

21

COMPENDIO
DE
ARITMÉTICA

ADAPTADO AL PROGRAMA
DE 1^{ER} AÑO DE ESTUDIOS PREPARATORIOS DE LOS
COLEJIOS NACIONALES

POR
AUGUSTO LARGUIER

Catedrático en el Colegio Nacional de Buenos-Aires.

BUENOS AIRES

IMPRENTA DE PABLO E. CONI, CALLE DEL PERÚ, NUM. 107

1874

COMPENDIO
DE
ARITMÉTICA

*F. Coni Bogam
Exp. 409.2-958
L. 120.-*

38.421

COMPENDIO DE ARITMÉTICA

ADAPTADO AL PROGRAMA
DE 1^{ER} AÑO DE ESTUDIOS PREPARATORIOS DE LOS
COLEJIOS NACIONALES

POR
AUGUSTO LARGUIER

Catedrático en el Colegio Nacional de Buenos-Aires.

BUENOS AIRES

IMPRENTA DE PABLO E. CONI, CALLE DEL PERÚ, NÚM. 107

—
1874

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

PREFACIO

Al escribir este compendio de aritmética, hemos tenido por objeto atenernos escrupulosamente á los programas de los Colegios Nacionales que reparten en dos años el estudio de este ramo de enseñanza científica.

Los autores franceses, que nos han servido de testo hasta el presente, y de los cuales hemos sacado mucho para la redaccion de esta obra, siendo ellos mismos escritos con arreglo al espíritu de los programas de la enseñanza secundaria de Francia, no convienen para nuestras clases, sino en cuanto los transforme el catedrático, suprimiendo algunas teorías algo elevadas, y dictando ciertas cuestiones que no están tratadas en esas obras, como, por ejemplo, el sistema de pesos y medidas del país i su conversion al sistema métrico. Los mismos alumnos, teniendo en manos un testo de método diferente del que siguen, se hallan á veces perplejos, y pierden, al escribir en clase lo que dicta el catedrático, un tiempo precioso que podrian emplear con mayor aprovechamiento.

No hemos hecho pues, en esta primera obra, mas que el trabajo de transformacion que hasta hoy habiamos hecho en nuestras clases, y, como nos constaba que la instruccion teórica, en aritmética mas que en cualquier otro ramo, necesita ser completada por la práctica, hemos creido conveniente acompañar cada capitulo de este libro con *cuestionarios, ejercicios y problemas* destinados á hacer comprender mejor á los alumnos el alcance y utilidad de las teorías.

ARITMÉTICA

CAPÍTULO PRIMERO.

Numeracion de los números enteros y decimales.

I. Nociones preliminares.

1 — Se llama CANTIDAD á todo lo que es susceptible de aumento y disminucion ; como v. g., las líneas, las superficies, el precio y el peso de las cosas, el tiempo, etc.

2 — No podemos formarnos una idea de la magnitud de una cantidad sino *midiéndola*, esto es, *comparándola con otra de su misma especie*. En efecto, si se me presenta una pieza de tela enrollada, no tendré ciertamente ninguna idea de su longitud ; pero si tomo una longitud cualquiera, un metro por ejemplo, y la coloco sobre la tela tantas veces como pueda estar contenida, adquiriré entonces una idea exacta de la longitud de dicha tela.

3 — Esta cantidad *arbitraria* con la que puedo comparar todas las de la misma especie, se llama UNIDAD : se dice, pues, que la UNIDAD es una cantidad que se elige arbitrariamente para servir de medida comun en la comparacion de las cantidades de la misma especie.

4 — Un NÚMERO ENTERO es la reunion de varias unidades : cinco metros, siete libras son números enteros.

5. — NÚMERO CONCRETO es el que se enuncia, espresando tambien la especie de cantidad á que la unidad se refiere ; como ocho leguas, seis sillas ; y es ABSTRACTO cuando no se indica la especie de sus unidades, como ocho, que lleva consigo la idea de ocho cosas iguales entre sí y de la misma especie, pero sin designar cuales son estas cosas.

6 — Los números concretos se dividen en *complejos é incomplejos*. Se llaman INCOMPLEJOS si se refieren á una sola unidad,

como *tres casas, cinco caballos*; y COMPLEJOS si se refieren á dos ó mas unidades de diferentes especies, pero de la misma naturaleza, como *cinco días y seis horas* ó bien *dos onzas, cinco pesos y seis reales*.

7 — ARITMÉTICA es la ciencia de los números.

8 — NUMERACION es la parte de la Aritmética que tiene por objeto formar los números y representarlos sea con nombres, sea con caracteres, de donde sigue que se divide en *numeracion hablada y numeracion escrita*.

II. Formacion de los números enteros.

9 — Los números enteros se forman por la adición sucesiva de la unidad con ella misma, de modo que, añadiendo una unidad á otra de la misma especie, se obtiene un número; añadiendo á este número una nueva unidad, se obtendrá un nuevo número y así sucesivamente. Luego puede decirse que hay *una infinidad de números*; porque, por grande que sea un número, siempre puede añadirsele una unidad y obtener así un nuevo número.

III. Numeracion hablada.

10 — La numeracion hablada tiene por objeto espresar con un pequeño número de palabras combinadas con regularidad, todos los números que pueden necesitarse.

11 — Las palabras que se han adoptado para espresar todos los números enteros son las siguientes:

Uno ó la unidad que se considera tambien como un número entero; *dos* ó la agregacion de una unidad á otra unidad; *tres* ó dos unidades con otra mas; *cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve* y *diez* que se forman agregando sucesivamente una unidad al número anterior, llamándose estas *unidades simples* ó de *primer orden*.

La reunion de diez unidades se considera como una nueva unidad, ó *unidad de segundo orden*, que se llama DECENA. Se cuenta por decenas desde una hasta diez, lo mismo que se cuenta por unidades.

Así se dice: *una decena, dos decenas, tres decenas, cuatro*

decenas, cinco decenas, seis decenas, siete decenas, ocho decenas, nueve decenas, diez decenas, palabras á las que se han sustituido los nombres mas sencillos :

Diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa, cien.

Pero, entre dos decenas consecutivas, hay nueve números intermediarios ; luego, se han formado sus nombres agregando sucesivamente los nombres de los nueve primeros números á cada uno de las nueve primeras decenas.

Así, entre diez y veinte, diremos : *diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y cinco, diez y seis, diez y siete, diez y ocho y diez y nueve*. Entre veinte y treinta, *veinte y uno, veinte y dos, veinte y tres, veinte y nueve*, y así sucesivamente entre treinta y cuarenta, entre cuarenta y cincuenta hasta *noventa y nueve*.

Notemos que se han reemplazado las palabras *diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro y diez y cinco* respectivamente por *once, doce, trece, catorce y quince*.

Diez decenas ó cien unidades, componen otra unidad llamada CENTENA ó *unidad de tercer orden*. Por centenas contaremos lo mismo que hemos contado por decenas y unidades.

Así diremos : *una centena, dos centenas, tres centenas* y así sucesivamente hasta *diez centenas*, ó mas sencillamente : *cien, doscientos, trescientos, cuatrocientos, quinientos* en lugar de *cinco cientos, seiscientos, hasta diez centenas* ó *mil unidades*.

Pero, habiéndose formado la primera centena por la agregacion de una unidad á las noventa y nueve primeras, hay pues noventa y nueve números comprendidos entre dos centenas consecutivas ; luego, para espresar los números comprendidos entre las centenas, agregaremos á los nombres de estas los noventa y nueve primeros números.

Así tendremos : *ciento uno, ciento dos, ciento tres, hasta ciento noventa y nueve ; doscientos uno, doscientos dos, doscientos tres, doscientos noventa y nueve, y así sucesivamente hasta el número novecientos noventa y nueve*.

El conjunto de diez centenas ó mil unidades constituye la nueva unidad principal que llamamos UNIDAD DE MILLAR, ó *de cuarto orden*, y se cuenta por millares como por unidades, decenas y centenas, como sigue :

Mil, dos mil, tres mil, novecientos noventa mil y mil miles ó UN MILLON.

Los números comprendidos entre dos millares consecutivos, se espresan añadiendo á cada uno de ellos los novecientos noventa y nueve primeros números, del modo siguiente :

Mil uno, mil dos, mil tres, mil novecientos noventa y nueve.

Dos mil uno, dos mil dos, dos mil novecientos noventa y nueve.

Novecientos noventa y nueve mil uno, novecientos noventa y nueve mil dos, hasta novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve.

Las decenas y centenas de millar son unidades de quinto y sexto orden.

Se considera el *millon* como una nueva unidad compuesta que será del *sétimo orden*, y se cuenta por unidades, decenas, centenas, millares, decenas y centenas de millar de millon, como por unidades sencillas.

Finalmente, un millon de millones se llama BILLON ó unidad del *décimo tercero orden* ; un millon de billones TRILLON, etc. ; y se cuenta por billones, trillones, *cuádrillones*, etc., como por millones (*).

12 — El sistema que acabamos de esponer se llama SISTEMA DECIMAL porque diez unidades de un orden componen una decena de mismo orden ó una unidad del orden inmediato superior.

IV. Numeracion escrita.

13. — La numeracion escrita enseña á representar todos los números con muy pocos signos ó caractéres. Estos caractéres se llaman cifras ó guarismos,

14 — Las cifras convencionales de la aritmética y sus valores respectivos son los siguientes :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cero,	uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve.

(*) Los Franceses dividen los números en varias clases de unidades principales, que son *unidad, millar, millon, billon, trillon*, etc., y que llaman *ternarias* porque cada una se compone de *unidad, decena y centena* de su orden, de modo que el *billon* de estos equivale á la *unidad de millar de millon* de nuestro sistema, llamando *trillon* al que nosotros llamamos *billon*.

Las nueve últimas cifras se llaman *significativas* y no *significativo* el cero.

Con estas diez cifras se pueden espresar todos los números, conviniendo en que *toda cifra significativa, colocada á la izquierda de otra, represente unidades del orden inmediato superior*, y por lo tanto espresa *unidades diez veces mayores que las de la cifra de la derecha*; ó lo que es lo mismo que la cifra que represente unidades sencillas, se coloque en el primer lugar de la derecha, la que espresa decenas en el segundo, la que espresa centenas en el tercero, etc. De modo que segun este convenio, *cada cifra debe ocupar un lugar igual al orden de unidades que representa, contando estos lugares de derecha ó izquierda.*

Así que el número quinientos veinte y siete, que contiene cinco centenas ó unidades de *tercer* orden, dos decenas ó unidades de *segundo* orden, y siete unidades sencillas ó de *primer* orden, se escribe 527.

Noventa y dos mil setecientos trece, que contiene nueve unidades de *quinto* orden, dos del *cuarto*, siete del *tercero*, una del *segundo* y tres del *primero*, se escribe así: 92713.

Pero, si en el número que se quiere escribir faltasen algunos órdenes de unidades, ya no se podrian colocar estas cifras en los lugares que convienen á las unidades que deben representar. Para ello entonces, emplearemos el cero que no tiene en sí ningun valor, y que sirve únicamente para reemplazar las unidades que no existen en el número propuesto. Si, por ejemplo, se nos dá que escribir el número tres mil y cinco, vemos que hay tres unidades de millar que son de *cuarto* orden y despues cinco unidades sencillas que son de *primero*, luego faltan unidades de *segundo* y *tercer* orden que reemplazaremos por ceros y escribiremos 3005.

15 — Del convenio que hemos establecido al principio, se deduce:

1º Cada cifra tiene dos valores: uno *absoluto*, que es el que se refiere al número de unidades que espresa (así el valor absoluto de la cifra 3 es tambien 3 decenas, tres centenas, tres millares, etc., como tres unidades) y otro *relativo* que depende del orden de estas unidades.

16 — 2º Un número se hace diez, cien, mil, etc. veces mayor, colocando uno, dos, tres, etc. ceros á su derecha, porque las

unidades de cada cifra se hacen entonces diez, cien, mil, etc. veces mayores.

Por el contrario, un número que termina en ceros se hace diez, cien, mil, etc. veces menor, suprimiendo uno, dos, tres, etc. ceros á su derecha.

17 — Del sistema de numeracion hablada que hemos adoptado (10), resulta, que todo número se divide en diversas *clases de unidades principales* ó PERÍODOS: de *unidades, millares, millones, millares de millones, billones*, etc., componiéndose cada período de unidades, decenas y centenas; que, además, estas diversas colecciones de unidades se escriben unas á continuacion de otras, de modo que las del orden mas elevado ocupan el primer lugar de la izquierda, las del orden inmediatamente inferior vienen despues y así sucesivamente.

Luego, *para escribir en cifras un número enunciado, se escribirán unas á continuacion de otras, de izquierda á derecha, las cifras que deben representar respectivamente las centenas, decenas y unidades de cada orden de los periodos, teniendo cuidado de reemplazar por ceros las de las colecciones que pudiesen faltar. Cuando se haya llegado á las unidades simples, el número enunciado estará escrito.*

EJEMPLO. La espresion en cifras del número *cuarenta mil millones doce mil ciento cuatro*, es 40.000.012.104.

18 — Recíprocamente, *para traducir al lenguaje ordinario un número escrito en cifras, dividase dicho número en secciones de á tres cifras, procediendo de derecha á izquierda, pudiendo resultar la última seccion de la izquierda tambien con dos cifras ó con una; de este modo las secciones que se habrán formado corresponderán respectivamente á los diferentes órdenes de unidades principales. Empezando en seguida por la izquierda, se enunciará cada seccion como si estuviese sola, añadiendo despues de las unidades el nombre de la unidad de la seccion á la que corresponde.*

Sea, por ejemplo, propuesto para traducirlo al lenguaje ordinario el número :

35807000040536004

Desde luego lo dividiremos en secciones de á tres cifras como se ve á continuacion :

35.807.000.040.536.004

Hay seis secciones ó períodos: la última, pues, es del orden de los *millares de billon*. Luego diremos: *treinta y cinco mil ochocientos siete billones, cuarenta millones, quinientos treinta y seis mil cuatro*.

V. Numeracion de los números decimales.

19 — Si se considera que se divide la unidad en diez partes iguales, cada una de estas partes será *una décima* de la unidad; que cada décima sea dividida en diez partes iguales, la unidad lo estará entonces en cien, y por consiguiente, cada una de estas nuevas partes será *una centésima* de la unidad. Del mismo modo si se divide cada centésima en diez partes iguales, habrá mil de ellas en la unidad, y por consiguiente, estas nuevas partes serán *milésimas*, y así sucesivamente se tendrán *las diez-milésimas, las cien-milésimas, las millonésimas*, etc.

Estas partes de la unidad y la coleccion de varias de ellas han recibido el nombre de *fracciones decimales*, porque se componen de partes de la unidad de diez en diez veces menores. Así una FRACCION DECIMAL es *una ó varias de las partes que se obtienen dividiendo la unidad en diez, ó en cien, ó en mil, etc., partes iguales*.

20 — De lo que hemos sentado en el nº 14, se deduce que toda cifra colocada á la derecha de otra espresa unidades diez veces menores que las representadas por esta otra, ó bien unidades del orden inmediato inferior; luego, la cifra que escribiremos á la derecha de las unidades simples representará *décimas*; la que estará al segundo rango despues de las unidades simples representará *centésimas* y así sucesivamente; de modo que podremos representar las diversas colecciones de unidades decimales que contendrá un número con las mismas cifras que las unidades enteras, haciendo ocupar á dichas cifras los lugares convenientes. Solamente, para no confundir la parte decimal con la parte entera, se la separará de esta por medio de una coma. Observaremos que si no hay parte entera, se habrá de reemplazarla por medio de un cero.

EJEMPLO: Escribir *cinco unidades, ocho décimas, seis centésimas y cuatro diez-milésimas* — se escribirá 5,8604.

Como no hay *milésimas*, se las ha reemplazado con un cero

21 — El número decimal 5,8604 puede enunciarse mas sencillamente que como acabamos de hacerlo, teniendo presente que cada unidad decimal es diez veces mayor que la que está colocada á su derecha. Así *una décima* vale DIEZ *centésimas*, CIENTO *milésimas*, MIL *diez-milésimas*, etc. ; *una centésima* valdrá DIEZ *milésimas*, CIENTO *diez-milésimas*, etc. Entonces, en lugar de decir OCHO *décimas*, SEIS *centésimas*, CUATRO *diez-milésimas*, se podrá decir OCHO MIL *diez milésimas*, SEISCIENTAS *diez-milésimas*, CUATRO *diez-milésimas*, ó aun mas sencillamente: OCHO MIL SEISCIENTAS CUATRO *diez-milésimas*; y por consiguiente el número se leerá: *cinco unidades, ocho mil seiscientas cuatro diez-milésimas*.

22 — La unidad valiendo DIEZ MIL *diez-milésimas* se podrá tambien enunciar en número: *cincuenta y ocho mil seiscientas cuatro diez-milésimas*.

23 — De donde deducimos que los números decimales se leen como si fueran números enteros, espresando al fin el orden decimal á que corresponde la última cifra.

Así el número 0,5432701 se enunciará: *cinco millones cuatrocientos treinta y dos mil setecientas una* DIEZ-MILÉSIMAS. El número 54,0302 se leerá: *cincuenta y cuatro* UNIDADES, *trecientas dos* DIEZ-MILÉSIMAS; ó bien *quinientas cuarenta mil trescientas dos* DIEZ-MILÉSIMAS.

24 — Se deduce tambien que: *para escribir un número decimal á medida que se dicta, es preciso escribirlo como si fuera un número entero, poniendo en seguida la coma de modo que la última cifra ocupe el rango correspondiente al orden decimal espresado.*

EJEMPLO: Escribir *trescientas dos* DIEZ-MILÉSIMAS.

Escribo desde luego 302, pero como las diez-milésimas ocupan el cuarto rango despues de la coma, tengo que hacer ocupar este rango al 2, lo que consigo anteponiendo un cero al 3 y como no hay unidades en este ejemplo, pongo un cero para reemplazarlas y resulta 0,0302.

OTRO EJEMPLO: Escribir *noventa mil quinientas cuatro* centésimas.

Escribo desde luego 90504, y como las centésimas ocupan el segundo rango despues de la coma, la coloco despues del 5,

quedando así el 4 en el lugar que le corresponde. El número pedido es pues 905.04.

25 — *No se altera el valor de un número decimal escribiendo ó suprimiendo uno ó varios ceros á su derecha; porque las cifras significativas ocuparán siempre los mismos lugares relativamente á las unidades simples y representarán por consiguiente siempre las mismas colecciones de las mismas unidades.*

Así es que 9,346 y 9,34600 son espresiones idénticas.

Tambien podemos decir, al escribir estos dos ceros á la derecha de 346 que hacemos á este número cien veces mayor; pero, en lugar de espresar milésimas, viene á espresar cien-milésimas, esto es, partes de la unidad cien veces mas pequeñas; luego, el valor del número decimal no ha sido alterado.

26 — *Del mismo principio se sigue tambien que un número decimal se hace diez, cien, mil, etc. veces mayor, corriendo la coma uno, dos, tres, etc. lugares hácia la derecha.*

Si, por ejemplo, se corre la coma dos lugares hácia la derecha de un número, cada cifra se habrá adelantado dos lugares hácia la izquierda, y representará, por consiguiente, unidades cien veces mayores; luego, todas las partes del número, habiéndose hecho cien veces mayores, el mismo número será cien veces mayor.

27 — *Por el contrario: un número decimal se hace diez, cien, mil, etc. veces menor, corriendo la coma uno, dos, tres, etc. lugares hácia la izquierda.*

VI. Signos usados en la Aritmética.

28 — Los signos que se usan en la Aritmética para mayor facilidad en los razonamientos del cálculo son los siguientes :

+ significa *mas*; así $5 + 7$ se enuncia *cinco MAS siete*.

— significa *menos*; así $8 - 3$ se enuncia *ocho MENOS tres*.

• ó $\times$ significa *multiplicado por*; así 5×7 ó $5 \cdot 7$ se lee *cinco MULTIPLICADO POR siete*.

: ó $\div$ significa *dividido por*; así $8 : 3$ ó $8 \div 3$ se lee *ocho DIVIDIDO POR tres*.

= significa *igual*; así $5 + 7 = 12$ se lee *cinco mas siete IGUAL doce*.

> significa *mayor que*; así $8 > 3$ se enuncia *ocho MAYOR QUE tres*.

< significa *menor que*; así $5 < 7$ se lee *cinco MENOR QUE siete*.

29 — *La espresion de dos cantidades que tienen mismo valor*

sin tener la misma forma se llama IGUALDAD, é IDENTIDAD si tiene misma forma.

Toda igualdad consta de *dos miembros* separados por el signo igual, llamándose *primer miembro* la cantidad que está antes del signo igual y *segundo miembro* la que está despues. Así, $5 + 7 = 12$ es una igualdad; $5 + 7$ es el primer miembro, y 12 el segundo; $12 = 12$ sería una identidad.

CUESTIONARIO.

¿Qué se entiende por cantidad? ¿Cómo puede formarse idea de una cantidad?

¿Qué se entiende por unidad? número? número abstracto? número concreto? números complejos é incomplejos?

¿Qué es aritmética?

¿Qué es numeracion? De cuántas partes se compone? Cuáles son estas partes?

¿Cómo se forman los números? Cuántos hay?

¿Qué es numeracion hablada? Cuáles son las palabras que se han adoptado? De qué órden son las unidades de millares? las centenas de millon?

¿Cuál es el objeto de la numeracion escrita? Cuál es el convenio fundamental?

¿Cuántos valores tiene una cifra? Cuáles son?

¿Cuál es el objeto del cero?

¿Cómo se escribe un número que se dicte?

¿Cómo se enuncia un número escrito con cifras? ¿Esponer la jeneracion de los números decimales?

¿Qué se entiende por fraccion decimal?

¿Cómo se escriben con cifras las fracciones decimales?

¿Cómo se enuncia un número decimal escrito con cifras? De qué modo se lee, comprendiendo en un mismo enunciado la parte entera y la parte decimal?

¿Cómo se escribe un número decimal que se dicte?

¿Se altera ó no el valor de un número decimal escribiendo ó suprimiendo ceros á su derecha? y de un número entero?

¿Qué resulta, en un número decimal, al hacer correr la coma sea á la derecha, sea á la izquierda?

¿Cuáles son los signos usados en la aritmética?

¿Qué diferencia hay entre el signo *menos* y el signo *divido por*, que ambos están representados por un *guion*?

¿Qué se entiende por igualdad? por identidad? ¿De qué se compone una igualdad?

CAPÍTULO SEGUNDO.

Cálculo de los números enteros y decimales.

I. Adición de los números enteros.

30 — *Adición es una operación que tiene por objeto reunir en un solo número dos ó mas números dados.*

31 — Los números que se dan para sumar, se llaman *sumandos* y el resultado de la operación se llama *suma* ó *total*.

32 — Para reunir dos ó mas números en uno solo, podemos descomponer los sumandos dados en las partes que se quiera, sumar estas entre sí, y reunir las sumas parciales. En efecto, siendo cada sumando un *todo*, y por lo tanto igual á la suma de sus partes (*), habremos efectuado la suma total cuando hayamos sumado todas las partes de las que se compone cada todo.

33 — En la adición pueden distinguirse dos casos: 1º *sumar un número cualquiera con otro ú otros de una cifra*; 2º *sumar números de varias cifras*.

34 — *1er Caso.* La resolución de este caso se reduce á agregar sucesivamente á uno de los sumandos las diferentes unidades que el otro contiene. Para ejecutar la adición siguiente: $5 + 3$, como á 5 hemos de agregar 3 veces la unidad, diremos: 5 y 1 son 6, 6 y 1 son 7, 7 y 1 son 8, luego $5 + 3 = 8$.

Efectuando á menudo adiciones de este modo, los resultados por fin se graban en la memoria. Si por ejemplo nos proponemos sumar los números: 5, 6, 7, 8 y 9, diremos, una vez acotumbrados: 5 y 6 son 11, 11 y 7 18, y 8 26, y 9 35; luego $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$.

(*) Esta proposición se llama un *axioma*, esto es, un principio tan evidente que basta enunciarlo para ver su verdad.

35 — 2º *Caso*. Para sumar dos ó mas números compuestos de varias cifras, haremos como hemos dicho en el N° 32, esto es, descompondremos cada sumando en partes que serán unidades de 1º, 2º, 3º etc. orden, sumaremos separadamente las unidades de mismo orden en cada sumando y la suma total será la reunion de estas sumas parciales.

Propongámonos sumar los números 542, 74, 6305 y 428.

Colocaremos todos los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan en una misma columna las unidades de cada orden, tiraremos una raya por la parte inferior y diremos

$$\begin{array}{r} \text{Sumandos} \left\{ \begin{array}{r} 542 \\ 74 \\ 6305 \\ 428 \end{array} \right. \\ \hline 7349 \text{ — Suma} \end{array}$$

2 unidades y 4 son 6 unidades y 5 son 11 y 8 son 19 unidades que componen 1 decena y 9 unidades; escribiremos 9 debajo de las unidades y la decena la añadiremos á la columna siguiente que es de decenas.

1 decena y 4 son 5 decenas y 7 son 12 y 2 son 14 decenas que componen 1 centena y 4 decenas que escribimos debajo de la segunda columna, añadiendo la centena á la 3ª columna que es de unidades de 3º orden.

Así tendremos 1 centena y 5 son 6 centenas y 3 son 9 y 4 son 13 centenas que componen 3 centenas, cifra que escribimos debajo de la columna correspondiente y 1 unidad de millar que con las 6 que hay en la cuarta columna hacen 7 unidades de millar.

No habiendo mas columnas que sumar, la suma total será 7349.

En la práctica no se enuncian las cifras de cada columna, ni la especie de unidades de las sumas parciales; se dice simplemente:

Para la 1ª columna: 2, 6, 11, 19, escribo 9 y llevo 1; para la segunda: 1, 5, 12, 14, escribo 4 y llevo 1 y así sucesivamente.

36 — *Se llama PRUEBA DE UNA OPERACION, otra operacion que se ejecuta para asegurarse de la exactitud de la primera.*

37 — *La adiccion se prueba repitiéndola en un orden inverso de aquel en que se ejecutó, es decir, principiando por la parte inferior á sumar las cifras de cada una de las columnas de unidades, decenas, centenas, etc., suponiendo que la vez primera se diese principio por la parte superior de las mismas columnas.*

38 — **ADVERTENCIAS.** — 1ª La adiccion de los números enteros puede empezarse indiferentemente por la izquierda como por la derecha toda vez que la suma de cada columna no exceda á 9, pero como sucede mas jeneralmente que estas sumas parciales pasan de 9, para no tener que rectificar números ya escritos, se ha convenido empezar siempre por la derecha.

2ª Si consta una adiccion de un gran número de sumandos, se la divide, para facilitar el cálculo, en varias adiciones parciales; claro es (32) que la suma de estas será el resultado total.

II. Adiccion de los números decimales.

39 — *Luego que las unidades decimales están sujetas á la misma ley de composicion que las unidades enteras, puesto que una unidad vale diez décimas, que una décima vale diez centésimas, que una centésima vale diez milésimas etc., debe la adiccion de los números decimales efectuarse segun la misma regla que la de los números enteros. Así, despues de colocados todos los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan en una misma columna las unidades de cada orden, haremos la adiccion sin ocuparnos de las comas, segun el (35) y colocaremos, en las sumas, una coma de modo que esté debajo de la columna de las comas.*

EJEMPLO. — Efectuar la suma siguiente:

$$3,056 + 0,92 + 14,4002 + 7,2$$

3,056

0,92

14,4002

7,2

25,5762 — Suma

APLICACIONES.

Efectuar las sumas siguientes :

$$1^{\circ} 78167 + 9432 + 18 + 5009 + 14$$

$$2^{\circ} 43987 + 123456 + 789 + 1011213 + 14151617$$

$$3^{\circ} 0,0087 + 0,100456 + 0,090807 + 4,0906$$

— Una persona nació en 1842 ¿ en qué época tuvo 27 años ? R. (1869).

— Un viajero ha hecho 5 leguas el primer día, 6 el segundo, 4 el tercero y 8 el cuarto. ¿Cuál es el camino que ha recorrido ? R. (23 leguas).

— Un obrero ha recibido 175 \$, otro 80 \$ mas que el primero y un tercero tanto como los dos primeros juntos. ¿ Cuánto ha recibido cada uno de ellos ?
Respuesta (el 1º 175 \$; el 2º 255 \$; el 3º 430 \$).

— Cuesta una mercancía 17930 \$; ¿ á qué precio necesita venderla para ganar 2840 \$? R. (20770 \$).

— Una cierta cantidad de dinero se ha dividido entre tres obreros : al 1º le ha tocado 354 \$, al 2º 75 mas que al 1º y al 3º 142 mas que al 2º; ¿Cuál era la cantidad de dinero ? R. (1354 \$.)

— ¿Cuál es la poblacion de la tierra, sabiendo que la Europa tiene 168000000 de habitantes, el Asia 580000000, el América 150000000, el Africa 92000000 y la Oceania 10000000 ? R. (1000000000 habitantes.)

III. Sustraccion de los números enteros.

40 — *La sustraccion es una operacion que tiene por objeto, dada la suma de dos números y uno de ellos, determinar el otro.*

La suma dada se llama MINUENDO, el sumando conocido SUSTRAENDO y el otro, RESTO ó RESÍDUO.

Es evidente que el residuo se compone de las unidades que quedan en el minuendo despues de haber quitado de él las del sustraendo. Por lo tanto se puede decir :

La sustraccion es una operacion cuyo objeto es hallar la diferencia que hay entre dos números.

41 — Hay dos casos que distinguir en la sustracción. 1º *cuan- do el sustraendo tiene una cifra, teniendo una ó mas el minu- endo;* 2º *cuando minuendo y sustraendo tienen mas de una cifra.*

42 — 1º *Caso.* La resolucion de este caso se reduce á buscar el número que se ha de sumar con el sustraendo para que re- sulte el minuendo. Si se nos dá 7 por minuendo y 3 de sustra- endo, diremos : á 3 unidades le faltan 4 para valer las 7 del

minuendo, luego 4 es la resta. Del mismo modo $15 - 6 = 9$ y $18 - 7 = 11$.

Podemos resolver este caso quitando sucesivamente del minuendo las unidades que tiene el sustraendo. Así diremos *siete menos una, seis; menos una, cinco; menos una, cuatro*; luego la resta pedido es 4.

43 — 2º Caso. Procediendo por partes, como en la adición, restaremos separadamente las unidades de 1º, 2º, 3º etc. orden del sustraendo de las de mismo orden en el minuendo, y la reunion de estos restos parciales será la diferencia de los dos números dados.

Si tenemos que restar 523 de 865, dirémos: 5 unidades menos 3 unidades son 2 unidades; 6 decenas menos 2 decenas son 4 decenas y 8 centenas menos 5 son 3 centenas. De modo que la diferencia total, componiéndose de 3 centenas, mas 4 decenas mas 2 unidades es 342.

44 — Este caso no ofrece dificultad cuando cada cifra del sustraendo es menor que la de igual orden del minuendo; mas si esto no sucediese, veamos como puede obviarse la dificultad. Si por ejemplo quisiéramos restar 57 de 84; segun el procedimiento anterior, tendríamos que quitar 7 de 4, lo que no se puede; entónces agregaremos *diez unidades* á 4, lo que hará 14 y restando nos dará 7. Pero, así habremos aumentado el minuendo y por consiguiente el residuo en diez unidades ó una decena; para que no altere el valor de esta resta tendremos que aumentar el sustraendo en la misma cantidad (la que agregaremos á la cifra 5) porque así quitaremos una decena mas de las que habíamos de quitar, y dirémos 5 decenas mas *una* de 8 decenas quedan 2, luego la resta es 27.

45 — De lo que precede deducirémos la siguiente regla jeneral: *Para restar un número de otro, se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades del mismo orden; se tira una raya debajo del sustraendo para separarlo de la resta; se resta sucesivamente empezando por la derecha, cada cifra del sustraendo de la que le corresponde en el minuendo: Si algunas de las restas parciales no puede efectuarse, se aumenta en diez unidades la cifra de la que se quiere restar, pero se guarda una unidad para añadirla á la cifra inmediata á la que se ha restado.*

EJEMPLO. — Restar 4839 de 6043. Dispondremos la operacion del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 6043 \\ 4839 \\ \hline 1204 \end{array} \text{ — Resta.}$$

Aplicando la regla anterior, dirémos: de 3 quitar 9 no se puede, agrego 10 á 3 y digo: 9 de 13 son 4 que escribo y llevo 1 qué añadido al 3 son 4, de 4 queda 0 que escribo; 8 de 0 no se puede, agrego 10 y son 10; 8 de 10 son 2 que escribo y llevo 1 al 4; 4 y 1 son 5 de 6 queda 1, luego la diferencia buscada es 1204.

46 — *La prueba de la sustraccion consiste en sumar el sustraendo con el residuo; si la operacion está bien hecha, esta suma ha de ser igual al minuendo; es consecuencia inmediata de la definicion de la sustraccion.*

47 — *Advertencia.* — En la sustraccion de los números enteros, se podria empezar indiferentemente por la izquierda como por la derecha, toda vez que todas las cifras del minuendo fuesen mayores que las correspondientes en el sustraendo, pero como sucede muy jeneralmente que algunas cifras de este número son mayores que las correspondientes en aquel, para no tener que rectificar números ya escritos, se ha convenido empezar siempre por la derecha.

IV. Sustraccion de los números decimales.

48 — La sustraccion de los números decimales se efectua como la de los números enteros. *Se escribe el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las unidades de mismo órden; despues, haciendo abstraccion de las comas, se efectua la resta conforme á la regla del N^o 45, y en fin, se pone la coma, en la diferencia, debajo de las de los números propuestos.*

EJEMPLO. — De 45,746 restar 27,092.

$$\begin{array}{r} 45,746 \\ 27,092 \\ \hline 18,654 \end{array} \text{ — Resta.}$$

Si minuendo y sustraendo no tuvieren igual número de cifras decimales, se igualarán con ceros á la derecha; lo que no altera el valor de los datos (25).

EJEMPLOS. — 1º, de 3,45 restar 0,8604; 2º, restar 4,92 de 59,614

$$\begin{array}{r} 3,4500 \\ 0,8604 \\ \hline 2,5896 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 59,614 \\ 4,920 \\ \hline 54,694 \end{array}$$

49 — Llamáse **COMPLEMENTO ARITMÉTICO** de un número, lo que falta á este para que valga una unidad del orden inmediato superior á las mayores que él expresa.

Así á 4, que son unidades, le falta 6 para que valga una decena, luego 6 es el complemento aritmético de 4; del mismo modo 68 será el complemento de 32 porque $68 + 32 =$ una centena y que las mayores unidades de 32 son decenas, esto es unidades del orden inferior inmediato.

50 — Para hallar el complemento aritmético de un número, se resta este número de la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tiene el número dado.

Efectivamente si queremos hallar el complemento aritmético de 87914, cuyas mayores unidades son decenas de millar, restaremos este número de 100000 y tendremos $100000 - 87914 = 12086$.

Notaremos que todas las cifras del complemento de un número, tomadas respectivamente con las correspondientes en el número dado, valen 9, escepto la última á la derecha que dá una suma igual á 10. Luego:

51 — Se hallará el complemento aritmético de un número, sumando todas sus cifras con 9, á escepcion de la cifra de las unidades simples que se sumará con 10.

EJEMPLO. — Para hallar el complemento aritmético de 764208, diremos: para que valga 9, á 7 le faltan 2, á 6, 3, á 4, 5, á 2, 7, á 0, 9 y para que 8 valga 10, le faltan 2 unidades, luego 235792 será el complemento aritmético del número dado.

El complemento aritmético de un número decimal, sin parte entera, es otro número decimal que, sumado con el primero, produce la unidad.

Asi el complemento de 0,6927 es 0,3073.

APLICACIONES.

Efectuar las restas siguientes :

7865 — 4362 ; 12345 — 6789 ; 5040302 — 697989 ; 23,743 — 15,217

12,04 — 5,9678 ; 0,5 — 0,0009 ; 145,890076 — 7,0062

— Hallar el complemento aritmético de los números siguientes :

57 ; 7986 ; 13,0065 ; 0,0206

— ¿ Qué cantidad es preciso añadir á 98675 \$ para tener 147640 \$. R. (48965\$)

— Una persona nació en 1827 y murió en 1869 ; ¿ qué edad tenia ? R. (42 años).

— Una persona cumplió sus 21 años en 1851 ; ¿ en qué época cumplirá los 50 ? R. (en 1880).

— El cometa que apareció en 1835, quedó invisible durante 76 años ; se pregunta ¿ cuál fué la época de su precedente aparición ? R. (1759).

— Un viajero hace 5 leguas el primer día, 7 el segundo ; despues, volviendo sobre sus pasos, hace 2 leguas el tercer día y 3 el cuarto ; se pregunta ¿ á qué distancia está del punto de salida ? R. (á 7 leguas).

— Siendo dados dos números, se calcula la suma y la diferencia de ellos. Se pregunta ¿ qué resultados se han de encontrar cuando se agrega la diferencia á la suma obtenida ó que se resta esta diferencia de la suma. R. (En el 1^{er} caso el duplo del número mayor, y en el 2^o el duplo del menor).

CUESTIONARIO.

¿ Qué es adición ?

¿ Cuántos casos se distinguen en la adición de los números enteros ?

¿ Qué es axioma ? ¿Cuál es el axioma que sirve para la suma de los números ?

¿ Cómo se suman los números dígitos ? — ¿ Los números compuestos de varias cifras ?

¿ Qué es prueba de una operación ?

¿ Cómo se efectúa la prueba de la adición ?

¿ Se empieza á sumar por la derecha ó por la izquierda ?

¿ Cómo se suman un gran número de sumandos ?

¿ Cómo se efectúa la adición de los números decimales ?

¿ Qué es sustracción ?

¿ Cuántos casos hay ?

¿ Cómo se resta un número dígito de un número de varias cifras ?

¿ Cómo se efectúa la resta de dos números compuestos de varias cifras ?

¿Cuál es la regla jeneral ?

¿ En qué caso se pueda empezar la resta por la izquierda ?

¿ Cómo se efectúa la prueba de la sustracción ?

¿ De qué modo se restan los números decimales ?

¿ Qué es complemento aritmético ? — Cómo se determina ?

V. Multiplicacion de los números enteros.

52 — *La multiplicacion es una operacion cuyo objeto es repetir un número llamado MULTIPLICANDO tantas veces como unidades contiene otro llamado MULTIPLICADOR. El resultado se llama PRODUCTO.*

El multiplicando y el multiplicador se llaman FACTORES del producto,

Así multiplicar 7 por 4 es efectuar la suma de 4 números iguales á 7; de modo que tendremos $7 \times 4 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$; 7 es el multiplicando, 4 el multiplicador y 28 el producto; 7 y 4 juntos son factores de 28.

53 — De la misma definicion deducimos: 1º que si el multiplicador es igual á la unidad, el producto será igual al multiplicando; así *el producto de un número por 1 es el mismo número.*

2º *Que el multiplicador es un número abstracto,* pues indica cuantas veces el producto contiene al multiplicando.

3º *Que el multiplicando y el producto son de la misma especie,* puesto que el multiplicando no es mas que una parte del producto.

54 — Hay cuatro casos que considerar en la multiplicacion de los números enteros:

1º multiplicar entre sí dos números dígitos; 2º multiplicar un número de varias cifras por un número dígito; 3º multiplicar un número cualquiera por la unidad seguida de ceros; 4º multiplicar entre sí dos números compuestos cada uno de varias cifras.

55 — Siendo la multiplicacion la adición de varios números iguales, se podria efectuarla siguiendo la regla indicada para la adición en jeneral (35). Este procedimiento que seria muy largo en el 4º caso es efectivamente el que se emplea para el 1º caso de donde, como veremos mas adelante, se deducen todos los demás. Desde luego se comprende cuan importante es saber de memoria todos los productos que se pueden formar con dos números dígitos. Estos productos se hallan en la tabla siguiente cuya construccion y cuyo uso vamos á indicar.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

El primer renglon horizontal consta de los nueve primeros números ó, lo que es lo mismo, de los productos de los nueve primeros números por 1.

Para formar la segunda línea, se añade cada uno de los números de la primera con sí mismo, y se escriben debajo los resultados; esta segunda línea contiene pues los productos de los nueve primeros números por dos.

Agregando cada uno de los números de la segunda línea á los que le corresponden en la primera y escribiendo los resultados en un tercer renglon, este contendrá los productos de los nueve primeros números por 3, pues siendo la reunion de las dos primeras líneas, constará de la suma de los productos de 9 por 1 y por 2, esto es por 3.

Así iremos formando cada una de las líneas siguientes, agregando á cada uno de los números de la línea anteriormente escrita los que le corresponden en la primera y una vez llegados á la novena, tendremos que estos nueve renglones horizontales contienen los productos de los nueve primeros números respectivamente por 1, 2, 3 9.

56—Para hallar, por medio de esta tabla, el producto de dos números, de 7 por 4 por ejemplo, tomaremos, en la cuarta línea horizontal, el número que pertenece á la sétima línea vertical; así tendremos 28. *En jeneral, el producto de dos nú-*

meros dígitos se halla al punto de encuentro de la línea vertical y de la línea horizontal que empiezan respectivamente por el multiplicando y el multiplicador.

57 — 2º Caso. — De la definición de la multiplicación y del principio sobre el que está basada la adición (Nº 32) resulta que :

Para multiplicar un número compuesto de varias cifras por otro de una sola, es preciso multiplicar sucesivamente las unidades, decenas, centenas etc. del multiplicando por el multiplicador, y reunir en seguida todos estos productos parciales.

Propongámonos multiplicar 724 por 6; en 724 tenemos 4 unidades, 2 decenas y 7 centenas; los productos respectivos de estas partes por 6 son 24 unidades, 12 decenas y 42 unidades; pero en 24 unidades hay 2 decenas; agregándolas á las 12 que ya tenemos, serán 14 decenas en las que hay 1 centena que con las 42, que teníamos del producto de 6 centenas por 7, dá una suma de 43 centenas. El producto, componiéndose pues de 43 centenas, 4 decenas y 4 unidades es igual á 4344.

Para conseguir mas lijero el resultado se dispone la operación del modo siguiente :

$$\begin{array}{r} 724 \\ \times 6 \\ \hline 4344 \end{array}$$

y se dice 6 por 4, 24, escribo 4 y llevo 2; 6 por 2, 12 y 2 de reserva, 14, escribo 4 y guardo 1; 6 por 7, 42 y 1 de reserva 43 que escribo, luego 4344 es el producto.

58 — De todo esto deducimos la regla siguiente :

Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, se multiplica sucesivamente las diferentes cifras del multiplicando por el multiplicador, empezando por la derecha. Se escribe la cifra de las unidades del primer producto parcial y se guardan las decenas para añadirlas al producto parcial siguiente; se escribe la cifra de las unidades de esta suma a la izquierda de la primera cifra ya escrita y se guardan las decenas para agregarlas al tercer producto parcial; y así sucesivamente.

59 — 3º Caso. — Para multiplicar un número por 10, 100, 1000 etc., basta escribir 1, 2, 3 etc. ceros á su derecha. (Nº 16). Asi $47 \times 100 = 4700$.

60 — *Por lo contrario, si un número termina en ceros, se volverá 10, 100, 1000 etc. veces menor, suprimiendo de su derecha 1, 2, 3 etc. ceros. Así 47 es cien veces menor que 4700.*

61 — *Para multiplicar un número por una cifra significativa seguida de uno ó mas ceros, basta multiplicar el número por esta cifra y escribir á la derecha del resultado tantos ceros cuantos hay á la derecha de la cifra.*

Propongámonos multiplicar 724 por 300 que es, como acabamos de verlo, el producto de 3 por 100.

Obsevarémos que para multiplicar 724 por 300 es igual á sumarle 300 veces consigo mismo (65); y como estos 300 sumandos se pueden suponer divididos en 100 grupos de á 3 sumandos, de este modo :

Cada grupo dará

$$\begin{array}{r} 724 \\ 724 \\ 724 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 724 \\ 724 \\ 724 \end{array}} \right\} 2172$$

$$\begin{array}{r} 724 \\ 724 \\ 724 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 724 \\ 724 \\ 724 \end{array}} \right\} 2172$$

.....

y los 100 grupos darán 2172×100 ; pero 2172 es igual á 724×3 , luego tendremos :

$$724 \times 300 = 724 \times 3 \times 100$$

y como para multiplicar por 100 se agrega dos ceros á la derecha, vemos pues que para multiplicar 724 por 300, basta multiplicar por 3 y escribir en seguida dos ceros á la derecha del producto.

62 — 4º caso. Háysese de multiplicar 5804 por 724. El multiplicador es la suma de los números 4, 20 y 700, luego el producto buscado se conseguirá repitiendo el número 5804, 4 veces, 20 veces y 700 veces, y sumando despues los resultados parciales, ó bien multiplicando sucesivamente el multiplicando 5804 por 4, por 20 y por 700. El primer producto se conseguirá por medio de la regla del nº 57. Los otros dos productos serán dados por medio de la misma regla combinada con la del Nº 61.

Se dispone la operacion del modo siguiente :

$$\begin{array}{r}
 5804 \\
 724 \\
 \hline
 23216 \\
 11608 \\
 40628 \\
 \hline
 4202096
 \end{array}$$

El multiplicador está escrito debajo del multiplicando y se tira una raya debajo del multiplicador. Se multiplica el multiplicando por 4 y se escribe debajo de la raya el resultado 23216. En seguida se multiplica el multiplicando por 2 y se escribe el resultado 11608 debajo del primer producto parcial, de modo que su última cifra esté en la columna de las decenas. En fin se multiplica el multiplicando por 7 y se escribe el resultado 40628 debajo del segundo producto, de modo que su última cifra esté en la columna de las centenas.

Agregando en seguida estos tres resultados, se consigue el producto buscado 4202096.

Advertencia. — Los productos parciales que sirven para formar el producto total son 23216, 116080 y 4062800, y no 23216, 11608 y 40628; pero habiendo dispuesto la operacion como lo hemos hecho, vemos que los ceros son inútiles y que es mejor no escribirlos.

63 — De lo anterior, deducimos la regla siguiente :

Para multiplicar un número de varias cifras por otro tambien de varias cifras, se coloca el multiplicador debajo del multiplicando y se tira una raya debajo del multiplicador. En seguida se multiplica el multiplicando sucesivamente por cada cifra significativa del multiplicador; se colocan estos productos unos debajo de otros, de manera que la primera cifra de cada una esté en el lugar correspondiente á la cifra del multiplicador que sirvió para formarle, se suman los productos parciales y el resultado es el producto total que se busca.

EJEMPLO : Multiplicar 75309 por 2005.

$$\begin{array}{r}
 75309 \\
 2005 \\
 \hline
 376545 \\
 150618 \\
 \hline
 150994545 \text{ producto total.}
 \end{array}$$

64 — *Cuando en la multiplicacion uno de los factores ó ambos terminan en ceros, se ejecuta la operacion prescindiendo de de ellos, y poniendo en seguida á la derecha del producto tantos ceros cuantos se habian suprimidos en los factores.*

Por ejemplo, para obtener el producto de 36000 para 1400, basta multiplicar 36 por 14 y escribir cinco ceros á la derecha del resultado.

Efectivamente, al hacer abstraccion de los 3 ceros del multiplicando, lo hacemos mil veces menor (60) y el producto resultará tambien mil veces menor, porque contendrá siempre el mismo número de partes, pero serán estas mil veces mas pequeñas. Por lo mismo al suprimir los dos ceros del multiplicador, lo hacemos cien veces menor, luego el producto llegará á ser tambien cien veces mas pequeño, porque contendrá cien veces menos partes. Ahora bien, despues que hemos hecho al producto mil veces menor, lo hacemos aun mil veces mas, luego lo hemos hecho cien veces mil veces menor, ó bien cien mil veces menor: por consiguiente para restituir al producto su valor, será preciso hacerlo cien mil veces mayor, lo que se conseguirá añadiendo cinco ceros á su derecha (59) precisamente tantos como tenian ambos factores.

65 — *El número de las cifras del producto es igual á la suma de los números de cifras del multiplicando y del multiplicador, ó á esta suma disminuida en una unidad.*

Efectivamente, supongamos que el multiplicando tenga 4 cifras, que sea, por ejemplo 5804, y que el multiplicador tenga tres.

Teniendo tres cifras el multiplicador, estará él comprendido entre 100 y 1000 y el producto buscado lo será entre 580400 y 5804000, es decir que será un número ó de 6 ó de 7 cifras. Si tiene 7, tendrá pues tantas como ambos factores, y si tiene 6, tantas como los factores menos uno. Claro es que no podrá tener este producto un número de cifras distinto de 6 ó 7.

66 — *Para efectuar la prueba de la multiplicacion, se multiplica el multiplicador por el multiplicando, y, si se halla el mismo producto, se puede deducir que la operacion está bien hecha.*

Esta prueba está basada sobre el principio siguiente:

67 — *El producto de dos números no varia, aunque se invierta el orden de los factores.*

Digo que el producto de 4 por 3 es igual al de 3 por 4. Efectivamente, escribamos en una misma línea horizontal tantas unidades cuántas hay en el número 4 y repitamos esta línea tantas veces como unidades hay en 3; formaremos así el cuadro siguiente :

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

cuyo número de unidades es igual, según la construcción, á 4×3 . Pero, si se consideran las unidades contenidas en una columna vertical, se vé que su número es igual á 3: y, como hay cuatro columnas verticales, resulta que el número total de unidades que están contenidas en el cuadro, es también igual al producto de 3 por 4; luego $4 \times 3 = 3 \times 4$.

68 — Llámase : PRODUCTO DE VARIOS NÚMEROS Ó DE VARIOS FACTORES al resultado de multiplicar el primer número por el segundo, después el producto así formado por el tercer número, y así sucesivamente. Por ejemplo, el producto $3 \times 4 \times 5 \times 6$ es el resultado que se obtiene multiplicando 3 por 4, después el producto obtenido por 5 y en seguida este segundo producto por 6.

69 — *En un producto de varios factores, se puede invertir de un modo cualquiera el orden de los factores sin alterar el producto.*

Para demostrar esta propiedad, vamos á probar : 1º *Que en un producto de tres factores, se puede invertir el orden de los dos últimos.*

Digo, por ejemplo que $5 \times 4 \times 3 = 5 \times 3 \times 4$. Efectivamente, escribamos en una misma línea horizontal 4 veces el factor 5 y repitamos 3 veces esta línea, formaremos el cuadro siguiente :

5	5	5	5
5	5	5	5
5	5	5	5

La suma de los números de cada línea horizontal es 5×4 y, como hay 3 líneas horizontales, la suma de todas las unidades del cuadro será igual á $5 \times 4 \times 3$. Pero, por otra parte, sumando los números en una línea vertical, se encuentra, en cada una 3 veces el número 5 ó 5×3 y como hay 4 líneas verticales,

la suma de todas las unidades que representa el cuadro será igual á $5 \times 3 \times 4$. Luego los dos productos son iguales.

2º *En un producto de varios factores, se puede invertir el orden de dos factores consecutivos cualesquiera que sean.*

Digo, por ejemplo, que, en el producto

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2,$$

se puede invertir el orden de los factores 5 y 4. Efectivamente, para efectuar este producto, es preciso multiplicar desde luego 7 por 6, lo que dá 42; en seguida multiplicar 42 por 5 y después por 4; pero sabemos que $42 \times 5 \times 4 = 42 \times 4 \times 5$. Siendo iguales estos productos si multiplicamos el primero por 3 y por 2, el segundo no dejará de serle igual si lo multiplicamos por los mismos factores 3 y 2; luego tendremos:

$$42 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 42 \times 4 \times 5 \times 3 \times 2$$

ó lo que es lo mismo, siendo $42 = 7 \times 6$

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 7 \times 6 \times 4 \times 5 \times 3 \times 2$$

Sentados estos dos principios, podemos ahora demostrar la propiedad enunciada en el nº 69.

Efectivamente, consideremos un producto cuyos factores están escritos en un cierto orden: se puede tomar un factor cualquiera é invertirlo con aquel que lo precede. Hecho esto, se puede adelantar aun en un rango este mismo factor y seguir así hasta que venga á ocupar el primer lugar. Tomando en seguida uno cualquiera de los siguientes factores, se puede hacerlo adelantar sucesivamente en un rango hasta que ocupe el segundo lugar; y, siguiendo así, se puede escribir todos los factores en el orden que se quiera adoptar, sin que haya alterado el valor del producto.

Por ejemplo, aplicando estos principios, llegaremos, después de ocho trasposiciones, á mostrar que:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 4 \times 6 \times 2 \times 5 \times 7 \times 3$$

70 — *Para multiplicar un número por un producto de varios factores, basta multiplicarlo sucesivamente por los factores del producto.*

Digo, por ejemplo, que para multiplicar 7 por 30, que es el producto de los factores 2, 3 y 5, basta multiplicar 7 por 2, el

producto obtenido por 3 y en seguida este segundo producto por 5. Efectivamente el producto 7×30 es igual á 30×7 ; por otra parte $30 = 2 \times 3 \times 5$, luego $7 \times 30 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ y haciendo pasar el factor 7º del 4º rango al primero, tendremos: $7 \times 30 = 7 \times 2 \times 3 \times 5$, quedando así demostrada la propiedad.

71 — De las propiedades sentadas en los N° 69 y 70 se deducen varias consecuencias entre las que conviene notar las siguientes que necesitaremos algunas veces.

1º *En un producto de varios factores, se puede reemplazar un número cualquiera de factores por su producto efectuado.*

2º *Para multiplicar un producto de varios factores por un número, basta multiplicar uno de los factores por este número.*

72 — Llámase POTENCIA DE UN NÚMERO el producto de varios factores iguales á este número. Así 8×8 es la segunda potencia de 8; $8 \times 8 \times 8$ es la tercera; $8 \times 8 \times 8 \times 8$ es la cuarta etc. La segunda y la tercera potencia de un número llevan el nombre de CUADRADO y de CUBO.

Para simplificar la escritura, no se escribe mas que una vez el número, poniendo á su derecha y encima de él una cifra llamada ESPONENTE que espresa las veces que este número es factor. Así, en lugar de escribir $8 \times 8 \times 8 \times 8$ escribiremos 8^4 . Por lo mismo 7º representa $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ ó la quinta potencia de 7.

La potencia primera de un número es el mismo número. Todas las potencias de 1 son iguales á 1.

73 — *Del N° 64 se sigue que se formará una potencia cualquiera de 10, escribiendo á la derecha de la unidad tantos ceros como unidades tiene el esponente de la potencia.*

Así la quinta potencia de 10 es la unidad segunda de cinco ceros, esto es 100000.

74 — *El producto de un número por 2, 3, 4... y en jeneral por un número entero cualquiera, se llama DUPLO, TRIPLO, CUADRUPLU... y en jeneral MÚLTIPLO de este número.*

VI. Multiplicacion de los números decimales.

75 — *Para multiplicar entre sí dos números decimales, se hace abstraccion de las comas y se efectua la multiplicacion como*

ARIT.

3

si fuesen números enteros, luego se separa hácia la derecha del producto tantas cifras decimales como tengan juntos el multiplicando y el multiplicador.

Supongamos que el multiplicando tenga tres cifras decimales, y el multiplicador dos. Si prescindimos de la coma en el multiplicando, es lo mismo que multiplicarlo por mil (26); luego el producto será tambien mil veces mayor (2º del N° 71). Al suprimir la coma del multiplicador, es como si la hiciéramos correr de dos rangos á la derecha, y por lo tanto lo hacemos cien veces mayor (26), luego el producto será tambien cien veces mayor. Este producto, habiendo sido multiplicado por mil, por la supresion de la primera coma, y por cien, por la supresion de la segunda, resulta actualmente multiplicado por el producto de mil por ciento (70), es decir por cien mil; por lo tanto, para reducirlo á su verdadero valor, será preciso dividirlo por cien mil, lo que conseguiremos, separando por medio de una coma, las cinco últimas cifras de su derecha (27); porque podemos considerar, aunque no haya decimales, que la coma está puesta despues de la cifra de las unidades simples y hacemos correr así cinco lugares á la izquierda, habiendo separado así tantas cifras decimales como habia en ambos factores.

EJEMPLO. — Multiplicar 54,012 por 5,24; prescindiendo de la coma, multiplicaremos 54012 por 524 lo que nos dá, efectuando la multiplicación, 28302288, luego separaremos del producto 3 + 2, esto es 5 cifras decimales y tendremos: $54,012 \times 5,24 = 283,02288$.

Si uno de los factores, multiplicando ó multiplicador, es un número entero, se efectuará la multiplicación, haciendo abstracción de la coma en el otro factor, separando luego al producto tantas cifras decimales como tenia este factor.

APLICACIONES.

Efectuar las multiplicaciones siguientes:

$$112233 \times 4455; \quad 676789 \times 80909; \quad 78906000 \times 171200; \quad 5,903 \times 27;$$

$$4465 \times 0,42; \quad 13,65 \times 0,4; \quad 0,0067 \times 0,0403.$$

Hallar los productos de

$$57 \text{ por } 12 \quad \text{y en seguida por } 9$$

$$125 \text{ por } 25 \quad \alpha \quad \alpha \quad 15$$

$$7,069 \text{ por } 0,45 \quad \alpha \quad \alpha \quad 0,002$$

¿Qué número necesita agregar á 427 para hacerle 1000 veces mayor? —

R. (426573).

— Hallar abreviadamente el producto de los factores siguientes: $2 \times 57 \times 8 \times 4 \times 125 \times 25 \times 5$. R. (57000000).

— Multiplicar el producto indicado $7 \times 40 \times 8 \times 5$ por el factor 9. — ¿De cuántos modos?

— Invirtiendo solamente el orden de dos factores consecutivos, ¿cuántas inversiones se necesita para conseguir la igualdad siguiente:

$$7 \times 8 \times 9 \times 6 \times 5 = 5 \times 9 \times 7 \times 8 \times 6 \quad \text{R. (6)}$$

y ¿cuáles son?

— Formar la quinta potencia de 27 y la tercera de 0,01

— Formar los cuadrados y los cubos de los 9 primeros números.

— Sabiendo que un año consta de 365 días, un día de 24 horas, una hora de 60 minutos, y un minuto de 60 segundos, se pregunta ¿cuántos segundos hay en 13 años, 122 días, 17 horas, 42 minutos y 15 segundos? R. (420572525)

— ¿Qué ganancia hay en vender á 50 \$ el kilógr., 48 kilos de una mercancía que ha costado 2000 \$? R. (200 \$).

— Un dependiente tiene de honorarios 1500 \$ mensuales, ¿cuánto recibe anualmente? R. (18000 \$).

— Un individuo gasta 25 \$ diarios de comida, 500 \$ mensuales de cuarto, 4000 \$ anualmente de ropa, 120 \$ al mes para la planchadora y 800 \$ mensuales de gastos extraordinarios; gana 3000 \$ mensuales. ¿Cuánto habrá horrado al cabo de 10 años? R. (58350 \$).

— Se vendió 40 arrobas de una mercancía en 3200 \$ y se ha ganado 20 \$ por arroba; ¿cuánto había costado la mercancía? R. (2400).

— En 14 días, trabajando 10 horas al día, 36 obreros han hecho una cierta obra. ¿Cuántas horas hubiera necesitado un solo obrero? R. (4940 horas).

— Una fuente da 30 litros de agua por hora, otra 45 litros y una tercera 80 litros también por hora; ¿cuál es la cantidad de agua derramada por las tres fuentes en 24 horas? R. (3720 litros).

— El grado del termómetro de Réaumur vale 1,25 grado del termómetro centígrado. Reducir 17 grados de Réaumur en grados centígrados. R. (21,25)

— Demostrar que disminuye el producto de dos factores, cuando se aumenta el mayor y se disminuye el menor en una unidad.

VII. Division de los números enteros.

76 — *La division es una operacion que tiene por objeto, dados un producto de dos factores y uno de estos factores, determinar el otro.*

El producto dado se llama **DIVIDENDO**, el factor conocido **DIVISOR**, y el factor que se busca **COCIENTE**.

77 — 1º De la definicion de la division se deduce que *el divi-
dendo es siempre igual al producto del divisor por el cociente.*
Así dividir 56 por 8, es buscar un número por el que se ha de
multiplicar 8 para obtener un producto igual á 56.

2º *Cuando sea el divisor un número entero, se podrá consi-
derar la division como una operacion cuyo objeto es partir un
número en tantas partes iguales, como unidades tiene el divisor.*
Pues, si quisiéramos, por ejemplo, partir 56 en 8 partes iguales,
tendríamos evidentemente que buscar un número que repetido
8 veces, esto es, multiplicado por 8, diese un producto igual á
56. Así, dividir 56 por 8 equivale á partir 56 en 8 partes
iguales.

3º *Cuando sea un número entero el cociente, espresará el
número de veces que el dividendo contiene al divisor.* Por esto
es que tambien se dice: *La division tiene por objeto hallar
cuántas veces un número, llamado dividendo, contiene á otro
llamado divisor (*).*

78 — Esta tercera manera de considerar á la division da el
modo de efectuarla cuando el divisor es un número poco consi-
derable. Para esto, *restaremos el divisor del dividendo tantas
veces como nos sea posible; el número de sustracciones espresa-
rá evidentemente el número de veces que el dividendo contiene
al divisor, y luego será el valor del cociente.*

Así para dividir 32 por 8, harémos los cálculos siguientes :

$$\begin{array}{r}
 32 \\
 8 \\
 \hline
 1^{\text{a}} \text{ sustraccion.... } 24 \\
 8 \\
 \hline
 2^{\text{a}} \text{ sustraccion.... } 16 \\
 8 \\
 \hline
 3^{\text{a}} \text{ sustraccion.... } 8 \\
 8 \\
 \hline
 4^{\text{a}} \text{ sustraccion.... } 0
 \end{array}$$

Hemos hecho *cuatro* sustracciones, luego el cociente de 32
por 8 es 4.

(*) Hé aquí porque el factor desconocido ha recibido el nombre de *co-
ciente*, de una palabra latina que significa *cuantas veces*.

79 — Si empleamos el mismo método para dividir 35 por 8, encontraremos que la *cuarta* resta es 3; de modo que no se puede seguir restando. Entónces, diremos que el cociente es 4, pero que la division da 3 por residuo. Así tendremos $35 = 8 \times 4 + 3$ ó bien $35 : 8 = 4$ mas un residuo 3; luego :

Cuando la division deja un residuo, que es forzosamente MENOR QUE EL DIVISOR, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, mas este residuo.

80 — Hay tres casos que considerar en la division. 1º Cuando el divisor es un número dígito y que el dividendo es menor que 10 veces este divisor; 2º cuando el divisor es un número compuesto de varias cifras y que el dividendo es aun menor que 10 veces el divisor; 3º cuando el dividendo y el divisor son números cualesquiera.

81 — 1º *Caso*. Se reconoce que el dividendo es menor que 10 veces el divisor, cuando, escribiendo un cero á la derecha del divisor, se obtiene un número mayor que el dividendo (16).

Para efectuar la division en este caso, se podria seguir el método indicado en el N° 78, pero basta, y es mas sencillo, saber de memoria la tabla de multiplicacion. Si tenemos, por ejemplo 53 que dividir por 8, al momento vemos que el cociente es 6, pues 6 repetido 8 veces da el número 48 inferior á 53 y 7 repetido 8 veces da el número 56 superior á 53. El resto de la operacion es la diferencia entre 53 y 48, esto es 5.

En este caso muy sencillo es inútil dar una disposicion particular á la operacion.

Del mismo modo, encontraremos que $72 : 8 = 9$, porque $72 = 8 \times 9$, que $78 : 8 = 9$ mas 6 el resto, porque $78 = 72 + 6 = 8 \times 9 + 6$.

Como los demas casos de la division están basados en este, es muy útil ejercitarse para hallar al momento los cocientes y los restos en ejemplos semejantes á estos.

82 — 2º *Caso*. — Si el divisor es un número compuesto de varias cifras y que el dividendo sea menor que 10 veces este divisor, para efectuar la division, se divide por la cifra de las mayores unidades del divisor el número de unidades de mismo orden que se encuentran en el dividendo. Así se obtiene la cifra del cociente ó una cifra mayor. Entónces se multiplica el divisor por esta cifra, y, si puede el producto restarse del dividen-

do, la cifra es exacta; sino se comprueba del mismo modo la cifra anterior y así á continuacion.

Así para dividir 2734 por 378, se dividirá por las 3 centenas del divisor las 27 centenas del dividendo. Efectivamente, noto que el divisor difiere poco de 3 centenas, y el dividendo poco tambien de 27 centenas, de modo que el cociente buscado habrá de diferir poco tambien del cociente que se obtenga, dividiendo 27 centenas por 3 centenas, ó 27 por 3. Digo pues : en 27, *cuan-
tas veces 3?* *Está 9 veces.* Para saber si 9 es exacto, multiplico el divisor 378 por 9, y, como el producto 3402 es mayor que el dividendo, deduzco que en el dividendo no cabe 9 veces el cociente. Pruebo la cifra 8, multiplicando 378 por 8. El producto 3024 es aun mayor que el dividendo, lo que indica que el cociente es menor que 8. Entónces pruebo 7. El producto de 378 por 7 es 2646 que puedo restar del dividendo 2734. El resto de esta sustraccion es 88, luego 7 es el cociente pedido y 88 la resta de la division.

Se acostumbra disponer la operacion del modo siguiente :

$$\begin{array}{r|l} 2734 & 378 \\ 2646 & 7 \\ \hline 88 & \end{array} .$$

Se escribe el divisor á la derecha del dividendo separándoles por una raya vertical. Se tira una raya horizontal debajo del divisor, y se escribe debajo de esta raya el cociente hallado. Debajo del dividendo se coloca el producto del divisor por el cociente y en seguida el resto de la division, separando por una raya estos dos números.

En jeneral se calcula el resto á medida que se hace el producto del divisor por el cociente, del modo siguiente :

- 7 por 8, 56, de 64 queda 8 y llevo 6 ;
- 7 por 7, 49 y 6 de reserva 55 : de 63 queda 8 y llevo 6 ;
- 7 por 3, 21 y 6 de reserva 27 : de 27 no queda nada.

La operacion se dispone entónces como sigue :

$$\begin{array}{r|l} 2734 & 378 \\ 88 & 7 \end{array}$$

83 — En este ejemplo, hemos probado 3 cifras : ¿ no se podria disminuir el número de estos tanteos ? *Para esto, se considerará la primera cifra á la izquierda del divisor como aumentada*

en una unidad cuando la segunda pasa de 5 (se llama eso *forzar la unidad* en dicha cifra), y se aumentará también en la misma unidad el número de las unidades del mismo orden que comprende el dividendo. Así para dividir 2734 por 378, en lugar de decir: en 27 ¿cuántas veces 3? diremos: en 28 ¿cuántas veces 4? está 7 veces, y 7 es efectivamente el cociente pedido.

84 — El modo con que hemos operado es evidentemente independiente del orden y de la especie de unidades que representa el dividendo. Si tenemos 384 que partir en 89 partes iguales, podremos dar 4 unidades á cada parte y quedarán 28 despues. Cualquiera que sea el orden de estas unidades, que sean de 1º, de 2º, ó de 3º orden, siempre tendremos el mismo cociente y el mismo resto, *no dejando nunca esta resta de expresar unidades de mismo orden que el dividendo.*

Si tuvieramos 384 billetes de á un peso que repartir igualmente entre 89 personas, cada persona tendria pues 4 billetes de á un peso y quedarian 28 despues de la distribucion y si se tuviese 384 billetes de á diez pesos que distribuir igualmente entre las mismas personas, claro es que cada una tendria 4 de estos billetes y que quedarian tambien 28 billetes de á 10 pesos, una vez concluida la distribucion.

85 — 3º Caso. — Propongámonos dividir 219648 por 624, esto es partir 219648 en 624 partes iguales.

Para facilitar el raciocinio, supongamos que entre 624 personas, queremos distribuir igualmente 219648 \$ que nos son dados en 219 billetes de á mil, 6 de á cien, 4 de á diez y 8 de á uno. Siendo el número de personas, 624 mayor que el número de billetes de á mil, á ninguna le tocará uno de estos billetes; cambiándoles en billetes de á cien, como cada billete de mil vale 10 de á cien, los 219 billetes de á mil, valdrán 2190 de á cien y, con los 6 que tenemos, serán 2196 billetes de á cien que distribuir igualmente entre las 624 personas. Ahora el número de personas es menor que el número de billetes, luego á cada uno le tocará á lo menos un billete de á cien. Para saber el número exacto de billetes de á cien que tendrá cada persona, dividamos 2196 por 624, segun el N° 82

$$\begin{array}{r} 2196 \mid 624 \\ 324 \quad 3 \end{array}$$

encontramos por cociente 3. Así cada persona tendrá 3 billetes

de á 100 \$, y como son 624 personas, habremos distribuido en todo 624×3 , esto es 1872 billetes de á 100 \$, y todavía quedarán 324 que no son suficientes para dar uno á cada persona. Entónces los cambiaremos en billetes de á diez; tendremos así 3240 que, con los 4 que nos han dado, harán una suma de 3244 billetes de á 10 \$.

Raciocinando con los billetes de á 10 \$ como hemos hecho con los de á cien y efectuando la division,

$$\begin{array}{r} 3244 \mid 624 \\ 124 \quad 5 \end{array}$$

veremos que á cada persona le toca 5 billetes de á diez \$ y que se han distribuido 3120. Quedan pues todavía 124 billetes de á 10 \$ que, cambiados en billetes de á uno, nos dán, con los 8 que ya teníamos, 1248 billetes de á peso. Obrando como anteriormente, esto es repartiendo los 1248 billetes de á peso igualmente entre las 624 personas, ó lo que es lo mismo, dividiendo 1248 por 624,

$$\begin{array}{r} 1248 \mid 624 \\ 00 \quad 2 \end{array}$$

á cada persona daremos 2 de estos billetes y, como $624 \times 2 = 1248$, despues de esta distribucion no tendremos nada que repartir.

Así cada persona tendrá 3 *billetes de á cien pesos*, 5 de á diez y 2 de á uno, en todo 352 \$. El cociente de 219648 por 624 será pues 352, puesto que $352 \times 624 = 219648$.

Este raciocinio es, como en el 2º Caso, completamente independiente de la especie de unidades que representa el dividendo. Así, en lugar de suponer que tenemos 219648 \$ que distribuir entre 624 personas, supongamos que, siéndonos dados 219648 *unidades* en 219 *unidades de millar*, 6 *centenas*, 4 *decenas* y 8 *unidades simples* tengamos que partirlas en 624 *partes iguales*. El nuevo raciocinio sería idéntico al anterior; solo tendríamos que reemplazar las palabras: *billetes de á mil*, *billetes de á cien* por *unidades de millar*, *centenas*, *decenas*... de modo que llegaríamos á tener para cada una de las 624 partes 3 *centenas*, 5 *decenas* y 2 *unidades*, ó bien 532 unidades.

En ambos casos, *cada cifra del cociente sería siempre del mismo orden ó de la misma especie que la última á la derecha del dividendo que ha servido para hallarla.*

En lugar de separar las tres *divisiones parciales*, se las reúne en la práctica con el fin de abrazar, con una sola ojeada, la serie de las operaciones. En efecto se ve, después de hecha la primera division, que el segundo *dividendo parcial* se forma bajando al lado del resto la cifra que sigue en el dividendo. Igualmente se forma el tercer dividendo parcial, bajando, al lado del segundo resto, la cifra siguiente del dividendo. La operación se encuentra entonces dispuesta del siguiente modo :

$$\begin{array}{r|l} 219648 & 624 \\ 3244 & 352 \\ 1248 & \\ 00 & \end{array}$$

De las consideraciones anteriores y del orden que hemos seguido en las operaciones, resulta la siguiente regla :

86 — REGLA PRÁCTICA. — *Para dividir un número por otro, tómese á la derecha del dividendo bastantes cifras para que el número que espresan contenga al divisor á lo menos una vez y cuando mas nueve veces; se tendrá así un primer dividendo parcial que se partirá por el divisor, lo que dará la cifra de las mas altas unidades del cociente. Réstese del primer dividendo parcial el producto del divisor por la primera cifra del cociente y bájese á la derecha del residuo la primera de las cifras separadas en el dividendo: se tendrá así un segundo dividendo parcial que se partirá por el divisor, lo que dará la segunda cifra del cociente, que se escribirá á la derecha de la primera, y se operará, con el segundo dividendo parcial y la segunda cifra del cociente, como se ha hecho con el primer dividendo parcial y la primera cifra del cociente, continuándose esta serie de operaciones hasta que se haya bajado la última cifra del dividendo, y teniendo cuidado en cada operación de escribir el cociente que se obtiene á la derecha del precedente. Si uno de los dividendos parciales fuese menor que el divisor, sería señal que el cociente no tiene unidades del orden correspondiente; se escribiría entonces un cero en el cociente, y se bajaría á la derecha de dicho dividendo parcial la cifra siguiente del dividendo total, lo que daría un nuevo dividendo parcial que se partiría por el divisor.*

Apliquemos esta regla á los ejemplos siguientes :

70954632 : 1943 y 44703 : 147

1 ^{er} dividendo parcial	7095.4632	1943
2 ^o « »	1266 4	36518
	100 66	
	3 513	
	1 5702	
Resto —	158	

447.03	147
· 06 03	304
15	

87 — Cuando el dividendo y el divisor tienen un gran número de cifras y que el mismo cociente ha de tener tambien un gran número de cifras, se empieza por formar los nueve primeros múltiplos del divisor; las diferentes cifras del cociente y los restos consecutivos se calculan mas fácilmente por medio de este cuadro.

EJEMPLO. Dividir 14405364603702 por 495678.

Cuadro de los productos del divisor por 1, 2, 3.....9

1	495678
2	991356
3	1487034
4	1982712
5	2478390
6	2974068
7	3469746
8	3965424
9	4461102

Calculados estos productos, se dispone la operacion segun las reglas anteriormente sentadas y se procede del mismo modo. Solamente, basta mirar cual es el mayor producto contenido en un dividendo parcial para tener inmediatamente la cifra correspondiente del cociente.

14105364603702	495678
991356	28456709
4191804	
3965424	
2263806	
1982712	
2810940	
2478390	
3325503	
2974068	
3514357	
3469746	
4461102	
4461102	
0	

88 — *Si el dividendo y el divisor terminan en ceros, se suprimirán á la derecha de ambos tantos como tiene el que contenga menos; en seguida efectuando la division de los números resultantes, como de costumbre, se obtendrá el cociente pedido.*

Supongamos que se quiera dividir 3069000 por 5700; se suprimirán dos ceros en ambas partes y dividiendo 30690 por 57 se tendrá el cociente pedido. Efectivamente, al suprimir los dos ceros del dividendo, lo hacemos cien veces mas pequeño (16) y por lo tanto contendrá cien veces menos el divisor, es decir que el cociente será tambien cien veces menor de lo que hubiera sido sin la supresion de los dos ceros al dividendo. Al suprimir los dos ceros del divisor, lo hacemos cien veces mas pequeño y por lo tanto estará contenido cien veces mas en el dividendo, es decir, que el cociente será cien veces mayor. Pero es despues de haber hecho el cociente cien veces menor que lo hacemos cien veces mayor; luego su valor no ha variado.

Al dividir 30690 por 57 en lugar de 3069000 por 5700, es como si dividiéramos 30690 centenas por 57 centenas, y, como el resto ha de espresar siempre unidades de misma especie que el dividendo, tenemos que hacerle espresar centenas, esto es, agregar dos ceros á su derecha.

Así, efectuando las operaciones, tendríamos :

$$\begin{aligned} &\text{por una parte } 30690 = 57 \times 538 + 24 \\ &\text{y por otra } 3069000 = 5700 \times 538 + 2400 \end{aligned}$$

89 — Cuando el divisor es un número dígito, se acostumbra abreviar la operación, disponiendo los cálculos como sigue :

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividendo....} & 545072 \\ \text{Cociente.....} & 90845 \\ \text{Resto.....} & 2 \end{array}$$

y se dice : el sesto de 54 es 9; el sesto de 5 es 0, el de 50 es 8 por 48 y quedan 2, el sesto de 27 es 4 por 24 y quedan 3, el sesto de 32 es 5 por 30 y queda 2.

90 — *Para hacer la prueba de la división, se multiplica el divisor por el cociente, al producto se añade el resto si lo hay, y si la suma es igual al dividendo, se concluirá que la operación ha sido bien hecha (77).*

91 — *El número de cifras del cociente es igual al exceso del número de cifras del dividendo sobre el número de cifras del divisor, ó á este exceso aumentado en una unidad.*

92 — *Para dividir un producto por un número, basta dividir uno de los factores del producto por este número.*

EJEMPLO. — $792 = 11 \times 18 \times 4$. Digo que, para dividir 792 por 9, bastará dividir el factor 18 por 9, es decir que el cociente será $11 \times 2 \times 4$. Efectivamente, ¿cuál es el carácter del cociente? Es que multiplicado por el divisor, reproduzca el dividendo. Pero, para multiplicar el producto $11 \times 2 \times 4$ por 9, basta multiplicar uno de sus factores (71 2º), 2 por ejemplo por 9, lo que dará entonces $11 \times 18 \times 4$, esto es 792.

93 — *Para dividir un número por un producto efectuado de varios factores, basta dividirlo sucesivamente por cada uno de los factores del producto.*

Sea dado dividir 300 por 30 que es el producto de los factores 2, 3 y 5. Digo que para dividir 300 por 30, se podrá dividir primero por 2, después el cociente por 3, y en seguida el nuevo cociente por 5. Efectivamente, el cociente de la división de los números 300 y 30 siendo igual á 10, el dividendo 300 es igual á 10×30 ó (Nº 70) á $10 \times 2 \times 3 \times 5$. Al dividir este número por 2, se obtiene por cociente $10 \times 3 \times 5$ (Nº 92); al dividir

este cociente por 3, se obtiene el segundo cociente 10×5 ; en fin, al dividir este segundo cociente por 5, se obtiene el tercer cociente 10 que es justamente el cociente de 300 por 30.

VIII. Division de los números decimales.

94 — Hay dos casos que considerar, segun el divisor es un número entero, ó un número decimal.

1^{er} Caso. Supongamos que tenemos que dividir 29460,06 por 42. Este dividendo representando un número de centésimas igual á 2946006, podemos decir que la operacion tiene por objeto hallar un número de centésimas que multiplicado por 42 reproduzca 2946006. Dividiremos pues, segun la regla ordinaria, el número 2946006 por 42 é indicaremos que el cociente espresa centésimas, separando *dos* cifras decimales á su derecha por una coma.

$$\begin{array}{r|l}
 2946006 & 42 \\
 060 & 70143 \\
 180 & \\
 126 & \\
 0 &
 \end{array}$$

Tendremos así, como resultado 701,43

Siendo nuestro raciocinio completamente independiente del número y del orden de las unidades que representa el dividendo, podemos establecer la siguiente regla práctica:

Para dividir un número decimal por un número entero, se efectua la division como si no hubiese coma en el dividendo, y se separa á la derecha del cociente tantas cifras decimales cuantas hay en el dividendo.

95 — *Advertencia.* La division anterior no ha dado resto; pero, mas jeneralmente el dividendo no es exactamente divisible por el divisor. Supongamos, por ejemplo, que tenemos 34,029 que dividir por 25. El número 34029 no siendo exactamente divisible por 25, no podemos decir que buscamos un número de milésimas que multiplicado por 25 reproduzca 34029 milésimas; pero buscaremos el número de milésimas que multiplicado por 25 da el mayor número de milésimas contenido en 34029 milésimas. Tendremos pues aun que dividir 34029 por 25, segun la regla ordinaria é indicar que el cociente espresa milési-

mas, separando *tres* cifras decimales á su derecha. Subsiste pues nuestra regla que sea ó no el dividendo exactamente divisible por el divisor.

$$\begin{array}{r} 34,029 \quad | \quad 25 \\ 90 \quad \quad 1,361 \\ 152 \\ 29 \\ 4 \end{array}$$

Se ve, segun el cuadro de la operacion que, multiplicando 1361 por 25, se tiene menos que el dividendo, mientras que se tendria un producto mayor que el dividendo si se multiplicase 1362 por 25. Se tendrá pues la serie de desigualdades :

$$1,361 \times 25 < 34,029 < 1,361 \times 25$$

Tenemos así dos números de milésimas que se diferencian entre si en una unidad de tercer orden decimal y cuyos productos por el divisor encierran al dividendo ; es lo que se llama tener el cociente *en menos de una milésima*.

Por la agregacion de un cierto número de ceros á la derecha del dividendo, se le puede hacer espresar unidades de un orden cualquiera. Por lo tanto, siempre se podrá conseguir que el cociente espresé unidades de un orden determinado. Propongámonos dividir 3,07 por 14, calculando el cociente *en menos de una diez-milésima*. Hagamos entónces que el dividendo espresé diez-milésimas, lo que conseguiremos escribiendo dos ceros á su derecha y dividamos el número 30700 por 14. Encontramos 2192 por cociente y, como el dividendo espresa diez-milésimas, este cociente ha de espresar tambien diez-milésimas, luego será 0,2192.

En la práctica, se colocan los ceros sucesivamente á la derecha de los residuos, cuando hay lugar, y la operacion se dispone entónces del modo siguiente :

$$\begin{array}{r} 3,07 \quad | \quad 14 \\ 27 \quad \quad 0,2192 \\ 130 \\ 40 \\ 12 \end{array}$$

96 — 2º Caso. Sea 48,326 que dividir por 5,8. Suprimamos la coma en el divisor, lo que lo hace diez veces mayor (26) y ha-

gamos tambien al dividendo diez veces mayor, haciendo correr la coma de un rango hácia la derecha.

Dividamos entónces el número 483,26 por 58 segun la regla del N° 94.

Encontramos por cociente 8,33

$$\begin{array}{r} 483,26 \quad | \quad 58 \\ 192 \quad \quad 8,33 \\ \hline 186 \\ 12 \end{array}$$

Nos queda que demostrar que 8,33 es el cociente de los dos números dados, es decir que si multiplicamos 8,33 por 5,8 tendremos un número menor que el dividendo, mientras que si multiplicasemos 8,34 por 5,8, tendríamos un número mayor que 48,326. Efectivamente resulta de la operacion que hemos efectuado que tenemos la serie de desigualdades

$$8,33 \times 5,8 < 48,326 < 8,34 \times 5,8$$

Si dividimos cada una de estas cantidades por 10, el sentido de las desigualdades no habrá variado. Pero, para dividir un producto de dos ó mas factores por 10, basta dividir uno de sus factores (N° 92.) Tendremos pues :

$$8,33 \times 5,8 < 48,326 < 8,34 \times 5,8$$

Luego, cuando el divisor es un número decimal, se efectua la division segun la regla siguiente :

Se suprime la coma en el divisor y se hace correr la coma del dividendo de tantos rangos hácia la derecha como cifras decimales haya en el divisor. En seguida se efectua la division como en el 1° caso.

97 — De lo anterior se deduce que :

1° *Si el dividendo y el divisor tienen un mismo número de cifras decimales, se suprime la coma en ambos números y se efectua la division como si fuesen números enteros.*

Así para dividir 57,427 por 0,349, efectuaremos la operacion como si tuviésemos que dividir 57427 por 349.

2° *Si el dividendo tiene menos cifras decimales que el divisor, se colocará á la derecha del dividendo bastantes ceros para que ambos números tengan igual número de cifras deci-*

males, en seguida se efectuará la operación como en el caso anterior.

Si tenemos que dividir 128,47 por 0,09072; como sabemos que no cambia de valor un número decimal por mas ceros que se le ponga á su derecha (25), pondremos tres ceros á la derecha del dividendo y tendremos que dividir 128,47000 por 0,09072, ó lo que es lo mismo 12847000 por 9072.

APLICACIONES.

Hallar los cocientes de las divisiones que siguen:

$$\begin{aligned} 2564 : 494 = ; & \quad 13141962 : 45903 = ; & \quad 574900 : 17000 = ; & \quad 908432 : 8 = ; \\ 57986,4 : 1000 = ; & \quad 98765432106 : 21435 = ; & \quad 37,492 : 49 = ; \\ 439,0275 : 13,7 = ; & \quad 56,812 : 4,107 = ; & \quad 0,08145 : 0,0094 = ; \\ & \quad 0,05 : 0,00042 = \end{aligned}$$

— Dividir 1808 por un número tal que el cociente sea igual al dividendo disminuido de 1582 unidades.

Por lo tanto el cociente será igual á 1808 — 1582 = 226 y como el dividendo es el producto de dos factores de los que uno, el cociente 226 es conocido, determinaremos el otro buscando por que número se ha de multiplicar 226 para reproducir 1808, esto es, dividiendo 1808 por 226; luego el número pedido será 1808 : 226 = 8.

— Hallar abreviadamente el cociente de 12600 por $2 \times 25 \times 21$, siendo $12600 = 2 \times 4 \times 9 \times 25 \times 7$ y $21 = 3 \times 7$.

Respuesta. — El cociente será 12.

— Hallar un número que, dividiéndole por 1860, dé por cociente 1492 y por resto 1808. — R. (2776928).

— ¿Cuál es el número que, multiplicándolo por 3, por 16 y por 25 y dividiendo el producto por 104, da por resultado el triple de 1850? R. ($37 \times 13 = 481$).

— Calcular en menos de una millonésima los cocientes que siguen:

$$38,542 : 27 = ; \quad 17,02 : 4,5 = ; \quad 984,4602 : 0,5041 = ; \quad 0,174 : 0,02095.$$

— 42 varas de tela han costado 798 \$; ¿cuánto valdrán 25 varas de la misma?

Si 42 varas cuestan 798 \$, una vara costará 42 veces menos, esto es $798 : 42 = 19$ y el precio de las 25 varas será 25 veces mayor que el precio de una ó bien $19 \times 25 = 475$ \$.

— 20 obreros han hecho una obra en 30 días; ¿cuántos obreros se necesitarían para ejecutarla en 12 días? R. (50 obreros.)

— Dividir 184 en dos partes cuya diferencia sea 16.

Si la menor fuese conocida, añadiéndole la diferencia 16, se tendría la mayor; luego el número 184 se compone de dos veces la menor mas 16: quitando

pues 16 de 184 tendremos 2 veces la menor, es decir, que el duplo de la menor será $184 - 16 = 168$ y la menor $\frac{168}{2} = 84$; la mayor es pues $84 + 16 = 100$.

— Dividir 2168 entre cuatro personas, de modo que la segunda tenga el doble de la primera, la tercera el triple de la segunda, y la cuarta tenga lo de los otros tres juntos.

Respuesta: 1ª 12, 2ª 24, 3ª 72 y 4ª 108.

— Si se aumentase en 8 un cierto número, sería duplo de otro que es de 3 unidades menor que el primero; ¿cuáles son estos dos números? R. (14 y 11)

— Hallar tres números tales que la suma de los dos primeros sea 12, la de los dos últimos 16 y 14 la del primero y tercero. R. (5, 7 y 9),

— La distancia de la luna á la tierra es 60 veces mayor que el radio del globo terrestre, y este radio es de 6366000 metros. ¿Cuánto tiempo emplearía el sonido, que recorre 340 metros por segundo, para venir de la luna á la tierra?

Respuesta: — 13 días, 0 horas, 3 minutos y 31 segundos.

— La distancia de la tierra al sol es aproximadamente de 38000000 de leguas de 4000 metros cada una. La luz emplea 8^{ms} 8^{cs} para llegar del sol á la tierra; se pregunta ¿cuántas leguas recorre en un segundo?

Respuesta. — 77868 leguas y 3409 metros.

— Efectuada una division, se divide el dividendo por el cociente obtenido y se pregunta ¿en qué caso se encontrará por cociente y por resto, en esta segunda operacion, el divisor y el resto de la primera division?

CUESTIONARIO.

¿Qué es multiplicacion? ¿Qué se entiende por factor de un producto?
¿por múltiplos de un número?

¿De qué naturaleza es el multiplicador? — ¿El producto?

¿Cuántos casos hay en la multiplicacion de los números enteros?

¿Cómo se multiplican entre sí dos números dígitos?

¿Qué es tabla de multiplicacion? — ¿Cómo se construye?

¿Cómo se multiplica un número compuesto de varias cifras por un número dígito?

¿Cómo se multiplica un número cualquiera por 10, 100, 1000, 10000?

Terminando un número en uno ó mas ceros, ¿cómo se le hace 10, 100, 1000 veces menor?

¿Cómo se multiplica un número por otro compuesto de una cifra significativa seguida de uno ó mas ceros?

¿Cómo se multiplican entre sí dos números compuestos de varias cifras?

¿Cómo se efectúa la multiplicación cuando uno de los factores ó ambos terminan en ceros?

¿De cuántas cifras se compone el producto de dos números cualesquiera?

¿Cómo se efectúa la prueba de la multiplicación? ¿sobre qué principio está basada?

¿Qué se entiende por producto de varios factores?

Mostrar que no varía el valor de un producto por mas inversiones que se hacen en los factores.

¿Cómo se multiplica un número por un producto de varios factores?

¿Cómo se multiplica un producto de varios factores por un número?

¿Qué se entiende por potencia de un número? ¿Cuadrado? ¿Cubo? ¿Exponente?

¿Cómo se multiplican entre sí dos números decimales? ¿Si el multiplicando es un número entero?

¿Qué es división? ¿Qué otras definiciones hay? ¿Cuáles son? Mostrar sus relaciones con la primera.

¿Qué es división exacta?

¿Qué significa el resto de la división? Valor máximo de este resto.

¿Cuántos casos hay en la división de los números enteros?

¿Cómo se divide por un número dígito un dividendo que es menor que diez veces este divisor?

¿No se puede efectuar esta división de otro modo?

¿Cómo se divide por un número compuesto de varias cifras un dividendo que es menor que diez veces este número?

¿Cómo se verifica el cociente hallado?

¿No se puede disminuir el número de los tanteos?

¿Cuál es la regla jeneral para dividir entre sí dos números cualesquiera? Demostrar esta regla.

¿Cómo se efectúa la división cuando teniendo el dividendo y el divisor un gran número de cifras, lo ha de tener también el cociente?

Si el dividendo y el divisor terminan con ceros, ¿cómo se simplifica la operación?

¿De qué modo se simplifica la operación, cuando el divisor es un número dígito.

¿Cómo se hace la prueba de la división?

¿Qué relación hay entre el número de cifras del cociente y los números de cifras en el dividendo y divisor?

¿Qué variación debe sufrir el dividendo ó el divisor de una división exacta, para obtener una unidad mas ó una unidad menos en el cociente?

¿Cómo se divide un producto de varios factores por un número?

¿Cómo se divide un número por un producto efectuado?

¿Cómo se divide un número decimal por un número entero? — ¿La regla es la misma si hay algun resto?

¿Qué se entiende por calcular el cociente en menos de una unidad decimal dada?

¿Cómo se dividen entre sí dos números decimales? ¿Cuándo dividend y divisor tienen un mismo número de cifras decimales? ¿Cuándo el divisor es el que tiene mas?

IX. De las igualdades.

98 — En el cálculo aritmético, y sobre todo en la resolución de los problemas, necesitaremos muy á menudo ciertas propiedades de las igualdades, algunas evidentes de por sí, y otras cuya demostración es de una gran simplicidad y que vamos á sentar.

99 — PROPOSICIONES EVIDENTES. — 1º Si á los dos miembros de una igualdad se le añade un mismo número, el resultado será otra igualdad.

2º Una igualdad no dejará de serlo aunque restemos de ambos miembros un mismo número.

3º Si se multiplica ó si se divide los dos miembros de una igualdad por un mismo número, el resultado será tambien una igualdad.

4º Elevando los dos miembros de una igualdad á la misma potencia, resultará otra igualdad.

100 — De estas proposiciones se deduce como consecuencia inmediata, que sumando, ó restando, ó multiplicando, ó dividiendo ORDENADAMENTE dos igualdades, resultará otra igualdad (*).

Así, si tenemos las dos igualdades $5 + 7 = 12$, y $6 = 15 - 9$ tendremos tambien :

$$5 + 7 + 6 = 12 + 15 - 9$$

$$5 + 7 - 6 = 12 - (15 - 9)$$

$$(5 + 7) \times 6 = 12 \times (15 - 9)$$

$$\frac{5 + 7}{6} = \frac{12}{15 - 9}$$

El signo () se emplea para que los signos +, —, $\times$ y :

(*) Ordenada ú ordenadamente quiere decir el primer miembro de la una con el primero de la otra, y el segundo con el segundo.

afecten al resultado de las operaciones indicadas dentro del paréntesis. Asi $(5 + 7) \times 6$ indica que la suma $5 + 7$ ó sea 12 se ha de multiplicar por 6, esto es, 12×6 .

Si se omitiese el paréntesis, seria $5 + 7 \times 6 = 47$, en lugar de 72 que representa del primer modo.

101 — *En una igualdad, toda cantidad que está en un miembro con un cierto signo, puede pasar en el otro con signo contrario.*

Hemos visto que la sustraccion era la operacion contraria de la adición, asi como la division es la operacion contraria de la multiplicacion; luego los signos $+$ y $-$ son signos contrarios así como lo son los signos $\times$ y $:$.

Sea la igualdad $5 + 7 = 15 - 3 \dots (m)$; á los dos miembros de esta igualdad podemos agregar un mismo número (1º del N° 99), el número 3 por ejemplo: tendremos entónces

$$5 + 7 + 3 = 15 - 3 + 3$$

ó borrando en el segundo miembro la cantidad 3 que está á la vez con signo de suma y signo de resta,

$$5 + 7 + 3 = 15 \dots (n)$$

Comparando ahora la igualdad (m) con la igualdad (n) vemos que ambas constan de los mismos números 5, 7, 3 y 15, pero que el número 3 que estaba en el segundo miembro de (m) con el signo *menos*, ha pasado ahora en el primer miembro de (n) con el signo *mas*.

Del mismo modo, con la igualdad (n) podríamos conseguir la igualdad (m) con solo hacer pasar el número 3 del 1º miembro al segundo, cambiando su signo $+$ en signo $-$.

102 — *De donde deducimos que: todo número que esté en el miembro de una igualdad con signo $+$ ó $-$ puede pasar en el otro con signo $-$ ó $+$.*

103 — Sea otra igualdad $20 : 4 = 5 \dots (p)$ y multipliquemos por 4 los dos miembros de la igualdad (3º del N° 99), tendremos :

$$20 : 4 \times 4 = 5 \times 4$$

En el primer miembro tenemos el número 20 que, siendo multiplicado y dividido á la vez por la misma cantidad 4, no experimenta ninguna alteracion, de modo que podemos escribir mas sencillamente

$$20 = 5 \times 4 \dots (q)$$

la cantidad 4 que estaba en el primer miembro de (p) con signo de division, ha pasado pues en el segundo de (q) con signo de multiplicacion.

Del mismo modo, dada la igualdad (q) se puede obtener la (p) haciendo pasar el número 4 del segundo al primer miembro, cambiando su signo de multiplicacion en signo de division.

Luego. *Todo número que esté en un miembro de una igualdad con signo $\times$ ó $:$, puede pasar en el otro con signo $:$ ó $\times$.*

APLICACIONES.

— Hallar el valor de la cantidad desconocida x en las espresiones siguientes:

1º $8.x + 7 = 31$

Quedará determinado el valor de x , cuando solo esté en el primer miembro; tenemos pues que hacer pasar sucesivamente 7 y 8 del primero al segundo miembro; así tendremos:

$$8.x = 31 - 7 = 24 \dots\dots (102)$$

y $x = \frac{24}{8} = 3 \dots\dots (103)$

2º $(4.x - 13) \times 3 = 69$

Tendremos sucesivamente:

$$4.x - 13 = \frac{69}{3} = 23$$

$$4.x = 23 + 13 = 36$$

y $x = \frac{36}{4} = 9$

3º $\left(\frac{5.x}{3} + 8\right) \times 9 = 117 \dots\dots\dots R. x = 3$

4º $5.x - 7 = 42 - 7.x \dots\dots\dots R. x = 4$

5º $= (7 + x) \times 4 = 43 + x \dots\dots\dots R. x = 5$

CUESTIONARIO.

Si se aumenta ó disminuye en 5 unidades el primer miembro de una igualdad, ¿en cuántas unidades se habrá de aumentar ó disminuir el segundo miembro para que resulte otra igualdad?

¿Qué resulta con sumar, restar, multiplicar ó dividir ordenadamente dos igualdades?

¿Cuándo se emplea el signo ()?

¿Qué son signos contrarios?

¿Con qué signo pasa del primero al segundo miembro un número que esté en aquel con signo $+$? ¿con signo $\times$?

CAPÍTULO TERCERO.

Divisibilidad de los números.

104 — *Un número es DIVISIBLE por otro cuando contiene á este un número exacto de veces.*

Así 20 es divisible por 4, porque contiene 5 veces exactamente el número 4, mientras que 22 que contiene á 4 mas de 5 veces, sin contenerlo 6 veces exactamente, no es divisible por él ó, lo que es lo mismo, no es MÚLTIPLO de él.

Un número es DIVISOR ó FACTOR de otro cuando está contenido en este un número exacto de veces.

Así 4 es divisor de 20, lo mismo que 5, puesto que 20 es igual al producto de 4 por 5.

105 — *Descompuesto un número en dos partes, si ambas partes admiten un mismo divisor, el número tambien lo admitirá.*

Siendo $72 = 45 + 27$ y 45 y 27 ambos divisibles por 9, digo que 72 tambien lo será.

En efecto $45 = 5 \text{ veces } 9$; $27 = 3 \text{ veces } 9$

Sumando ordenadamente estas dos igualdades, tendremos

$$45 + 27 = 5 \text{ veces } 9 + 3 \text{ veces } 9$$

ó bien $72 = 9$ repetido 5 veces + 3 veces, esto es, 8 veces, luego $72 = 8 \text{ veces } 9$, y por consiguiente 9 es divisor de 72.

106 — *Descompuesto un número en dos partes, si el número y una de las partes admiten un mismo divisor, la otra parte tambien lo admitirá.*

Siendo 72 y 45 divisibles por 9, digo que 27 tambien lo será.

Efectivamente $72 = 8 \text{ veces } 9$; $45 = 5 \text{ veces } 9$; restando ordenadamente estas dos igualdades (100), tendremos

$$72 - 45 = 8 \text{ veces } 9 - 5 \text{ veces } 9$$

y por consiguiente, $27 = 3 \text{ veces } 9$.]

107— *Un número es divisible por 2, cuando termina en cero, ó en una de las cifras pares (*) 2, 4, 6, 8.*

Si el número termina en cero es por que es múltiplo de 10, pero 10 equivale á un cierto número de veces 2, luego el número propuesto está compuesto de un número exacto de veces 2, luego es divisible por 2.

Si termina en cifra par, como 576 por ejemplo, lo podemos descomponer en dos partes $570 + 6$; pero ambas partes son divisibles por 2, la primera por ser múltiplo de 10, la segunda por ser número par; luego el número lo es tambien (105).

108— *Un número es divisible por 5, cuando termina en 0 ó en la cifra 5.*

La demostracion de esta propiedad es idéntica á la anterior. Asi tendremos que 570 y 575 son divisibles por 5 mientras que 577 no lo es y da de residuo 2.

109— *Un número es divisible por 9, cuando lo es la suma de los valores absolutos de sus cifras.*

Para demostrarlo, notaremos primero que *una unidad de un orden cualquiera se compone de un múltiplo de 9 mas una unidad simple*; pues una unidad del sétimo orden, por ejemplo, esto es, un millon, vale $999999 + 1$ y este número 999999, que no se compone mas que de 9, es evidentemente un múltiplo de 9. Por lo tanto, 2, 3, 4..... unidades del mismo orden serán un múltiplo 2, 3, 4 veces mayor de 9 mas 2, 3, 4..... unidades simples. Luego, *toda cifra significativa seguida de uno ó mas ceros es igual á un múltiplo de 9 mas el valor absoluto de esta cifra significativa.*

Esto supuesto, tomemos el número 3425 y descompongámoslo en $3000 + 400 + 20 + 5$. Segun lo que acabamos de sentar, tendremos las siguientes igualdades:

$$3000 = \text{múltiplo de } 9 + 3$$

$$400 = \quad \ll \quad \ll + 4$$

$$20 = \quad \ll \quad \ll + 2$$

$$\text{y sumando ordenadamente} \quad 5 = \text{.....} 5$$

$$3425 = \text{múltiplo de } 9 + (3+4+2+5)$$

(*) Llámase *número par* el número divisible por 2, é *impar* el que no es divisible por 2. Luego si se divide un número impar por 2, se tendrá por resto *una unidad*: de modo que, un *número impar* es igual á un *número par* aumentado ó disminuido en una unidad.

El número dado está pues descompuesto en dos partes; la primera es evidentemente divisible por 9; si la segunda lo es, lo será el número. (105)

Pero la segunda parte, $(3 + 4 + 2 + 5)$, es la suma indicada de los valores absolutos de las cifras del número, luego si esta suma es un múltiplo de 9, el número 3425 también lo será.

Siendo 14 la suma de estas cifras, el número 3425 no es divisible por 9, pero lo serían los números 3051 y 5643, cuyas sumas de los valores absolutos de las cifras son respectivamente 9 y 18.

110 — Siendo 9 un múltiplo de 3, podemos también decir que: *un número es divisible por 3 cuando lo es la suma de los valores absolutos de sus cifras.*

111 — Llámanse NÚMERO PRIMO al que no tiene otros factores que el mismo y la unidad. Tales son los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, etc.

112 — Llámense NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ á los que no tienen otro divisor común mas que la unidad. Tales son 8 y 15; 10 y 21; 9 y 10 y, en jeneral, dos números consecutivos son siempre primos entre sí.

113 — Descomponer un número en factores simples ó primos.

Tomemos, por ejemplo, el número 420. Este número es divisible por 2 (107); efectuando la division se encuentra por cociente 210; entónces tenemos

$$420 = 2 \times 210$$

el número 210 es también divisible por 2, y dividiendo, hallamos 105 por cociente, luego tenemos $210 = 2 \times 105$ y por consiguiente (70)

$$420 = 2 \times 2 \times 105$$

El número 105 no es ya divisible por 2, pero lo es por 3, (110), y, efectuando la division, encontramos por cociente 35; entónces tenemos $105 = 3 \times 35$, y por consiguiente

$$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 35$$

El número 35 ya no admite el factor 3, pero admite el factor 5 (108), y, efectuando la division, tenemos $35 = 5 \times 7$, y por consiguiente

$$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

y como 7 es un número primo, queda descompuesto el número en sus factores simples ó primos. Se puede reemplazar por el producto efectuado los dos factores iguales á 2 y escribir

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

Generalmente se dispone la operacion del modo siguiente :

480	2	420	2	18900	2
240	2	210	2	9450	2
120	2	105	3	4725	3
60	2	35	5	1575	3
30	2	7	7	525	3
15	3	1		175	5
5	5			35	5
1				7	7
				1	

y se tiene $480 = 2^5 \times 3 \times 5$; $18900 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$.

Del procedimiento seguido, se deduce la regla siguiente :

114 — *Para descomponer un número en factores primos, se ensaya sucesivamente la division de este número por los números primos 2, 3, 5, 7 hasta que se llegue á una division que se efectue exactamente; el divisor de esta division es uno de los factores primos del número propuesto y el cociente obtenido es el producto de los demas factores; se aplica entónces á este cociente el mismo procedimiento, empezando los ensayos por el factor primo ya empleado, y se sigue así hasta llegar á un cociente que sea igual á 1.*

115 — *Para que dos números sean divisibles uno por otro, es necesario y suficiente que cada uno de los factores primos del divisor esté en el dividendo con un esponente á lo menos igual al que tiene en el divisor.*

Así 48 es divisible por 12, porque $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ y $12 = 2 \times 2 \times 3$. Los factores primos de 12 estando contenidos en la descomposicion de 48, hagámoslo pasar del segundo al primer miembro; tendremos entónces (103)

$$\frac{48}{2 \times 2 \times 3} = 2 \times 2 \text{ ó bien } \frac{48}{12} = 2 \times 2 = 4$$

116 — Llámanse MÁXIMO COMUN DIVISOR de dos ó mas números el mayor divisor que lo sea de todos ellos (*).

El m. c. d. de 6 y 18 es 6; el m. c. d. de 15, 25, y 40 es 5.

117 — Para hallar el m. c. d. de dos ó mas números, se les descompone en sus factores primos, y se multiplica los que son comunes á estos números, tomando cada uno con su menor esponente.

En efecto, consideremos varios números, y supongamos que solo tengan comunes los factores 3 y 5. Además, supongamos que el factor 3 se halle en uno de los números con el esponente 2, y en los otros con esponentes mayores ó á lo menos iguales, y que el factor 5 se halle en uno de los números con el esponente 3, y en los otros con esponentes iguales ó superiores á 3.

Sentado esto, un divisor comun de los números propuestos no puede contener otros factores primos mas que 3 y 5 y no les puede contener sinó con esponentes respectivamente iguales á 2 y á 3; luego es *cundo mas* igual á $3^2 \times 5^3$ y divide efectivamente á cada uno de los números propuestos (115), luego es el m. c. d. de ellos.

EJEMPLO. — Hallar el m. c. d. de 168, 96 y 72.

Descomponiendo los números en sus factores primos

168	2	96	2	72	2
84	2	48	2	36	2
42	2	24	2	18	2
21	3	12	2	9	3
7	7	6	2	3	3
1		3	3	1	
		1			

tenemos $168 = 2^3 \times 3 \times 7$; $96 = 2^5 \times 3$ y $72 = 2^3 \times 3^2$, luego el m. c. d. será $2^3 \times 3$, esto es 24.

118 — Llámanse MÍNIMO MÚLTIPLO COMUN de varios números el número menor que sea divisible por todos ellos (**).

El m. m. c. de 6, 12 y 24 es el mismo número 24 por ser el menor de sus múltiplos comunes 24, 48, 72....

El m. m. c. de 6, 12 y 18 es 36, que es menor que 72, 108...

(*) Máximo comun divisor se escribe abreviadamente: m. c. d.

(**) Mínimo múltiplo comun se escribe abreviadamente m. m. c.

119 — *Para hallar el mínimo múltiplo comun de varios números, se les descompone en factores primos y se multiplican todos los factores diferentes que entran en las descomposiciones, tomando cada uno con su mayor esponente.*

En efecto, consideremos varios números, y supongamos que todos los factores primos contenidos en las descomposiciones de todos los números no sean mas que los números 3, 5 y 7. Además, supongamos que 3 se halle en uno de ellos con el esponente 2 y con esponentes inferiores ó cuando mas iguales á 2 en aquellos de los otros números que lo contienen; que el factor 5 se halle en uno de los números con el esponente 4, y con esponentes iguales ó inferiores á 4 en aquellos de los demas números que lo contienen; enfin, que el factor 7 se halle con el esponente 1 solamente en todos los números que lo admiten.

Esto supuesto, un múltiplo comun de los números propuestos debe necesariamente contener los factores primos 3, 5, 7 con esponentes á lo menos iguales respectivamente á 2, 4, 1; luego es cuando menos igual á $3^2 \times 5^4 \times 7$. Por otra parte, $3^2 \times 5^4 \times 7$ es efectivamente divisible por cada uno de los números propuestos (115); es pues el m. m. c. de ellos.

Así, el m. m. c. de los números 168, 96 y 72, que acabamos de descomponer en sus factores primos (117) seria $2^5 \times 3^2 \times 7$, esto es, 2016.

CUESTIONARIO.

- ¿ Cuándo es un número divisible por otro ?
- ¿ Qué es factor ó divisor de un número ?
- Si dos números admiten un mismo factor, ¿ lo admitirá la suma de ellos ?
- ¿ y la diferencia ?
- ¿Cuál es el carácter de divisibilidad por 2 ? — ¿ por 5 ?
- ¿Cuál es el carácter de divisibilidad por 9 ? — ¿ por 3 ?
- ¿ Qué es número primo ?
- ¿ Qué son números primos entre sí ?
- ¿ Cómo se descompone un número en factores simples ó primos ?
- ¿Cuál es la condicion necesaria y suficiente para que dos números sean divisibles el uno por el otro ?
- ¿ Qué se entiende por m. c. d. de dos ó mas números ? — ¿ De qué modo se determina ?
- ¿ Qué es m. m. c. de varios números ? — ¿ Cómo se halla ?

CAPÍTULO CUARTO.

Fracciones.

Principios jenerales.

120 — *Una FRACCION es una de las partes iguales en las que se ha dividido la unidad, ó la reunion de varias de estas partes.* Si, por ejemplo, se divide la vara, que es la unidad de longitud, en tres partes iguales, y que se tome dos de estas partes, se habrá formado una fraccion.

121 — *Para espresar una fraccion, se emplean dos números que se separan por una raya horizontal.* El número inferior se llama DENOMINADOR: indica el número de partes iguales en las que ha sido dividida la unidad; el otro se llama NUMERADOR, é indica el número de partes iguales que se han tomado. La fraccion del N^o anterior se escribirá pues: $\frac{2}{3}$; siendo 2 el numerador y 3 el denominador.

El numerador y el denominador, ambos juntos, se llaman *términos* de la fraccion.

122 — *Para enunciar una fraccion, se enuncia desde luego el numerador, y despues el denominador, añadiéndole á continuacion la terminacion AVOS.* Se exceptúan las fracciones cuyo denominador es 2, 3 hasta 10; entónces, en vez de enunciar el denominador, se dice: medio, tercio, cuarto, etc.

Así $\frac{5}{12}$ se enuncia cinco doceavos, mientras que $\frac{2}{3}$ se enuncia dos tercios.

123 — Se puede, por medio de las fracciones, espresar exactamente el cociente de una division que da un resto. Basta, para esto, agregar al cociente obtenido una fraccion que tenga por numerador el resto de la division, y por denominador el divisor. Efectivamente, si se divide, por ejemplo, 234 por 11, se encontrará de cociente 21 y 3 de resto; de modo que, si queremos partir igualmente 234 \$ entre 11 personas, tendremos desde luego que dar 21 \$ á cada una, y en seguida repartir estos 3 \$ que quedan entre aquellas 11 personas. Pero si partiéramos so-

lamente un peso (esto es, una unidad de moneda), cada una recibiría *un onceavo*; desde el momento que son 3 pesos que se reparten, cada persona tendrá luego 3 veces mas, es decir *tres onceavos*; luego el cociente es $21\frac{3}{11}$.

124 — Los números fraccionarios, cuyo numerador es menor que su denominador, valen menos que la unidad; entónces se llaman *fracciones ó quebrados propios*. Si el numerador es mayor que el denominador, valen mas que la unidad, y se les da el nombre de *quebrados impropios*. Cuando los dos términos son iguales, el número fraccionario es igual á la unidad.

Así tendremos $\frac{5}{7} < 1$ quebrado propio ó fraccion.

$\frac{7}{5} > 1$ quebrado impropio.

y en fin $\frac{5}{5}$ ó $\frac{7}{7}$ ó $\frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 3}$ que son iguales á 1.

125 — Cuando se tiene un quebrado impropio, es conveniente hallar el número de unidades que contiene esta espresion fraccionaria; es lo que se llama *sacar el entero contenido en un quebrado impropio*. Tomemos, por ejemplo, el quebrado impropio $\frac{23}{5}$. Si dividimos 23 por 5, encontramos por cociente 4 y 3 de resto. Tenemos entónces $23 = 5 \times 4 + 3$. Esta igualdad espresa que 23 unidades de *una cierta especie* valen 4 veces 5 de estas unidades, mas 3 de las mismas. Podemos decir pues, que 23 *quintos* valen 4 veces 5 *quintos* ó 4, mas 3 *quintos*, lo que da $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$, lo que tambien suele escribirse, suprimiendo el signo mas: $\frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$ y se llama *número misto*.

De lo anterior deducimos esta siguiente regla práctica: *Para sacar el entero contenido en una espresion fraccionaria, se divide el numerador por el denominador, completando el cociente entero como en el N° 123.*

126 — Todo número entero puede ponerse bajo la forma de un número fraccionario de denominador dado. Si queremos, por ejemplo, reducir 4 en *catorceavos*, diremos: una unidad vale 14 *catorceavos*, luego 4 unidades valdrán 4 veces mas, esto es $4 \times 14 = 56$ *catorceavos*, luego podremos escribir: $4 = \frac{56}{14}$; luego:

Para convertir un número entero en un fraccionario dado de denominador, basta tomar, como numerador, el producto del número entero por el denominador.

De esto se deduce que, dado un número misto, como $4\frac{3}{5}$, se le puede fácilmente dar la forma de un número fraccionario. Basta convertir 4 en quintos, según la regla anterior, y así se obtiene un número de quintos igual á $20 + 3$ ó bien sea $\frac{23}{5}$.

127 — *Cuando se multiplica el numerador de un número fraccionario por un número entero cualquiera, el número fraccionario resulta multiplicado por el mismo número.*

Sea $\frac{5}{8}$ el quebrado cuyo numerador multiplicamos por 7, lo que nos da $\frac{35}{8}$; digo que este número fraccionario es 7 veces mayor que $\frac{5}{8}$. En efecto, al multiplicar el numerador por 7, lo hacemos 7 veces mayor; pero un numerador 7 veces mayor espresa que el quebrado se compone de 7 veces mas partes; luego, como permanece constante el denominador, es decir, que las partes son las mismas, componiéndose la nueva espresion fraccionaria de 7 veces mas partes que la primera, y siendo las mismas estas partes, esta espresion será 7 veces mayor. Quedará pues el quebrado multiplicado por 7.

128 — *Cuando se divide el denominador de un número fraccionario por uno de sus divisores, el número fraccionario resulta multiplicado por el mismo número.*

Sea $\frac{5}{18}$ el quebrado cuyo denominador dividimos por 3, lo que nos da $\frac{5}{6}$; digo que este número fraccionario es 3 veces mayor que $\frac{5}{18}$. Efectivamente, al dividir el denominador por 3, lo hacemos 3 veces menor; pero un denominador 3 veces menor espresa que la unidad está dividida en 3 veces menos partes y por consecuencia que estas partes son 3 veces mayores; luego, la nueva espresion fraccionaria siendo compuesta del mismo número de partes que la primera y siendo estas partes 3 veces mayores, será ella misma 3 veces mayor; es decir que, el quebrado propuesto resulta multiplicado por 3.

129 — Con raciocinios idénticos á los anteriores, demostrariamos tambien que :

1º *Cuando se multiplica el denominador de un número fraccionario por un número entero cualquiera, el número fraccionario resulta dividido por el mismo número.*

Así, multiplicando por 7 el denominador de $\frac{5}{8}$, tendríamos

$$\text{que } \frac{5}{8 \times 7} \text{ ó } \frac{5}{56} \text{ es igual á } \frac{5}{8} : 7 \quad \text{— (Nº 128).}$$

2º Cuando se divide el numerador de un número fraccionario por uno de sus divisores, el número fraccionario resulta dividido por el mismo número.

Así, dividiendo por 4 el numerador de $\frac{12}{17}$, tendríamos que

$$\frac{12 : 4}{17} \text{ ó } \frac{3}{17} \text{ es igual á } \frac{12}{17} : 4 \quad \text{--- (127)}$$

130 — Un número fraccionario no varía aunque se multipliquen sus dos términos por un mismo número entero cualquiera, ó se dividan el uno y el otro por un divisor común á ambos.

$$\text{Así } \frac{5}{7} = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} = \frac{15}{21} \dots\dots\dots \text{ y } \frac{9}{12} = \frac{9 : 3}{12 : 3} = \frac{3}{4}$$

En el primer caso, al multiplicar el numerador por 3, el quebrado resultará también multiplicado por 3 (127); y como por la multiplicación del denominador 7 por el mismo número 3, se hace el resultado anterior 3 veces más pequeño, (129 - 1º) es claro que no ha alterado el valor del quebrado.

En el segundo caso, después de dividir los dos términos del quebrado $\frac{9}{12}$ por 3, tenemos el quebrado $\frac{3}{4}$; pero, si multiplicásemos por 3 los dos términos de este quebrado, reproduciríamos el quebrado dado. Luego los dos quebrados son iguales.

131 — Simplificar un número fraccionario es trasformarle en otro equivalente, pero cuyos términos sean menores.

Así el quebrado $\frac{90}{198}$, cuyos términos son ambos divisibles por 2, (107) puede simplificarse, dividiendo sus dos términos por 2 (130) y es igual á $\frac{45}{99}$; pero $\frac{45}{99}$ puede aun simplificarse, dividiendo sus dos términos por 9, lo que da lugar al quebrado $\frac{5}{11}$. Este quebrado, cuyos términos son primos entre sí, no puede espresarse exactamente por otro de términos menores. Entonces se llama quebrado irreducible.

Reducir un número fraccionario á su más simple expresión es hallar el quebrado irreducible que le es igual.

132 — Para reducir un número fraccionario á su más simple expresión, se divide el numerador y el denominador sucesivamente por los factores comunes que se noten, empezando por suprimir en ambos términos los divisores cuyos caracteres de divisibilidad se conocen; esto es, quitando primero todos los factores 2 comunes, en segundo lugar, los factores 3 ó 9 y después los factores 5. En seguida se procura dividir los dos términos del

último quebrado por los números primos sucesivos, 7, 11, 13 ... y se sigue así hasta que se haya llegado á un divisor mayor que la mitad del menor de los dos términos del último número fraccionario obtenido. Entónces se procura dividir el otro término por este menor y la operacion estará concluida; pues se llegará así á un número fraccionario cuyos dos términos serán primos entre sí.

Sea, por ejemplo, el quebrado $\frac{506}{24420}$; divido sus dos términos por 2, lo que da $\frac{253}{12210}$, quebrado cuyos dos términos divido por 9 y hallo $\frac{27}{1350}$. No son divisibles ambos ni por 5 ni por 7, y como la mitad de 17 es menor que 11, número primo consecutivo á 7, no tengo mas que ensayar la division por 17. Efectuándose exactamente, hallo de este modo que la mas simple espresion del quebrado propuesto es $\frac{1}{70}$.

Para reducir un número fraccionario á su menor espresion, se puede tambien buscar el m. c. d. de sus dos términos, y dividir en seguida el uno y el otro por este m. c. d.

Así veremos (117) que el quebrado $\frac{252}{396} = \frac{7}{11}$.

133 — Reducir varios quebrados á un mismo denominador, es transformarles en otros quebrados equivalentes y que tengan todos un mismo denominador.

134 — Para reducir dos ó mas quebrados al mismo denominador, basta multiplicar los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás.

Efectivamente, los nuevos quebrados que se forman así, son respectivamente equivalentes á los primeros, puesto que se han multiplicado los dos términos de cada uno por un mismo número (130). Además, tienen el mismo denominador, porque cada denominador es el producto de todos los denominadores primitivos (70), pero multiplicados en un órden diferente, lo cual no altera el valor del producto (71).

Aplicando esta regla á los tres quebrados

$$\frac{5}{7}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{13}{11}$$

se obtiene :

$$\frac{5 \times 5 \times 14}{7 \times 5 \times 14}$$

$$\frac{3 \times 7 \times 14}{5 \times 7 \times 14}$$

$$\frac{13 \times 7 \times 5}{14 \times 7 \times 5}$$

ó bien, efectuando las multiplicaciones :

$$\frac{350}{490}$$

$$\frac{294}{490}$$

$$\frac{455}{490}$$

135 — Al aplicar la regla que acabamos de sentar, los quebrados, con los que se opera, no se hallan en jeneral reducidos al mas simple denominador comun. Vamos á indicar un procedimien- to para reducir varios quebrados al menor denominador comun.

Supongamos que los quebrados dados hayan sido reducidos á su mas simple espresion; todo quebrado igual á uno de estos se obtendrá multiplicando los dos términos de este por un mismo número entero; luego todo denominador comun al que se pueda reducir los quebrados propuestos, es un múltiplo comun de sus denominadores. Además, todo múltiplo comun de estos denominadores será denominador comun de los quebrados propuestos si se multiplican los dos términos de cada uno de estos quebrados por el número de veces que su denominador está contenido en el múltiplo comun.

De donde se deduce la siguiente regla:

Para reducir dos ó mas fracciones al menor denominador comun, se empieza por reducirlas cada una á su mas simple espresion, en seguida se busca el m. m. c. de sus denominadores y se multiplica los dos términos de cada fraccion por el número de veces que su denominador está contenido en el m. m. c.

EJEMPLO I. — Sean las fracciones irreducibles

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{7}{24}.$$

El denominador 24 de la última fraccion es divisible por cada uno de los demas denominadores, es pues el m. m. c. de todos los denominadores. Al dividir 24 por estos denominadores, se encuentra por cocientes

$$8, \quad 6, \quad 2, \quad 1.$$

Estos son los números por los que se necesita multiplicar respectivamente los dos términos de las fracciones propuestas. Efectuando el cálculo, se halla

$$\frac{16}{24}, \quad \frac{18}{24}, \quad \frac{10}{24}, \quad \frac{7}{24}.$$

EJEMPLO II. — Sean las fracciones irreducibles

$$\frac{113}{360}, \quad \frac{317}{540}, \quad \frac{229}{648}.$$

Para hallar el m. m. c. de los tres denominadores, descompondremos cada uno de ellos en sus factores primos. Así tendremos:

ARIT.

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

$$648 = 2^3 \times 3^4$$

El m. m. c. de estos números (419) es pues

$$2^3 \times 3^4 \times 5 = 3240$$

dividiéndolo sucesivamente por cada denominador, se hallan como cocientes los números

$$9, \quad 6, \quad 5,$$

por los que es preciso respectivamente multiplicar los dos términos de las fracciones propuestas. Efectuando el cálculo, resulta

$$\frac{1017}{3240},$$

$$\frac{1902}{3240},$$

$$\frac{1145}{3240}.$$

APLICACIONES.

— Demostrar que los quebrados $\frac{5}{7}$ y $\frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 7}$ son equivalentes.

Efectivamente se determina el quebrado $\frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 7}$ multiplicando por $(10+1)$ 6 por 11 los dos términos del primero y así tenemos

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times (10+1)}{7 \times (10+1)} = \frac{50+5}{70+7} = \frac{55}{77}$$

— Demostrar que los quebrados $\frac{5}{11}$ y $\frac{5 \cdot 3 \cdot 5}{11 \cdot 11 \cdot 11}$ son equivalentes, pero que no lo son los quebrados $\frac{5}{11}$ y $\frac{5 \cdot 5}{11 \cdot 11}$.

— Reducir á su mas simple espresion la fraccion

$$\frac{6 \times 105 \times 42}{15 \times 98 \times 63}$$

sin efectuar prealablemente las multiplicaciones indicadas.

Descompongamos todos estos números en sus factores primos. Así tendremos:

$$\frac{2 \cdot 3 \times 3 \cdot 5 \cdot 7 \times 2 \cdot 3 \cdot 7}{3 \cdot 5 \times 2 \cdot 7 \cdot 7 \times 3 \cdot 3 \cdot 7}$$

quitemos ahora los factores comunes á ambos términos y la fraccion resultante $\frac{2}{7}$ será la mas simple espresion de la fraccion propuesta.

— Reducir, como en el ejemplo anterior, á su mas simple espresion la fraccion

$$\frac{12 \times 34 \times 169}{51 \times 91 \times 32}$$

Respuesta : $\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 8}$.

— Reducir á un mismo denominador comun los quebrados

$$\frac{3}{8}, \quad \frac{5}{36}, \quad \frac{7}{42}, \quad \frac{11}{54}, \quad \frac{10}{15}.$$

Hallar el mínimo denominador comun.

Respuesta. — El mínimo denominador comun es 216.

— Dados varios quebrados, hallar otros quebrados respectivamente iguales á los primeros y tales que el denominador de cada uno de ellos sea igual al numerador del siguiente.

CUESTIONARIO.

- ¿ Qué es fraccion ?
- ¿ Cuántos números se emplean para espresar una fraccion ?
- ¿ Qué indica el numerador ? — ¿ El denominador ? — ¿ Qué es lo que se llama términos de una fraccion ?
- ¿ Cómo se enuncia una fraccion ?
- ¿ Cómo se espresa exactamente, por medio de las fracciones, el cociente de una division inexacta ?
- ¿ Qué es quebrado propio ? — ¿ Quebrado impropio ?
- ¿ Cuántas unidades fraccionarias componen una unidad entera ?
- ¿ Qué se entiende por sacar el entero contenido en un quebrado impropio ?
- ¿ Cómo se efectua esta operacion ?
- ¿ Qué es número misto ?
- ¿ Cómo se convierte un número entero en un fraccionario dado de denominador ?
- ¿ Qué resulta al multiplicar ó dividir el numerador de un número fraccionario por un número entero ?
- ¿ Qué resulta al multiplicar ó dividir el denominador de un número fraccionario por un número entero ?
- ¿ Qué resulta al multiplicar ó dividir los dos términos de un número fraccionario por un mismo número entero ?
- ¿ Qué es simplificar un número fraccionario ?
- ¿ Qué se entiende por quebrado irreducible ?
- ¿ Qué se entiende por reducir un número fraccionario á su mas simple espresion ?
- ¿ Cuántos modos hay para reducir un quebrado á su mas simple espresion ?
- ¿ Cuáles son ?
- ¿ Se puede simplificar un número fraccionario cuyos dos términos se diferencian en una unidad ?
- ¿ Qué se entiende por reducir varios quebrados á un mismo denominador ?
- ¿ Cuántos modos hay para reducir dos ó mas quebrados á un mismo denominador ? — ¿ Cuáles son ?
- ¿ Cómo se determina el mínimo denominador comun ?

CAPÍTULO QUINTO.

Cálculo de los números fraccionarios.

I. Adición.

136— Hay dos casos principales que considerar en la adición de los números fraccionarios, según estos tengan un mismo denominador, ó denominadores diferentes.

1º Sean dados, para sumarlos, los tres quebrados $\frac{3}{13}$, $\frac{7}{13}$ y $\frac{11}{13}$ de mismo denominador. La suma que buscamos se compone de *todos los treceavos* contenidos en los quebrados dados; contiene pues $3+7+11$ y de consiguiente esta suma es $\frac{3+7+11}{13}$ ó $\frac{21}{13}$ ó $1+\frac{8}{13}$, si sacamos el entero contenido en el quebrado $\frac{21}{13}$ (125). Luego....

Para sumar dos ó mas números fraccionarios de un mismo denominador, se suman los numeradores y á esta suma se pone por denominador el denominador comun.

2º Sean dados, para sumarlos, los tres quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$, cuyos denominadores son desiguales.

Reduciendo estos quebrados á un mismo denominador (134), tendremos entónces que sumar los quebrados $\frac{56}{84} + \frac{21}{84} + \frac{60}{84}$, la suma será pues $\frac{56+21+60}{84} = \frac{137}{84} = 1 + \frac{53}{84}$. Luego

Para sumar dos ó mas números fraccionarios de denominadores diferentes, se reducen á un denominador comun y en seguida se aplica la regla anterior.

Así la suma $\frac{5}{6} + \frac{7}{10} + \frac{2}{3}$ es igual á $\frac{18}{30} + \frac{21}{30} + \frac{20}{30} = \frac{59}{30} = 1 \frac{29}{30}$ porque 30 es el mínimo denominador comun (135).

137— Consideremos en fin el caso en que se tenga que sumar números mistos, y sean dados los tres números $4+\frac{3}{5}$, $3+\frac{7}{10}$ y $8+\frac{2}{5}$. La suma de los quebrados es $\frac{3}{5} + \frac{7}{10} + \frac{2}{5}$, esto es $1+\frac{29}{30}$; la suma de los enteros es $4+3+8$ ó 15, de consiguiente, la suma buscada es $15+1+\frac{29}{30} = 16+\frac{29}{30}$; luego

Para sumar dos ó mas números fraccionarios acompañados de enteros, ó sea para sumar números mistos, se suman los fraccionarios con los fraccionarios y los enteros con los enteros, y se reúnen las dos sumas.

II. Sustracción.

138 — Hay también, en la sustracción de los números fraccionarios, dos casos principales que considerar según sean iguales ó desiguales los denominadores.

Siendo los raciocinios en estos casos idénticos á los de la adición, nos contentaremos con enunciar las reglas.

1º *Para restar dos números fraccionarios que tienen un mismo denominador, se restan sus numeradores y á la resta se pone por denominador el denominador común.*

$$\text{Así } \frac{8}{13} - \frac{3}{13} = \frac{5}{13}.$$

2º *Para restar dos números fraccionarios de denominadores diferentes, se reducen á un denominador común, y en seguida se aplica la regla anterior.*

$$\text{Así } \frac{3}{4} - \frac{5}{7} = \frac{21}{28} - \frac{20}{28} = \frac{1}{28} \quad (134).$$

$$\frac{17}{24} - \frac{5}{8} = \frac{17}{24} - \frac{15}{24} \quad (135) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \quad (132).$$

139 — *Para restar dos números mistos, se restan los fraccionarios y después los enteros y la reunión de ambas restas será la resta total.*

$$\text{Así } 8\frac{3}{4} - 3\frac{5}{7} = 5\frac{1}{28}.$$

140 — *Advertencia.* Podría suceder que el quebrado del sustraendo fuese mayor que el quebrado del minuendo, para cuyo caso la regla anterior parece no ser exacta; pero desaparece fácilmente esta dificultad con solo reducir á quebrado una de las unidades del minuendo.

Supongamos, por ejemplo, que se tenga que restar $5 + \frac{5}{4}$ de $9 + \frac{5}{12}$ ó $5 + \frac{9}{12}$ de $9 + \frac{5}{12}$. Reduciremos en doceavos una de las nueve unidades del minuendo (la que valdrá 12 doceavos) (124), y en seguida tendremos que restar $5\frac{9}{12}$ de $8\frac{17}{12}$, lo que da por resta $3\frac{8}{12}$ ó $3\frac{2}{3}$ (132).

III. Multiplicacion.

141 — Hay *tres* casos principales que considerar en la multiplicacion de los números fraccionarios.

1º MULTIPLICACION DE UN NÚMERO FRACCIONARIO POR UN ENTERO. — Sea $\frac{5}{8}$ á multiplicar por 4. El producto pedido ha de ser 4 veces mayor que $\frac{5}{8}$; será pues $\frac{5 \times 4}{8} = \frac{20}{8}$ (127).

Podemos conseguir el mismo resultado, aplicando el principio del N° 128 y tendremos $\frac{5}{8} \times 4 = \frac{5}{8 \div 4} = \frac{5}{2}$. Estos dos resultados son evidentemente iguales, pues simplificando por 4 los dos términos de $\frac{20}{8}$, encontramos $\frac{5}{2}$, luego

Para multiplicar un número fraccionario por un número entero, se multiplica el numerador por el entero, dejando el mismo denominador, ó se divide el denominador por el número entero, dejando el mismo numerador.

Advertencia. Este segundo método solo se emplea cuando el denominador de la fraccion dada es múltiplo del número entero.

2º MULTIPLICACION DE UN ENTERO POR UN NÚMERO FRACCIONARIO. — *Multiplicar un número cualquiera por un número fraccionario, es partir este número en tantas partes iguales como unidades haya en el denominador de la fraccion y tomar tantas de estas partes como unidades haya en el numerador.*

Por ejemplo, multiplicar 4 por $\frac{5}{8}$ es tomar 5 veces la octava parte de 4. Pero, siendo $\frac{1}{8}$ la octava parte de la unidad, la octava parte de 4 unidades será 4 veces mayor, esto es, 4 veces $\frac{1}{8}$ ó $\frac{4}{8}$. Para hallar el producto pedido, nos queda que tomar 5 veces este resultado; este producto será pues $\frac{4}{8} \times 5 = \frac{4 \times 5}{8}$ (1º de 141); luego

Para multiplicar un número entero por un fraccionario se multiplica el entero por el numerador, dejando el mismo denominador.

3º MULTIPLICACION DE DOS NÚMEROS FRACCIONARIOS. — Sea $\frac{5}{4}$ á multiplicar por $\frac{5}{8}$. Se trata de tomar 5 veces la octava parte de $\frac{5}{4}$. Pero la octava parte de $\frac{5}{4}$ es un quebrado 8 veces menor que $\frac{5}{4}$, y podemos obtenerla multiplicando por 8 el deno-

minador de $\frac{3}{4}$ (1º de 129), lo que da $\frac{3}{4 \times 8}$. Es preciso ahora tomar 5 veces esta fraccion, lo que conseguiremos, multiplicando su numerador por 5 (1º de 141). El producto pedido es pues $\frac{3 \times 5}{4 \times 8}$ Luego

Para multiplicar entre sí dos números fraccionarios, se multiplican los numeradores y despues los denominadores, escribiendo el primer producto por numerador y el segundo por denominador.

142 — Se ha dado el nombre de FRACCION DE FRACCION al producto de varias fracciones, por ejemplo $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{12} \times \frac{4}{7}$. Para efectuar este cálculo, se tomará primero los $\frac{7}{8}$ de $\frac{3}{5}$, lo que dará: $\frac{3 \times 7}{5 \times 8}$ Tomando en seguida los $\frac{5}{12}$ de este resultado,

se tendrá $\frac{3 \times 7 \times 5}{5 \times 8 \times 12}$ Tomando en fin los $\frac{4}{7}$ de este nuevo pro-

ducto, se tendrá como producto definitivo $\frac{3 \times 7 \times 5 \times 4}{5 \times 8 \times 12 \times 7}$. Antes de efectuar los cálculos indicados, se suprimen los factores 7, 5, 3 y 4 comunes á los dos términos y se halla así inmediatamente $\frac{1}{4}$ por valor de la fraccion reducida á su menor expresion.

143 — MULTIPLICACION DE DOS NÚMEROS MISTOS. Sea $5\frac{3}{4}$ á multiplicar por $8\frac{2}{7}$. Dando á estos números mistos la forma de fraccionarios (126), tendremos enténce que multiplicar los dos quebrados impropios $\frac{23}{4}$ y $\frac{58}{7}$; el producto será pues:

$$\frac{23}{4} \times \frac{58}{7} = \frac{23 \times 58}{4 \times 7} = \frac{1334}{28} = 47 + \frac{18}{28} = 47\frac{9}{14}. \text{ Luego....}$$

Para multiplicar entre sí dos números mistos, es preciso reducirlos á fraccionarios y aplicar la regla anterior.

IV. Division.

144 — En la division de los números fraccionarios, así como en la multiplicacion, hay tambien *tres casos* principales que considerar.

1º DIVISION DE UN NÚMERO FRACCIONARIO POR UN ENTERO. Sea $\frac{5}{7}$ á dividir por 4. Segun la definicion de la division (1º de 77) tenemos que hallar un número que, multiplicado por 4, reproduzca $\frac{5}{7}$; este cociente pedido es pues 4 veces menor que $\frac{5}{7}$ y se obtendrá este cociente, haciendo $\frac{5}{7}$ 4 veces menor, esto es (1º de 129) multiplicando el denominador 7 por 4, y tendremos por cociente $\frac{5}{7 \times 4}$. Luego...

Para dividir un número fraccionario por un entero, se multiplica por el número entero el denominador del fraccionario.

Advertencia. Si el numerador del número fraccionario, que se ha de dividir por el entero, fuese un múltiplo de este entero, se obtendría el cociente, dividiendo el numerador por el entero (2º de 129).

Así el cociente de $\frac{12}{7}$ por 4 será $\frac{12 : 4}{7} = \frac{3}{7}$.

2º DIVISION DE UN NÚMERO ENTERO POR UN FRACCIONARIO. Sea 4 á dividir por $\frac{5}{7}$. El producto del cociente buscado por $\frac{5}{7}$ ha de ser igual á 4, ó lo que es lo mismo, los $\frac{5}{7}$ del cociente valen 4. Por lo tanto, $\frac{4}{5}$ del cociente vale 5 veces menos que los $\frac{5}{7}$, es decir que es 5 veces menor que 4; es pues igual á $4 : 5$ ó á $\frac{4}{5}$ y los $\frac{4}{5}$ del cociente, esto es el cociente entero, valdrán 7 veces mas que $\frac{4}{5}$, ó $\frac{4}{5} \times 7 = \frac{4 \times 7}{5}$. Luego...

Para dividir un número entero por un fraccionario, se multiplica el entero por el denominador, y el producto se divide por el numerador.

Advertencia I. En el ejemplo anterior, hemos hallado $4 : \frac{5}{7} = \frac{4 \times 7}{5}$, pero $\frac{4 \times 7}{5}$ es lo mismo que $4 \times \frac{7}{5}$ y $\frac{7}{5}$ es el quebrado dado $\frac{5}{7}$ cuyos términos son invertidos. Luego podemos decir tambien que :

Para dividir un número entero por un fraccionario, se multiplica el entero por el fraccionario invertido.

Advertencia II. Para dividir la unidad por un número fraccionario, basta invertir el número fraccionario. Así el cociente $1 : \frac{5}{7}$ es $\frac{7}{5}$. El cociente de la unidad por un número se llama el *inverso* de este número.

3º DIVISION DE DOS NÚMEROS FRACCIONARIOS. — Sea $\frac{5}{7}$ á dividir por $\frac{3}{4}$. Se trata de hallar un número (*el cociente*) que multiplicado por $\frac{3}{4}$ reproduzca $\frac{5}{7}$ ó, lo que es lo mismo, los $\frac{3}{4}$ del cociente buscado valen $\frac{5}{7}$; luego $\frac{4}{3}$ del cociente es 3 veces menor, ó igual á $\frac{4}{3}$ de $\frac{5}{7}$ y los $\frac{4}{3}$ del cociente, esto es, el cociente entero es 4 veces mayor, y de consiguiente vale 4 veces $\frac{4}{3}$ de $\frac{5}{7}$.

Este cociente pedido es pues 4 *tercios* de $\frac{5}{7}$, es decir :

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{7 \times 3} \text{ (142). Luego.....}$$

Para dividir entre sí dos números fraccionarios, se multiplica el fraccionario dividendo por el fraccionario divisor invertido ()*.

Advertencia. Si los denominadores son iguales, los quebrados espresan una misma magnitud y es claro entónces que el cociente de los numeradores será el cociente de los quebrados. Así el cociente entre $\frac{6}{7}$ y $\frac{3}{7}$ será $6 : 3$, esto es 2, así como 2 sería tambien el cociente entre 6 *metros* y 3 *metros*, porque 2 es el número de veces que 3 metros está contenido en 6 metros y de consiguiente que $\frac{6}{7}$ está contenido en $\frac{6}{7}$.

Sentado esto, sea $\frac{5}{7}$ á dividir por $\frac{3}{4}$. Reduzcamos los dos quebrados á un comun denominador (134); tendremos entónces

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} : \frac{3 \times 4}{7 \times 4} \text{ y el cociente de estos dos últimos que-}$$

brados será el de sus numeradores, esto es: $\frac{5 \times 4}{7 \times 3}$, y por lo tanto el cociente pedido entre los dos quebrados dados.

145 — DIVISION DE DOS NÚMEROS MISTOS. — Sea $24 + \frac{5}{8}$ á dividir por $5 + \frac{7}{12}$. Dando á estos números mistos la forma de frac-

(*) Por medio de las igualdades podemos llegar mas rápidamente al resultado. Efectivamente, llamemos x al cociente buscado entre $\frac{5}{7}$ y $\frac{3}{4}$. De la definicion de la division se deduce $\frac{5}{7} \times x = \frac{3}{4}$. Haciendo pasar sucesivamente 4 y 3 del primero al segundo miembro, tendremos al momento

$$x = \frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{7 \times 3}$$

El caso anterior se resolveria del mismo modo.

cionarios (126), tendremos entónces que dividir: $\frac{125}{8}$ por $\frac{67}{12}$; el cociente será pues :

$$\frac{195 \times 12}{8 \times 67} = \frac{2340}{536} = 4. \frac{496}{536} = 4 \frac{49}{134}. \text{ Luego....}$$

Para dividir entre si dos números mistos, es preciso reducirlos á fraccionarios y aplicar en seguida la regla del 3^{er} Caso.

V. Reduccion de los números fraccionarios á decimales, y vice versa.

146 — Para reducir un número fraccionario á decimal, se consideran dos casos segun sea el denominador espresado por la unidad seguida de varios ceros, ó sea un número cualquiera.

147 — 1^o *Si el denominador es espresado por la unidad seguida de uno ó mas ceros, se escribe el numerador, y se separa, de su derecha, por una coma, tantas cifras decimales como cifras hay en el denominador.* Si, por ejemplo, se trata del quebrado $\frac{23}{1000}$, observo que este quebrado espresa que se ha de dividir 23 por 1000, lo que conseguiré haciendo 23, 1000 veces menor, lo que da 0,023 (26).

Tambien puedo decir: las palabras *milavos* ó *milésimas* son idénticas, puesto que ambas espresan que la unidad ha sido dividida en mil partes iguales; luego $\frac{23}{1000} = 0,023$.

2^o *Si el denominador es un número cualquiera, se escribirá á la derecha del numerador 1, 2 ó 3 ceros, segun se quiere tener el valor decimal del fraccionario propuesto, con menos error de una décima, ó de una centésima, ó de una milésima (un número fraccionario no es siempre exactamente reducible á decimales); en seguida se efectuará la division del numerador así dispuesto por el denominador, y se apartará á la derecha del cociente, por una coma, tantos decimales como ceros se hayan escrito á la derecha del numerador.*

Sea, por ejemplo, propuesto calcular el valor del quebrado $\frac{26}{111}$ con menos error que una diez-milésima. Como este quebrado espresa que necesita dividir 26 por 111 (123) no se trata mas que calcular el cociente de esta division en menos de una diez-

milésima. Así, siguiendo el N° 95, escribo desde luego 4 ceros á la derecha de 26 y efectúo la division como sigue :

$$\begin{array}{r|l} 260000 & 111 \\ 380 & 2342 \\ 470 & \\ 260 & \\ 38 & \end{array}$$

Así $\frac{26}{111}$ valen aproximadamente 0,2342.

148 — Notemos que el cuarto dividendo parcial es 260, como el primero : por eso es que hemos vuelto á hallar por cuarto cociente y por cuarto resto el primer cociente y el primer resto, y por lo tanto, si seguimos la division, hallaremos otra vez el segundo cociente y el segundo resto y así *indefinidamente*. La operacion no podrá entónces acabarse por crecido que sea el número de ceros que se escriban á la derecha del numerador, y de consiguiente el quebrado $\frac{26}{111}$ *no es exactamente reducible á decimales*.

Como las cifras 2, 3, 4, volverian indefinidamente y en el mismo orden, se dice que la fraccion decimal 0,234234234..... que se obtendria, al continuar la division, es *periódica* y que el *período* es 234, esto es, el número formado por las cifras que se reproducen periódicamente.

149 — Para reducir un número decimal á fraccionario ordinario, se toma por numerador la parte decimal, despues de suprimida la coma y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como hay decimales.

Efectivamente, sea la fraccion decimal 0,0452. Al suprimir la coma, lo que da 452, se ha multiplicado esta fraccion por 10000 (26) ; luego, para conseguir el verdadero valor de la fraccion, es necesario dividir el resultado por 10000 y tenemos entónces $\frac{452}{10000}$, y simplificando, $\frac{113}{2500}$.

Tambien podemos decir : siendo idénticas las palabras diez-milavos y diez-milésimas, puesto que ambas espresan que la unidad ha sido dividida en diez mil partes iguales, tendremos $0,0452 = \frac{452}{10000}$.

APLICACIONES.

— Efectuar las sumas siguientes :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{7}{15} + \frac{11}{15}; \quad \frac{22}{491} + \frac{14}{491} + \frac{37}{491} + \frac{490}{491} \\ & \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \quad \frac{3}{7} + \frac{6}{11}; \quad \frac{5}{14} + \frac{11}{28}; \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5}; \\ & \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{24}; \quad \frac{4}{15} + \frac{3}{5} + \frac{7}{20} + \frac{13}{30}; \quad 4\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3}; \\ & 14\frac{3}{4} + 17\frac{1}{2} + 1\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

— Efectuar las restas siguientes :

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} - \frac{1}{4}; \quad \frac{7}{12} - \frac{2}{5}; \quad \frac{15}{24} - \frac{5}{12}; \quad \frac{15}{24} - \frac{3}{8}; \quad 4\frac{3}{4} - 3\frac{1}{4}; \\ & 25\frac{2}{5} - 14\frac{1}{2}; \quad 12\frac{3}{4} - 7\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

— Efectuar los productos siguientes :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times 2; \quad \frac{5}{11} \times 11; \quad \frac{14}{231} \times 146; \quad 3 \times \frac{2}{5}; \quad 7 \times \frac{5}{14}; \quad \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}; \\ & \frac{7}{9} \times \frac{2}{3}; \quad \frac{8}{15} \times \frac{5}{4}; \quad 2\frac{2}{3} \times 4; \quad 5 \times 3\frac{7}{8}; \quad 7\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

— Efectuar las divisiones siguientes :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5} : 3; \quad \frac{8}{11} : 4; \quad 7 : \frac{1}{2}; \quad 8 : \frac{2}{3}; \quad 48 : \frac{7}{9}; \quad \frac{1}{2} : \frac{2}{3}; \quad \frac{6}{11} : \frac{5}{11}; \\ & \frac{1}{1000} : \frac{1}{10}; \quad 2\frac{1}{2} : 2; \quad 4\frac{2}{3} : 5; \quad 7 : 2\frac{2}{3}; \quad 18 : 4\frac{2}{3}; \quad 5\frac{6}{11} : 7\frac{4}{7}; \\ & 100\frac{3}{4} : 18\frac{1}{12} \end{aligned}$$

— Hallar, en decimales, el cociente de:

$$\begin{aligned} & 1 \text{ por } 2; \quad 3 \text{ por } 2; \quad 3 \text{ por } 4; \quad 1 \text{ por } 10; \quad 6 \text{ por } 80; \quad 1 \text{ por } 3; \quad 1 \text{ por } 6; \\ & 5 \text{ por } 11; \quad 4 \text{ por } 15; \quad 7 \text{ por } 275. \end{aligned}$$

— Se ha cortado una pieza de tela en cuatro pedazos que tienen, el 1º 2 metros $\frac{1}{2}$ de largo, el 2º 5 metros $\frac{2}{5}$, el 3º 6 metros $\frac{3}{4}$ y el cuarto 7 metros. Se pregunta ¿cuál es la longitud de la tela?

La longitud de la tela será la suma de los números mistos $2\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{5}$, $6\frac{3}{4}$ y del número entero 7. Aplicando la regla del Nº 137, tendremos $20 + \frac{33}{20}$, ó 21 metros y $\frac{13}{20}$ por la longitud total.

— Aumentado un número en sus $\frac{2}{5}$, es igual á 21, ¿cuál es este número?

El número buscado mas sus $\frac{2}{5}$ es lo mismo que $\frac{5}{5} + \frac{2}{5}$, esto es $\frac{7}{5}$. Luego si los $\frac{7}{5}$ del número valen 21, $\frac{4}{5}$ valdrá 7 veces menos, esto es $21 : 7 = 3$ y los $\frac{5}{5}$ ó el número entero, valdrán 5 veces mas, ó $3 \times 5 = 15$.

Comprobando ahora el problema, vemos que, siendo 15 el número buscado, sus $\frac{2}{5}$ son 6 y que $15 + 6 = 21$.

— El tercio mas el cuarto de un número entero valen 7; ¿cuál es este número?

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ reducidos á un denominador comun son iguales á $\frac{4}{12} + \frac{3}{12}$ ó á $\frac{7}{12}$. Luego si 7 veces la doceava parte de un número valen 7, 12 veces la doceava parte, ó el número, valdrán 12.

— A la mitad de un número le falta una unidad para que valga los $\frac{5}{6}$; ¿cuál es este número?

Si los $\frac{5}{6}$ de un número son iguales á su mitad mas una unidad, $\frac{5}{6}$ menos la mitad valdrían 1; pero la diferencia entre $\frac{5}{6}$ y $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{6}$, luego, siendo $\frac{1}{6}$ del numero igual á 1, el número será igual á 10.

— Un obrero puede hacer una obra en 15 horas; otro obrero puede hacerla en 12 horas. ¿En cuántas horas harán la obra, si trabajan juntos los dos?

El 1º en una hora, hará $\frac{1}{15}$ de la obra y el 2º $\frac{1}{12}$ en el mismo tiempo; luego, los dos juntos en una hora harán $\frac{1}{15} + \frac{1}{12}$ de la obra, esto es $\frac{4}{60} + \frac{5}{60} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$ de la obra; y para hacer la obra entera, necesitarán tantas horas como veces $\frac{3}{20}$ está comprendido en $\frac{20}{20}$ ó como veces 3 está contenido en 20, esto es $\frac{20}{3}$ de horas, ó, sacando el entero, 6 horas y $\frac{2}{3}$ de hora.

— ¿Qué queda de un objeto despues de haberle quitado el tercio y el cuarto?

El objeto, lo representaremos por 1; la cuestion se reduce entónces á hallar la diferencia entre 1 y $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. La suma de estos dos quebrados es $\frac{7}{12}$ y $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$; luego lo que queda son los $\frac{5}{12}$ del objeto.

— Se ha hecho el tercio y el cuarto de un trabajo; ¿de cuánto se ha pasado la mitad del trabajo?

El tercio mas el cuarto del trabajo son los $\frac{7}{12}$ de este trabajo; la mitad son los $\frac{6}{12}$ luego lo que se ha hecho á mas de la mitad es igual á $\frac{7}{12} - \frac{6}{12} = \frac{1}{12}$.

— 7 varas $\frac{3}{4}$ de una tela han costado 46 $\frac{1}{2}$; ¿cuál es el precio de la vara?

Si conociésemos este precio, multiplicándolo por $7\frac{3}{4}$, tendríamos evidentemente el precio total. Luego hallaremos el precio pedido dividiendo $46\frac{1}{2}$ por

$7 \frac{3}{4}$ ó, lo que es lo mismo, $\frac{93}{4}$ por $\frac{31}{4}$. Aplicando la regla, se halla $\frac{93}{2} : \frac{31}{4}$

$$= \frac{93 \times 4}{2 \times 31} = 6. \text{ Cada vara cuesta pues 6 pesos.}$$

— La mitad, los dos tercios y los tres sétimos de un número hacen 67.

¿Cuál es este número? — R. — (42).

— La suma de dos números es 66; el tercio y el cuarto del primero equivalen á la mitad y al quinto del segundo. ¿Cuáles son estos números?

Respuesta. — El 1º es 36 y el 2º 30.

— Un hombre puede hacer una obra en 8 horas, una mujer en 10, y un muchacho en 15. ¿Cuánto tiempo emplearán en hacerla trabajando juntos el hombre, la mujer y el muchacho?

Respuesta. — En $\frac{24}{7}$ de horas, esto es en 3 horas y $\frac{3}{7}$ de hora.

— Un obrero puede hacer una obra en 3 horas $\frac{1}{2}$ y otro en 4 horas $\frac{1}{3}$; trabajando juntos, ¿cuánto tiempo emplearán?

Respuesta. — 1 hora y $\frac{4}{7}$ de hora.

— Una fuente da 30 litros de agua en 5 minutos; otra da 8 en 7 minutos; una tercera 4 por minuto; y enfín una cuarta 5 en 8 minutos. ¿Cuántos litros por hora suministrarán las cuatro fuentes, corriendo juntas?

Respuesta. — 706 litros y $\frac{1}{4}$ de litro.

— ¿Qué queda de un objeto despues de haberle quitado los $\frac{3}{7}$?

Respuesta. — Quedan los $\frac{4}{7}$ del objeto.

— ¿Qué queda de un objeto despues de haberle quitado el tercio, el cuarto y el quinto?

Respuesta. — Quedan los $\frac{15}{60}$.

— De un pedazo de tela que tiene 3 metros $\frac{1}{2}$ se quitan 1 metro $\frac{5}{8}$. ¿Qué queda?

Respuesta. — Queda 1 metro $\frac{3}{4}$.

— Habiendo hecho ya el sexto y los dos sétimos de una obra; ¿qué se tiene aun que hacer para llegar á la mitad?

Respuesta. — Queda todavía $\frac{1}{12}$ de la obra.

— Dos fuentes dan, la primera 14 litros en 3 horas y la segunda 23 litros en 5 horas. Se pregunta la que suministra mas?

Respuesta. — La segunda da $\frac{1}{3 \frac{1}{2}}$ mas que la primera.

— ¿Cuáles son los dos tercios de 44? — R. ($\frac{22}{2}$ ó $22 \frac{1}{2}$).

— ¿Cuáles son los tres quintos de $\frac{3}{7}$? — R. ($\frac{9}{7}$).

— ¿Cuál es la mitad del tercio de 24? — R. (4).

— ¿Cuáles son los dos tercios de los tres cuartos de 56? — R. (28).

— ¿En cuánto los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{2}{5}$ de una magnitud son mayores que los $\frac{3}{7}$ de los $\frac{5}{7}$ de la misma?

Respuesta. — En $\frac{4}{10}$.

— La altura de una montaña es los $\frac{2}{3}$ de la de otra que es en $\frac{1}{7}$ menos elevada que una tercera cuya altura es de 5481 metros. ¿Cuál es la altura de la primera?

Respuesta. — 3132 metros.

— Un viajero hace 4 leguas en 5 horas; ¿cuántas horas necesitará para hacer 10 leguas? — R. (10^{hs} $\frac{1}{2}$).

— Dada una longitud de 24 metros, si se la divide en partes iguales de $\frac{3}{4}$ de metro cada una, ¿cuántas partes se tendrá? — R. (32).

— Por cada vuelta de un tornillo, este adelanta en $\frac{5}{8}$ de milímetro; ¿cuántas vueltas tendrá que dar para adelantar 3 milímetros y $\frac{1}{4}$? — R. (5 vueltas y $\frac{5}{12}$).

— Un tendero vende 115 § lo que le cuesta 100 §; otro vende 103 § lo que le cuesta 90; la mercancía es la misma. ¿Cuál es el que gana mas y en cuanto mas que el otro?

Respuesta. — El 1º gana mas que el 2º en $\frac{1}{180}$.

— Una fuente da 5 litros de agua en 2 minutos. Se pregunta ¿en cuántos minutos llenará un vaso de 35 litros $\frac{3}{4}$.

Respuesta. — En 14 minutos y $\frac{3}{10}$ ó 14,3 minutos.

— Un obrero hace los $\frac{2}{7}$ de su trabajo en tres días. ¿Cuánto tiempo empleará para hacerlo entero? — R. (10^{días} 5).

— En $\frac{2}{3}$ de día, un obrero hace los $\frac{5}{14}$ de su trabajo. ¿Cuántos días empleará en hacerlo todo? — R. (2 días y $\frac{4}{9}$ de día).

— Calcular $\frac{3}{7}$ de hora en minutos, segundos y fracciones de segundo. — R. (25 minutos, 42 segundos y $\frac{6}{7}$).

— Reducir 38 minutos y 24 segundos á fraccion de hora. — R. ($\frac{16}{25}$ de hora).

CUESTIONARIO.

¿Cuántos casos hay en la adición de los números fraccionarios? — ¿Cuáles son?

¿Cómo se efectúa la adición cuando los quebrados tienen denominadores diferentes?

- ¿ Cómo se suman los números mistos ?
- ¿ Cómo se efectúa la sustracción de los números fraccionarios que tienen un mismo denominador ? — ¿ que tienen denominadores diferentes ?
- ¿ Cómo se restan los números mistos ? — ¿ Qué dificultad puede presentarse ?
- ¿ Cómo se multiplica un quebrado por un entero ? — ¿ De cuántos modos ?
- ¿ Cómo se multiplica un entero por un fraccionario ?
- ¿ Cómo se multiplican entre sí dos números fraccionarios ?
- ¿ Qué se entiende por fracción de fracción ?
- ¿ Cómo se multiplican los números mistos ?
- ¿ Cómo se divide un número fraccionario por un entero ? — ¿ De cuántos modos ?
- ¿ Cómo se divide un número entero por un fraccionario ?
- ¿ Qué se entiende por quebrado invertido ?
- ¿ Cómo se dividen dos números fraccionarios ? — ¿ Cómo se efectúa la división cuando los dos fraccionarios tienen un mismo denominador ?
- ¿ Cómo se dividen los números mistos ?
- ¿ Cómo se reduce á decimal un quebrado ordinario cuyo denominador es la unidad seguida de ceros ?
- ¿ Cómo se reduce á decimal un quebrado cualquiera ?
- ¿ Qué es fracción decimal periódica ? — ¿ Qué es período ?
- ¿ Cómo se reduce un número decimal á fraccionario ?

CAPÍTULO SESTO.

Sistema de pesas y medidas.

I. Sistema métrico.

150 — Hemos dicho ya que medir una magnitud es compararla con otra magnitud fija de la misma naturaleza que se llama unidad y que sirve para valuar todas las magnitudes de la misma especie. Las magnitudes de las que nos vamos á ocupar en este capítulo son : las *longitudes*, las *superficies*, los *volúmenes*, las *pesas* y las *monedas*.

Siendo completamente arbitraria la unidad, se concibe que las unidades adoptadas para las mensuras de las diferentes magnitudes podrian no tener entre sí ninguna relacion. Pero se ha tratado al contrario de establecer entre las diferentes magnitudes unas relaciones muy intimas. Así, todas las medidas actuales tienen por base la unidad de longitud, ó *metro* y por lo tanto se ha dado al conjunto de estas medidas el nombre de *sistema métrico*.

En el año de 1791 se emprendieron los primeros trabajos sobre el sistema métrico. Este ha sido arreglado de tal modo que una magnitud cualquiera pueda ser espresada por un número entero ó decimal y que baste para cambiar de unidad ó bien sea desalojar la coma, ó bien agregar al número que representa una magnitud un número suficiente de ceros.

La nomenclatura del sistema métrico es de las mas sencillas. Se ha imaginado *seis* palabras para designar las unidades principales que son : METRO para las longitudes ; ÁREA para las medidas agrarias ; ESTÉREO para los volúmenes ; LITRO para las medidas de capacidad ; GRAMO para las pesas ; FRANCO para las monedas (en algunos países solamente).

151 — Los nombres de las medidas superiores á la unidad han sido formados, anteponiendo al nombre de la unidad *cuatro* palabras griegas : *deca*, *hecto*, *kilo*, *miria* que significan : diez, ciento, mil, diez mil. Los nombres de las medidas inferiores á la unidad han sido formados anteponiendo al nombre de la unidad las *tres* palabras latinas : *deci*, *centi*, *mili*, que significan décimo, centésimo, milésimo.

Trece palabras bastan pues para establecer la nomenclatura del sistema métrico.

152 — MEDIDAS LONGITUDINALES. — La unidad principal para las longitudes es el METRO. Su magnitud está ligada con las dimensiones de la Tierra. Por medio de ciertos procedimientos, de los que no hemos de ocuparnos aquí se ha conseguido valuar la distancia del polo al ecuador ó la cuarta parte del meridiano terrestre; *el metro es la diez millonésima parte de esta distancia.*

Las unidades secundarias son :

El Miriámetro.....	M m. = 10000 metros.
Kilómetro.....	K m. = 1000 ^m
Hectómetro.....	H m. = 100 ^m
Decámetro.....	D m. = 10 ^m
Metro.....	m. <i>Unidad principal.</i>
Decímetro.....	d m. = 0 ^m ,1
Centímetro.....	c m. = 0 ^m ,01
Milímetro.....	m m. = 0 ^m ,001

153 — A mas de estas medidas, la ley autoriza aun el empleo de las medidas dobles ó mitades de aquellas. Así tendremos el *doble metro* y el *medio metro* que vale *cinco decímetros*; el *doble decámetro* y el *medio decámetro* que vale *cinco metros* y así sucesivamente.

154 — Por medio de estas unidades de los diferentes órdenes, puede una longitud cualquiera ser representada por un número entero ó decimal. Por ejemplo, 4 decímetros se escribirán indiferentemente : 4^{dm}. ó 0^m,4. El número 208^m,745 representa 208 metros 745 milímetros. Si se quisiera tomar por unidad el centímetro en lugar del metro, bastaria desalojar la coma de dos rangos hácia la derecha, lo que daria : 20874^{cm},5; la misma longitud, tomando el hectómetro por unidad, se representaria por 2^{hm},08745.

155 — Los múltiplos y los sub-múltiplos del metro sirven, como unidades secundarias, para las magnitudes que en mucho se alejan de la unidad principal. Para las pequeñas longitudes, la unidad principal es el milímetro. Así se dice que el espesor de un espejo es de 2 milímetros 5 décimos, y se escribe 2^{mm},5. Para las medidas itinerarias, se emplea el kilómetro y el miriámetro. Los kilómetros están apuntados á orilla de los ferro-

carriles sobre las estaciones ó por medio de postes. Se emplea tambien la *legua métrica* que tiene 4 kilómetros de longitud.

En jeografía, las unidades adoptadas son la *legua terrestre* y la *legua marina*. Cada grado del meridiano consta de 25 leguas terrestres ó de 20 leguas marinas. Sabiendo que el cuarto del meridiano terrestre es de *90 grados* (90°), es fácil deducir la espresion en metros de estas medidas jeográficas. Si, por ejemplo, se trata de la legua terrestre, se dirá :

La longitud del cuarto del meridiano ó del arco de 90 grados es de 10000000 de metros ;

La longitud del arco de 1 grado ó de 25 leguas terrestres es pues

$$\frac{10000000}{90}$$

Y por lo tanto la longitud de la legua es de :

$$\frac{10000000}{90 \times 25} = 4444^m,444$$

Por un raciocinio y un cálculo análogos, encontraríamos para la longitud de la legua marina :

$$\frac{10000000}{90 \times 20} = 5555^m,555$$

156 — MEDIDAS DE SUPERFICIE. — La unidad principal de superficie es el METRO CUADRADO ; *es un cuadrado (*) cuyos lados tienen cada uno un metro de longitud.*

Las unidades secundarias de superficie son los cuadrados contruidos sobre las diferentes unidades lineales ; estas son :

El Miriámetro cuadrado.. Mmq. = 100000000 Metros cuadrados.

Kilómetro cuadrado... Kmq. = 1000000 mq.

Hectómetro cuadrado. Hmq. = 10000 mq.

Decámetro cuadrado.. Dmq. = 100 mq.

(*) *Cuadrado* (en jeometría) es una figura terminada por cuatro rectas iguales que se reunen formando escuadra ó ángulos rectos. — Las rectas se llaman *lados* del cuadrado.

<i>Unidad principal</i>	El Metro cuadrado.....	m q. = 100	decim. cuadrados.
	Decímetro cuadrado..	dmq. = 0 ^{mc} ,01	= 100 cmq.
	Centímetro cuadrado.	cmq. = 0 ^{mc} ,0001	= 100 mmq
	(*) Milímetro cuadrado..	mmq = 0 ^{mc} ,000001.	

Como lo vemos en este cuadro, cada una de estas unidades contiene cien veces á la que sigue, lo que, por medio de una figura, se demuestra facilmente en jeometría. Pero podemos dar una idea de la demostracion. Supongamos que se divida 1 metro en 10 partes iguales y que, sobre cada una de estas partes, se coloque un decímetro cuadrado, así se formará una superficie que tendrá 1 metro de largo sobre 0^m,1 de ancho; superficie como esta, habrá 10 en el metro cuadrado, y, por lo tanto, el metro cuadrado contendrá 10 veces 10 decímetros cuadrados, esto es, 100 decímetros cuadrados.

Por consiguiente es necesario no confundir *el décimo, el centésimo, el milésimo del metro cuadrado* con *el decímetro cuadrado, el centímetro cuadrado y el milímetro cuadrado*.

Así 24mq,637 = 24mq. 63dmq. y 70cmq.

157 — MEDIDAS AGRARIAS. — Para la valuacion de los terrenos, se emplea como unidad principal *el decámetro cuadrado* al que se da entónces el nombre de ÁREA. Las tres medidas agrarias adoptadas por el uso son :

El Hectárea....	Ha = 100 areas = 10000 m. cuadrados = 1Hmq.
Area..... a ...	= 100 mq. = 1Dmq.
Centiárea... ca = 0 ^a ,01	= 1mq.

El *decárea* y el *deciárea* no se emplean por no ser cuadrados perfectos, pues valdrian respectivamente 1000 metros cuadrados y 10 metros cuadrados, y, por lo tanto, serian, el primero, la décima parte del hectómetro cuadrado y el segundo la décima parte del decámetro cuadrado.

(*) El milímetro cuadrado es una superficie tan pequeña que muy escaso es el uso que se hace de ella.

158 — MEDIDAS DE VOLÚMEN. — La unidad principal de volúmen es el METRO CÚBICO. *Es un cubo (*) cuyas aristas tienen cada una un metro de longitud.*

Las unidades secundarias de volúmen son los cubos construidos sobre las diferentes unidades lineales; estas son

El Miriámetro cúbico.. Mmc. = 1000000000000 m. cúbicos

Kilómetro cúbico... Kmc. = 1000000000 mc.

Hectómetro cúbico. Hmc. = 1000000 mc.

Decámetro cúbico.. Dmc. = 1000 mc.

Unidad principal Metro cúbico..... m c. = 1000 decímetros cúbicos.

Decímetro cúbico.. dmc. = 0^{mc},001 = 1000^{cmc}.

Centímetro cúbico. cmc. = 0^{mc},000001 = 1000^{mmc}.

(**) Milímetro cúbico.. mmc. = 0^{mc},000000001.

Como lo vemos en este cuadro, cada una de estas unidades contiene 1000 veces á la que sigue, lo que, por medio de una figura, se demostraria fácilmente en jeometría. Pero podemos dar una idea de la demostracion. Consideremos una de las caras del metro cúbico que, por ser un metro cuadrado, puede descomponerse en 100 decímetros cuadrados (150); si, sobre cada uno de estos 100 decímetros cuadrados, colocamos 1 decímetro cúbico, llenaremos un espacio que tendrá por base 1 metro cuadrado y por altura 1 decímetro; espacio como este, habrá 10 en el metro cúbico y, por lo tanto, el metro cúbico contendrá 10 veces 100 decímetros cúbicos, esto es, 1000 decímetros cúbicos.

Por consiguiente es necesario no confundir *el décimo*, el *centésimo*, el *milésimo* del metro cúbico con el *decímetro cúbico*, el *centímetro cúbico* y el *milímetro cúbico*.

Así, 17^{mc},10492564 = 17^{mc} 104^{dmc}925^{cmc} y 640^{mmc}.

(*) *Cubo* (en jeometría) es un sólido terminado por seis caras que son todas cuadradas. Tiene la forma de un dado. — Se llama *arista*, en un cubo, á cada una de las doce líneas formadas por la interseccion de dos cuadrados.

(**) El milímetro cúbico es una superficie tan pequeña que muy escaso es el uso que se hace de ella.

159 — MEDIDAS DE SOLIDEZ. — Para medir la leña ó los trabajos de terraplenes se emplea el ESTÉREO *que equivale á un metro cúbico*. El estéreo no tiene mas que un solo múltiplo, el *decastéreo*, que vale 10 estéreos, y un solo sub-múltiplo, el *decistéreo*, que es la décima parte del estéreo y, por lo tanto, vale 100 decímetros cúbicos.

160 — A mas de estas medidas, la ley autoriza tambien el *medio decastéreo* que vale 5 estéreos y el *doble estéreo*.

161 — MEDIDAS DE CAPACIDAD. — La unidad principal para medir los líquidos y los granos es el LITRO que, bajo la forma cilíndrica, *tiene la misma capacidad que un decímetro cúbico*.

Las unidades secundarias son :

El Kilólitro..... Kl.	= 1000 litros.
Hectólitro.... Hl.	= 100 ¹
Decálitro..... Dl.	= 10 ¹
Litro	l. <i>Unidad principal.</i>
Decílitro..... dl.	= 0 ¹ ,1
Centilitro..... cl.	= 0 ¹ ,01
Mililitro..... ml.	= 0 ¹ ,001

162 — A mas de estas medidas, la ley autoriza aun el empleo de las medidas dobles ó mitades de aquellas. Así, tendremos el *doble litro* y el *medio litro* que vale *cinco decilitros*; el *doble decálitro* que vale *20 litros* y el *medio decálitro* que vale *cinco litros* y así sucesivamente.

163 — MEDIDAS DE PESO. — La unidad principal es el GRAMO. *El gramo es el peso, en el vacío, de un centímetro cúbico de agua destilada, á la temperatura que corresponde al maximum de densidad, 4 grados centígrados arriba del cero.*

Las unidades secundarias son :

El Kilógramo... Kg	= 1000 gramos.
Hectógramo. Hg	= 100 ^g
Decágramo.. Dg	= 10 ^g
Gramo	g <i>Unidad principal</i>
Decígramo... dg	= 0 ^g ,1
Centígramo.. cg	= 0 ^g ,01
Milígramo.... mg	= 0 ^g ,001

164 — A mas de estas medidas, la ley autoriza tambien, como para las medidas lineales y de capacidad, el empleo de las medidas dobles y mitades de aquellas.

Para las pesadas ordinarias, se emplea el gramo y sus múltiplos. Los sub-múltiplos del gramo suelen emplearse solamente en los laboratorios de física y de química, en las boticas para los metales preciosos.

Cuando se tiene que valuar pesas considerables, se toma por unidad el QUINTAL MÉTRICO ó *medida de 100 kilogramos* y la TONELADA MÉTRICA ó *medida de 1000 kilogramos*. El cargamento de los buques se valúa en toneladas.

165 — MONEDAS. — La principal unidad monetaria es el FRANCO para algunas naciones solamente. *El franco pesa cinco gramos y es una aligacion de 9 partes de plata (en peso) y una de cobre; la moneda corriente de Buenos Aires no puede sujetarse á un sistema tan invariable como el métrico (*)*.

II. Sistema antiguo.

Medidas que estaban en uso al plantearse el nuevo sistema métrico.

LINEALES.

166 —	La legua.....	=	40 cuadras ó 6000 varas.
	La cuadra.....	=	150 varas.
	La vara.....	=	3 piés.
	El pié.....	=	12 pulgadas.
	La pulgada....	=	12 líneas.
	La línea	=	12 puntos.

167 — En la práctica se divide tambien la vara en 4 *cuartas* ó *palmas* y en 3 *tercias*.

168 — AGRARIAS Y DE SUPERFICIE.

La legua cuadrada....	40^2	=	1600 cuadras cuadradas.
La cuadra cuadrada..	150^2	=	22500 varas cuadradas.

(*) Sarmiento — *Sistema métrico*.

- La vara cuadrada..... $3^2 = 9$ piés cuadrados.
 El pié cuadrado..... $12^2 = 144$ pulgadas cuadradas.
 La pulgada cuadrada $12^2 = 144$ líneas cuadradas.
 La línea cuadrada.... $12^2 = 144$ puntos cuadrados.

169 — DE VOLÚMEN.

- La vara cúbica..... $3^3 = 27$ piés cúbicos.
 El pié cúbico..... $12^3 = 1728$ pulgadas cúbicas.
 La pulgada cúbica... $12^3 = 1728$ líneas cúbicas.
 La línea cúbica..... $12^3 = 1728$ puntos cúbicos.

170 — DE CAPACIDAD PARA LÍQUIDOS.

- La pipa..... = 6 barriles ó 192 frascos.
 El barril = 32 frascos.
 El frasco..... = 2 medios.
 El medio..... = 2 cuartas.
 La cuarta..... = 2 octavas.

171 — En la práctica se divide tambien la pipa en 4 *cuarterolas*, y el barril en 4 *cuartillos*. La *cuarterola* vale pues 48 frascos y el *cuartillo* vale 8.

172 — A mas de estas medidas, suele emplearse algunas veces el *galon* que es algo mayor que el frasco. La *pipa tiene 120 galones* y el *barril tiene 20*. — 5 galones equivalen pues á 8 frascos.

La *Caneca*, que es la medida que usan los aguadores, equivale al *cuartillo* ; vale pues 5 galones ú 8 frascos.

173 — La medida de capacidad para los áridos ó granos es la FANEGA de 4 *cuartillas* y la de 8 *cuartillas*.

174 — DE PESO.

- La tonelada... = 20 quintales ú 80 arrobas ó 2000 libras.
 El quintal..... = 4 arrobas ó 100 libras.
 La arroba..... = 25 libras.
 La libra..... = 2 marcos ó 16 onzas.
 El marco = 8 onzas.
 La onza..... = 16 adarmes.
 El adarme..... = 36 granos.

175 — A mas de estas medidas, se usa tambien la PESADA, cuyo valor varia segun la naturaleza de los cueros que se trata de pesar :

La pesada de cueros secos es de	35 libras ;
La de los salados	60 id.
La de los carneros lavados.....	30 id.

176 —

DE TIEMPO.

El siglo	100 años.
El año	12 meses ó 365 dias (*).
El mes (comercial)...	30 dias (**).
El dia.....	24 horas.
La hora.....	60 minutos.
El minuto.....	60 segundos.

177 — Tambien es medida de tiempo la *semana* que tiene 7 dias ; el año contiene 52 semanas (***).

III. Ventajas del sistema métrico.

178 — Las ventajas mas notables del sistema métrico decimal sobre el antiguo son las siguientes :

1^a En el primero hay una sola medida de capacidad para áridos y para líquidos, mientras que en el segundo hay dos, sin motivo que justifique esta duplicidad.

2^a Las diferentes unidades del nuevo sistema dependen unas de otras, de modo que si algunas de ellas, por el trascurso del tiempo, sufren alguna alteracion, se calculará otra por medio de cualquiera de las demás, exactamente igual á la primitiva ; no sucediendo otro tanto en el sistema antiguo, donde la inconexion

(*) El verdadero valor del año es de 365 dias, 5 horas, 48 minutos y 47,5 segundos. De modo que de 4 en 4 años se forma uno de 366 dias, llamado *bisiesto*.

(**) Los meses *comunes* de Abril, Junio, Setiembre y Noviembre tienen 30 dias ; Febrero tiene 28 escepto en los años bisiestos que tiene 29 ; los 7 meses restantes tienen 31 dias cada uno.

(***) Estas medidas de tiempo se han conservado en el nuevo sistema.

entre las diferentes unidades hace imposible la resolución de igual problema.

3^a Las medidas del sistema métrico decimal tienen un tipo invariable en la naturaleza, de modo que, aunque todas variasen de valor, la longitud del cuadrante del meridiano bastaría para determinar otras, sin diferencia apreciable, iguales á las primitivas.

4^a Los múltiplos y sub-múltiplos, en el sistema nuevo, se forman de una manera idéntica en cada clase de medidas, multiplicando la unidad por 10, por 100 ó por 1000 para obtener los primeros, y dividiéndola por iguales números para obtener los segundos; cuando, en el sistema antiguo, la ley de formación es tan irregular como arbitraria, y difícil por lo tanto de conservar en la memoria.

5^a Acomodándose la formación del sistema métrico decimal á la numeración de este nombre, el cálculo con tales medidas es facilísimo comparado con el de los números complejos á que da lugar la irregularidad entre los múltiplos y sub-múltiplos del sistema antiguo.

IV. Conversion de las antiguas pesas y medidas á las nuevas y reciprocamente.

179 — Para poder reducir las medidas del antiguo sistema á las nuevas, se necesita conocer la relación en que están las respectivas unidades de cada medida.

Estas relaciones se consiguieron luego que se hubo tratado de adoptar en la República Argentina el nuevo sistema métrico decimal. Estas son las siguientes:

1 vara	=	0 ^m ,866
1 frasco	=	2 ^l ,375
1 libra	=	459 ^{gr} ,4
1 fanega	=	147 ^l ,272

Conocidas las relaciones de las unidades, es fácil determinar las de los múltiplos y sub-múltiplos de dichas unidades. Así se tendrá el valor del pie, dividiendo por 3 el valor de la vara; se conseguirá en seguida el valor de la pulgada, dividiendo por 12 el de pie y así sucesivamente. Del mismo modo obtendremos

los respectivos valores del marco, de la onza y del adarme dividiendo sucesivamente el valor de la libra por 2, este valor obtenido por 8 y en fin este nuevo valor por 16.

Los valores de los múltiplos, en medidas métricas, se obtendrán multiplicando los respectivos valores de las unidades por el número de veces que el múltiplo contiene á la unidad. Así la cuadra, valiendo 150 varas, el valor de la cuadra, en medidas métricas, será $0^m,866 \times 150 = 129^m,9$.

El barril, valiendo 32 frascos, su valor será :

$$21,375 \times 32 = 76 \text{ litros.}$$

180 — Así tendremos los cuadros siguientes :

1 legua	=	5196 metros.
1 cuadra	=	129 ^m ,9
1 pié	=	0 ^m ,288
1 pulgada	=	0 ^m ,024
1 línea	=	0 ^m ,002

1 pipa	=	456 litros.
1 cuarterola	=	114 ^l
1 barril	=	76 ^l
1 cuartillo	=	19 ^l
1 galon	=	3 ^l ,8
1 medio	=	1 ^l ,1875
1 cuarta	=	0 ^l ,59375
1 octava	=	0 ^l ,296875

1 tonelada	=	918800 gramos	=	918 ^{kil} ,8
1 quintal	=	45940 ^g	=	45 ^k ,94
1 arroba	=	11485 ^g	=	11 ^k ,485
1 onza	=	28 ^g ,7125		
1 marco	=	229 ^g ,7		
1 adarme	=	1 ^g ,907		
1 grano	=	0 ^g ,0529		

181 — Estos resultados permiten de referir á las medidas métricas una medida cualquiera del antiguo sistema.

Supongamos que se trata, por ejemplo, de valuar en metros una longitud de 259 varas, 1 pié, 5 pulgadas y 10 líneas. Multiplicaremos el valor de la vara en metros por 259, el del pié por 1, el de la pulgada por 5, el de la línea por 10, y sumaremos los resultados. Así encontraremos:

$$\begin{array}{rclcl}
 259 \text{ varas} & = & 0^m,866 \times 259 & = & 224^m,294 \\
 1 \text{ pié} & = & & = & 0,288 \\
 5 \text{ pulgadas} & = & 0^m,024 \times 5 & = & 0,12 \\
 10 \text{ líneas} & = & 0^m,002 \times 10 & = & 0,02 \\
 & & \text{Suma} & = & 224^m,722
 \end{array}$$

182 — Para facilitar los cálculos de conversion como este, se construye de una vez una tabla donde se encuentran los valores en metros de los diferentes números de leguas, cuabras, varas, piés, pulgadas y líneas desde 1 legua hasta 9 leguas, desde 1 cuadra hasta 9 cuabras etc.

Hé aquí esta tabla:

Tabla I para la conversion de las antiguas medidas lineales á las nuevas.

	LEGUAS	CUADRAS	VARAS	PIÉS	PULGADAS	LÍNEAS
	en:	en:	en:	en:	en:	en:
1	Miríametros	Kilómetros	Kilómetros	Metros	Metros	Metros
	1	1	1	0,0	0,0	0,0
	1	1	1	0,0	0,0	0,0
	1	1	1	0,0	0,0	0,0
2	Miríametros	Kilómetros	Kilómetros	Metros	Metros	Metros
	2	2	2	0,0	0,0	0,0
	2	2	2	0,0	0,0	0,0
	2	2	2	0,0	0,0	0,0
3	Miríametros	Kilómetros	Kilómetros	Metros	Metros	Metros
	3	3	3	0,0	0,0	0,0
	3	3	3	0,0	0,0	0,0
	3	3	3	0,0	0,0	0,0
4	Miríametros	Kilómetros	Kilómetros	Metros	Metros	Metros
	4	4	4	0,0	0,0	0,0
	4	4	4	0,0	0,0	0,0
	4	4	4	0,0	0,0	0,0
5	Miríametros	Kilómetros	Kilómetros	Metros	Metros	Metros
	5	5	5	0,0	0,0	0,0
	5	5	5	0,0	0,0	0,0
	5	5	5	0,0	0,0	0,0
6	Miríametros	Kilómetros	Kilómetros	Metros	Metros	Metros
	6	6	6	0,0	0,0	0,0
	6	6	6	0,0	0,0	0,0
	6	6	6	0,0	0,0	0,0
7	Miríametros	Kilómetros	Kilómetros	Metros	Metros	Metros
	7	7	7	0,0	0,0	0,0
	7	7	7	0,0	0,0	0,0
	7	7	7	0,0	0,0	0,0
8	Miríametros	Kilómetros	Kilómetros	Metros	Metros	Metros
	8	8	8	0,0	0,0	0,0
	8	8	8	0,0	0,0	0,0
	8	8	8	0,0	0,0	0,0
9	Miríametros	Kilómetros	Kilómetros	Metros	Metros	Metros
	9	9	9	0,0	0,0	0,0
	9	9	9	0,0	0,0	0,0
	9	9	9	0,0	0,0	0,0

Supongamos que, por medio de esta tabla, se quiera obtener el valor de 259 varas, 1 pié, 5 pulgadas y 10 líneas. La tabla da al momento los valores de 200 varas (2×100) de 50 varas (5×10), de 9 varas de 1 pié, de 5 pulgadas y de 10 líneas (1×10); bastará pues agregar todos estos resultados. Hé aquí el cálculo :

$$\begin{array}{rcl}
 200 \text{ varas} & = & 173^m, 2 \\
 50 \text{ «} & = & 43^m, 3 \\
 9 \text{ «} & = & 7^m, 794 \\
 1 \text{ pié} & = & 0^m, 288 \\
 5 \text{ pulgadas} & = & 0^m, 12 \\
 10 \text{ líneas} & = & 0^m, 02 \\
 & & \hline
 & & 224^m, 722
 \end{array}
 \quad (26)$$

Y encontramos el mismo resultado que anteriormente.

183—Todos los cálculos de conversion de las medidas antiguas á las medidas métricas se efectúan por medio de tablas análogas á la que acabamos de dar en el número anterior; el modo de obrar es demasiado sencillo para que sea necesario insistir mas; pero consideramos de utilidad colocar aquí las tablas de conversion relativas á las medidas de superficie, de volumen, de capacidad y de peso.

Tabla II para la conversion de las antiguas medidas de superficie á las nuevas.

	LEGUAS CUADRADAS en:	CUADRAS CUA- DRADAS en:	VARAS CUADRADAS en:	PIÉS CUADRA- DOS en:	PULGADAS CUADR. en:	LÍNEAS CUADR. en:
9	2699 Hectáreas.	46 Centiáreas.	0,95 Metros cuadr.	8 Decim. cuadr.	5 Centim. cuadr.	4 Milim. cuadr.
8	5399 Hectáreas.	32 Centiáreas.	1,41 Metros cuadr.	16 Decim. cuadr.	41 Centim. cuadr.	8 Milim. cuadr.
7	8099 Hectáreas.	48 Centiáreas.	2,12 Metros cuadr.	24 Decim. cuadr.	47 Centim. cuadr.	12 Milim. cuadr.
6	10799 Hectáreas.	64 Centiáreas.	2,82 Metros cuadr.	32 Decim. cuadr.	53 Centim. cuadr.	16 Milim. cuadr.
5	13499 Hectáreas.	80 Centiáreas.	3,53 Metros cuadr.	40 Decim. cuadr.	63 Centim. cuadr.	20 Milim. cuadr.
4	16199 Hectáreas.	96 Centiáreas.	4,24 Metros cuadr.	48 Decim. cuadr.	73 Centim. cuadr.	24 Milim. cuadr.
3	18898 Hectáreas.	112 Centiáreas.	4,95 Metros cuadr.	56 Decim. cuadr.	83 Centim. cuadr.	28 Milim. cuadr.
2	21598 Hectáreas.	128 Centiáreas.	5,66 Metros cuadr.	64 Decim. cuadr.	93 Centim. cuadr.	32 Milim. cuadr.
1	24298 Hectáreas.	144 Centiáreas.	6,37 Metros cuadr.	72 Decim. cuadr.	103 Centim. cuadr.	36 Milim. cuadr.

Tabla III, para la conversion de las antiguas medidas de volumen á las nuevas.

	VARAS CÚBICAS en:	PIÉS CÚBICOS en:	PULGADAS CÚB. en:	LÍNEAS CÚB. en:
Cantidades.	Metros cúbicos	Decim. cúbicos	Centim. cúbicos	Millim. cúbicos
1	0, 649	461	054	8
2	1, 298	923	108	16
3	1, 948	385	162	24
4	2, 597	847	216	32
5	3, 247	309	270	40
6	3, 896	771	324	48
7	4, 546	233	379	56
8	5, 195	695	433	64
9	5, 845	157	487	72

Tabla V, para la conversion de las antiguas medidas de peso en nuevas.

	TONELADAS	QUINTALES	ARROBAS	LIBRAS	ONZAS	ADARMES	GRANOS
	en:	en:	en:	en:	en:	en:	en:
Cantidades							
1	0 9 18,8	Quintales métr.	Kilógramos	Kilógramos	Gramos	Gramos	Gramos
2	1 3 37,6	45,9 4	Decágramos	Decágramos	Decigramos	Decigramos	Decigramos
3	2 7 56,4	91,8 8	22,9 7 0	9 1 8,8	57,4 2 5	1,9 0 7	0,4 0 6
4	3 6 75,2	1 37,8 2	34,4 5 5	1 3 7 8,2	86,1 3 8	3,8 1 4	0,1 0 6
5	4 5 94,0	1 83,7 6	45,9 4 0	1 3 3 7,0	143,8 5 0	5,7 2 1	0,1 5 9
6	5 5 12,8	2 29,7 0	57,4 2 5	2 2 9 7,0	143,8 5 0	7,6 2 8	0,2 1 3
7	6 4 31,6	2 75,6 4	68,9 1 0	2 7 5 6,4	172,2 7 5	9,5 3 5	0,2 6 8
8	7 3 50,4	3 21,5 8	80,3 9 5	3 2 2 1,5	200,9 8 8	11,4 4 2	0,3 1 5
9	8 2 69,2	3 67,5 2	91,8 8 0	3 6 7 5,2	229,7 0 0	13,3 4 9	0,3 7 1
		4 13,4 6	103,3 6 5	4 1 3 4,6	258,4 1 3	15,2 5 6	0,4 2 4
						17,1 6 3	0,4 7 7

Tabla VI, para la conversion de las pesadas en kilogramos.

Cantidades	Pesadas de á 35 libras en kilogramos.	Pesadas de á 60 libras en kilogramos.	Pesadas de á 30 libras en kilogramos.
1	16 ^k , 079	27 ^k , 564	13 ^k , 782
2	32, 158	55, 128	27, 564
3	48, 237	82, 692	41, 346
4	64, 316	110, 256	55, 128
5	80, 395	137, 820	68, 910
6	96, 474	165, 384	82, 692
7	112, 533	192, 948	96, 474
8	128, 632	220, 512	110, 256
9	144, 713	248, 076	124, 038

184 — *Advertencia.* — Estas tablas están dispuestas de modo que se pueda leer cada cifra por separado, dándole el nombre de la columna á que pertenece ó bien leer el número entero como un número decimal. Así, en la tabla IV, diremos 6 galones son iguales á 2 decálitros, 2 litros y 8 decálitros, ó bien 22 litros y 8 decilitros; 7 barriles = 5 hectólitros, 3 decálitros y 2 litros, ó bien 532 litros.

185 — Aunque haya decretado el gobierno el uso esclusivo del sistema métrico, no por eso se ha completamente abandonado el uso del antiguo sistema, y por lo tanto, en muchos casos es útil saber reducir las medidas nuevas á las antiguas.

Estas conversiones se harán de un modo idéntico á las anteriores una vez que se sepa en qué razon están las unidades del nuevo sistema con las del antiguo.

186 — El metro valiendo 1000 milímetros y la vara 866, la razon del metro á la vara será $1000 : 866$, lo que da, efectuando la division, 1,1547 con una pequeña fraccion que se puede despreciar. Eso significa que el metro es mayor que la vara en 0,1547 de vara.

Luego para transformar metros en varas, se necesita multiplicar el número de metros por la cantidad 1,1547.

Sea, por ejemplo, transformar 5^m,402 en varas y sub-múltiplos. Desde luego multipliquemos 5,402 por 1,1547, lo que nos dá 6^{varas},2376894. Los 5^m,402 valen pues 6 varas mas una fraccion decimal de vara. Si queremos determinar el número de piés, pulgadas, líneas y puntos que contiene esta fraccion decimal 0,2376894, multiplicaremos primeramente por 3 esta fraccion, lo que da : 0,7130682 ; este resultado indica que no hay piés ; para hallar las pulgadas, multipliquemos 0,7130682 por 12 y así encontramos 8,5568184, esto es 8 pulgadas y 0,5568184 de pulgada. Para las líneas tendremos :

$$0,5568184 \times 12 = 6 \text{ líneas}, 6818208$$

y enfin para los puntos :

$$0,6818208 \times 12 = 8 \text{ puntos}, 1818496$$

El resultado final es pues

5^m,402 = 6 varas, 0 piés, 8 pulgadas, 6 líneas, 8 puntos, mas una pequeña fraccion de puntos que se puede despreciar.

187— Este cálculo muy largo y todas las operaciones de la misma clase se ahorran por medio de la tabla siguiente :

Tabla VII, para reducir metros, múltiplos y sub-múltiplos á leguas, cuadradas, varas, pies, pulgadas, líneas y puntos.

MIRÍMETROS en :	KILÓMETROS en :	HECTÓME- TROS en :	DECÁME- TROS en :	METROS en :	DECIME- TROS en :	CENTÍME- TROS en :	MILÍME- TROS en :
Leguas	Leguas	Cuadradas	Varas	Pies	Varas	Pulgadas	Líneas
1 136147 110 241	α 7104 2 3 5 4	α 1151 5 0 6	114 7 8 5	1 0 5 6 10	α 4 144	α 5 0	α 6 0
3331450 8 510	α 15 59 1 6 10 2	1 80211 10	230 3 4 10	20 41 1 8	α 8 3 9	α 9 11	1 1 0
5301422 6 81	α 23 14 010 3 3	2 461 4 1 6	3411 1 4 4	34 4 8 6	α 1 0 5 8	1 2 11	1 1 6
7271401 441 9	α 30119 0 1 8 4	3 112 9 20	460 6 9 9 3	41 10 3 4	1 4 7 6	1 7 10	2 2 0
9241380 3 2 8	α 38 73 2 5 4 6	3 1271 2 2 6	572 2 6 3 3	52 310 2	α 1 8 8 5	2 5 9	2 6 0
11211352 4 5 7	1 6 28 1 8 6 7	4 922 7 30	69010 2 8	62 9 5 0	α 2 010 3	2 10 9	3 3 0
1318133011 8 6	113133 011 11 8	5 581 0 3 7	802 5 11 2	80 211 11	α 2 5 0 2	3 30 8	4 4 0
15151302 914 5	121 88 0 3 4 9	6 232 5 4 4	921 4 7 7	90 8 6 9	α 240 2 0	3 3 8	4 0 6
17121281 7 2 4	129 42 2 6 910	6133010 4 7	1032 9 4 0	101 2 1 7	1 0 2 341	3 3 8	4 4 6

Resolvamos, por medio de esta tabla el ejemplo anterior; dispondremos los cálculos del modo siguiente:

5 metros	=	5 varas	2 pies	3 pulgadas	10 líneas	2 puntos
0 ^m , 4	=	α	1 ^p .	4 ^p gs.	7 ^{ls}	6 ^{pts} .
0 ^m , 002	=	α	α	α	41	α
5 ^m , 402	=	6 varas	0 pies	8 pulgadas	6 líneas	8 puntos

188 — La razon del metro cuadrado á la vara cuadrada será el cuadrado de la razon del metro á la vara, esto es $(1,1547)^2 = 1,33333209$; y la razon del metro cúbico á la vara cúbica será $(1,1547)^3 = 1,539598564323$.

Luego: *para transformar metros cuadrados en varas cuadradas, se necesita multiplicar el número de metros cuadrados por la cantidad 1,33333209; y para reducir á varas cúbicas un cierto número de metros cúbicos, necesita multiplicarlo por 1,539598564323.*

En estos cálculos es necesario tener presente que para transformar la parte decimal en piés cuadrados ó en piés cúbicos se la multiplica por 3^2 esto es 9, ó por 3^3 esto es 27. Si queda aun una fraccion decimal y que se quiera hallar pulgadas cuadradas ó pulgadas cúbicas, en el primer caso, se multiplicará la parte decimal por $12^2 = 144$ y en el segundo por $12^3 = 1728$ y así sucesivamente para las líneas y puntos cuadrados ó cúbicos (*).

189 — Valiendo el kilógramo 1000 gramos y la libra 459,4, la razon del kilógramo á la libra será $1000 : 459,4$ ó bien $(2^o-97) 10000 : 4594 = 2,17675.....$ Luego...

Para transformar kilógramos en libras, se necesita multiplicarlos por la cantidad 2,17675.

Sea por ejemplo transformar 8 kil, 2046 en libras, onzas, adarmes y granos. — Hé aquí la série de los cálculos:

2,17675	0,85936305	0,9969408
8, 2046	16	36
13 06050	515617830	59816448
87 0700	85936305	29908224
4353 50	13,74980880	35,8898688
174140 0	16	
libras 17,859363050	44988528	
	7498088	
	adarmes 11,9969408	

Luego 8kil, 2046 = 17 libras, 13 onzas, 11 adarmes y 35 granos.

(*) Todos estos cálculos, como los siguientes, se simplifican por medio de tablas como la del N^o 187; pero hemos considerado de poca utilidad ponerlas en este tratado por ser muy escasos estos cálculos de conversiones. A mas de esto, en el capítulo siguiente, al tratar de los números complejos, volveremos sobre estas operaciones.

En este ejemplo se podría dispensar de buscar *granos* desde el momento en que se halla una fracción de adarme 0,9969408 que difiere muy poco de una unidad, y se aumenta entonces en 1 el número de adarmes hallados. Así podemos decir que muy aproximadamente $8^k,2046$ son iguales á 17 libras, 13 onzas y 12 adarmes.

190 — Valiendo el litro 1000 mililitros y el frasco 2375, la razón del litro al frasco será $1000 : 2375 = 0,421$. Luego...

Para transformar litros en frascos, se necesita multiplicarlos por la cantidad 0,421.

Así encontraríamos, haciendo los cálculos que
 $89^{\text{litros}}, 207 = 37^{\text{frascos}} y 2^{\text{cuartas}} = 1^{\text{barril}} 5^{\text{frascos}} 2^{\text{cuartas}}$
 y que $708^{\text{litros}} = 298^{\text{frascos}} = 1^{\text{pipa}} 3^{\text{barriles}} y 10^{\text{frascos}}$.

APLICACIONES.

— Tomando el metro por unidad, escribir las cantidades siguientes :

15 metros y 423 milímetros ; 1 metro y 12 milímetros ; 7 milímetros y 7 hectómetros ;
 8 decímetros y 5 centímetros.

— Escribir esta última cantidad tomando primero el decámetro por unidad y despues el kilómetro.

— Tomando el metro cuadrado por unidad, escribir las cantidades siguientes :

8 metros cuadr., 18 dmq., 5 cmq. y 47 mm q. ; 12 dmq., 7 mq. y 9 cmq. ; 127 mmq. ;
 27 hmq 8 dmq y 7 m.q.

— Escribir esta última cantidad, tomando por unidad el área.

— Tomando el metro cúbico por unidad, escribir las cantidades siguientes :

13 mc, 142 dmc y 907 cmc ; 7 mc, 42 dmc y 9 mmc ; 50 Dmc. 8 mc y 15 cmc.

— Escribir esta última cantidad, tomando por unidad : 1º el estéreo, 2º el decastéreo y 3º el decistéreo.

— ¿ Qué relacion hay entre la décima parte del metro cuadrado y el decímetro cuadrado ?

Respuesta.— Siendo el décimo cuadrado la centésima parte del metro cuadrado, la relacion será $10 : 100 = \frac{1}{10}$; es decir que la décima parte del metro cuadrado vale 10 decímetros cuadrados.

— ¿ Qué relacion hay entre el decistéreo y el decímetro cúbico ?

Respuesta.— El decistéreo equivale á 100 decímetros cúbicos.

— ¿Qué relacion hay entre el kilómetro cuadrado y el hectárea?

Respuesta. — El kilómetro cuadrado equivale á 100 hectáreas.

— ¿Cuántos hectólitros hay en un metro cúbico?

Respuesta. — El hectólitro vale 100 litros, esto es 100 decímetros cúbicos, el metro cúbico vale 1000, luego el metro cúbico valdrá tantas veces un hectólitro cuantas veces 100 esté contenido en 1000, esto es 10.

— ¿Cuál es en hectáreas la superficie de un cuadrado, cuyo lado es de 15 metros? — R. (2 hectáreas, 25).

— ¿En qué relaciones están el kilolitro y el metro cúbico; el hectolitro y el decistéreo; el milímetro y el centímetro cúbico? — R. (1).

— ¿Cuál es el peso de un litro lleno de agua destilada á $+4^{\circ}$?

Respuesta. — El litro tiene la capacidad de un decímetro cúbico, esto es de 1000 centímetros cúbicos; pero el peso de un centímetro cúbico lleno de agua destilada á $+4^{\circ}$ es de un gramo, luego 1 hectógramo de agua pesará 1000 gramos, ó bien sea 1 kilogramo.

— ¿Cuál es, en quintales métricos, el peso de 213 metros cúbicos de agua destilada? — R. (2130 quint. métricos).

— ¿Cuál es el peso de un doble hectólitro de agua y de un medio decálitro? — R. (1^o, 200 kil.; 2^o, 5 kilg.)

— La cadena de agrimensor es un doble decámetro; ¿cuál será en leguas métricas la distancia entre 2 puntos que se avalúa en 400 cadenas? — R. (2 leguas).

— ¿Cuántas leguas métricas tiene la circunferencia del globo? — R. 10000 leguas).

— ¿Cuál es, en kilogramos, el peso de 45^{mc}, 6782? — R. (45678^{kilogr.}, 2).

— Sabiendo que, á volúmen igual, el agua pesa 773 veces mas que el aire, se pregunta el peso de un litro de aire? — R. (1293^{gr}, 659).

— Sabiendo que, á volúmen igual, el agua pesa 8,427 veces menos que el cobre, se pregunta el peso del aire desalojado por 100 kilogramos de cobre?

Respuesta. — Si estos 100 kilógr. fuesen de agua, ocuparían un volúmen de 100 decímetros cúbicos, pero, siendo de cobre el volúmen será 8,427 veces menor ó $\frac{100}{8,427} = 11^{\text{dmc}}, 795$. El cobre desalojando un volúmen de aire igual á 11795 centímetros cúbicos, nos resta buscar el peso de este volúmen de aire. Este es $\frac{11795}{773} = 15^{\text{gr}}, 26$.

— Un cuerpo, en el aire, pierde una parte de su peso igual al peso del agua que desaloja; se pregunta ¿cuál será el peso de 1 kilogramo de cobre en el aire? — R. (999^{gr}, 8474).

— ¿Cuántas piezas de 1 franco se necesita para equilibrar el peso de un medio decílitro de agua? — R. (20 piezas).

— Para sembrar 1 hectárea, se necesita 204^{litros},8 de trigo; ¿cuántos metros cúbicos se necesitará para sembrar 1 kilómetro cuadrado? — R. (20^{mc},480)

— Se siembra en una chacra 20 kilogramos de semilla de alfalfa por hectárea; el hectólitro de esta semilla pesa 35 kilogramos, al precio de 1^{fr},25 el decálitro. ¿Cuál será el precio de la semilla necesaria para sembrar una chacra de 8 hectáreas y $\frac{2}{5}$?

Respuesta. — 60 francos.

— Se ha pesado el agua contenida en un vaso con 138 piezas de 1 franco. Espresar la capacidad del vaso en centímetros cúbicos.

Respuesta. — 690 centímetros cúbicos.

— La distancia del Retiro á Belgrano es de 72 cuabras y 28 varas. Espresar esta distancia en medidas métricas.

Respuesta. — Sabiendo que 1 cuadra = 129^m,9 y 1 vara 0^m,866, tendremos que multiplicar 129,9 por 72, 0,866 por 28 y reunir estos dos productos. Así tendremos:

$$\begin{array}{r} 129^m,9 \times 72 = 9352^m,8 \\ 0^m,866 \times 28 = 24^m,248 \end{array}$$

9377^m,048 será la distancia pedida.

— Reducir 2 piés 7 pulgadas 8 líneas y 6 puntos á medidas métricas.

Respuesta. — 0^m,762.

— Una quinta que tiene de superficie 3 cuabras cuadradas y 4 varas cuadradas, se ha vendido en 151875 \$. ¿A cuánto sale el metro cuadrado? — R. (á 3 \$).

— Calcular la cantidad de decímetros cúbicos contenida en 1 barril, sabiendo que la capacidad de 1 frasco es de 170 pulgadas cúbicas y 1080 líneas cúbicas.

Respuesta. — 76 decímetros cúbicos.

— Reducir 7 galones 5 frascos y 3 cuartas á litros.

Respuesta. — 37^{litros},88125.

— Reducir 8 pipas 5 barriles y 3 cuarterolas á hectólitros.

Respuesta. — 44 hectólitros y 7 decálitros.

— ¿Cuál es en toneladas métricas el cargamento de un buque que lleva 347 toneladas y 15 quintales de mercancías?

Respuesta. — 319 toneladas métricas,5327.

— Reducir 13 onzas, 7 adarmes y 8 granos á medidas métricas.

Respuesta. — 387^{gr},041.

— Reducir 85374^{ms},427 á medidas del antiguo sistema.

Respuesta. — 16 leguas, 17 cuabras, 36 varas, 1 pié, 5 pulgadas, 1 línea y 10 puntos.

— Reducir 9 hectáreas y 6 áreas en medidas antiguas.

Respuesta. — 5 cuabras cuads. 8307 varas cuds. 0 piés cuds. y 120 pulgadas cuds.

— Reducir 672 litros en frascos, múltiplos y submúltiplos.

Respuesta. — 1 pipa 2 barriles 26 frascos 1 cuarta y 1 octava.

CUESTIONARIO.

- ¿Qué es sistema métrico?
- ¿En qué año se emprendieron los primeros trabajos?
- ¿Cuántas palabras se han imaginado para designar las unidades principales? ¿Cuáles son?
- ¿Cómo se han formado los múltiplos? ¿Los submúltiplos?
- ¿Cuántas palabras se necesita para establecer la nomenclatura del sistema métrico?
- ¿Qué es metro?
- ¿Por qué el metro es medida invariable?
- ¿Cuáles son los múltiplos del metro? ¿Los sub-múltiplos?
- A mas de estas medidas ¿cuáles son las que la ley autoriza?
- ¿Cuántos kilómetros vale la circunferencia del meridiano terrestre?
- ¿Cómo se convierte un cierto número de unidades métricas en unidades del orden inmediato superior ó inferior?
- ¿Cuál es la unidad para las medidas itinerarias? — ¿Para las pequeñas distancias?
- ¿Qué es legua métrica?
- ¿Cuál es el valor de la legua terrestre? — ¿De la legua marina?
- Un grado del meridiano, cuántas tiene de las primeras? ¿y cuántas de las segundas?
- ¿Cuántos grados hay en un meridiano?
- ¿Qué es metro cuadrado? ¿cuadrado? ¿lado de un cuadrado?
- ¿Cuáles son los múltiplos del metro cuadrado? ¿los sub-múltiplos?
- ¿En qué relacion está una unidad de superficie con la inmediata inferior?
- ¿Qué es área? — hectárea? — centiárea?
- ¿Hay otros múltiplos ó submúltiplos de medidas agrarias?
- ¿Qué es metro cúbico? — cubo? — arista de un cubo?
- ¿Cuáles son los múltiplos del metro cúbico? — ¿los sub-múltiplos?
- ¿En qué relacion está una unidad de volúmen con la inmediata inferior?
- ¿Son iguales el decímetro cúbico y décimo del metro cúbico?
- ¿Qué es estéreo? ¿Para qué sirve?
- ¿Cuál es su múltiplo? Su sub-múltiplo?
- ¿Qué medidas hay á mas de estas?
- ¿Qué es litro?
- ¿Cuáles son los múltiplos del litro? ¿Los sub-múltiplos?
- ¿Cuáles son las medidas cuyo empleo autoriza la ley?
- ¿Qué es grano?
- ¿Cuáles son los múltiplos y los sub-múltiplos del gramo?

- ¿Qué es quintal? Tonelada métrica?
- ¿Qué otras medidas suelen emplearse?
- ¿En todas las pesadas, se toma el gramo por unidad?
- ¿Cuándo se toma el kilogramo? — ¿la tonelada métrica?
- ¿Qué es franco?
- ¿Cuál es su peso?
- ¿Esta unidad de moneda ha sido admitida por muchas naciones?
- ¿Cuál es la unidad lineal del antiguo sistema?
- ¿Cuáles son sus múltiplos y sub-múltiplos?
- ¿Cuál es la medida plana con sus múltiplos y sub-múltiplos?
- ¿Qué medidas se emplean para los volúmenes?
- ¿Para los líquidos?
- ¿Qué son cuarterola y cuartillo?
- ¿Qué es galon? ¿Cuántos galones hay en una pipa? ¿En un barril?
- ¿Qué es caneca?
- ¿Cuáles son las medidas de capacidad para los áridos ó granos.
- ¿Cuáles para el peso?
- ¿Qué es pesada? — ¿Cuántas clases hay?
- ¿Cuáles son las medidas de tiempo?
- ¿Cuál es el verdadero valor del año?
- ¿Cuáles son las ventajas del sistema métrico sobre el antiguo?
- ¿Cuál es el valor de la vara en metro? — Del frasco en litros? — de la libra en gramos?
- ¿Cómo se determinan los valores de los múltiplos y sub-múltiplos de estas unidades en medidas métricas?
- ¿Cuáles son estos valores?
- ¿Cómo se trasforman varas en metros?
- ¿Cómo se hace esta trasformacion por medio de una tabla?
- ¿Cómo se trasforman varas cuadradas en metros cuadrados? — ¿Varas cúbicas en metros cúbicos?
- ¿Cómo se trasforman frascos (múltiplos y sub-múltiplos) en litros (múltiplos y submúltiplos)?
- ¿Cómo se reducen las medidas antiguas de peso en nuevas?
- ¿De qué modo están dispuestas las tablas?
- ¿Cómo se consigue la razon del metro á la vara? — y por medio de una tabla?
- ¿Cómo se trasforman metros á varas?
- ¿Cómo se consigue la razon del metro cuadrado á la vara cuadrada? del metro cúbico á la vara cúbica?
- ¿Cómo se trasforman metros cuadrados á varas cuadradas? ¿metros cúbicos en varas cúbicas?

- ¿Cómo se consigue la razon del kilógramo á la libra?
- ¿Cómo se trasforman kilógramos en libras?
- ¿Cómo se consigue la razon del litro al frasco?
- ¿Cómo se trasforman libras en frascos?

CAPÍTULO OCTAVO.

Números concretos.

I. Preliminares.

191 — Hemos visto (Nº 6) que los números concretos se dividen en complejos é incomplejos; vamos á hacer conocer en este capítulo el cálculo de esta especie de números.

1º *Dado un número complejo, reducirlo á unidades de la menor especie.*

Convertir, por ejemplo, en segundos, el número complejo 128 días 14 horas 7 minutos y 3 segundos. Hé aquí los cálculos:

$$\begin{array}{r}
 128 \\
 24 \\
 \hline
 512 \\
 256 \\
 \hline
 3072 \\
 14 \\
 \hline
 3086 \dots \text{horas.} \\
 60 \\
 \hline
 185160 \\
 7 \\
 \hline
 185167 \dots \text{minutos.} \\
 60 \\
 \hline
 11110020 \\
 3 \\
 \hline
 11110023 \dots \text{segundos.}
 \end{array}$$

Se buscará primero el número de horas contenidas en 128 días, multiplicando 128 por 24 y se añadirá las 14 horas; se encontrará que $128^{\text{ds.}} 14^{\text{hs.}} = 3086$ horas.

Se convertirá entónces este número de horas en minutos, multiplicándole por 60 y se añadirá 7 minutos; se encontrará que $128^{\text{ds.}} 14^{\text{hs.}} 7^{\text{ms.}}$ valen 185167 minutos.

Entónces se convertirá este número de minutos en segundos, multiplicándolo por 60 y se agregará 3 segundos. Así se encontrará que $128^{\text{ds.}} 14^{\text{hs.}} 7^{\text{ms.}}$ y 3^{s} valen 11110023 segundos.

OTROS EJEMPLOS :

1º 5 varas + 2 piés + 7 pulgadas + 10 líneas = 2542 líneas.

2º 4 arrobas + 12 libras + 9 onzas = 1809 onzas.

192—Si el número complejo se compone de unidades del sistema métrico, su reduccion á unidades de la menor especie se consigue al momento.

Así 7 hectólitros 9 decálitros y 8 litros = 798 litros.

42 hectómetros cuds., 7 Dmq. y 15 mq. = 420715 metros cuadrados

193 — 2º Dado un número incomplejo, reducirlo á unidades de especie superior.

Tomemos por ejemplo 2325764 segundos. Puesto que 1 minuto vale 60 segundos, habrá en el número tantos minutos como veces 60 esté contenido en él y el resto de la division, si no es exacta, indicará el número de segundos. Así encontramos: 38762 minutos y 44 segundos.

Dividiendo en seguida 38762 por 60, tendremos el número de horas y el resto indicará el número de minutos. Así encontramos 646 horas y 2 minutos. Dividiendo enfín 646 por 24, el cociente indicará el número de días y el resto, el número de horas.

Hé aquí la disposicion de los cálculos.

2325764	60			
525	38762	60		
457	276	646	24	
376	362	166	26	 dias.
164	2	22		
44				
segundos	minutos	horas		

Resulta pues que 2325764 segundos = $26^{\text{ds.}} 22^{\text{hs.}} 2^{\text{ms.}}$ y $44^{\text{s.}}$

OTROS EJEMPLOS :

- 1º 5346 onzas = 3 quintales, 1 arroba, 9 libras y 2 onzas
 2º 1051 piés = 2 cuadras, 50 varas y 1 pié.
 3º 453gr, 27 = 4 hectogr. 5 decàgr. 3 gr. 2 decigr. y 7 centigramos.
 4º 43105968^{m.c.}, 007 = 43 Hmc. 105 Dmc. 968^{m.c.}, 7 dmc.

194 — 3º *Dado un número complejo reducirlo á incomplejo de especie superior.*

Convertir por ejemplo 0 día 11 horas y 40 minutos á fraccion de día.

Reduzcamos primero el complejo 11^{hs} y 40^{ms} á minutos, lo que dá 700 minutos. Pero 1 día = $24 \times 60^{\text{ms}} = 1440$ minutos, luego el intervalo de tiempo dado se espresará por la fraccion de día $\frac{700}{1440} = \frac{35}{72}$ y tendremos 0 día 11 horas 40 minutos = $\frac{35}{72}$ de día.

OTROS EJEMPLOS :

- 1º 2 piés 7 pulgadas 11 líneas = $\frac{385}{432}$ de vara.
 2º 7 libras 9 onzas y 4 adarmes = $\frac{1940}{6400} = \frac{97}{320}$ de arroba.

195 — 4º *Dado un número incomplejo, reducirlo á unidades de especie inferior.*

Convertir por ejemplo en minutos el número entero 5 horas. 1 hora vale 60 minutos, luego 5 horas valdrán 5 veces mas, esto es $5 \times 60 = 300$ minutos. Si quisiéramos reducirlo á segundos, multiplicáramos 300 por 60, y tendríamos 5 horas = 18000 segundos.

OTROS EJEMPLOS :

- 1º $\frac{4}{5}$ de arroba = $\frac{4}{5}$ de 25 libras = $\frac{4 \times 25}{5}$ libras = 20 libras.
 2º $\frac{4}{7}$ de vara = $\frac{4}{7}$ de 3 piés = $\frac{12}{7}$ de pié = 1 pié + $\frac{5}{7}$ de pié pero $\frac{5}{7}$ de pié = $\frac{5}{7}$ de 12 pulgadas = $\frac{60}{7}$ de pulgadas = 8 pulgadas + $\frac{4}{7}$ de pulgada ó $\frac{4}{7}$ de 12 líneas = $\frac{48}{7}$ de líneas = 6 líneas + $\frac{6}{7}$ de otra línea ó bien $\frac{6}{7}$ de 12 puntos = $\frac{72}{7}$ de puntos = 10 puntos + $\frac{2}{7}$ de punto. Luego...
 $\frac{4}{7}$ de vara = 1 pié + 8 pulgadas + 6 líneas + 10 puntos + $\frac{2}{7}$ de punto.
 3º $\frac{7}{8}$ de una vara cuadrada = 7 piés cuad. + 126 pulgadas cds.
 4º 0,75 de un barril = 4 frascos y 2 cuartas.

196 — II. Operaciones sobre los números complejos.

1º ADICION. — REGLA PRÁCTICA. *Se escriben los números unos debajo de otros de modo que se correspondan verticalmente las unidades de la misma especie. Se efectúa en seguida la suma de las unidades contenidas en cada columna empezando por la derecha y se añade á cada columna parcial las unidades de su especie que resulten de la suma anterior.*

días	horas	minutos	segundos	cuadras	váras	piés	pulgadas
15 ...	7	52	45	5	113 ...	1	9
29 ...	14	8	17	12	24 ...	0	11
	15	18	9	20	143 ...	2	6
45 ...	15	19	11	38	131 ...	1	14

2º SUSTRACCION. — REGLA PRÁCTICA. *Se escribe el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan verticalmente las unidades de la misma especie. En seguida, empezando por la derecha, se va restando sucesivamente las unidades de cada especie del sustraendo de las correspondientes en el minuendo. Cuando una sustraccion parcial es imposible, se añade á este minuendo una unidad de la especie superior inmediata, considerando luego al sustraendo parcial siguiente con una unidad mas.*

días	horas	minutos	segundos	cuadras	varas	piés	pulgadas
29 ...	14	8	17	12	24 ...	0	11
15 ...	7	52	45	5	113 ...	1	9
14 ...	6	15	32	6	60 ...	2	2

3º MULTIPLICACION. Hay dos casos que considerar, 1º *multiplicar un número complejo por un incomplejo*; 2º *multiplicar un número cualquiera por otro complejo*.

1er Caso. — REGLA PRÁCTICA. *Se multiplica sucesivamente por el multiplicador las unidades de diferentes especies del multiplicando, principiando la operacion por la especie inferior, á fin de que si de algun producto parcial resultan unidades de la especie superior siguiente, se reserven para agregarlas al producto de estas.*

EJEMPLO: ¿Cuánto pesarán 72 fanegas de trigo, habiendo pesado 3 arrobas, 5 libras y 4 onzas una fanega?

La operacion se dispone como sigue:

3 arrobas 5 libras 4 onzas
72

116 arrobas 360 libras 288 onzas
ó bien 231 arrobas 3 libras 0 onzas

2º Caso. — REGLA PRÁCTICA. — *Para multiplicar un número cualquiera por otro complejo, se reduce el multiplicador á incomplejo de aquella unidad cuyo valor es el multiplicando, y queda este caso reducido al anterior.*

EJEMPLO. — *Si una vara de tela vale 6 pesos, ¿cuánto valdrán 5 varas, 2 piés y 6 pulgadas?*

Reduciendo el multiplicador á incomplejo de vara (193) se convierte en $\frac{240}{360}$; luego tendremos :

6 pesos $\times$ (5 varas, 2 piés, 6 pulgadas) = $6 \times \frac{240}{360} = 35$ pesos.

ADVERTENCIA. — *Cuando los dos factores son complejos, ambos se reducen á incomplejos y se multiplican como estos.*

MÉTODO DE LAS PARTES ALÍCUOTAS. — EJEMPLO I. *¿Cuánto pesarán 45 fanegas de trigo, habiendo pesado 3 arrobas 6 libras y 10 onzas una fanega?*

El cálculo se dispone del modo siguiente :

	3 arrobas ... 6 libras ... 10 onzas
	45
Producto por 3 arrobas	135 arrobas
— por $\frac{1}{5}$ de arroba ó sean 5 libras...	9
— por $\frac{1}{5}$ de 5 libras ó sea 1 libra...	1 20 libras
— por $\frac{1}{2}$ de 1 libra ó sean 8 onzas.....	22 8 onzas
— por $\frac{1}{4}$ de 8 onzas ó sean 2 onzas	5 10 onzas
Resultado	146 arrobas ... 23 libras ... 2 onzas

EJEMPLO II. *Hallar el peso de una barra de hierro de 5 varas 2 piés 7 pulgadas, pesando cada pié de dicha barra 3 quintales 2 arrobas y 1 libra.*

Si un pié, pesa	3 quintales 2 arrobas 1 libra
5 varas y 2 piés ó sean 17 piés	
pesarán	59 2 17 0 onzas
6 pulgadas ó $\frac{1}{2}$ pié	1 3 0 8
1 pulgada ó $\frac{1}{6}$ de 6 pulgadas.....	0 1 4 4
Luego el peso total de la vara será	61 quintales 2 arrobas 21 libras 12 onzas

ARIT.

8

4º DIVISION. — En la division hay tambien dos casos que considerar: 1º *dividir un número complejo por otro incomplejo*; 2º *dividir un número cualquiera por otro complejo*.

1er Caso. — REGLA PRÁCTICA. *Se dividen sucesivamente las diferentes especies de unidades del dividendo por el divisor (siendo este de distinta naturaleza) empezando por las unidades de especie superior, á fin de que si, en alguna division parcial, resulta residuo, se reduzca á la especie inmediata inferior, y se sume con las unidades que de esta haya en el dividendo, para formar el dividendo parcial siguiente.*

EJEMPLO: Dividir 208 días 16 horas 28 minutos 16 segundos por 12.

$$\begin{array}{r}
 208^{\text{d}} \dots 16^{\text{h}} \dots 28^{\text{m}} \dots 16^{\text{s}} \quad | \quad 12 \\
 4^{\text{d}} \text{ ó } 96^{\text{h}} \quad | \quad 17^{\text{d}} \dots 9^{\text{h}} \dots 22^{\text{m}} \dots 21^{\text{s}} \frac{4}{3} \\
 \hline
 112 \\
 4^{\text{h}} \text{ ó } 240^{\text{m}} \\
 \hline
 268 \\
 28 \\
 4^{\text{m}} \text{ ó } 240 \\
 \hline
 256 \\
 16 \\
 4
 \end{array}$$

208 dividido por 12 da 17 de cociente y queda 4 días ó 96 horas. Sumando 16 y 96, se divide la suma 112 por 12, etc.

2º Caso. — REGLA PRÁCTICA. — *Para dividir un número cualquiera por otro complejo (de distinta naturaleza), se reduce el divisor á incomplejo de aquella unidad cuyo valor se vá á determinar, y quedá este caso reducido al anterior.*

EJEMPLO. — 5 barriles y 16 frascos de vino costaron 3496 pesos y 5 reales ¿á cómo costó el barril? (*)

Reduciendo el divisor á incomplejo de barril (193) se convierte en $\frac{476}{32}$ de barriles; luego tendremos:

$$(3496 \text{ pesos } 5 \text{ reales}) : \frac{476}{32} = (3496 \text{ pesos } 5 \text{ rls}) \times 32 : 476 = 635\frac{1}{2} \text{ } 6^{\text{rs}}$$

(*) El peso papel vale 8 reales.

APLICACIONES.

— Reducir 5 quintales, 10 libras y $4\frac{1}{2}$ onzas á incomplejo de su especie inferior. — R. (8164,5 onzas).

— Reducir 72 hectáreas 3 áreas y 22 centiáreas á unidades de la menor especie. — R. (72000322 centiáreas).

— Reducir 542 pulgadas á unidades de especie superior.

Resultado. — 15 varas 0 pié y 2 pulgadas.

— Reducir 1 pié 9 pulgadas 10 líneas y 8 ptos. á unidades de especie superior.

Resultado. — $\frac{2912}{5184}$ de varas ó bien $\frac{2912}{1728}$ de pié.

— Reducir $\frac{3}{4}$ de vara á unidades de especie inferior.

Resultado. — 2 piés 3 pulgadas.

— Sumar 13 dias, 7 horas y 4 minutos; con 2 dias, 18 horas y 13 minutos; con 10 dias, 20 horas y 36 minutos.

Resultado. — 26 dias... 21 horas.... 53 minutos.

— ¿Qué edad tenia en 13 de febrero de 1871 un sujeto que nació en 10 de octubre de 1781?

Respuesta. — 89 años, 4 meses y 3 dias.

— 17 pares de mulas emplearon 18 horas y 36 minutos en trasportar cierto número de fanegas de trigo. Para trasportar el mismo número de fanegas, ¿cuánto tiempo necesitará un par de mulas?

Respuesta. — 316 horas, 12 minutos.

— Un móvil recorre en una hora, con movimiento uniforme 13 varas, 2 piés, 5 pulgadas y 6 líneas; ¿qué espacio recorrerá, sujeto á iguales condiciones, en 20 horas, 36 minutos y 20 segundos?

Respuesta. — 284 varas, 2 piés, 3 pulgadas y $3\frac{1}{6}$ líneas.

— Un móvil anda en un minuto $50\frac{3}{4}$ varas, ¿cuánto andará con igual velocidad en 10 minutos y 25 segundos?

Respuesta. — 528 varas... 1 pié... 11 pulgadas, 3 líneas.

— Un par de mulas empleó 316 horas y 12 minutos en trasportar una cantidad de trigo; para trasportar la misma cantidad, ¿cuánto tiempo necesitarán 17 pares de mulas? — R. (18 horas, 36 minutos).

— Si en 1 día 10 horas 10 minutos, se han construido 1000 varas y 2 piés de tela, ¿cuántas varas corresponden á una hora de trabajo? — R. (29 varas 10,3 pulgadas).

CUESTIONARIO.

¿Cómo se reduce un número complejo á incomplejo de su especie inferior?

— ¿á incomplejo de su especie superior?

¿Cómo se reduce un número incomplejo á complejo de especie superior? —

¿á complejo de especie inferior?

¿Cómo se suman los números complejos?

¿Cómo se restan?

¿Cuántos casos hay en la multiplicación de los números complejos? — ¿cuáles son?

¿Cómo se multiplica un número complejo por otro incomplejo? — ¿Un número incomplejo por un complejo?

¿Cómo se multiplican entre sí dos números complejos?

¿En qué consiste el método de las partes alícuotas?

¿Cuántos casos hay en la división de los números complejos? — ¿Cuáles son?

¿Cómo se dividen entre sí dos números complejos?

CAPÍTULO OCTAVO.

Potencias y raíces.

I. Elevación á potencias.

197 — La elevación de un número entero ó fraccionario á una potencia cualquiera, se reduce, segun la definicion de esta (72) á la multiplicación del número dado por sí mismo una ó mas veces. Conocidas pues las reglas de la multiplicación de los números, la operación indicada no puede tener ninguna dificultad.

EJEMPLOS :

$$1^{\circ} \quad 30^2 = 30 \times 30 = 900$$

$$2^{\circ} \quad 30^3 = 30 \times 30 \times 30 = 30^2 \times 30 = 900 \times 30 = 27000$$

$$3^{\circ} \quad 0,05^2 = 0,05 \times 0,05 = 0,0025$$

$$4^{\circ} \quad 0,05^3 = 0,05 \times 0,05 \times 0,05 = 0,05^2 \times 0,05 = 0,000125$$

$$5^{\circ} \quad \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36}$$

$$6^{\circ} \quad \left(\frac{23}{7}\right)^3 = \left(\frac{23}{7}\right)^2 \times \frac{23}{7} = \frac{23}{7} \times \frac{23}{7} \times \frac{23}{7} = \frac{23^2}{7^2} \times \frac{23}{7} = \frac{23^3}{7^3} = \frac{12167}{343}$$

198 — De la naturaleza de la elevación á potencias se deducen las siguientes consecuencias comprobadas por los ejemplos precedentes :

1^a *El cuadrado de un número que termina en ceros tiene duplo número de ceros que el dado, y el cubo, triple número de ceros, (ejemp. 1^o y 2^o).*

2ª El cuadrado de un número decimal tiene duplo número de cifras decimales que el dado y el cubo, triple número de decimales (ejemp. 3º y 4º).

3ª Para elevar un quebrado ordinario á una potencia cualquiera, se eleva á esta potencia su numerador y su denominador (ejemp. 5º).

4ª Para elevar un número misto á una potencia cualquiera, se reduce á quebrado y luego se eleva como este (ejemp. 6º).

199 — El cuadrado de la suma indicada de dos números se compone del cuadrado del primero, mas el doble producto del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo.

Este principio resulta de la multiplicacion siguiente :

$$\begin{array}{r}
 7 + 5 \\
 7 + 5 \\
 \hline
 \text{Producto de } (7 + 5) \text{ por } 7 \dots\dots\dots 7^2 + 7 \cdot 5 \\
 \text{— de } (7 + 5) \text{ por } 5 \dots\dots\dots 7 \cdot 5 + 5^2 \\
 \hline
 (7 + 5)^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \times 5 + 5^2
 \end{array}$$

De este principio resulta que : el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades consta del cuadrado de las decenas, mas el doble producto de las decenas por las unidades, mas el cuadrado de las unidades.

200 — La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es igual al duplo del menor mas 1.

Efectivamente, siendo 7 y 8 dos números consecutivos tendremos $8 = 7 + 1$ y por lo tanto :

$$8^2 = (7 + 1)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 1 + 1^2$$

y simplificando, notando que $1^2 = 1$

$$(7 + 1)^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 + 1$$

haciendo pasar 7^2 al primer miembro (102) tendremos

$$(7 + 1)^2 - 7^2 = 2 \cdot 7 + 1$$

$$\text{ó bien} \quad 8^2 - 7^2 = 2 \cdot 7 + 1$$

201 — El cubo de la suma indicada de dos números, se compone del cubo del primero, mas el triple producto del cuadrado

del primero por el segundo, mas el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, mas el cubo del segundo.

Efectivamente $(7 + 5)^3 = (7 + 5)^2 \times (7 + 5)$

$$\text{ó bien} \quad 7^2 + 2 \cdot 7 \times 5 + 5^2$$

$$7 + 5$$

$$\begin{array}{r} 7^3 + 2 \cdot 7^2 \times 5 + 7 \times 5^2 \\ 7^2 \times 5 + 2 \cdot 7 \times 5^2 + 5^3 \end{array}$$

y por consiguiente $(7 + 5)^3 = 7^3 + 3 \cdot 7^2 \times 5 + 3 \cdot 7 \times 5^2 + 5^3$

202 — De este principio resulta que: *el cubo de un número compuesto de decenas y unidades consta del cubo de las decenas, mas el triple producto del cuadrado de las decenas por las unidades, mas el triple producto de las decenas por el cuadrado de las unidades, mas el cubo de las unidades.*

203 — *La diferencia entre los cubos de dos números consecutivos es igual al triple cuadrado del menor, mas el triple del menor, mas 1.*

Del mismo modo que en el N° 199 demostraríamos que :

$$8^3 - 7^3 = 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 1$$

II. Raiz cuadrada.

204 — *RAIZ CUADRADA de un número es otro número que elevado al cuadrado reproduce el dado.*

Así la raiz cuadrada de 64 es 8 porqué $8^2 = 64$

La estraccion de raices se indica con este signo $\sqrt{\quad}$ al que se da el nombre de radical, entre cuyas ramas se coloca un número llamado *índice de la raiz* que indica el grado de esta ; esceptuando la estraccion de la raiz cuadrada, que se acostumbra á indicar con solo el signo radical omitiendo el índice 2 que le corresponde.

Así la raiz cuadrada de 64 se escribirá $\sqrt{64}$ y raiz cúbica del mismo número se pintará $\sqrt[3]{64}$

205 — Hay dos casos que considerar en la estraccion de la raiz cuadrada de los números: 1° *que el número no pase de 100;* 2° *que sea mayor que 100.*

206 — 1^{er} Caso. — Este caso se resuelve, sabiendo de memoria los cuadrados de los diez primeros números, Hélos aquí :

Números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Cuadrados 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

La raíz cuadrada de cada número del segundo renglon es su correspondiente en el primero.

Así $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{81} = 9$ á mas $\sqrt{55} = 7$ porque 55 está comprendido entre 49 y 64 y que 49 es por consiguiente el mayor cuadrado contenido en 55.

207 — 2^o Caso. — *Para estraer la raíz cuadrada de un número mayor que 100, se divide, principiando por la derecha, en secciones de á 2 cifras, pudiendo la última seccion no constar mas que de una sola cifra. Se halla la raíz del mayor cuadrado contenido en la primera seccion á la izquierda y esta será la cifra de orden superior de la raíz. El cuadrado de esta cifra se resta de dicha primera seccion. Se une al resto, si hay, la seccion siguiente, separando del número así formado la cifra de la derecha y dividiendo lo que queda á la izquierda por el duplo de la cifra hallada; el cociente entero será la segunda cifra de la raíz ó mayor que ella. Necesita comprobar esta cifra y por eso se la escribe á la derecha del divisor, y se multiplica el número resultante por la misma cifra. Si el producto puede restarse del número formado por el dividendo en union con la cifra que se separó, la cifra hallada es buena; sinó, es grande, se le rebaja una unidad, sometiendo la cifra que resulte á igual comprobacion que la anterior.*

Al lado del resto de esta sustraccion se escribe la seccion siguiente; se separa la cifra de la derecha con un punto; se divide lo que queda á la izquierda por el duplo de la raíz hallada, y el cociente, despues de sometido á comprobacion, será la tercera cifra de la raíz. De este modo se continúa hasta que se haya bajado la última seccion á la derecha.

EJEMPLO. — Estraer la raíz cuadrada de 1369

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{13.69} & 37 \\ 9 & 67 \\ \hline 46.9 & 7 \\ 469 & 469 \\ \hline 0 & \end{array}$$

El mayor cuadrado contenido en 43 es 9 cuya raíz cuadrada es 3; luego 3 es la primera cifra de la raíz. Al lado del resto 4, hemos escrito la segunda sección 69 y apartado la última cifra. El duplo de la raíz es 6 y el cociente de 46 por 6 es 7. Comprobamos esta cifra escribiéndola al lado del 6 y multiplicando el número así formado 67 por la misma cifra 7. El producto de esta multiplicación restándose exactamente del número 469, se deduce que la cifra 7 es buena; y como en el ejemplo dado no hay mas sección que bajar, 37 es la raíz cuadrada exacta del número dado. Vemos al mismo tiempo que el número de cifras de la raíz es igual al de secciones formadas.

OTROS EJEMPLOS :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{5.36.49} & 231 \\ 4 & 43 \quad 461 \\ \hline 13.6 & 3 \quad 1 \\ 129 & 129 \quad 461 \\ \hline 74.9 & \\ 461 & \\ \hline 288 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{25.80.69} & 508 \\ 25 & 1008 \\ \hline 08.06.9 & 8 \\ 8064 & 8064 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Luego $\sqrt{53649} = 231$ y $\sqrt{258069} = 508$ ambas con un resto.

208 — Del N° 199 se deduce que el mayor valor que puede tener el resto de la raíz cuadrada de un número es de ser duplo de esta raíz; porque si fuera igual al duplo mas 1, la raíz tendría una unidad mas.

III. Raíz cúbica.

209 — *RAÍZ CÚBICA de un número es otro número que elevado al cubo ó tercera potencia reproduce el dado.*

Así la raíz cúbica de 125 es 5 porque $5^3 = 125$.

210 — Hay dos casos que considerar en la extracción de la raíz cúbica de los números enteros: 1° *que el número no pase de 1000*; 2° *que sea mayor que 1000*.

211 — *1er Caso.* — Este caso se resuelve, sabiendo de memoria los cubos de los diez primeros números. Hélos aquí:

Números. — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Cubos. — 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

Cada número del primer renglon es la raíz cúbica del correspondiente en el segundo.

Así $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{216} = 6$ y tambien $\sqrt[3]{200} = 5$, siendo 200 comprendido entre 125 y 216 y por consiguiente 125 el mayor cubo contenido en 200.

212 — 2º Caso. — Para estraer la raíz cúbica de un número mayor que 1000, se lo divide, principiando por la derecha, en secciones de á tres cifras, pudiendo la última seccion no tener mas que una ó dos cifras. Se halla la raíz cúbica de la primera seccion de la izquierda, y esta será la cifra de orden superior de la raíz. El cubo de esta cifra se resta de dicha primera seccion, se une al resto la seccion siguiente, separando del número asi formado las dos cifras de la derecha, y dividiendo lo que queda á la izquierda por el triple cuadrado de la cifra encontrada, el cociente será la segunda cifra de la raíz ó mayor que ella. La cifra que se acaba de determinar se comprueba formando las otras tres partes del cubo, á saber: triplo cuadrado de la primera cifra por la segunda, triplo de la primera por el cuadrado de la segunda y cubo de la segunda; se suman estas tres partes, y la suma se resta del número formado por el dividendo anterior y las dos cifras separadas.

Si la sustraccion puede verificarse, la cifra hallada es buena; si es grande se le rebaja una unidad, sometiendo la cifra que resulta á igual comprobacion que la anterior.

Al lado del resto de esta sustraccion se pone la seccion siguiente: se separan las dos cifras de la derecha con un punto, se divide lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raíz hallada, y el cociente, despues de sometido á comprobacion, será la tercera cifra de la raíz. De este modo se continúa hasta que se haya bajado la última seccion á la derecha.

EJEMPLO. — Estraer la raíz cúbica de 592704.

$\sqrt[3]{592.704}$	84	
512	192	$= 3 \times 8^2$
807.04	4	$= \text{cociente de } 807 \text{ por } 192$
80704	76800	$= 3.8^2 \times 4$
0	3840	$= 3.8 \times 4^2$
	64	$= 4^3$
	80704	

El mayor cubo contenido en 592 es 512, luego 8 es la primera cifra de la raíz. Al lado del resto 80, hemos escrito la segunda seccion 704 y apartado las 2 últimas cifras. El triple cuadrado de 8 es 192; el cociente de 807 por 192 es 4. Comprobamos esta cifra, formando, las tres partes; 1ª 76800 que es el triple cuadrado de la primera cifra 8 por la segunda 4 y, como ha de espresar centenas, le hemos agregado 2 ceros; 2ª 3840 que es el triple de la primera 8 por el cuadrado de la segunda 4 y á la que hemos agregado un cero por que espresa decenas, y en fin 3ª, 64 el cubo de las unidades. Como la suma de estas tres partes se resta exactamente del número 80704, se deduce que la cifra 4 es buena y es la segunda de la raíz; y como en el ejemplo dado, no hay mas seccion que bajar, 84 es la raíz cúbica exacta del número dado.

Notaremos tambien, como en la raíz cuadrada, que el número de cifras de la raíz es igual al de secciones formadas.

OTROS EJEMPLOS.

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt[3]{1.906.624} & 124 \\
 \hline
 1 & 3 \quad 432 \dots\dots\dots 432 = 3 \cdot 12^2 \\
 \hline
 09.06 & 2 \quad 4 \dots\dots\dots 3^a \text{ cifra de la raíz.} \\
 \hline
 728 & 600 \quad 172800 \dots\dots\dots = 3 \cdot 120^2 \times 4 \\
 \hline
 1786.24 & 120 \quad 5760 \dots\dots\dots = 3 \cdot 120 \times 4^2 \\
 \hline
 178624 & 8 \quad 64 \dots\dots\dots = 4^3 \\
 \hline
 0 & 728 \quad 178624 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt[3]{27.981.616} & 303 \\
 \hline
 27 & 2700 \dots\dots\dots = 3 \times 30^2 \\
 \hline
 09.816.16 & 3 \dots\dots\dots 3^a \text{ cifra de la raíz.} \\
 \hline
 818127 & 810000 \dots\dots\dots 3 \cdot 300^2 \times 3 \\
 \hline
 63489 & 8100 \dots\dots\dots 3 \cdot 300 \times 3^2 \\
 \hline
 & 27 \dots\dots\dots 3^3 \\
 \hline
 & 818127 \\
 \hline
 \end{array}$$

Luego $\sqrt[3]{1906624} = 124$ exactamente y $\sqrt[3]{27981616} = 303$ mas un resto.

213 — Del N° 202 se deduce que el mayor valor que puede tener el resto de la raíz cúbica de un número es de ser igual á 3 veces el cuadrado de la raíz, mas tres veces la raíz, porque si tuviera una unidad mas, la raíz seria tambien mayor en 1.

APLICACIONES.

— Formar los cuadrados de los números 45; 104; 3,926; 0,04; $\frac{3}{7}$; $\frac{3}{4}$; $9\frac{2}{11}$.

— Formar los cubos de los mismos números.

— Hallar la diferencia entre los cuadrados de los dos números 26 y 27.

— Hallar la diferencia entre los cubos de los mismos números.

— Extraer la raíz cuadrada de los números 47006; 9050049; 1234567890.

— Extraer la raíz cúbica de los números 78060504; 1180543; 9087654321.

— 27 es la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos, ¿cuáles son estos números?

Respuesta. — Siendo la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos igual al duplo del menor mas 1, $27 - 1$ ó 26 será el duplo del menor. Los dos números buscados serán pues 13 y 14.

— ¿Qué cantidad necesita agregar al cuadrado de 32 para tener el de 33?
R. — (65).

— ¿Qué cantidad necesita agregar al cubo de 12 para tener el de 13?
R. — (469).

— Si dos números son el uno duplo del otro y el producto de ambos es 50 ¿cuáles son estos números? R. — (5 y 10).

CUESTIONARIO.

¿Cuántos ceros tendrá el cuadrado de un número que termina en 3 ceros?
— ¿Cuántos tendrá el cubo?

¿Cuántas cifras decimales tendrá el cuadrado de un número que tiene 4 cifras decimales? — ¿Cuántas tendrá el cubo?

¿Cómo se eleva un quebrado al cuadrado? — ¿Al cubo?

¿Cómo se eleva un número misto á una potencia cualquiera?

¿De qué se compone el cuadrado de una suma indicada de dos números?

— ¿De un número compuesto de decenas y unidades?

¿A qué es igual la diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos?

¿De qué se compone el cubo de una suma indicada de dos números? —

¿De un número compuesto de decenas y unidades?

¿A qué es igual la diferencia de los cubos de dos números consecutivos?

- ¿Qué es raíz cuadrada? — ¿Cómo se indica?
- ¿Cuántos casos hay en la estraccion de la raíz cuadrada?
- ¿Cómo se estrae la raíz cuadrada de un número menor que 100?
- ¿Cómo se estrae la raíz cuadrada de un número cualquiera? — Enunciar la regla jeneral.
- ¿Cuántas cifras hay en la raíz?
- ¿Cuál es el mayor valor del resto?
- ¿Qué es raíz cúbica? — ¿Cómo se indica?
- ¿Cuántos casos hay en la estraccion de la raíz cúbica?
- ¿Cómo se estrae la raíz cúbica de un número menor que 1000? — De un número cualquiera? Enunciar la regla jeneral.
- ¿Cuántas cifras hay en la raíz?
- ¿Cuál es el valor máximo del resto?

CAPÍTULO NOVENO.

Razones, proporciones y problemas.

I. Razones.

214 — Se llama RELACION ó RAZON el resultado de la comparacion de dos números de la misma especie.

Esta comparacion puede conseguirse por sustraccion ó por division segun se quiere conocer la diferencia ó el cociente de estos dos números.

En este compendio nos ocuparemos tan solo de la segunda especie de razon: la razon entre 48 y 12 es $\frac{48}{12}$ ó 4; la entre 15 y 7 es $\frac{15}{7}$ ó $2\frac{1}{7}$; la entre 2 y 5 es $\frac{2}{5}$. Se vé que la relacion entre dos números puede ser un número entero, un número misto ó un quebrado.

215 — Los dos números se llaman los dos términos de la razon; el primer término se llama *antecedente*; el segundo *consecuente*.

216 — Considerando una razon como un quebrado, se le puede aplicar los principios de las fracciones; de modo que *an-
tecedente*, *numerador* y *dividendo* son palabras idénticas, así como lo son las palabras *consecuente*, *denominador* y *cociente*.

II. Proporciones.

217 — Se llama PROPORCION á la igualdad de dos razones.

Así los cuatro números 24, 8, 21 y 7 forman la proporcion $\frac{24}{8} = \frac{21}{7}$ que se puede escribir $24 : 8 :: 21 : 7$ y se enuncia 24 es á 8 como 21 es á 7.

218 — El primer término 24 y el cuarto 7 son los *estremos*; el segundo término 8 y el tercero 21 son los *medios*.

219 — Cuatro cantidades 24, 8, 21, 7 son *directamente pro-
porcionales*, cuando la razon $\frac{24}{8}$ de la primera á la segunda es igual á la razon $\frac{21}{7}$ de la tercera á la cuarta.

220 — Cuatro cantidades 24, 8, 7, 21 son *inversamente pro-
porcionales*, cuando la razon $24 : 8$ de la primera á la segunda es igual á la razon $21 : 7$ de la cuarta á la tercera.

221 — Una cantidad es *cuarta proporcional* á otras tres can-
tidades, cuando es igual al cuarto término de una proporcion
cuyos tres primeros términos son estas cantidades.

222 — Una proporcion se llama *continua*, cuando los dos me-
dios son iguales; por ejemplo $18 : 6 :: 6 : 2$. El término me-
dio 6 es *una media proporcional* á los otros dos 18 y 2.

223 — PROPIEDAD FUNDAMENTAL. — Cuando cuatro números
están en proporcion, el producto de los extremos es igual al pro-
ducto de los medios.

Sea la proporcion $24 : 8 :: 21 : 7$; digo que tendremos
 $24 \times 7 = 8 \times 21$.

Efectivamente, escribámosla

$$\text{bajo la forma } \frac{24}{8} = \frac{21}{7}$$

$$\text{Reduciendo al mismo denominador } \frac{24 \times 7}{8 \times 7} = \frac{8 \times 21}{8 \times 7}$$

Siendo iguales estos dos quebrados y teniendo el mismo denominador, los numeradores serán iguales, y tendremos

$$24 \times 7 = 8 \times 21$$

Recíprocamente. — *Cuando cuatro números cumplen con la condición de ser el producto de dos de ellos igual al producto de los otros dos, estos cuatro números están en proporción.*

Sean los cuatro números 24, 8, 21 y 7

$$\text{tales que } 24 \times 7 = 8 \times 21$$

digo que tendremos $24 : 8 :: 21 : 7$

efectivamente, haciendo pasar 8 al primer miembro y 7 al segundo, resulta (103)

$$\frac{24}{8} = \frac{21}{7} \text{ ó bien } 24 : 8 :: 21 : 7$$

224 — CONSECUENCIAS. 1ª. La propiedad fundamental sirve para hallar uno de los términos de una proporción, cuando los otros tres son desconocidos.

1º el término desconocido es un extremo.

Sea la proporción $24 : 8 :: 21 : x$

tendremos (222) $24 \times x = 8 \times 21$

de donde (103) $x = \frac{8 \times 21}{24} \dots$ luego

Un extremo es igual al producto de los medios, dividido por el otro extremo.

2º El término desconocido es un medio.

Sea la proporción $24 : x :: 21 : 7$

sabemos que $x \times 21 = 24 \times 7$

luego $x = \frac{24 \times 7}{21}$ y por consiguiente

Un medio es igual al producto de los extremos, dividido por el otro medio.

3º Sea la proporción continua

$$48 : x :: x : 3$$

Se tiene $x \times x = 48 \times 3$ ó bien $x^2 = 48 \times 3$

Estrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros tendremos

$$x = \sqrt{48 \times 3} \dots \text{luego}$$

En una proporcion continua, un medio es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos.

225 — II^a. *Se puede, sin alterar una proporcion,*

1^o *multiplicar ó dividir un extremo y un medio por un mismo número;*

2^o *multiplicar un extremo y dividir el otro por el mismo número;*

3^o *multiplicar un medio y dividir el otro por el mismo número.*

Pues, en todas estas operaciones, el producto de los extremos queda siempre igual al producto de los medios y, segun la recíproca, esta condicion basta para que los cuatro números estén en proporcion.

226 — Esta propiedad es útil para trasformar en números enteros los términos de una proporcion.

Sea la proporcion $\frac{3}{8} : 4 :: \frac{9}{48} : 2$

Multipiquemos los dos antecedentes (uno es medio y el otro extremo) por 48, resulta

$$\frac{3 \times 48}{8} : 4 :: \frac{9 \times 48}{48} : 2$$

ó bien simplificando:

$$3 \times 6 : 4 :: 9 : 2 \quad \text{y} \quad 18 : 4 :: 9 : 2$$

227 — III^a. *Cuando cuatro números están en proporcion, se puede: 1^o alternar los extremos; 2^o alternar los medios; 3^o poner los medios por extremos (se dice invertir); puesto que estas permutaciones no alteran en nada la igualdad entre el producto de los extremos y el de los medios.*

Sea la proporcion $24 : 8 :: 21 : 7$

alternando los extremos $7 : 21 :: 8 : 24$

« los medios en la 1^a $24 : 21 :: 8 : 7$

« los medios en la 2^a $7 : 8 :: 21 : 24$

poniendo los extremos por medios

$$8 : 24 :: 7 : 21$$

alternando los extremos $21 : 24 :: 7 : 8$

« los medios en la 1ª $8 : 7 :: 24 : 21$

« los medios en la 2ª $21 : 7 :: 24 : 8$

y resultan así 8 permutaciones.

228 — OTRAS PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES.

I. *Cuando dos proporciones tienen una razón común, las otras dos razones están en proporción.*

Sean las dos proporciones $24 : 8 :: 18 : 6$

$$24 : 8 :: 21 : 7$$

que podemos escribir $\frac{24}{8} = \frac{18}{6}$

$$\frac{24}{8} = \frac{21}{7}$$

Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre si,

luego $\frac{18}{6} = \frac{21}{7}$

ó bien $18 : 6 :: 21 : 7$

CONSECUENCIAS. 1ª *Cuando dos proporciones tienen iguales antecedentes, los consecuentes están en proporción.*

$$24 : 8 :: 18 : 6$$

$$24 : 12 :: 18 : 9$$

alternando los medios en cada proporción

$$24 : 18 :: 8 : 6$$

$$24 : 18 :: 12 : 9$$

y teniendo estas dos proporciones una razón común, resulta

$$8 : 6 :: 12 : 9$$

2ª Del mismo modo, haríamos ver que: *cundo dos proporciones tienen iguales consecuentes, los antecedentes están en proporción.*

De las dos proporciones $8 : 24 :: 6 : 18$

$$12 : 24 :: 9 : 18$$

resulta $8 : 6 :: 12 : 9$

ó bien $8 : 12 :: 6 : 9$

229 — II. *En toda proporcion, la suma ó la diferencia de los dos primeros términos es al segundo, como la suma ó la diferencia de los dos últimos es al cuarto.*

Sea la proporcion $24 : 8 :: 18 : 6$ digo que

tendremos $24 \pm 8 : 8 :: 18 \pm 6 : 6$

pues al aumentar ó al disminuir cada antecedente en una vez su consecuente, se ha aumentado ó disminuido cada razon en una unidad y por lo tanto la igualdad de las razones no deja de existir.

Las dos proporciones reunidas mas arriba en una sola, pueden tambien escribirse separadamente del modo siguiente :

$$24 + 8 : 8 :: 18 + 6 : 6$$

$$24 - 8 : 8 :: 18 - 6 : 6$$

CONSECUENCIAS: 1ª *En toda proporcion la suma de los dos primeros términos es á su diferencia, como la suma de los dos últimos es tambien á su diferencia.*

Efectivamente las dos últimas proporciones teniendo iguales consecuentes, los antecedentes forman la proporcion :

$$24 + 8 : 24 - 8 :: 18 + 6 : 18 - 6$$

2ª *En toda proporcion la suma ó la diferencia de los dos primeros términos es al primero como la suma ó la diferencia de los dos últimos es al tercero.*

Sea la proporcion $7 : 28 :: 6 : 24$

Invertiendo las razones $28 : 7 :: 24 : 6$

aplicando el principio del N° 229

$$28 \pm 7 : 7 :: 24 \pm 6 : 6$$

y tambien $28 + 7 : 7 :: 24 + 6 : 6$

$$28 - 7 : 7 :: 24 - 6 : 6$$

230 — III. *En toda proporcion, la suma ó la diferencia de los antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como un antecedente cualquiera es á su consecuente.*

Sea la proporcion $24 : 8 :: 18 : 6$

alternando los medios $24 : 18 :: 8 : 6$

aplicando el principio de (2^a del N^o 229)

$$24 \pm 18 : 24 :: 8 \pm 6 : 8$$

alternando otra vez los medios

$$24 \pm 18 : 8 \pm 6 :: 24 : 8$$

y tambien $24 + 18 : 8 + 6 :: 24 : 8$

$$24 - 18 : 8 - 6 :: 24 : 8$$

CONSECUENCIAS: 1^a *La suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes, como la diferencia de los antecedentes es á la diferencia de los consecuentes.*

2^a *La suma de los antecedentes es á su diferencia como la suma de los consecuentes es á su diferencia.*

Efectivamente las dos últimas proporciones teniendo una razon comun, resulta

$$24 + 18 : 8 + 6 :: 24 - 18 : 8 - 6$$

y alternando los medios $24 + 18 : 24 - 18 :: 8 + 6 : 8 - 6$

231 — IV. *En toda série de razones iguales, la suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes como un antecedente cualquiera es á su consecuente.*

Sea la série $24 : 8 :: 18 : 6 :: 12 : 4 :: 21 : 7$

Considerando las dos primeras que forman proporcion y aplicando el principio del N^o 229, resulta

$$24 + 18 : 8 + 6 :: 18 : 6$$

pero $18 : 6 :: 12 : 4$

Estas proporciones tienen una razon comun

$$\text{luego } 24 + 18 : 8 + 6 :: 12 : 4$$

$$\text{y } 24 + 18 + 12 : 8 + 6 + 4 :: 12 : 4$$

$$\text{pero } \dots\dots\dots 12 : 4 :: 21 : 7$$

$$\text{luego } 24 + 18 + 12 : 8 + 6 + 4 :: 21 : 7$$

$$\text{y } 24 + 18 + 12 + 21 : 8 + 6 + 4 + 7 :: 21 : 7$$

ó bien
$$\frac{24 + 18 + 12 + 21}{8 + 6 + 4 + 7} = \frac{21}{7} = \frac{24}{8} = \dots$$

232 — V. Cuando se multiplican ordenadamente dos ó mas proporciones, los productos forman una nueva proporción.

Sean las proporciones $24 : 8 :: 18 : 6$

$12 : 3 :: 20 : 5$

$45 : 9 :: 35 : 7$

que podemos escribir

$$\frac{24}{8} = \frac{18}{6}$$

$$\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$$

$$\frac{45}{9} = \frac{35}{7}$$

multiplicando ordenadamente estas tres igualdades, resultará (100)

$$\frac{24 \times 12 \times 45}{8 \times 3 \times 9} = \frac{18 \times 20 \times 35}{6 \times 5 \times 7}$$

ó bien $24 \times 12 \times 45 : 8 \times 3 \times 9 :: 18 \times 20 \times 35 : 6 \times 5 \times 7$

Del mismo modo haríamos ver que: Cuando se dividen ordenadamente dos ó mas proporciones, los cocientes forman una nueva proporción.

III. Reglas de tres.

233 — Cuando una cuestión consta de dos cantidades conocidas de la misma especie y de otras dos cantidades, también de la misma especie, de las que una es desconocida, y pueden formar proporción, se dice que el cálculo del número desconocido depende de una *regla de tres*.

La regla de tres es *simple* cuando solo se necesita una proporción; *compuesta*, cuando se emplean varias; *directa* cuando dos cantidades de la misma naturaleza, en la cuestión, varían en el mismo sentido que las otras dos cantidades correspondientes; *inversa* en el caso contrario.

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA. —

234 — 19 kilogramos de una mercancía han costado 57 pesos; ¿cuánto costarán 23 kilógr. de la misma mercancía?

Enunciado	19 ^{kg}	57 \$
	23	x

Cuanto MAS kilogramos haya, tanto MAS pesos se necesitarán; luego la razón de las dos cantidades conocidas de misma naturaleza, es igual á la razón de las otras dos. Entónces se tiene la proporción

$$19 : 23 :: 57 : x$$

$$\text{de donde} \dots\dots\dots x = \frac{23 \times 57}{19} = 69 \$$$

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA. —

235 — 15 obreros han hecho una cierta obra en 51 días; ¿cuántos días necesitarán 17 obreros para hacer la misma obra?

Enunciado	15 ^{o.}	51 d.
	17	x

Cuanto MAS obreros se emplearán, tanto MENOS días necesitarán para hacer la obra; luego la razón de los números de obreros es igual á la razón inversa de los números de días empleados. Entónces se tiene la proporción

$$17 : 15 :: 51 : x$$

$$\text{de donde} \dots\dots\dots x = \frac{15 \times 51}{17} = 45 \text{ días.}$$

236 — Sin tomar mas ejemplos de regla de tres simple que estos dos cuyos raciocinios no haríamos mas que repetir, vemos que cuando á MAS se opone MAS, se forma una proporción directa, y que cuando á MAS se opone MENOS, la proporción es inversa.

En los problemas que van á seguir reemplazaremos las palabras mas y menos por sus signos convencionales.

REGLA DE TRES COMPUESTA. —

237 — PROBLEMA I. 15 obreros trabajando 10 horas al día, han empleado 18 días en hacer 450 metros de una cierta obra;

se pregunta ¿cuántos obreros se precisarán para que, trabajando 2 horas al día, hagan en 8 días 480 metros de la misma obra?

Enunciado 15^o. 10^h. 18^d. 450^m.
 X 2 8 480

PRIMER MÉTODO. — *Descomposicion en reglas de tres simples.*

Enunciados.

1^a cuestion 15^o. ... 10^h. ... 18^d. ... 450^m.
 x ... 2 ... « ... « 2 : 10 :: 15 : x
 + —

2^a cuestion x^o. ... 2^h. ... 18^d. ... 450^m.
 x' ... « ... 8 ... « 8 : 18 :: x : x'
 + —

3^a cuestion x' ^o. ... 2^h. ... 8^d. ... 450^m.
 X ... « ... « ... 480 450 : 480 :: x' : X
 + +

En lugar de calcular sucesivamente los valores de x, x' y X, se multiplica ordenadamente las tres proporciones (231) y se tiene :

$$2 \times 8 \times 450 : 10 \times 18 \times 480 :: 15 \times x \times x' : x \times x' \times X$$

dividiendo por x y x' los dos términos de la segunda razon (1^o de 224) resulta

$$2 \times 8 \times 450 : 10 \times 18 \times 480 :: 15 : X$$

$$\text{de donde } X = \frac{15 \times 10 \times 18 \times 480}{2 \times 8 \times 450}$$

Simplificando los dos términos de esta espresion por los factores comunes, lo que siempre se ha de hacer antes de efectuar los cálculos, y efectuando, se halla

$$X = 180 \text{ obreros.}$$

238 — SEGUNDO MÉTODO. — *Reduccion á la unidad.*

PROBLEMA II. 15 obreros, trabajando 10 horas diarias, han hecho, en 18 días, 450 metros de una cierta obra; se pregunta ¿cuántos días necesitarán 180 obreros, que trabajan 2 horas diarias, para hacer 480 metros de la misma obra?

IV. Particiones proporcionales.

240 — *Partir una magnitud en partes proporcionales á otras magnitudes dadas, es partirla en un número de partes igual al de estas magnitudes y que tengan, de dos en dos, la misma razón que las magnitudes correspondientes.*

PROBLEMA I. — *Partir 3816 en tres partes proporcionales á los números 4, 7, 13.*

Primer método. — Sean x, y, z las tres partes buscadas; necesita que tengamos

$$4 : x :: 7 : y :: 13 : z$$

$$\begin{aligned} \text{y por consiguiente (230)} \quad 4 + 7 + 13 : x + y + z :: 4 : x \\ :: 7 : y \\ :: 13 : z \end{aligned}$$

Pero $x + y + z$, esto es, la suma de las tres partes, es igual al número dado 3816, luego

$$24 : 3816 :: 4 : x, \text{ de donde } x = \frac{3816 \times 4}{24} = 636$$

$$:: 7 : y \quad \ll \quad y = \frac{3816 \times 7}{24} = 1113$$

$$:: 13 : z \quad \ll \quad z = \frac{3816 \times 13}{24} = 2067$$

$$\text{verificacion } 3816$$

Segundo método.

	1ª parte		2ª parte		3ª parte
Sobre $4 + 7 + 13$ ó 24	4		7		13
sobre 1	$\frac{4}{24}$		$\frac{7}{24}$		$\frac{13}{24}$
sobre 3816	$\frac{4 \times 3816}{24}$	...	$\frac{7 \times 3816}{24}$	...	$\frac{13 \times 3816}{24}$

241 — *Cada parte es igual al producto del número dado por el número proporcional correspondiente, dividido por la suma de los números proporcionales.*

La aplicacion de esta regla exige tantas multiplicaciones y divisiones como partes haya. Para abreviar, se puede dividir el

número dado por la suma de los números proporcionales, y multiplicar el cociente sucesivamente por cada uno de los números proporcionales.

242 — ADVERTENCIA. — Si se multiplica por un número cualquiera, 5 por ejemplo, los dos términos de cada una de las expresiones de x , y , z , se tiene:

$$x = \frac{3816 \times 20}{120}$$

$$y = \frac{3816 \times 35}{120}$$

$$z = \frac{3816 \times 65}{120}$$

El valor de las partes no ha cambiado, solamente los números proporcionales primitivos han sido multiplicados cada uno por 5.

Luego se puede, sin modificar los resultados, multiplicar ó dividir los números proporcionales por un mismo número.

Esta advertencia conduce á menudo á facilitar y á simplificar las particiones.

PROBLEMA II. — *Partir 10696,85 en cuatro partes proporcionales números $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{15}$*

Antes de aplicar la regla jeneral, multiplico estos quebrados por 360 que es el m. m. c. de sus denominadores (135); los productos 150, 160, 135, 168, cuya suma es 613, pueden substituirse á los números proporcionales del enunciado,

Números proporc.	m. m. c. de los denom. = 360	Núm. prop. $\times 360$	
$\frac{5}{12}$	30	150	$x = \frac{10696,85 \times 150}{613} = 2617,50$
$\frac{4}{9}$	40	160	$y = \frac{10696,85 \times 160}{613} = 2792,00$
$\frac{3}{8}$	45	135	$z = \frac{10696,85 \times 135}{613} = 2355,75$
$\frac{7}{15}$	24	168	$u = \frac{10696,85 \times 168}{613} = 2931,60$
		613	verificacion 10696,85

PROBLEMA III. — Una persona deja una herencia de 493725 \$ á sus tres hijos, con la condicion que sus partes sean inversamente proporcionales á sus edades que son, 5, 9 y 13; hallar la parte de cada heredero.

Designando por x , y , z las partes correspondientes á las edades 5, 9, 13 años, tendremos :

$$x : y :: 9 : 5 \quad \text{de donde} \quad y = \frac{5 \cdot x}{9} = \frac{5}{9} \cdot x$$

$$x : z :: 13 : 5 \quad \ll \quad z = \frac{5 \cdot x}{13} = \frac{5}{13} \cdot x$$

El problema consiste pues en partir 493725 en tres partes tales que la segunda sea los $\frac{5}{9}$ de la primera y la tercera las $\frac{5}{13}$ de la primera.

Tomando 1 por número proporcional á la primera,

Los números proporcionales son 1, $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{13}$,

ó dividiendo por 5 $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{13}$,

que son los números dados 5, 9, 13 invertidos y se resuelve como el problema anterior.

Efectuando los cálculos, se encuentra $x = 254475$ \$

$$y = 141375$$

$$z = 97875$$

verificacion 493725 \$

243 — REGLA DE COMPAÑIA. — La regla de compañía tiene por objeto de distribuir entre varios socios la ganancia ó pérdida que resulte de su asociacion.

La parte de la ganancia ó pérdida que corresponde á cada socio, siendo proporcional á los capitales si los tiempos son iguales y proporcional á los tiempos, si son iguales los capitales, es evidente que todos los problemas que pueden presentarse, en la regla de compañía, se resuelven de un modo idéntico á los que acabamos de examinar.

PROBLEMA I. — Tres personas se han reunido para cierto comercio; la primera ha puesto 24000 \$, la segunda 18000, la tercera 26000; al cabo de 1 año han ganado 46240 \$; ¿qué parte de esta ganancia corresponde á cada persona?

Números proporc.	Números prop. divididos por 2000		partes
24000	12	$x = \frac{46240}{34} \times 12 =$	16320 \$
18000	9	$y = \frac{46240}{34} \times 9 =$	12240
26000	13	$z = \frac{46240}{34} \times 13 =$	17680
	34	verificacion	46240 \$

PROBLEMA II. — *Tres socios han puesto: el primero 393 \$ y 6 reales por 4 meses; el segundo 656 \$ y 2 reales por 6 meses; el tercero 918 \$ y 6 reales por 10 meses. La ganancia total es de 1750 \$. ¿Cuál es la parte de cada socio?*

393 \$ 6^{rs} durante 4 meses producen tanto como 4 veces 393 \$ 6^{rs} durante un mes, ó bien 1575 \$.

656 \$ 2^{rs} durante 6 meses producen tanto como 6 veces 656 \$ 2^{rs} ó 3937 \$ 4^{rs} durante un mes.

918 \$ 6^{rs} durante 10 meses producen tanto como 10 veces 918 \$ 6^{rs} ó 9187 \$ 4^{rs} durante un mes.

Puestas	Tiempos	Núm. proporcionales	Partes.
393 \$ 6 ^{rs} ...	4 meses...	$393 \$ 6^{rs} \times 4 =$	1575
656—2.....	6 «	$656—2 \times 6 =$	3937—4...
918—6.....	10 «	$918—6 \times 10 =$	9187—4...
			14700 \$ 1750 \$

REGLA. — *Por puestas y tiempos diferentes, las partes son proporcionales á los productos de las puestas por los tiempos.*

V. Regla de interés.

244 — Se llama *capital* la suma que se presta ó se coloca, é *interés* el beneficio que se reserva la persona que presta ó coloca su capital. Este beneficio es proporcional á la suma prestada; á mas depende del tiempo durante el que se ha prestado el capital y de una tercera cantidad, llamada *tanto por ciento* que es el interés convencional de una suma de 100 \$ colocada durante un año.

El tanto se indica así 6% es decir 6 por 100.

El interés de un capital puede ser *simple* ó *compuesto*. Es simple cuando el capital permanece el mismo durante su colocacion, y compuesto cuando al fin de cada periodo de tiempo convenido, al fin de cada año, por ejemplo, se añade al capital para ganar nuevos intereses en los tiempos sucesivos.

245 — Los problemas á que da lugar la consideracion de los intereses simples pertenecen á la clase de los que acabamos de estudiar en las reglas de tres y se resuelven del mismo modo. En lugar de las palabras: *obreros, trabajo, terrenos, dificultad* etc. que hemos siempre empleado en los problemas de reglas de tres simples y compuestas, nos serviremos de las siguientes: *capital, interés, tiempo, tanto por ciento*.

PROBLEMA I. — *Se pregunta el interés de un capital de 4960\$ prestado durante 5 años, 7 meses y 12 dias al 7% anual.*

Esta cuestion se reduce á esta otra: 100 pesos producen 7 de interés en 360 dias (*) ¿cuánto producirán 4960 en 5 años 7 meses 12 dias ó bien sea en 2022 dias?

Enunciado	100\$	7\$	360 ^d	(238)
	4960	x	2022	
	+	+	+	

Luego
$$x = \frac{7 \times 4960 \times 2022}{100 \times 360} = 1950 \$ \text{ y } 1^r.$$

Esta espresion puede escribirse del modo siguiente :

$$x = \frac{4960 \times 7 \times \frac{2022}{360}}{100} \quad \text{y } \frac{2022}{360} \text{ es el tiempo}$$

en fraccion de años..... Luego

El interés es igual al centésimo del capital multiplicado por el tanto por ciento y por el tiempo espresado en años ó fraccion de años.

246 — En el problema que acabamos de resolver entran cuatro cantidades: el capital, el interés, el tiempo y el tanto por ciento. Conocidas 3 de estas cantidades se puede determinar la

(*) En el comercio se considera el año de 360 dias y el mes de 30 dias.

cuarta. Entonces á mas de este problema podemos proponernos otros tres.

PROBLEMA II. — *Hallar el capital que produce 4905 \$ en 2 años 3 meses 20 días al 9% anual.*

Esta cuestion se reduce á esta otra: 100 \$ producen 9 \$ en 360 días ¿cuántos pesos producirán 4905 en 2 años 3 meses 20 días, ó bien en 830 días?

Enunciado	100 \$	9 \$	360 d.
	x	4905	830
	+	+	—

$$\text{Luego } x = \frac{100 \times 4905 \times 360}{9 \times 830} = 23638 \$ \text{ y } 4^{\text{rs}}$$

PROBLEMA III. — *¿En qué tiempo el capital 23638 \$ 4^{rs} producirá 4905 al 9% anual?*

Enunciado	100 \$	9 \$	1 año.
	23638 y 4 ^{rs} ..	4905	x
	—	+	+

$$\text{Luego } x = \frac{1 \times 4905 \times 100}{23638 \frac{1}{4} \times 9} = 2 \text{ años } \frac{11}{36} = 2 \text{ años } 3 \text{ meses } 20 \text{ días}$$

PROBLEMA IV. — *Hallar el tanto por ciento á que se prestaron 93600 \$, suponiendo que sus intereses durante 8 meses han importado 3276 \$.*

Enunciado	93600 \$	3276 \$	8 m.
	100	x	12
	+	+	+

$$\text{Luego } x = \frac{3276 \times 100 \times 12}{93600 \times 8} = 5,25\%$$

247 — Todos los problemas de interés simple pueden resolverse muy sencillamente por medio de las cuatro fórmulas:

$$I = \frac{a \cdot i \cdot t}{100}; \quad a = \frac{100 \cdot I}{i \cdot t}; \quad t = \frac{100 \cdot I}{a \cdot i} \quad \text{é} \quad i = \frac{100 \cdot I}{a \cdot t}$$

en las que I representa el interés, a el capital, t el tiempo en años é i el tanto por ciento.

APLICACIONES.

- Escribir de todos los modos posibles, y sin alterarla, la proporcion
 $45 : 9 :: 15 : 3$
- ¿Cuál será el valor de x en la proporcion $25 : x :: x : 9$?
- 42 varas de tela han costado 798 \$; ¿cuál será el precio de 25 varas de la misma tela? R. — (475 \$).
- 135 metros de tela han costado 150 \$; ¿cuántos metros se tendrán por 23 \$? R. (20^m, 7).
- Un obrero ha hecho 58 metros de una obra en 348 días; ¿cuántos metros ha hecho en los 15 primeros días? R. (2^m, 5).
- Una alfombra tiene 7^m, 5 de largo sobre 5²/₃ de ancho; se quiere aforrarla con tela de $\frac{9}{6}$ de ancho; ¿cuántos metros se necesita de esta tela? R. (47^m $\frac{4}{5}$).
- Para empapelar una sala se han necesitado 100 varas de papel de $\frac{3}{4}$ de ancho; ¿cuántas varas se necesitarán de otro papel de $\frac{2}{3}$ de ancho? R. — (112 varas $\frac{1}{2}$).
- Un rectángulo tiene 25 metros de largo sobre 8 de ancho. ¿Cuál será el largo de otro rectángulo igual en superficie y que tendría 20 metros de largo? R. — (10 metros).
- 9 obreros han empleado 8 días en cavar un foso de 24 varas; ¿cuántos días habrían necesitado 17 obreros para cavar un foso de 15 varas? R. — (2 días $\frac{4}{7}$).
- 35 obreros han necesitado 96 horas para construir una pared que tiene 15 metros de largo, 4^m, 5 de alto y 0^m, 75 de espesor; ¿cuántas horas emplearán 42 obreros para construir una pared que tenga 19 metros de largo, 3 de alto y 1^m, 20 de espesor? R. — (108 horas $+\frac{4}{5}$).
- Partir el número 75 en partes proporcionales á los números 8, 5 y 2.
 Respuesta. — 40, 25 y 10.
- Dividir 192 en tres partes tales, que la primera sea á la segunda :: 6 : 5 y dicha primera sea á la tercera :: 15 : 8.
 Respuesta. — 1^a 30; 2^a 25; 3^a 16.
- Dividir 3724 en 4 partes tales, que la primera sea á la segunda :: 1 : $\frac{4}{3}$ que la segunda sea á la tercera :: $\frac{5}{8}$: $\frac{1}{2}$; y que la tercera sea á la cuarta :: $\frac{1}{8}$: $\frac{1}{3}$
 Respuesta. — 1^a 756; 2^a 1008; 3^a 840; 4^a 1120.

— Dividir 9843,70 en 5 partes tales, que la 3ª sea los $\frac{4}{5}$ de la 1ª; la 3ª el $\frac{4}{5}$ de la 5ª; la 2ª los $\frac{9}{4}$ de la 4ª; la 4ª el $\frac{1}{2}$ de la 1ª

Respuesta. — 1ª 2076; 2ª 778,5; 3ª 1660,8; 4ª 346; 5ª 4982,4

— Tres fuentes corriendo junto han llenado una pileta. La primera corriendo sola, la llenaría en 3 horas; la segunda en 8 horas y la tercera en 5 horas. Hallar la parte de la pileta que cada fuente ha llenado.

Respuesta. — La 1ª ha llenado las $\frac{40}{79}$ de la pileta; la 2ª las $\frac{15}{79}$ y la tercera las $\frac{24}{79}$

— Tres asociados han formado una empresa comercial durante 14 meses.

El 1º con 10000 \$ al principio y 6 meses despues añadió 7000 \$

El 2º $\propto$ 18000 $\propto$ y 4 $\propto$ retiró 3000

El 3º $\propto$ 14000 $\propto$ y 3 $\propto$ retiró 2500

y 2 meses despues de haber retirado estos 2500 \$, añadió 6000. La ganancia total ascendió á 19215 \$, se pregunta la ganancia de cada uno.

Respuesta. — La ganancia del 1º es de 5880 \$; la del 2º de 6660 y la del tercero de 6675.

— ¿Cuál es el interés de 7854 \$ durante 8 años al 5% anual? R. — (3141 \$, 6).

— Hallar el interés de 4130 \$ durante 7 años y 5 meses al 6% anual. R. — (1837 \$ y 6 rs).

— Hallar el interés de 9600 \$ durante 2 años, 7 meses, 18 dias al 4 $\frac{1}{2}$ % anual. R. — (1137 \$, 6).

— Hallar el capital que produce 70 pesos fuertes en 140 dias al 1 $\frac{1}{2}$ % anual. R. — (12000 pesos fuertes.)

— ¿En cuántos dias el capital 9000 producirá 100 al 10%? R. — (en 40 dias.)

— Un capital de 7854 \$ al cabo de 8 años, ha producido 3141 \$, 6; ¿cuál era el tanto por ciento? R. — (5%).

— Hallar el tanto por ciento á que se prestaron 38955 \$ 4 rs. suponiendo que sus intereses durante 2 años 3 meses 20 dias han importado 3143 \$ 4 rs. R. — (3 $\frac{1}{2}$ %).

— Un almacenero mezcla 114 litros de vino de á 5 \$ el litro con 230 litros de á 4 \$ y 100 de á 8; ¿cuál será el precio de la mezcla? (*).

Los 114 litros del 1º vino valen 570 \$

230 $\propto$ $\propto$ 2º 912

100 $\propto$ $\propto$ 3º 800

así los 444 litros de la mezcla valen 2282 \$

luego 1 litro de la mezcla valdrá $\frac{2282}{444} = 5 \$ 1r.$

(*) Este problema y el siguiente se conocen bajo el nombre de *Regla de aligacion*.

— Se mezclaron 10 litros de vino de á 5 \$ con 6 de agua ; ¿ á como se ha de vender la mezcla ? R. (3 \$ 1r.).

CUESTIONARIO.

- ¿ Qué es relacion ó razon ? — ¿ Cuántas clases hay ?
- ¿ Qué es antecedente ? — ¿ Consecuente ?
- ¿ Hay analogia entre las palabras : antecedente, numerador y dividendo ? — ¿ y entre consecuente, denominador y divisor ?
- ¿ Qué es proporcion ?
- ¿ Qué son extremos ? — ¿ Medios ?
- ¿ Cuándo es que dos cantidades son directamente proporcionales ? — ¿ Inversamente proporcionales ?
- ¿ Qué es cuarta proporcional ?
- ¿ Qué es proporcion continua ?
- ¿ Cómo se calcula uno de los términos de una proporcion, cuando se conocen las otras tres ?
- ¿ Sobre qué principio está basada esta regla ?
- ¿ Qué cambios pueden experimentar los términos de una proporcion sin que deje de haber proporcion ?
- ¿ En qué principio están basados estos cambios ?
- ¿ Cuáles son las demás propiedades de las proporciones ? Euunciarlas.
- ¿ Qué es regla de tres ?
- ¿ Qué es regla de tres simple ? — ¿ Compuesta ? — ¿ Directa ? — ¿ Inversa ?
- ¿Cuál es la regla para resolver al momento un problema de regla de tres compuesta, por mas complicado que sea ?
- ¿ Qué es particion proporcional ?
- ¿Cuál es la regla jeneral para la resolucion de los problemas de particiones proporcionales ?
- ¿ Qué es regla de compañía ?
- ¿ Cómo varia la ganancia ó la pérdida cuando son iguales los tiempos ? —
- ¿ Cuándo son iguales los capitales ? — ¿ Cuando son diferentes tiempos y capitales ?
- ¿ Qué es capital ? — ¿ Interés ? — ¿ Tanto por ciento ?
- ¿ Qué es interés simple ? — ¿ Interés compuesto ?
- ¿ Cuántas cantidades entran en las cuestiones de interés ? — ¿ A cuántos problemas da lugar ?

FIN.

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

ÍNDICE

CAPÍTULOS	PÁGINAS
I PRELIMINARES.	7
Formacion de los números enteros.	8
Numeracion hablada.	8
Numeracion escrita.	10
Numeracion de los números decimales.	13
Signos usados en la aritmética.	15
II CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ENTEROS Y DECIMALES. . .	17
Adicion.	17
Sustraccion.	20
Multiplicacion.	25
Division.	35
De las Igualdades.	51
III DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS.	54
Descomposicion de un número en sus factores primos.	56
Máximo comun divisor.	58
Mínimo múltiplo comun.	58
IV FRACCIONES.	60
Principios generales.	60
V CÁLCULO DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.	68
Adicion.	68
Sustraccion.	69
Multiplicacion.	70
Division.	71
Reduccion de los números fraccionarios á decimales y vice-versa.	74
VI SISTEMA DE PESAS Y MEDIDAS.	80
Sistema métrico.	80
Sistema antiguo.	88
Ventajas del sistema métrico.	90
Conversion de las antiguas pesas y medidas á las nuevas y recíprocamente.	91
VII NÚMEROS CONCRETOS.	109
Preliminares.	109
Operaciones sobre los números complejos.	112

II

CAPÍTULOS	PÁGINAS
VIII POTENCIAS Y RAICES	116
Elevacion á potencias.....	116
Raiz cuadrada.....	118
Raiz cúbica.....	120
IX RAZONES, PROPOSICIONES Y PROBLEMAS	124
Razones	124
Proporciones	125
Reglas de tres.....	131
Particiones proporcionales	135
Regla de interés.....	138



SC
LT
1871
LAR

FE DE ERRATA

		DICE	DÍGASE
Página	14 línea 20 :	Diez-milésimas	Diez millonésimas
«	28 « 11 :	(65)	(35)
«	37 « 28 :	mas 6 el resto	mas 6 de resto
«	53 « 25 :	5 x — 7	5 x — 6
«	62 « 21 :	sea $\frac{3}{18}$	sea $\frac{5}{18}$
«	66 « 18 :	$\frac{3}{11}$ y $\frac{333}{1111}$	$\frac{3}{11}$ y $\frac{303}{1111}$
«	68 « 24 :	$= \frac{59}{60} = 1 \frac{29}{30}$. . .	$= \frac{59}{30} = 1 \frac{29}{30}$
«	69 « última :	resta $3 \frac{8}{13}$	resta $3 \frac{8}{12}$
«	71 « 23 :	$\frac{23}{4} \times \frac{38}{7}$	$\frac{23}{4} \times \frac{58}{7}$
«	73 « 8 :	$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$	$\frac{5}{7} \times \frac{4}{3}$
«	74 « 14 :	decimales como ci- fras hay	decimales como ce- ros hay
«	77 « 19 :	harán $\frac{4}{13}$	harán $\frac{4}{15}$
«	« 26 :	los $\frac{3}{12}$ del objeto . . .	los $\frac{5}{12}$ del objeto
«	78 « 24 :	1 metro $\frac{3}{3}$	1 metro $\frac{3}{4}$
«	79 « 3 :	los $\frac{3}{7}$ de la misma . .	los $\frac{7}{15}$ de la misma
«	105 « 14 :	luego 1 hectógramo .	luego 1 litro
«	106 « 14 :	por 72, 0,866.	por 72 y 0,866
«	112 « 11 :	15.... 18....	53.... 18....
«	« 25 :	6.... 60.... 2.... . .	6.... 160.... 2....
«	116 « 11 :	Capítulo octavo. . . .	Capítulo sétimo

OBRAS DEL S^r. COSSON

ADOPTADAS COMO TESTO EN LOS
COLEGIOS NACIONALES.

**CURSO GRADUAL Y METÓDICO
DE GEOGRAFÍA**

FÍSICA POLITICA É HISTÓRICA
Arreglado para uso de los Colegios y Escuelas

DE LA
REPÚBLICA ARGENTINA.
Nueva edicion completamente refundida.

**TROZOS SELECTOS
DE
LITERATURA**

Y
MÉTODO DE COMPOSICION LITERARIA
SACADOS DE AUTORES ARGENTINOS Y ESTRANJEROS
POR

ALFREDO COSSON

TOMO I.

Método de composicion literaria. — Narraciones. — Descripciones y cuadros.
— Caracteres, Retratos y Paralelos.

TOMO II.

Discursos y Trozos oratorios. — Disertaciones morales y filosóficas. — Crítica
literaria. — Definiciones. — Diálogos. — Cartas. — Poesías.