró una gran resistencia entre los *abacistas*; todavía contaban con el ábaco algunos comerciantes del siglo XVII. Entre *algorítmicos* y *abacistas* existe la misma diferencia de método que entre la escritura corriente y la formación de rótulos con letras de celuloide o tacos de madera.

Medios auxiliares para contar. — Para contar no es necesario efectuar materialmente las agrupaciones, con los elementos que se cuentan, en unidades de órdenes sucesivos, lo que sería imposible en muchos casos. Basta efectuar la agrupación con signos cualesquiera: puntos, rayas, piedras, bolitas, toques de campana, etc., que representan aquellos elementos.

Con los dedos se cuentan, por ejemplo, las sílabas de un verso, abatiendo un dedo por cada sílaba.

Con rayas puede contarse, formando configuraciones de diez en diez, como indica la figura, método usado frecuentemente.



El *ábaco de contar*, que se maneja en las escuelas, billares, ..., se funda en esto: Las unidades simples se cuentan con las bolas de la primera hilera; cuando se ha formado una decena, ésta se cuenta con una bola de la segunda hilera, y cuando se ha llegado a formar diez decenas se pasa una bola de la tercera, etc. En la figura está representado el número 10453.

Evolución de las cifras. — Aunque llamamos *arábigas* a nuestras cifras, obsérvese en el cuadro comparativo que poco tienen de parecido con las cifras árabes; menos que con los *ápices* de Boecio; pero es justo llamar *indo-arábiga* a nuestra numeración, por basarse en sus dos fecundos principios: el *valor relativo* y el *cero*.

Cifras egipcias				—	~	≡	2	=	∞		
Apices de Boecio		τ	ς	ρ	q	b	^	8	9	⊙	
Cifras árabes		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	
Siglos XII y XIII ...		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Cifras actuales		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

CAPITULO II

SUMA Y RESTA DE NUMEROS NATURALES

§ 5. PROPIEDADES DE LA SUMA

17.—Definiciones y notaciones.

Si en una habitación hay 4 sillas, en otra 6, en otra hay 8 y en la cocina hay 2, ¿cuántas sillas hay en toda la casa? Para contestar a esta pregunta bastaría reunir-las todas en una sola habitación y contarlas, prescin-diendo de la diversidad de formas, tamaños, etc. Pero se puede evitar la enojosa operación *material* de reunir-las, ya que para contar los objetos de una colección hemos visto que se pueden representar por rayas, puntos, etc., de modo que pondremos simplemente:



4 sillas



6 sillas



8 sillas



2 sillas

Contemos ahora el número total de rayas y obtendre-mos 20. Entonces diremos: cuatro sillas, *más* seis sillas, *más* ocho sillas, *más* dos sillas, son *veinte sillas*.

Esta operación de reunir todos los objetos de varios conjuntos en uno sólo y contar el conjunto total se llama *adición* o *suma*, y el número que resulta se llama *suma* de los números dados, los cuales reciben el nombre de *sumandos*.

Estos sumandos son números de los que en la lección

primera hemos llamado *concretos*. Si, en vez de sillas, hubiesen sido libros los objetos sumados, diríamos:

cuatro libros, más *seis* libros, más *ocho* libros,
más *dos* libros, son *veinte* libros,

pues la representación que hemos hecho por rayas vale lo mismo para sillas, que para libros, que para objetos cualesquiera, resultando siempre el número 20.

Prescindamos, pues, de la naturaleza de los objetos, y digamos simplemente:

cuatro más *seis*, más *ocho*, más *dos*, son *veinte*,

con lo que tendremos la expresión de una suma de números *abstractos*.

Esta palabra *más* (en latín *plus*) se substituyó en la escritura por la abreviatura *p.*, la cual degeneró, hasta convertirse en el signo $+$, que es el actualmente usado; y el resultado anterior se escribe así:

$$4 + 6 + 8 + 2 = 20$$

Análogamente, si no hubiese más que un silla en cada habitación, pondríamos:

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

es decir, cada número es una suma de unidades.

18.—Propiedades fundamentales de la suma.

El postulado fundamental de la Aritmética (3) nos indica las propiedades de la suma:

Propiedad uniforme. Hemos visto que si los conjuntos de sillas se substituyen por conjuntos de libros que tengan iguales números, es decir, si es, p. ej.:

$$a = a' \quad , \quad b = b' \quad , \quad c = c'$$

resulta el mismo número como suma, es decir:

$$a + b + c = a' + b' + c'$$

y como esto vale para cualquier número de sumandos, resulta:

Sumando los primeros miembros de varias igualdades y sumando los segundos, resultan sumas iguales.

Esta operación suele llamarse *sumar miembro a miembro*.

La igualdad $a + b = a' + b'$ puede enunciarse también así:

Sumando un mismo número a los dos miembros de una igualdad resulta una igualdad, pues b y b' representan el mismo número.

EJERCICIO: Un padre regala a su hijo cada mes tantos pesos como días tenga el mes, ¿cuántos pesos le da al año?

Propiedad conmutativa. El conjunto total es el mismo cualquiera que sea el orden en que se sumen los conjuntos, luego el número *suma* es el mismo. Es decir:

La conmutación de los sumandos no altera la suma.

Conmutar quiere decir cambiar el orden de los sumandos, sin modificar éstos.

EJERCICIO: Conmutando mentalmente los sumandos calcular inmediatamente:

$$3 + 100 + 7 \quad ; \quad 35 + 999 + 2100 + 1$$

Propiedad asociativa. Para sumar varios conjuntos (p. ej. 7) podemos agrupar primeramente *dos* de ellos en uno, otros *tres* en uno, los *tres* restantes en uno, y des-

pués agrupar los tres conjuntos obtenidos. Es claro que el conjunto formado por todos los objetos de los conjuntos, es siempre el mismo cualquiera que sea la forma de agruparlos, y por tanto:

Si se sustituyen varios sumandos por su suma efectuada no varía la suma total.

Dicho brevemente: se pueden *asociar* arbitrariamente los sumandos sin alterar la suma.

EJEMPLO: Sea la suma

$$3 + 99 + 7 + 75 + 2 + 25$$

Inmediatamente se observa que conviene asociar

$$3 + 7 = 10 \quad , \quad 99 + 2 = 101 \quad , \quad 75 + 25 = 100$$

y mentalmente se calcula la suma total: 211.

19.—Ley de monotonía de la suma.

Se llama así la propiedad, que enunciaremos brevemente: *sumandos mayores dan suma mayor.*

En efecto, si tenemos una suma y sustituímos un sumando por otro mayor, esto equivale a agregar nuevos objetos al conjunto sumando, o sea al conjunto suma; luego la nueva suma es mayor.

En símbolos: si $a' > a$ es $a' + b > a + b$, es decir: *al sumar un mismo número a los dos miembros de una desigualdad resulta otra de igual sentido.*

Si son varios los sumandos que crecen, la conclusión subsiste, es decir:

Sumando miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido resulta otra de este mismo sentido.

Por ej.: si $a' > a$, $b' > b$, $c' > c$,

$$\text{es } a' + b' + c' > a + b + c$$

Si hay alguna igualdad, ésta no modifica el signo $>$, pues sumar $d' = d$ es sumar el mismo número a los dos miembros, luego

$$a' + b' + c' + d' > a + b + c + d$$

Leyendo en sentido contrario, resulta:

Sumandos menores dan suma menor.

20.—Paréntesis y corchetes.

En Aritmética se usan paréntesis ordinarios () y también cuadrados [] que suelen llamarse *corchetes*, de tal modo que al encerrar una operación en un paréntesis o en un corchete se quiere indicar que se calcule previamente el resultado de esa operación y con él se opere sucesivamente. Así, por ejemplo,

$$(a + b) + (c + d)$$

expresa que se efectúan separadamente las sumas $a + b$ y $c + d$ y se suman luego los resultados; en cambio,

$$[(a + b) + c] + d$$

indica que a la suma de a y b se le agrega c y al resultado se le suma d . Ambos resultados finales son iguales por la propiedad asociativa.

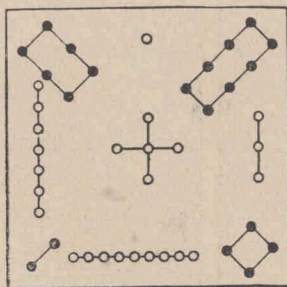
EJEMPLO: La asociación de sumandos efectuada en el ejemplo anterior se indicará así:

$$(3 + 7) + (99 + 2) + (75 + 25) = 211$$

EJERCICIOS

1.—Representar con cifras el *cuadrado mágico* de la figura adjunta (de origen chino; 2,800 años antes de J. C.). Sumar los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal. Enunciar la propiedad.

Tales cuadrados mágicos estuvieron muy en boga en la antigüedad y se les atribuían propiedades curativas de muchas enfermedades. llevándolos grabados en dijes, medallones, etc.



64	63	3	4	5	6	58	57
56	55	11	12	13	14	50	49
17	18	46	45	44	43	23	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	29	28	27	26	39	40
41	42	22	21	20	19	47	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	7	59	60	61	62	2	1

2.—Si se suma un mismo número a todos los del cuadrado mágico, ¿resulta otro cuadrado mágico?

§ 6. CÁLCULO DE LA SUMA

21.—Objeto del cálculo aritmético.

El *cálculo* primitivo consistía en representar los números por piedrecillas llamadas *calculi*, de donde deriva aquella palabra (*); pero se comprende la imposibilidad de operar así con grandes números, y de ella surgió la *numeración*, esto es, la representación por unas pocas cifras. Estudiemos ahora cómo se *calcula* con los números expresados por cifras, es decir, cómo se suman, restan, etc., sin necesidad de manipular con colecciones de cosas materiales.

Los estudiantes conocen ya las reglas de cálculo; pero es preciso justificarlas, es decir, *demostrarlas*.

22.—Suma de dos números dígitos.

Hemos visto que si a un número a se le suma 1 resulta el siguiente en la sucesión natural, o sea $a + 1$; si se le suma 1 resulta

$$(a + 1) + 1 = a + 2$$

por la propiedad asociativa; después resulta

$$(a + 2) + 1 = a + 3;$$

(*) Obsérvese que los *cálculos* o piedras formados en diversos órganos vitales, y el *cálculo* aritmético tienen etimología común.

etc. En esta propiedad se funda la construcción de la tabla de sumar.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

En la fila iniciada por un número cualquiera, por ejemplo 6, están las sumas sucesivas con los números 1, 2, 3, 9 que figuran arriba. Por tanto, la suma $6 + 5$ está en el punto donde se encuentra la fila iniciada por 6 y la columna iniciada por 5; allí se encuentra 11. Obsérvese que el cuadro es simétrico respecto de la diagonal, es decir, el mismo número 11 se encuentra en la intersección de la fila 5ª con la columna 6ª y lo mismo sucede con todos los pares.

23.—Suma de un número cualquiera con número dígito.

Si un cajero tiene 74 pesos, es decir, 4 pesos y 7 billetes de 10 pesos (o fajos de diez billetes de 1 peso) y recibe 5 pesos más, los unirá a los 4 pesos sueltos y resultará una suma de

7 billetes de 10 y $(5 + 4)$ billetes de un peso o sea un total de 79 pesos.

Supongamos que después recibe 4 pesos; al sumarlos a los 9 que tiene resultan 13, es decir, una decena, que

pasará al cajón de las decenas, sumándose a las 7 ya existentes, y quedarán 3 pesos sueltos; luego:

$$79 + 4 = 70 + 13 = 80 + 3 = 83$$

Si en vez de pesos consideramos *unidades* arbitrarias, en vez de fajos de diez pesos habrá que considerar *decenas*, y después *centenas*, *millares*, etc., el razonamiento es el mismo, luego resulta esta regla práctica: *Para sumar a un número otro de una cifra, se suma ésta a las unidades del primer sumando, y esta suma será la nueva cifra de las unidades si es inferior a diez; pero si supera a diez escribiremos solamente las unidades y aumentaremos en uno las decenas del primer sumando.*

En virtud de esta regla y de la propiedad asociativa, podremos sumar varios números *de una sola cifra* sin más que ir agregando sucesivamente cada una de las cifras a la suma anterior.

Si el cajero tiene 9 pesos, recibe 4, después 8, más tarde 7 y finalmente 5, irá sumando mentalmente así: *nueve y cuatro, trece; y ocho, veintiuno; y siete, veintiocho; y cinco, treinta y tres. TOTAL: 33.*

24.—Caso general: sumandos cualesquiera.

Supongamos ahora que tres cajeros del mismo banco han recibido respectivamente

1873 pesos , 2507 pesos , 845 pesos

y los entregan al cajero central. Este podrá clasificar así los billetes:

1 mil	8 cent.	7 dec.	3 unid.
2 „	5 „	0 „	7 „
	8 „	4 „	5 „

y comenzando por los pesos sueltos o unidades los agrupará, resultando 15, es decir, 5 pesos y una decena, que incorporará al cajón de las decenas y suma a éstas da 12 decenas, es decir, 2 decenas y 1 centena; ésta sumada con las centenas da 22 o sea 2 centenas y 2 millares; éstos más los millares de los sumandos, da un total de 5 millares, luego resulta en definitiva:

5 mil. 2 cent. 2 dec. 5 unid.

Este manipuleo de billetes no es necesario para saber la suma total recibida, ni sería posible para el jefe de la caja de un gran banco; la operación puede abreviarse escribiendo el cuadro de números concretos que acabamos de formar y operando con ellos como hemos indicado; pero inmediatamente se comprende la conveniencia de abreviar todavía más el trabajo, sustituyendo los números *concretos* por números *abstractos*; y sin necesidad de que el jefe de caja pierda su tiempo en formar paquetes ni siquiera en escribir el anterior cuadro de números concretos, le bastará escribir las cifras or-

1873	denadamente, y sumando sucesivamente las ci-
2507	fras de las unidades, decenas, etc., mediante
845	la tabla de sumar números abstractos que re-
—	cuerda de memoria, obtendrá el número total
5225	de pesos recibidos; y cuando su ordenanza forme
	efectivamente los paquetes, el resultado coincide-
	rá con el calculado.

He aquí, pues, el alto valor *científico* de la Aritmética, que reside en su postulado fundamental y estriba en prever resultados reales; este poder profético de la *previsión*, más allá de toda experiencia, es la virtud característica de toda ciencia digna de tal nombre.

Bien merece esta breve digresión el resultado práctico que acabamos de obtener como simple consecuencia de las propiedades fundamentales de la suma; y por su trascendencia para la vida comercial conviene enunciarlo en forma de regla práctica.

REGLA.—*Para sumar números de varias cifras se escriben ordenadamente cada uno debajo del anterior de tal modo que se correspondan en una misma columna las unidades de cada orden. Se suma la columna de las unidades, escribiendo las unidades de esta suma y llevando mentalmente las decenas resultantes, si las hay, a la columna de decenas. Se suma ésta, escribiendo las unidades en la misma columna y llevando las decenas, si las hay, a la columna siguiente, y así sucesivamente hasta la última columna, cuya suma se escribirá íntegra a la izquierda de la cifra anteriormente escrita. El número formado por todas estas cifras es la suma buscada.*

PRUEBA.—Para comprobar sumas largas es frecuente en la práctica sumar en otro orden, por ejemplo, de abajo arriba en la disposición por columnas. Si la suma está bien hecha el resultado debe ser el mismo por la propiedad conmutativa. Esta operación se llama *prueba* de la suma.

25.—Observaciones prácticas.

1.^a Al sumar las cifras de cada columna no es preciso seguir el mismo orden en que están escritas. Agrupándolas mentalmente en otro orden se logra muchas veces facilitar el cálculo. Por ejemplo, si se ven dos cifras 5, aunque no estén consecutivas, las sumaremos mentalmente, sustituyéndolas por 10, y lo mismo si se observa 3 y 7, o bien 1, 3 y 6, o combinaciones análogas.

2111	2. ^a Cuando hay más de dos sumandos, conviene anotar a la cabeza de cada columna el número que se lleva de la columna anterior. De este modo, si en algún momento se tiene que interrumpir la operación o se padece error, no será preciso repetir toda la suma desde el principio, sino solamente desde la columna en que se haya suspendido la operación o se haya padecido el error.
37509	
4313	
19685	
61507	
498	3. ^a Cuando se trata de sumas largas, es mejor todavía sumar cada columna, escribiendo íntegro el resultado en el lugar correspondiente, y sumar después las sumas parciales obtenidas, como indica el ejemplo adjunto. Esto equivale a dejar para el final la incorporación de las unidades que se llevan de una columna a otra.
1198	
587	
1349	
2496	
387	
3677	Al estudiar la multiplicación apreciaremos la utilidad de esta observación.
1396	
1089	4. ^a Finalmente suele ser ventajoso fraccionar las sumas largas en sumas parciales y sumar después los resultados.
1396	
4399	
495	Es este el procedimiento que suelen seguir los contadores, evitando así que la suma total de una columna llegue a tener cuatro cifras, pues la suma mental es más penosa y expuesta a errores.
1199	
2297	
2001	
104	unidades.
116	decenas.
42	centenas.
19	millares.
24464	Suma total.

EJERCICIOS

1.—Se calcula que Pitágoras, uno de los más antiguos geómetras griegos, nació hacia el año 569 antes de J. C. ¿Cuántos años han transcurrido desde el nacimiento de Pitágoras hasta nuestros días?

2.—En el orden de los días del año, ¿qué lugares ocupan el 25 de mayo, el 9 de julio y el 20 de septiembre?

3.—Hágase escribir a una persona el año en que nació y el de cualquier otra fecha para ella memorable; escriba luego los años transcurridos desde cada uno de estos dos acontecimientos y sume los cuatro números.

El adivinador simula pensar profundamente y sin conocer las fechas escritas adivina que la suma es igual a 3.874 (esto es, para 1937; para 1938 será la suma 3.876, etc.). ¿Por qué?

4.—Analizar las propiedades de la suma en que se fundan los razonamientos (23) (24) y (25).

§ 7. RESTA DE NUMEROS NATURALES

26.—Diferencia entre dos números.

Si en un platillo de una balanza ponemos 7 kg. y en el otro 5 kg., no hay equilibrio, es decir, no hay igualdad de peso, pero se logra esta igualdad agregando a los 5 kg. otros 2 kg., para formar un peso igual a 7 kg. Este número 2 cumple, pues, la condición de que sumado a 5 da el número 7 y se llama *diferencia* entre 7 y 5.

En general: Dados los números $a > b$ si **A** y **B** son los conjuntos que los representan, siendo **B** parte de **A**, el conjunto **A** aparece como suma de esta parte **B**, que tiene b elementos y otra parte **D**. Si d es el número de elementos de esta parte (que por lo menos es 1), resulta:

$$a = b + d$$

si es $a = b$, hemos visto que el número 0 cumple la condición $a = b + 0$. Por tanto:

*Si a es mayor o igual que b , hay un número d que sumado con el b da la suma a . El número a se llama *minuendo*, el b *sustraendo* y el d *diferencia*.*

Cabe preguntar si ese número d es el único que cumple la condición: $b + d = a$; en efecto, si d' es cualquier otro, será $d' > d$ o bien $d' < d$ y al sumarle b , resultará respectivamente, por la ley de monotonía

$$d' + b > d + b \quad \text{ó bien} \quad d' + b < d + b,$$

es decir, resulta una suma mayor o menor que a , luego d' no es la diferencia.

NOTACIÓN. — Ese número único d , diferencia entre a y b , se representa así: $a - b$. Por tanto: escribir

$$d = a - b, \quad [1]$$

equivale a poner:

$$d + b = a. \quad [2]$$

Decir que d es la diferencia entre a y b equivale, pues, a decir, que *sumado d al sustraendo da el minuendo*.

EJEMPLOS. — 1.º Sabiendo que la matrícula total en una clase es de 29 alumnos y que entre ellos hay 17 mujeres, ¿cuál es el número de alumnos varones? 2.º Desde comienzo del año hasta 22 de marzo han transcurrido 81 días, ¿cuántos faltan para terminar el año?

27.—Operaciones aritméticas directas e inversas.

Vemos, pues, que se puede dar esta definición de la resta: *dada una suma y uno de los sumandos, calcular el otro*. Es indiferente cual de los sumandos sea el dado; pues siendo la suma conmutativa, se pueden considerar los sumandos en cualquier orden.

Pronto veremos que, además de la suma, hay otras operaciones aritméticas que se definen directamente, mediante las cuales, de números dados se deduce otro número, que es el resultado. Y en cada operación se plantea el problema inverso: *conocido el resultado y uno de los datos, calcular el otro*. Tales operaciones se llaman *inversas*.

Diremos, pues: la resta es la *operación inversa de la suma*.

28.—Sumas y restas combinadas. Polinomios.

En una cierta fecha deposité 100 pesos en la Caja de Ahorros; varios días después retiré 25; más tarde ingre-

sé 40; otro día retiré 38, y después otros 50. Lo que me queda en la Caja se llama *saldo* a mi favor (*). ¿Cuánto vale este saldo?

Si a cada operación anoto en mi libreta el saldo resultante con objeto de saber en todo momento lo que tengo en la Caja, tendré escrito por orden de fechas lo siguiente:

$$\begin{aligned} 100 - 25 &= 75, \text{ primer saldo} \\ 75 + 40 &= 115, \text{ segundo saldo} \\ 115 - 38 &= 77, \text{ tercer saldo} \\ 77 - 50 &= 27, \text{ saldo final} \end{aligned}$$

y el saldo final es lo que tengo en la actualidad. Pero si no he llevado paso a paso la cuenta y me interesa hoy conocer el saldo, más breve será sumar separadamente las entradas y las salidas y restar ambas sumas, así:

Entradas	Salidas
100	25
40	38
»	50
140	— 113 = 27, saldo resultante.

Es decir, puedo hacer el cálculo de dos modos, debiendo resultar por ambos métodos *el mismo* número.

Vamos a expresar mediante los signos aritméticos estos dos modos de calcular. En el primero, calculo ante todo la diferencia $100 - 25$; luego añado a esta diferencia 40; es decir $(100 - 25) + 40$; después resto 38 del resultado; es decir $[(100 - 25) + 40] - 38$, etc. Para evitar el empleo de un excesivo número de paréntesis y

(*) Nos referimos aquí a una cuenta de las llamadas sin *interés* (los alumnos saben ya lo que se entiende por interés) y sin crédito abierto; es decir, que la caja no me entrega nunca más pesos de las que en ella tengo depositados.

corchetes, se ha convenido en suprimirlos cuando se van haciendo las operaciones en el orden en que están escritas de izquierda a derecha. Escribiremos, pues:

$$100 - 25 + 40 - 38 - 50.$$

Toda expresión de esta forma; es decir, compuesta de sumas y restas sucesivas, se llama *polinomio* o *suma algebraica*, y los números separados por los signos $+$ ó $-$ se llaman *términos del polinomio*, o de la suma algebraica.

En el segundo procedimiento de cálculo, bastará indicar la diferencia de las dos sumas de entradas y salidas; es decir

$$(100 + 40) - (25 + 38 + 50).$$

Podremos, pues, escribir la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} 100 - 25 + 40 - 38 - 50 &= \\ &= (100 + 40) - (25 + 38 + 50). \end{aligned}$$

Esta propiedad tan sencilla es el fundamento de la Contabilidad y puede enunciarse así:

El resultado de varias adiciones y sustracciones sucesivas es igual a la diferencia entre la suma de los números que se suman y la suma de los que se restan.

De otro modo: *Para calcular el valor de una suma algebraica, puede procederse hallando la suma de los términos precedidos del signo $+$ y restando del resultado la suma de los términos precedidos del signo $-$.*

29.—Propiedades y cálculo de los polinomios.

El saldo final sería también el mismo evidentemente, si hubiese hecho las mismas entradas y salidas en otro

orden (con tal de que hubiese habido siempre dinero suficiente en la Caja al efectuar cada salida). No cambiaría por ello la suma de entradas ni la de salidas, ni por consiguiente el saldo. Así, pues,

I. *Puede cambiarse el orden de los términos de un polinomio sin alterar su valor*, con tal de que las restas indicadas sigan siendo posibles.

Esta es la propiedad *conmutativa* para sumas algebraicas, y permite a veces simplificar el cálculo.

EJEMPLO: En vez de calcular el polinomio $249 - 98 + 113 + 149$, efectuando las operaciones en este orden, será mejor proceder así:
 $249 - 149 + 113 - 98 = 100 + 113 - 98 = 213 - 98 = 115$.

Si hago una entrada igual a una salida, puedo prescindir de ellas en el cálculo final, puesto que ambas se compensan. De otro modo: al suprimir el mismo sumando de la suma de entradas y de la de salidas, las dos disminuirán en este mismo número, y la diferencia o saldo será el mismo de antes.

Así, por ejemplo, en vez de $100 + 40 + 25 - 30 - 25$ calcularé simplemente $100 + 40 - 30$ y podré escribir la igualdad

$$100 + 40 + 25 - 30 - 25 = 100 + 40 - 30.$$

II. Este hecho se expresa diciendo:

Los términos iguales y de signos contrarios se reducen.

Tales términos se llaman *opuestos*.

Juan tenía 100 pesos. Le di 40; me devolvió 25 y volvió a entregarle 12. ¿Cuántos pesos tiene ahora? La cuenta de Juan será evidentemente ésta:

$$100 + 40 - 25 + 12.$$

Pero, lo que en definitiva he dado a Juan ha sido el valor del polinomio $(40 - 25 + 12)$, y como tenía 100, resulta:

$$100 + (40 - 25 + 12) = 100 + 40 - 25 + 12,$$

igualdad que se traduce en la siguiente regla general:

III. *Todo paréntesis precedido del signo + puede suprimirse. De otro modo: Se suma a un número un polinomio, escribiendo sus términos a continuación del número con el signo que tienen.*

Yo tenía 200 pesos. ¿Cuántos me quedan después de las operaciones anteriores. Podré calcular de dos modos. Restando de 200 los $(40 - 25 + 12)$ pesos que en definitiva han pasado a su poder; es decir,

$$200 - (40 - 25 + 12),$$

o bien restando sucesivamente de mi existencia mis entregas a Juan y sumando las suyas, así:

$$200 - 40 + 25 - 12.$$

Igualando ambos resultados, se obtiene

$$200 - (40 - 25 + 12) = 200 - 40 + 25 - 12,$$

IV. *Todo paréntesis precedido del signo — puede suprimirse escribiendo con signos contrarios los términos encerrados en él. O bien: Se resta de un número un polinomio, escribiendo a continuación del número los términos del polinomio con signos cambiados (suponiendo que las restas indicadas en el nuevo polinomio son posibles).*

V. Como caso particular de III y IV resulta: *Para sumar a un número una diferencia se suma el minuendo y se resta el sustraendo, y para restar de un número una diferencia se suma el sustraendo y se resta el minuendo.*

EJEMPLO: En lugar de sumar 9997, es más cómodo sumar 10000 y restar 3. En lugar de restar 995, es más cómodo restar 1000 y sumar 5.

EJERCICIOS.

1.— Cuando nació Juan, su padre tenía 32 años. ¿Cuál será la diferencia de edades dentro de 2 años? ¿Cuál era el año pasado? (Aplicúense teoremas 44).

2.— ¿Se altera el saldo de una cuenta al depositar una cantidad y después retirar la misma? ¿Sucedre lo mismo cuando se saca primero la cantidad y después se deposita, o debe imponerse alguna restricción?

3.— Dos trenes corren paralelamente en el mismo sentido. Al aumentar igualmente las velocidades de ambos ¿varía la distancia entre ambos?

¿Cómo debe entenderse esta igualdad de aumento de velocidad para que la distancia no varíe?

4.— Escribir mediante polinomios aritméticos el significado de diversos números romanos, como por ej., los que representan el año actual, la fecha de la independencia argentina, etc.

5.— En una ciudad había, a fines de 1924, H habitantes; designando por n, d, e, i , respectivamente el número de nacimientos, defunciones, emigraciones e inmigraciones habidas en 1925, y por N, D, E, I los habidos en 1926, expresar, mediante un polinomio la población a fines de 1926, y calcularla dando valores particulares.

6.— El famoso cuadro *Las Meninas* fué pintado por Velázquez en 1656, a los 57 años de edad, después de vivir 34 años en Madrid, donde se había instalado a los 4 años de casado. Deducir el año del nacimiento y la edad a que se casó.

7.— Son varios los entretenimientos aritméticos que consisten en adivinar una suma de varios números, intercalando sumandos convenientes. El más conocido consiste en agregar a cada número escrito otros cuyas cifras sean las del número restadas de 9. Por ejemplo, si se nos dan los números 3728, 527 y 6648, intercalaremos 6271, 472 y 3351 y podremos predecir la suma total:

$$9999 + 999 + 9999 = 10000 + 1000 + 10000 - 3 = 20997.$$

§ 8. CÁLCULO DE LA RESTA

30.—Regla general en el sistema decimal.

De modo análogo a lo hecho en la adición, veamos cómo se puede calcular la diferencia de dos números.

Hace falta ante todo saber de memoria y sin titubeos los resultados en el caso en que el sustraendo y la diferencia sean números de una sola cifra. Estos resultados los proporciona fácilmente la misma tabla de sumar. Así $13 - 6 = 7$, porque, conocido 6, el número de la tabla que sumado con él da 13, es 7.

Supongamos ahora que un cajero tiene 835 pesos y debe entregar 263, es decir, debe restar del número

8 cent. 3 dec. 5 unid.

éste: 2 „ 6 „ 3 „

Por de pronto puede entregar 3 pesos restándolos de los 5 y sobran 2; pero teniendo solamente 3 decenas (billetes de a diez), para entregar 6 será preciso cambiar un billete de a cien para tener 13 y una vez restados los 6 quedan 7. Finalmente, como sólo existen 7 centenas, al restar 2 quedan 5. La diferencia es por tanto:

5 cent. 7 dec. 2 unid. = 572.

Este método de cambiar un billete de a cien sería imposible si no hubiera ninguno; y entonces habría que

cambiar uno de mil; pero se evita tomando prestado un billete de a cien, para formar $13 - 6 = 7$ y descontándolo después, es decir, en la sustracción siguiente restaremos 3 en vez de 2. Esta regla es la más conveniente en todo caso (*) y en este ejemplo se aplicará así: tres a cinco, *dos*; seis a trece, *siete y llevo una*; una y dos, tres; a siete, *cinco*.

REGLA.—*Para restar un número de otro, escríbase debajo de éste, de modo que se correspondan en columna las unidades de los diversos órdenes. La cifra de las unidades de la diferencia se obtendrá restando las cifras correspondientes de minuendo y sustraendo, si esta resta es posible; si no lo es, se añadirá 10 a la cifra minuendo, cuidando de añadir una unidad a la cifra del orden siguiente del sustraendo; se procede luego sucesivamente en la misma forma para las decenas, centenas, millares, etc. Si después de hechas todas estas sustracciones quedan aún cifras en el minuendo, éstas se transcribirán íntegras en la diferencia.*

PRUEBA.—Si la operación está bien hecha y se suma la diferencia al sustraendo, deberá obtenerse el minuendo. Al hacer esta comprobación se dice que se efectúa la *prueba* de la sustracción. No es preciso hacer la suma aparte; en el mismo esquema de la resta se suman la diferencia y el sustraendo de abajo arriba.

(*) En la enseñanza primaria argentina se acostumbra a restar una unidad de la cifra siguiente del minuendo, en vez de agregarla a la cifra siguiente del sustraendo. En lugar de esta regla, nada recomendable, damos la del texto, que tiene además la ventaja de ser la misma que después se aplica en la división.

31.—Suma y resta de números no decimales.

SUMA.—Los mismos principios de agrupación, descomposición y ordenación que hemos utilizado para los pesos, al razonar las sumas y restas de números decimales, se aplican igualmente al sumar o restar cualquier clase de números concretos en los que aparecen unidades de diversos órdenes, aun cuando estas unidades no varíen de diez en diez.

EJEMPLO 1.º — 60 segundos forman un minuto; 60 minutos forman una hora. Para sumar 5 horas 2 minutos 20 segundos con 2 horas 15 minutos 12 segundos, dispondremos en columna las unidades y las sumaremos así:

5 horas	2 minutos	20 segundos
2 —	15 —	12 —
SUMA: 7 horas	17 minutos	32 segundos

EJEMPLO 2.º — Tratemos de sumar 5 horas 42 minutos 50 segundos con 2 horas 25 minutos 32 segundos; procediendo como antes tendríamos

5 horas	42 minutos	50 segundos
2 —	25 —	32 —
SUMA: 7 horas	67 minutos	82 segundos

Pero 82 segundos componen 1 minuto y 22 segundos; escribiremos, pues, estos segundos solamente y agregaremos 1 minuto a la suma de minutos. Los 68 minutos resultantes se descompondrán, a su vez, en 8 minutos, que escribiremos y 1 hora que agregaremos a la suma de las horas.

Estas incorporaciones se efectúan en la práctica mentalmente, de modo que, en definitiva, la operación presentará este aspecto:

5 h.	42 m.	50 s.
2 —	42 —	32 —
SUMA: 8 d.	25 m.	22 s.

Nuevos ejemplos:

6 sem.	5 d.	14 h.
3 —	4 —	15 h.
SUMA: 10 sem.	3 d.	5 h.

Las unidades de arcos y ángulos siguen la misma ley que las de tiempo: 60 segundos (60") forman un minuto (1'); 60 minutos (60') forman un grado (1°).

$$\begin{array}{r} 3^{\circ} 18' 20'' \\ 15^{\circ} 3' 15'' \\ \hline 18^{\circ} 21' 35'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10^{\circ} 35' 52'' \\ 24' 14'' \\ \hline 11^{\circ} 0' 6'' \end{array}$$

RESTA.—Análogamente se procede para la resta.

EJEMPLOS:

$$\begin{array}{r} 4 \text{ h.} \quad 12 \text{ m.} \quad 20 \text{ s.} \\ 1 \text{ —} \quad 8 \text{ —} \quad 15 \text{ —} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \text{ h.} \quad 12 \text{ m.} \quad 20 \text{ s.} \\ 1 \text{ —} \quad 15 \text{ —} \quad 42 \text{ —} \\ \hline \end{array}$$

DIFERENCIA: $\begin{array}{r} 3 \text{ h.} \quad 4 \text{ m.} \quad 5 \text{ s.} \\ 2 \text{ h.} \quad 56 \text{ m.} \quad 38 \text{ s.} \end{array}$

Como 42 no puede restarse de 20, ha sido preciso descomponer un minuto en 60 segundos para agregarlos a los 20. La resta de segundos se ha convertido, pues, mentalmente en $80 - 42 = 38$, y como de los 12 minutos del minuendo, no se pueden restar 16, descompondremos 1 hora para agregar sus 60 minutos a los 12 que tenemos. Así han resultado $72 - 16 = 56$ minutos; y por fin, $4 - 2 = 2$ horas.

Nuevos ejemplos:

$$\begin{array}{r} 5^{\circ} 14' 18'' \\ 1^{\circ} 14' 20'' \\ \hline 3^{\circ} 59' 58'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15^{\circ} 21' 40'' \\ 20' 55'' \\ \hline 15^{\circ} 0' 45'' \end{array}$$

Efectuar las siguientes sumas:

$$\begin{array}{r} 17^{\circ} 35' 38'' \quad 2 \text{ sem.} \quad 5 \text{ d.} \quad 14 \text{ h.} \quad 20 \text{ m.} \\ 30^{\circ} 20' 56'' \quad 7 \text{ —} \quad 3 \text{ —} \quad 9 \text{ —} \quad 58 \text{ —} \\ \hline 15^{\circ} 48' 56'' \quad 6 \text{ —} \quad 22 \text{ —} \quad 50 \text{ —} \end{array}$$

32.—Desigualdades entre números no decimales.

Dados dos números con unidades de diversos órdenes no decimales, como los que acabamos de manejar, para reconocer cuál es mayor de los dos, bastaría repetir las definiciones y razonamientos de los decimales; podremos, pues, decir, sin más explicaciones, que “será mayor aquel que tenga unidades de mayor orden, o, si tienen los mis-

mos órdenes, será mayor el que tiene mayor el número de unidades de mayor orden; si estos números son iguales, será mayor el que tenga mayor el número de unidades siguientes, etc."

En efecto, si tienen igual número de unidades del orden superior, la comparación se reduce a la de los números formados por las unidades que les siguen; y si suponemos que para éstos se verifica la regla, también subsiste al agregar igual número de unidades superiores.

Como para una sola clase de unidades la regla se verifica, también vale para dos clases de unidades, luego también para tres, etc., y en general para cualquier número de unidades.

Si el número a tiene mayor número de unidades de orden máximo que el b , descomponiendo una unidad en unidades del orden inferior siguiente el número a tiene seguramente más unidades de este orden que el b y repitiendo la operación resulta $a > b$.

EJEMPLOS Podemos afirmar que un ángulo de $14^{\circ} 15' 6''$ es mayor que otro de $50' 20''$ y menor que otro de $14^{\circ} 15' 10''$.

EJERCICIOS:

1.—En el comercio de maderas se emplean unidades inglesas: *pies* y *pulgadas* (1 pie = 12 pulgadas). De una tabla de 15 pies 8 pulgadas se corta otra de 6 pies 11 pulgadas, ¿cuál es la longitud de la tabla restante?

2.—Calcular la diferencia de latitudes entre París ($48^{\circ} 50' 11''$) y Madrid ($40^{\circ} 24' 30''$).

3.—Cuando en París son las 13 h. 25 m., en Nueva York son las 8 h. 20 m. Cuando en Nueva York son las 12 h., en Buenos Aires son las 13 h. 2 m. y en Leningrado las 18 h. 57 m. ¿Qué hora será en París, Nueva York y Buenos Aires cuando en Leningrado sean las 12? ¿Qué hora será en París, Nueva York y Leningrado cuando en Buenos Aires sean las 14 h. 55 m.?

33.—Complemento aritmético y sus aplicaciones.

Se llama *complemento aritmético* de un número a la diferencia entre la unidad decimal inmediatamente superior y este número.

Por ej.: los complementos de los números

	74	983	109190
son:	53	17	890810

pues sumados con ellos dan respectivamente: 100, 1000, 1000000.

Obsérvese que tales complementos se han formado así: *cada cifra de resta de 9, excepto la última significativa, que se resta de 10.*

Tal regla es general, pues la suma de ambos resulta la unidad seguida de ceros.

El uso del complemento reduce las sumas algebraicas a sumas ordinarias.

EJEMPLO: Sumando y restando 1000 y 100 resulta:

$$\begin{aligned}
 &2513 - 983 - 47 = \\
 &= 2513 + 1000 - 983 + 100 - 47 - 1000 - 100 = \\
 &= 2513 + 17 + 53 - 1000 - 100 = \\
 &= 2583 - 1000 - 100 = 1483
 \end{aligned}$$

Basta este ejemplo para justificar la siguiente regla, antiguamente muy usada, pero que ha perdido interés desde la difusión de las máquinas de sumar y restar:

REGLA.—*Para calcular una suma algebraica se sustituye cada sustraendo por el sumando complementario y de la suma total se resta una unidad del orden inmediato superior al de cada sustraendo.*

EJEMPLOS: Calculemos las sumas algebraicas:

$$2659 - 1247 + 652 \quad ; \quad 2152 - 1642 - 423$$

2659	2152
18753	18358
652	1577
2064	87

EJERCICIOS

1.—Es importante acostumbrarse a calcular sumas y restas combinadas, sin separar los minuendos de los sustraendos. Así, por ejemplo, para calcular la suma algebraica:

$$2659 - 1247 + 652;$$

diremos: 9 menos 7 son 2, más 2 son 4; escribo 4.
 5 menos 4 es 1, más 5 son 6; escribo 6.
 6 menos 2 son 4, más 6 son 10; escribo 0 y llevo 1.
 1 y 2 son 3, menos 1 son 2; escribo 2.

Sea la suma más complicada: $2152 - 1642 - 423$;

3 y 2 son 5, a 12 van 7; escribo 7 y llevo 1.
 1 y 4 y 2 son 7 a 15 van 8; escribo 8 y llevo 1.
 1 y 4 y 6 son 11, a 11 va 0; escribo 0 y llevo 1.
 1 y 1 son 2 a 2 son 0.

Resultado: 87.

2.—Un juego interesante, porque obliga a efectuar sumas y restas mentales, es el siguiente: Cada una de dos personas va diciendo un número cualquiera, que no supere a 10; y se van sumando estos números; gana la que primero llega a la suma 100.

Para ganar basta comenzar por 1 y decir cada vez el número complementario del que diga la otra, respecto de 11; de este modo el iniciador, va diciendo las sumas 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100.

¿Cómo debe procederse para ganar, dejando la iniciativa al otro, cuando el tanto final se fija en 99? ¿Y si es 50?

NOTAS AL CAPITULO II

Notas históricas. — Los signos actuales son mucho más modernos que las reglas de cálculo aritmético.

En el siglo XVI aún se usaban los signos *p.* y *m.* (abreviaturas de las palabras *plus* y *minus*, que en latín significaban *más* y *menos*). Poco a poco fueron adoptándose los signos $+$ y $-$ introducidos por el alemán *Widmann* en 1489.

El signo $=$ fué usado por vez primera en 1557 por el médico inglés *Robert Recorde*, justificándolo así: “Nada hay más igual que dos rayas iguales y paralelas”. Antes, se utilizó la abreviatura *æ* de la palabra latina “*æqualis*”, que aún aparecía, deformada, en libros de los siglos XVI y XVII. Los signos $<$ y $>$ fueron introducidos más tarde por el inglés *Harriot* (1631).

Los paréntesis fueron utilizados por primera vez sistemáticamente por *Vieta* (siglo XVII), quien también generalizó el empleo de letras, creando el Álgebra elemental.

Las reglas para sumar y restar son de origen hindú, lo mismo que el sistema de numeración. Es de notar, sin embargo, una diferencia. Los hindúes empezaban la operación por las unidades de mayor orden; es decir, de izquierda a derecha. Estos procedimientos, como la numeración, fueron transmitidos a Occidente por los árabes.

He aquí, con cifras actuales, el modo de efectuar la resta 12.025 — 3.604 por el astrónomo de Bagdad *Mohamed ben Musa Aljuarizmi* (siglo IX). Se comienza por la izquierda y cada punto indica una cifra borrada:

	8	8
9	.4	.4 1
..025	...25	...2.
.604	..04	

Los hindúes escribían sobre tablillas con polvo y arenilla, corrigiendo las cifras fácilmente. Solían escribir el sustraendo encima del minuendo, y los resultados (suma y diferencia) también encima de los datos.

CAPITULO III

MULTIPLICACION DE NUMEROS NATURALES

§ 9. PROPIEDADES FUNDAMENTALES

34.—Definición y notaciones.

Con frecuencia se presentan sumas cuyos sumandos son todos iguales.

EJEMPLO: Si un obrero gana de jornal 7 pesos, ¿cuánto gana en toda la semana? Será una suma de seis sumandos iguales a 7:

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 42.$$

Un pelotón de soldados tiene 8 filas de a 4. ¿Cuántos soldados tiene?

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 32.$$

Una sala tiene 25 hileras de baldosas y cada hilera 23 baldosas; ¿cuántas baldosas hay en total? Habría que sumar 25 sumandos iguales a 23, operación bastante larga; y ésta sería prácticamente imposible si se trata, p. ej., de calcular de este modo los ladrillos de un edificio o el número de días transcurridos desde el descubrimiento de América. Compréndese, por tanto, la necesidad de estudiar especialmente esta operación, e idear un método rápido para calcular el resultado.

DEFINICIÓN.—*Multiplicar* un número, llamado *multiplicando*, por otro, llamado *multiplicador*, es formar una suma de tantos sumandos iguales al multiplicando como unidades tenga el multiplicador. El resultado se llama *producto*, y se indica la operación escribiendo el multiplicador a continuación del multiplicando, separados por el signo $\times$ o por un punto ., que se leen: *por*.

Indicaremos, pues, las operaciones anteriores de este

$$7 \$ \times 6 = 42 \$ \quad 4 \text{ soldados} \times 8 = 32 \text{ soldados}$$

o bien $7 \$ \cdot 6 = 42 \$ \quad 4 \text{ soldados} \cdot 8 = 32 \text{ soldados}$

Estos resultados valen igualmente, cualquiera que sea la naturaleza del sumando; así, por ejemplo, la primera multiplicación no sólo da los pesos semanales ganados por el obrero, sino también el número de bombones contenidos en 6 paquetes con 7 bombones en cada paquete, el coste de media docena de cualquier clase de objetos cada uno de los cuales valga 7 unidades (sean éstas pesos, dólares), etc., etc. Por esta razón, aun cuando en la vida real sólo se presentan multiplicaciones *concretas*, como éstas, se define la multiplicación *abstracta* del mismo modo que para la suma y la resta; es decir, prescindiendo de la naturaleza de los elementos a que se refieren los números, y se estudian sus propiedades y se llega al cálculo del producto, que se leerá en pesos, bombones, soldados, baldosas, etc., según la naturaleza del sumando que se repite.

Las multiplicaciones abstractas que comprenden a todos los ejemplos citados, se escribirán así:

$$7 \times 6 = 42 \quad 4 \times 8 = 32$$

$$7 \cdot 6 = 42 \quad 4 \cdot 8 = 32$$

EJEMPLOS.—1.º) Cada pieza de un género tiene 25 metros. ¿Cuántos metros tendrá en existencia un comerciante que tiene 7 piezas iguales?

Solución: $25 \text{ m.} \times 7 = 175 \text{ m.}$

2.º) Si el precio del metro de un género es de 5 \$, ¿cuánto costarán 4 m.?

Solución: $5 \$ + 5 \$ + 5 \$ + 5 \$ = 5 \$ \times 4 = 20 \$.$

3.º) Si por un peso se compran 4 m. de una tela, ¿cuántos metros se comprarán con 5 \$?

Solución: $4 \text{ m.} + 4 \text{ m.} + 4 \text{ m.} + 4 \text{ m.} + 4 \text{ m.} = 4 \text{ m.} \times 5 = 20 \text{ m.}$

NOTA IMPORTANTE. — Carece de sentido hablar del producto de 4 m. por 5 \$ o de 5 \$ por 4 m. Solamente tiene sentido multiplicar un concreto por un número natural abstracto, como se ve en los dos ejemplos anteriores, y resulta un concreto de igual especie que el multiplicando; con los mismos datos, en un caso el resultado ha sido 20 \$ y en el otro ha sido 20 m.

35.—Multiplicación por 1 y por 0.

Como casos particulares interesantes, resultan éstos:

$$\begin{array}{c} n \text{ sumandos} \\ 0.n = \overbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0}^{n \text{ sumandos}} = 0 \\ 1.n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n \end{array}$$

Es decir: *El producto de 0 por cualquier número es 0.*

El producto de 1 por el número n es este mismo número n.

Puesto que la multiplicación es la repetición de un número como sumando, claro es que carece de sentido repetir un número *una sola vez*, y menos sentido todavía tiene repetirlo *ninguna vez*. Sin embargo, a fin de conservar la propiedad conmutativa que ahora demostraremos, convendremos en tomar como definición para estos casos, las siguientes:

El producto de cualquier número por 0 es 0.

El producto de un número n por 1 es el mismo número n. Es decir:

$$\begin{array}{l} n.0 = 0.n = 0 \\ n.1 = 1.n = n. \end{array}$$

36.—Propiedad uniforme.

Como la multiplicación es una suma y la suma es uniforme, es decir, da resultado único, también la multiplicación tiene esta propiedad.

Como los dos miembros de una igualdad representan un mismo número, resulta, pues, que de las igualdades

$$m = m', \quad n = n'$$

se deduce $mn = m'n'$, puesto que ambos productos tienen los mismos factores. Por tanto:

Multiplicando miembro a miembro dos igualdades resulta otra igualdad.

37.—Propiedad conmutativa.

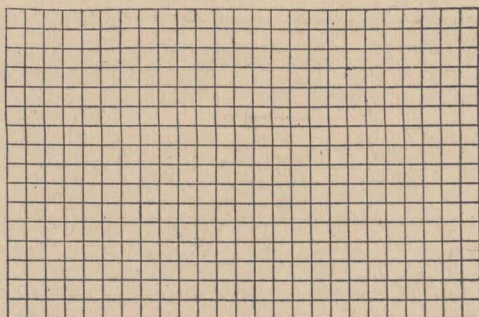
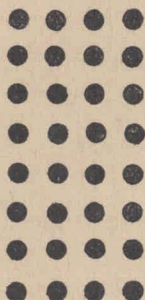
Puesto que la multiplicación es una suma y la suma se efectúa contando los objetos sumados, el resultado será el mismo, cualquiera que sea el orden en que se cuente.

Así, en el ejemplo del pelotón de soldados, se pueden contar éstos por filas de a cuatro o por hileras de a ocho; del primer modo resulta $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$, y del segundo $8 + 8 + 8 + 8$. Es decir, resulta el mismo producto multiplicando 4 por 8, que multiplicando 8 por 4, o sea, expresado con los símbolos aritméticos:

$$4 \times 8 = 8 \times 4.$$

Si una habitación rectangular está embaldosada, no será preciso contar todas las baldosas, una a una, sino que es suficiente contar el número de filas y el número de baldosas que contiene cada fila. Si hay 25 filas de 16 baldosas cada una, el número total será:

$$\overbrace{16 + 16 + \dots + 16}^{25 \text{ sumandos}} = 16.25$$



Si ahora contamos las filas en el sentido perpendicular, hay 16 filas y cada una contiene 25 baldosas, luego el número total es

$$\overbrace{25 + 25 + \dots + 25}^{16 \text{ sumandos}} = 25.16$$

Pero el número total de baldosas es el mismo, luego debe ser necesariamente:

$$16.25 = 25.16.$$

y estamos seguros de que ambos resultados son iguales, sin necesidad de calcularlos, por grandes que sean ambos números.

Por esta propiedad, llamada *conmutativa*, que permuta el papel desempeñado por multiplicando y multiplicador, uno y otro se llaman *factores*; y podemos enunciar con toda generalidad, es decir, para la multiplicación abstracta:

Se puede invertir el orden de los factores sin alterar el producto.

He aquí la expresión abreviada de esta propiedad:

$$m \cdot n = n \cdot m$$

38.—Propiedad distributiva respecto de la suma.

EJEMPLOS: Para contar los soldados de una formación podemos proceder de dos modos diferentes:

5 filas	8 filas	9 filas
.....		
.....		
.....		
.....		
.....		
22 filas		
5 filas de a 4 soldados, son	5.4=20	
8 filas de a 4 soldados, son	8.4=32	
9 filas de a 4 soldados, son	9.4=36	
22 filas de a 4 soldados, son:	88	

Es decir, se puede proceder de dos maneras: se hace primero la suma, y el resultado se multiplica por el número, o bien, se multiplica cada sumando por el número y luego se suman los productos parciales.

Expresado esto mismo con símbolos:

$$(5+8+9)4=5.4+8.4+9.4=20+32+36=88.$$

Como el razonamiento vale para toda clase de objetos, podemos enunciar esta conclusión en forma de propiedad abstracta, que se llama *distributiva respecto de la suma*:

Para multiplicar una suma indicada por un número distinto de cero, se multiplica cada uno de los sumandos por dicho número y se suman estos productos parciales.

39.—Ley de monotonía. Producto de desigualdades.

Si en un producto cualquiera, p. ej.: $5 \cdot 7$, se sustituye un factor, por *otro mayor*, tal como 5×3 , resulta como producto $5 \cdot 7 + 3 \cdot 7$, es decir, *mayor* que el anterior.

Por tanto: *Si un factor o los dos crecen, crece el producto.*

De otro modo: *Si se multiplica una desigualdad por su número, resulta otra desigualdad del mismo sentido; si se multiplica miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido resulta otro de igual sentido.*

40.—Propiedad distributiva general.

Si los depósitos en Caja de Ahorros a que nos referimos en (28) se calculan en centavos, en vez de ser los números abstractos 100 y 42, serán 1000 y 420, es decir, quedarán multiplicados por 10; análogamente las cantidades retiradas estarán expresadas por los números 250, 380, 500, en lugar de 25, 38, 50; el saldo será 290 en lugar de 29, es decir, también ha quedado multiplicado por 10 el número abstracto que lo representa. Si en vez de elegir el factor 10 adoptamos otro, la conclusión subsiste, luego llegamos a esta propiedad de la multiplicación abstracta:

Si se multiplican los términos de una suma algebraica por un número cualquiera, la suma queda multiplicada por este mismo número.

Enunciado de otro modo:

Cuando en todos los términos de una suma algebraica, aparece un mismo factor (llamado por esa razón, factor

común) puede éste sacarse, multiplicando a un paréntesis en el cual se encerrará la suma algebraica de los factores restantes de cada término, con sus mismos signos.

Esta operación se llama sacar factor común.

Recíprocamente: Para multiplicar la suma algebraica por un número, se multiplica cada término por este número.

$$\begin{aligned}\text{EJEMPLOS: } 125 - 75 + 15 &= (25 - 15 + 3) 5 \\ 2(a - b + c - d) &= 2a - 2b + 2c - 2d.\end{aligned}$$

En particular, si la suma algebraica es una diferencia $a - b$, resulta:

Para multiplicar una diferencia indicada por un número, distinto de cero, se multiplica el minuendo por el número y del resultado se resta el producto del sustraendo por dicho número. Es decir, $(a - b)c = ac - bc$.

EJEMPLOS:

$$\begin{aligned}(36 - 20) \times 4 &= 36 \times 4 - 20 \times 4, \\ (10 - 1) \times 8 &= 10 \times 8 - 1 \times 8.\end{aligned}$$

41.—Producto de dos sumas.

Si se trata, por ejemplo, de multiplicar $(a + b)(c + d)$, considerando efectuada la suma del segundo paréntesis, podemos aplicar la propiedad distributiva con respecto a la adición y resulta:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d),$$

y aplicando a cada término de este segundo miembro otra vez la misma propiedad, se tiene:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Si en lugar de ser sumas de dos sumandos, éstos fueran varios, se obtendría por la misma razón sucesivamente:

$$\begin{aligned}
 &(a+b+c+d)(m+n+p)= \\
 &=a(m+n+p)+b(m+n+p)+ \\
 &+c(m+n+p)+d(m+n+p)= \\
 &=am+an+ap+bm+bn+bp+ \\
 &+cm+cn+cp+dm+dn+dp.
 \end{aligned}$$

Resulta así la siguiente regla práctica:

Para multiplicar dos sumas se forman todos los productos posibles de cada término de una suma por cada término de la otra y se suman los productos parciales.

EJEMPLO: Juan, Pedro y Luis, son los hermanos menores, y cada uno tiene 5 bolitas blancas y 4 negras. Antonio y Francisco son los hermanos mayores y cada uno tiene 5 bolas mayores blancas y 4 negras. El número total de bolas grandes y pequeñas es: $(3+2)(5+4)=5 \cdot 9=45$.

En general, si hay p hermanos pequeños y m mayores, y cada uno tiene b bolitas blancas y n bolitas negras, el número total de bolitas es

$$(b+n)(p+m)=bp+bm+np+nm$$

que en el cuadro están clasificadas de acuerdo con este desarrollo, el cual podemos leer así:

<i>blancas pequeñas</i> hay bp ,	<i>blancas mayores</i> hay bm ,
<i>negras pequeñas</i> hay np ,	<i>negras mayores</i> hay nm .

EJERCICIOS

1. — ¿Tiene el mismo número de letras una página de 48 líneas de 50 letras que una página de 50 líneas de 48 letras cada una?

2. — Sabiendo que el día tiene 1440 minutos

¿Cuántos minutos tiene un arco de 24 grados?

¿Cuántos kilómetros recorrerá un tren en un día a 60 km. por hora?

(La contestación a estas preguntas, aparentemente inconexas, es inmediata, por la ley uniforme de la multiplicación).

3. — Puesto que factores iguales dan productos iguales (propiedad uniforme), ¿será cierta la propiedad recíproca?, es decir, si dos productos son iguales ¿sus factores deben ser iguales?

§ 10. CALCULO DEL PRODUCTO

42.—Múltiplos de un número y tabla pitagórica.

Los productos de un número por cualquier número natural, se llaman *múltiplos* de aquél. Así, por ejemplo:

Multiplicadores:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Múltiplos de 2:	2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,	18
Múltiplos de 3:	3,	6,	9,	12,	15,	18,	21,	24,	27

En particular, los múltiplos de 2 suelen llamarse números *pares* y los que no son pares se llaman *impares*.

Se acostumbra a prescindir del número 0, que es múltiplo de todo número.

En la escuela primaria se han aprendido, en forma de tabla de multiplicar, los 9 múltiplos primeros de cada número, desde 1 a 9. Se obtienen así nueve filas análogas a ésta, que dan los productos de cada número por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Si escribimos las nueve filas que dan los múltiplos sucesivos de cada uno de los números desde 1 hasta 9, se forma una tabla llamada *pitagórica* que permite multiplicar un número cualquiera de una cifra m por otro n , también de una cifra. En efecto, todos los múltiplos de m están en la fila iniciada por m y el producto por n está en la columna iniciada por n .

Así, por ejemplo, el producto de 3 por 8 se encuentra en la fila iniciada por 3 y en la columna que comienza por 8; resulta así el número 24.

El producto de 8 por 3 se encuentra en la fila iniciada por 8 y en la columna que comienza por 3; y se observa que también resulta el mismo número 24.

Por la propiedad conmutativa, la tabla pitagórica es simétrica respecto de la diagonal que va desde el 1 al 81; simetría que simplifica el trabajo de formación de la tabla, pues basta calcular los números de uno de los triángulos en que la diagonal divide al cuadrado.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

NOTA: La utilidad de esta tabla es escasa, pues sabemos de memoria todos sus productos; pero hay tablas pitagóricas que tienen los productos de los números desde 1 a 999, y permiten multiplicar números cualesquiera de 3 cifras. Los libros llamados de *cuentas ajustadas* son en esencia tablas pitagóricas.

43.—Multiplicación por un dígito.

Si multiplicando y multiplicador son ambos dígitos, la tabla de Pitágoras, o *tabla de multiplicar*, nos da el producto. Como de la escuela primaria se saben de memoria todos estos productos, pasemos ya al caso en que el multiplicando tiene varias cifras.

Sea, por ejemplo, el producto 365×4 . Según la definición de producto, habrá que sumar cuatro sumandos iguales a 365, para lo cual los dispondremos en columna así:

Comenzaremos sumando la primera columna:

365	$5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 4 = 20$; escribiremos el 0
365	y llevaremos 2 decenas a la columna siguiente,
365	cuya suma es: $6 + 6 + 6 + 6 = 6 \times 4 = 24$, más
365	2, son 26: escribiremos el 6 y llevaremos dos cen-
—	tenas a la columna siguiente: $3 + 3 + 3 + 3 =$
1460	$= 3 \times 4 = 12$, más 2, son 14.

Vemos, en resumen, que se puede sustituir la suma de cada columna por el producto de la cifra repetida por el multiplicador, el cual producto se sabe de memoria. Por eso en la práctica no se escriben todos los sumandos, sino sólo uno, es decir, el multiplicando, y, poniendo el multiplicador debajo, se van efectuando las multiplicaciones sucesivas y conservando en la

365	memoria las decenas retenidas de cada producto
4	para incorporarlas a las unidades del producto
—	siguiente. Queda, en definitiva, el esquema indi-
1460	cado al margen, y podremos enunciar la siguiente

regla conocida:

REGLA.—Para multiplicar un número de varias cifras por un multiplicador de una sola, se escribe éste debajo de aquél; se multiplican luego sucesivamente cada una de las cifras del multiplicando por el multiplicador, empezando por la derecha, e inscribiendo solamente la cifra de las unidades, y añadiendo la cifra de las decenas de cada producto a las unidades del producto siguiente.

Si alguna de las cifras del multiplicando es 0, la columna correspondiente de la suma será toda de ceros y su suma será también 0. En el producto sólo se escribirán, pues, en la columna correspondiente las decenas retenidas del producto anterior, si las hay. Ejemplos:

$$305 \times 4 = 1220; 30500 \times 7 = 213500.$$

44.—Caso general de la multiplicación.

Tratemos ahora de multiplicar, por ejemplo, los números 1084 y 3128. Podemos tomar uno cualquiera de ellos como multiplicando. Supongamos, pues, que quisiéramos operar sumando 3128 sumandos iguales a 1084.

Dispondríamos la operación como se indica en el margen; y teniendo en cuenta que se trata de una suma de muchos sumandos, aplicaremos la 3.^a observación hecha en (25), escribiendo ordenadamente las sumas de cada columna, que, por tener todos sus sumandos iguales, serán productos calculables por la regla anterior. Así resulta:

		1084	} 3128 sumandos.
		1084	
		1084	
		1084	
			
			
			}
		1084	
Suma de la 1. ^a columna:	3128×4	12512	unidades
Suma de la 2. ^a columna:	3128×8	25024	decenas
Suma de la 3. ^a columna:		0	centenas
Suma de la 4. ^a columna:	3128×1	3128	millares
•	Resultado	<u>3390752</u>	

Como se ve, las sumas parciales obtenidas no son más que los productos de 3128 por cada una de las cifras de 1084, y se llaman por tal razón *productos parciales*.

En la práctica se dispone la operación escribiendo simplemente 1084 debajo de 3128, en lugar de la indicada

columna de sumandos; resulta así el siguiente esquema:

$$\begin{array}{r}
 3128 \\
 1084 \\
 \hline
 12512 \\
 25024 \\
 3128 \\
 \hline
 3390752
 \end{array}$$

Conviniendo en llamar multiplicador al número que se escribe debajo y multiplicando al escrito encima (*), podemos, pues, enunciar la siguiente

REGLA.—*Para multiplicar dos números de varias cifras, colocándolos previamente uno debajo del otro, se forman los productos parciales del multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador, comenzando por la cifra de la derecha, y escribiendo cada producto de modo que sus unidades se correspondan con la cifra del multiplicador de que procede. Sumando luego los productos parciales resultantes se obtiene el producto total.*

PRUEBA.—En virtud de la propiedad conmutativa, tomando el multiplicando como multiplicador, y viceversa, el producto debe ser el mismo. Este es, pues, un medio de comprobar el resultado.

EJERCICIO: Compruebe el alumno el producto 3128×1084 antes calculado, cambiando el orden de los factores.

CASOS PARTICULARES.—En el esquema indicado hemos suprimido el 0 de la suma de la tercera columna, que no tiene influencia alguna en el resultado, cuidando de

(*) Obsérvese que en la demostración ha sido en rigor 1084 el multiplicando (sumando repetido), y como tal debiera escribirse encima. Así lo hacen los hindúes. El cambio de colocación y hasta de nombre no tiene más justificación que el hábito adquirido en la aplicación de la regla del caso anterior.

trasladar un lugar hacia la izquierda el siguiente producto parcial. Esto mismo deberá hacerse, p. ej., en el producto 860×27 , lo que equivale a multiplicar 86 por 27, agregando un cero a la derecha

Más general: *Si uno o los dos factores terminan en ceros, se prescinde de éstos y se efectúa la multiplicación como si no existieran, añadiéndolos luego a la derecha del producto obtenido.* Por ejemplo, para multiplicar 7960 por 8500 efectuaremos el producto $796 \times 80 = 67660$, y a su derecha agregaremos los tres ceros suprimidos: 67660000.

Dejamos a la iniciativa del alumno el cerciorarse de que éste es el resultado a que se llegaría por la regla dada, después de un inútil acarreo de ceros en los productos parciales.

En particular: *Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, basta colocar a la derecha del número tantos ceros como siguen a dicha unidad.* EJEMPLO: $8427 \times 1000 = 8427000$.

45.—Representación gráfica del producto.

Si en un papel cuadriculado contamos m unidades en un sentido por n en el otro, el número total de cuadrados que contiene el rectángulo así formado es la suma de n filas, cada una de las cuales contiene m , luego es el producto $m.n$.

Podemos, por tanto, establecer en general:

El producto de m por n está representado por el rectángulo cuyos lados son un segmento cualquiera com-

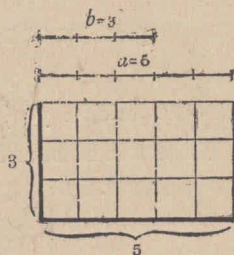
puesto de m unidades por otro compuesto de n unidades.

EJEMPLO. — En la figura está representado el producto de 5 por 3, mediante el rectángulo cuya base tiene 5 unidades y la altura 3 unidades.

En ella aparece claramente descompuesto en $5 \cdot 3 = 15$ cuadrados iguales, de lado igual a la unidad.

También se observa que se puede interpretar como producto de 3 por 5 y resulta ser $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.

En la lección próxima demostraremos con toda generalidad esta propiedad, llamada *conmutativa*.



EJERCICIOS.

1. — Construir una tabla de Pitágoras hasta 12.
2. — Representar gráficamente: 3.7; 5.8; 4.9; 6.11.
3. — ¿Cómo se puede construir cada fila de la tabla de Pitágoras mediante adiciones sucesivas?
4. — Construir la tabla de Pitágoras en forma de triángulo, utilizando la propiedad conmutativa.
5. — ¿Por qué comienza por 0 la tabla de sumar, y por 1 la tabla de multiplicar?
6. — ¿Qué posición ocupan los productos de los pares de números que tienen la misma suma?
7. — ¿Cuál de esos productos es el mayor?

§ 11. PRODUCTO DE VARIOS FACTORES

46.—Definición y ejemplos.

Hasta ahora hemos considerado el producto de dos números naturales; ¿qué significará multiplicar varios números naturales? Aceptaremos la siguiente

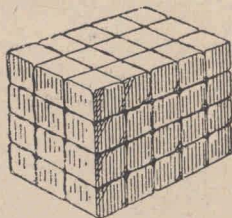
DEFINICIÓN.—Dados varios números naturales, $a, b, c, \dots, l$, se llama producto de ellos al número obtenido multiplicando los dos primeros, el resultado por el tercero, este resultado por el cuarto etc., y así sucesivamente, hasta multiplicar por el último.

Por ejemplo:

$$abcde = \{[(ab)c]d\}e.$$

Tales productos se presentan, por ejemplo, al contar ladrillos de un muro o cualquier clase de objetos apilados regularmente.

EJEMPLO: La figura representa una pila de cajas; cada capa horizontal tiene $3 \cdot 5 = 15$ cajas; y como hay 4 capas, el número



total de cajas es $3 \cdot 5 \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$.

Igualmente podríamos contar así: Cada columna tiene 4 cajas

cada capa vertical estrecha, $4 \cdot 3 = 12$; como hay 5 capas, resulta $4 \cdot 3 \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60$.

Cualquiera que sea el orden en que se multipliquen los tres números 3, 4, 5, resultará el mismo producto, que es el número total de cajas.

EJERCICIO: El depósito donde se guarda la edición de este libro, consta de 3 estanterías de 6 estantes, y en cada uno hay 150 ejemplares; cada hoja pesa 2 gramos y cada tapa 50 gramos.

Calcúlese el peso total de la edición.

47.—Propiedades del producto.

PROPIEDAD UNIFORME.

Como la multiplicación de varios números se reduce a la multiplicación de dos, efectuada consecutivamente, y el resultado es único cada vez, también lo es el resultado final de las multiplicaciones efectuadas en el orden indicado.

EJEMPLO: Si en vez de la pila de ladrillos que tiene 6, por 5, por 9, tenemos una pila de libros de 6, por 5, por 9, es decir con igual número a lo largo, a lo ancho y a lo alto, puede asegurarse que el número de libros es igual al número de ladrillos; y lo mismo si se trata de otra clase de objetos.

PROPIEDAD CONMUTATIVA.

Ya hemos visto en los ejemplos que es indiferente efectuar la multiplicación en cualquier orden, cuando son tres los factores. Cualquiera que sea el número de factores se pueden permutar dos consecutivos. Por ejemplo, para permutar 2 y 5 en el producto $3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8$ basta comenzar la multiplicación $3 \cdot 7 = 21$; pero multiplicar por 2 y después por 5 es lo mismo que multiplicar por 5 y después por 2, pues $21 \cdot 2 \cdot 5 = 21 \cdot 5 \cdot 2$ luego resulta

$$3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 = 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8$$

y lo mismo sucede en todo caso.

Permutando un factor con cada consecutivo se lo puede llevar a un lugar prefijado, luego resulta con toda generalidad:

Alterando arbitrariamente el orden de los factores, cualquiera que sea su número, no varía el producto.

PROPIEDAD ASOCIATIVA.

Si se sustituyen varios factores por su producto efectuado, no varía el producto total.

En efecto, si en el producto $3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5$ queremos asociar 2 y 5, basta llevarlos al 1.º y 2.º lugar, y resulta:

$$2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 10 \cdot 3 \cdot 7.$$

EJERCICIOS

1.—Una tabla numérica tiene 45 páginas impresas con 35 líneas cada una, de 50 cifras en cada línea. ¿Cuántas cifras contiene?

2.—En vez de calcular primero el número total de líneas y multiplicar por el número de cifras de cada una, calcúlese primero el número de cifras de cada página. ¿Hay un tercer modo de hacer el producto?

Obsérvese que los tres resultados son iguales.

3.—Sabido que el día tiene 86.400 segundos, decir inmediatamente cuanto costarán 60 cajones de botellas de cerveza, cada uno de los cuales contiene dos docenas, a 60 centavos la botella.

(Aplicación de la propiedad uniforme de la multiplicación).

4.—Suponiendo que los doce apóstoles hubiesen ensayado sentarse en sus doce asientos en todas las ordenaciones posibles y que cada nueva colocación durase 1 minuto, descansando 5 días de cada año, y 6 en los bisiestos, ¿en qué año habrían terminado los ensayos?

Primeramente debe demostrarse que el número de permutaciones o colocaciones posibles es $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

Para calcular el número de años a que equivale este número de minutos agrúpense de modo que aparezcan los factores $24 \cdot 60 \cdot 360$; el producto de los restantes es la solución.

5.—El producto de los n primeros números naturales se llama factorial de n , y se indica $n!$, calcúlese $5!$ y $7!$ que valen 120 y 5040, respectivamente.

§ 12. POTENCIAS

48.—Cuadrado y cubo.

Del mismo modo que se nos presentaron sumas de sumandos repetidos, se presentan también con cierta frecuencia productos de factores iguales.

Por ejemplo, el número de baldosas de una habitación cuadrada, es decir, con tantas filas como hileras, será, si es 12 el número de éstas, 12×12 , que se expresa abreviadamente así: 12^2 , y se lee *12 elevado al cuadrado*, o simplemente *12 al cuadrado*. Análogamente, el número de sillares de un muro de 12 sillares a lo largo, a lo ancho y a lo alto es $12 \times 12 \times 12$, que se escribe abreviadamente 12^3 , y se lee *12 al cubo*.

Un producto de varios factores iguales se llama *potencia*; si tiene dos factores se llama *cuadrado* y se escribe a^2 en lugar de $a \times a$; si son tres los factores, se llama *cubo*, y se escribe a^3 en vez de $a \times a \times a$.

NOTA: Conviene saber de memoria los cuadrados y cubos de los nueve primeros números. Estos son:

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729

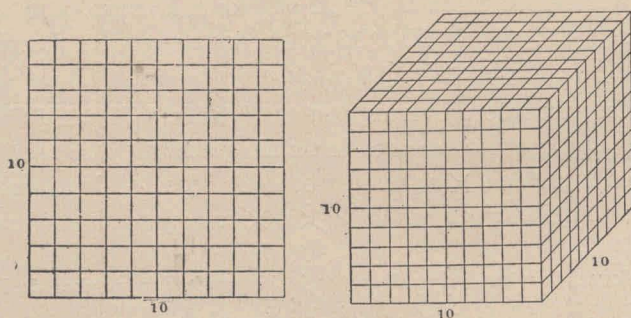
¿Por qué se llama *cuadrado* de un número a su segunda potencia y *cubo* a la tercera?

El origen de estas denominaciones geométricas es el siguiente: si en un cuadrículado se considera un cuadrado

cuyo lado tenga, por ejemplo, 3 unidades, el número de mallas o cuadrados parciales que contiene es $3.3=3^2$ y, en general, si el lado del cuadrado tiene a unidades, el número de cuadrados parciales es a^2 .

Análogamente, si llamamos cubo unidad al que tiene por arista la unidad de longitud, resulta: el número de unidades cúbicas que contiene un cubo es igual a la tercera potencia del número de unidades lineales que contiene el lado. Por esto, la tercera potencia de un número se llama *cubo* del mismo.

La primera figura representa un cuadrado cuyo lado tiene 10 unidades lineales y el número de unidades superficiales que contiene es $10.10=100$.



La segunda figura representa un cubo cuya arista tiene 10 unidades lineales y el número de cubos parciales que contiene es $10.10.10=1000$ que se clasifican así: $10.10=100$ en la capa inferior, otros 100 en la segunda, etcétera y como el número de capas es 10, resulta $100.10=1000$.

49.—Potencia n-sima.

DEFINICION.—Se llama potencia enésima de un número a , al producto de n factores iguales a a .

El número a se llama *base* y n se llama *exponente* o *grado*.

Elevar un número a la potencia n es calcular la potencia de exponente n de dicho número. La operación de elevar a una potencia se llama *potenciación*.

NOTACION.—La potencia enésima de a se representa escribiendo el exponente n a la derecha y algo más alto que la base a .

Así, por ejemplo:

$$a^3 = a \cdot a \cdot a \quad ; \quad 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5.$$

En general:

$$a^n = \overset{n \text{ factores}}{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}.$$

La definición que hemos dado supone que hay, por lo menos, *dos* factores. Sin embargo, para evitar excepciones en las reglas de cálculo con potencias, que después demostraremos, se ha convenido en establecer las dos definiciones siguientes:

Se llama potencia de base a y exponente 1 al mismo número a ; y potencia de exponente 0 al número 1 .

Es decir:

$$a^1 = a; \quad a^0 = 1.$$

Las potencias sucesivas del número a son, por tanto:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a, \dots$$

En particular, si la base es 10 , sus potencias sucesivas son:

$$10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \dots$$

EJEMPLOS: Potencias sucesivas de 2:

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \dots$$

50.—Propiedades fundamentales de la potenciación.

PROPIEDAD UNIFORME.

Como la multiplicación es uniforme y la potenciación se reduce a multiplicaciones sucesivas, resulta: *la potenciación es operación uniforme.*

Es decir: *Si se elevan a una misma potencia los dos miembros de una igualdad, resulta otra igualdad.*

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.

Así como el producto es una suma repetida, la potencia es un producto repetido, es decir, tenemos esta escala de operaciones:

Suma, Producto, Potencia.

Así como la multiplicación es distributiva respecto de la suma, que es la operación de categoría anterior, de igual modo, la potenciación es distributiva respecto de la multiplicación, que es la operación inmediatamente inferior. Es decir:

La potencia enésima de un producto es el producto de las potencias enésimas de cada uno de los factores.

Tesis): $(abc \dots l)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \dots l^n$

Demostración. Por definición de potencia:

$$(abc \dots l)^n = \overbrace{(abc \dots l)(abc \dots l) \dots (abc \dots l)}^{n \text{ factores}}$$

y por las propiedades conmutativa y asociativa del producto de varios factores el 2º miembro se transforma así:

$$\overbrace{(aa \dots a)}^{n \text{ factores}} \overbrace{(bb \dots b)}^{n \text{ factores}} \overbrace{(cc \dots c)}^{n \text{ factores}} \overbrace{(ll \dots l)}^{n \text{ factores}}$$

En virtud de la definición de potencia, resulta, por tanto, la tesis.

He aquí un ejemplo de teorema *rigurosamente* demostrado, es decir, apoyándonos en propiedades anteriores y no en ejemplos concretos.

51.—Producto de potencias de igual base.

Si se multiplican dos potencias de la misma base, por ejemplo $2^3 \times 2^5$, en virtud de la definición de potencia, será 2^3 el producto $2 \cdot 2 \cdot 2$ de tres factores iguales a 2, así como 2^5 será el de cinco factores iguales a 2; al multiplicar los dos productos y reunir en uno solo todos los factores, quedará un producto de $3 + 5 = 8$ factores iguales a 2; es decir, la potencia $2^{3+5} = 2^8$.

Para dar la demostración general, consideremos la potencia con exponente suma de dos números:

$$a^{m+n} = \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{m+n \text{ factores}},$$

y asociemos así los factores que la forman:

$$a^{m+n} = (\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ factores}}) (\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ factores}}),$$

pues, en virtud de la propiedad asociativa del producto, los $m+n$ factores se pueden asociar sustituyendo los m primeros por su producto que es a^m , y los n restantes por su producto, que es a^n . Por tanto:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

Es decir: *El producto de dos potencias de la misma base, es otra potencia de ésta, cuyo exponente es la suma de los exponentes.*

Si en vez de dos fueran más factores, el resultado sería el mismo. Así, por ejemplo:

EJEMPLOS.—

$$2^3 \times 2 \times 2^5 = 2^{3+1+5} = 2^9.$$

$$5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 = 5^{1+2+3+4} = 5^{10}.$$

52.—Potencias de potencias.

Si multiplicamos potencias de la misma base y el mismo exponente, tendremos una potencia de potencia:

$$\text{así, } 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = (4^2)^3;$$

pero como, por otra parte,

$$4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{2+2+2} = 4^{2 \cdot 3},$$

resultará $(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3}$. En general,

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Es decir, resulta esta regla práctica:

La potencia de una potencia es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es el producto de los exponentes.

53.—Propiedades que no se verifican.

La potenciación ¿es también conmutativa? Así sucede, por ejemplo, en este caso:

$$2^4=16, \quad 4^2=16.$$

Pero fácil es comprobar que esto no es general, pues

$$1^n=1, \quad n^1=n; \quad 2^3=8, \quad 3^2=9; \dots$$

La potenciación ¿es distributiva respecto de la suma o de la resta? Es decir: La potencia de una suma ¿es la suma de las potencias de los sumandos? En cualquier ejemplo, se comprueba que esto no es cierto:

$$(1+2)^2=3^2=9,$$

$$1^2+2^2=1+4=5.$$

Análogamente, la potencia de la diferencia *no* es la diferencia de las potencias, como se ve en estos ejemplos:

$$(3-2)^2=1^2=1,$$

$$3^2-2^2=9-4=5.$$

La propiedad asociativa tampoco se verifica en las potencias, como se comprueba fácilmente:

EJEMPLO:

$$(2^3)^2 = 8^2 = 64$$

En cambio:

$$(2)_{(3)}^2 = 2^9 = 256.$$

Pero aplicando la definición de potencia y la regla de multiplicación de potencias de igual base, se tiene:

$$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$$

es decir, basta multiplicar los dos exponentes.

NOTA.—Es útil llamar la atención sobre estas propiedades negativas, para evitar que, por analogía, las apliquen indebidamente los alumnos.

54.—Ley de monotonía y comparación de potencias.

Como la ley de monotonía se cumple para la multiplicación, reduciéndose la potenciación a multiplicaciones sucesivas, resulta: *Si ambos miembros de una desigualdad se elevan a una misma potencia, distinta de cero, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que el de la dada.*

Tesis) Si es $a < b$ y $n > 0$, es $a^n < b^n$.

Si es $a > b$ y $n > 0$, es $a^n > b^n$.

Demostración. Si la desigualdad $a < b$ se escribe n veces y se multiplican las n desigualdades, resulta: $a^n < b^n$.

Análogamente, si la desigualdad $a > b$ se escribe n veces y se multiplican las n desigualdades obtenidas, resulta: $a^n > b^n$.

Nótese que es esencial la condición de que el exponente sea por lo menos 1, pues para el exponente 0 resulta $a^0 = b^0$, cualesquiera que sean a y b .

Después de haber comparado dos potencias de bases distintas e igual exponente, consideremos ahora la misma base y exponente distinto.

Multiplicar un número por otro mayor que 1 es formar una suma de sumandos iguales al primero, luego es mayor que dicho primer número. Como las potencias de a se forman multiplicando sucesivamente por a , resulta:

Las sucesivas potencias de un número mayor que uno crecen a medida que aumenta el exponente.

Es decir, si es: $a > 1$, es:

$$a^0 < a^1 < a^2 < a^3 < \dots < a^n.$$

En cambio, si la base es 1, todas las potencias son 1. La propiedad puede enunciarse también así:

De dos potencias de igual base y distinto grado, es mayor la de mayor exponente, siempre que sea la base mayor que uno.

Si una potencia tiene su base mayor que otra y su exponente también mayor que esta otra, resulta mayor que la primera potencia, en virtud de ambos teoremas.

EJEMPLOS: 1º—Comparemos	2^3	con 3^4 .
Por el 1er. teorema es	$2^3 < 3^3$.	
Por el 2º teorema es	$3^3 < 3^4$.	
Por la propiedad transitiva:	$2^3 < 3^4$.	

2º—Análogamente resultan estas desigualdades:

$$3^2 < 5^4 \quad 4^3 > 3^2$$

NOTA.—Si la base de una potencia es mayor que la de otra, pero el exponente es menor, nada puede asegurarse respecto de las potencias. Por ejemplo:

$$2^4 = 4^2; \quad 2^4 < 4^3; \quad 2^5 > 4^2.$$

NOTA.—Como la potencia de una potencia se reduce a una sola potencia, no tiene objeto escribir 2^{3^2} cuando es más sencillo escribir $2^{3 \cdot 2}$. Por esta razón se ha convenido en reservar esa notación para representar la potencia cuyo exponente es otra potencia. Es decir, se conviene en representar:

$$2^{3^2} = 2^{(3^2)}$$

Obsérvese la diferencia entre ese convenio y el seguido en las operaciones anteriores. En ellas, al dar una expresión sin paréntesis, se sobreentendía que debía operarse con los dos primeros; el resultado con el tercero, etc.; en cambio, en las potencias, cuando no hay paréntesis, debe comenzarse por los últimos exponentes.

Nótese el crecimiento rapidísimo de las potencias, cuando el exponente es a su vez potencia. Así, por ejemplo: $10^{10^{10}}$ sería la unidad seguida de diez mil millones de ceros. En cambio: $(10^{10})^{10}$ es la unidad seguida de cien ceros.

EJERCICIOS

1.—Ordenar de menor a mayor las potencias siguientes, sin calcularlas:

$$5^5, 2^3, 3^4, 5^4, 3^3, 2^2.$$

2.—El cubo de 101 ¿es mayor que un millón?

3.—Un tablero de ajedrez tiene por cada lado 8 casillas; escríbase en forma de potencia el número total de casillas.

4.—Como 8 es el cubo de 2, escríbase el número de casillas como potencia de 2.

5.—¿Es lo mismo medio-metro cuadrado que medio metro-cuadrado? El cubo de medio metro de lado ¿es medio metro-cúbico?

6.—¿En qué cifras terminarán los cuadrados y cubos de 327, 111, 825, 473?

7.—¿Pueden ser cuadrados los números 412, 523, 1027, 2538?

8.—La suma de los n números impares es el cuadrado de n .

Escribase la expresión en fórmula de esta propiedad, y demuéstrese también geoméricamente, mediante la descomposición de cada cuadrado, como indica el esquema siguiente:

• • • • •					
• • • • •				• • • • •	•
• • • • •			• • •	•	•
• • • • •		• •	•	•	•
• • • • •	•	•	•	•	•
5 ² =25	1	3	5	7	9

EJEMPLOS:

$$1+3=4$$

$$1+3+5=9$$

$$1+3+5+7=16$$

$$1+3+5+7+9=25$$

EJERCICIOS

De suma, resta y multiplicación combinadas.

1.—En el adjunto cuadro están escritos los nueve números dígitos de tal modo que la suma de los números de cada fila o de cada columna o de cada diagonal es 15. 8 1 6

Estos cuadros se llaman *mágicos* porque los magos 3 5 7
persas les atribuían virtudes curativas. 4 9 2

Compruébese esta propiedad, formando las 8 sumas.

2.—Si se permutan entre sí dos filas, el nuevo cuadrado ¿es también mágico?

3.—Si se suma un mismo número a todos los del cuadrado mágico ¿sigue teniendo la misma propiedad?

4.—He aquí cuatro tablas de números:

Tabla 1ª:	1	3	5	7	9	11	13	15
Tabla 2ª:	2	3	6	7	10	11	14	15
Tabla 3ª:	4	5	6	7	12	13	14	15
Tabla 4ª:	8	9	10	11	12	13	14	15

Estas tablas se llaman *misteriosas*, porque permiten adivinar un número sabiendo en qué tabla está. En efecto, basta sumar los números iniciales de dichas tablas donde está el número y la suma es el número buscado. Por ejemplo, si un número está en la 2ª y 4ª es el 10; si está en la 1ª, 2ª y 4ª es el 11; etc.

Deseúbrase el modo de construcción recorriendo la serie natural: 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . y viendo en qué tablas debe escribirse para que resulte la propiedad enunciada.

5.—Un empleado tiene de sueldo inicial 400 pesos el primer mes y 20 de aumento por cada mes siguiente. Otro empleado cobra quincenalmente de este modo: 200 la primera quincena y 5 pesos más cada quincena siguiente. Uno y otro han entrado el mismo día; el primero cobra al fin de cada mes y el segundo al fin de cada quincena. ¿Cuál de los dos empleados gana más?

[La contestación es contraria de lo que parece a primera vista pues gana más el segundo].

6.—Calcular el sueldo anual de cada uno de los dos empleados del ejercicio anterior.

7.—Un devoto pidió a Santa Rita que se duplicase el dinero que tenía en el bolsillo; el milagro se hizo y en agradecimiento depositó 8 monedas para la santa; animado por el éxito pidió que se repetiese el milagro, con el mismo ofrecimiento; y por segunda vez se hizo, y regaló otras 8 monedas; y por tercera vez se hizo el milagro y la donación de 8 monedas en agradecimiento, quedándose sin nada el pedigrüño. ¿Cuántas monedas tenía al principio?

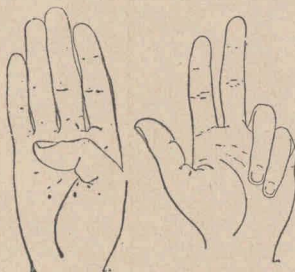
NOTAS AL CAPITULO III

Evolución de los signos. — El signo $\times$ fué introducido en 1631 por el inglés *Oughtred*; su compatriota *John Pell* (1610) empleó el signo $\div$ para la división, todavía usado en los libros ingleses; y, más tarde, el famoso *Leibniz* introdujo los signos $.$ y $:$. Anteriormente se usaron las iniciales *M* y *D* y más antiguamente aún la raya de quebrado, utilizada por *Leonardo de Pisa* (1202).

Evolución de la regla de multiplicar. — Los egipcios no conocieron la tabla de multiplicar. Para multiplicar procedían por duplicaciones y adiciones convenientes. Por ej., para multiplicar 27 por 13, como $13 = 1 + 4 + 8$ duplicaban sucesivamente 27, 54, 108, 216. Producto: $27 + 108 + 216 = 351$.

Los griegos conocían ya la tabla. A *Pitágoras* se atribuye la ingeniosa disposición con forma de *doble entrada*, a la que se ha dado su nombre; pero en realidad parece ser de *Nicomaco*, un pitagórico muy posterior.

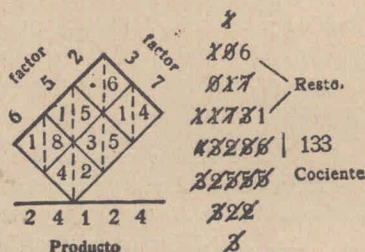
Los romanos calculaban mediante un ábaco complicado, ayudándose con los dedos, para calcular los productos de dígitos mayores que 5. Los números 6, 7, ..., estaban representados por una mano abierta y uno, dos, ..., dedos extendidos. De aquí los símbolos V (esquema de la mano), VI, VII, VIII. También daban a cada dedo un valor ordinal: 1 a 5 del pulgar al meñique, o bien 6 a 10; así IV significa el anterior al V y IX el anterior al X suma de dos manos.



EJEMPLO: Producto 8 . 9. Una mano con tres dedos extendidos representa 8; la otra mano con 4 ñedos extendidos representa 9. Los dedos extendidos son $4 + 3 = 7$, cifra de decenas; los dedos doblados dan el producto $2 \cdot 1 = 2$, cifra de unidades. Producto: 72.

Los procedimientos de cálculo actuales son de origen hindú, pasando a Europa por mediación de los árabes, y originando multitud de variantes. La figura representa la multiplicación 652×37 según el método árabe de la Edad Media.

Obsérvase bien a las claras la aplicación de la regla del producto de dos sumas, colocando cada producto parcial en el lugar que le corresponde según el orden de sus unidades.



La sencillez de los métodos hindúes consistía en la facilidad con que corregían cifras en sus tabletas espolvoreadas. Al adoptarlos los árabes en sus manuscritos, *tachando* las cifras corregidas, los procedimientos se tornaron incómodos y enojosos.

CAPITULO IV

DIVISION DE NUMEROS NATURALES

§ 13. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA DIVISION

55.—Cociente exacto de dos números.

Ya hemos dicho que los productos de un número m por $1, 2, 3, \dots$ se llaman *múltiplos* de m . También el producto por 0 , es decir, el número 0 , se considera como múltiplo de m . Es decir, todos los múltiplos de m son: $m.0, m.1, m.2, m.3, \dots, mh, \dots$.

Para indicar que un número a es múltiplo de otro b se escribe: $a=\dot{b}$.

DEFINICIONES.—Decir que a es múltiplo de b equivale a decir que existe un número c , que multiplicado por b da el número a .

El número a se llama *dividendo*, el b se llama *divisor* y el c se llama *cociente*.

Decir que b es *divisor* de a equivale a decir que a es múltiplo de b ; y también se dice que a es *divisible* por b o que b *divide* a a .

La operación que tiene por objeto hallar el *cociente exacto* de dos números se llama *división exacta*. (*).

(*) La división exacta puede definirse también así: dado un producto de dos factores y uno de ellos (distinto de 0) hallar el otro.

EJEMPLO.—Si se trata de repartir una docena de lápices entre 4 alumnos, resulta que dando 3 a cada uno es $4 \cdot 3 = 12$, luego el cociente de 12 por 4 es 3.

Si el número de alumnos fuese 5, no existe cociente exacto de 12 por 5, pues 12 no figura entre los múltiplos de 5, que son: 5, 10, 15, ... El reparto es entonces imposible; y diremos que 12 no es divisible por 5.

¿Cuántos libros podemos comprar por 32 pesos si cuesta 4 pesos cada libro? ¿Cuántos coches necesitaremos para transportar 32 personas si en cada coche caben 4 personas? La solución la proporciona en ambos casos el número 8 (libros o coches), que multiplicado por 4 da 32.

La solución de esta clase de problemas se reduce, pues, en cada caso, a hallar un número concreto, llamado *cociente*, que multiplicado por otro abstracto, llamado *divisor*, dé un producto llamado *dividendo*. El cociente y el dividendo son números de la misma especie.

56.—Propiedad uniforme.

Obtenido un número c , que multiplicado por el divisor da el dividendo, ocurre preguntarse si habrá algún otro cociente, es decir, otro número, mayor o menor que el c , que multiplicado por b , dé el producto a ; pero, por la ley de monotonía de la multiplicación, si ese número es mayor que c , su producto por b será mayor, y si ese número es menor que c , su producto por b es menor; luego, en ambos casos, resulta el producto distinto de a .

Este número *único* c que multiplicado por el divisor da el dividendo, se representa así:

$$a : b, \text{ o bien } \frac{a}{b}$$

y se lee: a dividido por b o a partido por b .

Escribir: $c = a : b$ equivale a poner: $c \cdot b = a$.

EJEMPLOS.—El cociente $8 : 2 = \frac{8}{2} = 4$,

se lee: ocho dividido por dos, igual a cuatro, siendo la operación posible, porque 8 es múltiplo de 2.

En cambio, los símbolos $\frac{8}{5}$ y $8:5$

carecen por ahora de todo significado, pues no hay ningún número que multiplicado por 5 dé como producto 8.

Puesto que el cociente según se ha demostrado es único, independiente de los símbolos que representan al dividendo y al divisor, resulta:

Si se dividen miembro a miembro dos igualdades, siempre que sea posible, resulta otra igualdad.

Es decir, si es $a=b$ y $c=d$ siendo $a=c$ y $b=d$, es: $a:c=b:d$.

La división *no es conmutativa*, porque siendo necesario, para que la operación tenga sentido, que el dividendo sea múltiplo del divisor, éste ya no es múltiplo de aquél.

57.—Propiedad distributiva.

EJEMPLO: Supongamos dada la operación siguiente:

$$(20+10+5):5;$$

esto significa que al resultado de sumar

$$20+10+5=35$$

hay que dividirlo por 5, y como 35 es múltiplo de 5, da un cociente exacto, que es 7.

Este resultado lo podríamos obtener también, de la siguiente manera: dividiendo cada sumando por el divisor, y luego sumando los cocientes parciales. Es decir:

$$20:5+10:5+5:5=4+2+1=7.$$

Ha sido posible efectuar las operaciones en esta segunda forma, porque todos los sumandos eran múltiplos del divisor.

Los dos resultados son iguales y esto mismo sucederá en todo caso; pues si cada sumando está formado por grupos iguales al divisor, el número de grupos que contiene el dividendo es la suma de los que contiene cada sumando. Esta propiedad general se enuncia así:

La división es distributiva con respecto a la suma de múltiplos del divisor. Es decir: Para dividir una suma de varios sumandos por un número, del cual aquéllos son múltiplos, se divide cada sumando por el número, y luego se suman los cocientes parciales.

Análogo razonamiento vale para la resta, luego resulta:

La división es distributiva con respecto a la resta de múltiplos del divisor. Es decir: Para dividir una diferencia indicada por un número, del cual son múltiplos el minuendo y sustraendo de aquélla, se dividen éstos por dicho número y del primer cociente se resta el segundo.

EJEMPLO.—Si tenemos la expresión: $(18-6):3$, significa $12:3=4$; pero puede obtenerse este resultado así:

$$18:3-6:3=6-2=4.$$

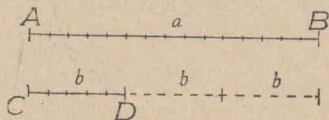
lo que ha sido posible por ser minuendo y sustraendo múltiplos del divisor.

EJERCICIOS

- 1.—¿Cuál es el valor de la expresión $(2x+8):2-x$?
- 2.—Piensa un número; duplícalo; súmale 8; divide por 2; resta el número pensado; el resultado es 4. ¿Por qué?

58.—Representación geométrica de la división exacta.

Si el dividendo a se representa por un segmento y el divisor b por otro segmento, saber si a es múltiplo de b , equivale a probar si repetido el segmento b sucesivamente, se obtiene un segmento igual al a .



Supongamos que el segmento AB representa el dividendo y el CD el divisor; se observa en la figura que al trasportar consecutivamente este último tres veces resul-

ta justamente igual al primero. Es decir, el cociente de ambos números es 3.

Aparece claramente aquí el significado del cociente, que indica cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo, de acuerdo con el origen de la palabra cociente, que proviene de *quoties*, la cual quiere decir: ¿Cuántas veces?

59.—Alteraciones del dividendo y divisor. Simplificación del cálculo de cocientes.

Si para transportar 32 personas necesitamos 8 coches de 4 plazas, para transportar 32 familias de 5 personas, es decir, $32 \cdot 5$ personas, necesitaremos un número de coches 5 veces mayor, o sean $8 \cdot 5$ coches. Podemos, pues, escribir:

$$(32 \cdot 5) : 4 = 8 \cdot 5 = (32 : 4) \cdot 5$$

Este hecho se enuncia de un modo general así:

I.—*Si se multiplica el dividendo de una división exacta por un número, el cociente vendrá multiplicado por este número.*

Y se expresa abreviadamente, mediante letras, de este modo:

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$$

Análogamente:

Si se divide el dividendo de una división exacta por un número, el cociente quedará dividido por este número.

$$(a : b) : c = (a : c) : b$$

II.—*Si se multiplica el divisor de una división exacta por un número, el cociente queda dividido por este número.*

EJEMPLO: Si se nos dan coches de doble número de plazas, o

sea $4 \cdot 2 = 8$ plazas, el número de coches que necesitaremos será la mitad. Es decir:

$$32 : (4 \cdot 2) = 8 : 2 = (32 : 4) : 2.$$

En general, resulta:

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c$$

Análogamente, si las plazas de cada coche se reducen a la mitad, el número de coches necesarios será doble.

Si se divide el divisor de una división exacta por un número, el cociente quedará multiplicado por dicho número, lo que se expresa así:

$$a : (b : c) = (a : b) \cdot c$$

III. — *Si se multiplican o dividen a la vez el dividendo y el divisor de una división exacta por un número, el cociente no varía.*

EJEMPLO: Si se duplica el número de personas y también la capacidad de cada coche, no variará el número de coches necesarios.

En general, combinando las proposiciones anteriores, resulta:

$$(a \cdot b) : (c \cdot b) = a : c \qquad (a : b) : (c : b) = a : c$$

EJEMPLOS: 1.º—Para calcular el cociente $120 : 30$ suprimiremos el 0 (es decir, se dividen por 10) y resulta: $12 : 3 = 4$.

2.º—Para calcular el cociente de 8.9 por 3.8 se puede suprimir el factor 8 y queda solamente $9 : 3 = 3$.

Como ejercicio, pruébese que las dos propiedades I y II que acabamos de obtener, se traducen en estas reglas prácticas:

I.—Para dividir un producto por un divisor de uno de sus factores, se divide éste, conservando el otro factor o los restantes factores.

EJEMPLOS: 1.º—Para dividir el producto $7 \cdot 12$ por 6 basta dividir el factor 12 y resulta:

$$7 \cdot 12 : 6 = 7 \cdot 2 = 14.$$

2º—Para dividir el producto 3.4.5 por 2, basta dividir el factor 4 y resulta:

$$3.4.5:2=3.2.5=30.$$

II.—Si se divide un número por otro y el cociente se divide por un tercero, se obtiene el mismo resultado que dividiendo el primero por el producto de los otros dos.

EJEMPLOS: 1º—Dividir el producto 1.2.3.4.5.6. por 24.

Como $24=4.6$, para dividir por 24 basta dividir primeramente por 4 (es decir, suprimir el factor 4) y después dividir por 6 (es decir, suprimir el factor 6). Resulta así:

$$1.2.3.4.5.6:24=1.2.3.5=30.$$

2º—Dividir el producto 10.12 por 15. Como $15=3.5$ basta dividir por 3 (para lo cual se divide el factor 12) y después dividir por 5 (para lo que basta dividir el factor 10).

Resulta así:

$$10.12:15=2.4=8.$$

EJERCICIOS

Calcular, por simplificación, los cocientes siguientes:

1º) 2.3.4:4. 2º) 4.5.6:3. 3º) 4.5.6:60. 4º) $10!:(3!4!2!)$.
5º) $10!:(3!4!)$ 6º) $9!:(3!2!4!)$

7.—Piensa un número. Dóblalo y añade al resultado 14. Toma la mitad de lo que obtengas y resta de esta mitad el número pensado. Resulta invariablemente 7. ¿Por qué?

APLICACIONES:

Multiplicación por 5.—Puesto que $5=10:2$, para multiplicar por 5 puede procederse multiplicando por 10 y tomando la mitad del resultado, lo cual suele ser más breve. Multiplíquense por 5 los números 468, 6593, 9478532.

División por 5.—Inversamente, para dividir por 5 puede procederse duplicando el número y dividiendo por 10; es decir, suprimiendo el cero de la derecha. Aplíquese a los números 3895,9003760 y 2746381105.

Multiplicación y división por 25.—Demuéstrese que se divide por 25 (supuesto el cociente exacto) multiplicando por 4 y quitando los dos ceros de la derecha.

Se multiplica por 25 añadiendo dos ceros y hallando la cuarta parte.

§ 14. LA DIVISION ENTERA

60.—Definición y relación fundamental.

EJEMPLOS: La división exacta exige que el dividendo sea múltiplo del divisor; no es posible, p. ej., repartir 13 objetos entre 4 personas; ni cabe invertir 35 pesos en libros de a 4 pesos; pero se puede comprar hasta ocho libros y ni uno más, sobrándonos 3 pesos. Al resolver así este problema se dice que se ha efectuado una división *entera* o *inexacta*, siendo 8 el cociente *entero por defecto* o *aditivo* y 3 resto por defecto. Este resultado serviría para hallar el número de coches que podríamos llenar con 35 personas a 4 personas por coche. Serían 8 coches y *sobrarían* 3 personas.

Pero si lo que se pide es el número de coches necesarios para el transporte de las 35 personas, será preciso un coche más para las tres personas antes sobrantes; es decir, en total 9 coches, y *faltará* 1 persona para completar el último coche. El número 9 se llama cociente por *exceso*; y el 1 resto *por exceso* o *sustractivo*.

Este ejemplo nos conduce a establecer el concepto general de división entera: Dados dos números D y d , si d es distinto de 0, sus múltiplos sucesivos:

$$d.0, d.1, d.2, d.3, d.4, d.5, \dots, d.c, \dots$$

van creciendo y llegan a superar a D ; por tanto, caben dos casos:

1°—Si D coincide con uno de los múltiplos, es decir, si es $D=d.c$, la división de D por d es exacta, siendo c el cociente.

2°—Si D no es igual a ningún múltiplo de d , está comprendido entre dos múltiplos consecutivos, es decir:

$$d.c < D < d(c+1)$$

DEFINICION.—Dados dos números D y d , llamados *dividendo* y *divisor*, si $d.c$ es el mayor múltiplo del divisor que está contenido en el dividendo, el número c se llama *cociente* entero de D por d .

La operación que tiene por objeto determinar el co-

ciente entero, o sea el máximo número de veces que el divisor se puede restar del dividendo, se llama *división entera*.

En particular, si el dividendo es múltiplo del divisor, la división resulta *exacta*.

Una vez obtenido el mayor múltiplo del divisor, contenido en el dividendo, si la división no es exacta, después de restado del dividendo este múltiplo queda una diferencia, que se llama *resto*.

EJEMPLO.—En el reparto de 13 objetos entre 4 personas, citado al comienzo de esta lección, después de entregados 3 objetos a cada una, sobra 1, que es el resto de la división.

Definamos, pues, en forma general:

Se llama *resto* de la división entera a la diferencia entre el dividendo y el mayor múltiplo del divisor. Es decir:

$$r = D - dc \text{ de donde } D = dc + r$$

Resulta, pues, que el resto es siempre *menor* que el divisor d ; pues si fuese $r \geq d$, al sumarle dc resultaría $D \geq d(c+1)$ contra la definición de cociente. Por tanto:

El resto de la división entera es menor que el divisor.

EJEMPLO: Si con 35 pesos puedo comprar 8 libros de 4 pesos quedándome un sobrante de 3 pesos, he efectuado la división de 35 por 4, resultando el cociente 8 y el resto 3. Si ahora hago el cálculo en centavos, el dividendo es 350 y el divisor 40, pero claro es que el número de libros es el mismo 8 y el resto es 30. Si en vez de multiplicar por 10 adoptamos otro factor la conclusión es análoga, luego podemos enunciar la propiedad general.

Si se multiplican (dividen) el dividendo y divisor de una división inexacta por un número, el cociente no varía, pero el resto queda multiplicado (dividido) por el mismo número.

NOTA: Esta proposición permite simplificar la división cuando se ve un factor común al dividendo y divisor, que sea fácil de suprimir. Así, si los dos números terminan en ceros, por ejemplo, $32750000 : 423000$, se hará más cómodamente la división $32750 : 423$ [dividiendo por 1000 ambos términos], con lo cual no se alterará el cociente teniendo cuidado únicamente de multiplicar el resto por el factor suprimido.

EJERCICIOS

1.—Por sustracciones sucesivas, calcular el cociente y resto de la división entera de 123 por 45.

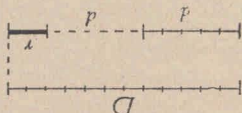
2.—Al repartir un cierto número de libros entre los 11 alumnos de una clase han sobrado una docena. ¿Está bien hecho el reparto? ¿Cuál debe ser el resto de la división?

3.—Sabido que en el reparto anterior cada alumno ha recibido 3 libros, ¿cuál es el número total de libros repartidos?

4.—En una obra de tomos iguales, colocados en un estante, como es costumbre, de izquierda a derecha, un gusano ha roído 612 hojas, desde la 1ª del tomo I, hasta la última del tomo IV. ¿Cuántas páginas tiene cada tomo?

61.—Representación geométrica.

La misma dada para la división exacta vale para la división entera, pero ahora puede resultar un resto. Sean D el segmento que representa al dividendo y d el que representa al divisor; al trasportar el segmento divisor sobre el dividendo consecutivamente, resulta que el segmento $2d$ es todavía menor que el D , pero el $3d$ es ya mayor, luego el cociente entero, es el número 2, porque contesta a la pregunta: *quoties?* que quiere decir: *¿Cuántas veces?* El segmento que queda en el dividendo, después de restado $2d$ es el resto de la división.



EJEMPLO.—Cuando el comerciante quiere saber *cuántos* metros tiene un retazo de género, efectúa la división entera por el metro, aplicando éste sobre aquél tantas veces cuantas se pueda, hasta que queda un resto menor que un metro.

62.—Cociente y resto por exceso.

EJEMPLO.—En el reparto de 13 objetos entre 4 personas, citado al principio del (60), vimos que para dar 4 objetos a cada una faltaban 3 objetos. Este número 3 se llama *resto por exceso*, porque procede de un reparto excesivo, es decir, se pretende dar a cada persona un objeto más de los que corresponden por la división entera.

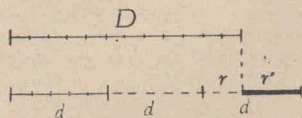
Estableceremos, pues en general:

DEFINICION.—Se llama *cociente por exceso* al cociente entero aumentado en 1, es decir, al número $c+1$; y se llama *resto por exceso* a la diferencia:

$$r' = d(c+1) - D$$

Cuando haya peligro de confusión, llamaremos *cociente por defecto* y *resto por defecto* a los definidos en el párrafo (60), es decir, al cociente y al resto propiamente dichos.

En la figura que representa geométricamente la división entera, se ve claramente que siendo el resto por defecto lo que sobra del dividendo después de separado el mayor múltiplo posible del divisor, sin alcanzar a ser igual al dividendo, y el resto por exceso lo que falta a D



para alcanzar un divisor más, la suma de ambos restos es precisamente el divisor, es decir: $r+r'=d$.

EJERCICIOS

1.—Entre 14 obreros han pintado en un día las cuatro paredes de un salón. Sabiendo que las paredes laterales son doble que las frontales, ¿cuántos serán necesarios para pintar una de éstas en el mismo plazo?

2.—Sabiendo que 8 caballos arrastran un peso de 5 toneladas, ¿cuántos caballos serán necesarios para arrastrar una tonelada?

3.—Al repartir libros entre los 17 alumnos de una clase han sobrado 9. ¿Cuántos más serán necesarios para que cada alumno reciba un libro más, es decir para que el cociente sea por exceso?

4.—El testamento de un árabe disponía que sus 17 camellos se distribuyesen entre sus 3 hijos, del modo siguiente:

Al primer hijo la mitad.

Al segundo hijo la tercera parte.

Al tercer hijo la novena parte.

Como 17 no es divisible por 2, ni por 3, ni por 9, consultaron con el cadí, el cual vino en su camello y agregándolo generosamente a los 17 que formaban la herencia, hizo el reparto, sin dificultad, en esta forma:

Al primer hijo la mitad de 18, que es 9.

Al segundo hijo, la tercera parte de 18 que es 6.

Al tercer hijo, la novena parte de 18 que es 2.

Y como los camellos repartidos son $9+6+2=17$, el cadí volvió a tomar el suyo, y se fué satisfecho por haber resuelto el problema.

¿Qué clase de cocientes son 9, 6 y 2 del dividendo 17 por los divisores 2, 3 y 9? ¿Cuál es la causa de la paradoja?

5.—Calcular, previa simplificación, el cociente y el resto de las divisiones siguientes:

1º) 60 por 40; 2º) 1800 por 400; 3º) 5! por 7.4!

6.—Demostración geométrica del teorema de la multiplicación de dividendo y divisor por un mismo número sin alterar el cociente. Si el dividendo se representa por un segmento que tenga D unidades (por ejemplo cm.) y el divisor por un segmento que tenga d cm., el cociente es el número de veces que este segmento está contenido en aquél. Si se toma como unidad el mm., el número que expresa el segmento dividendo es $10.D$ y el número que representa al divisor es $10.d$ pero el cociente, o sea el número de veces que un segmento está contenido en el otro no altera; el segmento residuo es el mismo, pero el número de unidades que contiene es 10 veces mayor.

Hágase la figura y generalícese el razonamiento para un factor o divisor cualquiera.

7.—Cuando el dividendo se multiplica por un número, ¿puede asegurarse que el cociente y el resto quedan multiplicados por dicho número?

§ 15. CALCULO DEL COCIENTE Y DEL RESTO

63.—Número de cifras del cociente.

¿Cómo calcular prácticamente el cociente exacto o entero de dos números dados? Puesto que el cociente exacto es un número que multiplicado por el divisor da el dividendo, y el cociente entero por defecto es el mayor número que multiplicado por el divisor da un número menor que el dividendo, a cualquiera se le ocurrirá aplicar directamente estas definiciones formando los sucesivos productos del divisor por los números 2, 3, 4, 5, 6, ..., hasta ver si algún producto es igual al dividendo o, de lo contrario, hasta obtener el mayor producto posible menor que dicho dividendo; en ambos casos el factor utilizado es el cociente.

Así se procede con las máquinas más sencillas de multiplicar; pero cuando no se dispone de este recurso, esta serie de ensayos ocasionará un trabajo considerable, y es prácticamente imposible si el cociente es muy grande. Se ve, pues, la necesidad de dar reglas para abreviar estos tanteos.

Ante todo, ¿cómo conocer si el cociente tendrá una o varias cifras antes de efectuar la operación? Muy sencillo; multiplíquese por 10 el divisor, agregando un 0 a su derecha. Si el número obtenido es mayor que el dividendo, el cociente deberá ser menor que 10, y por tanto de una cifra. Por el contrario, si el producto del divisor por 10 es menor que el dividendo, el cociente es 10 o un número mayor que 10, luego tiene más de una cifra.

NOTA: Razonando del mismo modo, después de multiplicar el divisor, por 100, 1000, ..., y de comparar los resultados con el dividendo, llegaremos a la conclusión siguiente: *El cociente tiene tantas cifras como ceros precisa añadir a la derecha del divisor para obtener un número mayor que el dividendo.* Ejemplos:

Los cocientes de 74 por 9, de 31589 por 7622, son de una cifra.

64.—Caso de cociente de una cifra.

Observando lo anterior, veamos la práctica de la operación cuando el cociente es de una cifra. Si el divisor es también de una cifra, todos los productos posibles están contenidos en la tabla de multiplicar, y su conocimiento nos ahorra la escritura de dichos productos. Sin titubeos, pues, hay que saber calcular mentalmente cocientes exactos o enteros de la forma: 32 por 4; 34 por 9; 76 por 8; 38 por 7; etc.

Conocido este caso trivial, sea ahora un divisor de varias cifras.

Propongámonos dividir por ejemplo 31589 por 7622. Puesto que el cociente es de una sola cifra, no habría más que formar los productos del divisor por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 y compararlos con el dividendo. Pero a nadie se le ocurrirá ensayar los factores del 5 en adelante, puesto que el producto de los 7 millares del divisor por 5 forma ya un número de 35 millares mayor que el dividendo. Convendrá, pues, empezar los ensayos por el 4.

Se ve, pues, que la simplificación de ensayos consiste en *considerar provisionalmente sólo la primera cifra del divisor y las unidades del mismo orden del dividendo y empezar ensayando el cociente de la división así reducida.* Multiplicando este número por el divisor, se restará el producto del dividendo. Si la resta es posible, la cifra ensayada es válida (*buena*, suele decirse) y la di-

ferencia es el resto de la operación. Si no es posible la sustracción, se disminuye la cifra ensayada en una unidad y se repite el ensayo, hasta que el producto pueda restarse del dividendo. Por ejemplo, en la división de 31589 por 7922 habría que ensayar el 3, por ser excesivo el 4 (*)

En la práctica, se abrevian algo estas operaciones, efectuando a la vez el producto del divisor por el cociente y la resta. Así el primer esquema de la división de 31589 por 7622 queda reducido al de la derecha:

$$\begin{array}{r|l} 31589 & 7622 \\ 30488 & 4 \\ \hline 1101 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 31589 & 7622 \\ 1101 & 4 \\ \hline & \end{array}$$

y se enuncia la operación así: 4 por 2 es 8, a 9 va 1; 4 por 2 es 8, a 8 va 0; 4 por 6 es 24, a 25 va 1 y llevo 2; 4 por 7 es 28, y 2 es 30, a 31, 1. El resto es 1101.

Como se ve, para hacer a la vez ambas operaciones hemos multiplicado sucesivamente las unidades de los diversos órdenes del divisor por el cociente y restado los productos de las correspondientes del dividendo. En cuanto hemos llegado a una resta imposible, como por ejemplo las 24 centenas que no podían restarse de 5, se han añadido tácitamente las unidades necesarias del orden inmediato superior al minuendo, para incorporarlas después al sustraendo en el producto siguiente, con lo cual la diferencia no se altera.

(*) Esto es frecuente cuando la segunda cifra del divisor es alta, en cuyo caso es mejor en el tanteo previo considerar las dos primeras cifras del divisor. La práctica enseña más que los consejos que se pueden dar en un libro sobre la manera de acertar rápidamente con la cifra *buena*.

REGLA.—Cuando el cociente de una división es de una cifra, se obtendrá ésta por tanteo, empezando por ensayar la que resulta de dividir por la primera cifra del divisor las unidades del mismo orden del dividendo. Si el producto de esta cifra por todo el divisor puede restarse del dividendo, esta cifra es el cociente y la diferencia el resto; de lo contrario se disminuirá en una unidad dicha cifra y se ensayará de nuevo, y así sucesivamente hasta obtener un producto inferior al dividendo.

65.—Caso general: Cociente de varias cifras.

Para fijar las ideas supongamos que un cajero debe repartir entre 27 personas 6239 pesos, cantidad que está formada por 6 billetes de a mil pesos; 2 de a cien, 3 de diez, 9 de un peso.

Desde luego se ve que no alcanza para dar mil a cada uno, pero sí cien, pues *cambiando* los 6 billetes de a mil se tienen 62 de a cien, número que supera al número de personas. Hecho el reparto o mejor calculado el cociente, se ve que tocan a 2 centenas (billetes de a cien) y sobran 8 centenas; para proseguir el reparto hay que cambiar estos 8 billetes en 80 de a diez, e incorporarles las 3 existentes, es decir, a la derecha del resto 8, se *baja* la cifra siguiente 3 del dividendo y se divide 83 por 27, resultando el cociente 3 y el resto 2, es decir, a cada persona se le dan 3 decenas (billetes de a diez), y sobran 2; cambiados en billetes de un peso, juntos con los 9 unidades existentes se hace un nuevo reparto, es decir, una nueva división, correspondiendo 1 a cada

$$\begin{array}{r} 62 \overline{) 27} \\ 8 \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 83 \overline{) 27} \\ 2 \quad 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \overline{) 27} \\ 2 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

persona y sobrando 2, que es el resto de la operación.

En la práctica no se escriben separadamente estas divisiones; a la derecha de cada resto se escribe la nueva cifra del dividendo y el esquema ya conocido de los alumnos es este:

$$\begin{array}{r} \text{Dividendo: } 6239 \quad | \quad 27 \quad \text{Divisor} \\ 83 \quad \underline{231} \\ 29 \\ \text{Resto: } \quad 2 \end{array}$$

REGLA.—*Para dividir un número por otro cuando el cociente tiene varias cifras, se empieza separando de la izquierda del dividendo tantas cifras como sean necesarias y suficientes para obtener un número mayor que el divisor. Se divide el número así formado, llamado primer dividendo parcial, por el divisor, de acuerdo con la regla precedente; el cociente obtenido es la primera cifra del cociente total. Añádase a la derecha del resto la cifra siguiente del dividendo, y con el número así formado, llamado segundo dividendo parcial, se procede del mismo modo que con el primero, escribiendo la cifra cociente a la derecha de la anterior, y agregando a la derecha del resto la cifra siguiente del dividendo para formar el tercer dividendo parcial; y así sucesivamente hasta agotar todas las cifras del dividendo. Las cifras de los cocientes parciales sucesivos forman el cociente total; el último resto es el resto de la operación. Cuando algún dividendo parcial es menor que el divisor, se escribe un cero en el lugar de la cifra correspondiente del cociente y se continúa la operación bajando una cifra más del dividendo.*

PRUEBA.—En virtud de la relación fundamental establecida en la lección anterior, si multiplicamos el divisor

por el cociente y sumamos al producto el resto de la división, deberá obtenerse el dividendo. De este modo se puede comprobar si la operación está bien hecha.

Así, en el ejemplo anterior se tendrá $27 \times 231 = 6237$ y, sumando el resto, $6237 + 2 = 6239$.

NOTA. — *Casos particulares del cociente.*—El alumno comprobará, por su propia iniciativa, la validez de las siguientes reglas particulares:

1.^a El cociente de un número cualquiera por la unidad seguida de ceros se obtiene separando de la derecha del número tantas cifras como ceros tiene el divisor. El resto lo constituyen las cifras separadas.

2.^a Para dividir un número cualquiera por otro terminado en ceros puede procederse prescindiendo de tantas cifras de la derecha del dividendo como ceros tenga el divisor, teniendo únicamente cuidado de agregarlas al final a la derecha del resto.

EJEMPLOS: El cociente de la división de 46739 por 1000 es 46 y el resto es 739. Si el cociente de 7998 por 26 es 307, y el resto 16, el cociente de 7998365 por 26000 es el mismo 307 y resto será 16365.

EJERCICIOS

1.—Al repartir un cierto número de libros entre 11 alumnos han sobrado una docena. ¿Está bien hecho el reparto?

2.—Un cierto número dividido por 4324 da de cociente 231 y de resto 1156. ¿Cuál es el número si este cociente y el resto son por defecto?, ¿y si son por exceso?

3.—¿Cuántas estampillas necesitaré para una carta que pesa 83 gramos, si por cada 25 gramos o fracción necesito una estampilla?

4.—Un comerciante compra 125 pares de zapatos a 17 pesos el par. Sabiendo que obtiene un beneficio de 625 pesos, calcular el precio de venta de cada par.

5.—¿Cuántos estantes son necesarios para colocar 670 libros, a 33 por estante?

6.—Una herencia se reparte entre 15 herederos y cada uno percibe 7695 pesos. ¿Cuánto percibirían si fueran sólo 3?, ¿y si fueran 45? ¿Hace falta calcular la herencia?

7.—Si un cierto número se multiplica por 113 resulta aumentado en 183680. ¿Cuánto vale este número?

8.—¿Cuántos días tardará una fuente en llenar un depósito de 7780000 litros si proporciona 64900 litros diarios?

9.—Si un avión ha recorrido 1663200 metros en 14 horas, ¿cuál es su velocidad por hora, por minuto y por segundo?

10.—La distancia de la Tierra al Sol es 37961000 leguas, ¿cuál es la velocidad de la luz, sabiendo que la del Sol tarda 8 minutos 13 segundos en llegar a nosotros?

11.—Un hortelano lleva manzanas; encuentra 3 guardas; da al primero la mitad de las manzanas que lleva más dos manzanas, al segundo la mitad de las que le quedan más dos, y al tercero la mitad de las sobrantes más dos. Se queda con una manzana. ¿Cuántas llevaba? (Este problema es de origen árabe y se encontró en una aritmética del siglo XII). Respuesta: 36 manzanas.

12.—Hemos hecho 12 jugadas. Cada vez que ganaste te di 2 pesos, cada vez que perdiste me diste 3. Terminé ganando 21 pesos. ¿Cuántas jugadas perdí y cuántas gané?

[Razónese así: Si las hubiera ganado todas tendría 36 pesos; por cada jugada perdida tengo 5 pesos menos.]

66.—Cálculo con números no decimales.

Estudiadas la suma y la resta de los números concretos con diversas unidades no decimales, como las de tiempo, de ángulo, etc., igualmente sencillos son los problemas de multiplicación y división.

Un número de una sola denominación como 164" se llama incomplejo y el de varias, como 6 h. 24 m. 16 s., se llama complejo.

Veamos ante todo cómo se pueden transformar números complejos en incomplejos, y viceversa.

EJEMPLO: ¿Cuántos minutos tienen 3 horas 40 minutos? Puesto que cada hora tiene 60 minutos, 3 horas tendrán $60 \times 3 = 180$ minutos, a los cuales añadiremos los 40 minutos del número dado. Total, $(60 \times 3) + 40 = 220$ minutos.

Para reducir a segundos 28° 14' 22", procederemos análogamente, calculando primero los minutos:

$28^\circ = (28 \times 60)' = 1680'; 1680' + 14' = 1694'$,
y reduciremos luego a segundos:

$1694' = (1694 \times 60)'' = 101640''$;
total,

$$101640'' + 22'' = 101662''.$$

Cuando con las unidades de un incomplejo se pueden formar unidades de orden superior, se procederá del modo que se indica en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO: Expresar en horas, minutos y segundos 25825 segundos. Puesto que 60 segundos forman un minuto, habrá tantos minutos como indique el cociente entero $25825 : 60$, o sean 430 minutos y sobran *25 segundos*, que se consignan. A su vez, los 430 minutos componen 7 horas (cociente entero, $430 : 60$) y *10 minutos* sobrantes. Resumen:

25825 seg. = 7 horas 10 minutos 25 segundos.

La operación se dispone así:

$$\begin{array}{r|l} 25825 \text{ s.} & 60 \\ \hline 182 & 430 \text{ m.} \\ 25 \text{ s.} & 10 \text{ m.} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & 60 \\ \hline & 7 \text{ h.} \end{array}$$

El alumno comprobará análogamente que

$$206264'' = 57^{\circ} 17' 44''$$

67.—Multiplicación y división de complejos por números naturales.

La multiplicación se efectúa como una suma abreviada, teniendo en cuenta la reducción de unidades.

EJEMPLO: Un reloj adelanta 3 minutos 15 segundos cada día; ¿cuánto adelantará en 30 días?

Será una suma de 30 sumandos iguales a 3 m. 15 s. Como para efectuarla empezáramos sumando la columna de segundos y llevando los minutos contenidos en el resultado a la columna de minutos, diremos: $15 \times 30 = 450$ seg., o sean 7 minutos *30 segundos*.

La suma de la columna de minutos será, pues,

$$(3 \times 30) + 7 = 97 \text{ minutos} = 1 \text{ hora } 37 \text{ minutos.}$$

Resultado: *1 hora 37 minutos 30 segundos*.

Análogamente al multiplicar por 7 el complejo 4 horas 20 minutos 35 segundos, resulta 1 día 6 horas 24 minutos 5 seg.

La división se efectúa como en el siguiente

EJEMPLO: Dividir por 5 un arco de $22^{\circ} 38' 29''$. Los 22 grados, divididos por 5, dan 4° y sobran 2° , los cuales se descompondrán (como hacíamos con los billetes) en $2 \times 60 = 120'$ y agregando los $38'$ del número resultan $158'$. Divididos éstos por 5, resultan $31'$ y sobran $3'$. Descomponiendo éstos en segundos y agregando los $29''$ del número se obtienen $209''$, que divididos por 5 dan $41''$ y $4''$ de resto. He aquí cómo se dispone la operación:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 22^{\circ} \quad 38' \quad 29'' \\
 \text{Primer resto} \dots 2.60 = 120' \\
 \hline
 158' \\
 08 \\
 \text{Segundo resto} \dots \dots \dots 3.60 = 180'' \\
 \hline
 209 \\
 \text{Resto final} \dots \dots \dots 4''
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5 \\
 \hline
 4^{\circ} \quad 31' \quad 41'' \\
 \text{Cociente}
 \end{array}
 \end{array}$$

EJERCICIOS

- 1.—Reducir a segundos 3 h. 20 m. 38 s.
- 2.—Expresar en semanas, días y horas 4328 horas.
- 3.—¿Cuántas libras, chelines y peniques valen 3 docenas de un artículo si cada objeto cuesta 4 chelines 7 peniques?
- 4.—Repartir, entre 7 sastres, 13 cajas, 8 cartones y 4 botones sueltos; cada caja tiene 20 cartones y cada cartón 12 botones.
- 5.—Resuelto el ejercicio anterior, contéstese inmediatamente: ¿Cuánto vale un sombrero si 7 valen 13 libras 8 chelines 4 peniques?
- 6.—Un reloj adelanta 2 m. 28 s. cada hora; ajustado hoy a mediodía, ¿qué hora marcará pasado mañana a las 9?
- 7.—Averiguar el adelanto o atraso por hora del reloj de tu casa, observando el que tiene en una semana.
- 8.—¿Cuántos años tardaría un tren en llegar al Sol a 75 kilómetros por hora? Distancia aproximada = 150.000.000 de km.
- 9.—El mes lunar dura 29 días 12 h. 4 s. ¿Cuánto tiempo está la luna en cada uno de sus cuartos?

CAPITULO V

DIVISIBILIDAD

§ 16. GENERALIDADES Y CASOS SENCILLOS

68.—Múltiplos y divisores.

Hemos definido las palabras *múltiplo* y *divisor* por la igualdad: $a=c.m$ o sea $a=m$

Se dice que a es *múltiplo* de m , o que es *divisible* por m , o que m es *divisor* de a , o que m *divide* a a , o que m es *submúltiplo* de a , si a es igual a m por otro número natural.

Así, por ejemplo, se dice que a es *par* o *múltiplo* de 2, o divisible por 2, cuando a es el producto de 2 por un número natural.

EJEMPLOS: Los números de la primera fila de la tabla pitagórica son los números naturales 1 a 9; en la segunda fila están los 9 primeros múltiplos de 2; en la siguiente están los múltiplos de 3; etc.

69.—Propiedades fundamentales.

Si varios números son múltiplos de a , es decir, contienen el factor común a , al sumarlos o restarlos sigue figurando a como factor, luego resulta:

I. *La suma de varios múltiplos de un número es un múltiplo de este número.*

EJEMPLO: La suma de números terminados en 0 (es decir, múltiplos de 10) termina también en 0, es decir, es también múltiplo de 10.

II. *La diferencia de dos múltiplos de un número es múltiplo de éste.*

EJEMPLO: La diferencia de dos números terminados en 0, termina en 0.

III. *Si una suma de dos sumandos es múltiplo de un número y uno de los sumandos es múltiplo de éste, también lo es el otro sumando,* por ser diferencia entre la suma y el primer sumando.

De aquí resulta: *Si uno de los sumandos es múltiplo de m , y el otro no, tampoco lo es la suma, pues si lo fuera, también el otro sumando sería múltiplo de m .*

Esta propiedad III nos servirá para obtener *criterios de divisibilidad* por 2, 5, 4, 25, ..., es decir, condiciones características para que un número cualquiera sea divisible por uno de éstos.

Finalmente, observemos que si un número es divisible por a , es decir, si es de la forma am , al multiplicarlo por cualquier factor sigue figurando el factor a , luego resulta:

IV. *Todo múltiplo de un múltiplo de un número es múltiplo de éste.*

Como aplicación de estos teoremas resulta:

I y II. *Las sumas y diferencias de números pares son pares.*

III. *Si una suma es par, y también uno de los sumandos, lo es el otro. La suma de un número par y de uno impar, es impar.*

IV. *Los múltiplos de los números pares son pares.*

EJERCICIOS

1.—Fórmense los múltiplos sucesivos del número 142857, y obsérvese que tienen las mismas cifras en otro orden; de tal modo que, si se suponen escritas en circunferencia, estos múltiplos resultan haciendo girar la circunferencia. ¿Desde qué múltiplo cesa esta ley?

2.—Un estanciero deja al morir 3017 vacas en una estancia, 1475 en otra y 2063 en otra. ¿Será posible el reparto entre sus dos hijos?

(Contéstese sin operación aritmética ninguna).

70.—Divisibilidad por 10, 100, etc.

El producto de cualquier número por 10 termina en 0; recíprocamente, todo número terminado en 0 es producto de 10 por otro número, luego resulta:

Los únicos números divisibles por 10 son los terminados en 0.

Análogamente: el producto de cualquier número por 100 termina en 00; y todo número así terminado es producto de 100 por otro número, luego es múltiplo de 100. Es decir:

Los únicos números divisibles por 100 son los terminados en 00.

Análogamente: *Los únicos números divisibles por 1000 son los terminados en 000.*

71.—Divisibilidad por 2 y por 5.

Dado un número cualquiera, si se separa la cifra de las unidades a , queda un número terminado en cero, es decir, múltiplo de 10, luego puede escribirse: $n=10+a$, y por IV es también:

$$n=2+a \quad \text{y} \quad n=5+a$$

Por tanto, aplicando II, resulta:

Los únicos números divisibles por 2 son los terminados en cifra par. Los únicos números divisibles por 5 son los terminados en 0 o en 5.

72.—Divisibilidad por 4 y por 25.

Análogamente: si se separan las dos cifras de la derecha, queda un número terminado en dos ceros que, por ser múltiplo de $100=4 \times 25$, lo es también por 4 y por 25, en virtud de IV, luego:

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 4 o por 25, es que lo sea el número formado por las dos últimas cifras.

EJEMPLO: Son divisibles por 4 los números siguientes:

124 , 408 , 23164

por serlo: 24 8 64

No son, en cambio, divisibles por 4 los números: 114, 418, 23154.

Son divisibles por 25: 125 6025 4575

por serlo: 25 50 75

No son en cambio, divisibles por 25 éstos: 115, 6035, 4505.

Obsérvese que los únicos divisibles por 25 son los terminados en:

00, 25, 50, 75

73.—Divisibilidad por 8 y por 125.

Si del número n se separan tres cifras de la derecha, queda un múltiplo de 1000 y como $1000=8 \times 125$, dicho número terminado en tres ceros es múltiplo de 8 y de 125. Bastará, por tanto, examinar el número formado por las tres últimas cifras y resulta:

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 8 o por 125 es que lo sea el formado por las tres últimas cifras.

EJEMPLOS: Son divisibles por 8 los números:

41408, 12016, 4512

No lo son en cambio: 41428, 12116, 4612

Son divisibles por 125: 4375, 25125, 100250

No lo son estos otros: 4385, 25225, 100350

EJERCICIOS

1.—Clasificar, según que sean o no divisibles por 2, 4 y 8, los números siguientes:

1º) 102; 2º) 1927; 3º) 1612; 4º) 1930.

2.—Clasificar, según que sean o no divisibles por 5, 25 y 125 los números siguientes:

1º) 45; 2º) 950; 3º) 1750; 4º) 1900.

3.—Son bisiestos los años múltiplos de 4; pero se exceptúan los múltiplos de 100 cuyas centenas no son múltiplos de 4.

¿Son bisiestos los años siguientes?

1º) 1928; 2º) 2000; 3º) 1492; 4º) 1810.

§ 17. DIVISIBILIDAD POR 9, 3 Y 11. APLICACIONES

74.—Divisibilidad por 9.

Si restamos 1 de cualquier potencia de 10, resulta un múltiplo de 9; en efecto, 9, 99, 999, ..., son productos de 9 por 1, 11, 111, ..., respectivamente.

Por tanto, un número formado por una cifra cualquiera, seguida de ceros, es igual a un múltiplo de 9 más dicha cifra. Por ejemplo:

$$4000 = 4 \cdot 1\ 000 = 4(\dot{9} + 1) = 4 \cdot \dot{9} + 4 = \dot{9} + 4.$$

$$500 = 5 \cdot 100 = 5(\dot{9} + 1) = 5 \cdot \dot{9} + 5 = \dot{9} + 5.$$

Y como todo número se puede descomponer en una suma de números formados por una cifra seguida de ceros resulta:

$$4523 = 4000 + 500 + 20 + 3 = \dot{9} + 4 + \dot{9} + 5 + \dot{9} + 2 + 3$$

y como la suma de múltiplos de 9 es un múltiplo de 9, resulta en definitiva:

$$4523 = 4 + 5 + 2 + 3 + \dot{9}.$$

El razonamiento es aplicable a cualquier número, y puede enunciarse en general:

Todo número es igual a la suma de sus cifras, más un múltiplo de 9.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 9 es que lo sea la suma de sus cifras.

EJEMPLOS: El número antes considerado 4523, no es múltiplo de 9, por no serlo la suma de sus cifras, que vale 14.

Obsérvese que no es preciso calcular la suma de todas las cifras; se puede prescindir de aquellas que sumadas dan 9. Así, en este caso, basta sumar $2+3=5$, para asegurar que no es múltiplo de 9.

75.—Divisibilidad por 3.

Las descomposiciones hechas en el párrafo anterior valen también para el divisor 3; por ejemplo:

$$2 \cdot 100 = \dot{3} + 2, \quad 5 \cdot 1000 = \dot{3} + 5, \dots$$

luego resulta:

La condición necesaria suficiente para que un número sea divisible por 3, es que lo sea la suma de sus cifras.

EJEMPLOS: Son divisibles por 3 los números siguientes:

$$41022, \quad 13152, \quad 111111$$

pues las sumas de sus cifras son respectivamente: 9, 12, 6, pero solamente el primero es divisible por 9.

EJERCICIOS

1.—Clasificar, según que sean o no divisibles por 3 y por 9, los números siguientes:

$$1^{\circ}) 312; \quad 2^{\circ}) 1002; \quad 3^{\circ}) 1926; \quad 4^{\circ}) 111111111.$$

2.—Si en un número se altera de cualquier modo el orden de las cifras y se restan ambos números, resulta un múltiplo de 9. ¿Por qué?

3.—Escribe un número de tres cifras cualesquiera; invierte, el orden; resta ambos números; dime en qué cifra termina esta diferencia y te diré cuál es la diferencia total.

Basta observar que la cifra media debe ser 9 y como la diferencia debe ser múltiplo de 9, la primera cifra debe ser el complemento a 9 de la tercera cifra. Por ejemplo:

$$381 - 188 = 198$$

sabiendo la última cifra, 8, la primera debe ser 1 y puede asegurarse, que la diferencia, sin necesidad de conocer los números, es 198.

4.—Escribe un número de tres cifras; inviértelas; resta ambos números; en esta diferencia invierte las cifras y suma el número con la diferencia antes obtenida; el resultado es siempre 1089.

(Se explica inmediatamente el porqué, mediante el ejercicio anterior).

76.—Divisibilidad por 11.

Para el divisor 11 la descomposición es de dos tipos alternativamente:

$$1 = 1 \qquad 10 = 11 - 1$$

$$100 = 11 + 1 \qquad 1000 = 11 - 1$$

$$10000 = 11 + 1 \qquad 100000 = 11 - 1$$

Basta, en efecto, dividir por 11 la unidad seguida de ceros y se observa que los restos sucesivos son 1, 10, 1, 10, 1, ...

Consideremos ahora un número cualquiera, p. ej., 451237 y tendremos estas descomposiciones:

$$7 = 7 \qquad 3 \cdot 10 = 11 - 3$$

$$2 \cdot 100 = 11 + 2 \qquad 1 \cdot 1000 = 11 - 1$$

$$5 \cdot 10000 = 11 + 5 \qquad 4 \cdot 100000 = 11 - 4$$

luego $451237 = 11 + 7 - 3 + 2 - 1 + 5 - 4$; y para todo número resultará la descomposición $11 + M - P$, llamando M a la suma de las cifras de lugar impar, a contar de la derecha y P a la suma de las cifras de lugar par.

Según que sea $M \geq P$ o $M < P$, puede escribirse:

$$r = 11 + (M - P) \qquad r = 11 + (P - M)$$

Para que sea r múltiplo de 11, debe serlo $M - P$ en el primer caso y debe serlo $P - M$ en el segundo, luego obtendremos el siguiente criterio de divisibilidad:

La condición necesaria y suficiente para que un núme-

ro sea divisible por 11, es que lo sea la diferencia entre las sumas formadas por las cifras de lugar par y las cifras de lugar impar.

EJEMPLOS: Son divisibles por 11:

$$401324, 4453856$$

pues las sumas de cifras alternadas son:

$$7 \text{ y } 7, 23 \text{ y } 12$$

cuyas diferencias son múltiplos de 11.

77.—Prueba de la multiplicación mediante el 9.

Consideremos una multiplicación cualquiera:

$$4562 \times 56 = 255482$$

Si disminuimos el primer factor en 9, o múltiplo de 9, el producto quedará disminuído en un múltiplo de 9, y lo mismo si rebajamos el otro factor en 9 o múltiplo de 9. Si hacemos esta operación en los dos miembros, no seguirán siendo iguales, pero diferirán en un múltiplo de 9; y si tal no sucede, hay algún error en la multiplicación.

Hemos visto que todo número difiere de la suma de sus cifras en un múltiplo de 9, luego resulta esta regla:

Si cada factor y el producto se sustituyen por la suma de sus cifras respectivas, los nuevos valores de ambos miembros difieren en un múltiplo de 9.

EJEMPLO: El primer factor 4562 lo sustituímos por 17, o mejor todavía, por 8; el segundo factor 56 por 11, o mejor por 2; el producto 255482 lo sustituímos por la suma 26, o mejor por 8. Convendrá indicar así la sustitución.

$$4562 \times 56 = 255482$$

$$8 \times 2 \qquad 8$$

y como los nuevos miembros no difieren en múltiplo de 9, podemos asegurar que hay algún error en el producto.

Repetida la operación se ve, en efecto, que el producto es 255472.

Es claro que el error no se habría notado con la prueba del 9 si el producto dado hubiese sido cualquiera de éstos:

$$254572, \quad 250072, \quad 255382$$

pues sus errores sólo modifican la suma de cifras en múltiplos de 9.

Sin embargo, aunque no suficiente la prueba del 9, es muy útil para descubrir errores en muchos casos (*).

78.—Prueba de la división mediante el 9.

Supongamos efectuada la división de 2769968 por 4825, habiendo resultado el cociente 574 y el resto 418.

La operación será correcta si se verifica

$$2769968 = 4825 \times 574 + 418$$

Simplificando cada número como antes, sustituyendo por la suma de sus cifras, y mejor todavía restando de ésta el máximo múltiplo de 9, resulta:

1er. miembro 2; 2.º miembro $1 \times 7 + 4$. Como ambos difieren en 9, la prueba no acusa error en la operación.

EJERCICIO: Aplíquese la prueba por el 11, para afirmar la confianza en el resultado.

(*) Rebajar de cada número el máximo múltiplo de 9 que contiene, como hemos hecho en el ejemplo, es sustituir el número por su *resto*; pero esto no es esencial para la regla.

§ 18. DIVISORES Y MULTIPLOS COMUNES

79.—M.c.d. y números primos entre sí.

Dados varios números $a, b, \dots, h$, los divisores comunes a todos ellos no pueden superar al menor de todos; el mayor de todos los divisores comunes se llama *máximo común divisor* de $a, b, \dots, h$, y se representa así:

$$m.c.d. (a, b, \dots, h)$$

En particular, si uno de los números dados es divisor de los demás, él mismo es el *m.c.d.*, pues es divisor de todos, y es el mayor divisor posible de sí mismo.

Así, por ejemplo:

$$m.c.d. (360, 10, 50)=10$$

$$m.c.d. (48, 16, 8, 80)=8$$

Cuando el menor de los números es de una o dos cifras, es fácil reconocer si es divisor de los demás, en cuyo caso será el *m.c.d.*; si no es divisor de todos, ensayaremos su mitad, tercera parte, etc., es decir, los diversos divisores del mismo, en orden creciente, hasta llegar a uno que por ser divisor de todos y no serlo ningún otro mayor, será el *m.c.d.* buscado.

EJEMPLO: Sean los números 48, 36, 18. El menor, que es 18 no es divisor de 48; su mitad 9, tampoco, pero la tercera parte, 6 es divisor de los tres números. Por tanto:

$$m.c.d. (48, 36, 18)=6.$$

Varios números se llaman *primos entre sí* cuando su *m.c.d.* es 1.

Número *primo*, o *primo absoluto*, es el que no admite divisor distinto de él mismo y de 1.

Son, por ejemplo, primos entre sí los números:

6, 10 y 15,

pues los únicos divisores de 6 son 2 y 3; el 2 no divide a 15 y el 3 no divide a 10, luego no hay divisor común, distinto de 1.

Obsérvase que estos números *primos entre sí* no son *primos absolutos*, pues cada uno admite varios divisores; lo que sucede es que esos divisores no son comunes. Ni siquiera son estos números *primos dos a dos*, pues

$$m.c.d.(6, 10)=2$$

$$m.c.d.(6, 15)=3$$

$$m.c.d.(10, 15)=5$$

80.—Cálculo del *m.c.d.* por divisiones sucesivas.

Se basa en esta propiedad fundamental:

Los divisores comunes a dos números D y d son los comunes al menor de ellos d y el resto r de la división de ambos.

La igualdad que relaciona los cuatro números es:

$$D = d \cdot c + r$$

Si *D* y *d* son múltiplos de *m*, también lo es *d · c*, por ser múltiplo de *d*; y también lo es *r* por ser diferencia entre dos múltiplos de *m*. Por tanto: todo divisor común de *D* y *d* lo es de *d* y *r*.

Recíprocamente: si d y r son múltiplos de m también lo son $d \cdot c$ y r y por tanto su suma D ; es decir: todo divisor común de d y r lo es de D y d .

Los pares D, d y d, r tienen por consiguiente, los mismos divisores comunes.

$$\begin{array}{rcl} \text{EJEMPLO: Sea} & 102 & | \ 18 \\ & 12 & \underline{5} \end{array}$$

Se comprueba fácilmente que los divisores comunes de 102 y 18 son: 2, 3, 6, todos los cuales son a la vez divisores comunes de 18 y 12.

Recíprocamente, los únicos divisores comunes de 18 y 12 son 2, 3, 6, que también son de 102 y 18.

81.—Algoritmo de Euclides.

En el ejemplo anterior se forman fácilmente los divisores comunes y por tanto el $m \cdot c \cdot d$; pero no sucede lo mismo si los números propuestos son, p. ej., 1219 y 901. Veamos cómo conduce al $m \cdot c \cdot d$ la aplicación reiterada de la propiedad fundamental:

$$\begin{array}{rcl} 1219 & | & 901 \\ 901 & | & 318 \\ 318 & | & 265 \\ 265 & | & 53 \\ 53 & | & 1 \\ 1 & | & 0 \end{array}$$

El par 1219, 901 tiene los mismos divisores que el par 901, 318; y éste los mismos que el par 318, 265; y éste los mismos que 265 y 53. Pero siendo 265 múltiplo de 53, el mayor divisor común es 53, luego éste es el $m \cdot c \cdot d$ de 1219 y 901.

NOTA: Esta serie de divisiones hasta llegar al resto 0, constituye el *algoritmo* de Euclides y suele disponerse así:

Cocientes:	1	2	1	5
	1219	901	318	265
Restos:	318	265	53	0

El último divisor es el m. c. d. buscado.

82.—Mínimo común múltiplo.

Se llama *mínimo común múltiplo* de varios números al menor de los números no nulos que son múltiplos de todos.

Así, por ejemplo:

$$m.c.m.(12, 18)=36.$$

El menor múltiplo común es 36, luego escribiremos.

Los múltiplos de 12 no nulos son: 12, 24, 36.....

Los múltiplos de 18 no nulos son: 18, 36, 54.....

Como el producto de todos los números es múltiplo de cada uno, resulta que el *m.c.m.* no puede superar al producto.

Si el mayor de los números es divisible por los demás, es el *m.c.m.* de todos, pues otro menor no sería múltiplo de dicho número. Así, por ejemplo:

$$m.c.m.(12, 6, 4)=12.$$

Si el mayor no es divisible por todos, ensayaremos su duplo; si éste tampoco es múltiplo de todos, ensayaremos el triplo, después el cuádruplo, etc.

EJEMPLO: Sean los números 24, 18 y 12.

El mayor, que es 24, es divisible por 12, pero no por 18; formando el duplo, que es 48, todavía no es divisible por 18; formando el triplo, que es 72, ya es divisible por 18; luego

$$m.c.m.(24, 18, 12)=72.$$

EJERCICIOS

1.—Las 3 Gracias que habían recibido igual número de regalos los repartieron con las 9 Musas y cada una obtuvo el mismo número. ¿Cuántos eran los regalos? (Problema del Siglo I).

2.—Agradecidas las 9 Musas llevaron coronas en igual número y las repartieron con las 3 Gracias. ¿Cuántas eran las coronas?

3.—Un estudiante empaqueta sus libros de 2 en 2 y sobra 1; intenta distribuirlos en paquetes de a 3, y también sobre 1; los empaqueta de a 4, y sobra 1, y lo mismo le sucede al formar paquetes de a 5 o de 6 libros. Por fin, logra distribuirlos en paquetes de a 7. ¿Cuántos libros tenía?

EJERCICIOS.

1. — Calcular el *m. c. d.* y el *m. c. m.* de los grupos siguientes de números:

1.º) 24, 12, 60; 2.º) 60, 24, 96; 3.º) 120, 312, 78;
4.º) 242, 143, 110; 5.º) 9, 21, 35, 105, 45, 63, 175.

2. — Demostrar que si varios números se multiplican por un mismo número, el *m. c. d.* y el *m. c. m.* quedan multiplicados por ese número.

3. — Análogamente: si varios números se dividen por un divisor común, el *m. c. d.* y el *m. c. m.* quedan divididos por ese mismo número.

CAPITULO VI

NUMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

§ 19. NUMEROS PRIMOS

83.—Definición de los números primos.

La descomposición en factores.—Algunos problemas de la vida real plantean la necesidad de obtener los divisores de un número. Si se trata, por ejemplo, de embalar doce objetos iguales en una caja, esto puede hacerse en 3 filas de a 4 objetos, o bien en 2 filas de a 6; y finalmente, cabe poner en una sola fila los 12 objetos. Estos tres modos de distribución corresponden a las descomposiciones de 12 en factores.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

$$12 = 3 \times 4 = 2 \times 6 = 1 \times 12$$

No sucedería lo mismo si el número de objetos fuese 5, pues los únicos divisores que admite son 1 y 5; análogamente el 7 solo admite 1 y 7; etc. Vamos a estudiar estos números, llamados *primos*.

Definición.—Un número se llama *primo* cuando no admite más divisores que el mismo número y la unidad. Los números que no son primos, es decir, los números que admiten algún otro divisor, se llaman *compuestos*.

EJEMPLOS: Son primos:

$$1, 2, 3, 5, 7, 11 \dots$$

Son compuestos:

$$4, 6, 8, 9 \dots$$

El número 2 es primo, pero todos los números pares mayores que 2 son compuestos, por ser iguales a 2 por otro factor mayor que 1.

Aunque el número sea grande, es fácil reconocer a simple vista si admite alguno de los divisores 2, 3, 5, 11, aplicando los criterios de divisibilidad explicados en lecciones anteriores; pero si el número dado no admite estos divisores sencillos, no es fácil reconocer si es primo o compuesto. Tratemos, pues, de formar una tabla de números primos.

84.—Criba de Eratóstenes.

Escribamos los cien primeros números, prescindiendo de los pares mayores que 2, es decir, escribamos los impares y además el 2. El número 3 es primo; pero si a partir de él contamos de tres en tres, encontramos estos números:

$$3+6=9, \quad 3+6+6=15, \quad 3+6+6+6=21, \dots$$

y la suma de múltiplos de 3 es también múltiplo de 3. Suprimidos o tachados en la tabla esos números, estamos seguros de que no queda ningún múltiplo de 3, pues los que siguen a cada múltiplo de 3 son de la forma:

$$\dot{3}+2 \quad \text{y} \quad \dot{3}+4$$

y como 2 y 4 no son múltiplos de 3, tampoco lo son estos

He aquí los números que han quedado, señalando con puntos los lugares de los ya suprimidos:

1	2	3	5	7	.	11	13	.	17	19	.	23	25	.	29	31	.
35	37	.	41	43	.	47	49	.	53	55	.	59	61	.	65	67	.
71	73	.	77	79	.	83	85	.	89	91	.	95	97	.			.

Suprimamos ahora los múltiplos de 5, tachando los mismos de 5 en 5 lugares; obsérvese que el 25 es el pri-

mero que hay que suprimir, pues el $15 = 3 \times 5$ ya está suprimido, por ser múltiplo de 3. Partiendo, pues, de 25 tacharemos los números de 5 en 5 lugares y quedan los siguientes:

1 2 3 5 7 . 11 13 . 17 19 . 23 . . 29 31 .
 . 37 . 41 43 . 47 49 . 53 . . 59 61 . . 67 .
 71 73 . 77 79 . 83 . . 89 91 . . 97

Como el número que sigue al 5 es 7, que es primo, suprimamos sus múltiplos, contando de 7 en 7 lugares y se observa que los múltiplos $21 = 3 \times 7$, $35 = 5 \times 7$ ya están suprimidos por ser múltiplos de 3 y 5 respectivamente; comenzaremos, pues, por el $7 \times 7 = 49$ y hechas las supresiones de 7 en 7, quedan estos números:

1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41
 43 47 49 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

que no son divisibles por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7.

Todos estos números son primos; en efecto, fijándonos,

por ejemplo, en el 83, si no fuese primo se descompondría en dos factores $a.b$, uno de los cuales al menos debe ser dígito, puesto que $83 < 100$; pero los números dígitos admiten los divisores 2, 3, 5 ó 7, luego también lo admitiría dicho número (69, IV) y, por tanto, estaría tachado.

Tenemos, pues, la tabla de todos los números primos menores que 100.

EJERCICIOS

1.—Construir la tabla de los números primos, escribiendo *todos* los números naturales de 1 hasta 100 y tachando de 2 en 2, de 3 en 3, de 5 en 5, como antes se ha hecho. Compárese el trabajo que exige uno y otro procedimiento.

2.—¿Son primos los números 102, 105, 111, 117?

85.—Existencia de un divisor primo.

Entre todos los divisores de un número, el menor de ellos distinto de 1 es primo.

Demostración.—Si dicho divisor mínimo a fuese compuesto, es decir, si admitiese a su vez un divisor $a' < a$ y distinto de 1, este número a' sería también divisor del número dado (69) luego no sería a el menor, como se ha supuesto.

Luego, no pudiendo ser a compuesto, es primo.

Esta propiedad que acabamos de demostrar, según la cual *todo número no primo admite algún divisor primo*, es importante; porque para asegurar que un número es primo, basta ver que no es divisible por ningún número *primo* menor que él.

EJEMPLO: Para asegurar que 101 es primo, según la definición, habría que probar que no es divisible por ninguno de los 99 números desde 2 hasta 100. Según este teorema, basta ver que no es divisible por ningún primo desde 2 hasta 97 (total: 26 divisiones). Comenzaremos así: 101 no es divisible:

- por 2, por terminar en cifra impar;
- por 3, por ser la suma de las cifras 2;
- por 5, por no terminar en 0 ni en 5;
- por 7, haciendo la división mentalmente.

Para asegurar que es primo ¿habrá que ensayar todavía las divisiones por 11, por 13, por 17, por 19, por 23, por 29, por 31, por 37, por 41, por 43, por 47, por 53, por 59, por 61, por 67, por 71, por 73, por 79, por 83, por 89, por 97?

Este sería un ímprobable trabajo, que se evita mediante el teorema siguiente.

86.—Criterio para reconocer números primos.

Teorema.—Si un número no es divisible por los números primos cuyos cuadrados son menores que él, es primo.

Demostración.—Fijándonos en el número 101, considerado en el ejemplo anterior, hemos visto que no es divisible por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, y como el cuadrado de 11 es $121 > 101$, este número está en las condiciones de la hipótesis.

Supongamos que 101 admitiera un divisor primo 11, o mayor que 11; el cociente será menor que 11, porque de lo contrario el producto, o sea 101, sería mayor que 11.11. Resultaría, pues, 101 divisible por ese factor menor que 11, el cual admite algún divisor *primo* menor que 11, divisor que también lo será de 101, contra la hipótesis.

EJEMPLO: Si no se dispone de una tabla suficientemente extensa de números primos y se desea saber si un número cualquiera, por ejemplo: 127, es primo, ensayaremos su división por los números primos sucesivos.

Diremos así: 127 no es divisible por 2, pues termina en 7; no lo es por 3, pues $1+2+7=10$; no lo es por 5, puesto que termina en 7; la división mental por 7 indica que tampoco es divisible; al dividir por 11 resulta el cociente 11 y el resto 6, es decir:

$$127 = 11.11 + 6 < 11.12$$

A medida que el divisor crece, disminuye el cociente; y han llegado a ser iguales sin lograr divisiones exactas; y como

$$127 < 11.12 < 12^2,$$

puede asegurarse que 127 es primo.

Como el razonamiento es igual en todo caso, resulta:

REGLA.—Para reconocer si un número es primo, se divide por los números primos sucesivos; si se llega, sin obtener división exacta, hasta un cociente igual o menor

que el divisor, puede asegurarse que el número ensayado es primo.

EJEMPLOS: El número 529 no es primo, porque al llegar al divisor 23, la división es exacta. El número 531 es primo, porque no se logra división exacta al dividir por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, y el cociente de esta última división es igual al divisor 23.

El número 277 es primo, porque se llega al divisor 17, sin división exacta, y el cociente es $16 < 17$.

87.—Tabla de números primos.

Vemos ahora por qué fué suficiente suprimir los múltiplos de 2, 3, 5 y 7 para tener todos los números primos menores que 100; pues el cuadrado de 11 supera ya a todos estos números. Y obsérvese que la tabla se hubiera podido prolongar, pues los números siguientes no tachados, que son 101, 103, 107, 109, 113, 119 antes del $121 = 11^2$ son primos por el teorema 86.

Suprimiendo los múltiplos de 11, 13, 17, se construye esta tabla:

1,	2,	3,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,
31,	37,	41,	43,	47,	53,	59,	61,	67,	71,	73,
79,	83,	89,	97,	101,	103,	107,	109,	113,	127,	131,
137,	139,	149,	151,	157,	163,	167,	173,	179,	181,	191,
193,	197,	199,	211,	223,	227,	229,	233,	239,	241,	251,
257,	263,	269,	271,	277,	281,	283,	293,	307,	311,	313,
317,	331,	337,	347,	349,	353,	359,	367,	373,	379,	383,
389,	397,	401,	409,	419,	421,	431,	433,	439,	443,	449,
457,	461,	463,	467,	479,	487,	491,	499,	503,	509,	521,
523,	541,	547,	557,	563,	569,	571,	577,	587,	593,	599,
601,	607,	613,	617,	619,	631,	641,	643,	647,	653,	659,
661,	673,	677,	683,	691,	701,	709,	719,	727,	733,	739,
743,	751,	757,	761,	769,	773,	787,	797,	809,	811,	821,
823,	827,	829,	839,	853,	857,	859,	863,	877,	881,	883,
887,	907,	911,	919,	929,	937,	941,	947,	953,	967,	971,
977,	983,	991,	997,	1009,	1013,	1019,	1021,	1031,	1033,	1039,
1049,	1051,	1061,	1063,	1069,	1087,	1091,	1093,	1097,	1103,	1109,
1117,	1123,	1129,	1151,	1153,	1163,	1171,	1181,	1187,	1193,	1201,
1213,	1217,	1223,	1229,	1231,	1237,	1249,	1259,	1277,	1279,	1283,
1289,	1291,	1297,	1301,	1303,	1307,	1319,	1321,	1327,	1361,	1367,

EJERCICIOS

1.—Según la definición de número primo, ¿cuántas divisiones serían necesarias para averiguar si el número 1369 es primo?

2.—Demostrar que si a un número primo se le suma o resta, se obtiene un múltiplo de 6.

3.—De otro modo, equivalente, pero de demostración más directa: un número primo no puede ser: múltiplo de 6, más 2; múltiplo de 6 más 3; múltiplo de 6 más 4.

Comprobación: en la tabla obtenida en el (84), después de suprimidos los múltiplos de 2 y de 3, los pares de números que quedan son consecutivos de cada múltiplo de 6.

4.—Calcúlense los números siguientes:

$$1.2 + 1$$

$$1.2.3 + 1$$

$$1.2.3.5 + 1$$

$$1.2.3.5.7 + 1$$

$$1.2.3.5.7.11 + 1$$

comprobando que son primos; si se toma el factor 13 resulta un número divisible por 59; es decir: *de varios números primos se deduce otro mayor.*

5.—Vamos a generalizar esta propiedad importante: Supongamos construída una tabla de números primos:

$$1, 2, 3, 5, 7, \dots p$$

y formemos el número siguiente:

$$(1.2.3.5.7\dots p)+1$$

este número es

$$2 + 1, \quad 3 + 1, \quad \dots p + 1$$

luego el menor de sus divisores, que debe ser *primo*, según el teorema fundamental, es *mayor* que *p*. Como esto se puede aplicar cualquiera que sea el número primo *p*, resulta:

La sucesión de números primos es indefinida.

§ 20. NUMEROS COMPUESTOS

88.—Descomposición en factores primos.

Hemos dicho que se llama *compuesto* todo número no primo, es decir, todo número que admite algún divisor; y según el párrafo (83) expuesto en la lección anterior admite algún divisor primo, a ; si q es el cociente, se tiene la descomposición: $n=aq$.

Teorema.—*Todo número compuesto es un producto de factores primos.*

Demostración.—Si q es primo, ya está hecha la descomposición en dos factores primos $n=aq$; si q es compuesto, admitirá un divisor primo b (que puede ser el mismo a) y será

$$q=bq' \qquad \text{luego} \qquad n=abq'.$$

Si q' es primo, se tiene descompuesto n en tres factores primos; y si q' es compuesto, admitirá un factor primo. Así siguiendo, se llegará a un cociente cuyo mínimo divisor sea 1, es decir, se llegará a un cociente primo.

En la práctica suele procederse como indican los ejemplos siguientes:

858		2	504		2	858=2.3.11.13
429		3	252		2	504=2.2.2.3.3.7=2 ³ .3 ² .7.
143		11	126		2	
13		13	63		3	
1			21		3	
			7		7	
			1			

buscando cada vez cual es el menor factor primo, y haciendo la división mentalmente, poniendo el cociente debajo del dividendo.

Cuando se ve inmediatamente una descomposición del número en dos o más factores, conviene aprovecharla, descomponiendo cada uno en factores primos.

Así, por ejemplo, 3600 lo descompondremos de este modo:

$$3600=36.10^2=4.9.10^2=2^2.3^2.2^2=.5^2=2^4.3^2.5^2$$

Inmediatamente ocurre esta duda: Si un número se descompone por el método rápido y ordenadamente, dividiendo primero por 2, después por 3, etc. ¿se obtendrán los mismos factores primos? ¿Cada uno aparecerá repetido el mismo número de veces en ambas descomposiciones? Admitiremos que así sucede (por no ser la demostración muy sencilla), postulando:

Cada número compuesto admite una sola descomposición en factores primos.

EJERCICIOS

1.—Descomponer en factores primos los números siguientes:
1º) 242; 2º) 36500; 3º) 111111; 4º) 10101.

2.—Determinar el menor divisor (distinto de 1) de cada uno de los números:

$$2431, 64337, 14646.$$

3.—Descomponer en los factores más pequeños posibles los números:

$$233750, 20592, 16731.$$

89.—Criterio general de divisibilidad.

La descomposición en factores primos permite reconocer inmediatamente si un número es o no divisible por otro.

TEOREMA.—*La condición necesaria y suficiente para*

que un número sea divisible por otro es que contenga los factores primos de este último con exponentes no inferiores.

DEMOSTRACIÓN.—Si un número x es divisible por otro cuya descomposición en factores primos sea, por ejemplo, $2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$, es igual a éste por un cierto cociente q , o sea:

$$x = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot q.$$

Los factores primos de x son 2, 5, 7, y además los de q ; luego los exponentes con que 2, 5, 7, figuran en x son, por lo menos 3, 1, 2.

Recíprocamente; si el número x contiene los factores primos 2, 5, 7, con exponentes iguales o mayores que 3, 1, 2, puede escribirse así:

$$x = 2^{3+m} \cdot 5^{1+n} \cdot 7^{2+p} = 2^3 \cdot 2^m \cdot 5^1 \cdot 5^n \cdot 7^2 \cdot 7^p$$

por la propiedad distributiva de las potencias; y asociando factores resulta:

$$x = (2^3 \cdot 5 \cdot 7^2) (2^m \cdot 5^n \cdot 7^p)$$

luego x es divisible por $2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$, y el cociente está formado por los factores sobrantes.

EJEMPLOS: El número 2100 se descompone así:

$$21 \cdot 10 \cdot 10 = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7;$$

y el número 140 se descompone así:

$$140 = 14 \cdot 10 = 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

El primero contiene todos los factores primos 2, 5, 7 del segundo con exponentes 2, 2, 1, mientras que en el segundo los exponentes respectivos son: 2, 1, 1, luego se puede asegurar que 2100 es divisible por 140.

90.—Formación del m.c.d. de números cualesquiera.

Aplicando el criterio general de divisibilidad, se forma inmediatamente el m.c.d. de varios números cuando se

tienen descompuestos en factores primos. Basta aplicar la regla siguiente:

El m.c.d. de varios números es el producto de los factores primos comunes a todos ellos, tomado cada uno con el exponente mínimo con que figura en los diversos números.

En efecto, este número así formado es divisor de todos ellos, pues solo contiene factores de ellos y con exponentes iguales o menores. Cualquier otro divisor no puede contener otros factores primos, ni tenerlo con mayor exponente, en virtud del criterio general de divisibilidad; luego no hay divisor común mayor que el formado, el cual es, por tanto, el *m.c.d.*

EJEMPLOS: 1º)—Sean los números 240, 124 y 288.

Los descompondremos en factores primos, de este modo:

$$240=24.10=8.3.2.5=2^3.3.2.5=2^4.3.5$$

$$124=4.31=2^2.31$$

$$288=4.72=4.9.8=2^2.3^2.2^3=2^5.3^2$$

El único factor primo común es 2, con exponentes 4, 2 y 5, luego el *m.c.d.* es:

$$m.c.d. (240, 124, 288)=2^2=4.$$

2º)—Sean los números 240 y 288 solamente. Los factores primos comunes que tienen son el 2 y el 3; el 2 tiene los exponentes 4 y 5, luego en el *m.c.d.* debe llevar el exponente 4; el 3 tiene los exponentes 1 y 2, luego en el *m.c.d.* lleva el exponente 1. Por tanto:

$$m.c.d. (240, 288)=2^4.3=48.$$

91.—Formación del m.c.m. de números cualesquiera.

Aplicando el mismo criterio general de divisibilidad, resulta esta regla:

El m.c.m. de varios números es el producto de los factores primos comunes y no comunes, tomado cada uno con el mayor exponente con que figure en los diversos números.

Que este número es múltiplo de todos, resulta del criterio de divisibilidad, por contener todos los factores primos de cada uno, con exponentes no inferiores. Cualquier otro múltiplo común debe contener todos estos factores y, por lo menos, con estos exponentes, luego es mayor. Tenemos, por tanto, el *m.c.m.*

EJEMPLO: Sean los números 240, 72, 120.

Los descompondremos así:

$$240 = 8 \cdot 3 \cdot 10 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5; \quad 72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2;$$

$$120 = 3 \cdot 4 \cdot 10 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

El *m.c.d.* y el *m.c.m.* se forman según las reglas anteriores:

$$m.c.d. (240, 72, 120) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

$$m.c.m. (240, 72, 120) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$$

El primero contiene todos los factores primos 2, 5, 7 del segundo con exponentes 2, 2, 1, mientras que en el segundo los exponentes respectivos son: 2, 1, 1, luego se puede asegurar que 2100 es divisible por 140.

EJERCICIOS

- 1.—El número 2.4.6.8.10 ¿es divisible por el número 3.5.7?
- 2.—¿De cuántas maneras, se puede embalar una gruesa de objetos, disponiéndolos en rectángulo?
- 3.—Con 200 baldosas, pueden formarse pavimentos rectangulares de varias formas. ¿Cuántas?
- 4.—Demostrar, por descomposición en factores primos, que 10! es divisible por el producto $3! \times 7!$ y también por $5! \times 5!$
- 5.—Demostrar que todo cuadrado perfecto tiene pares los exponentes de sus factores primos.
- 6.—Extraer la raíz cuadrada de los siguientes cuadrados perfectos:
1º) 2601; 2º) 3969; 3º) 12321; 4º) 19881.
- 7.—¿Con qué cantidad mínima de lápices pueden hacerse 16, 18 y 24 paquetes sucesivamente?
- 8.—Quiero hacer cercos de 229, 342 y 420 metros largo. ¿Cuál es la máxima longitud que pueden tener las piezas de alambre utilizadas sin que haya que cortar ninguna:

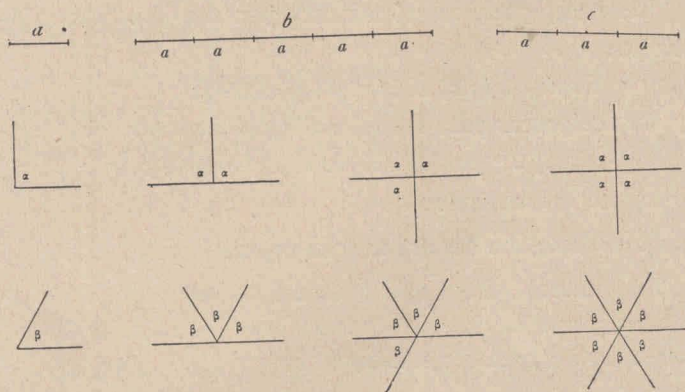
CAPITULO VII

FRACCIONES ORDINARIAS

§ 21. DEFINICION Y TRANSFORMACION DE FRACCIONES

92.—Múltiplos y submúltiplos. Partes alícuotas.

Hemos definido los múltiplos y submúltiplos de los números, cosa análoga cabe hacer con los segmentos y los ángulos.



Así, por ejemplo, en la figura el segmento b es el *quíntuplo* del a y el segmento c es *triplo* del mismo a ; el ángulo llano es el *triplo* del ángulo sextante β , y es *duplo* del ángulo recto o cuadrante α , y el ángulo de una vuelta es *cuádruplo* del cuadrante y *séxtuplo* del sextante.

Estas relaciones se expresan de dos modos, según que se consideren en uno u otro sentido. Así, por ejemplo, en la figura es indiferente decir:

$\left\{ \begin{array}{l} b \text{ es el } \textit{quíntuplo} \text{ de } a \\ a \text{ es la } \textit{quinta parte} \text{ de } b. \end{array} \right.$

En el caso de los ángulos es lo mismo decir:

el ángulo llano es el *duplo* del ángulo recto.

el ángulo recto es la *mitad* del ángulo llano.

el ángulo de una vuelta es el *séxtuplo* del sextante.

el sextante es la *sexta parte* del ángulo de una vuelta.

Tenemos, pues, los términos siguientes para los múltiplos:

duplo, triplo, cuádruplo, quíntuplo,

y sus recíprocos para los *submúltiplos* o *partes alicuotas*:

mitad, 3.^a parte, 4.^a parte, 5.^a parte,

o lo que es lo mismo:

un medio, un tercio, un cuarto, un quinto,

En general: decir que a es un n -simo de b o es la n -sima parte de b , es lo mismo que decir que b es la suma de n sumandos iguales al a .

93.—Múltiplos de partes alicuotas. Fracciones.

Entendido así el significado de *parte alicuota*, quedan definidos los múltiplos de cada parte alicuota; así, por ejemplo, en la figura del 92 el segmento $c = a + a + a$, se compone de *tres quintos* de b y podemos decir de varios modos:

c es igual a *tres quintos* de b ;
 c se compone de *tres quintos* de b ;
 c tiene *tres quintos* de b ;
 c es *tres quintos* de b .

En cambio, b es *cinco tercios* de c .

En todas estas locuciones lo único esencial son dos datos: la clase de la parte alícuota y el número de ellas. Es decir, para determinar un segmento o ángulo mediante otro, son necesarios dos números naturales: uno indica cómo se ha subdividido éste, es decir, *denomina* la clase de partes alícuotas y por eso se llama *denominador*; y el otro es el número de partes, y por eso se llama *numerador*.

Este par de números se escribe poniendo el denominador debajo del numerador, separado por una raya horizontal u oblicua, y el símbolo así formado se llama *fracción*.

Por ejemplo: el segmento a es $\frac{1}{5}$ de b , y b es $\frac{5}{3}$ de c , y c es $\frac{3}{5}$ de b .

La fracción se llama *propia* cuando el numerador no es múltiplo del denominador.

Si el numerador es múltiplo del denominador, la fracción suele llamarse *impropia* y se conviene en representar por ella el cociente de ambos.

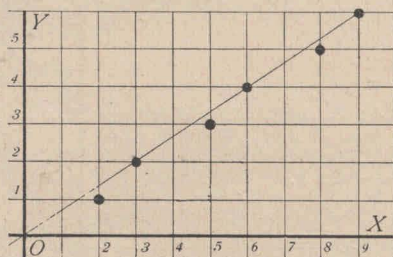
Recuérdese que la raya horizontal se usa también como signo de división exacta; p. ej.:

$$\frac{6}{3} = 2, \quad \frac{15}{3} = 5, \quad \frac{7}{1} = 7$$

y este significado está de acuerdo con el que ahora le damos; pues si el segmento b , en vez de contener 5 tercios de c contiene 6, resulta ser igual al *duplo* de c , es decir: *seis tercios* representa el número 2, y análogamente: *quince tercios* es igual a 5, etc.

EJERCICIOS

1. — Representación gráfica de las fracciones de términos cualesquiera. Dibújese una cuadrícula de rectas perpendiculares y equidistantes, adoptando una de cada sistema como recta o eje de referencia. Para determinar cada punto de la red bastan los dos números o coordenadas que determinan los dos rectas que pasan por él, referidas a los ejes.



Introducido este concepto, convengamos en representar cada fracción por el punto cuyas coordenadas son el denominador y el numerador. En la figura están representadas las fracciones siguientes:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{9},$$

94.—Igualdad de fracciones y números racionales.

Los segmentos, los ángulos y todos los entes que se pueden medir (pág. 12, ej. 3), se llaman magnitudes (*).

Puesto que cada fracción representa una cierta magnitud, diremos que son *iguales* las fracciones que expresan una misma magnitud. Por ej.: un cuadrante está expresado por $\frac{1}{4}$ de circunferencia o de ángulo de una vuelta; pero también está expresado por $\frac{90}{360}$, es decir, 90 grados sexagesimales, luego escribiremos

$$\frac{1}{4} = \frac{90}{360}$$

Diremos que todas las fracciones iguales entre sí representan un *mismo* número racional.

Para comparar fracciones podemos servirnos de segmentos o signos que nos permitirán descubrir criterios aritméticos puros. Veamos, p. ej., que son iguales las fracciones:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{30}{40} = \frac{60}{80} = \dots$$

Según lo visto anteriormente, la fracción $\frac{3}{4}$ representa un segmento compuesto de *tres cuartas* partes de



unidad, es decir, dividido el segmento que se adopte como unidad, en 4 partes iguales, basta tomar 3 de ellas y resulta un nuevo segmento, que puede tomarse como representación concreta de la fracción. Veamos ahora la representación de la segunda fracción $\frac{6}{8}$. Dividir la unidad en 8 partes equivale a dividir cada una de las

(*) En otro curso será precisado este concepto.

partes anteriores en dos iguales; y como cada uno de los tres cuartos que contiene el segundo segmento tiene dos octavos, resulta que el mismo segundo segmento sirve para representar a la nueva fracción $\frac{6}{8}$; y lo mismo representa a la tercera y a todas las iguales entre sí, puesto que cada una resulta de la primera multiplicando numerador y denominador por un mismo número.

EJERCICIOS

1. — Verificar que las fracciones de igual denominador están en rectas paralelas a la OY.

2. — Háganse notar las relaciones siguientes, que los alumnos pueden descubrir:

a) Las fracciones iguales están representadas por puntos alineados con el origen 0 y recíprocamente, el número racional está representado por esta recta y se llama *pendiente* de la misma.

b) Las rectas que proyectan los puntos de abscisa 1 representan números enteros.

c) Los puntos del eje Y no representan ningún número.

3. — Verificar si son iguales o desiguales las fracciones

$$\frac{3}{8} \quad , \quad \frac{2}{5}$$

Resuélvase gráfica y numéricamente, y obsérvese que de esta cuestión depende la paradoja expuesta en la introducción de la Geometría de primer curso, según la cual, con 64 baldosas se forman 65.

4. — Verificar si son iguales o desiguales las fracciones

$$\frac{89}{233} \quad , \quad \frac{55}{144}$$

La resolución gráfica no es posible; resuélvase aritméticamente, sin operación ninguna, por la simple observación de las cifras finales.

5. — Los puntos que representan los números

$$\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{3}{5} \quad , \quad \frac{5}{8}$$

están alineados, como se comprueba en la figura. ¿Son iguales estos tres números?

95.—Transformación y simplificación de fracciones.

Como el razonamiento hecho en los ejemplos anteriores es general, resulta esta propiedad fundamental:

Un número racional no se altera si el numerador y el denominador se multiplican o dividen exactamente por un mismo número. Es decir: las dos fracciones son iguales y representan el mismo número.

Ambas propiedades quedan expresadas por la igualdad siguiente:

$$\frac{a}{n} = \frac{ap}{np}$$

Simplificar una fracción significa obtener otra equivalente cuyo numerador y denominador sean, respectivamente, menores que los de aquélla.

Esta propiedad fundamental permite tal simplificación cuando hay algún factor común al numerador y denominador; pues suprimido dicho factor, es decir, dividiendo ambos por él resulta otra fracción equivalente más sencilla.

EJEMPLO: Si en un asilo hay 2000 pobres, y es preciso repartir entre ellos 1500 panes, la solución que proporciona el concepto de fracción establecido en párrafos anteriores, es dar a cada asilado 1500/2000 de pan.

Pero, ¿hará falta dividir realmente cada pan en 2000 partes para entregar 1500 de estas migajas a cada asilado? Salta a la vista lo absurdo que resultaría este trabajo. El enervado de esta tarea podrá solucionarla de modo mucho más sencillo, diciendo: 2000 es divisible por 100; es decir, 2000 hombres pueden distribuirse en 100 grupos de a 20; también 1500 es divisible por 100; es decir, 1500 panes pueden distribuirse en 100 grupos de a 15. Para hacer el reparto, bastará dar un grupo de 15 panes a cada grupo de 20 asilados, y lo que corresponderá a cada uno será: 15/20 de pan.

Hemos logrado así una simplificación notable en el reparto; pero aún puede simplificarse más. Basta que el encargado tenga en cuenta que 15 y 20 son ambos divisibles por 5, para que aplicando de nuevo la regla anterior, reduzca la fracción a $\frac{3}{4}$, y así resulta:

$$\frac{1500}{2000} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

es decir, hará el reparto dando 3 panes a cada 4 asilados, correspondiendo a cada uno $\frac{3}{4}$ de pan.

¿Puede simplificarse más? Evidentemente no, pues 3 y 4 ya no admiten ningún divisor común; es decir, son *primos entre sí*. Entonces diremos que la fracción se ha reducido “a su más simple expresión”.

EJERCICIOS

Transformar las fracciones siguientes y representarlas gráficamente:

- | | | | | | | | |
|----|---------------|-----------------------------|----|----|----|-----|-----------------|
| 1) | $\frac{1}{2}$ | en fracción con denominador | 4, | 6, | 8, | 10, | 16. |
| 2) | $\frac{1}{3}$ | ” | ” | ” | ” | 6, | 9, 12, 15, 24. |
| 3) | $\frac{1}{4}$ | ” | ” | ” | ” | 8, | 12, 16, 20, 32. |
| 4) | $\frac{1}{8}$ | ” | ” | ” | ” | 16, | 24, 32, 40, 48. |

96.—Fracciones irreducibles.

Para descubrir tales factores comunes, cuando no se observan directamente, convendrá descomponer en factores primos numerador y denominador. Si se calcula el *m. c. d.* de ambos y se dividen por él, los cocientes son primos entre sí, puesto que ya no contienen ningún factor primo común, y se dice que la fracción se ha reducido a su más simple expresión, o que se ha hecho *irreducible*.

DEFINICIÓN. — Una fracción cuyo numerador y denominador son primos entre sí se llama *irreducible*.

REGLA. — Para transformar una fracción en otra irreducible se dividen sus dos términos por su *m. c. d.*

EJEMPLOS. — Simplifiquemos las fracciones siguientes:

$$\frac{250}{40}, \quad \frac{48}{80}, \quad \frac{13310}{1870}$$

En la primera y tercera se puede suprimir desde luego el factor 10, y en la segunda el factor 8, resultando:

$$\frac{25}{4}, \quad \frac{6}{10}, \quad \frac{1331}{187}$$

La primera es ya irreducible, puesto que 25 y 4 son primos entre sí, ya que sus factores son 5 en el numerador y 2 en el denominador; la segunda admite todavía el factor 2, suprimido el cual resulta $3/5$; en la tercera no se observa inmediatamente factor común ninguno, pero descompuestos ambos términos en factores primos resulta:

$$1331 = 11.11.11$$

$$187 = 11.17$$

y suprimido el factor común 11 resulta la fracción irreducible $121/17$.

TEOREMA. — *Todas las fracciones iguales a una fracción irreducible tienen sus términos equimúltiplos de los de ésta.*

La demostración de esta propiedad, que no es esencial en este curso, resultará fácilmente por reducción a común denominador.

NOTA. — Queda así justificado el nombre de fracción *irreducible* que hemos dado a la que tiene sus dos términos primos entre sí, es decir, sin factor común ninguno; pues cualquier otra igual a ella tiene sus dos términos mayores.

EJERCICIOS

Obtener mentalmente la fracción irreducible equivalente a cada una de las siguientes fracciones:

EJ. 1:

$$\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}; \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}$$

EJ. 2:

$$\frac{2}{10}, \frac{4}{20}, \frac{8}{40}; \frac{2}{16}, \frac{3}{18}, \frac{4}{24}, \frac{6}{36}; \frac{2}{16}, \frac{3}{24}$$

EJ. 3:

$$\frac{4}{20}, \frac{6}{30}, \frac{8}{40}, \frac{6}{50}; \frac{2}{18}, \frac{6}{27}, \frac{16}{36}$$

EJ. 4: Simplificar, mediante descomposición en factores primos, las fracciones siguientes:

$$\frac{77}{187}, \frac{121}{143}, \frac{187}{289}; \frac{13231}{11413}, \frac{10201}{9797}$$

§ 22. REDUCCION A COMUN DENOMINADOR

97.—Regla del producto de denominadores.

Reducir varias fracciones a un común denominador es obtener otras tantas fracciones que sean respectivamente iguales a las dadas y que tengan denominadores iguales entre sí.

Sean, por ejemplo, tres fracciones:

$$\frac{a}{m}, \quad \frac{b}{n}, \quad \frac{c}{p}$$

En virtud de la propiedad fundamental, cada fracción se puede transformar en otra equivalente multiplicando sus términos por cualquier número natural; si multiplicamos los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de todas las demás, tenemos:

$$\frac{a}{m} = \frac{anp}{mnp}, \quad \frac{b}{n} = \frac{bmp}{nmp}, \quad \frac{c}{p} = \frac{cmn}{pmn},$$

pero estos tres denominadores son iguales, por la propiedad conmutativa de la multiplicación de números naturales, luego las tres nuevas fracciones tienen el mismo denominador; y, como son iguales a las dadas, éstas se han reducido a denominador común.

REGLA. 1.^a *Para reducir varias fracciones a denominador común, se multiplican los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de las demás.*

EJEMPLO. — Reducir a común denominador las fracciones:

$$\frac{11}{6}, \frac{27}{8}, \frac{13}{18}.$$

Aplicando la regla anterior resultan las nuevas fracciones:

$$\frac{11 \cdot 8 \cdot 18}{6 \cdot 8 \cdot 18}, \frac{27 \cdot 6 \cdot 18}{8 \cdot 6 \cdot 18}, \frac{13 \cdot 6 \cdot 8}{18 \cdot 6 \cdot 8},$$

los productos indicados se pueden calcular; pero salen números excesivamente grandes, siendo preferible seguir otro procedimiento que conduce a fracciones de términos menores, como ahora veremos.

98.—Regla del mínimo común denominador.

Ante todo comenzaremos por simplificar las fracciones, haciéndolas irreducibles. En el ejemplo anterior lo son las tres y ya no cabe simplificación previa. Calcularemos el *m. c. m.* de los denominadores, el cual, en general, será menor que el producto de estos denominadores; pero como este *m. c. m.* es múltiplo de cada denominador, es fácil transformar cada fracción en otra que tenga este nuevo denominador, multiplicando sus dos términos por el factor conveniente, que es el cociente de dicho *m. c. m.* por el denominador dado.

Sean, por ejemplo, las tres fracciones:

$$\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p}.$$

y sea $M = \text{m.c.m. } (m, n, p)$ el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Multiplicando los dos términos de la primera por el número natural $M:m$ se transforma en otra equivalente de denominador M , puesto que este cociente $M:m$ multiplicado por m da el producto M . Análogamente sucede

en las otras y las tres fracciones quedan transformadas en éstas, respectivamente iguales:

$$\frac{a(M:n)}{M}, \quad \frac{b(M:n)}{M}, \quad \frac{c(M:p)}{M}$$

Este denominador, mínimo común múltiplo de los denominadores, se llama *mínimo denominador común*, pues es el menor posible, como se puede demostrar.

REGLA 2.^a *Para reducir fracciones a su mínimo denominador común, se procede así:*

1.º — *Se simplifican hasta hacerlas irreducibles.*

2.º — *Se calcula el m. c. m. de todos los denominadores, el cual será el denominador común.*

3.º — *Se divide este m. c. m. por cada denominador.*

4.º — *Los cocientes obtenidos son los factores por los que deben multiplicarse respectivamente los numeradores dados, para obtener los nuevos numeradores.*

EJEMPLO 1. — Para reducir a su mínimo denominador común, las tres fracciones

$$\frac{11}{6}, \quad \frac{27}{8}, \quad \frac{13}{18}$$

del ejemplo anterior, que ya son irreducibles, calcularemos el m. c. m. (6, 8, 18) que se ve inmediatamente, o resulta de la descomposición en factores primos:

$$6 = 2 \cdot 3 \qquad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \qquad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

y aplicando la regla (91) resulta:

$$\text{m. c. m. (6, 8, 18)} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$$

$$\text{Cocientes: } 72:6=12 \qquad 72:8=9 \qquad 72:18=4$$

y multiplicando por ellos los tres numeradores resultan las nuevas fracciones:

$$\frac{11 \cdot 12}{72} = \frac{132}{72}, \quad \frac{27 \cdot 9}{72} = \frac{243}{72}, \quad \frac{13 \cdot 4}{72} = \frac{52}{72}.$$

EJEMPLO 2. — Reducir a mínimo común denominador las fracciones:

$$\frac{5}{12}, \frac{4}{15}, \frac{9}{20}, \frac{11}{30}$$

m. c. m. (12, 15, 20, 30) = 60.

Cocientes por los denominadores: 5, 4, 3, 2.

Productos por los numeradores: 25, 16, 27, 22.

Nuevas fracciones:

$$\frac{25}{60}, \frac{16}{60}, \frac{27}{60}, \frac{22}{60}$$

EJERCICIOS

Reducir mentalmente a común denominador los siguientes grupos de fracciones:

Ej. 1:

$$\frac{3}{2}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}, \frac{5}{6}; \frac{5}{2}, \frac{7}{8}; \frac{3}{2}, \frac{5}{12}$$

Ej. 2:

$$\frac{5}{3}, \frac{7}{6}; \frac{2}{3}, \frac{7}{9}; \frac{3}{4}, \frac{5}{12}$$

Ej. 3:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12}; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{12}$$

Reducir a común denominador las fracciones de cada uno de los grupos siguientes:

Ej. 4:

$$\frac{3}{12}, \frac{2}{9}; \frac{3}{14}, \frac{2}{21}; \frac{2}{3}, \frac{1}{12}, \frac{3}{8}$$

Ej. 5:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{18}; \frac{7}{8}, \frac{11}{12}, \frac{1}{100}; \frac{5}{4}, \frac{7}{18}, \frac{11}{12}$$

Ej. 6:

$$\frac{3}{20}, \frac{5}{6}, \frac{7}{18}; \frac{2}{121}, \frac{1}{143}, \frac{3}{169}; \frac{1}{10201}, \frac{1}{11413}$$

99.—Desigualdades de fracciones.

Puesto que cada número fraccionario está representado por un segmento, veamos la relación que hay entre los segmentos correspondientes a dos números desiguales. Reducidas las dos fracciones a común denominador, sean éstas a/n y b/n , siendo a , b , n naturales, y $a < b$.

Puesto que el segmento que representa al primero se compone de a segmentos iguales a la n -ésima parte de la unidad y el segmento que representa al segundo número se compone de b partes, iguales también a la n -ésima parte de la unidad, resulta: que si es $a < b$, el primer segmento es igual a una parte del segundo, puesto que sólo contiene a segmentos alícuotas de los b que contiene el segundo.

Por tanto: *entre dos fracciones de igual denominador es menor la que tiene menor numerador.*

Análogamente: *entre dos fracciones de igual numerador es menor la de mayor denominador.*

Pues cada una de las partes es menor y el número de ellas es el mismo en ambas.

Si las fracciones son cualesquiera se comparan reduciéndolas a común denominador y será

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{n} \quad \text{si es} \quad \frac{an}{mn} > \frac{bm}{nm}$$

es decir: si $an > bm$. Esta es la regla de los *productos cruzados* que permite saber cual de las dos fracciones es la mayor.

EJERCICIOS

Ej. 1. — Ordenar mentalmente de menor a mayor los números siguientes:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$$

Ej. 2. — Ordenar de menor a mayor los siguientes números:

$$\frac{5}{7}, \frac{28}{45}, \frac{58}{76}, \frac{13}{7}, \frac{31}{40}, \frac{319}{418}$$

Ej. 3. — Ordenar los números de cada uno de los pares siguientes:

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{8}; \frac{89}{233}, \frac{55}{144}$$

que se presentan en la paradoja geométrica expuesta en la *Introducción* de la *Geometría*, I.^a parte.

NOTAS

1. — Las únicas fracciones iguales a ciertas dadas (que suponemos irreducibles), son las que tienen sus términos equimúltiplos; pero todo múltiplo común de los denominadores debe contener los factores primos de todos ellos, con exponentes iguales o mayores, (89), luego es múltiplo del *m.c.m.* Por tanto: las fracciones iguales a las dadas tienen sus denominadores múltiplos del *m.c.m.* y éste es, por tanto, el *mínimo denominador común*.

2. — En algún caso especial puede no convenir la simplificación previa prescrita en la Regla 2.^a. Por ejemplo:

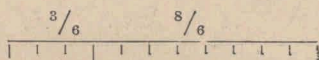
$$\frac{10}{8}, \frac{3}{24}, \frac{1}{3}$$

§ 23. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

100.—Definición y cálculo de la suma.

Como los números racionales pueden venir expresados por fracciones de igual o distinto denominador, daremos definiciones distintas para sumar fracciones en ambos casos.

Consideremos, para fijar las ideas, las fracciones ya reducidas a común denominador: $3/6$ y $8/6$.



La primera está representada por un segmento formado por tres de las seis partes en que se supone dividida la unidad; la segunda fracción está representada por otro segmento formado por 8 de dichas partes. Si sumamos ambos segmentos, según se explicó en el primer curso de Geometría, resulta un segmento, formado por $3 + 8 = 11$ segmentos iguales a un sexto; y la fracción que le corresponde es, por tanto, la suma de ambas.

Queda así justificada la siguiente

DEFINICIÓN. — Se llama *suma* de dos o más fracciones de *igual denominador* a otra fracción de igual denominador, cuyo numerador sea la suma de los numeradores. Es decir:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a + b + c}{m}.$$

Se llama *suma* de dos o más fracciones de *distinto denominador*, a la suma de otras tantas fracciones de igual denominador, iguales respectivamente a las dadas. Es decir:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = \frac{a'}{d} + \frac{b'}{d} + \frac{c'}{d}$$

siendo

$$\frac{a'}{d} = \frac{a}{m}, \quad \frac{b'}{d} = \frac{b}{n}, \quad \frac{c'}{d} = \frac{c}{p}$$

En particular, el denominador común podrá ser el producto de los denominadores de las fracciones, y entonces se tendrá:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = \frac{anp}{mnp} + \frac{bmp}{mnp} + \frac{cmn}{mnp}$$

o bien, el mínimo común denominador M , y entonces

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = \frac{a(M:m)}{M} + \frac{b(M:n)}{M} + \frac{c(M:p)}{M}$$

siendo $M = \text{m. c. m. } (m, n, p)$.

Como cada número racional puede expresarse por infinitas fracciones, cabe la duda de si la suma obtenida será distinta según el denominador elegido.

Se observa, sin embargo, que los resultados, aunque expresados por fracciones de términos distintos, son números iguales.

EJERCICIOS

Efectuar mentalmente las sumas siguientes:

Ej. 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{3} + \frac{7}{3}, \quad \frac{1}{4} + \frac{15}{4}, \quad \frac{5}{6} + \frac{7}{6}$$

Ej. 2:

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{4}, \quad \frac{2}{9} + \frac{4}{3}, \quad \frac{11}{2} + \frac{7}{4}, \quad \frac{11}{2} + \frac{15}{6}$$

101.—Propiedades de la suma.

PROPIEDAD UNIFORME.—Puesto que las fracciones iguales representan el *mismo* número, es decir, la *misma* magnitud, y el resultado de sumar estas magnitudes es independiente de las fracciones elegidas, resulta:

Sumando miembro a miembro varias igualdades resulta otra igualdad.

PROPIEDAD CONMUTATIVA. — Ha quedado demostrada también; pero se puede dar otra demostración aritmética.

Puesto que la suma de números racionales, una vez expresados por fracciones de común denominador, se reduce a sumar los numeradores, resulta que al alterar el orden de dos o varios sumandos, se altera el orden de los sumandos naturales que figuran en el numerador, lo cual no altera el resultado (18).

Por tanto: *La suma de números racionales es independiente del orden de los sumandos.*

EJEMPLOS

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a + b + c}{n}$$

$$\frac{c}{n} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{c + a + b}{n}$$

y ambos resultados son iguales, por ser $a + b + c = c + a + b$.

PROPIEDAD ASOCIATIVA. — También queda demostrada mediante las magnitudes, pero he aquí una demostración aritmética análoga a la anterior.

El mismo razonamiento sirve para ésta; pues asociar algunos sumandos, equivale a asociar varios sumandos en el numerador, y como para los sumandos enteros

La suma de números racionales no altera si se sustituyen varios sumandos por su suma efectuada.

En la práctica conviene utilizar estas propiedades para abreviar el cálculo de la suma, agrupando aquellos números cuya suma es sencilla, bien por dar una suma entera, o por tener el mismo denominador, o por otra simplificación.

EjemPlo 1: $\frac{3}{4} + 3 + \frac{1}{8} + 8 + \frac{1}{4}$

Claramente se observa la asociación más conveniente. Conviene sumar separadamente los sumandos enteros $3 + 8 = 11$ y los fraccionarios; y de éstos conviene sumar la primera fracción con la última, pues su suma es 1. Por tanto:

$$11 + 1 + \frac{1}{8} = 12 + \frac{1}{8} = \frac{96 + 1}{8} = \frac{97}{8}$$

EjemPlo 2. — Sean los sumandos:

$$\frac{4}{3}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{1}{4}$$

Como la suma del primero y tercero vale 2 y la del segundo y cuarto vale 1, la suma es igual a ésta:

$$2 + 1 + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4}$$

resultado que suele dejarse así indicado, como veremos después, o bien efectuada la nueva suma, resulta $13\frac{1}{4}$.

EJERCICIOS

Sumar, asociando convenientemente:

$$\frac{1}{13} + \frac{4}{15} + \frac{12}{13} + \frac{1}{13}$$

$$\frac{10}{121} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{121}$$

102.—Ley de monotonía y suma de desigualdades.

Es una consecuencia inmediata de la ley de monotonía de la adición de los números naturales.

También resulta observando que si un segmento es mayor que otro, subsiste la desigualdad al sumar los segmentos iguales. Por tanto:

Si se suman ordenadamente una igualdad y una desigualdad entre números racionales, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

Si en la primera igualdad se sustituye el signo $=$ por el $<$ subsiste todo lo dicho y resulta una desigualdad. Es decir: la suma de dos desigualdades es otra desigualdad; y si se suma otra tercera del mismo sentido resulta otra del mismo sentido, luego:

Si se suman ordenadamente varias desigualdades del mismo sentido, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

103.—Fracciones impuras y números mixtos.

Las propiedades estudiadas en las lecciones anteriores son válidas para todas las fracciones, pero conviene, desde el punto de vista práctico, considerar separadamente las que tienen el numerador menor o mayor que el denominador.

Se llama fracción *pura* la que tiene el numerador menor que el denominador y se llama fracción *impura* la que tiene el numerador mayor o igual que el denominador. Es decir:

$$\text{la fracción } a/n \text{ es } \begin{cases} \text{pura} & \text{si } a < n \\ \text{impura} & \text{si } a \geq n \end{cases}$$

y como la unidad puede representarse por la fracción n/n , resulta:

la fracción es $\begin{cases} \text{pura si es menor que 1} \\ \text{impura si es igual o mayor que 1} \end{cases}$

EJEMPLOS. — Clasificar las fracciones siguientes:

$$\frac{23}{17} \quad , \quad \frac{10 + 11 + 12}{9 + 11 + 13} \quad ; \quad \frac{12.13}{11.14}$$

Un caso particular de la suma, que conduce seguramente a una fracción impropia, es el siguiente: suma de un número natural y de una fracción pura. Como dicha suma se presenta con frecuencia, ha recibido el nombre especial de *número mixto* y se escribe omitiendo el signo de sumar, en la forma siguiente:

$$2 + \frac{1}{4} = 2 \frac{1}{4} \qquad 3 + \frac{7}{8} = 3 \frac{7}{8}$$

DEFINICIÓN. — *Número mixto* es la suma indicada de un número natural y una fracción pura.

EJEMPLOS. — Los números mixtos:

$1 \frac{1}{4}$, $2 \frac{3}{4}$, $2 \frac{1}{2}$, $10 \frac{3}{4}$
representan las sumas siguientes:
 $1 + \frac{1}{4}$, $2 + \frac{3}{4}$, $2 + \frac{1}{2}$, $10 + \frac{3}{4}$

Para calcular la suma:

$$c + \frac{r}{d}$$

pondremos c en forma de fracción:

$$c = \frac{dc}{d}$$

y la suma será:

$$\frac{dc}{d} + \frac{r}{d} = \frac{dc + r}{d} \quad [1]$$

Resulta así la siguiente regla práctica:

REGLA. — *Para reducir un número mixto a fracción se pone el mismo denominador y como numerador el número obtenido multiplicando la parte entera por el denominador y sumando el numerador.*

EJEMPLOS:

$$\begin{array}{l} 4 \frac{2}{7} = \frac{4 \cdot 7 + 2}{7} = \frac{30}{7} \\ 10 \frac{3}{4} = \frac{10 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{43}{4} \end{array}$$

Recíprocamente: Dada una fracción impura D/d , es decir, $D > d$, si efectuamos la división entera de D por d y llamamos c al cociente y r al resto, el número D , según se demostró en (60) quedará descompuesto en la forma:

$$D = dc + r \quad \text{siendo } r < d$$

y leyendo en sentido inverso la igualdad anterior [1] en virtud del carácter recíproco de la igualdad, resulta:

$$D/d = c + r/d = c + \frac{r}{d}$$

es decir: la fracción impura se ha transformado en número mixto.

Una fracción impura es igual a un número mixto cuya parte entera es el cociente entero del numerador por el denominador; y la fracción complementaria, del mismo denominador que la dada, tiene como numerador el resto.

EJEMPLO:

$$\frac{67}{13} = 5 \frac{2}{13}, \quad \frac{31416}{10000} = 3 + \frac{1416}{10000} = 3 \frac{177}{1250}$$

104.—Suma de números mixtos.

Puesto que cada número mixto es una suma indicada, bastará formar una suma con todos los sumandos y asociarlos convenientemente en virtud de la propiedad asociativa (101). La asociación más conveniente será la de las partes enteras, que sumadas darán un número natural y, por otra parte, se sumarán las partes fraccionarias, reduciéndolas a común denominador; resulta así una suma de un número natural y una fracción, que puede reducirse a una sola fracción.

EJEMPLOS:

$$1 \frac{1}{8} + 2 \frac{3}{8} + 3 \frac{1}{4} = (1 + 2 + 3) + (\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}) = 6 + \frac{3}{4}$$

$$1 \frac{1}{3} + 5 \frac{1}{4} + 2 \frac{1}{2} = (1 + 5 + 2) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = 9 + \frac{1}{12}$$

Si la fracción obtenida es pura, queda expresada la suma en forma de número mixto; y si la fracción obtenida es impura, se puede separar su parte entera, según hemos explicado en el párrafo anterior, y sumarla a las otras partes enteras.

REGLA. — *Para sumar varios números mixtos se suman las partes fraccionarias; si la fracción resultante es pura se le agrega la suma de las partes enteras; pero si la fracción obtenida es impura, se saca su parte entera, la cual se suma a las partes enteras de los números mixtos dados, para obtener la parte entera del resultado.*

Ej. 1. — Reducir mentalmente a fracciones los mixtos siguientes:

$$1 \frac{3}{4}, \quad 3 \frac{1}{8}, \quad 5 \frac{7}{8}$$

EJ. 2. — Reducir a mixtos las fracciones siguientes:

$$\frac{93}{11}, \frac{1200}{77}, \frac{4566}{149}, \frac{12560}{513}$$

EJ. 3. — Calcular las sumas:

$$2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{8} + 1\frac{3}{4}, \quad 11\frac{1}{2} + 10\frac{1}{2} + 1\frac{7}{8} + 9\frac{3}{4}$$

105.—Resta de fracciones.

La definición de esta operación, como inversa de la suma, es la misma para toda clase de números.

Restar de un número racional, llamado *minuendo*, otro número llamado *sustraendo*, es obtener otro, llamado *diferencia*, tal que sumado con el sustraendo dé como suma el minuendo. Escribir la igualdad

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{d}{p}$$

equivale a esta otra:

$$\frac{d}{p} + \frac{b}{n} = \frac{a}{m}$$

EJEMPLOS: Si de un trozo de $7/5$ m. de tela corto $3/5$ m., ¿cuánto me queda? Diré: 7 quintos de m. menos 3 quintos de metro = 4 quintos de m., y escribiré en términos abstractos:

$$\frac{7}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

Si de un trozo de $7/5$ m. de tela corto $3/4$ m., ¿cuánto me queda? Como los denominadores son distintos, empezaré reduciendo las fracciones a un común denominador, y luego efectuaré la resta, como antes, así:

$$\frac{7}{5} - \frac{3}{4} = \frac{7.4}{5.4} - \frac{3.5}{4.5} = \frac{28}{20} - \frac{15}{20} = \frac{13}{20}$$

Daremos ahora las demostraciones generales, con todo rigor.

Si el minuendo y el sustraendo se expresan por fracciones de igual denominador, y se restan los numeradores, resulta una fracción que sumada al sustraendo da el minuendo. En efecto: sean las dos fracciones dadas:

$$\frac{a}{n} , \frac{b}{n}$$

restando los numeradores resulta:

$$\frac{a-b}{n}$$

esta es la diferencia buscada; pues si la sumamos al sustraendo según la regla (100), resulta el minuendo.

$$\frac{a-b}{n} + \frac{b}{n} = \frac{(a-b) + b}{n} = \frac{a}{n}$$

REGLA. — *Para restar dos números racionales se reducen a denominador común y se forma una fracción que tenga este mismo denominador y como numerador la diferencia entre el numerador del minuendo y el numerador del sustraendo.*

EJERCICIOS

EJ. 1. — Calcular mentalmente las diferencias:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{5}{2} - \frac{3}{2} & , & \frac{7}{3} - \frac{4}{3} & , & \frac{5}{4} - \frac{1}{4} & , & \frac{9}{5} - \frac{4}{5} \\ \frac{5}{8} - \frac{5}{8} & , & \frac{4}{9} - \frac{1}{9} & , & \frac{7}{10} - \frac{5}{10} & , & \frac{11}{12} - \frac{5}{12} \end{array}$$

EJ. 2. — Calcular mentalmente las diferencias de números mixtos:

$$\begin{array}{l} 2\frac{3}{4} - \frac{1}{4} , \quad 6\frac{3}{8} - 4\frac{1}{8} , \quad 5\frac{7}{8} - 2\frac{5}{8} \\ 3\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4} , \quad 5\frac{1}{8} - 2\frac{5}{8} , \quad 25\frac{1}{8} - 12\frac{7}{8} \end{array}$$

§ 24. MULTIPLICACION DE FRACCIONES

106.—Multiplicación por un número natural.

La definición de producto dada para los números naturales: “suma de tantos sumandos iguales al multiplicando como unidades tiene el multiplicador” sólo es válida cuando el multiplicador es un número natural. Así, por ejemplo, multiplicar $\frac{5}{8}$ por 3 quiere decir que se forme una suma

$$\frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} = \frac{5 + 5 + 5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8}$$

es decir: se multiplica el entero por el numerador, conservando el mismo denominador. Pero si el multiplicador es $\frac{3}{4}$, carece de sentido hablar de una suma cuyo número de sumandos sea $\frac{3}{4}$.

Limitándonos, pues, al caso de multiplicador natural, resulta:

Para multiplicar una fracción por un número natural, se multiplica por éste el numerador, conservando el mismo denominador

107.—División por un número natural.

Para dividir en dos partes iguales una magnitud, p. ej., un segmento cuya medida es $\frac{3}{4}$, basta dividir en dos partes cada uno de los 3 cuartos que la componen y sumar estas nuevas partes alícuotas, que son octavos de unidad, resultando por tanto $\frac{3}{8}$.

Este razonamiento, que hemos aplicado al ejemplo (93)

es general y justifica la siguiente definición:

Cociente de una fracción por un número natural, es la fracción formada multiplicando el denominador por dicho número y conservando el mismo numerador. Es decir:

$$\frac{a}{m} : n = \frac{a}{mn}$$

Obsérvese que al multiplicar esta fracción por n resulta la dada, propiedad que también habría conducido a la misma fórmula.

Esta y la anterior pueden enunciarse así: *Si se multiplica por un número natural el numerador de una fracción, ésta queda multiplicada; si se multiplica el denominador, la fracción queda dividida.*

108.—Multiplicación de fracciones por fracciones.

El problema de multiplicar una magnitud, p. ej., un segmento, por una fracción ha sido ya explicado en (93); se resuelve dividiendo aquella magnitud en tantas partes iguales como indique el denominador y tomando tantas de ellas como indique el numerador.

Este razonamiento es aplicable a todo caso análogo y justifica esta

EJEMPLO: Supongamos que se quiere multiplicar por $5/2$ el segmento dibujado en (94) cuya longitud es $3/4$, basta dividirlo por 2, resultando un segmento de longitud $3/8$ y multiplicar por 5, resultando en definitiva $15/8$. Es decir:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

DEFINICIÓN. — *Se llama producto de dos o más fracciones a la fracción cuyo numerador es el producto de*

los numeradores y el denominador el producto de los denominadores.

EJEMPLO 1. — Efectuar el producto indicado:

$$\frac{24}{11} \cdot \frac{36}{55} \cdot \frac{33}{16}$$

Multiplicando los numeradores y los denominadores, resulta:

$$\frac{24 \cdot 36 \cdot 33}{11 \cdot 55 \cdot 16} = \frac{3 \cdot 36 \cdot 3}{55 \cdot 2}$$

Todavía se puede suprimir el factor común 2 y resulta la fracción irreducible

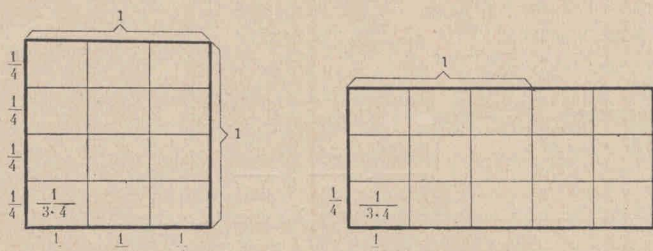
$$\frac{3 \cdot 18 \cdot 3}{55} = \frac{162}{55}$$

Obsérvese la abreviación considerable que estas simplificaciones previas producen en el cálculo, evitando hacer multiplicaciones de números grandes. He aquí la regla práctica para abreviar el cálculo:

Antes de efectuar las multiplicaciones de los numeradores y de los denominadores, se dejarán éstas indicadas y se suprimirán todos los factores comunes a numerador y denominador, antes de hacer los productos.

109.—Significado geométrico.

Las fracciones a/m y b/n están representadas por dos segmentos que se obtienen del modo siguiente: Se divide el segmento unidad en m partes iguales y se toman a partes, se divide la misma unidad en n partes y se toman b . Si con los dos segmentos así formados que representan las dos fracciones (en la figura las dos fracciones son $5/3$ y $3/4$) se construye un rectángulo y por los puntos de división se trazan paralelas a los lados, queda descompuesto en $a \cdot b$ rectángulos (en la figura son 15) que son partes alícuotas del cuadrado unidad cuyo lado es la unidad de longitud. ¿De qué clase son estas partes alícuotas, es decir, cuántas de ellas contiene el cuadrado unidad? Basta contar en la cuadrícula el número que hay en cada lado y resultan $m \cdot n$ (en la figura son $3 \cdot 4 = 12$). Cada rectángulo alícuota representa, por tanto, $1/12$ de unidad y como el número de ellos contenidos en el



rectángulo formado por los dos segmentos es $a.b = 15$, resulta que el producto de las dos fracciones: $15/12$, y en general $a.b/m.n$ representa el área del rectángulo construido sobre los dos segmentos que tienen por medidas aquellas dos fracciones.

EJERCICIOS

Ej. 1. — Calcular mentalmente los productos:

$$\frac{1}{2}.4, \quad \frac{3}{8}.4, \quad \frac{1}{8}.6, \quad \frac{1}{8}.21, \quad \frac{3}{4}.6, \quad \frac{7}{8}.6$$

Ej. 2. — Calcular en forma irreducible:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}, \quad \frac{10}{5} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{6}$$

110. — Propiedades de la multiplicación.

PROPIEDAD UNIFORME

Como el producto representa la magnitud obtenida aplicando a la magnitud multiplicando la operación indicada por el multiplicador, no depende de la forma adoptada para ambas. Es decir:

El producto de dos números racionales es único, es decir, independiente de cuales sean las fracciones que los representen.

De otro modo: *Los productos de fracciones iguales son iguales.*

PROPIEDAD CONMUTATIVA

Como el numerador del producto es el producto de

los numeradores, y por ser estos enteros, dicho producto es independiente del orden en que se consideren los factores, y lo mismo sucede con el denominador, resulta:

El producto de números racionales es independiente del orden de los factores.

PROPIEDAD ASOCIATIVA

Asociar dos o más factores equivale a asociar los correspondientes numeradores y los denominadores, operación que según se ha probado en (18) no altera el resultado, luego queda demostrada la propiedad: *El producto de varios números racionales no se altera substituyendo varios de ellos por su producto efectuado.*

EJEMPLO:

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} \cdot \frac{h}{k} = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot h}{m \cdot n \cdot p \cdot k}$$

en cambio, si asociamos los tres primeros, resulta:

$$\left(\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} \right) \frac{h}{k} = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot h}{m \cdot n \cdot p \cdot k}$$

que es la misma fracción.

Puesto que la propiedad asociativa expresa igualdad, puede enunciarse ésta en sentido inverso y resulta: Se puede disociar un factor en varios factores, o sea: en un producto se puede suprimir todos los paréntesis.

EJEMPLOS

$$\left(\frac{1}{4} a \right) \left(\frac{3}{8} b \right) \left(\frac{3}{4} \frac{d}{n} \cdot \frac{e}{p} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} ab \frac{d}{n} \cdot \frac{e}{p}$$

NOTA. — Desde ahora se usarán paréntesis para encerrar sumas o diferencias indicadas, pero no productos ni cocientes.

EJERCICIO

Suprimir los paréntesis innecesarios en las expresiones:

$$[a + (b \cdot c)(d - e)] [a \cdot b \cdot c] - (a + b)[a - 3(b \cdot c)]$$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

Para multiplicar o dividir una suma de magnitudes por un número natural, basta hacer esta operación con cada sumando y sumar los resultados, luego pasando a los números que representan la magnitud, resulta:

El producto de una suma por un número racional es la suma de los productos obtenidos multiplicando cada uno de los sumandos por el número.

Si todos los términos de una suma tienen un factor común, se puede sacar como factor de la suma de los restantes factores.

EJERCICIOS

1.—Aplicar todas las propiedades demostradas en esta Lección a las *fracciones decimales*, es decir, que tienen como denominador una potencia de 10.

El alumno conoce ya las reglas de cálculo con números fraccionarios decimales, las cuales quedan así demostradas.

2.—Sabiendo que el peso papel vale 44 centavos oro, resolver problemas de precios de mercaderías diversas que se cotizan en pesos oro, efectuando previamente todas las simplificaciones posibles. Así, p. ej.: 22 rollos de alambre a 14,80 oro cuestan en pesos papel:

$$\begin{array}{r} 22 \cdot 14,80 \quad 740 \\ \hline 0,44 \quad 1 \\ \hline \end{array} =$$

Aunque en otros casos la simplificación no sea tan completa, conviene suprimir todo factor 2, o mejor 4, pues la división por 11 se puede hacer mentalmente, dando así directamente el resultado.

§ 25. DIVISION Y POTENCIACION DE FRACCIONES

111.—División de números racionales.

Recordemos que en el capítulo IV distinguíamos dos clases de divisiones: la división *exacta* y la división *entera*, que contiene como caso particular a la exacta, cuando el dividendo es múltiplo del divisor; pero cuando no lo es, solamente la división entera es posible en la Aritmética de los números naturales. En cambio, vamos a ver que el problema de la división exacta admite solución mediante los nuevos números que hemos creado.

La definición de división exacta es la misma dada en la lección 13, pero suprimiendo la restricción de que el dividendo sea múltiplo del divisor.

DEFINICIÓN. — Dados dos números racionales llamados *dividendo* y *divisor*, se llama *cociente* al número que multiplicado por el divisor da como producto el dividendo. La operación que tiene por objeto calcular el cociente se llama *división*.

No es necesario agregar el calificativo de *exacta* a la división, porque es la única que estudiaremos entre números racionales y no hay, por tanto, peligro de confusión.

Hemos llamado cociente al *número* que multiplicado por el divisor da como producto el dividendo; pero, ¿existirá tal número?, y si existe, ¿será único o habrá varios? Mientras no se aclaren estas dudas la definición carecerá de valor, pues sólo será el planteamiento de un problema, sin saber si admite solución.

La solución de este problema la proporciona la siguiente regla: *Para dividir dos fracciones se multiplica la fracción dividendo por la fracción divisor invertida.*

Es decir,

$$\frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{9 \cdot 3} = \frac{14}{27}.$$

En efecto, éste es el cociente, porque multiplicado por el divisor se obtiene el dividendo, después de simplificar:

$$\frac{2 \cdot 7}{9 \cdot 3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 3}{9 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{2}{9}$$

Brevemente suele decirse así: se multiplican *en cruz* las dos fracciones, queriendo expresar esta frase que el numerador del dividendo se multiplica por el denominador del divisor y el denominador del dividendo por el numerador del divisor.

EJEMPLOS:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} : \frac{5}{7} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15} \\ \frac{3}{8} : \frac{9}{16} &= \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{9} = \frac{3 \cdot 16}{8 \cdot 9} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} : \frac{4}{9} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

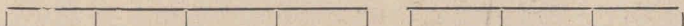
Calcular los cocientes siguientes:

$$\frac{3}{5} : \frac{1}{2}, \quad \frac{6}{25} : \frac{2}{5}, \quad \frac{10}{27} : \frac{25}{9}$$

NOTAS

Significado geométrico de los números inversos. — La figura representa un segmento que es los $\frac{3}{4}$ de otro, es decir, dividido

en cuatro partes aquél tiene tres de ellas; y claro es que comparados inversamente, el primero es los cuatro tercios del segundo, pues contiene cuatro partes de las tres partes en que el segundo está dividido. Los dos números racionales que expresan cada uno de dos segmentos mediante el otro son, por tanto, números inversos.



EJEMPLO. — Cuando se hicieron las primeras mediciones de arcos de meridiano para establecer el patrón que se llama *metro*, la unidad de longitud era la toesa, y la medida de la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano resultó aproximadamente $\frac{20}{39}$ de toesa, ¿cuál sería la longitud de la toesa expresada en metros? El número inverso, es

$$\frac{39}{20} = \frac{195}{100}$$

luego la toesa contiene 195 centésimas de metro, o sea centímetros.

112.—Propiedades de la división.

Puesto que la división se reduce a la multiplicación, resulta inmediatamente la propiedad uniforme:

Números iguales dan cocientes iguales.

Asímismo resulta la propiedad distributiva.

Para dividir una suma (diferencia) por un número se divide cada término y se suman (restan) los cocientes.

En general: *Para dividir una suma algebraica por un número se divide cada uno de los términos y se forma la suma algebraica con los cocientes.*

NOTA. — En la práctica convendrá casi siempre efectuar antes la suma algebraica y después la división, de modo que esta propiedad distributiva se utiliza más bien en sentido inverso, es decir, sacando como divisor único el divisor común de varios cocientes.

EJERCICIOS

Simplificar las expresiones:

$$(\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + \frac{5}{8}) : \frac{3}{4} ; \quad (ab + bc + ca) : abc$$

Aplicando estas reglas se llega a reducir toda expresión racional a una fracción única.

EJERCICIOS

Calcular las expresiones:

$$\frac{(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})}{(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4})} \quad \frac{(\frac{1}{3} + \frac{1}{2})(\frac{1}{4} + \frac{1}{8})}{(\frac{1}{4} + \frac{3}{4})(\frac{5}{8} + \frac{1}{4})}$$

113.—División completa de números naturales.

En particular, si el dividendo y el divisor son números enteros, el cociente es la fracción que tiene aquel numerador y este denominador; en efecto, aplicando la

$$a : b = \frac{a}{1} : \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Queda así resuelto el problema de la división de dos números, aunque el dividendo no sea múltiplo del divisor; el cociente existe, pero es fraccionario.

En general: Dados los números naturales D y d , si es $D = d \cdot c + r$, se verifica:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Es decir: *El cociente completo de la división D por d es igual al cociente entero más una fracción cuyo numerador es el resto, y el denominador es el mismo divisor.*

EJEMPLO. — Supongamos que se trata de repartir 8 objetos entre cuatro personas. El cociente es 2, es decir, a cada persona le corresponden 2 objetos; tenemos la división exacta.

Supongamos ahora que el número de objetos a repartir entre las 4 personas sea 7; la resolución dada en el capítulo IV, mediante la división entera, consiste en repartir un solo objeto a cada persona (cociente entero) quedando sobrantes tres objetos

(resto de la división entera). En cambio, la solución ahora obtenida mediante los números fraccionarios es ésta: a cada persona corresponden siete cuartos, es decir, hay que partir los objetos en 4 partes iguales y dar a cada persona 7 de estas partes iguales, o bien $1\frac{3}{4}$, es decir: un objeto y $\frac{3}{4}$ de objeto.

114.—Potenciación de fracciones.

La definición de la potencia de un número es siempre la misma, cualquiera que sea la naturaleza de este número. Recordemos, pues, la dada en la lección 12.

DEFINICIÓN. — Se llama *potencia* n -sima de un número al producto de n factores iguales a ese número. Este se llama *base* y n se llama *exponente* o *grado*. *Elevar* un número a la potencia n es calcular la potencia de exponente n de dicho número o base.

EJEMPLO. — *Elevar al cuadrado* una fracción es formar el cuadrado, o segunda potencia, o potencia de exponente 2; *elevar al cubo* es formar la potencia de exponente 3, etc.

Como la potencia no es sino un caso especial de la multiplicación, en que todos los factores son iguales, basta aplicar la regla de la multiplicación para formar la potencia, es decir, multiplicaremos los numeradores; y como todos son iguales, resulta la potencia del numerador con exponente n ; análogamente multiplicaremos los denominadores y, como todos son iguales, resulta la potencia del denominador de la fracción dada. Obtendremos, pues, la siguiente:

REGLA. — *La potencia n -sima de una fracción es la fracción cuyo numerador es la potencia n -sima del numerador y el denominador es la potencia n -sima del denominador de la fracción dada.*

Es decir:

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b} = \frac{\overset{n \text{ factores}}{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}}{\underset{n \text{ factores}}{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}} = \frac{a^n}{b^n}$$

115.—Potencias de fracciones irreducibles.

Si aplicamos esta regla a una fracción irreducible, es decir, a una fracción cuyos dos términos no tengan ningún factor primo común, como la potencia del numerador tiene los mismos factores primos de éste y la potencia del denominador tiene los mismos factores de éste, resulta que ambas potencias tampoco tienen ningún factor común y, por tanto, son números primos entre sí. Podemos enunciar, por tanto, este resultado:

Toda potencia de una fracción irreducible es otra fracción irreducible.

EJEMPLOS. — Las potencias de la fracción $\frac{3}{4}$ son

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{9}{16}, \quad \frac{27}{64}, \quad \dots$$

todas ellas fracciones irreducibles por tener sus términos primos entre sí.

116.—Reglas generales de cálculo de potencias.

Como ejercicio de aplicación de las reglas anteriores, demuéstrense las siguientes:

REGLA I. — *La potencia n-sima de un producto es el producto de las potencias n-simas de cada uno de los factores.*

II. — *La potencia n-sima de un cociente es el cociente de las potencias n-simas del dividendo y del divisor.*

III. — Las potencias n -simas de los dos miembros de una desigualdad entre números positivos, forman otra desigualdad del mismo sentido.

IV. — Las potencias sucesivas de un número mayor que 1 crecen al crecer el exponente.

Expresado de otro modo: De dos potencias de igual base $a > 1$ y distinto grado, es mayor la de mayor exponente.

V. — El producto de potencias de la misma base es otra potencia de esta base cuyo exponente es la suma de exponentes.

VI. — La potencia de una potencia es la potencia cuyo exponente es el producto de los exponentes.

EJERCICIOS

EJ. 1. — Calcular la cuarta potencia de las fracciones siguientes:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1\frac{1}{2}}{2}, \quad \frac{2\frac{1}{8}}{2\frac{3}{4}}$$

EJ. 2. — Calcular del modo más breve posible:

$$\frac{(\frac{1}{2})^2 (\frac{3}{4})^3}{(\frac{3}{8})^4}, \quad \frac{(\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{4})^3 (\frac{1}{8})^4}{(\frac{3}{4})^2 (\frac{1}{3})^3}$$

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

Ejercicios de numeración.

¿En una clase de 30 alumnos ¿hay al menos dos cuyos nombres comienzan por la misma letra?

Entre los 1.000 primeros números. ¿Cuántos terminan en 1? ¿Cuántos terminan en 27? ¿Cuántos comienzan por 13?

¿Cuántos números hay de n cifras?

¿Cuántos números de tres cifras hay que tienen el 2 como cifra de decenas?

¿Cuál es el menor y cuál el mayor de los números que tienen n cifras?

En la numeración de un libro de 572 páginas, ¿cuántas veces se emplea la cifra 0?

¿Cuántos tipos son necesarios para numerar un libro de 1234 páginas, si cada tipo se emplea una vez?

Ejercicios de sumas y restas combinadas.

Si el padre tiene 53 años, y su hijo 16. ¿Cuántos años tendrá el padre cuando el hijo tenga 27?

Reconstruir las siguientes sustracciones:

$$\begin{array}{r} 31.9. \\ - .416 \\ \hline .56.7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1cba8 \\ -ba72 \\ \hline dcba \end{array}$$

Si el padre tiene 45 años, y sus hijos 16, 13 y 8, ¿cuándo será la edad del padre igual a la suma de las edades de sus hijos?

¿Cuántos pesos fueron repartidos entre cuatro personas, sabiendo que la primera recibió 237 pesos, la segunda 245 más que la primera, la tercera 320 más que la segunda, y la cuarta tanto como entre las otras tres?

Determinar tres números consecutivos cuya suma sea 123. ¿Qué condición debe cumplir la suma para que el problema tenga solución?

Ejercicios de multiplicación.

Al multiplicar 8125×912 se ha olvidado correr hacia la izquierda cada producto parcial antes de sumarlos. Corregir el resultado 97500, sumándole un nuevo producto parcial conveniente.

¿Cuántas cifras tiene el producto de un número a de cinco cifras por otro de siete cifras?

Piensa un número de una cifra; duplícale; sume 6; duplica la suma; multiplica por 5; añade 6; multiplica por 5. Conociendo el número que resulta, calcular el primero.

Hallar un número de cuatro cifras cuyo producto por 9, es el mismo número escrito en orden inverso.

Ejercicios de potencias.

Recordando las cifras finales de los cubos de los números dígitos, calcular la cifra de las unidades de 213827^3 .

Con 29 baldosas más, mi habitación, que es cuadrada, tendría una baldosa más por lado. ¿Cuántas tiene?

A un jardinero le faltan 15 plantas para formar un cuadro y le sobran 34 para formar otro con una planta menos por lado. ¿Cuántas tiene?

Ejercicios de división.

Después de cambiar un billete de 100 pesos y efectuar algunas compras 9 niños, sobran 5 pesos al repartirse el dinero. Si el reparto se hubiera hecho entre 4 niños habría sobrado 1 peso. Calcular el importe de las compras.

Calcular el divisor y el resto de una división que tiene 202 por dividendo y por cociente 8.

Dividido un número D por otro d , se obtiene el cociente c y el residuo r . Si después dividimos D por c , ¿se obtiene siempre por cociente y residuo el divisor y resto de la primera división? ¿Cuándo la segunda división será exacta?

Juan da 6 peras a cada uno de sus hermanos, guardando 9 para él; si les hubiera dado 8 a cada uno no le habría quedado más que una. ¿Cuántos son sus hermanos?

Un empresario se había comprometido en concluir una obra en 60 días, pagando \$ 50 de multa por cada día de atraso. Concluida la obra en 68 días, recibió \$ 2100. ¿Cuál era el precio convenido?

Cada vez que Pedro gana 5 pesos, su padre le regala uno. Cuando Pedro tiene 96 pesos, ¿cuántos ha recibido de su padre?

Ejercicios de divisibilidad.

¿Cuáles son los números que divididos por 5 dan un cociente igual al resto? Generalización.

El $m.c.m.$ de dos números es 244188 y su $m.c.d.$ es 84. Si uno es 1428, ¿cuál es el otro?

El $m.c.m.$ de dos números es 63 veces mayor que su $m.c.d.$ La suma del $m.c.m.$ y del $m.c.d.$ es 4160. Si uno de los números es 455, ¿cuál es el otro?

Ejercicios de fracciones.

De \$ 1200 que tenía gasté $\frac{2}{15}$ y luego $\frac{1}{3}$. ¿Cuánto me queda.

Vendiendo 30 bolsas de trigo en 232, se han ganado \$ 40. ¿Cuál es el precio de compra de una bolsa?

Un grifo llena un estanque en 3 días y otro grifo lo llena en 6 días, ¿en cuántos días lo llenarían ambos?

¿Cuál es el número cuya mitad supera en 1 a la suma de la cuarta parte y la sexta parte?

¿Cuál es el ingreso anual de un abogado que después de pagar el impuesto a los réditos (5 por 1000) percibe 8359 pesos?

Un grifo puede llenar una pileta en $\frac{1}{4}$ de hora; otro grifo la puede llenar en $\frac{1}{2}$ hora, y un tercero la llenaría en $\frac{1}{3}$ de hora. ¿En cuánto tiempo se llena la pileta si abrimos los 3 grifos?

Un obrero ahorra $\frac{1}{4}$ de lo que gana. ¿Cuánto gana por día si gasta \$ 2,50?

Un hombre ha gastado $\frac{1}{3}$ de su dinero y los $\frac{2}{3}$ del resto. Le quedan aún 12 escudos; ¿cuántos tenía?

Un señor promete a su criado 10 monedas y una capa al año. Después de siete meses le despide, correspondiéndole 2 monedas y la capa; ¿cuántas monedas vale ésta?

Este problema es del siglo XVI (*Clavius*), y el anterior del siglo XV (*Chuquet*).

Un vendedor tiene 30 naranjas y las pregona a 2 por 10 centavos; otro tiene otras 30 y las pregona a 3 por 10 centavos. Para evitar competencias reúnen las naranjas y las venden a 5 por 20 centavos, con lo que creen que cobrarán entre los dos lo mismo. Compruébese que están en un error y explíquese el por qué del mismo.

INDICE

CAPITULO I

Numeración

	Pág.
1. Los números naturales y la Aritmética	5
2. La sucesión natural de los números	10
3. Igualdad y desigualdad de números naturales	13
4. Numeración decimal y romana	18

CAPITULO II

Suma y resta de números decimales

5. Propiedad de la suma	29
6. Cálculo de la suma	35
7. Resta de números naturales	41
8. Cálculo de la resta	49

CAPITULO III

Multiplicación de números naturales

9. Propiedades fundamentales	56
10. Cálculo del producto	65
11. Producto de varios factores	72
12. Potencias	75

CAPITULO IV

División de números naturales

13. Propiedades fundamentales de la división	87
14. La división entera	94
15. Cálculo del cociente y del resto	99

CAPITULO V

Divisibilidad

16. Generalidades y casos sencillos	108
17. Divisibilidad por 9, 3 y 11; sus aplicaciones	113
18. Divisores y múltiplos comunes	118

CAPITULO VI

Números primos y compuestos

19. Números primos	123
20. Números compuestos	130

CAPITULO VII

Fracciones ordinarias

21. Definición y transformación de fracciones	135
22. Reducción a común denominador	145
23. Suma y resta de fracciones	151
24. Multiplicación de fracciones	161
25. División y potenciación de fracciones	167
Ejercicios de recapitulación	174

