

1041 - 1032

e A 1
55

**NOCIONES
DE
ARITMETICA Y ALGEBRA**

POR EL

DR. JOSE B. COLLO

E

ING. MARTIN A. FERRO

Profesores de la Escuela Naval Militar

Duff

2.^a EDICION



Publicación N.º 130

ESCUELA NAVAL MILITAR

REPUBLICA ARGENTINA

1931

Dupl

NOCIONES DE ARITMETICA Y ALGEBRA

POR EL

DR. JOSE B. COLLO

E

ING. MARTIN A. FERRO

Profesores de la Escuela Naval Militar



2.^a EDICION

*Duplicado del
N.º*

1464



Publicación N.º 130

ESCUELA NAVAL MILITAR

REPUBLICA ARGENTINA

1931

Nº 1041

Los ejemplares numerados desde
1001 hasta 1100, han sido cedidos
por los autores para ser distribuidos
en las bibliotecas oficiales.

Imprenta de la Escuela Naval Militar

RIO SANTIAGO

ADVERTENCIA

Estas lecciones de Aritmética contienen los conocimientos que sirven de base al estudio del curso de matemática preparatoria de la Escuela Naval. Han sido redactadas teniendo en cuenta la orientación de los posteriores cursos cíclicos de Análisis Matemático, a pesar de su carácter netamente elemental. Hemos querido así, inspirados en los sanos propósitos de la Dirección, facilitar en lo posible la preparación de los aspirantes al ingreso; y en tal sentido, estas lecciones tendrán la ventaja de que por su contenido sabrán los estudiantes, mejor que por un programa, lo que la Escuela exige, y cuál es el nivel de la preparación que desea.

Creemos que este libro puede ser estudiado, sin mayor base previa, y sin mayor dificultad por los alumnos mismos; y con relativa facilidad bajo la dirección de un profesor.

Si resultara útil a los jóvenes, a quienes lo dedicamos, quedará recompensada nuestra labor, que necesitó poca ciencia y mucho cariño.

LOS AUTORES

INDICE

CAPITULO I

LOS NÚMEROS NATURALES

	Pág.
§ 1 Generalidades	1

CAPITULO II

OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

§ 2 Adición	4
§ 3 La multiplicación	7
Potencias de los números naturales	14

CAPITULO III

OPERACIONES INVERSAS

§ 5 La substracción.	20
§ 6 La división	25
§ 7 Extracción de raíces	29

CAPITULO IV

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS

§ 8 Divisibilidad.	32
§ 9 Máximo común divisor.	38
§ 10 Mínimo común múltiplo	40
§ 11 Números primos.	42

CAPITULO V

LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

§ 12 Medida de segmentos.	46
§ 13 Operaciones con números, fraccionarios. Adición.	50

	Pág.
§ 14 Adición de fracciones.	59
§ 15 Multiplicación	62
§ 16 Potencias.	69
§ 17 La división	69
§ 18 Extracción de raíces	74

CAPITULO VI
FRACCIONES DECIMALES

§ 19 Generalidades	75
§ 20 Operaciones con números decimales	77

CAPITULO VII
RAZONES Y PROPORCIONES

§ 21 Razón de las magnitudes.	85
§ 22 Números proporcionales	88
§ 23 Números inversamente proporcionales.	91
§ 24 Reducción a la unidad	95
§ 25 Interés simple	94
§ 26 Partición proporcional.	96

CAPITULO VIII
SISTEMA DECIMAL DE PESAS Y MEDIDAS

§ 27 Generalidades	99
§ 28 Sistemas métricos	100
§ 29 Sistema métrico decimal	102
§ 30 Medidas de longitud	104
§ 31 Medidas de superficie.	105
§ 32 Medidas de volumen	108
§ 33 Medidas de capacidad.	111
§ 34 Medidas de peso	112
§ 35 Antiguo sistema inglés de medidas.	115
§ 36 Medidas de ángulos	119
§ 37 Números compuestos	121

CAPITULO IX
NÚMEROS NEGATIVOS

§ 38 Generalidades	127
§ 39 Multiplicación de números relativos	135
§ 40 División de números relativos	137
§ 41 Número racional	138
§ 42 Recapitulación	140

CAPITULO X

OPERACIONES ALGEBRAICAS

	<u>Pág.</u>
§ 43 Expresiones algebraicas	154
§ 44 Polinomios	157
§ 45 Operaciones enteras con polinomios	158
§ 46 División de polinomios	160

CAPITULO XI

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

§ 47 Ecuación de primer grado con una incógnita	165
§ 48 Sistemas de ecuaciones de primer grado	167
§ 49 Planteamiento y resolución de problemas	173

CAPITULO I

LOS NÚMEROS NATURALES

§ 1. Generalidades

1. La aritmética es la ciencia que estudia las propiedades de los números.

La palabra número tiene para todas las personas un significado más o menos claro. En la vida diaria usamos los números y hacemos con ellos operaciones, relacionándolos en diferentes formas, sin detenernos mayormente a pensar cual es el verdadero concepto de este término, porque la experiencia nos ha hecho adquirir fe en la seguridad de los cálculos, sin preocuparnos de sus fundamentos. Por ejemplo: cada vez que se pregunta «cuántos» se responde con un número; y todos sabemos lo que ello significa. Sin embargo la Aritmética, que es la base de las Ciencias Matemáticas, se funda en definiciones y conceptos bien precisos, más que en la experiencia. De estas definiciones, y sobre todo de la definición y concepto de «número», no nos ocuparemos por ahora; lo haremos al fin de estas lecciones.

2. Los números nos sirven para contar los elementos de una colección. Que quiere decir esto?

Para aclararlo, supongamos que un niño, que no sabe lo que significa contar, quiere saber si en un juego tiene tantos fusiles como soldaditos. Lo averiguará en la siguiente forma:

Pondrá frente (o junto) a cada soldadito un fusil. Si al terminarse los soldaditos se han terminado también los fusiles, dirá que hay igual número, o el mismo número de soldaditos que de fusiles. Si quedan soldaditos sin fusiles dirá que hay más soldaditos que fusiles, o menos fusiles que soldaditos.

La operación efectuada por el niño de colocar con cada soldadito un fusil, o como se dice hacer corresponder a

cada soldadito un fusil, se expresa en el lenguaje de la aritmética diciendo que hacemos una *coordinación* entre los elementos de la colección de fusiles y los elementos de la colección de soldaditos.

EJEMPLOS.

1. Puedo efectuar una coordinación entre los dedos de la mano izquierda y los de la mano derecha, pues a cada dedo de una mano puedo hacer corresponder uno de la otra. Por esta razón digo que las colecciones formadas por los dedos de ambas manos son *coordinables*.

2. A cada lado de un triángulo podemos hacer corresponder un ángulo del triángulo: el opuesto a dicho lado, por ejemplo. Por eso diremos que los lados de un triángulo y sus ángulos son dos colecciones *coordinables*.

3. Cuando dos colecciones son coordinables decimos que tienen el mismo número de elementos o unidades. Por eso decimos: la mano izquierda tiene igual número de dedos que la derecha; un triángulo tiene igual número de ángulos que de lados.

Si, en cambio, dos colecciones no son coordinables una de ellas tendrá mayor o menor número de elementos que la otra.

Esto se expresa en la Aritmética diciendo que si **a** y **b** son dos números cualesquiera debe suceder *uno* de estos tres casos: **a** es igual a **b**; **a** es mayor que **b**; **a** es menor que **b**.

Lo indicamos así:

$$a = b \quad ; \quad a > b \quad ; \quad a < b$$

4. Para contar los elementos de una colección, es decir para saber qué número de elementos tiene, procedemos de la siguiente manera:

Formemos una colección con *un* elemento; otra con un elemento más; otra con *un* elemento más; y así podemos pensar que continuamos indefinidamente. Representemos estas colecciones con circulitos, en la siguiente forma:

.	..	...				etc.
1	2	3	4	5		

Obtenemos así una sucesión de colecciones que denominamos *sucesión fundamental*. Designamos sus números de elementos, respectivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc....

Esta sucesión de números, que no tiene fin, como tampoco lo tiene el de las colecciones, se denomina *sucesión de los números naturales*.

Teniendo la sucesión fundamental, es decir las colecciones representadas en nuestra figura, podemos determinar, por comparación con ella, el número de elementos de otra colección cualquiera que se nos dé.

EJEMPLO.

Sea la colección de letras (a, b, c, d). Cuántos elementos tiene?

Comparo con las colecciones de la fig (1) y veo que puedo hacer la coordinación de la colección (a, b, c, d) con la colección; luego el número de elementos de la primera es igual al de la segunda; y este número es 4.

En la práctica no necesitamos hacer esta comparación. Mentalmente vamos quitando uno a uno los elementos de la colección dada y nombrando el número de la sucesión fundamental que le corresponde, que ya sabemos de memoria; y así seguimos hasta terminar con los elementos. Así decimos, uno, dos, tres, cuatro, poniendo el lápiz o la vista, sucesivamente, en a, b, c, d . En esto consiste la operación de contar.

OBSERVACIÓN.

Además de los números naturales 1, 2, 3, 4, ... usamos en la aritmética el número *cero*, que lo empleamos para expresar que la colección no tiene ningún elemento. Así por ejemplo: partamos de la colección (a, b, c, d) y vayamos poniendo las que se obtienen quitando sucesivamente un elemento. Tendremos:

$$\begin{array}{ccccccc} (a, b, c, d) & . & (a, b, c) & , & (a, b) & , & (a) \\ 4 & & 3 & & 2 & & 1 \end{array}$$

y si retiramos este último elemento se agotará la colección; no contendrá ya ningún elemento, lo cual lo expresamos diciendo que contendrá **0** elemento.

CAPITULO II

OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

§ 2. Adición

1. Tenemos una caja de plumas que contiene 15 plumas, y otra caja que contiene 12. Si reunimos todas las plumas, es decir las colocamos en una misma caja, y contamos las que ahora contiene, encontraremos 27.

En realidad, lo que hemos hecho es formar una colección que contiene todos los elementos (plumas) de las dos colecciones dadas. El número de elementos que contiene, 27, se denomina suma de los números de elementos de las dos colecciones dadas. Lo indicamos:

$$15 + 12 = 27$$

Esto, en verdad, significa lo siguiente: si con una colección de 15 elementos y otra de 12 formamos una sola colección, ésta contendrá 27 elementos.

Los números 15 y 12 son los sumandos, el número 27 es la suma.

EJEMPLO.

Una colección	otra colección	suma de las dos
(a, b, c, d)	(m, n, p)	(a, b, c, d, m, n, p)
tiene 4 elementos	tiene 3 elementos	tiene 7 elementos.
y se expresa	$4 + 3 = 7$.	

Si la segunda de nuestras cajas no contuviera ninguna pluma, o sea 0 plumas, la suma contendría igual número que la primer caja; es decir:

$$15 + 0 = 15;$$

y en general:

$$a + 0 = a$$

2. Para reunir las plumas de las dos cajas podemos proceder también en la siguiente forma:

Sacamos *una* pluma de la segunda caja, la colocamos en la primera, y decimos: 15 más uno 16. Sacamos otra, la colocamos también en la primera, y decimos: 16 más uno 17. Y así seguimos hasta agotar las plumas de la segunda caja; lo cual sucederá cuando digamos 26 más uno 27.

Podemos hacerlo más brevemente, diciendo al echar la primera pluma, 16; después 17, 18, 19...., 27.

Evidentemente llegaremos también al mismo resultado si echamos las plumas de la primera caja en la segunda. Tendríamos:

13, 14, 15, ..., 27

La operación hecha en la primera forma se expresa

$$\begin{array}{l} 15 + 12 = 27, \quad \text{y en la segunda forma:} \\ 12 + 15 = 27, \end{array}$$

es decir $15 + 12 = 12 + 15$.

Esta propiedad de la adición es general, es decir vale siempre para *cualquier* par de números. Así tendremos:

$$2 + 5 = 5 + 2, \quad 8 + 9 = 9 + 8, \quad 126 + 318 = 318 + 126,$$

y en general, designando por **a** y **b** dos números cualesquiera:

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

Según esta propiedad de la adición podemos cambiar entre sí (conmutar) el orden de los sumandos y la suma no varía. Se denomina *propiedad conmutativa*.

3. Tenemos tres cajas, conteniendo la primera 5 plumas, la segunda 8 y la tercera 4.

Reunamos las plumas de la primera y segunda caja; tendremos $5 + 8 = 13$ plumas. Reunamos ahora a estas las de la tercera caja; tendremos: $13 + 4 = 17$ plumas.

Es claro que al final tendremos reunidas las plumas de las tres cajas.

Al mismo resultado llegaríamos reuniendo las de la segunda y tercera ($4 + 8 = 12$) y agregándolas a las de la primera ($5 + 12 = 17$).

La operación, como se hizo en la primera forma, se expresa en la siguiente manera:

$$(5 + 8) + 4.$$

En cambio, la segunda forma de hacer la operación se expresa así:

$$5 + (8 + 4) ;$$

y puesto que el resultado es el mismo, podemos escribir:

$$(5 + 8) + 4 = 5 + (8 + 4)$$

Según esta propiedad podemos asociar en cualquier forma los sumandos, cuando son más de dos. Se denomina propiedad asociativa de la adición.

- En forma general, representando por las letras **a**, **b**, **c**, tres sumandos cualesquiera:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

EJEMPLO.

De acuerdo con esta propiedad tendremos:

$$(3 + 9) + 11 = 3 + (9 + 11)$$

y efectuando

$$12 + 11 = 3 + 20$$

$$23 = 23.$$

Observación. En la práctica llamamos, sencillamente, suma de varios números, a una expresión como la siguiente:

$$8 + 5 + 7 + 4$$

Pero esto significa, en realidad: sumar 8 + 5; al resultado sumar 7; al nuevo resultado sumar 4. Se lo expresa usando distintos paréntesis, como ser:

$$[(8 + 5) + 7] + 4.$$

Las sumas se efectúan más fácilmente empezando por el paréntesis más interior, es decir el que no encierra a otro, y siguiendo después sucesivamente hacia afuera. Así, en nuestro ejemplo, tendremos:

$$[13 + 7] + 4 ; \quad \text{o sea } [20] + 4 : \quad \text{o sea } 24.$$

Claro está que estas sumas sucesivas, en el caso de números, pueden irse efectuando mentalmente, sin escribirlas, hasta nombrar el último sumando. Así tendremos: 8 más 5, trece; más 7, veinte; más 4, **veinticuatro**.

En el caso de tener los sumandos representados por letras, y según lo que hemos dicho, la expresión:

$$a + b + c + d + e \quad \text{significará:}$$

$$\{ [(a + b) + c] + d \} + e$$

o cualquier otra que se obtenga asociando en todas las formas posibles los sumandos.

EJEMPLO.

$$a + b + c + d + e = (a + b) + (c + d) + e = (a + b + c) + (d + e) = \\ = a + (b + c + d) + e = a + (b + c) + (d + e) : \text{ etc.}$$

Esto se expresa también diciendo que podemos colocar o suprimir paréntesis a voluntad en la suma de varios números naturales.

Resumen. La adición goza de las siguientes propiedades:

I. Propiedad conmutativa, lo cual significa que la suma no altera si se cambia el orden de los sumandos; o sea

$$a + b = b + a.$$

II. Propiedad asociativa, lo cual significa que la suma de varios sumandos puede efectuarse sumando parcialmente en cualquier forma los sumandos, o sea

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

EJERCICIOS.

1. Escribir en tres formas diferentes la suma $2 + 9 + 11$.

$$(2 + 9) + 11 = 2 + (9 + 11) = (2 + 11) + 9.$$

2. Análogamente $m + n + p$:

$$(m + n) + p = m + (n + p) = (m + p) + n.$$

3. Sabiendo solamente hasta la tabla de sumar del 5, efectuar la suma $13 + 8$.

En vez de 13 pondremos $3 + 3 + 3 + 3 + 1$, y en vez de 8 ponemos $3 + 3 + 2$; luego

$$13 + 8 = (3 + 3 + 3 + 3 + 1) + (3 + 3 + 2) ; \text{ o también}$$

$13 + 8 = 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 + 2$. que vamos efectuando sucesivamente, hasta obtener 21.

4. Cambiar la colocación de los dos paréntesis, de todas las maneras posibles, en la suma $(t + s) + (l + r)$.

Se tiene

$$(t + s) + (l + r) = (t + l) + (s + r) = (t + r) + (s + l).$$

§ 3. La Multiplicación

1. Supongamos que debemos efectuar una suma de varios sumandos iguales. Por ejemplo:

$$(1) \quad 2 + 2 + 2,$$

es decir sumar tres veces el sumando 2. Indicamos más abreviadamente esta operación, escribiendo, en vez de $2 + 2 + 2$, en la forma

$$(2) \quad 2 \times 3, \text{ o también } 2.3$$

La expresión (2), que se lee dos por tres, tiene pues el mismo significado que la (1).

De acuerdo con esto tenemos:

$$3.4 = 3 + 3 + 3 + 3$$

$$5.3 = 5 + 5 + 5$$

$$a.2 = a + a$$

El número que se repite como sumando se llama *multiplicando*; el número de veces que se suma, *multiplicador*; ambos números denominanse *factores*; la operación multiplicación, y su resultado *producto*.

EJEMPLO.

$$4.3 = 4 + 4 + 4 = 12, \quad \text{es decir}$$

$$4.3 = 12$$

4 y 3 son los factores; 12 es el producto o resultado de la multiplicación.

2. Cuando el multiplicador sea muy grande podemos utilizar *puntos suspensivos* para indicar los sumandos; un número más pequeño, que se denomina *sub-índice*, colocado a la derecha del último sumando, expresará cuántos sumandos son.

EJEMPLO.

Indicamos:

$$2 \times 15 = 2 + 2 + 2 + \dots + 2_{15}$$

$$a.20 = a + a + a + \dots + a_{20}$$

Análogamente:

$$a.b = a + a + a + \dots + a_b;$$

es decir $a.b$, que se lee a por b , o a multiplicado por b , significa sumar b sumandos iguales a a .

OBSERVACIÓN. Para mayor comodidad se conviene en suprimir el signo $\times$ o el punto entre los factores cuando están representados por letras. Por consiguiente: dos letras puestas una al lado de otra significarán, en adelante, el producto de dos números cualesquiera. Significan pues lo mismo las siguientes tres expresiones:

$$a \times b, \quad a.b^{(*)} \quad \text{y} \quad ab$$

(*) De acuerdo con lo que hemos dicho, usaremos el punto entre dos números sólo como signo de multiplicación. Usaremos, en cambio, la coma para expresar decimales. Nunca separaremos por coma las unidades de diferente orden en los números muy grandes. Si es necesario para leerlos con comodidad separaremos un poco cada tres cifras. Así el número 32946573 se separará 32 946 573 y no 32,946,573.

3. *Propiedad conmutativa.* efectuemos los dos productos siguientes: 2×3 y 3×2 ; es decir, dos productos en que entran los mismos factores (2 y 3) pero en distinto orden.

Tenemos:

$$2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$3 \times 2 = 3 + 3 = 6$$

Los dos productos son iguales; es decir, las dos multiplicaciones conducen al mismo resultado. Lo indicamos escribiendo.

$$2 \times 3 = 3 \times 2$$

Si efectuáramos la operación con cualquier par de factores comprobaríamos que esta propiedad se cumple siempre. Así tendríamos

$$2 \times 5 = 5 \times 2, \quad 3.1000 = 1000.3, \quad 2.4 = 4.2$$

En forma general, representando con a y b dos números cualesquiera:

$$a \times b = b \times a,$$

o más sencillamente

(3)

$$a b = b a$$

Este resultado dice que podemos cambiar entre sí, lo cual se llama *conmutar*, los factores de un producto, sin que varíe.

Por eso decimos que la multiplicación goza de la *propiedad conmutativa*.

La demostración de que esta propiedad se cumple siempre es un poco difícil de hacer en este curso elemental; por tal razón, la dejamos para más adelante.

4. *Propiedad asociativa.* Muchas veces veremos indicado un producto de tres o más factores, como ser

$$3 \times 2 \times 5, \quad 4.2.3.6, \quad \text{o con letras: } a b c.$$

Qué significan estas expresiones?

Tomemos una de ellas:

$3 \times 2 \times 5$ significa: multiplicar 3×2 , y al resultado multiplicarlo por 5. Debemos indicarlo así:

$$(3 \times 2) \times 5.$$

Análogamente $4.2.3.6$ significa:

$$[(4.2).3].6$$

Porqué suprimimos entonces los paréntesis? Por la siguiente razón:

Tomemos el primer producto considerado

$$(3 \times 2) \times 5 = 6 \times 5 = 30$$

Cambiamos ahora la colocación del paréntesis:

$$3 \times (2 \times 5) = 3 \times 10 = 30$$

El resultado es el mismo.

En la misma forma comprobaríamos que en todos los casos podemos colocar el paréntesis entre dos cualesquiera de los factores. Por ser indistinto colocarlo en cualquier parte, es que lo suprimimos. Así, escribiremos:

$$(a \ b) \ c = a \ (b \ c) = a \ b \ c$$

Más adelante probaremos que siempre se cumple esta ley. Se la denomina propiedad asociativa de la multiplicación.

EJEMPLOS.

1. Qué significa $3 \cdot 1$?

De acuerdo con la definición de multiplicación que hemos adoptado, tendremos:

$$3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3$$

$$3 \cdot 2 = 3 + 3$$

$$3 \cdot 1 = 3$$

En general, tendremos:

$$a \cdot 1 = a$$

es decir, multiplicando un número cualquiera por la unidad se obtiene el mismo número.

2. Qué significa $1 \cdot a$?

De acuerdo con la definición de multiplicación tendremos:

$$1 \cdot a = 1 + 1 + 1 + \dots + 1_a = a$$

Pero también obtenemos el mismo resultado aplicando la propiedad conmutativa. Tendremos:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

3. Qué significa $0 \cdot a$?

Según la definición de producto tendremos:

$$0 \cdot 3 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$0 \cdot 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

y en general:

$$0 \cdot a = 0 + 0 + 0 + \dots + 0_a = 0$$

Expresamos este resultado diciendo que cero multiplicado por cualquier número natural da cero.

4. Qué significa $a \cdot 0$?

Con esto queremos expresar lo mismo que anteriormente. Haciendo valer también en este caso la propiedad conmutativa, tendremos:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \quad \text{por el resultado anterior.}$$

Teniendo en cuenta los dos resultados que preceden enunciamos la siguiente propiedad: si uno de los factores de un producto es cero el producto es también cero.

Si son varios los factores y uno de ellos es cero también se cumple esta propiedad. Así tendremos:

$$3 \times 4 \times 5 \times 0 = 0, \quad 2 \times 0 \times 3 = 0, \quad a \cdot b \cdot c \cdot 0 = 0$$

5. *Propiedad distributiva.* Tengamos una expresión como la siguiente:

$$(2 + 4) \cdot 3$$

Podemos efectuar la suma $2 + 4$ y al resultado multiplicarlo por 3. Obtenemos así:

$$(2 + 4) \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18.$$

Pero podemos también efectuar la operación de otra manera, en virtud del siguiente razonamiento:

Multiplicar por 3 la cantidad contenida en el paréntesis significa, de acuerdo con la definición de producto, sumar dicha cantidad tres veces. Resulta:

$$(2 + 4) \cdot 3 = (2 + 4) + (2 + 4) + (2 + 4);$$

pero ya sabemos que por la propiedad asociativa de la adición el segundo miembro puede también escribirse:

$$(2 + 2 + 2) + (4 + 4 + 4). \quad \text{Así obtenemos:}$$

$$(2 + 4) \cdot 3 = (2 + 2 + 2) + (4 + 4 + 4) = 2 \times 3 + 4 \times 3$$

El resultado es pues:

$$(2 + 4) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3$$

Análogamente, obtendríamos:

$$(3 + 5) \cdot 4 = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4$$

Generalización. Representemos por a , b , m tres números naturales cualesquiera. Qué significa $(a + b) \cdot m$?

Como antes, esto significa sumar a y b , y multiplicar el resultado por m .

Pero también tendrá otro significado: según la definición de

multiplicación, esto querrá decir "sumar m veces" la cantidad contenida en el paréntesis: es decir

$$(a + b) m = (a + b) + (a + b) + (a + b) + \dots + (a + b)_m$$

Pero la suma del segundo miembro puede también escribirse:

$$(a + a + a + \dots + a_m) + (b + b + b + \dots + b_m),$$

o sea $a m + b m.$

Resulta pues:

$$(4) \quad (a + b) m = a m + b m$$

Este resultado expresa la propiedad distributiva del producto. Se enuncia, simplemente, diciendo: para multiplicar una suma indicada por un número se multiplica cada sumando por dicho número y se suman los productos parciales.

Esta propiedad vale también para el caso de más de dos sumandos. Así tendremos:

$$(2 + 5 + 7) 4 = 2.4 + 5.4 + 7.4 = 8 + 20 + 28 = 56$$

$$(5) \quad (a + b + c) d = a d + b d + c d$$

6. Qué significado tiene la expresión

$$(2 + 4) (5 + 3) ?$$

En primer lugar, podemos sumar los números contenidos en cada paréntesis y después multiplicar estos resultados. Así tendríamos:

$$(2 + 4) (5 + 3) = 6.8 = 48.$$

Pero podemos también proceder en otra forma:

Efectuemos sólo la suma del segundo paréntesis; obtendremos $(2 + 4) 8$; y según lo demostrado anteriormente: $(2 + 4) 8 = 2.8 + 4.8$; y volviendo a poner en lugar de 8 en el segundo miembro la suma indicada:

$$(2 + 4) (5 + 3) = 2. (5 + 3) + 4 (5 + 3) ;$$

pero el segundo miembro es, como sabemos,

$$2.5 + 2.3 + 4.5 + 4.3 ; \quad \text{luego:}$$

$$(2 + 4) (5 + 3) = 2.5 + 2.3 + 4.5 + 4.3$$

Análogamente, obtendríamos:

$$(9 + 11) (15 + 10) = 9.15 + 9.10 + 11.15 + 11.10 ;$$

y efectuando: $20.25 = 135 + 90 + 165 + 110.$

$$500 = 500$$

En el caso general, si representamos por **a, b, c, d**, cuatro números naturales cualesquiera, tendremos

$$(6) \quad (a + b) (c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Este resultado se enuncia diciendo que: para multiplicar una suma indicada por otra, se multiplica cada sumando de una suma por los de la otra y se suman los productos parciales.

Esta propiedad vale también cuando son más de dos sumandos.

EJEMPLOS.

$$1. \quad (3 + 4 + 2) (9 + 5 + 7) = 9.21 = 189$$

o también

$$\begin{aligned} 2. \quad (3 + 4 + 2) (9 + 5 + 7) &= 3.9 + 4.9 + 2.9 \\ &\quad + 3.5 + 4.5 + 2.5 \\ &\quad + 3.7 + 4.7 + 2.7 \\ &= 27 + 36 + 18 \\ &\quad + 15 + 20 + 10 \\ &\quad + 21 + 28 + 14 \end{aligned}$$

$$3. \quad = 189$$

$$(a + b + c) (m + n + p) = am + bm + cm + an + bn + cn + ap + bp + cp.$$

4. No sabiendo efectuar productos en que entren cifras mayores de 5 efectuar 18.12.

Podemos escribir

$$18.12 = (5 + 5 + 5 + 3) (5 + 5 + 2);$$

y este producto del segundo miembro da

$$5.5 + 5.5 + 5.5 + 3.5 + 5.5 + 5.5 + 5.5 + 3.5 + 5.2 + 5.2 + 5.2 + 3.2,$$

lo cual da

$$25 + 25 + 25 + 15$$

$$+ 25 + 25 + 25 + 15$$

$$+ 10 + 10 + 10 + 6 = 216$$

7. *El factor común.* Según hemos visto, podemos poner:

$$(2 + 5). 4 = 2. 4 + 5. 4 \quad (7)$$

Inversamente: si tenemos $2. 4 + 5. 4$ podemos escribir, según la (4): $(2 + 5). 4$; o sea:

$$(7) \quad 2. 4 + 5. 4 = (2 + 5). 4$$

Como se ve, en los productos 2.4 y 5.4 , que entran en la suma, hay un factor igual (4); lo cual se expresa diciendo que contienen un factor común.

En tal caso, según se vé en la (7), podemos sumar los otros dos factores y multiplicar dicha suma por el factor común.

Así tendremos:

$$3. 6 + 5. 6 = (3 + 5) 6,$$

y efectuando

$$18 + 30 = 8.6$$

$$48 = 48$$

Cuando en vez de una suma como $3. 6 + 5. 6$ escribimos $(3 + 5). 6$ decimos que factorizamos por 6; o también que ponemos en evidencia (hacemos ver) el factor común 6.

En el caso general, tendremos:

$$(8) \quad a m + b m = (a + b). m$$

EJEMPLOS.

1. $3.4 + 5.4 + 9.4 = (3 + 5 + 9).4 = 17.4 = 68$
2. $5.3 + 11.3 + 3.9 = (5 + 11 + 9).3 = 25.3 = 75$
3. $a b + c b + d b = (a + c + d) b$
4. $a b + m a + p a = (b + m + p) a$
5. $a + a b = a. 1 + a b = (1 + b) a$
6. $m n + n = m n + 1. n = (m + 1) n$
7. $r + r s + r l = (1 + s + l) r$
8. $a b c + a b d = (c + d) a b$
9. $3 a b + 5 a b = (3 + 5) a b = 8 a b$
10. $3 m + m n + a b m = (3 + n + a b) m$
11. $a b c + 3 a b c + a b c d = a b c. 1 + 3 a b c + a b c d$
 $= (1 + 3 + d) a b c = (4 + d) a b c$
12. $a b c + m a d + n p a = (b c + m d + n p) a.$

§ 3. Potencias de números naturales

1. En una multiplicación los factores pueden ser iguales. Así tenemos: 3×3 , y también $3.3.3.3$.

Estos productos, en que son iguales todos los factores que figuran, se indican en la Aritmética en forma abreviada.

Así, en vez de $3 \cdot 3$ escribimos 3^2 ; en vez de $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ escribimos 3^4 . Lo expresamos diciendo:

En lugar de 3 por 3, tres elevado a la segunda potencia.

En lugar de 3 por 3 por 3 por 3, tres elevado a la cuarta potencia.

Inversamente:

5^6 significa $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

Esta cifra más pequeña que indica el número de factores iguales del producto se denomina exponente; el factor que se repite, la base; la operación, elevación a potencia: el resultado potencia.

EJEMPLOS.

1. $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ 3 es la base
4 es el exponente,

y la expresión se lee: tres elevado a la cuarta potencia, o más breve tres a la 4ª.

2. Análogamente, significa:

$$a^2 = a \cdot a$$

$$b^3 = b \cdot b \cdot b.$$

Si son muchos los factores podemos abreviar el segundo miembro indicándolo con puntos suspensivos y un sub-índice. Por ejemplo:

$$3^{20} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3_{20}$$

$$a^{20} = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a_{20}$$

$$2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2_n$$

$$m^n = m \cdot m \cdot m \cdot \dots \cdot m_n$$

3. Qué significa a^1 ?

Recordemos que

$$a^3 = a \cdot a \cdot a.$$

$$a^2 = a \cdot a.$$

Análogamente, adoptamos para a^1 , el siguiente significado:

$$a^1 = a$$

Así resulta que cuando un número no tiene exponente podemos asignarle el exponente 1.

2. De acuerdo con el significado de potencia tendremos:

$$1^2 = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

y en general $1^n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1_n = 1,$

lo cual se expresa diciendo que cualquier potencial natural de 1 es igual a 1.

3. Efectuemos el producto de 2^3 por 2^5 , es decir, multipliquemos dos potencias de igual base. En vez de hacer previamente las potencias, si indicamos la operación, tendremos:

$$2^3 \times 2^5 = (2.2.2) (2.2.2.2.2) = 2.2.2.2.2.2.2 = 2^8$$

El resultado es pues una potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores. Podemos indicarlo así:

$$2^3 \times 2^5 = 2^{(3+5)} = 2^8$$

Análogamente, tendremos:

$$3^2 \cdot 3^7 = 3^{(2+7)} = 3^9.$$

La suma de los exponentes puede hacerse mentalmente. Así, escribiremos directamente: $3^2 \cdot 3^7 = 3^9$.

4. La propiedad anterior es general. Así tendremos:

$$n^2 \cdot n^5 = n^{2+5} = n^7$$

$$3^m \cdot 3^n = 3^{(m+n)}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$$

Esta propiedad se expresa brevemente diciendo: para multiplicar dos potencias de la misma base se suman los exponentes.

La propiedad puede, naturalmente, utilizarse también a la inversa, expresando una potencia como producto de otras.

Sea, por ejemplo: efectuar 2^8 sabiendo que $2^3 = 8$ y $2^2 = 4$.

$$2^8 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$$

$$2^{18} = 2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^2 = 256 \cdot 256 \cdot 4 = 262144.$$

5. Qué significa la expresión

$$(2 \times 4)^3 ?$$

Significa elevar a la tercera potencia el producto 2×4 , o sea 8, es decir: $8^3 = 512$. Pero teniendo en cuenta la definición de potencia podemos también efectuar la operación en otra forma:

$$\begin{aligned} (2 \times 4)^3 &= (2 \times 4) (2 \times 4) (2 \times 4) \\ &= (2 \times 2 \times 2) (4 \times 4 \times 4) \\ &= 2^3 \cdot 4^3. \end{aligned}$$

En vez de efectuar el producto y elevarlo a la potencia indicada, podemos, pues, hacer las potencias de los factores y multiplicarlas después; resulta así:

$$(2 \times 4)^3 = 2^3 \times 4^3 = 8 \times 64 = 512$$

Tendremos, análogamente:

$$(a b)^3 = a^3 b^3, \quad (2.5)^m = 2^m 5^m$$

y en general:

$$(a b)^m = a^m b^m$$

La misma regla vale si son más de dos factores.

Así, tendremos:

$$(5.4.6)^3 = 5^3 4^3 6^3$$

$$(a b c)^4 = a^4 b^4 c^4$$

$$(a b c d)^m = a^m b^m c^m d^m$$

Esta propiedad se expresa brevemente diciendo que para elevar un producto indicado a una potencia se elevan a dicha potencia todos los factores.

6. *Potencias de 10.* Las potencias de 10 son muy fáciles de recordar. Tenemos:

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10.10 = 100.$$

$$10^3 = 10.10.10 = 1000.$$

$$10^4 = 10.10.10.10 = 10000.$$

Se ve fácilmente que una potencia cualquiera de 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente.

De acuerdo con esto, indicaremos:

$$10^n = 10000 \dots 0_n$$

Las potencias de 10 son muy cómodas para expresar números escritos con muchos ceros. Así, por ejemplo, la velocidad de la luz expresada en centímetros por segundo es, 30 000 000 000; la expresaremos: 3.10^{10} , evitándonos así el escribir tantos ceros.

EJERCICIOS.

1. Multiplicar $a^2 b$ por $a b^2$.

Recordemos, en primer lugar, que cuando una letra figura sin exponente podemos atribuirle el exponente 1.

Tenemos, $a^2 b.a b^2$; y variando el orden de los factores:

$$a^2.a.b.b^2, \quad \text{o sea } a^3 b^3; \quad \text{resulta así}$$

$$a^2 b.a b^2 = a^3 b^3$$

Según este resultado, al multiplicar un producto de varios factores por

Arit. y Alg., 2.

otro, también compuesto por varios factores, se suman los exponentes de las potencias de igual base.

2. Multiplicar $3 x^2 y$ por $4 x y^2$.

$$\begin{aligned} \text{Tenemos} \quad 3 x^2 y \cdot 4 x y^2 &= 3 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y^2 \\ &= 12 x^3 y^3 \end{aligned}$$

3. Multiplicar $5 x y$ por $6 a b$.

$$\text{Tenemos} \quad 5 x y \cdot 6 a b = 5 \cdot 6 x y a b = 30 x y a b$$

4. Multiplicar $2 a^2 b$ por $9 a^2 c$

$$\text{Tenemos} \quad 2 a^2 b \cdot 9 a^2 c = 18 a^4 b c$$

5. Multiplicar $(3 a^2 b)$ $(5 a b^2)$ $(2 a b)$

$$= 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b^2 \cdot b = 30 a^4 b^4$$

6. $(2 x^2 y z)$ $(3 x y^2 z)$ $(4 x y z^2)$.

$$= 2 \cdot 3 \cdot 4 x^2 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y^2 \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z^2 = 24 x^4 y^4 z^4$$

OBSERVACIÓN. En la práctica estas operaciones se hacen más rápidamente, sin los pasos intermedios, en la siguiente forma:

Multiplicamos entre sí los factores numéricos, sumamos los exponentes de las letras iguales y colocamos directamente a continuación las otras.

Así, en el ejercicio 5, escribimos directamente:

$$(2 x^2 y z) (3 x y^2 z) (4 x y z^2) = 24 x^4 y^4 z^4.$$

En el ejercicio 4:

$$2 a^2 b \cdot 9 a^2 c = 18 a^4 b c.$$

7. *Cuadrado de un binomio.* Qué significa la expresión $(2 + 5)^2$?

Sencillamente, efectuar la suma $2 + 5$ y elevar el resultado al cuadrado. Así, obtenemos:

$$(2 + 5)^2 = 7^2 = 49.$$

Pero podemos también proceder en otra forma, sin efectuar la suma. Fundándonos en la definición de potencia, tendremos:

$(2 + 5)^2 = (2 + 5) (2 + 5)$; y para efectuar la operación del segundo miembro recordamos cómo se multiplica una suma indicada por otra, con lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned} (2 + 5)^2 &= 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \\ &= 4 + 10 + 10 + 25 = 49. \end{aligned}$$

Tratándose de números no hay mucha ventaja en proceder en esta forma. Pero si tenemos una suma en que los números pueden ser cualesquiera, es decir que pueden estar representados por letras, deducimos una regla de gran aplicación.

En efecto, sea: $(a + b)^2$. Tenemos:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a.a + b.a + a.b + b.b\end{aligned}$$

El segundo sumando, $b.a$, y el tercero, $a.b$, son iguales; su suma da, entonces: $a.b + a.b = 2ab$. El primer sumando es a^2 y el cuarto b^2 . Por consiguiente, la fórmula anterior da

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

El resultado que expresa esta fórmula se enuncia en la siguiente forma:

El cuadrado de un binomio, $(a + b)^2$, es igual al cuadrado del primer término, a^2 , más el doble producto del primero por el segundo, $2ab$, más el cuadrado del segundo, b^2 .

EJERCICIOS.

1. $(1 + x)^2 = 1^2 + 2 \cdot x + x^2$
 $= 1 + 2x + x^2$
2. $(2x + y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2$
 $= 4x^2 + 4xy + y^2$
3. $(x^3 + y^3)^2 = (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot y^3 + (y^3)^2$
 $= x^6 + 2x^3y^3 + y^6$
4. $(x^2 + x^3)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot x^3 + (x^3)^2$
 $= x^4 + 2x^5 + x^6$
5. $(ab + ac)^2 = (ab)^2 + 2ab \cdot ac + (ac)^2$
 $= a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2$
6. $(2ab + 3bc)^2 = (2ab)^2 + 2 \cdot 2ab \cdot 3bc + (3bc)^2$
 $= 2^2a^2b^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3abc \cdot bc + 3^2b^2c^2$
 $= 4a^2b^2 + 12a^2b^2c + 9b^2c^2$
7. $(4a^2b + 4ab^3)^2 = (4a^2b)^2 + 2 \cdot 4a^2b \cdot 4ab^3 + (4ab^3)^2$
 $= 16a^4b^2 + 32a^3b^4 + 16a^2b^6$
8. $(1 + 2abc)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2abc + (2abc)^2$
 $= 1 + 4abc + 4a^2b^2c^2$
9. $(a^3b^2c + ab^2c^3)^2 = (a^3b^2c)^2 + 2a^3b^2c \cdot ab^2c^3 + (ab^2c^3)^2$
 $= a^6b^4c^2 + 2a^4b^4c^4 + a^2b^4c^6$

CAPITULO III

OPERACIONES INVERSAS

§ 5. La Substracción

1. En el capítulo anterior hemos estudiado la adición y sus propiedades. Nos ocuparemos ahora de la substracción.

Volvamos a considerar una caja que contiene 30 plumas. Tomamos varias de ellas y las colocamos en otra caja. Si son 10 las plumas retiradas, cuántas quedan en la primera caja?

Para averiguarlo podríamos proceder de esta manera:

De las 30 plumas sacamos 1; nos quedan 29; sacamos otra; nos quedan 28; y así seguimos. Cuando hayamos sacado 10 nos quedarán 20.

Decimos entonces que la diferencia entre 30 y 10 es 20; o que 30 menos 10 es igual a 20.

Ahora bien: si sumamos el número de plumas retiradas y el número de plumas que quedan obtendremos el que contenía en un principio la caja. Así, tenemos

$$20 + 10 = 30.$$

De acuerdo con esto podemos resolver el problema razonando en otra forma:

El número de plumas que queda será el número que sumado a 10 da 30. Este número es 20.

Daremos pues la siguiente definición:

La substracción es la operación que tiene por objeto dada la suma y un sumando determinar el otro sumando.

EJEMPLO.

La suma de dos números es 16; uno de los números es 9, cuál es el otro?

El otro sumando es 7, pues por la tabla de sumar, según sabemos, es

$$9 + 7 = 16$$

Decimos también que la diferencia entre 16 y 9 es 7, y lo escribimos

$$16 - 9 = 7;$$

y se lee: 16 menos 9 igual a 7.

El número dado se llama **minuendo**; el sumando conocido **substraendo**, y el sumando que hay que determinar **resto** o **diferencia**.

De acuerdo con lo dicho, podemos escribir

$$25 - 14 = 11 \quad \text{porque} \quad 25 = 11 + 14.$$

GENERALIZACIÓN.

Sean **a** y **b** dos números naturales cualesquiera. Llamamos **c** a su suma; es decir

$$(1) \quad a + b = c$$

Si fueran dados **a** y **c**, y nos propusiéramos determinar **b**, indicaríamos la operación en la forma:

$$(2) \quad b = c - a$$

Si fueran dados **c** y **b** y nos propusiéramos determinar **a**, indicaríamos la operación en la forma:

$$(3) \quad a = c - b$$

Las tres expresiones (1), (2) y (3) tienen pues el mismo significado. Así, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} 45 - 29 = 16 \\ 45 - 16 = 29 \end{array} \right\} \text{ porque } 45 = 29 + 16.$$

Según vemos, la suma de la resta y el substraendo es igual al minuendo.

Esto nos sirve, en cierta manera, de prueba de la subtracción; es decir, es un procedimiento que nos permite averiguar si la operación ha sido bien hecha (confiamos para esto en que no nos equivocamos en la operación de prueba, que es un poco más fácil que la anterior, pues es una suma).

EJEMPLO.

Restar 13125 de 18526.

$$\begin{array}{r} 18526 \\ - 13124 \\ \hline 5402 \end{array}$$

Prueba

$$\begin{array}{r} 13124 \\ + 5402 \\ \hline 18526 \end{array}$$

OBSERVACIÓN.

Qué significado tienen las expresiones

$$2 - 2, \quad 9 - 9, \quad 15 - 15, \quad \dots \quad a - a?$$

Evidentemente, podemos poner:

$$2 - 2 = 0 \quad 9 - 9 = 0 \quad 15 - 15 = 0 \quad a - a = 0$$

puesto que:

$$2 = 2 + 0 \quad 9 = 9 + 0 \quad 15 = 15 + 0 \quad a = a + 0.$$

Decimos entonces que la diferencia entre dos números iguales es cero, o nula.

APLICACIONES.

1. Siendo $14 - x = 9$ determinar x .

Podemos poner:

$$14 = 9 + x \quad ; \quad x = 14 - 9 = 5$$

2. Siendo $x - 14 = 6$, determinar x .

Tenemos $x = 6 + 14 = 20$.

3. Volvamos a tener: $a + b = c$; será $a = c - b$

es decir b que estaba precedido del signo $+$ en el primer miembro de la igualdad se encuentra ahora en el segundo miembro, pero precedido del signo $-$.

En cambio, si tenemos $a - b = c$, será $a = c + b$; es decir, b que estaba precedido del signo $-$ en el primer miembro de la igualdad ha pasado al segundo, pero precedido del signo $+$.

Este resultado se expresa brevemente diciendo que todo número que está como sumando en un miembro de una igualdad puede pasar restando al otro miembro; y recíprocamente.

2. Es muy fácil ver que también se cumple la propiedad distributiva en el producto de una diferencia por un número; es decir que $(a - b) \cdot m = a m - b m$.

Así, tendremos:

$$(8 - 5) \cdot 4 = 8 \cdot 4 - 5 \cdot 4$$

$$3 \cdot 4 = 32 - 20$$

$$12 = 12$$

EJERCICIOS.

1. Factorizar por a en la expresión $a \cdot b - 3 a$.

Tenemos $a \cdot b - 3 a = (b - 3) a$

2. Factorizar por $3 x$ en la expresión $9 x^2 - 12 x y$.

Tenemos $9 x^2 - 12 x y = (3 x - 4 y) 3 x$.

3. Factorizar por 10^3 en la expresión $100000 - 1000$.

Tenemos:

$$\begin{aligned} 100000 - 1000 &= 10^5 - 10^3 \\ &= 10^3 \cdot 10^2 - 10^3 \cdot 1 \\ &= (10^2 - 1) 10^3 \end{aligned}$$

4. Factorizar por 10^3 en $10000 - 1000$.

Tenemos: $10000 - 1000 = 10^4 - 10^3 = (10^2 - 10) \cdot 10^2$

5. Factorear por 10^3 en la expresión $5000 - 2000$.

Tenemos: $5000 - 2000 = 5 \cdot 1000 - 2 \cdot 1000$

$$= 5 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^3$$

y finalmente

$$= (5 \cdot 10 - 2 \cdot 10) \cdot 10^2$$

6. Sea el número 4655. Expresarlo como sumas de productos de sus cifras por potencias de 10.

Tenemos:

$$4655 = 4000 + 600 + 50 + 5$$

$$= 4 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 5$$

$$= 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 5$$

Análogamente:

$$2346 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6$$

$$325 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$$

§ 6. La división

1. *División exacta.* Propongámonos resolver el siguiente problema:

¿Cuántas docenas de plumas hay en una caja que contiene 84 plumas? Podríamos enunciarlo también en la siguiente forma: cuántos grupos de 12 plumas pueden formarse con las 84 contenidas en la caja?

La manera más sencilla de averiguarlo sería sacar (restar) 12 plumas, después otras 12, y seguir así hasta agotarlas; y encontraríamos que se agotan al efectuar 7 veces la operación mencionada. Lo expresamos diciendo que 84 dividido por 12 es igual a 7, y lo indicamos:

$$(1) \quad 84 \div 12 = 7, \quad \text{o también } 84/12 = 7 \quad (1')$$

Inversamente, si vamos sumando los grupos de 12 plumas, cuando hayamos usado los 7 grupos obtendremos las 84 plumas; es decir, será

$$(2) \quad 12 \times 7 = 84$$

La pregunta podría pues formularse en esta otra forma: 84 es el producto de dos factores, uno de los cuales es 12; cuál es el otro factor? La respuesta es 7. En forma general: hacer la división exacta del número D por el número d , es determinar otro número, c , tal que

$$(3) \quad D = d \times c, \quad \text{o sea: } D \div d = c$$

El producto dado D se llama *dividendo*, el factor dado d se llama *divisor* y el factor que se quiere determinar *cociente exacto*. Según estas definiciones la expresión (3) se enunciará:

I. En una división exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente.

2. Si multiplicamos uno de los factores de la igualdad (2) por un número cualquiera, 2 p. ej., el segundo miembro quedará también multiplicado; es decir, tendremos:

$$24 \times 7 = 168, \text{ o sea } (12 \cdot 2) \times 7 = 84 \times 2;$$

resulta así que la división de $84 \div 2$, por $12 \div 2$ conduce al mismo cociente que la división de 84 por 12. En el caso general, esto proviene de que la (3) puede escribirse también en la siguiente forma:

$$(3') \quad D \times n = (d \times n) \times c, \text{ o sea } D \times n \div d \times n = c.$$

Hemos pasado de las (3) a las (3') multiplicando D y d por n ; análogamente de las (3') obtenemos las (3) haciendo la operación inversa, es decir dividiendo $D \times n$ y $d \times n$, por n . Estos resultados se enuncian diciendo:

II. Si se multiplica por un mismo número el dividendo y el divisor de una división exacta el cociente no varía. Si el dividendo y el divisor son múltiplos de un número se puede dividir a ambos por dicho número y el cociente no varía.

EJEMPLOS.

$$\begin{array}{ccccccc} 12 \div 3 = 4 & , & 24 \div 6 = 4 & , & 36 \div 9 = 4 & , & 120 \div 30 = 4 \\ 180 \div 60 = 3 & & 90 \div 30 = 3 & & 45 \div 15 = 3 & & 9 \div 3 = 3 \end{array}$$

3. *División entera*. Supongamos ahora que la caja contiene 90 plumas y formemos nuevamente grupos de 12. Formaremos 7 grupos y nos quedarán además 6 plumas, que no alcanzan a formar un grupo, por ser $6 < 12$. Tendremos así $90 = 84 + 6$, o sea

$$(4) \quad 90 = 12 \times 7 + 6$$

El número 90 se llama, también en este caso, *dividendo*, 12 *divisor* y 7 *cociente entero*; el número 6 (que en

nuestro problema indica cuantas plumas quedan sin alcanzar a formar grupo) se llama resto. La operación efectuada, que se denomina división inexacta o entera, consiste, en realidad, en descomponer el número 90 en dos sumandos uno de los cuales sea el mayor múltiplo de 12 en él contenido. Así, p. ej. por ser $80 = 11 \times 7 + 3$, decimos que en la división de 80 por 11 es 7 el cociente y 3 el resto. En general:

III. En una división inexacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el resto; y el resto es menor que el divisor. Designando pues por D el dividendo, d el divisor, c el cociente, r el resto, tendremos:

$$(5) \quad D = d \times c + r, \quad \text{y} \quad r < d.$$

EJEMPLOS.

$$1394 = 124 \times 11 + 30, \quad 30 < 124$$

$$416 = 28 \times 14 + 24, \quad 24 < 28;$$

la 1ª dice: 11 es el cociente y 30 el resto de la división de 1394 por 124;
la 2ª dice: 14 es el cociente y 24 el resto de la división de 416 por 28.

4. *Prueba de la división.* La propiedad III sirve de prueba de la división. Así, por ejemplo: digo que en la división de 138 por 20 es 6 el cociente y 8 el resto; pues

$$138 = 20 \times 6 + 18, \quad \text{y} \quad 18 < 20$$

Si no se cumplen las *dos* condiciones la división está mal hecha. Por ejemplo:

$$138 = 20 \times 5 + 38; \quad \text{pero} \quad 38 > 20;$$

se cumple pues la primera condición enunciada y no la segunda; luego no es 5 el cociente y 38 el resto. Por consiguiente, para comprobar si la división está bien hecha vemos: 1º, si el resto es menor que el divisor; 2º, multiplicamos el divisor por el cociente y a dicho producto sumamos el resto; si el número que obtenemos es igual al dividendo la división es correcta.

5. *Propiedades de la división exacta.* Por ser

$$4 = 4 \times 1 = 1 \times 4 \quad \text{deducimos} \quad 4 \div 4 = 1 \quad \text{y} \quad 4 \div 1 = 4;$$

y en general, por ser $n = n.1$, y también $n = 1.n$ deducimos:

$$n \div n = 1 \quad , \quad n \div 1 = n \quad ,$$

resultados que se enuncian, respectivamente:

IV. Dividiendo un número por sí mismo el cociente es 1; y dividiendo un número por la unidad el cociente es el número mismo.

Sea ahora un producto indicado de dos factores: $15 \times 14 = 210$. Para dividir este producto por uno de los factores, 14 p. ej. bastará suprimir dicho factor, y el cociente exacto de dividir 210 por 14 será 15, es decir el factor restante; pues multiplicando 15 por 14 obtenemos 210. En forma general: si es $a.b = c$, se tiene $c \div a = b$, $c \div b = a$, es decir:

$$a.b \div a = b \quad , \quad a.b \div b = a \quad , \quad \text{o sea:}$$

V. Para dividir un producto de dos factores por uno de ellos bastará suprimir dicho factor.

Si en vez de dos factores fueran varios el mismo principio es válido, como puede demostrarse (o comprobarse) fácilmente. Así

$$3 \times 8 \times 90 \div 8 = 3 \times 90$$

Esta propiedad es muy útil para dividir números terminados en ceros por 10, 1000, etc.

EJEMPLO.

Puesto que es $3190 = 319 \times 10$, dividiendo por 10 resulta 319, lo que equivale a suprimir el cero de 3190.

Análogamente: $2800 \div 100 = 28$, $2800 \div 10 = 280$, $34000 \div 10 = 3400$, $34000 \div 1000 = 34$.

Observación. Podemos, también, expresar en otra forma el cociente entero de la división (§ 6, 4). Sea el ejemplo allí considerado de división entera de 90 por 12; habíamos encontrado 7; y tenemos:

$$12.7 = 84 < 90 \quad \text{es decir} \quad 12.7 < 90$$

$$12.8 = 96 > 90 \quad \quad \quad 12.8 > 90$$

lo cual puede expresarse fácilmente poniendo

$$(6) \quad 12.7 < 90 < 12.8 \quad ,$$

que se lee: 12.7 menor que 90 menor que 12.8.

Dividiendo los tres miembros de la expresión (6) por 12 y recordando (V) obtenemos:

$$(7) \quad 7 < \frac{90}{12} < 8$$

que es otra manera de expresar que 7 es el cociente entero de la división de 90 por 12.

Análogamente, con los otros ejemplos del § 6, 4:

$$11 < \frac{1394}{124} < 12 \text{ luego 11 es el cociente entero de la división de 1394 por 124.}$$

$$14 < \frac{416}{28} < 15 \text{ luego 14 es el cociente entero de la división de 416 por 28}$$

6. Sea dividir la suma indicada $(20 + 12)$ por 4. Evidentemente llegamos al mismo resultado haciendo la suma, 32, y viendo cuántos grupos de a 4 unidades hay (división por 4) que viendo cuántos grupos hay en 20 unidades, después cuántos hay en 12 y sumando los grupos; es decir:

$$(20 + 12) \div 4 = 20 \div 4 + 12 \div 4 = 5 + 3 = 8$$

Esta propiedad es una consecuencia de una propiedad correspondiente de la multiplicación; pues

$$(20 \div 4 + 12 \div 4) \times 4 = (20 \div 4) 4 + (12 \div 4) 4 = 20 + 12$$

En general, siendo a y b múltiplos de n , se tendrá:

$$(a + b) \div n = a \div n + b \div n, \quad \text{que se enuncia:}$$

VI. Para dividir por un número la suma de otros dos (múltiplos de aquél) se divide por dicho número cada sumando.

7. Volvamos ahora a la igualdad:

$$138 = 20 \times 6 + 18; \text{ dividiendo ambos miembros por 2}$$

$$138 \div 2 = (20 \times 6 + 18) \div 2 = (20 \times 6) \div 2 + 18 \div 2 = \\ = (20 \div 2) \times 6 + 18 \div 2. \text{ Resulta así:}$$

$138 \div 2 = (20 \div 2) \times 6 + 18 \div 2$, donde se ve que: $138 \div 2$ es el dividendo; $20 \div 2$ es el divisor, 6 el cociente, $18 \div 2$ el resto; es decir, al dividir el antiguo dividendo y el antiguo divisor por 2, el cociente, 6, no ha cambiado, pero el resto, 18, ha quedado dividido por dicho número. Lo enunciamos:

VII. Si el dividendo y el divisor son múltiplos de un número, al dividirlos por dicho número el

cociente no cambia pero el resto queda dividido por el mismo número.

Aplicación. Utilizamos esta propiedad para facilitar la división de números terminados en ceros. Así, por ejemplo: sea dividir 320000 por 50000. Suprimimos igual número de ceros, y dividimos después 32 por 5; el cociente es 6 y el resto 2. Por la propiedad anterior el cociente, 6, es el mismo que al dividir 320000 por 50000; en cambio el resto ha quedado dividido por 10000; luego, para obtener el primitivo tendremos: $2 \times 10000 = 20000$. El resultado pues:

$$320000 = 50000 \times 6 + 20000$$

8. *División de potencias de igual base.* Sabemos que por definición es

$$9^3 = 9 \times 9 \times 9, \quad 9^5 = 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9.$$

Propongámonos ahora dividir 9^5 por 9^3 , es decir efectuar la operación $9^5 \div 9^3$; o sea:

$$(9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9) \div (9 \times 9 \times 9).$$

Hemos visto que podemos dividir el dividendo y el divisor por un mismo número, y el cociente no varía. El cociente dado será pues el mismo que $(9 \times 9 \times 9 \times 9) \div (9 \times 9)$, y también igual a $(9 \times 9 \times 9) \div 9$, o sea 9×9 , que es 9^2 ; por tanto:

$$(9^5 \div 9^3) = 9^{5-3} = 9^2.$$

Análogamente:

$$4^3 \div 4^2 = 4^{3-2} = 4^1$$

$$5^5 \div 5^2 = 5^{5-2} = 5^3$$

y en general:

$$a^m \div a^n = a^{(m-n)} \quad (\text{suponemos } m > n)$$

Este resultado se enuncia diciendo:

VIII. El cociente de dividir dos potencias de la misma base es una nueva potencia de igual base cuyo exponente es la diferencia entre el exponente del dividendo y el del divisor.

EJEMPLOS.

$$625 \div 25 = 5^4 \div 5^2 = 5^{4-2} = 5^2 = 25$$

$$8^7 \div 8^4 = 8^3$$

$$11^6 \div 11^4 = 11^2$$

$$b^5 \div b^2 = b^3$$

$$c^9 \div c^3 = c^6$$

$$d^p \div d^q = d^{p-q}$$

$$Aa \div Ab = Aa-b$$

§ 7. Extracción de raíces

1. Ya sabemos lo que significa una potencia. Las que más a menudo se presentan son la segunda potencia y la tercera potencia. Por esta razón se les da nombres especiales. En lugar de segunda potencia, decimos: elevado al cuadrado, o simplemente al cuadrado. En lugar de tercera potencia, decimos: elevado al cubo, o simplemente al cubo.

EJEMPLOS.

a^2 leemos: a al cuadrado, o a cuadrado

b^3 leemos: b al cubo, o b cubo.

Estos nombres provienen de la geometría. En efecto: si a es la longitud del lado de un cuadrado, su área es $a \times a$, ó sea a^2 .

Si a es la arista de un cubo, su volumen es $a \times a \times a$ o sea a^3 .

2. Volvamos a las potencias.

Sea $3^2 = 9$. (1)

Nos preguntamos ahora: cuál es el número cuyo cuadrado es 9?. La respuesta es bien sencilla; la igualdad (1) dice que dicho número es 3.

Análogamente, si preguntamos ahora: cuál es el número cuyo cubo es 8?; si recordamos que $2^3 = 8$, la respuesta es sencilla: dicho número es 2.

Ahora bien: así como indicamos que 3 al cuadrado es igual a 9, usamos otro signo para expresar que 3 es el número cuyo cuadrado es 9. Escribimos

$\sqrt{9} = 3$, y leemos: raíz cuadrada de 9 es 3.

Análogamente, por ser 2 el número cuyo cubo es 8 expresamos

$\sqrt[3]{8} = 2$, y leemos: raíz cúbica de 8 es 2.

Análogamente:

Por ser $2^4 = 16$, escribimos: $\sqrt[4]{16} = 2$

» $3^3 = 27$, » : $\sqrt[3]{27} = 3$

» $10^5 = 100000$, » : $\sqrt[5]{100000} = 10$

y en general

$$a^n = A \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{A} = a$$

son dos expresiones que tienen el mismo significado. La segunda se lee: raíz enésima de A es igual a a .

Por consiguiente, a la pregunta: porqué la raíz cuadrada de 100 es 10, es decir porqué $\sqrt{100} = 10$, contestaremos:

Porque 10 al cuadrado es 100, es decir, porque $10^2 = 100$.

Damos a continuación una Tabla de los cuadrados y cubos de los nueve primeros números naturales, que nos servirá también para determinar las raíces cuadradas y cúbicas de algunos números.

$1^2 = 1$	luego	$\sqrt{1} = 1$	$1^3 = 1$	luego	$\sqrt[3]{1} = 1$
$2^2 = 4$	»	$\sqrt{4} = 2$	$2^3 = 8$	»	$\sqrt[3]{8} = 2$
$3^2 = 9$	»	$\sqrt{9} = 3$	$3^3 = 27$	»	$\sqrt[3]{27} = 3$
$4^2 = 16$	»	$\sqrt{16} = 4$	$4^3 = 64$	»	$\sqrt[3]{64} = 4$
$5^2 = 25$	»	$\sqrt{25} = 5$	$5^3 = 125$	»	$\sqrt[3]{125} = 5$
$6^2 = 36$	»	$\sqrt{36} = 6$	$6^3 = 216$	»	$\sqrt[3]{216} = 6$
$7^2 = 49$	»	$\sqrt{49} = 7$	$7^3 = 343$	»	$\sqrt[3]{343} = 7$
$8^2 = 64$	»	$\sqrt{64} = 8$	$8^3 = 512$	»	$\sqrt[3]{512} = 8$
$9^2 = 81$	»	$\sqrt{81} = 9$	$9^3 = 729$	»	$\sqrt[3]{729} = 9$

3. Sea nuevamente la expresión $\sqrt[3]{8} = 2$.

Esta expresión, como dijimos, se llama una raíz.

El signo $\sqrt{}$ se denomina radical.

El número que va en el ángulo (en este caso 3) se llama índice de la raíz.

El número que está debajo de este signo (en este caso 8) se denomina cantidad sub-radical, o radicando.

Cuando se trata de raíz cuadrada se acostumbra, en la práctica, suprimir el índice. Así, escribimos sencillamente:

$$\sqrt{144}, \text{ en lugar de } \sqrt[2]{144}$$

$$\sqrt{a}, \text{ en lugar de } \sqrt[2]{a}$$

OBSERVACIÓN.—En vez de decir: determinar el número cuyo cuadrado es 9 decimos: extraer la raíz cuadrada de 9.

EJERCICIOS.

1. Extraer la raíz cuadrada de 100.

Puesto que es $100 = 10^2$ tenemos: $\sqrt{100} = 10$.

2. Extraer la raíz cúbica de 1000.

Puesto que es $1000 = 10^3$, tenemos: $\sqrt[3]{1000} = 10$.

3. Extraer la raíz cuadrada de 10000.

Puesto que es $10000 = 10^4 = (10^2)^2$, tenemos: $\sqrt{10000} = 10^2$.

4. Extraer la raíz cuadrada de $16 a^2$.

Puesto que es $16 a^2 = (4 a)^2$, tenemos: $\sqrt{16 a^2} = 4 a$.

5. Extraer la raíz cúbica de $27 a^3$.

Puesto que es $27 a^3 = (3 a)^3$, tenemos: $\sqrt[3]{27 a^3} = 3 a$.

6. Por ser

$100 = 10^2$	,	es	$\sqrt{100} = 10$
$1000 = 10^3$		»	$\sqrt[3]{1000} = 10$
$10000 = 10^4$		»	$\sqrt{10000} = 10$
$100000 = 10^5$		»	$\sqrt[5]{100000} = 10$
$1000000 = 10^6$		»	$\sqrt[6]{1000000} = 10$

CAPITULO IV

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS

§ 8. Divisibilidad

1. *Definición y propiedades.* Al estudiar la división exacta hemos aprendido que: el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente. Así, por ser

$$(1) \quad 8 = 4 \times 2$$

decimos que $8 \div 4 = 2$ y $8 \div 2 = 4$

Por consiguiente, la igualdad (1) nos expresa también que 8 es divisible por 4 y por 2. Análogamente: de $15 = 3 \cdot 5$ deducimos que 15 es divisible por 3 y por 5; de $100 = 2 \cdot 5 \cdot 10$ deducimos que 100 es divisible por 2, por 5, y por 10.

En general, si es $D = d \times c$, decimos que D es divisible por d y por c . Por tanto, recordando la (5), § 6 deducimos que:

Un número es divisible por otro cuando la división del primero por el segundo es exacta, es decir el resto es nulo.

Enunciando las propiedades de la división exacta estudiadas en el § 6 obtenemos los siguientes principios:

- I. Todo número es divisible por sí mismo.
- II. Todo número es divisible por la unidad.

2. Sean las igualdades $8 = 4 \times 2$

$$12 = 4 \times 3,$$

que nos dicen que 4 es divisor común de 8 y 12. Sumando ordenadamente obtenemos: $20 = 4 \times 2 + 4 \times 3$, y por una propiedad de la multiplicación ya estudiada:

$20 = (2 + 3) \times 4$, o sea $20 = 5 \times 4$, que nos dice que también 20, o sea $(8 + 12)$, es divisible por 4.

Sea ahora, en general:

$$A = d \times a$$

$$B = d \times b$$

que expresan que d es un divisor común de A y B . Sumando ordenadamente, obtenemos:

$$A + C = d \times a + d \times b$$

Factoreando en el segundo miembro por d :

$$A + B = d (a + b) ;$$

y llamando S a la suma $(A + B)$ y s a la suma $(a + b)$, se tiene:

$$S = d \cdot s$$

Esta última igualdad muestra que S es divisible por d , es decir:

III. Si un número, d , divide a otros dos, A y B , también dividirá a su suma $(A + B)$.

Esta propiedad será válida también si los números son más de dos.

EJEMPLO.

Porque 2 divide a 4, 12, 18 y 22, divide también a $4 + 12 + 18 + 22$ o sea a 56.

3. Sea nuevamente $20 = 5 \cdot 4$, que nos muestra que 20 es divisible por 5. Si multiplicamos ambos miembros por un número cualquiera, 3 p. ej., obtenemos:

$20 \times 3 = 5 \cdot (4 \times 3)$, o sea $60 = 5 \times 12$, donde se vé que 5 divide también a $60 = 20 \times 3$, es decir a un múltiplo de 20. Lo mismo habría resultado multiplicando por otro número; así, multiplicando por 4, se tiene $80 = 5 \cdot 16$, es decir:

IV. Si un número divide a otro divide también a cualquiera de sus múltiplos.

Demostraremos esta propiedad para el caso general, es decir haremos una demostración que valga para cualquier número:

Los múltiplos de 2 son: $2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4, \dots$, y en general $2 \times n$ nos da todos los múltiplos de 2 cuando hagamos tomar a n cualquier valor natural. Análogamente, los múltiplos de 3 serán $3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, \dots, 3 \times n$. Los múltiplos de un número a cualquiera: $a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, \dots$, y en general $a \cdot n$.

Esto dicho, volvamos a la igualdad $A = d \cdot a$, que expresa

que A es divisible por d . Multiplicando ambos miembros por un número cualquiera, n , resulta:

$A.n = d.(a.n)$, que nos muestra que también $A.n$ es divisible por d .

4. *Caracteres de divisibilidad.* Si se nos da un número cualquiera, 63 p. ej., y queremos averiguar si es o no divisible por otro, 3, p. ej. efectuamos la división; si es exacta es divisible. En nuestro caso $63 = 3.21$, es decir 63 es divisible por 3. Pero es útil (sobre todo cuando se trata de números grandes) averiguarlo por otro camino más corto: para ello utilizamos los caracteres de divisibilidad. Así por ejemplo:

V. Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o cifra par, es decir en 0, 2, 4, 6 u 8.

En efecto: sea un número terminado en cero, 250. Es: $250 = 25 \times 10$; 10 es divisible por 2 (por ser $10 = 2.5$); por consiguiente, también lo será 25×10 , que es múltiplo de 10, es decir 250. A la misma conclusión llegaríamos con cualquier número terminado en cero (pues es múltiplo de 10).

Sea ahora un número terminado en cifra par: 346; se tiene: $346 = 340 + 6$; 340 es divisible por 2, según lo demostrado; 6 es también divisible por 2 y por tanto la suma de los dos números, 346, también lo será (de acuerdo con III).

VI. Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o en 5. Sea un número terminado en 0, como 480. Se tiene:

$480 = 48 \times 10$, y como 10 es múltiplo de 5 lo será también 48×10 , es decir 480.

Sea ahora un número terminado en 5, como 295. Se tiene:

$$295 = 290 + 5$$

Cada sumando es múltiplo de 5 (el primero por lo demostrado anteriormente); luego su suma, es decir 295, también lo será.

VII. Un número es divisible por 4 cuando termina en dos ceros o sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4. Sea, por ejemplo, 3200. Se tiene:

$3200 = 32 \times 100$; pero siendo $100 = 4 \times 25$ es divisible por 4 (y por 25), luego lo será también 32×100 , o sea 3200.

Sea ahora un número cuyas dos últimas cifras formen un múltiplo de 4; p. ej. 1824. Se tiene:

$1824 = 1800 + 24$; ambos sumandos son divisibles por 4 (el primero por lo demostrado anteriormente), luego también lo será la suma 1824.

VIII. Un número es divisible por 25 cuando sus dos últimas cifras son cero o forman un múltiplo de 25. Sea por ejemplo:

$3200 = 32 \times 100$; siendo 100 múltiplo de 25 también lo será 32×100 , o sea 3200.

Sea ahora $3275 = 3200 + 75$; los dos sumandos son divisibles por 25 (el primero por lo anteriormente demostrado); luego la suma, o sea 3275, también lo será.

IX. Un número es divisible por 8 si termina en tres ceros o sus tres últimas cifras forman un múltiplo de 8. Sea, por ejemplo, 42000. Se tiene:

$42000 = 42 \times 1000$; siendo $1000 = 8 \times 125$, es 1000 divisible por 8 (y por 125), luego 42×1000 , es decir 42000, también lo será. Sea ahora 38112. Se tiene:

$38112 = 38000 + 112$; los dos sumandos son divisibles por 8 (el primero según lo anteriormente demostrado), luego también lo será su suma, es decir 38112.

X. Un número es divisible por 125 si termina en tres ceros o sus tres últimas cifras forman un múltiplo de 125. Sea el número 43000. Se tiene:

$43000 = 43 \times 1000$; pero siendo 1000 divisible por 125 también lo será 43×1000 , o sea 43000.

Sea ahora 43375. Se tiene:

$43375 = 43000 + 375$; ambos sumando son divisibles por 125 (el primero por lo demostrado anteriormente), luego también su suma, es decir 43375, es divisible por 125.

XI. Un número es divisible por 3 o por 9, cuando la suma de sus cifras es divisible por 3 o por 9.

Para demostrarlo probaremos, previamente, que todo número formado por una cifra seguida de ceros es un múltiplo de 9 (y por tanto de 3) más dicha cifra. Sea 4000; se tiene:

$$4000 = 4 \times 1000 = 4 (999 + 1)$$

$$4000 = 4 \times 999 + 4$$

Pero 999 es múltiplo de 9 (es fácil comprender que un número formado por puros nueves es divisible por 9); por consiguiente, también lo será 4×999 . Si indicamos con $(m \ 9)$ un múltiplo cualquiera de nueve, la última igualdad nos da:

$$4000 = (m \ 9) + 4. \text{ Análogamente sería } 200 = (m \ 9) + 2$$

Volvamos ahora a un número cualquiera, 4572:

$4572 = 4000 + 500 + 70 + 2$; y según lo demostrado anteriormente:

$$4572 = (\text{múlt. } 9 + 4) + (\text{múlt. } 9 + 5) + (\text{múlt. } 9 + 7) + 2.$$

o también:

$$4572 = (\text{múlt. } 9 + \text{múlt. } 9 + \text{múlt. } 9) + (4 + 5 + 7 + 2);$$

pero como la suma de varios múltiplos de 9 da también un múltiplo de 9, tenemos:

$$4572 = \text{múlt. } 9 + (4 + 5 + 7 + 2)$$

La suma del segundo paréntesis es también un múltiplo de 9; por consiguiente, 4572 quedará expresado como la suma de dos múltiplos de 9, es decir será divisible por 9.

Análogamente, obtenemos:

$$2106 = \text{múlt. } 3 + (2 + 1 + 0 + 6);$$

como el segundo paréntesis es múltiplo de 3, también lo será la suma, es decir 2106.

EJEMPLOS.

3159 es divisible por 9 y por 3, por ser $(3 + 1 + 5 + 9) = 18$ divisible por 9 y por 3.

21111 es divisible por 3 porque $(2 + 1 + 1 + 1 + 1) = 6$ es divisible por 3.

5184 no es divisible por 9 ni por 3 porque $(5 + 1 + 8 + 4) = 18$ no es divisible por 9 ni por 3.

XII. Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugares pares y la suma de las cifras que ocupan lugares impares es divisible por 11.

Para demostrarlo tengamos presente que:

$$10 = 11 - 1 = (m \ 11) - 1; \quad 100 = 99 + 1 = (m \ 11) + 1$$

$$1000 = 1001 - 1 = (m \ 11) - 1; \quad 10000 = 9999 + 1 = (m \ 11) + 1,$$

y en general: la unidad seguida de un número impar de ceros es múltiplo de 11 menos 1; y la unidad seguida de un número par de ceros es múltiplo de 11 más 1.

Sea ahora una cifra cualquiera seguida de un número impar de ceros:

$$3000 = 3 \times 1000 = 3(\text{mult. } 11 - 1) = 3. \text{mult. } 11 - 3, \text{ o sea:}$$

$$3000 = \text{mult. } 11 - 3$$

Para una cifra seguida de un número par de ceros:

$$40000 = 4 \times 10000 = 4(\text{múlt. } 11 + 1) = 4. \text{múlt. } 11 + 4, \text{ o sea:}$$

$$40000 = \text{múlt. } 11 + 4$$

Resulta pues: un número formado por una cifra cualquiera seguida de un número impar de ceros es múltiplo de 11 menos dicha cifra; y seguida de un número par de ceros es múltiplo de 11 más dicha cifra.

Volvamos finalmente a un número cualquiera, 2948. Se tiene:

$$2000 = \text{múlt. } 11 - 2$$

$$900 = \text{múlt. } 11 + 9$$

$$40 = \text{múlt. } 11 - 4$$

$$8 = 8$$

y sumando ordenadamente, y teniendo en cuenta que la suma de varios múltiplos de 11 es también un múltiplo de 11:

$$2948 = (m \ 11) + [(9 + 8) - (2 + 4)]$$

En el primer paréntesis del corchete tenemos la suma de las cifras de lugares impares, en el segundo la de lugares pares; esta diferencia es 11, es decir, un múltiplo de 11. Resulta pues: $2948 = (m \ 11) + 11$, y la suma es a su vez un múltiplo de 11, es decir 2948 es divisible por 11, de acuerdo con el enunciado XII.

EJERCICIOS.

1. Averiguar si 375 es divisible por 25.
2. Averiguar si 42000 es divisible por 8.
3. Averiguar si 112169 es divisible por 3 y por 9.
4. Averiguar si 19294 es o no divisible por 11.

§ 9. Máximo común divisor de dos números

1. Sea un número cualquiera, como 24, cuyos divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; o excluyendo la unidad, que es divisor de cualquier número, tendremos:

divisores de 24 son: **2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24**

Análogamente:

divisores de 60 son: **2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30 y 60.**

Hemos indicado con números negritos los divisores comunes a 24 y 60. Entre ellos hay uno mayor que los demás; es **12**.

Decimos entonces que **12** es el máximo común divisor de 24 y 60, y lo expresamos:

$$12 = \text{m. c. d. } (24, 60); \text{ análogamente}$$

$$8 = \text{m. c. d. } (16, 40)$$

2. I. Si los números dados son iguales su máximo común divisor es, evidentemente, cualquiera de ellos. Por ejemplo:

$$\begin{array}{l} \text{m. c. d. } (20, 20) = 20 \quad , \quad \text{m. c. d. } (50, 50) = 50 \quad , \quad \text{m. c. d. } (36, 36) = 36 \\ \text{y en general} \quad \quad \quad \text{m. c. d. } (a, a) = a. \end{array}$$

II. Si el mayor de los números es divisible por el menor, este último es, evidentemente, el máximo común divisor de ambos. Así por ejemplo:

$$\begin{array}{l} \text{m. c. d. } (18, 36) = 18 \quad ; \quad \text{m. c. d. } (16, 32) = 16 \quad ; \quad \text{m. c. d. } (50, 100) = 50, \\ \text{y en general} \quad \quad \quad \text{m. c. d. } (a, na) = a. \end{array}$$

3. Sean ahora dos números diferentes y tales que el mayor no es divisible por el menor, 210 y 80. Dividiendo el mayor por el menor encontramos un cociente 2 y un resto 50; es decir:

$$210 = 80 \cdot 2 + 50$$

Dividiendo ahora el divisor, 80, por el resto, 50, encontramos un cociente 1 y un nuevo resto, 30; es decir

$$80 = 50 \cdot 1 + 30$$

Dividiendo ahora el divisor, 50, por el resto, 30, encontramos un nuevo cociente 1, y un resto 20; es decir:

$$50 = 30 \cdot 1 + 20$$

Análogamente, dividiendo ahora el divisor 30 por el resto 20:

$$30 = 20.1 + 10,$$

y dividiendo 20 por 10:

$$20 = 10.2 \quad (\text{división exacta})$$

En resumen: hemos dividido el mayor de los números, 210, por el menor, 80; después dividimos el divisor por el resto, después el nuevo divisor por el nuevo resto, y así continuamos hasta llegar a una división exacta. En esta forma hemos obtenido las igualdades:

$$210 = 80.2 + 50$$

$$80 = 50.1 + 30$$

$$50 = 30.1 + 20$$

$$30 = 20.1 + 10$$

$$20 = 10.2$$

El último resto, en nuestro caso **10**, es el máximo común divisor de los números dados.

Demostremos, primeramente, que el último resto (en nuestro caso **10**) debe dividir a los dos números dados, es decir es un divisor común a los mismos. En efecto: la última igualdad muestra que 10 divide a 20. Pero si divide a 20 dividirá a 20.1 (cuarta igualdad), y si divide a este producto y a 10, dividirá a su suma 30; pero si lo divide a 30 dividirá a 30.1 y puesto que también dividía a 20 dividirá a su suma, es decir a 50 (tercera igualdad); pero si 10 divide a 50 dividirá a 50.1 y puesto que también dividía a 30 dividirá a la suma **80** (segunda igualdad); pero si divide a 80 dividirá a 80.2 , y si divide a este producto y a 50, dividirá a su suma, es decir a **210**. Resulta así que 10 dividirá a 80 y 210, como nos proponíamos demostrar.

Demostremos ahora que todo divisor de los números dados, es decir de **210** y **80** es divisor del último resto, o sea de **10**.

En efecto, indiquemos por **d** un divisor común de 210 y 80. Por dividir **d** a 80 dividirá a 80.2 ; pero si divide a la suma 210 (primera igualdad) y a un sumando, dividirá al otro sumando, es decir a 50; pero si divide a la suma 80 y a un sumando 50.1 dividirá al otro sumando, 30; (segunda igualdad); pero si divide a 50 y a 30 dividirá al otro sumando, 20; pero si **d** divide a la suma 30, y a un sumando 20.1 , dividirá al otro sumando, es decir a 10, como nos propusimos demostrar.

Resulta así demostrado: que 10 es un divisor común a 80 y 210; y que los demás divisores comunes a 80 y 210, son iguales o menores que 10, pues deben dividir a 10. Esto demuestra que 10, es decir el último resto de las divisiones sucesivas, es el máximo común divisor de los números dados.

En general:

El último resto de las divisiones sucesivas es el máximo común divisor de los números dados.

El procedimiento seguido para determinar el máximo común divisor, y que es aplicable a dos números cualesquiera, se denomina algoritmo de Euclides, porque fué Euclides, matemático griego del siglo III a. C., que lo empleó por primera vez.

EJEMPLOS.

$$1573 = 1260 \cdot 1 + 313$$

$$1260 = 313 \cdot 4 + 8$$

$$313 = 8 \cdot 39 + 1$$

$$8 = 1 \cdot 8$$

$$\text{m. c. d. } (1573, 1260) = 1$$

$$324 = 126 \cdot 2 + 72$$

$$126 = 72 \cdot 1 + 54$$

$$72 = 54 \cdot 1 + 18$$

$$54 = 18 \cdot 3$$

$$\text{m. c. d. } (324, 126) = 18$$

Observaciones.

En la práctica, para abreviar, se dispone la operación en la siguiente forma:

cocientes		2	1	1	3
divisores	324	126	72	54	18
restos	72	54	18	0	

4. Si se dieran tres números, para determinar su máximo común divisor, se procede (de acuerdo con un teorema que no demostraremos) en la siguiente forma:

Se determina el máximo común divisor entre dos cualesquiera de ellos, y después el máximo común divisor entre el máximo hallado y el tercero de los números.

Por ejemplo: determinar el máximo común divisor de 324, 126, y 48.

Según el segundo ejemplo del párrafo anterior es: m. c. d. (324, 126) = 18; luego m. c. d. (324, 126, 48) = m. c. d. (18, 48).

Pero, por ser $48 = 18 \cdot 2 + 12$ es m. c. d. (18, 48) = 6,

$$18 = 12 \cdot 1 + 6$$

$$12 = 6 \cdot 2$$

luego m. c. d. (324, 126, 48) = 6.

§ 10. Mínimo común múltiplo

1. Sean dos números cualesquiera: 12 y 8. Habrá múltiplos comunes a 12 y 8 (y en realidad tantos como se quiera). Tales son: 24, 48, 72, 96, etc. Entre todos ellos habrá

uno que es el menor, en nuestro caso 24, al cual denominamos mínimo común múltiplo de los números dados. Lo expresamos:

$$m. c. m. (12, 8) = 24$$

Como en el caso del máximo común divisor, son evidentes estas dos propiedades:

I. Si dos números son iguales cualquiera de ellos es el mínimo común múltiplo de ambos.

II. Si un número es divisible por otro el mayor es el mínimo común múltiplo de ambos.

Así, por ejemplo:

$$m. c. m. (4, 4) = 4 ; m. c. m. (35, 35) = 35 ; m. c. m. (n, n) = n$$

$$m. c. m. (100, 50) = 100 ; m. c. m. (20, 10) = 20 ; m. c. m. (nm, m) = nm.$$

2. Una manera de determinar el mínimo común múltiplo de dos números dados sería proceder por tanteos; para lo cual vamos escribiendo en orden ascendente los múltiplos de los números dados hasta encontrar uno común.

Por ejemplo:

$$\text{Múltiplos de 12 son: } 12.1 = 12 ; 12.2 = \mathbf{24} , 12.3 = 36, \dots$$

$$\text{Múltiplos de 8 son: } 8.1 = 8 ; 8.2 = 16 , 8.3 = \mathbf{24}, \dots$$

Hemos escrito con negrita el menor número común a las dos series; luego:

$$m. c. m. (12, 8) = 24.$$

Pero este procedimiento sería muy engorroso. Más sencillo es hacerlo en la forma que explicaremos más adelante (§ 11). Conociendo el máximo común divisor de los números dados se puede determinar su mínimo común múltiplo aplicando el siguiente teorema, cuya demostración haremos en el curso siguiente:

III. El mínimo común múltiplo de dos números es igual al producto de uno cualquiera de ellos por el cociente de dividir el otro por el máximo común divisor de ambos.

EJEMPLOS.

1. Determinar el mínimo común múltiplo de 90 y 72.

Determinemos primeramente su máximo común divisor, por el algoritmo de Euclides:

$$90 = 72 \cdot 1 + 18$$

$$72 = 18 \cdot 4$$

luego es $m. c. d (90, 72) = 18$;

y por consiguiente :

$$m. c. m (90, 72) = \frac{90}{18} \cdot 72 = 5 \cdot 72 = 360$$

$$2. \text{ m.c.d. } (18, 48) = 6 \therefore m.c.m (18, 48) = (18 \div 6) \times 48 = 144$$

$$3. \text{ m.c.d. } (324, 126) = 18 \therefore m.c.m. (324, 126) = (324 \div 18) \times 126 = 2268$$

§ 11. Números primos

1. *Definición.* Sea dado un número, como 24. Además de ser divisible por 24 y por 1 (pues todo número es divisible por sí mismo y por la unidad), es divisible por 2, 3, 4, 6, 8 y 12.

En cambio, el número 11 sólo es divisible por 11 y por 1. Por consiguiente, si cuando nombramos los divisores de un número no tomamos en cuenta al número mismo y a la unidad, tendremos que decir que 11 no tiene ningún divisor.

I. Los números que no tienen ningún divisor se denominan primos.

Según esta definición, 7, 11, 13 y 17, serán números primos. En cambio, 18 no es primo, pues admite el divisor 2 (y otros). Análogamente, 15 no es un número primo, pues admite el divisor 3.

A un número que no es primo suele llamársele, también, compuesto.

2. Sea un número compuesto, como 48; admitirá algún divisor primo. En efecto:

$$(1) \quad 48 = 4 \times 12 ; \text{ pero a su vez: } 12 = 2 \times 6 , \quad (2)$$

es decir 12 es divisible por el número primo 2, que será también divisor de 48 (§ 8, IV). Resulta así que 48 tiene un divisor primo, 2. Lo vemos más claramente si reemplazamos 12 en la (1) por su valor (2):

$$48 = 4 \times 2 \times 6$$

Pero también 4 y 6 contienen divisores primos, pues:

$$4 = 2 \times 2, \quad 6 = 2 \times 3,$$

y reemplazando en la igualdad anterior se obtiene:

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3,$$

donde todos los factores del segundo miembro son primos.

Este razonamiento vale para cualquier número compuesto. En efecto: el número será igual al producto de dos factores; si estos factores no fueran primos se descompondrían a su vez en otros dos; y continuaríamos en esta forma hasta llegar a un producto de factores todos primos.

EJEMPLOS.

$$90 = 30 \times 3 = 6 \times 5 \times 3 = 2 \times 3 \times 5 \times 3$$

$$(5) \quad 924 = 28 \times 33 = (4 \times 7) \times (3 \times 11) = 2 \times 2 \times 7 \times 3 \times 11$$

Admitiremos, pues, como cierto, que:

II. Todo número compuesto se puede expresar como un producto de factores primos.

Si un factor primo aparece en el producto más de una vez, se asocian estos factores iguales en una potencia. Así, los ejemplos (5) se expresarán:

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5; \text{ y análogamente } 12936 = 2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11$$

$$924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$$

$$2695 = 5 \times 7^2 \times 11,$$

como puede comprobarse fácilmente.

Para buscar los divisores primos de un número dado se procede, en la práctica, en la siguiente forma:

90	2	924	2	12936	2	2695	5	1001	7
45	3	462	2	6468	2	539	7	143	11
15	3	231	3	3234	2	77	7	13	13
5	5	77	7	1617	3	11	11		
		11	11	539	7				
				77	7				
				11	11				

Al lado del número dado colocamos su menor divisor primo, y debajo el cociente. Análogamente procedemos con el cociente y seguimos en esta forma hasta llegar a un cociente primo.

3. La descomposición de los números en sus factores pri-

mos se aprovecha para determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números. Para hacerlo, nos fundamos en dos teoremas que demostraremos en el curso siguiente; a saber:

III. El máximo común divisor de varios números se forma con el producto de los factores primos comunes, afectados con el menor exponente con que figuren.

IV. El mínimo común múltiplo de varios números se forma con el producto de los factores primos comunes y no comunes afectados con el mayor exponente con que figuren.

EJEMPLOS.

Sean los números 324 y 126. Descomponiéndolos en factores primos, resulta:

$$324 = 2^2 \cdot 3^4, \quad 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Los factores primos comunes son 2 y 3; sus menores exponentes son, respectivamente, 1 y 2; luego (teorema III):

$$\text{m. c. d. } (324, 126) = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

Hemos obtenido, como debía suceder, el mismo resultado que el que obtuvimos al aplicar el algoritmo de Euclides (§ 10 Ejem.).

Análogamente, los factores primos encontrados en los dos números propuestos son 2, 3 y 7; sus mayores exponentes son, respectivamente, 2, 4 y 1; luego, de acuerdo con el teorema (IV) tendremos:

$$\text{m. c. m. } (324, 126) = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7 = 2268,$$

es decir el mismo resultado que obtuvimos por otro procedimiento, en (§ 10).

Análogamente:

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\text{m. c. d. } (300, 126, 105) = 3; \text{ luego:}$$

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$105 = 5 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{m. c. m. } (300, 126, 105) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6300$$

4. Decimos que la sucesión de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, ... es ilimitada; porque dado un número, siempre hay otro mayor que éste. Nos preguntamos ahora si sucede lo mismo con la sucesión de los números primos, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...; es decir: hay un número primo mayor que todos; o, por el contrario, dado un número primo existe siempre otro mayor que éste?. Demostraremos que:

V. La sucesión de los números primos es ilimitada.

En efecto: supongamos que la sucesión de los números primos fuera limitada, y que 13 es el mayor número primo; es decir, la sucesión sería: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13. Formemos el producto de estos números $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$ y a este número sumemos 1. Obtenemos:

$$30031 = 30030 + 1.$$

El número obtenido, 30031 (como todo número) estará en uno de estos dos casos: es un número primo o es compuesto.

En el segundo caso, es decir si 30031 es un número compuesto, admitirá algún divisor primo, según lo demostrado en (II). Pero este divisor primo no puede ser 2, ni 3, ni 5, ... ni 13, pues estos son divisores de 30030 y no de $30030 + 1$; la división por cualquiera de ellos daría un resto 1. Resulta así que el número dado debe admitir un divisor primo, y no admite por divisor a 13 ni ningún divisor primo menor; luego, admitirá por divisor un número primo mayor que 13; lo cual prueba que también en este caso existe un número primo mayor que el último supuesto (es el que debe admitir por divisor 30031).

EJEMPLO.

Veamos como se produce, en efecto, uno de los dos casos mencionados. Supongamos que es 7 el último número primo; se tiene:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$, que es primo (1^{er} caso) y mayor que 7.

Si hubiéramos supuesto que es 13 el último número primo, tendríamos:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \times 509$, siendo 59 primo (2^o. caso).

OBSERVACION. No existe un teorema que permita decidir si un número dado es primo o no. Es necesario pues averiguarlo aplicando primeramente los criterios de divisibilidad. Pero así sabremos solamente si es o no divisible por 2, 3, 5, 7, 11. Hay que continuar con los demás divisores primos. Cuando el número es grande es pues una operación muy larga el determinar si es o no un número primo (salvo casos especiales).

El número primo más grande conocido hasta ahora es:

$$2^{81} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951.$$

CAPITULO V

LOS NUMEROS FRACCIONARIOS

§ 12. Medida de segmentos

1. Sea la de la figura una recta cualquiera. Si sobre ella marcamos dos puntos cualesquiera, A y B, por ejemplo, nos queda formado un segmento de recta, que denominamos segmento AB, y lo indicamos $\overline{AB}$.

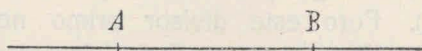


Fig. 1

De la misma manera podríamos obtener sobre esta recta, u otra cualquiera, otro segmento, $\overline{A'B'}$. En la fig. 2, hemos representado dos segmentos cualesquiera.

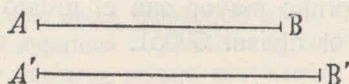


Fig. 2

2. Sean ahora dos segmentos como los de la fig. 3. Si superponemos A' con A y hacemos que las rectas tengan la misma dirección, quedará también superpuesto B' con B. De-

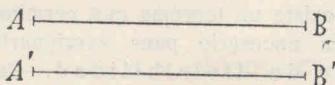


Fig. 3

cimos en este caso que los segmentos AB y A'B' son iguales, y lo indicamos

$$(1) \quad \overline{AB} = \overline{A'B'}$$

3. Consideremos, en cambio, los segmentos de la fig. 4.

Si superponemos A' con A y hacemos que las rectas tengan la misma dirección, «caerá» B' a la izquierda de B , en el

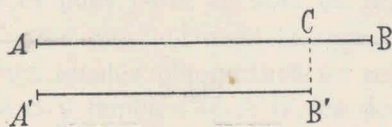


Fig. 4

punto C . Una parte del segmento AB es ahora igual al segmento $A'B'$. Decimos entonces que el segmento AB es mayor que el $A'B'$, y lo indicamos

$$(2) \quad \overline{AB} > \overline{A'B'}.$$

Si nos fijamos en la misma figura vemos que B «cae» a la derecha de B' , por lo que decimos que el segmento $A'B'$ es menor que el AB , y lo indicamos

$$(3) \quad \overline{A'B'} < \overline{AB}.$$

Por la manera como hemos razonado es fácil comprender que la (3) es una consecuencia de la (2), es decir que si $\overline{AB}$ es mayor que $\overline{A'B'}$, será $\overline{A'B'}$ menor que $\overline{AB}$.

4. Adición de segmentos y producto por un número. Si llevamos sucesivamente y a continuación de otro un segmento, haremos la operación de sumar segmentos

En la fig. 5 está indicada la suma de tres segmentos iguales a AB , o sea: $\overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB}$.

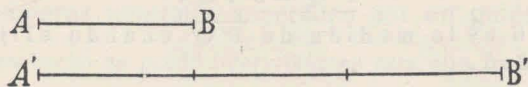


Fig. 5

Obtenemos así el segmento $A'B'$. Indicamos la operación en la forma

$$3 \overline{AB} = \overline{A'B'};$$

y decimos entonces: el segmento $A'B'$ es un múltiplo (de orden 3) del segmento AB ; o el segmento AB es parte alicuota del segmento $A'B'$, y lo indicamos

$$\overline{AB} = \frac{\overline{A'B'}}{3}$$

Análogamente. en la fig. 6

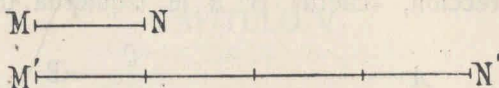


Fig. 6

obtenemos:

$$\overline{M'N'} = 4 \overline{MN}$$

o también

$$\overline{MN} = \frac{\overline{M'N'}}{4}$$

5. Decimos que elegimos un segmento por unidad de medida cuando a su longitud le asignamos el número 1. Así, en el ejemplo de la figura 5, significa elegir como unidad el segmento $\overline{AB}$, asignarle el número 1. Pero entonces al segmento $\overline{A'B'}$, corresponderá el número 3. Esto se expresa diciendo: la medida del segmento $\overline{A'B'}$ (o sea su longitud) es 3 cuando es 1 la medida del segmento $\overline{AB}$.

EJEMPLOS.

1. Sean dos segmentos $\overline{CD}$, y $\overline{C'D'}$. Si multiplicando el segmento $\overline{CD}$ por 5 obtenemos $\overline{C'D'}$, es decir sí

$$\overline{C'D'} = 5 \overline{CD},$$

diremos que: la medida de $\overline{C'D'}$ es 5 cuando elijamos $\overline{CD}$ como unidad.

2. Si multiplicando un segmento $\overline{PQ}$ por 6 obtenemos otro segmento $\overline{P'Q'}$, es decir sí

$$\overline{P'Q'} = 6 \overline{PQ},$$

decimos que 6 es la medida de $\overline{P'Q'}$ cuando elijamos $\overline{PQ}$ como unidad.

6. Supongamos ahora que se nos dan dos segmentos como $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ fig. 7.

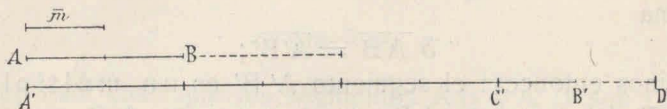


Fig. 7

Sí sumamos tres veces el segmento $\overline{AB}$ obtenemos un segmento $\overline{A'C'}$ menor que $\overline{A'B'}$; si en cambio lo sumamos cua-

tro veces obtenemos un segmento $A'D'$ mayor que $A'B'$. El segmento AB no es pues parte alicuota del segmento $A'B'$.

Pero, puede suceder que dividiendo el segmento AB en cierto número de partes iguales obtengamos un segmento que sea parte alicuota de AB y también de $A'B'$, es decir, parte alicuota común a ambos. En nuestro caso es el segmento designado por $\overline{m}$; y tendremos:

$$(2) \quad \begin{aligned} \overline{AB} &= 2 \overline{m} \\ \overline{A'B'} &= 7 \overline{m} \end{aligned}$$

Si elegimos el segmento $\overline{m}$ como unidad, será **2** la medida de $\overline{AB}$, **7** la de $\overline{A'B'}$.

7. Para medir el segmento $\overline{A'B'}$, en el ejemplo anterior, nos hemos visto obligados a cambiar la unidad primitiva de medida: en vez del segmento $\overline{AB}$, que era nuestra unidad, hemos adoptado el segmento $\overline{m}$.

Para evitar este inconveniente se usan otros números denominados fraccionarios. Por ejemplo, en nuestro caso podemos conservar la primitiva unidad de medida, es decir asignar a $\overline{AB}$ el número 1; asignamos entonces al segmento $\overline{A'B'}$ un número que indicamos por $\frac{7}{2}$ y leemos siete medios.

Un número de esta clase se denomina fracción, o número fraccionario. Un número fraccionario se forma pues con un par de números naturales separados por un guión.

Lo que hemos hecho se puede interpretar en esta otra forma:

Multiplicando por 7 la 1.^a (2) y por 2 la 2.^a, obtenemos:

$$7 \overline{AB} = 14 \overline{m}$$

$$2 \overline{A'B'} = 14 \overline{m} \quad , \quad \text{es decir} \quad 7 \overline{AB} = 2 \overline{A'B'}$$

$$\overline{A'B'} = \frac{7 \overline{AB}}{2} \quad ; \quad \text{y así:}$$

$$\text{si a } \overline{AB} \text{ corresponde } 1$$

$$\text{a } \overline{A'B'} \quad \gg \quad \frac{7}{2}$$

§ 13. Operaciones con números fraccionarios. Adición

1. Como hemos visto en el párrafo anterior los números fraccionarios nos sirven para medir un segmento cuando no es un múltiplo de la unidad de medida, pero si lo es de una parte alicuota de dicha unidad.

En el ejemplo § 12,7 la medida de $\overline{A'B'}$ era el número fraccionario $\frac{7}{2}$

Los números que componen la fracción y que en nuestro caso son 7 y 2, se denominan términos.

Cuál es el significado de los términos de la fracción?

Tomemos la fracción $\frac{7}{2}$:

2 indica el número de partes iguales en que es necesario dividir la unidad de medida $\overline{AB}$ para encontrar un segmento que sea parte alicuota de $\overline{A'B'}$. Dicho número da nombre a la fracción (siete medios); por ello se llama denominador;

7 expresa qué número de segmentos iguales a dicha parte hay que sumar para obtener el segmento $\overline{A'B'}$. Se le llama numerador.

Podemos pues decir que en una fracción el denominador expresa el número de partes alicuotas en que se ha dividido la unidad; y el numerador expresa el número de dichas partes que forman la fracción.

EJEMPLOS.

$\frac{4}{5}$, se lee cuatro quintos; 4 es el numerador, 5 el denominador.

$\frac{12}{125}$ se lee doce ciento veinticinco avos; 12 es el numerador, 125 el denominador.

OBSERVACIONES.

Los dos términos de la fracción están separados por un guión horizontal. En la misma forma hemos indicado la división exacta. Así, expresábamos con

$\frac{4}{2}$, $4/2$ la operación 4 dividido 2 ; ahora con

$\frac{7}{2}$, $7/2$ expresamos un número fraccionario. Porqué hemos

usado la misma manera de expresar estas dos cosas diferentes? Más adelante lo explicaremos.

2. Qué significa un número fraccionario como

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \dots, \frac{a}{1},$$

es decir una fracción en que el denominador es la unidad?

Si estas fracciones tuvieran sentido de acuerdo con nuestra definición del § 13, 1, la unidad se habría dividido en «una parte». En realidad, admitimos que esto significa no modificarla. Con esta convención, $\frac{3}{1}$ sería la medida de un segmento equivalente a tres veces la unidad de medida, es decir sería igual al número 3 mismo. Podemos pues poner:

$$\frac{4}{1} = 4, \frac{5}{1} = 5, \frac{6}{1} = 6, \dots, \frac{a}{1} = a$$

3. Qué significa un número fraccionario como

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \dots, \frac{a}{a},$$

es decir en que el numerador y denominador son iguales?

De acuerdo con nuestra definición, habremos dividido la unidad en cierto número de partes y sumado todas ellas; luego obtendremos la unidad misma.

Admitimos así, que:

$$\frac{2}{2} = 1, \frac{3}{3} = 1, \frac{4}{4} = 1, \frac{5}{5} = 1, \dots, \frac{a}{a} = 1;$$

la última fracción se lee: «a sobre a igual a uno.

Podemos pues decir que toda fracción cuyo numerador y denominador son iguales es igual a la unidad.

4. Sea nuevamente, fig. 8, el segmento AB la unidad de medida.

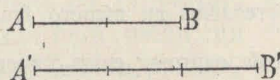


Fig. 8

Dividámosla en 2 partes iguales. Ahora bien: sumando sucesivamente 3 segmentos iguales a dicha parte alícuota formamos otro segmento $A'B'$. Su medida será, evidentemente, mayor que la de AB , y por tanto mayor que la unidad.

La fracción $3/2$ es pues mayor que 1.

Análogamente $6/5$, $9/7$, $123/112$, etc., y en general: son mayores que la unidad las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador.

Dichas fracciones se denominan *impropias*.

En cambio, son menores que la unidad las fracciones en que el denominador es mayor que el numerador. Dichas fracciones se denominan *propias*.

5. Consideremos dos segmentos como los de la figura 9.

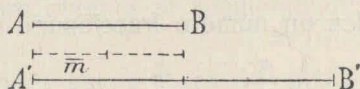


Fig. 9

Siendo AB parte alícuota de $A'B'$, si elegimos el primero de estos segmentos como unidad de medida corresponderá al segundo un número entero. Así, tenemos:

a AB corresponde 1.

a $A'B'$ corresponde 2, que expresa la medida de AB .

Dividamos ahora el segmento AB en dos partes iguales. Obtendremos un segmento, que designamos por m , del cual AB contiene 2, y $A'B'$ contiene 4. La medida de $A'B'$ estará ahora expresada por $\frac{4}{2}$.

Estos dos números que expresan la medida de un mismo

segmento, con la misma unidad, deben ser iguales; es decir:

$$\frac{4}{2} = 2. \quad (4 \text{ sobre } 2 \text{ es igual a } 2, \text{ lo mismo que } 4 \text{ dividido por } 2).$$

De la misma manera obtendríamos:

$$\frac{6}{2} = 3, \quad \frac{12}{3} = 4, \quad \frac{15}{5} = 3, \quad \text{es decir:}$$

Cuando el numerador de una fracción es divisible por su denominador la fracción es equivalente al número entero que se obtiene efectuando la división.

Fracciones de esta clase, es decir equivalentes a un número entero, se llaman aparentes. Todo número entero puede convertirse en una fracción aparente de cualquier denominador.

EJEMPLOS.

1. Convertir 5 en fracciones de denominador 2, 3, 11, respectivamente.
Tenemos:

$$5 = \frac{10}{2} \quad ; \quad 5 = \frac{15}{3} \quad ; \quad 5 = \frac{55}{11}$$

2. Convertir el número n en fracción de denominador 2.
Tenemos:

$$n = \frac{2n}{2}$$

3. Convertir el número 3 en fracción de denominar n .
Tenemos:

$$3 = \frac{3n}{n}$$

4. Convertir el número m en fracción de denominador n :
Tenemos:

$$m = \frac{nm}{n}$$

5. Convertir el número 1700 en fracción de denominador 1.
Tenemos:

$$1700 = \frac{1700}{1}$$

6. Convertir el número 1 en fracción de denominador 20.
Tenemos:

$$1 = \frac{20}{20}$$

7. Qué clase de fracciones representa el símbolo $\frac{m}{n}$; y en qué casos?

Tenemos: $\frac{m}{n}$ representa: fracción propia si $m < n$
 » impropia » $m > n$
 » aparente » m es múltiplo de n .

6. Fracciones equivalentes. Consideremos los segmentos de la fig. 10.

La unidad AB está dividida en 4 partes. La suma de 6 partes iguales a una de ellas da el segmento $A'B'$; su medida es

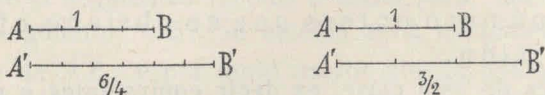


Fig. 10

pues $\frac{6}{4}$. A la derecha hemos tomado los mismos segmentos.

Pero AB está ahora dividida en 2 partes; y la suma de 3 partes iguales a una de ellas da $A'B'$; su medida se expresa pues por $\frac{3}{2}$.

Pero las dos medidas tienen que ser iguales, pues el segmento $A'B'$ es el mismo y la unidad también. Por consiguiente, será

$$(3) \quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

Ha resultado así que duplicando el número de partes en que se divide a la unidad (denominador) y duplicando también el número de partes iguales que se suman (numerador), la fracción que se obtiene es equivalente a la primitiva.

Lo mismo hubiera resultado multiplicando el numerador y denominador por 3 o por 4, y en general multiplicando por un mismo número el numerador y denominador.

OBSERVACIÓN. Cuando tenemos una igualdad como $a = b$ podemos también invertir el orden de sus miembros y escribir $b = a$. Esto constituye la propiedad simétrica de la igualdad.

De acuerdo con esta propiedad podemos escribir la (3) en la forma

$$(4) \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Por esta igualdad vemos que la segunda fracción, que es equivalente a la primera, se ha obtenido dividiendo el numerador y denominador de ésta por 2. Lo mismo resultaría dividiendo por un mismo número, cualquiera que sea.

De lo visto anteriormente deducimos, pues, la siguiente propiedad de las fracciones:

Si multiplicamos el numerador y denominador de una fracción por un mismo número obtenemos una fracción equivalente.

También obtenemos una fracción equivalente dividiendo ambos términos (cuando son divisibles) por un mismo número.

EJEMPLOS.

$$1. \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

$$2. \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 11}{3 \cdot 11} = \frac{22}{33}$$

3. Convertir $\frac{5}{7}$ en fracción equivalente de denominador 28. Tenemos:

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}$$

4. Será posible convertir $\frac{5}{7}$ en una fracción equivalente de denominador 12?

No es posible porque no hay ningún número entero que multiplicado por 7 de 12.

OBSERVACIÓN.

La propiedad de que podemos multiplicar ambos términos de una fracción por un mismo número obteniendo otra fracción equivalente se utiliza para resolver el siguiente problema:

Dadas dos fracciones, convertirlas en otras dos, respectivamente equivalentes, de igual denominador.

En la práctica se dice, brevemente, reducir dos fracciones a un común denominador.

EJEMPLOS.

1. Convertir $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ en fracciones de igual denominador. Tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15} \\ \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15} \end{array} \right\} \text{fracciones de igual denominador.}$$

Cómo hemos hecho? Hemos multiplicado el numerador y denominador de cada fracción por el denominador de la otra.

Así:

$$\begin{array}{l} 2. \quad \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{35}{28} \\ \frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{8}{28} \end{array}$$

3. Análogamente: convertir en fracciones de igual denominador $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \\ \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b} \end{array} \right\} \text{fracciones de igual denominador, pues } b \cdot d = d \cdot b.$$

4. Si las fracciones son más de dos llegaremos a reducirlas a común denominador, como puede verse fácilmente, aplicando la siguiente regla:

Se multiplica el numerador y denominador de cada fracción por los denominadores de las otras fracciones. Así, si las fracciones son: $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{7}$:

$$\begin{array}{l} \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 7}{5 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{56}{70} \\ \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{105}{70} \\ \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{40}{70} \end{array}$$

5. Convertir en fracciones equivalentes de igual denominador: $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$.

Tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{a \cdot d \cdot f}{b \cdot d \cdot f} \\ \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b \cdot f}{d \cdot b \cdot f} \\ \frac{e}{f} = \frac{e \cdot b \cdot d}{f \cdot b \cdot d} \end{array} \right\} \text{fracciones de igual denominador, pues } b \cdot d \cdot f = d \cdot b \cdot f = f \cdot b \cdot d.$$

OBSERVACIÓN.

Sean dos fracciones cualesquiera de diferente denominador, que representaremos por

$$\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}.$$

Reduzcámolas a fracciones equivalentes, respectivamente, de igual denominador. Obtenemos:

$$\frac{ad}{bd} \quad \text{y} \quad \frac{bc}{bd}$$

Si las fracciones dadas, es decir, a/b y c/d , son iguales, también lo serán estas últimas, que son respectivamente equivalentes a las primeras; es decir:

$$\text{si} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{es} \quad \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd};$$

y puesto que son iguales los denominadores también lo serán los numeradores; es decir:

$$ad = bc$$

Resulta así: si dos fracciones

$$\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}$$

son iguales, son iguales también los productos del numerador de una por el denominador de la otra.

Obtenemos así otra definición de igualdad de fracciones. Así:

$$\frac{18}{14} = \frac{27}{21} \quad \text{porque} \quad 18 \cdot 21 = 27 \cdot 14$$

7. Aplicación del m. c. m. En algunos casos, podemos efectuar la misma operación utilizando números más pequeños.

En efecto, sean $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$ las fracciones que reduciremos a común denominador. Es 12 el menor múltiplo común de 6 y 4. Podemos poner:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12} \\ \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12} \end{array} \right\} \text{fracciones de igual denominador.}$$

En realidad, hemos hecho lo siguiente: multiplicado el numerador y denominador de cada fracción por

el cociente que se obtiene dividiendo el m. c. m. de los denominadores por el denominador de la misma fracción. (En la primera fracción los hemos multiplicado por $2 = 12 \div 6$; en la segunda por $3 = 12 \div 4$).

EJEMPLO.

1. Reducir a común denominador $\frac{2}{5}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{10}$;

Tenemos: m. c. m. (5, 4, 12, 10) = 60; este será el menor denominador común. Ahora bien, para formar los numeradores decimos:

60 div.	5	igual	12	, mult.	por	2	igual	24
60	»	4	»	15	, »	»	9	» 135
60	»	12	»	5	, »	»	11	» 55
60	»	10	»	6	, »	»	7	» 42

Luego, las fracciones equivalentes a las dadas son, respectivamente:

$$\frac{24}{60}, \frac{135}{60}, \frac{55}{60}, \frac{42}{60}$$

8. Simplificación de fracciones. Otra aplicación de la propiedad estudiada es la simplificación de fracciones. La obtenemos dividiendo ambos términos por los divisores comunes. Así:

$$\frac{20}{30} = \frac{2}{3},$$

pues hemos dividido numerador y denominador por el mismo número (10).

Es claro que la fracción se reducirá a su expresión más sencilla cuando hayamos suprimido todos los factores comunes al numerador y denominador. Para ello recurrimos a la descomposición en factores primos (§ 11, 2). Así, tendríamos:

$$\frac{120}{144} = \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 3^2} = \frac{5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

9. Sabemos ya reducir dos fracciones a común denominador y determinar si dos fracciones dadas son o no equivalentes (o iguales).

Serán iguales si las dos fracciones tienen igual denominador e igual numerador, o se pueden reducir a fracciones de esta clase. Así, es $\frac{6}{24}$ igual a $\frac{4}{16}$ porque reducidas a común deno-

minador ambas son iguales a $\frac{96}{384} = \frac{1}{4}$.

Podemos expresarlo más sencillamente: para averiguar si dos fracciones dadas son iguales las convertimos en igual de-

numerador; si los numeradores son iguales, son iguales las fracciones.

Más sencillo, como vimos anteriormente, es multiplicar los términos cruzados y ver si son iguales los productos. Así

$$\frac{5}{7} = \frac{15}{21} \quad , \quad \text{pues} \quad 5 \cdot 21 = 15 \cdot 7$$

Si las fracciones dadas no son iguales podemos decidir fácilmente cuál es la mayor:

10. De acuerdo con nuestra definición de fracciones se deduce que de dos fracciones de igual denominador es mayor la que tiene mayor numerador.

Sean pues las fracciones $\frac{13}{15}$ y $\frac{15}{17}$.

Reduciéndolas a común denominador, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{13}{15} = \frac{221}{255} \\ \frac{15}{17} = \frac{225}{255} \end{array} \right\} \text{ es pues } \frac{15}{17} > \frac{13}{15} \quad , \quad \text{por ser } 225 > 221$$

11. Serán iguales las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{2+1}{3+1}$?

Sin necesidad de efectuar ninguna operación podemos contestar que nó; pues hemos pasado de la primera a la segunda fracción sumando al numerador y denominador un mismo número; en esta forma la fracción habrá variado, pues la única operación que permite obtener una fracción equivalente a otra es la de multiplicar (o dividir) ambos términos por un mismo número (salvo el caso trivial en que el numerador y el denominador de la fracción dada sean iguales); y en efecto, en nuestro caso:

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} \quad \text{porque} \quad 2 \cdot 4 < 3 \cdot 3.$$

§ 14. Adición de fracciones

1. Sean, fig. 11, dos segmentos, $\overline{m}$ y $\overline{n}$; sea $\overline{s}$ su suma.

Por ser el segmento $\overline{s}$ suma de $\overline{m}$ y $\overline{n}$ el número que expresa la medida de $\overline{s}$ deberá ser la suma de los números que expresan las medidas de $\overline{m}$ y $\overline{n}$. Resulta así:

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$1 = \frac{2}{2} \quad \text{---} \overline{m} \text{---}$$

$$\overline{s} = \overline{m} + \overline{n}$$

$$\frac{3}{2} \quad \text{---} \overline{n} \text{---}$$

$$\frac{5}{2} \quad \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$$

Fig. 11

Este número, $\frac{5}{2}$, es una fracción de igual denominador que las fracciones dadas, $\frac{2}{2}$, y $\frac{3}{2}$, cuyo numerador es igual a la suma de los numeradores.

Razonando en la misma forma, obtendríamos:

$$\frac{4}{5} + \frac{7}{5} = \frac{4+7}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+1+5}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

De esto deducimos la siguiente regla:

La suma de varias fracciones de igual denominador es otra fracción cuyo denominador es el mismo y cuyo numerador es la suma de los de las fracciones dadas.

EJEMPLOS.

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{3}{a} + \frac{5}{a} + \frac{9}{a} = \frac{17}{a}$$

$$\frac{2a}{3} + \frac{5a}{3} + \frac{8a}{3} = \frac{15a}{3} = 5a$$

2. Qué entenderemos por suma de fracciones de distinto denominador?

La contestación es también sencilla: La suma de varias fracciones es la fracción que se obtiene sumando las fracciones equivalentes a las dadas y de común denominador; es decir, que reducimos este caso al anterior.

EJEMPLOS.

1. Efectuar la suma $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6}$.

Tenemos:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{19}{12}$$

2. Efectuar la suma $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10}$.

Por ser 30 el m. c. m. de los denominadores, podemos indicarla también así:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{2 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 3}{30} = \frac{12 + 6 + 9}{30} = \frac{27}{30}$$

Análogamente:

$$\frac{5}{7} + \frac{2}{4} + \frac{1}{14} = \frac{12 + 14 + 2}{28} = \frac{28}{28} = 1.$$

OBSERVACIÓN.

Como se puede ver, fácilmente, para efectuar la suma de fracciones procedemos en la misma forma que para reducirlas a común denominador; colocamos a este como denominador y sumamos los numeradores que vamos obteniendo.

3. Efectuar la suma $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$.

Recordemos el ej § 13,6 donde ya hemos hecho la reducción de estas fracciones a común denominador. Tendremos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{a d f + c b f + e b d}{b d f}$$

4. Efectuar la suma $\frac{3}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{5}{a^3}$.

Podemos reducir las dos primeras fracciones también a denominador a^3 . Tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{a} = \frac{3 a^2}{a^3} \\ \frac{4}{a^2} = \frac{4 a}{a^3} \\ \frac{5}{a^3} = \frac{5}{a^3} \end{array} \right\} \text{ luego: } \frac{3}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{5}{a^3} = \frac{3 a^2}{a^3} + \frac{4 a}{a^3} + \frac{5}{a^3} = \frac{3 a^2 + 4 a + 5}{a^3}$$

3. Sabiendo sumar fracciones, sabemos también restarlas. Así, por ser

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$$

deducimos:

$$\frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

y también:

$$\frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$

En realidad, lo que hemos hecho en ambos casos es restar del numerador de la primera fracción el numerador de la segunda y poner por denominador el común.

Si las fracciones son de distintos denominadores las reducimos al mismo denominador y estamos en el caso ya considerado.

OBSERVACIÓN.

Por la manera como hemos definido la resta, tendrá, por ahora, significado únicamente, para nosotros, cuando nos propongamos restar de una fracción dada otra menor.

EJEMPLOS.

1. Efectuar $\frac{7}{4} - \frac{5}{7}$

Tenemos:

$$\frac{7}{4} - \frac{5}{7} = \frac{49}{28} - \frac{20}{28} = \frac{29}{28}$$

2. Efectuar $\frac{11}{5} - \frac{22}{15}$

Tenemos:

$$\frac{11}{5} - \frac{22}{15} = \frac{33}{15} - \frac{22}{15} = \frac{11}{15}$$

3. $\frac{17}{8} - \frac{2}{6} = \frac{51}{24} - \frac{8}{24} = \frac{43}{24}$

15. Multiplicación

1. Sabiendo sumar fracciones podemos también multiplicar una fracción por un número natural. Sea, por ejemplo, la suma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad ;$$

la expresamos más brevemente en la forma

$$\frac{1}{2} \times 3 \quad , \quad \text{o} \quad \frac{1}{2} \cdot 3 \quad ,$$

que se lee un medio multiplicado por tres.

Tendremos, pues:

$$\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1}{2} \quad \text{o sea} \quad \frac{1 \cdot 3}{2} \quad \text{o sea} \quad \frac{3}{2} .$$

El resultado puede pues expresarse:

$$\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1 \cdot 3}{2}$$

Análogamente, obtendríamos:

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{2 \cdot 7}{5} = \frac{14}{5} & \frac{1}{8} \cdot 6 = \frac{1 \cdot 6}{8} = \frac{6}{8} \\ \frac{3}{7} \cdot 11 = \frac{3 \cdot 11}{7} = \frac{33}{7} & \frac{2}{5} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{5} = \frac{8}{5} \end{array}$$

En general, siendo $\frac{a}{b}$ una fracción cualquiera, y n un número natural cualquiera, tendremos:

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}$$

Este resultado se expresa de la siguiente manera:

El producto de una fracción por un número natural es una fracción del mismo denominador y cuyo numerador se obtiene multiplicando el de la fracción por el número natural.

EJEMPLOS.

$$1. \quad \frac{a}{b} \cdot a = \frac{a \cdot a}{b} = \frac{a^2}{b}$$

$$2. \quad \frac{m}{n} \cdot n = \frac{m \cdot n}{n} = m$$

$$3. \quad \frac{a+b}{c+d} \cdot (c+d) = \frac{(a+b)(c+d)}{c+d} = a+b$$

$$4. \quad \frac{1}{n} \cdot n = \frac{1 \cdot n}{n} = 1.$$

$$5. \quad \frac{1000}{4} \cdot 4 = 1000$$

OBSERVACIÓN.

Conociendo la teoría de las fracciones podemos ahora efectuar en todos los casos la división de dos números naturales, cosa que antes no podíamos más que en los casos de división exacta.

En efecto; que significaría, según la definición, dividir 2 por 3?; significa: determinar un número que multiplicado por 3 nos de 2. Este número es, evidentemente, $\frac{2}{3}$; pues, según lo que hemos visto:

$$\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

Análogamente, 3 dividido por 5 nos da la fracción $3/5$

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \gg & & \gg & 7 & \gg & \gg & \gg & 4/7 \\ 11 & \gg & & \gg & 15 & \gg & \gg & \gg & 11/15 \end{array}$$

En general:

$$a \div b = \frac{a}{b} \quad \text{porque} \quad \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

2. Qué significado tendrá ahora el producto de un número por una fracción? Por ejemplo, qué significa $2 \cdot \frac{3}{5}$?

No podemos decir en la forma de antes: 2 sumado tres "quintos de veces" porque eso no tiene sentido. Pero podemos darle sentido recurriendo a la propiedad conmutativa.

Si aplicamos dicha propiedad, tendremos:

$$2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5}$$

Análogamente, podemos poner

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{6}{7}$$

y en el caso general

$$m \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot m = \frac{a m}{b}$$

El resultado de este caso y el anterior se expresa brevemente diciendo que para multiplicar un entero por un quebrado se multiplica el numerador por el entero y se pone el mismo denominador.

OBSERVACIÓN.

En la práctica conviene reducir lo más posible las operaciones para evitarse cálculos inútiles y pérdida de tiempo. Así, por ejemplo:

La operación $\frac{2}{3} \cdot 3$ no se hará en la forma $\frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{6}{3} = 2$ sino directamente: $\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$, es decir se suprime mentalmente, o con un trazo, el factor y el denominador, cuando son iguales.

EJEMPLOS.

$$\frac{2}{10} \cdot 10 = 2$$

$$3 \cdot \frac{7}{3} = 7$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

$$\frac{2}{b} \cdot b = 2$$

$$\frac{b}{11} \cdot 11 = b$$

$$m \cdot \frac{9}{m} = 9$$

3. Para multiplicar dos fracciones no podemos ya fundarnos en la definición que hemos dado antes, es decir recurrir a la suma. Por esta razón, vamos a dar una definición de producto de fracciones y mostrar después que es conveniente; es decir, que no nos conduce a contradicciones.

DEFINICIÓN. Para multiplicar dos fracciones se multiplican sus numeradores y denominadores entre sí.

Según esta definición, tendríamos:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

4. Como hemos visto en el § 13,5 una fracción puede ser aparente, es decir, en realidad, un número entero. La defini-

ción que hemos dado de producto de fracciones deberá poderse aplicar siempre; y en el caso que estamos mencionando, de fracciones aparentes, el producto tendrá que resultar igual al de dos números enteros. Y así sucede, como podemos comprobarlo.

EJEMPLOS.

Sea

$\frac{3}{1} \cdot \frac{5}{1}$; puesto que en verdad lo que tenemos es 3.5 también deberá resultar eso multiplicándolos como fracciones; y tenemos:

$$\frac{3}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 5}{1} = 3 \cdot 5$$

Análogamente:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{7}{1} = \frac{2 \cdot 7}{1 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 7}{1} = 2 \cdot 7$$

y en general:

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = a \cdot b$$

5. Sea ahora uno de los números una fracción y el otro un entero. Como sabemos, el entero puede tomarse como una fracción (aparente); luego el producto que resulte aplicando la definición que hemos dado tiene que ser igual al que ya conocemos en la multiplicación de una fracción por un entero. Y efectivamente sucede así. Tenemos:

$$\frac{2}{3} \cdot 5 ; \text{ según sabemos, es igual a } \frac{2 \cdot 5}{3}$$

Considerando ahora a 5 como fracción de denominador 1 y aplicando la regla que hemos establecido para multiplicar fracciones, tenemos:

$$\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 5}{3},$$

es decir el mismo resultado, como tenía que ser.

EJERCICIOS.

$$1. \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{36}{20} = \frac{9}{5}$$

$$2. \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 1$$

$$3. \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$$

6. Sea una fracción cualquiera, como $\frac{2}{3}$ y otra como $\frac{3}{2}$, formada con los mismos números pero invertidos. Ambas fracciones se llaman *inversas*. Así, $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{3}$ son dos fracciones inversas; análogamente, $\frac{9}{7}$ y $\frac{7}{9}$, y en general: $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$.

Por el resultado del ejercicio 3 se vé que el producto de dos fracciones inversas es siempre la unidad.

Esto nos permite ahorrar una operación, escribiendo directamente el resultado.

EJEMPLOS.

$$1. \quad \frac{11}{3} \cdot \frac{3}{11} = 1, \quad \frac{15}{6} \cdot \frac{6}{15} = 1, \quad \frac{13}{17} \cdot \frac{17}{13} = 1,$$

$$\frac{c}{D} \cdot \frac{D}{c} = 1, \quad \frac{l}{s} \cdot \frac{s}{l} = 1, \quad \frac{a+b}{c+d} \cdot \frac{c+d}{a+b} = 1, \quad \frac{m-n}{m+n} \cdot \frac{m+n}{m-n} = 1,$$

$$\frac{1+x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} = 1.$$

2. Multiplicar las fracciones $\frac{20}{30}$ y $\frac{40}{56}$.

Procediendo de acuerdo con la definición, tenemos:

$$\frac{20}{30} \cdot \frac{40}{56} = \frac{20 \cdot 40}{30 \cdot 56} = \frac{800}{1680}; \text{ y simplificando da: } \frac{10}{21}.$$

Pero si simplificamos las fracciones antes de multiplicarlas nos evitaremos usar números tan grandes. En efecto; el producto es también equivalente al de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{7}$; y obtenemos:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}, \text{ que es el resultado anterior.}$$

7. Propiedades de la multiplicación. El producto de fracciones goza de las mismas propiedades que el de números naturales; a saber:

I. Propiedad conmutativa. Según esta propiedad será

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \text{ igual a } \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4}; \text{ y en efecto:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3.5}{4.7} \\ \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5.3}{7.4} \end{array} \right\} \text{ambos son iguales, pues } 3.5 = 5.3 \quad \text{y} \quad 4.7 = 7.4$$

En general, tendremos: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$

II. Propiedad asociativa. Según esta propiedad, el producto

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11}, \text{ significa, indistintamente:}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \left[\frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} \right] \quad \text{ó} \quad \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7} \right] \cdot \frac{9}{11}; \text{ y en efecto:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} \right] = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{5.9}{7.11} \right] = \frac{3.5.9}{2.7.11} \\ \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7} \right] \cdot \frac{9}{11} = \left[\frac{3.5}{2.7} \right] \cdot \frac{9}{11} = \frac{3.5.9}{2.7.11} \end{array} \right\} \text{y ambas fracciones son iguales,} \\ \text{pues lo son los numeradores y} \\ \text{denominadores entre sí.}$$

En general, tendremos:

$$\left[\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right] \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left[\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \right]$$

III. Propiedad distributiva. Según esta propiedad tenemos

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{7} + \frac{11}{4} \right) \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{5}{7} \cdot 2 + \frac{11}{4} \cdot 2$$

En efecto; multiplicar por 2 la cantidad contenida en el paréntesis significa sumarla dos veces; y tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{7} + \frac{11}{4} \right) \cdot 2 &= \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{7} + \frac{11}{4} \right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{7} + \frac{11}{4} \right) \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{5}{7} + \frac{5}{7} \right) + \left(\frac{11}{4} + \frac{11}{4} \right), \end{aligned}$$

que puede escribirse

$$\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{5}{7} \cdot 2 + \frac{11}{4} \cdot 2,$$

como habíamos supuesto; y finalmente:

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{7} + \frac{11}{4} \right) \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{5}{7} \cdot 2 + \frac{11}{4} \cdot 2 = \frac{2.2}{3} + \frac{5.2}{7} + \frac{11.2}{4}$$

En general, será

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) m = \frac{a m}{b} + \frac{c m}{d} + \frac{e m}{f}$$

§ 16. Potencias

1. De acuerdo con la definición de multiplicación de fracciones, tendremos:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^3}{3^3}$$

Pero teniendo en cuenta que el primer miembro puede indicarse en la forma $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, resulta:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$$

Análogamente, tendríamos:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}, \quad \left(\frac{2}{7}\right)^5 = \frac{2^5}{7^5}, \quad \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^4};$$

y en general

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

propiedad que se expresa brevemente diciendo: para elevar a una potencia una fracción se elevan ambos términos a dicha potencia.

EJERCICIOS.

1. sea: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

2. $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{c^2+2cd+d^2}$

3. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^3}{b^3} = \frac{a^{2+3}}{b^{2+3}} = \frac{a^5}{b^5}$

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^{4+3}}{b^{4+3}} = \frac{a^7}{b^7}$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^{m+n}}{b^{m+n}}$

§ 17. La división

1. Sabiendo multiplicar fracciones podemos también efectuar su operación inversa, es decir la división.

Así, por ser

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$$

decimos que $\frac{6}{20}$ dividido por $\frac{3}{4}$ es igual a $\frac{2}{5}$; y lo expresamos:

$$\frac{6}{20} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \quad \text{ó} \quad \frac{6}{20} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5}, \quad \text{ó} \quad \frac{\frac{6}{20}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{5}$$

Análogamente, podemos poner:

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{2} \div \frac{5}{7} = \frac{21}{10} & \text{porque} \quad \frac{3}{2} = \frac{5}{7} \cdot \frac{21}{10} \\ \frac{2}{11} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{33} & \text{porque} \quad \frac{2}{11} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{33} \end{array}$$

En realidad, el problema que hemos resuelto en todos los casos es el siguiente; dada una fracción que es el producto de dos fracciones, y una de ellas, determinar la otra.

2. Cómo resolveremos fácilmente este problema?

Supongamos la siguiente división: $\frac{3}{2} \div \frac{5}{7}$.

Denominemos $\frac{m}{n}$ al cociente, que no conocemos. Deberá ser:

$$\frac{3}{2} \div \frac{5}{7} = \frac{m}{n}$$

es decir (1)

$$(1) \quad \frac{3}{2} = \frac{5}{7} \cdot \frac{m}{n}$$

Se vé fácilmente que si ponemos $\frac{3.7}{2.5}$ en lugar de $\frac{m}{n}$ se cumple la igualdad (1). En efecto:

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3.7}{2.5},$$

pues simplificando el segundo miembro se obtiene: $\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

El cociente, $\frac{m}{n}$, de dividir $\frac{3}{2}$ por $\frac{5}{7}$, se ha obtenido en la siguiente forma:

El numerador (3.7), multiplicando el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda; el denominador,

(2.4), multiplicando el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

Esta regla vale siempre. Así, digo que

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad ; \quad \text{y en efecto:}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a \cdot d}{b \cdot c} ;$$

lo cual se comprueba fácilmente simplificando la fracción que resulta en el segundo miembro.

OBSERVACIÓN.

1. El resultado anterior se expresa brevemente en forma de regla práctica, diciendo:

Para dividir dos fracciones se multiplican sus términos en cruz.

Así
$$\frac{2}{5} \div \frac{11}{6} = \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 11} = \frac{12}{55}$$

Esta regla puede dar lugar a equivocaciones cuando la operación se indica en la forma.

$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{11}{6}}$. Para evitarlo preferimos emplear la siguiente regla:

Para dividir una fracción por otra se multiplica la primera por la inversa de la segunda. Así:

$$\frac{2}{5} \div \frac{11}{6} = \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{11}$$

$$\frac{3}{2} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

y en general:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Análogamente, si escribimos en la otra forma:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{11}{6}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{11} = \frac{12}{55}$$

APLICACIONES.

1. La misma regla es aplicable cuando se divida un número entero por una fracción, o una fracción por un número entero.

Sea: $2 \div \frac{3}{4} = \frac{2}{1} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3}$;

y en realidad, el resultado es

$$2 \div \frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

En la práctica se suprimen las operaciones intermedias que aquí usamos para explicar, y mentalmente se multiplica el entero por el denominador.

Así

$$2 \div \frac{4}{5} = \frac{10}{4} ; \quad 3 \div \frac{6}{11} = \frac{33}{6}$$

2. Sea ahora $\frac{2}{11} \div 5 = \frac{2}{11} \div \frac{5}{1} = \frac{2}{11 \cdot 5}$; en realidad el resultado es:

$$\frac{2}{11} \div 5 = \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{11 \cdot 5}$$

También en este caso se suprimen las operaciones intermedias y mentalmente se multiplica el entero por el denominador. Así:

$$\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4}{10} ; \quad \frac{6}{11} \div 3 = \frac{6}{33}$$

OBSERVACIÓN.

I. Vemos pues que la regla de multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda vale siempre aunque las fracciones sean números enteros. Sólo hay que tener presente que la inversa de n es $\frac{1}{n}$. Esta regla servirá siempre cuando el alumno haya olvidado los procedimientos más rápidos de división de fracciones.

II. Cuando se usa la forma de indicar la división con rayas horizontales hay que tener precauciones para no interpretar mal la operación. Por ejemplo:

$\frac{2}{\frac{3}{5}}$ no dice nada, porque puede interpretarse de dos maneras distintas con diferentes resultados. En efecto:

$$\frac{2}{\frac{3}{5}} \text{ significa } 2 \text{ div. por } \frac{3}{5} \text{ o sea } 2 \cdot \frac{5}{3}, \text{ igual } \frac{10}{3}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{5} \text{ significa } \frac{2}{3} \text{ div. por } 5 \text{ o sea } \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}, \text{ igual } \frac{2}{15}$$

La raya más larga indicará pues el signo de división; la más corta será de la fracción.

EJERCICIOS.

$$1. \quad \frac{12}{5} : \frac{5}{4} = \frac{48}{15} = \frac{16}{5} \quad ; \quad \frac{a}{m} : \frac{a^2}{m^2} = \frac{a m^2}{a^2 m} = \frac{m}{a}$$

$$2. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 \div \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^3}{b^3} \div \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^3 b^2}{b^3 a^2} = \frac{a}{b}$$

$$3. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^m}{b^m} \div \frac{a^n}{b^n} = \frac{a^m b^n}{b^m a^n}$$

$$4. \quad (a+b) \div \frac{1}{(a+b)} = (a+b)^2$$

$$5. \quad \frac{1}{(a+b)} \div (a+b) = \frac{1}{(a+b)^2}$$

$$6. \quad \frac{a+x}{a-x} \div \frac{m}{n} = \frac{(a+x)n}{(a-x)m} = \frac{a n + x n}{a m - x m}$$

$$7. \quad \frac{a+b+c}{a-b+c} \div \frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{(a+b+c)^2}{(a-b+c)^2}$$

$$8. \quad \frac{m}{n} \div \frac{n}{m} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

$$9. \quad \frac{a+b}{a-b} \div \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$$

$$10. \quad \frac{a + \frac{b}{c}}{a - \frac{b}{c}} = \frac{\frac{a c + b}{c}}{\frac{a c - b}{c}} = \frac{a c + b}{a c - b}$$

$$11. \quad \frac{\frac{r}{s} + p}{\frac{l}{m} + q} = \frac{\frac{r + s p}{s}}{\frac{l + m q}{m}} = \frac{(r + s p) m}{(l + m q) s}$$

$$12. \quad \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$13. \quad \frac{\frac{a^2+b^2}{b} - 2a}{\frac{a^2+b^2}{b} + 2a} = \frac{\frac{a^2+b^2-2ab}{b}}{\frac{a^2+b^2+2ab}{b}} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

§ 18. Extracción de raíces

1. Lo mismo que en el caso de los números naturales podemos extraer las raíces de fracciones cuando sean potencias de otras.

Así, por ejemplo:

por ser $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$, escribimos

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$$

De la misma manera:

$$\frac{a}{b} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}$$

2. Al tratar de las potencias (§ 16) vimos que para elevar una fracción a una potencia dada se elevaban ambos términos a la potencia. Aquí vemos que la misma regla vale para extraer una raíz, es decir: para extraer una raíz de una fracción se extrae dicha raíz del numerador y del denominador.

EJEMPLOS.

$$1. \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \qquad 6. \quad \sqrt[3]{\frac{a^3 b^3}{8}} = \frac{a b}{2}$$

$$2. \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3} \qquad 7. \quad \sqrt{\frac{a^2 b^4}{c^6}} = \frac{a b^2}{c^3}$$

$$3. \quad \sqrt{\frac{64}{49}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}} = \frac{8}{7} \qquad 8. \quad \sqrt[3]{\frac{a^3 b^3}{c^3}} = \frac{a b}{c}$$

$$4. \quad \sqrt{\frac{a^4}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a^2}{b} \qquad 9. \quad \sqrt{\frac{m^2 n^2}{a^2 b^2}} = \frac{m n}{a b}$$

$$5. \quad \sqrt[3]{\frac{(a-b)^3}{(a+b)^3}} = \frac{a-b}{a+b} \qquad 10. \quad \sqrt[3]{\frac{(a+b)^3}{(a-b)^3}} = \frac{(a+b)}{a-b}$$

CAPITULO VI

FRACCIONES DECIMALES

§ 19. Generalidades

1. DEFINICION. Dentro de los números fraccionarios o fracciones, como los hemos denominado, hay algunos muy usados por las comodidades que representan para los cálculos. Son las que tienen como denominador una potencia de 10. Así, por ejemplo :

$$\frac{12}{10} , \frac{85}{100} , \frac{25}{1000} , \frac{8}{10000} ,$$

que se denominan fracciones decimales.

Se pueden expresar también en la forma:

$$\frac{12}{10} , \frac{85}{10^2} , \frac{25}{10^3} , \frac{8}{10^4} .$$

Cuando el numerador de la fracción decimal es 1, se denomina unidad fraccionaria decimal.

Así, por ejemplo :

$$\frac{1}{10} , \frac{1}{100} , \frac{1}{1000} , \dots$$

son unidades fraccionarias decimal: de primer orden, segundo orden, y tercer orden,.... respectivamente.

2. La relación que hay entre cada unidad decimal y la siguiente es la misma que entre las unidades enteras. Así:

$$\frac{1}{10} = 10 \cdot \frac{1}{100} ; \quad \frac{1}{100} = 10 \cdot \frac{1}{1000} , \quad \text{etc.}$$

Esto se aprovecha para escribir las fracciones decimales en la forma que se denomina número decimal.

Denominamos número decimal a expresiones como las siguientes:

$$0,285 \quad 0,092 \quad 43,16 \quad 2,385$$

Con ellas queremos representar lo siguiente:

$$0,285 = \frac{285}{1000}; \quad 0,092 = \frac{92}{1000}; \quad 43,16 = \frac{4316}{100}; \quad 2,385 = \frac{2385}{1000}$$

Recíprocamente, podemos expresar una fracción decimal dada en la forma de número decimal.

EJEMPLOS.

$$1. \quad \frac{28}{100} = 0,28 \quad \frac{35}{10} = 3,5 \quad \frac{27}{1000} = 0,027$$

La regla para hacer esta conversión es, como se ve, muy sencilla: se separan a contar de la derecha, en el numerador, tantas cifras como ceros acompañan a la unidad en el denominador, completando con ceros si fuera necesario.

2. También podemos expresar un número decimal como suma de unidades de diferente orden, enteras y decimales. Así, tenemos:

$$32,645 = 3 \cdot 10 + 2 + \frac{6}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

$$978,42 = 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8 + \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2}$$

$$0,963 = \frac{9}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{3}{10^3}$$

3. Los números decimales se multiplican y dividen muy fácilmente por potencias de 10. En efecto, consideremos el siguiente ejemplo: $\frac{25,3}{10}$; tenemos:

$$\frac{25,3}{10} = \frac{2 \cdot 10 + 5 + \frac{3}{10}}{10} ;$$

y recordando que para dividir por 10 la suma del segundo miembro hay que dividir cada sumando, tenemos:

$$\frac{2 \cdot 10}{10} + \frac{5}{10} + \frac{\frac{3}{10}}{10} ;$$

y recordando que para dividir una fracción por un número se multiplica su denominador por dicho número, obtenemos

$$2 + \frac{5}{10} + \frac{3}{10^2} \quad ; \quad \text{luego}$$

$$\frac{25,3}{10} = 2 + \frac{5}{10} + \frac{3}{10^2} = 2,53$$

Análogamente, obtendríamos:

$$\frac{32,84}{10^3} = 0,03284 \quad . \quad \frac{2,6}{10^4} = 0,00026$$

La regla práctica que deducimos de estos ejemplos y que será la que aplicaremos, es la siguiente:

Para dividir un número decimal por una potencia de 10 se corre la coma a la izquierda, completando con ceros si fuera necesario, tantos lugares como el exponente de 10.

Tengamos ahora un producto, como $2,36 \times 10^3$.

Tenemos:

$$2,36 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{6}{10^2} \quad , \quad \text{y multip. ambos miembros por } 10^3$$

$$2,36 \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^3 + \frac{3}{10} \cdot 10^3 + \frac{6}{10^2} \cdot 10^3$$

y haciendo las simplificaciones en el segundo miembro:

$$\begin{aligned} 2,36 \cdot 10^3 &= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 = 2000 + 300 + 60 \\ &= 2360 \end{aligned}$$

Análogamente, encontraríamos:

$$26,3 \cdot 10^2 = 2630 \quad ; \quad 26,345 \cdot 10^2 = 2634,5.$$

La regla a emplear en la práctica es la siguiente:

Para multiplicar un número decimal por una potencia de 10 se corre la coma tantos lugares a la derecha como el exponente de 10, completando con ceros si fuera necesario.

§ 20. Operaciones con números decimales

1. *Adición y sustracción.* Sea a efectuar la siguiente suma:

$$0,836 + 1,94 + 26,5$$

Podemos expresar estos números decimales como fracciones decimales; nuestra suma se convierte en:

$$\frac{836}{10^3} + \frac{194}{10^2} + \frac{263}{10};$$

reduciendo a común denominador, tenemos:

$$\frac{836}{10^3} + \frac{1940}{10^3} + \frac{26300}{10^3} = \frac{29076}{10^3} = 29,076$$

OBSERVACIÓN.

Para efectuar la reducción a común denominador hemos agregado, en realidad, ceros a la derecha de los numeradores hasta que tengan todos tantas cifras decimales como el que más tiene; después se han sumado los numeradores y efectuado la separación de decimales con la coma.

El resultado es el mismo que obtenemos colocando directamente en columna las cantidades a sumar, de modo que las comas se correspondan. Así, en nuestro caso tenemos:

0,836	En la práctica suprimimos	0,836
1,940	los ceros a la derecha, pues	1,94
26,300	no hacen falta: así lo hemos	26,3
<u>29,076</u>	hecho a la derecha de la página.	<u>29,076</u>

2. Para efectuar la substracción será necesario que el minuendo sea mayor que el substraendo. Necesitamos pues saber cómo reconocemos cuando un número decimal es mayor que otro.

Lo conseguimos fácilmente reduciéndolos a fracciones decimales de igual denominador; después, será mayor la que tenga mayor numerador.

EJEMPLO.

¿Cuál de los números 45,15 y 45,2 es mayor? Podemos escribirlos:

$$\frac{4515}{10^2} \quad \text{y} \quad \frac{452}{10}$$

y reduciendo a común denominador:

$$\frac{4515}{10^2} \quad \text{y} \quad \frac{4520}{10^2},$$

luego es mayor la segunda fracción.

OBSERVACIÓN.

En resumen, el procedimiento a seguir es: se escriben los números con igual número de cifras decimales; será mayor aquel que dé un número entero mayor al suprimir la coma.

En la práctica no es necesario esta reducción. Si los números tienen

distinta parte entera es mayor el que tiene mayor parte entera. Si la tienen igual es mayor el que tiene mayor parte decimal.

3. Una vez determinado que la substracción puede hacerse la efectuamos, simplemente, como operación inversa de la adición. Así tendremos:

29,07600	En la práctica suprimimos	29,076
12,13453	los ceros a la derecha como	12,13453
16,94147	en el caso de la adición. Así,	16,94147
	tenemos:	

4. **Multiplicación.** También en este caso deducimos fácilmente la regla a seguir, convirtiendo los números decimales en fracciones decimales.

EJEMPLO. Sea:

$$25,36 \times 2,8. \quad \text{Tenemos:}$$

$$\frac{2536}{10^2} \times \frac{28}{10} = \frac{2536 \cdot 28}{10^3} = \frac{71008}{10^3} = 71,008$$

El resultado es el mismo que obtenemos multiplicando los factores como enteros y separando tantos decimales a contar de la derecha como los que hay en ambos factores juntos.

En esta forma sencilla lo hacemos en la práctica.

La misma regla vale si uno de los factores es entero.

5. **Cocientes aproximados.** 1 Sea, por ejemplo, la siguiente fracción:

$\frac{2546}{218}$, que como sabemos es el número que se obtiene al dividir 2546 por 218. Efectuemos la división entera y apliquemos la propiedad III, § 6,3. Tenemos:

$$\begin{array}{r|l} 2546 & 218 \\ 366 & 11 \\ 138 & \end{array} \quad \text{es decir} \quad 2546 = 218 \cdot 11 + 148;$$

y dividiendo ambos miembros por 218:

$$(1) \quad \frac{2546}{218} = 11 + \frac{148}{218}$$

Qué sucede si en esta igualdad suprimimos la fracción? El segundo miembro disminuye; luego no vale más la igualdad, y habrá que escribir

$$11 < \frac{2546}{218} \quad (2)$$

Ahora bien: la fracción suprimida, $\frac{148}{218}$, es menor que 1; si en vez de ella colocamos 1 el segundo miembro habrá aumentado; tendremos

$$\frac{2546}{218} < 11 + 1, \text{ o sea: } \frac{2546}{218} < 12 \quad (5)$$

Lo que expresan estas dos desigualdades puede ponerse más sencillamente así:

$$11 < \frac{2546}{218} < 12 ,$$

que se lee: 11 menor que $\frac{2546}{218}$ menor que 12.

Nuestro cociente exacto, es decir el número fraccionario $\frac{2546}{218}$, es pues mayor que 11 y menor que 12.

Se lo expresa brevemente diciendo que está comprendido entre 11 y 12, o que difiere de 11 y de 12 en menos de una unidad. Si tomo 11 para dicho cociente digo que tengo el cociente aproximado con error menor que 1, por **defecto**; si tomo 12, por **exceso**.

EJERCICIOS.

1. por ser $39 < \frac{218}{6} < 40$, es:

39 el cociente $\frac{218}{6}$ con error menor que 1, por defecto, 40 por exceso.

2. Por ser $42 < \frac{29545}{683} < 43$, es:

42 el cociente $\frac{29545}{683}$ con error menor que 1, por defecto; 43 por exceso.

II. A veces necesitamos expresar el cociente con mayor aproximación es decir con error menor que $\frac{1}{10}$, o $\frac{1}{1000}$... etc

Así, por ejemplo: queremos determinar dos fracciones de denominador 100, cuyos numeradores sean números consecutivos y tales que: la primera fracción sea menor que $\frac{2}{7}$, y la segunda mayor que $\frac{2}{7}$

Denominemos x , y $(x+1)$ a los numeradores; tendremos:

$$(4) \quad \frac{x}{100} < \frac{2}{7} < \frac{x+1}{100}$$

Multiplicando por 100 las tres fracciones obtenemos:

$$(5) \quad x < \frac{200}{7} < x+1$$

Esta expresión nos muestra que x es la parte entera del cociente $\frac{200}{7}$; luego es $x=28$; y reemplazando en la (4) este valor, obtendremos:

$$\frac{28}{100} < \frac{2}{7} < \frac{29}{100} , \quad \text{o sea} \quad 0.28 < \frac{2}{7} < 0.29 .$$

Esta última expresión nos muestra que el cociente $\frac{2}{7}$ está comprendido entre 0,28 y 0,29; es decir:

0,28 es el cociente aproximado en menos de 0,01, por defecto.

0,29 » » » » » » » » por exceso.

OBSERVACIÓN.

En resumen, la operación se ha reducido a: multiplicar el numerador por 100; determinar el cociente entero y dividir nuevamente por 100.

Si en vez de aproximar a 0,01 lo hacemos a 0,001 la misma regla es válida; sólo que multiplicaremos por 1000, y dividimos después también por 1000.

La regla vale pues en general, como puede demostrarse fácilmente.

EJERCICIOS.

1. Determinar el cociente $\frac{6}{7}$ aproximado por defecto en menos de 0.001.

6. $1000 = 6000$; cociente entero de $6000 \div 7$ es 857; luego **0,857** es el resultado buscado.

2. Determinar el cociente $\frac{15}{11}$ aproximado por exceso en menos de 0,0001.

$15.10000 = 150000$; coc. entero de $15.0000 \div 7$ es: 2142; luego **0,2143** es el resultado buscado.

6. División. I. Sea el caso de dividir un número decimal por un número entero. Por ejemplo:

$\frac{38,65}{17}$. Tenemos:

$$\frac{38,65}{17} = \frac{3865}{1700} = \frac{3865}{17} \cdot \frac{1}{100}.$$

Dividiremos pues 3865 por 17 y el resultado por 100.

Si calculamos la parte entera de nuestro cociente tenemos;

$$227 < \frac{3865}{17} < 228$$

Dividiendo ahora por 100 los tres miembros de la desigualdad, tenemos-

$$2,27 < \frac{38,65}{17} < 2,28$$

luego: **2,27** es el cociente $\frac{38,65}{17}$, aproximado en menos de 0,01.

El resultado se obtiene pues efectuando la división como si fuera entero el dividendo, y colocando la coma después del cociente de la parte entera.

Arit. y Alg., 6.

EJEMPLO.

Tenemos :

$$\begin{array}{r} 26,27 \overline{) 11} \\ 42 \\ 97 \\ 90 \\ 20 \end{array}$$

y serán los cocientes aproximados :

$$\begin{array}{llll} 2 & \text{con error} < 1 \\ 2,3 & \gg & \ll < 0,1 \\ 2,38 & \gg & \gg < 0,01 \\ 2,388 & \gg & \gg < 0,001 \\ 2,3881 & \gg & \gg < 0,0001 \end{array}$$

II. Sea ahora el caso de dividir un número (entero o decimal) por un número decimal.

Cualquiera sea el dividendo se reduce este caso al anterior multiplicando el dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tiene el divisor.

1. Dividir 38 por 2,64 :

Multiplicando ambos número por 100, obtenemos 3800 y 264. Haciendo la división

$$\begin{array}{r} 3800 \overline{) 264} \\ 1160 \\ 1040 \\ 2480 \\ 1040 \\ 248 \end{array}$$

Los cocientes aproximados serán

$$\begin{array}{llll} 14 & \text{con error} < 1 \\ 14,3 & \gg & \gg < 0,1 \\ 14,39 & \gg & \gg < 0,01 \\ 14,395 & \gg & \gg < 0,001 \end{array}$$

2. Dividir 23,3 por 2,64; multiplicando ambos números por 100, tenemos:

$$\begin{array}{r} 2530 \overline{) 264} \\ 1540 \\ 2200 \\ 188 \end{array}$$

siendo **9,58** el cociente aproximado en menos de 0,01.

CAPITULO VII

RAZONES Y PROPORCIONES

§ 21. Razón de dos magnitudes

1. En el Cap. V, § 13, habíamos visto, al estudiar las fracciones, en qué consistía la medida de un segmento de recta. Con tal objeto nos hemos servido de algunos ejemplos para establecer cierta comparación entre dichos segmentos. Lo recordaremos nuevamente con un caso concreto:

Sean dos segmentos como los de la figura 12.

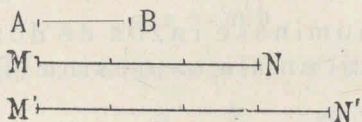


Fig. 12

Como se vé, existe aquí una parte alicuota común a los dos segmentos, que es $\overline{AB}$; y tenemos:

$$\overline{AB} = \frac{\overline{MN}}{3} \quad : \quad \overline{AB} = \frac{\overline{M'N'}}{4}$$

y también:

$$(1) \quad 4 \overline{MN} = 3 \overline{M'N'}$$

La relación que expresa la (1) suele enunciarse, también, en la aritmética, en otra forma: decimos que entre las magnitudes $\overline{MN}$ y $\overline{M'N'}$ existe la misma razón que entre los números 3 y 4; entendiendo por razón de estos números, en el orden nombrado, al número $\frac{3}{4}$.

Lo indicamos:

$$(2) \quad \overline{MN} : \overline{M'N'} = 3 : 4 \quad \text{o también} \quad \overline{MN} : \overline{M'N'} = \frac{3}{4} \quad (3)$$

La relación escrita en la forma (2) se expresa: $\overline{MN}$ es a $\overline{M'N'}$ como 3 es a 4.

La relación escrita en la forma (3) se expresa: la razón entre los segmentos MN y $M'N'$ es el número $\frac{3}{4}$.

2. Los segmentos de recta no son más que una clase de magnitudes. Existen otras clases de magnitudes como los tiempos, fuerzas, velocidades, etc. Las consideraciones que hicimos en el número anterior para los segmentos son también aplicables a dos magnitudes cualesquiera de la misma clase, como ser: dos tiempos, dos fuerzas, etc.

Esto dicho, sean pues, en general, dos magnitudes de la misma clase, que designaremos por a y b ; y sean m y n dos números naturales, tales que

$$(4) \quad n \cdot a = m \cdot b \quad ; \quad \text{sentamos la siguiente}$$

DEFINICIÓN: denominase razón de dos magnitudes a y b que satisfacen ala expresión (4), al número $\frac{m}{n}$, y lo expresamos:

$$(5) \quad a : b = \frac{m}{n}$$

La primera magnitud que figura en la razón se denomina antecedente, la segunda consecuente.

OBSERVACIÓN.

Hay que recordar que la (5) no es más que otra manera diferente de expresar la (4); luego, cuando escribamos una expresión como la segunda podemos inversamente, escribirla en la forma (4).

3. Multipliquemos ambos miembros de la (4) por un mismo número, k . Obtenemos:

$$(n a) k = (m b) k ,$$

que podemos también escribir en la forma:

$$n. (a k) = m. (b k) ,$$

de la cual deducimos

$$a k : b k = \frac{m}{n} ;$$

es decir, si la razón de a y b era $\frac{m}{n}$, la razón de $a k$ y $b k$

es también $\frac{m}{n}$; lo cual se enuncia:

Si multiplicamos por un mismo número el antecedente y el consecuente de una razón, esta no varía.

EJEMPLO.

Sean r y s dos magnitudes; si es

$$r : s = \frac{5}{7}, \text{ lo cual significa } 7r = 5s, \text{ será también}$$

$$3r : 3s = \frac{5}{7}, \text{ » » » } 7 \cdot 3r = 5 \cdot 3s.$$

4. Volvamos a escribir la igualdad (4) entre las magnitudes na y nb ; es decir:

$$(6) \quad na = mb.$$

Dividiendo ambos miembros por $n \cdot m$ obtenemos:

$$(7) \quad \frac{a}{m} = \frac{b}{n};$$

es decir:

$\frac{a}{m}$, cociente de dividir una magnitud a (segmento) por un número, da otra magnitud (parte alicuota) que designaremos por u ; y esta misma magnitud se obtiene, según (9), dividiendo b por n ; es decir:

$$\frac{a}{m} = u, \quad \frac{b}{n} = u; \quad \text{o sea}$$

$$(8) \quad a = mu, \quad b = nu$$

Si tomamos a u como unidad de medida (§ 12) es decir le hacemos corresponder el número 1, será m la medida de a y n la de b .

Si en cambio de tomar a u como unidad tomamos otra magnitud, no corresponderá ya a u el número 1; corresponderá otro, por ejemplo 3; pero entonces será $m \cdot 3$ la medida de a

y $n \cdot 5$ la de **b**; el cociente de estos dos números $\frac{5m}{5n}$ es igual a $\frac{m}{n}$ es decir el mismo que antes. Luego: cualquiera sea la unidad elegida, la medida de **a** y la de **b** tienen por cociente el número $\frac{m}{n}$ que como sabemos es la razón de las magnitudes **a** y **b**.

5. Dibujemos un triángulo cualquiera, como el de la fig. 13. Designemos por **a**, **b**, **c** a los segmentos que constituyen

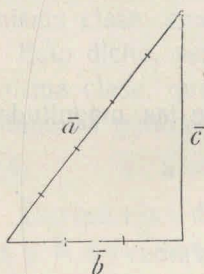


Fig. 13

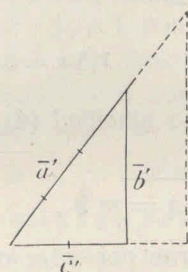


Fig. 14

sus lados. Midamos dos de sus lados con una unidad cualquiera y hagamos su razón. Supongamos que el resultado sea, fig. 13:

$$(9) \quad a:b = \frac{5}{3}$$

Tracemos ahora una paralela al tercer lado (fig. 14) por un punto cualquiera (por el punto M a la distancia 2,5 del vértice, p. ej.). Queda formado un nuevo triángulo, cuyos lados (segmentos) designaremos por **a'**, **b'**, **c'**.

Si medimos el lado **b'** con la misma unidad, resultará:

$$(9') \quad a':b' = \frac{2,5}{1,5} = \frac{5}{3}$$

es decir el mismo resultado que en la (9), o sea: la razón de **a'** y **b'** es igual a la razón de **a** y **b**.

Por ser iguales las razones (9) y (9') decimos que los cuatro segmentos (magnitudes) **a**, **b**, **a'**, **b'** forman una proporción, y lo escribimos

$$(10) \quad a:b::a':b' \quad \text{o también} \quad a:b = a':b'.$$

Escrita en la primera forma, la expresión (7) se lee: **a** es a **b** como **a'** es a **b'**.

EJEMPLOS.

Sea e el camino (segmento) recorrido por un tren en un tiempo t ; y e' el camino recorrido en otro tiempo t' , siempre con la misma velocidad. Es fácil comprender que si el tren marcha durante tres veces más tiempo, recorrerá tres veces más camino; es decir, que si t' es tres veces mayor que t , será también e' tres veces mayor que e . Esto, significa que entre e y e' existe la misma razón que entre t y t' ; o sea, que podemos escribir la proporción:

$$(7') \quad e : e' :: t : t' \quad \text{o sea} \quad e : e' = t : t'$$

Porque se puede escribir esta proporción es que decimos: cuando un tren (móvil) marcha sin cambiar su velocidad, los espacios recorridos son proporcionales a los tiempos empleados en recorrerlos.

6. Volvamos ahora al ejemplo considerado en el n.º 4, del movimiento de un tren con velocidad constante. Midamos los espacios con una unidad cualquiera (kilómetro p. ej.), y también los tiempos con otra unidad (hora p. ej.). Sean:

e, e', t, t'	las magnitudes del problema
$3, 6, 2, 4$	sus correspondientes medidas

La razón de e y e' es igual a la de t y t' (7'). Por esto, y por lo que hemos visto en el número anterior, deberemos tener:

$$(11) \quad \frac{3}{6} = \frac{2}{4}$$

lo que efectivamente sucede, pues $3 \cdot 4 = 6 \cdot 2$.

Supongamos ahora que conocemos las medidas de e, t y t' , y no conocemos la de e' . Designémosla por x . Por la igualdad (11) tendremos

$$(12) \quad \frac{3}{6} = \frac{2}{x}, \quad \text{o sea} \quad 3 \cdot x = 2 \cdot 6, \quad \text{es decir:}$$

$$x = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4.$$

Este resultado se expresa:

I. La medida de un medio de una proporción es igual al producto de las medidas de los extremos dividido por la medida del medio conocido.

Con el cálculo anterior hemos resuelto, en realidad, el siguiente problema: si un móvil recorre con velocidad siempre igual (constante) 3 kilómetros en 2 horas, cuántas horas empleará para recorrer 6 kilómetros?.

7. Supongamos, ahora, que en el problema anterior conocemos las medidas de e' , t y t' , y queremos determinar la de e' ; designémosla por x . Por la (11), tendremos:

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{4}, \text{ o sea } 3.4 = x.2, \text{ es decir:}$$

$$(13) \quad x = \frac{3.4}{2} = 6$$

Este resultado se expresa:

II. La medida de un extremo en una proporción es igual al producto de las medidas de los medios dividido por la medida del otro extremo.

Con el cálculo que acabamos de efectuar hemos resuelto, en realidad, el siguiente problema:

Si un tren ha recorrido, con velocidad constante, 3 kilómetros en 2 horas, cuántos kilómetros recorrerá en 4 horas?

§ 22. Números proporcionales

1. Consideremos las dos series de números siguientes:

$$(1) \quad \begin{array}{l} 2, 4, 7, 9, 15, 20 \\ 6, 12, 21, 27, 45, 60 \end{array}$$

Podemos observar que cada número de la segunda fila se obtiene multiplicando el correspondiente número de la primera (es decir el que está arriba) por 3. Análogamente sucede con las series de números:

$$(2) \quad \begin{array}{l} 2, 6, 8, 12, 16, 24 \\ 1, 3, 4, 6, 8, 12 \end{array} ;$$

los números de la segunda fila se obtienen dividiendo los correspondientes de la primera por 2, o sea multiplicando por $1/2$.

En ambos casos decimos que los números de una de las filas son proporcionales a los números de la otra. En el caso (1) decimos que 3 es el factor de proporcionalidad; y en el caso (2) que $\frac{1}{2}$ es el factor de proporcionalidad.

Decir que todo número de la segunda fila se obtiene multiplicando el correspondiente de la primera por un mismo factor significa lo mismo que decir que el cociente de dividir un número de la segunda por su correspondiente en la primera es siempre el mismo. Así, del ejemplo (1) deducimos:

$$\frac{6}{2} = \frac{12}{4} = \frac{21}{7} = \frac{27}{9} = \frac{45}{15} = \frac{60}{20} = 3.$$

El cociente constante que se obtiene, es decir 3 en este caso, es lo que se denomina factor de proporcionalidad.

EJEMPLO.

Sean l y l' las longitudes de dos circunferencias cuyos diámetros miden, respectivamente, d y d' . La geometría enseña que los números l y l' son proporcionales a d , d' ; es decir:

$$(3) \quad \frac{l}{d} = \frac{l'}{d'}.$$

Esta relación constante, que como hemos dicho se denomina factor de proporcionalidad, se designa en la geometría por la letra π (ver geometría); luego la (3) nos da:

$$\frac{l}{d} = \pi, \quad \frac{l'}{d'} = \pi, \quad \text{es decir } l = \pi d, \quad l' = \pi d'.$$

Basta, pues, multiplicar la longitud del diámetro por el número π para obtener la de la circunferencia.

2. Sean ahora dadas las siguientes series de números:

$$(4) \quad \begin{array}{l} 2, 3, 5, 6, 8, \dots \\ 4, 6, x, 12, 16, \dots \end{array}$$

Vemos que los números de la segunda fila son proporcionales a los de la primera (y reciprocamente); queremos determinar x , que es el número correspondiente a 5.

El factor de proporcionalidad es 2. Lo averiguamos dividiendo un número cualquiera de la segunda por su correspondiente en la primera; por ejemplo: $\frac{4}{2} = 2$; y por este factor debemos multiplicar a 5 para obtener x ; es decir

$$x = 5 \cdot 2 = 10.$$

Vemos pues que para determinar un elemento desconocido, x , necesitamos conocer tres: uno de la primera fila, su correspondiente en la segunda, y el correspondiente a x .

En la práctica disponemos la operación en la siguiente forma:

$$\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 5 & x \end{array} \text{ y puesto que son proporcionales:}$$

$$(5) \quad \frac{4}{2} = \frac{x}{5} \text{ y multiplicando ambos miembros por 5 :}$$

$$\frac{4}{2} \cdot 5 = x.$$

Como vemos, el cálculo es igual al que efectuábamos para determinar la medida de un elemento de una proporción (§ 21). Por esta causa se suele escribir la (5) en la forma

$$(6) \quad 4 : 2 :: x : 5 \quad , \quad \text{luego } x = \frac{4 \cdot 5}{2};$$

y se denomina también a la (6) una proporción. Pero ahora figuran números y no magnitudes; el signo: significa dividido, y el signo :: significa igual.

La aplicación de este método a la resolución de problemas constituye la regla de tres (simple directa).

EJEMPLOS.

1. Si 18 rollos de cierto alambre cuestan 1800 \$, cuánto cuestan 65 rollos del mismo alambre?

Ya sabemos que el número de rollos y el costo son proporcionales, pues si duplicamos p. ej. el número de rollos se duplica el costo. Dispongamos los datos en la forma:

$$\begin{array}{cc} 18 & 1800 \\ 65 & x \end{array} \quad 18 : 65 = 1800 : x \quad , \quad \text{luego :}$$

$$x = \frac{65 \cdot 1800}{18} = 6500.$$

2. Una barra de metal de 250 cm³ pesa 2000 gramos. Cuál será el volumen de una barra del mismo metal, que pesa 3225 gramos?

Se tiene:

$$\begin{array}{cc} 250 & 2000 \\ x & 3225 \end{array} \quad 250 : x = 2000 : 3225$$

$$x = \frac{250 \cdot 3225}{2000}$$

OBSERVACIÓN.

Muchas veces nuestros conocimientos en una determinada ciencia nos enseñan que ciertas magnitudes o números son proporcionales a otras magnitudes o números. Así, en el caso del movimiento de un tren la física nos enseña que los espacios son proporcionales a los tiempos. La geometría nos enseña que las longitudes de las circunferencias son proporcionales a los radios.

En otros casos, en cambio, admitimos que los números sean proporcionales, sin que esto sea rigurosamente exacto. Así por ejemplo, aceptamos que el trabajo diario de un obrero sea proporcional al número de horas de labor; y esto no es exacto. Pues, si duplicamos p. ej. lo que hace en las cuatro primeras horas no hallaremos lo que hace en ocho horas. El cansancio p. ej. puede influir para que su producción sea menor en las últimas horas.

Por consiguiente, la aplicación de la regla de tres nos servirá en estos casos para obtener un criterio más que un número exacto. Así, por ejemplo, si 10 obreros construyen una casa en 200 días, sé que 1000 obreros, si pudieran trabajar juntos, emplearían mucho menos, pero no 2 días, exactamente, como resultaría aplicando la regla de tres.

§ 23. Números inversamente proporcionales

1. Sea un número cualquiera, n . Denominamos *recíproco* de dicho número a $\frac{1}{n}$. Así, por ejemplo: $\frac{1}{2}$ es el recíproco de 2: el recíproco de 5 es $\frac{1}{5}$; el recíproco de $\frac{3}{2}$ es $\frac{2}{3}$ o sea $\frac{2}{3}$.

En todos los casos se vé que el producto de un número por su recíproco da 1. Así:

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad 5 \cdot \frac{1}{5} = 1, \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1.$$

Damos pues la siguiente

DEFINICIÓN: dos números se denominan *recíprocos* (o *inversos*) cuando su producto es igual a la unidad.

2. Consideremos las dos series de números siguientes:

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} 16, & 8, & 4, & 1, & 2 \\ 1, & 2, & 4, & 16, & 8 \end{array}$$

Podemos observar que el producto de un número de la primera fila por su correspondiente de la segunda es constante. En efecto:

$$16.1 = 8.2 = 4.4 = 1.16 = 2.8 = 16$$

Análogamente sucedería con las dos series:

$$(2) \quad \begin{array}{c} 40, 20, 12, 6 \\ \frac{1}{80}, \frac{1}{40}, \frac{1}{24}, \frac{1}{12} \end{array} \text{ . Se tiene:}$$

$$40 \cdot \frac{1}{80} = 20 \cdot \frac{1}{40} = 12 \cdot \frac{1}{24} = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

En ambos casos decimos que los números de la primera y segunda fila son inversamente proporcionales.

El nombre de inversamente proporcionales proviene de que si en vez de los números de una de las series escribimos sus inversos o recíprocos, las series de números que resultan son proporcionales.

Así, escribamos la primera fila de las (1) y los recíprocos de los números de la segunda fila; obtenemos:

$$\begin{array}{ccccc} 16 & 8 & 4 & 1 & 2 \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{array}$$

Estas dos series de números son ahora directamente proporcionales, como puede comprobarse; pues:

$$\frac{16}{1/1} = \frac{8}{1/2} = \frac{4}{1/4} = \frac{1}{1/16} = \frac{2}{1/8} = 16$$

EJEMPLO.

Sea un gas (aire por ejemplo) contenido en un recipiente; tenga un volumen v a una presión p (*); otro volumen v' a la presión p' . La Física enseña que los números v, v' son inversamente proporcionales a p, p' ; es decir:

$$\begin{array}{ccc} v & v' & \\ p & p' & v \cdot p = v' \cdot p' \end{array}$$

(*) Supongamos un gas (aire en un cilindro) con una tapa móvil con ajuste bien hecho (como un pistón). Si colocamos pesas encima descenderá, disminuyendo el volumen. Denominamos presión al peso que actúa sobre cada unidad de superficie (cada centímetro cuadrado, por ejemplo).

§ 24. Reducción a la unidad

1. Los problemas que se resuelven con la regla de tres pueden resolverse también mediante un razonamiento que se denomina método de reducción a la unidad. Para ver en qué consiste lo aplicaremos a los problemas resueltos en el párrafo anterior.

2. Si 18 piezas de paño cuestan 1800 pesos *una* pieza costará 18 veces menos; es decir $\frac{1800}{18}$ pesos; y si esto cuesta una pieza, 65 costarán 65 veces más, es decir $\frac{1800}{18} \cdot 65$, es decir **6500**, como habíamos encontrado.

3. Si una barra metálica que pesa 2000 gr. tiene un volumen de 250 cm³, una barra que pese 1 gramo tendrá un volumen 2000 veces menor, es decir $\frac{250}{2000}$; y si este es el volumen de una barra que pesa 1 gramo, el de una barra que pesa 3225 gramos será 3225 veces mayor, es decir $\frac{250}{2000} \cdot 3225$ es decir **403,125**, como habíamos encontrado.

OBSERVACIÓN.

Puede suceder que al aplicar este razonamiento pasemos por alguna operación o número que no tenga sentido, pero que lo tenga el resultado final. Admitimos en la Aritmética, a pesar de este inconveniente, que es posible la aplicación del método. Por ejemplo:

Con 6000 \$ se paga el sueldo mensual de 30 obreros. Con 15000 \$ cuántos obreros se pagarán?

Si con 6000 \$ se pagan 30 obreros, con 1 \$ se paga $\frac{30}{6000}$ avos de obrero! y con 15000 se pagan 15000 veces más; es decir

$$\frac{30}{6000} \cdot 15000 = 75.$$

El resultado final es 75 obreros; es decir el resultado tiene sentido, a pesar de haber pasado en el razonamiento por $\frac{30}{6000}$ avos de obrero que es un número que no tiene significado; pues la unidad en el caso de los hombres no puede subdividirse.

§ 25. Interés simple

1. Si una persona, un banco o casa de préstamos, presta a otra persona cierta cantidad de dinero, por cierto tiempo, exige que al cabo de este tiempo le entregue no solamente el capital prestado sino también cierta ganancia o premio, que se denomina interés. Claro está que este premio que cobra el prestador es tanto mayor cuánto mayor es el capital prestado y cuánto más larga la duración del préstamo. En realidad, en el comercio se acepta que el interés es proporcional al capital y a la duración del préstamo. Generalmente se fija el premio o interés de cada 100 pesos durante un año; se lo denomina tasa o tanto por ciento. Así, cuando decimos que un banco presta al 5 por ciento anual esto significa que por cada 100 pesos prestados durante 1 año hay que devolver 105 pesos; 100 que fueron los recibidos y 5 que constituyen el interés.

Representaremos el tanto por ciento anual por t . Si este es el interés de 100 pesos en un año, el interés de 1 peso en el mismo tiempo será 100 veces menor; lo denominamos tasa unitaria y lo representamos por i . Será pues $i = t/100$.

Según hemos dicho será i el interés de 1 peso en un año; el interés de 1 peso en un día será treientos sesenta veces menor, es decir $i/360$; y en n días el interés será n veces mayor, es decir $ni/360$. Este es el interés de un peso; el de C pesos será C veces mayor, es decir $Cni/360$. Si lo designamos por I tendremos pues:

$$(1) \quad I = \frac{C i n}{360}$$

Recordemos que en esta fórmula las letras significan lo siguiente:

I ... interés producido

C ... capital prestado

i ... tasa unitaria

n ... número de días (duración del préstamo).

La fórmula (1) contiene pues estos cuatro datos; conociendo tres de ellos podremos siempre calcular el cuarto, como veremos enseguida.

Problema I. (calcular I). Cuál será el interés de 12000 \$ durante 90 días al 5 por ciento (se indica 5 %) anual?

Hay que aplicar directamente la (1), siendo $i = t/100 = 5/100 = 0,05$. Se tiene

$$I = \frac{12000 \cdot 0,05 \cdot 90}{360},$$

y después de efectuar operaciones

$$I = 150 \text{ pesos.}$$

Problema II (Calcular C). Cuál será el capital que al 4 % anual produce en 160 días un interés de 200 \$?

Reemplazando valores en (1), siendo $i = 4/100 = 0,04$, se tiene:

$$200 = \frac{C \cdot 0,04 \cdot 160}{360}, \quad \text{o sea} \quad 200 = \frac{C \cdot 6,40}{360}$$

Si multiplicamos ambos miembros de la igualdad por 360 y dividimos por 6,40, lo cual es permitido, se tiene:

$$\frac{200 \cdot 360}{6,40} = C;$$

y efectuando las operaciones e invirtiendo los miembros, se obtiene:

$$C = 11250 \text{ pesos}$$

OBSERVACION.

Podríamos haber deducido también una fórmula general para calcular siempre el valor de C. En efecto: si dividimos ambos miembros de la (1) por $n i$ y los multiplicamos por 360, la igualdad no alterará; resulta así:

$$(2) \quad \frac{I \cdot 360}{n i} = C,$$

fórmula que nos permitirá calcular C.

Problema III (Calcular n). Al cabo de cuántos días un capital de 50000 \$ al 4,5 % anual producirá un interés de 270 \$

Substituyendo en (1) tenemos:

$$270 = \frac{50000 \cdot 0,045 \cdot n}{360}, \quad \text{de la cual deducimos:}$$

$$\frac{270 \cdot 360}{50000 \cdot 0,045} = n,$$

y después de efectuar operaciones e invertir, resulta:

$$n = 72 \text{ días}$$

Problema IV (calcular t). Cuál sería la tasa anual de interés de un capital de 20000 \$ que produce en 240 días un interés de 640 \$?

Substituyendo en (1) tenemos:

$$640 = \frac{20000 \cdot i \cdot 240}{360}, \text{ de la cual deducimos:}$$

$$\frac{640 \cdot 360}{20.000 \cdot 240} = i, \text{ y después de hacer operaciones e invertir}$$

$i = 0,048$ y por consiguiente, siendo t , 100 veces mayor,

$$t = 4,8 \text{ } \%.$$

§ 26. Partición proporcional

1. Propongámonos la resolución del siguiente problema: repartir 60 bolitas entre los niños A, B y C, de modo que reciba más bolitas el que tenga más edad; y que si uno de ellos tuviera doble o triple, etc., edad que otro, reciba un número doble, triple, etc. de bolitas. Esta manera de hacer la partición (repartición) de las 60 bolitas se enuncia: repartir 60 bolitas entre los niños A, B y C proporcionalmente a sus edades.

Sean:

edad de A 2 años

» » B 3 »

» » C 5 »

Designemos por: a el número de bolitas que corresponde a A

b » » » » » » B

c » » » » » » C

La suma de a , b y c deberá dar el número total de bolitas; es decir

$$a + b + c = 60$$

Además, hemos dicho que a , b y c han de ser proporcionales a las edades. Esto significa, según vimos en § 22, que,

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$$

Vemos que el cociente de dividir a por 2, es el mismo que de dividir b por 3, y es el mismo también que el de dividir c por 5. Como no conocemos este cociente lo designaremos por x ; es decir

$$\frac{a}{2} = x; \text{ de donde } a = 2 \cdot x$$

$$(1) \quad \frac{b}{3} = x ; \quad \text{de donde} \quad b = 3 \cdot x \quad (2)$$

$$\frac{c}{5} = x ; \quad \text{»} \quad \text{»} \quad c = 5 \cdot x$$

y sumando las tres igualdades de la derecha, ordenadamente:

$$a + b + c = 10 x;$$

y reemplazando la suma del primer miembro por 60:

$$60 = 10 x , \quad \text{luego} \quad x = 60/10 = 6$$

Reemplazando el valor de x en las igualdades (2), tenemos:

$$a = 2 \cdot 6 = 12$$

$$b = 3 \cdot 6 = 18$$

$$c = 5 \cdot 6 = 30$$

Luego, al niño A corresponde 12 bolitas, al niño B 18 bolitas, al niño C 30 bolitas.

Comprobación. La suma da: $12 + 18 + 30 = 60$; además

$$\frac{12}{2} = \frac{18}{3} = \frac{30}{5},$$

es decir, efectivamente los números de bolitas 12, 18, 30, son proporcionales a las edades 2, 3, 5.

Problema. Tres personas, A, B y C asocian sus capitales para realizar una empresa comercial: el primero concurre con 20000 \$; el segundo con 25000 \$ y el tercero con 35000 \$. Ganan 2400 \$; cuánto corresponde a cada uno?

Se conviene en el comercio que la ganancia se reparta proporcionalmente al capital de cada socio.

Procediendo exactamente en la misma forma que en el problema anterior, tendremos igualdades análogas a las (2):

$$(5) \quad a = 20000 \cdot x$$

$$b = 25000 \cdot x$$

$$c = 35000 \cdot x$$

Sumando ordenadamente:

$$a + b + c = 80000 x;$$

y recordando que la suma del primer miembro es la cantidad a repartir, es

Arit. y Alg., 7.

decir 2400, se tiene :

$$2400 = 80000x ; \text{ luego } x = \frac{2400}{80000} = \frac{3}{100}$$

Reemplazando en las (3) :

$$a = 20000 \cdot \frac{3}{100} = 600 \text{ \$ corresponden a A}$$

$$b = 25000 \cdot \frac{3}{100} = 750 \text{ » » » B}$$

$$c = 35000 \cdot \frac{3}{100} = 1050 \text{ » » » C.}$$

El procedimiento con el cual hemos resuelto este problema se denomina en el comercio Regla de Sociedad o de Compañía.

OBSERVACIÓN.

Estos problemas, como cualquier otro en que se aplique la proporcionalidad, se pueden resolver también por el método de reducción a la unidad. En efecto, volvamos al problema anterior; podemos razonar en la siguiente forma :

Las tres edades suman 10 años. A diez años corresponden 60 bolitas; a 1 año corresponderán 10 veces menos, es decir: $\frac{60}{10} = 6$. Si por cada año de edad corresponden 6 bolitas,

$$\text{al niño que tiene 2 años corresponderán } 2 \cdot 6 = 12$$

$$\text{» » » » 3 » » } 3 \cdot 6 = 18$$

$$\text{» » » » 5 » » } 5 \cdot 6 = 30,$$

que son los mismos resultados que habíamos encontrado.

CAPITULO VIII

SISTEMAS DECIMAL DE PESAS Y MEDIDAS

§ 27. Generalidades

1. Ya hemos visto en el § 21 que las longitudes, superficies, volúmenes, tiempos, etc., y en general todas las magnitudes, se miden; y que en realidad el número que expresa la medida indica las veces que la que se toma como unidad o una de sus partes alicuotas está contenida como sumando en la magnitud dada.

Vimos, además, que la unidad de medida debe ser una magnitud de la misma clase que la que se quiere medir. Así, para medir una longitud habrá que compararla con otra longitud, que se tomará como unidad de medida; para medir un ángulo habrá que tomar otro ángulo como unidad; para medir un peso habrá que tomar otro peso como unidad.

2. Para que la medida pueda ser utilizada por diferentes personas es necesario que la unidad que se emplea esté bien definida, y que se pueda llevar de un lugar a otro sin que varíe. Así, por ejemplo, si yo digo: una cuadra tiene una longitud de 165 pasos, no doy una medida precisa, sino apenas aproximada; pues los pasos de una misma persona no son todos iguales, y además varían de una persona a otra. La elección de la unidad, aunque según vimos es arbitraria, hay que hacerla de modo que sea adecuada. Por ejemplo, si quiero medir la distancia de Buenos Aires a La Plata no debo usar como unidad el metro porque me resulta 60000 metros, es decir un número incómodo. En cambio, usando el kilómetro como unidad la mencionada distancia sería 60 kilómetros. Análogamente, si quiero medir el espesor de una ho-

ja de papel no usaría el metro como unidad, pues me resultaría una fracción decimal muy pequeña; usaría en cambio el milímetro como unidad.

§ 28. Sistemas métricos

1. Las magnitudes que más frecuentemente hay que medir en la práctica son: longitudes, superficies, volúmenes, pesos y tiempos.

El conjunto de las unidades de medida de las longitudes, superficies, volúmenes y peso (también monedas) de una Nación, constituye su *Sistema métrico*.

Para cada una de dichas magnitudes habrá una unidad de medida que se denomina principal y otras que en general son múltiplos y submúltiplos de esta, y que se denominan secundarias o derivadas.

2. Unidad de superficie. Supongamos que queremos medir una superficie cualquiera. Tenemos que empezar por establecer una unidad de medida de superficies. Adoptamos para dicha unidad la superficie de un cuadrado que tiene la unidad de longitud por lado (fig. 15). Sea pues 1 la longitud del lado del cuadrado ABCD.

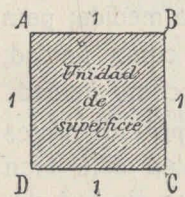


Fig. 15

Dada ahora otra superficie cualquiera, que queremos medir, colocaremos nuestro cuadrado, o una de sus partes alícuotas, sucesivamente dentro de la superficie dada, hasta cubrirla toda. Si esto se consigue después de colocar seis veces, por ejemplo, el cuadrado unidad, la superficie en cuestión tiene por medida 6. Si se consigue, en cambio, después de sumar 30 veces $\frac{1}{8}$ del cuadrado unitario, la superficie en cuestión será $30 \cdot \frac{1}{8} = \frac{30}{8}$.

Así, por ejemplo, el rectángulo F G H I, fig. 16, contiene seis veces el rectángulo A B C D; luego, como se tomó aquél como unidad, será 6 la medida de F G H I. Pero al mismo resultado habríamos llegado multiplicando la longitud del lado H I del rec-

tángulo, que es 3, por la del lado FI, que es 2. Es decir, designado por S la superficie del rectángulo, se tiene:

$$S = 3 \cdot 2 = 6$$

Este procedimiento puede aplicarse en todos los casos, cuando se trate de un rectángulo, pues la geometría enseña que la

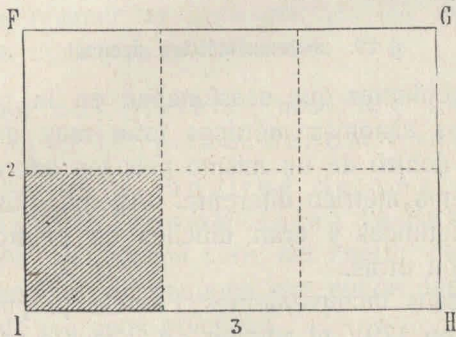


Fig. 16

superficie de un rectángulo se obtiene multiplicando su base por la altura.

3. Unidad de volúmen. Análogamente al caso de las superficies, para medir volúmenes tenemos que empezar por fijar la unidad de volumen. Adoptamos como dicha unidad el volumen de un cubo que tenga la unidad de longitud por arista (fig. 17).

Si se nos diera ahora otro volumen, para medir, averiguaríamos cuantas veces nuestro cubo, o una de sus partes alícuotas, está contenido en el volumen dado; y este número expresaría la medida.

Así, por ejemplo, si nuestro cubo estuviera contenido cuatro veces, sería 4 la medida del volumen dado. Si estuviera contenido veintidos veces la quinta parte de nuestro cubo, sería $\frac{22}{5}$ la medida del volumen dado.

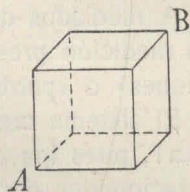


Fig. 17

También en el caso de los volúmenes la geometría enseña fórmulas que permiten calcularlos en forma más sencilla. Por ejemplo, si se tratara de un paralelepípedo, que tiene largo,

ancho y espesor, basta medir estas tres aristas y hacer su producto para obtener el volumen del cuerpo. Es decir: el volumen de un paralelepípedo se obtiene multiplicando entre sí sus tres dimensiones.

Así, p. ej. si sus dimensiones son 2, 5, 6, su volumen que designaremos por V , será $V = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$.

§ 29. Sistema métrico decimal

1. Los inconvenientes que ocasionaban en la práctica la diversidad de los sistemas métricos eran muy grandes. Cada nación, y aún dentro de un mismo país los diferentes estados, tenían un sistema métrico diferente. Además, las unidades no estaban bien definidas y eran difíciles de controlar, es decir de comparar con otras.

Para evitar esos inconvenientes Francia propuso a las demás naciones, en 1791, el adoptar oficialmente un sistema métrico universal. Su unidad fundamental, es decir la unidad de longitud, debía determinarse convenientemente y en relación con la naturaleza, es decir con las dimensiones del globo terrestre.

En realidad fué Francia sólo que emprendió esta obra, encargando a los matemáticos Delambre y Méchain que midieran con la mayor exactitud posible la longitud del meridiano terrestre. Se adoptó como unidad de las medidas de longitud la cuarentamillonésima parte de la longitud del meridiano terrestre; y se la denominó metro.

A mediados del año 1799 la comisión encargada de efectuar la medición presentó sus resultados y se constituyeron los «campeones» o «patrones» de todas las medidas.

El sistema creado se denominó sistema métrico decimal, pues los múltiplos y submúltiplos, como veremos, están relacionados por potencias de 10.

El 20 de mayo de 1877, por una convención internacional, adoptaron el sistema métrico diecisiete naciones, entre europeas y americanas.

OBSERVACIÓN.

Mediciones posteriores mostraron que habían algunos errores en las determinaciones de Delambre y Méchain. Según ellas la longitud del meri-

diano terrestre no sería de 40 000 000 de metros sino de 40 003 530. Por consiguiente, la definición del metro como cuarenta millonésima parte del meridiano terrestre sería inexacta. Por este motivo no buscamos ya una equivalencia con las dimensiones de la Tierra al definir el metro; y llamamos metro, sencillamente, a la longitud de una barra de platino que se conserva en los «Archivos» en París, construida por Borda en 1779.

2. Podemos resumir las convenciones del sistema métrico decimal en los siguientes enunciados:

1. La base del sistema métrico es la unidad fundamental de longitud, denominada *metro*.

2. El metro es la longitud de una barra existente en los archivos oficiales de París, y que difiere de la diez millonésima parte del cuarto meridiano terrestre en una cantidad tan pequeña que puede despreciarse en la mayor parte de los usos prácticos.

3. Las demás unidades de medidas de superficie, volumen y peso, se establecen en relación con el metro.

4. Las unidades derivadas o secundarias dentro de la medida de cada una de estas magnitudes están relacionadas con la fundamental según potencias de 10.

3. Los múltiplos y submúltiplos de la unidad principal se obtienen anteponiendo los prefijos:

Múltiplos	{	Kilo	que significa mil		
		Hecto	»	»	cien
		Deca	»	»	diez
Submúltiplos	{	mili	que significa milésimo		
		centi	»	»	centésimo
		deci	»	»	décimo

Los tres primeros son palabras griegas y los tres últimos latinas.

§ 30. Medida de longitud

1. La unidad de las medidas de longitud, como hemos dicho, es el metro. Las unidades derivadas son las que se consignan en el siguiente cuadro:

Unidad fundamental: el metro	Múltiplos	{ Kilómetro = 1000 metros	
		{ Hectómetro = 100 »	
		{ Decámetro = 10 »	
	Submúltiplos	{ Decímetro = 0,1 metro	
		{ Centímetro = 0,01 »	
		{ Milímetro = 0,001 »	

2. Para economizar espacio, en la práctica, se abrevian las expresiones anteriores escribiendo, en vez de todas las palabras, los siguientes símbolos:

	m. (metro)	
Km (kilómetro)		dm (decímetro)
Hm (hectómetro)		cm (centímetro)
Dm (decametro)		mm (milímetro)

Para ver mejor el orden que ocupan podemos escribir las unidades horizontalmente, en la forma:

(1) Km , Hm , Dm , m , dm , cm , mm

3. A menudo se presenta en la práctica el caso de reducir una longitud expresada con cierta unidad a la misma longitud expresada en otra unidad. Por ejemplo:

Expresa en metro 326,5 Hm. Recordando que 1 Hm = 1.100 m, bastará multiplicar por 100 el número de hectómetros dado para expresarlos en metros; es decir: 326,5 Hm = 326,5.100 m, es decir 326,5 Hm = 32650 m.

Expresar en Hectómetro 32650 m. Recordando que 1 Hm = 100 m, bastará dividir por 100 el número de metros dado para expresarlo en Hectómetros; es decir: 32650 m = (32650/100) Hm, es decir 32650 m = 326,5 Hm.

Cuando en las medidas a reducir no figure el metro se podrá hacer la operación reduciendo primero a metros y después a la unidad que se pide, o también directamente. Por ejemplo:

Expresar en decímetro 226 Km.

a) 226 Km = 226.1000 m = 226000 m.

22600 m = 226000.10 dm = 2260000 dm;

luego: 226 Km = 2260000 dm.

Este resultado puede también expresarse: 226.10⁴ dm.

b) Para hacer la reducción directamente recordemos los lugares que ocupan en (1) las unidades. Desde Km hay que correr cuatro lugares a la derecha para llegar a dm; y por cada lugar que se corre a la derecha hay que multiplicar por 10; luego, habrá que multiplicar por 10^4 ; es decir: $226 \text{ Km} = 226 \cdot 10^4 \text{ dm} = 2260000 \text{ dm}$.

La operación puede hacerse también mentalmente: colocamos el número 226×1 y vamos escribiendo ceros a la derecha a medida que nombramos (a partir de Km), Hm, Dm, m, dm.

En análoga forma podemos hacer la reducción inversa. Por ejemplo:

Expresar en kilómetro 2260000 dm.

a) $2260000 \text{ dm} = 226000 \text{ m}$.

$$226000 \text{ m} = (2260000 \div 1000) \text{ Km} = 226 \text{ Km}.$$

b) Haremos también la reducción directamente, recordando que hay que correr cuatro lugares a la izquierda en (1) para pasar de dm. a Km.; y como por cada lugar que se corre a la izquierda hay que dividir por 10, habrá que dividir por 10^4 ; es decir:

$$2260000 \text{ dm} = 2260000 \div 10^4 \cdot \text{Km} = 226 \text{ Km}.$$

La operación puede también hacerse mentalmente, como en el caso anterior; la única diferencia consiste en que hay que dividir en vez de multiplicar.

§ 31. Medidas de superficie

1. De acuerdo con lo que dijimos en el § 27, la unidad de las medidas de superficie en el sistema métrico decimal será el metro cuadrado; es decir la superficie del cuadrado que tiene un metro por lado. Las unidades derivadas serán, por consiguiente, cuadrados cuyos lados son los múltiplos y submúltiplos decimales del metro. Es decir:

el Kilómetro cuadrado, o sea el cuadrado que tiene	1 Km por lado
el Hectómetro cuadrado, o sea el cuadrado que tiene	1 Hm por lado
el Decámetro cuadrado, o sea el cuadrado que tiene	1 Dm por lado
el metro cuadrado	
el decímetro cuadrado, o sea el cuadrado que tiene	1 dm por lado

el centímetro cuadrado, o sea el cuadrado que tiene

1 cm por lado

el milímetro cuadrado, o sea el cuadrado que tiene

1 mm por lado

Según la figura 18 y lo que dijimos en § 28,2 se deduce:

1 metro cuadrado tiene 100 decímetros cuadrados

1 decímetro cuadrado tiene 100 centímetros cuadrados

1 centímetro cuadrado tiene 100 milímetros cuadrados

Análogamente en los múltiplos:

1 kilómetro cuadrado tiene 100 hectómetros cuadrados

1 hectómetro cuadrado tiene 100 decámetros cuadrados

1 decámetro cuadrado tiene 100 metros cuadrados.

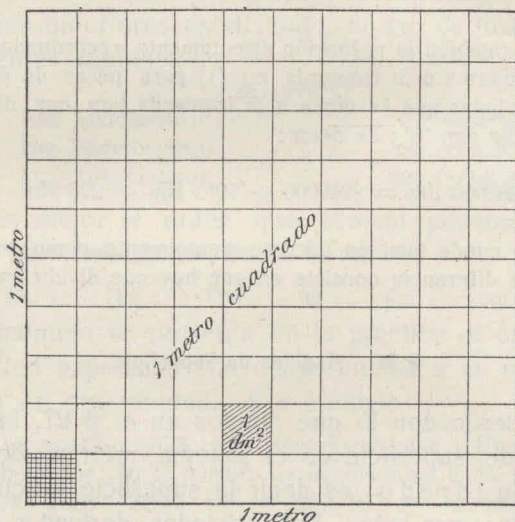


Fig. 18

Se vé pues que las unidades de superficie crecen y decrecen de 100 en 100; o lo que es lo mismo según potencias de 10^2 (que es igual a 100). Si indicamos las medidas de superficie con el mismo símbolo que las lineales, y un 2 como exponente; tendremos, por ejemplo: m^2 significa metro cuadrado, y análogamente las demás; es decir:

(1) mm^2 , cm^2 , dm^2 , m^2 , Dm^2 , Hm^2 , Km^2 .

Prepararemos ahora la tabla de equivalencias con el metro

cuadrado. Empecemos con los múltiplos: $1 \text{ Dm}^2 = 100 \text{ m}^2$.

$1 \text{ Hm}^2 = 100 \text{ Dm}^2$; pero siendo $1 \text{ Dm}^2 = 100 \text{ m}^2$, resulta:
 $1 \text{ Hm}^2 = 100 \cdot 100 \text{ m}^2 = 10000 \text{ m}^2$.

Siendo $1 \text{ Hm}^2 = 10000 \text{ m}^2$ y recordando que 1 Km^2 es 100 veces mayor que 1 Hm^2 , bastará multiplicar el segundo miembro de la igualdad anterior por 100 para obtener los metros cuadrados que hay en un kilómetro cuadrado; es decir:

$$1 \text{ Km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2.$$

Análogamente procederíamos con los submúltiplos; pero ahora en vez de multiplicar se divide, de modo que tendríamos:

$$1 \text{ dm}^2 = 1 \text{ m}^2 \div 100 = 0,01 \text{ m}^2;$$

y análogamente para las otras unidades.

Podemos reunir los resultados en el siguiente cuadro:

Múltiplos.....	{	Kilómetro cuadrado	$(\text{Km}^2) = 1\,000\,000 \text{ m}^2$
		Hectómetro cuadrado	$(\text{Hm}^2) = 10\,000 \text{ m}^2$
		Decámetro cuadrado	$(\text{Dm}^2) = 100 \text{ m}^2$

Unidad fundamental: metro cuadrado.

Submúltiplos...	{	Decímetro cuadrado	$(\text{dm}^2) = 0,01 \text{ m}^2$
		Centímetro cuadrado	$(\text{cm}^2) = 0,0001 \text{ m}^2$
		Milímetro cuadrado	$(\text{mm}^2) = 0,000001 \text{ m}^2$

EJEMPLOS DE REDUCCIÓN.

Expresar en m^2 $254,6 \text{ Hm}^2$. Recordando que $1 \text{ Hm}^2 = (100)^2 \text{ m}^2$ o sea 10000 m^2 , bastará multiplicar por este número los Hm^2 que se dan para convertirlos en m^2 ; es decir: $254,6 \text{ Hm}^2 = 254,6 \cdot (100)^2 \text{ m}^2$; es decir:

$$254,6 \text{ Hm}^2 = 254,6 \cdot 10000 \text{ m}^2 = 2546000 \text{ m}^2.$$

Expresar en Hm^2 2546000 m^2 . Recordando que $1 \text{ Hm}^2 = 10000 \text{ m}^2$, bastará dividir por 10000 (o multiplicar por 0,0001) el número de m^2 dados para expresarlos en Hm^2 , es decir:

$$2546000 \text{ Hm}^2 = (2546000 \div 10000) \text{ Hm}^2, \text{ es decir: } 2546000 \text{ m}^2 = 254,6 \text{ Hm}^2.$$

Cuando en las medidas a reducir no figure el metro cuadrado, se podrá hacer la operación reduciendo primero a metros cuadrados y después a la unidad que se pide, o directamente.

EJEMPLOS.

Expresar en Dm^3 427 Dm^3 .

a) $427 \text{ Hm}^3 = 427.10000 \text{ m}^3 = 4270000 \text{ m}^3$.

$$4270000 \text{ m}^3 = 4270000.100 \text{ dm}^3 = 427000000 \text{ dm}^3;$$

$$\text{luego: } 427 \text{ Hm}^3 = 427\ 000\ 000 \text{ dm}^3.$$

b) Para hacer la reducción directamente recordemos los lugares que ocupan en (1). Desde dm^3 hay que correr tres lugares a la derecha para llegar a Hm^3 . y por cada lugar que se corre a la derecha hay que multiplicar por 10^3 ; luego habrá que multiplicar por $(10^3)^3$, es decir por 10^9 . Es decir:

$$427 \text{ Hm}^3 = 427.10^9 \text{ dm}^3 = 427000000 \text{ dm}^3.$$

La operación puede hacerse mentalmente: colocando el número 427×1 y escribiendo un par de ceros a la derecha por cada unidad que nombremos (a partir de Hm^3): Dm^3 , m^3 , dm^3 .

En análoga forma podemos hacer la reducción inversa. Por ejemplo: Expresar en Hm^3 427000000 dm^3 .

a) $427000000 \text{ dm}^3 = (427000000 \div 100) \text{ m}^3 = 4270000 \text{ m}^3$
 $427000000 \text{ dm}^3 = (427000000 \div 1000000) \text{ Hm}^3 = 427 \text{ Hm}^3$

b) Para hacer la reducción directamente fijémonos en la (1). Hm^3 está tres lugares a la derecha de dm^3 ; y puesto que cada término que está un lugar a la derecha de otro es 100 ó sea 10^2 veces mayor, resultará que Hm^3 es $(10^2)^3$ veces mayor que dm^3 . Para reducir dm^3 a Hm^3 habrá pues que dividir por $(10^2)^3$, o sea por 10^6 . Luego.
 $427000000 \text{ dm}^3 = (427000000 \div 10^6) \text{ Hm}^3 = 427 \text{ Hm}^3$.

§ 32. Medidas de volumen

1. La unidad de las medidas de volumen es el metro cúbico; es decir, el volumen del cubo que tiene 1 metro por arista. Las unidades derivadas serán, por consiguiente, cubos cuyos lados son los múltiplos y submúltiplos decimales del metro cúbico. Es decir:

el Kilómetro cúbico,	o sea el cubo que tiene 1 Km. por lado				
el Hectómetro cúbico	» » » »	1 Hm.	» »		
el Decámetro cúbico	» » » »	1 Dm.	» »		
metro cúbico					
el Decímetro cúbico	» » » »	1 dm.	» »		
el Centímetro cúbico	» » » »	1 cm.	» »		
el Milímetro cúbico	» » » »	1 mm.	» »		

Supongamos ahora que el cubo de la fig. 19 tiene 1 metro por lado. Dividamos la superficie de la base en cuadrados de 1 dm. por lado. Como vemos, y hemos deducido ya en el § 31, habrá 100 de dichos cuadros, y cada uno de ellos será un dm^2 . Sobre uno de dichos cuadritos podemos

construir un pilar (prisma); y dividiendo el pilar en 10 partes iguales tenemos cubos como el marcado en negro en la figura.

Cada cubo de los chicos tendrá 1 dm por lado, es decir su volumen será 1 dm³. ¿Cuántos cubitos pueden hacerse con el cubo grande, es decir, cuántos dm³ hay en 1 m³?

El pilar de la figura tiene 10; además podemos colocar 10 pilares iguales, uno a la derecha de otro; obtendríamos ya 10.10, o sea 100 cubitos. Además, podemos colocar de adelante a atrás 10 franjas como las anteriores; y como cada franja tiene 100 cubitos, obtenemos en total 1000 cubitos. O sea:

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3, \text{ o también } 1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3.$$

El mismo razonamiento valdría si el lado del cubo grande fuera 1 dm y el del cubito 1 cm. Por consiguiente:

Las medidas de volumen en el sistema métrico varían de 1000 en 1000. Esto significa que cada unidad que está un lugar a la derecha de otra en la tabla siguiente:

(1) mm³, cm³, dm³, m³.

Dm³, Hm³, Km³

es 10³ veces mayor que ésta.

Análogamente al caso de las medidas de superficie podemos también preparar una tabla de equivalencias para las medidas de volumen.

Procediendo de la misma manera que en el caso de las medidas de superficie, y teniendo en cuenta la tabla del § 31, obtendremos los valores del siguiente cuadro:

Múltiplos.....	{	Kilómetro cúbico (Km ³) = 1000000000 m ³
		Hectómetro cúbico (Hm ³) = 1000000 m ³
		Decámetro cúbico (Dm ³) = 1000 m ³

Unidad fundamental: metro cúbico (m³).

Submúltiplos...	{	decímetro cúbico (dm ³) = 0,001 m ³
		centímetro cúbico (cm ³) = 0,000001 m ³
		milímetro cúbico (mm ³) = 0,000000001 m ³

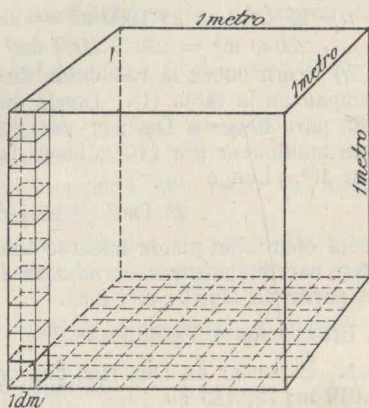


Fig. 19

EJEMPLOS DE REDUCCION.

Expresar en m^3 $34,62 \text{ Hm}^3$. Recordando que $1 \text{ Hm}^3 = (100)^3 \text{ m}^3$, o sea 1000000 m^3 , bastará multiplicar por este número los Hm^3 que se dan para convertirlos en m^3 ; es decir: $34,62 \text{ Hm}^3 = 34,62 (100)^3 \text{ m}^3$, o sea: $34,62 \text{ Hm}^3 = 34,62 \cdot 1000000 \text{ m}^3 = 34620000 \text{ m}^3$.

Expresar en Hm^3 34620000 m^3 . Recordando que $1 \text{ Hm}^3 = (100)^3 \text{ m}^3$ bastará dividir por $(100)^3$ el número de m^3 dados para expresarlos en Hm^3 ; es decir: $34620000 \text{ m}^3 = (34620000) \div (100)^3 \text{ Hm}^3 = 34,62 \text{ Hm}^3$.

Cuando en las medidas a reducir no figure el metro cúbico, se podrá hacer la operación reduciendo primero a metros cúbicos y después a la medida que se pide, o directamente.

EJEMPLOS.

Expresar en dm^3 23 Dm^3 .

$$a) \quad 23 \text{ Dm}^3 = 23 \cdot 1000 \text{ m}^3 = 23000 \text{ m}^3$$

$$23000 \text{ m}^3 = 23000 \cdot 1000 \text{ dm}^3 = 23000000 \text{ dm}^3.$$

b) Para hacer la reducción directamente recordemos los lugares que ocupan en la tabla (1). Desde dm^3 hay que correr dos lugares a la derecha para llegar a Dm^3 ; y por cada lugar que se corre a la derecha hay que multiplicar por (10^3) ; luego habrá que multiplicar por $(10^3)^2$, es decir por 10^6 . Luego

$$23 \text{ Dm}^3 = 23 \cdot 10^6 \text{ dm}^3 = 23000000 \text{ dm}^3$$

La operación puede hacerse también mentalmente, colocando el número 23 y escribiendo tres ceros a la derecha por cada unidad que se nombra (a partir de Dm^3): m^3 , dm^3 .

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Expresar en Dm , Hm , dm , cm , mm , los números $2,385 \text{ m}$; $802,003 \text{ m}$; $0,019 \text{ m}$; $78,0185 \text{ m}$.

$$\begin{aligned} \text{Resultados :} \quad & 2,385 \text{ m} = (2,385 \div 10) \text{ Dm} = 0,2385 \text{ Dm}. \\ & 2,385 \text{ m} = (2,385 \div 100) \text{ Hm} = 0,02385 \text{ Hm}. \\ & 2,385 \text{ m} = 2,385 \cdot 10 \text{ dm} = 23,85 \text{ dm}. \\ & 2,385 \text{ m} = 2,385 \cdot 100 \text{ cm} = 238,5 \text{ cm}. \\ & 2,385 \text{ m} = 2,385 \cdot 1000 \text{ mm} = 2385 \text{ mm}. \end{aligned}$$

En forma análoga encontramos para los otros números.

$$\begin{aligned} 802,003 \text{ m} &= 80,2003 \text{ Dm} & 0,019 \text{ m} &= 0,0019 \text{ Dm}. \\ &= 8,02003 \text{ Hm} & &= 0,00019 \text{ Hm}. \\ &= 8020,03 \text{ dm} & &= 0,19 \text{ dm}. \\ &= 80200,3 \text{ cm} & &= 1,9 \text{ cm}. \\ &= 80200,3 \text{ mm} & &= 19 \text{ mm}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 78,0185 \text{ m} &= 7,80185 \text{ Dm}. \\ &= 0,780185 \text{ Hm}. \\ &= 780,185 \text{ dm}. \\ &= 7801,85 \text{ cm}. \\ &= 78018,5 \text{ mm}. \end{aligned}$$

2. Expresar en Dm^3 , dm^3 , cm^3 , los números: 2968 m^3 ; $68,573 \text{ m}^3$; $2,408 \text{ m}^3$.

$$\begin{aligned}\text{Resultados: } 2968 \text{ m}^3 &= 2968 \div (10)^3 \cdot \text{Dm}^3 = 2,968 \text{ Dm}^3 \\ &= 2968 \div (100)^3 \cdot \text{Hm}^3 = 0,02968 \text{ Hm}^3 \\ &= 2968 \cdot (10)^3 \cdot \text{dm}^3 = 2968000 \text{ dm}^3 \\ &= 2968 \cdot (100)^3 \cdot \text{cm}^3 = 296800000 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

En forma análoga se procede para los otros números.

3. Expresar en m^3 los números: 6 Km^3 ; $0,381 \text{ Dm}^3$; $983,21 \text{ dm}^3$; 6527 cm^3 .

$$\begin{aligned}\text{Resultados: } 6 \text{ Km}^3 &= 6 \cdot (1000)^3 \text{ m}^3 = 6000000000 \text{ m}^3 \\ 0,381 \text{ Dm}^3 &= 0,381 \cdot (10)^3 \text{ m}^3 = 381 \text{ m}^3 \\ 983,21 \text{ dm}^3 &= 983,21 \div (10)^3 \text{ m}^3 = 0,98321 \text{ m}^3 \\ 6527 \text{ cm}^3 &= 6527 \div (100)^3 = 0,006527 \text{ m}^3.\end{aligned}$$

4. Cuál es en m^2 la superficie de una pieza de forma rectangular que tiene 625 cm. de longitud y 0,415 de ancho?

5. Cuántas baldosas se emplearán para embaldosar un patio que tiene 2326 mm. de largo y 0,0732 Hm de ancho con baldosas de $1/4$ metro de lado?

6. Cuánto costará embaldosar el patio del problema 5, si cuesta 12 centavos el dm^2 ?

7. Cuál será el volumen en m^3 de una habitación que tiene 40 dm. de largo por 3,75 m. de ancho y 0,4 Dm. de altura?

8. Cuál es en dm el espesor de un paralelepípedo que tiene de largo 0,5 m, 20 cm de ancho, y 7500 cm^3 de volumen.

9. Cuánto pesa un cilindro de hierro cuyo radio del círculo de la base mide 12,5 cm y cuya altura es 2,5 dm., sabiendo que 1 dm^3 de hierro pesa 8 kilogramos?

10. Un cubo mide 0,003 Dm por arista; cuál es su volumen en mm^3 ?

§ 33. Medidas de capacidad

1. La medida del volumen de los líquidos como el de sustancias en polvo o granos finos, como la pólvora, se reduce evidentemente a la medida del volumen de la vasija que los contiene. Por ser muy frecuente el uso de estas medidas en la práctica se les ha dado nombres especiales, llamándolas a todas ellas medidas de capacidad.

La unidad fundamental de las medidas de capacidad es el decímetro cúbico y se denomina litro.

En la tabla siguiente damos sus múltiplos y submúltiplos como también sus relaciones con el m^3 .

Múltiplos....	{	Hectólitro (Hl) = 0,1	m ³
		Decálitro (Dl) = 0,01	m ³
unidad fundamental:		litro (l) = 0,001	m ³
Submúltiplos..	{	Decilitro (dl) = 0,0001	m ³
		Centilitro (cl) = 0,00001	m ³

EJEMPLOS.

$$29,742 \text{ Hl} = 2974,21 = 2974,2 \text{ dm}^3 = 2,9742 \text{ m}^3$$

$$0,94 \text{ l} = 94 \text{ cl} = 0,00094 \text{ m}^3 = 0,94 \text{ dm}^3$$

$$8,36457 \text{ m}^3 = 83,6457 \text{ Hl} = 8364,57 \text{ l}$$

§ 34. Medidas de peso

1. Sabemos que no todos los cuerpos, en igualdad de volumen, pesan lo mismo. Un block de platino, por ejemplo, pesa casi tres veces más que un block de hierro de igual volumen. Por consiguiente, para fijar la unidad de peso se eligió el que correspondía a un volumen dado de una determinada sustancia: al peso de 1 dm^3 de agua destilada y a 4 grados centígrados de temperatura se denominó *1 kilogramo*, y se eligió como unidad fundamental de las medidas de peso la milésima parte del kilogramo, es decir el *gramo*.

Observación. La definición que hemos dado anteriormente no es muy precisa y es muy difícil de realizar prácticamente dicha unidad de peso.

Si cambia la temperatura del agua varía su volumen. La física enseña que a 4 grados centígrados el agua tiene su menor volumen (se dice vulgarmente que es más pesada; debe decirse más densa).

Por la razón mencionada, y por otras, se ha adoptado modernamente otra definición para la unidad de peso en el sistema métrico decimal: se denomina kilogramo al peso, en el vacío y en cierto lugar de la Tierra (*), de un cuerpo de platino-iridio (kilo-tipo) que está depositado en «los archivos» de París. Esta última condición se necesita porque un cuerpo no pesa exactamente lo mismo en todos los lugares de la Tierra.

2. En el siguiente cuadro damos los múltiplos y submúltiplos más empleados y sus respectivas equivalencias con el kilogramo.

(*) Próximamente a 45° de latitud.

Múltiplos	{	Tonelada métrica (T_m)	= 1000 Kgr
		Quintal métrico (Q_m)	= 100 Kgr
		Kilógramo	(Kgr) = 1000 gr
		Hectógramo	(Hgr) = 100 gr
		Decágramo	(Dgr) = 10 gr

Unidad fundamental: **gramo (g)**

Submúltiplos	{	decígramo	(dgr) = 0,1 gr
		centígramo	(cgr) = 0,01 gr
		milígramo	(mgr) = 0,001 gr

EJEMPLOS.

$$274,068 \text{ gr} = 27,4068 \text{ Dgr} = 0,274068 \text{ Kgr} = 2740,68 \text{ dgr} = 274068 \text{ mgr}.$$

3. Peso específico o densidad. Como dijimos ya, volúmenes iguales de distintas sustancias tienen pesos diferentes. Así:

1 litro, o sea 1 dm ³ de alcohol absoluto pesa aprox.	0,789 Kgr
1 litro de mercurio	13,6 Kgr
1 litro de agua destilada a 4°.	1 Kgr
1 dm ³ de acero	7,81 Kgr
1 dm ³ de oro	19,26 Kgr

Se ha convenido en denominar **peso específico** de un cuerpo al peso de la unidad de volumen. Si se nos da el peso P de un volumen V del cuerpo, bastará dividir dicho peso por su volumen para determinar el peso de cada unidad de volumen, es decir su peso específico.^(*) En otras palabras, si designamos al peso específico por p , tendremos

$$(1) \quad p = \frac{P}{V}$$

De esta fórmula se deduce:

$$(2) \quad P = V \cdot p$$

es decir: multiplicando el volumen de un cuerpo por su peso específico obtenemos el peso del cuerpo.

(*) En la práctica suele denominarse al peso específico **densidad**, un poco impropia; pues esta palabra tiene otro significado en la física.

Damos a continuación una pequeña tabla de pesos específicos de algunas sustancias usuales.

Pesos específicos

SÓLIDOS		LÍQUIDOS	
Oro fundido	19,26	Alcohol	0,79
Platino fundido	21,15	Cloroformo	1,45
Plata fundida	10,47	Eter	0,72
Cobre	8,87	Aceite de oliva	0,84
Hierro forjado	7,75	Mercurio	13,60
Acero fundido	7,80	Leche	1,03
Hierro fundido	7,21	Acido sulfúrico	1,84
Mármol	2,84	Glicerina	1,26
Azufre	2,03	Anilina	1,023
Vidrio	2,48	Bencina	0,884
Aluminio	2,60	Acido acético	1,05
Hielo	0,917	Agua de mar	1,027

EJEMPLOS.

1. Untrozo de plata cuyo volumen es de 560 cm^3 pesa $5,88 \text{ Kgr}$; cuáles es su peso específico?

Según la fórmula (1) será $p = \frac{5,88 \text{ kgr}}{560 \text{ cm}^3} = 0,0105 \frac{\text{Kgr}}{\text{cm}^3}$, que se expresa: $0,0105$ de Kgr por cada centímetro cúbico. Pero en la práctica se expresa el peso específico en Kgr por dm^3 , o lo que es lo mismo en gr por cm^3 . Así, en nuestro problema habrá que reducir los Kgr a gr; tendremos:

$$p = \frac{5880 \text{ gr}}{560 \text{ cm}^3} = 10,5 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$$

Se acostumbra también suprimir las unidades y expresar sencillamente el peso específico por el número. El resultado de nuestro problema será pues

$$p = 10,5$$

2. Cuánto pesa un block de zinc de 3 dm^3 cuyo peso específico es $p = 6,9$? Habrá que reducir el volumen a cm^3 ; es $V = 3000 \text{ cm}^3$; y según la fórmula (2) será $P = 3000 \cdot 6,9 = 20700$, y este peso estará expresado en gramos. La respuesta es pues:

$$P = 20700 \text{ gr} = 20,7 \text{ Kgr}.$$

3. Cuál será el volumen de un cuerpo cuyo peso específico es 6 y su peso 30 Kgr ?

Reduciremos los 30 Kgr a gramos; obtendremos $P = 30000$ g.; y de (1) deducimos

$$V = \frac{P}{p} = \frac{30000}{6} = 5000, \text{ resultado en cm}^3; \text{ luego la respuesta es}$$

$$V = 5000 \text{ cm}^3 = 5 \text{ dm}^3$$

4. Cuántos Kgr de agua de mar cabrán en un tanque de 10 m^3 de capacidad sabiendo que el agua de mar tiene una densidad de 1,027?

5. En la bodega del transporte «Ingeniero Huergo» se cargan 4800 m^3 de petróleo de Comodoro Rivadavia, de densidad 0,89. Cuál es el peso de la carga?

6. Un litro de alcohol absoluto pesa 789 gr; cuántos kilogramos pesa un tambor de 30 litros?

7. Un litro de mercurio pesa 13,6 Kgr; cuánto pesan $0,04 \text{ m}^3$.

8. 1 dm^3 de plomo pesa 11,3 Kgr; cuánto pesa un lingote que tiene forma prismática, de 1,23 m de largo, 0,7 dm de ancho y 5 cm de espesor?

9. Cuál es el volumen de 2,75 Kgr. de aceite de oliva, cuya densidad es 0,84?

10. Cuánto pesa un cubo de cobre de 25 cm de arista, siendo el peso específico del cobre 8,87.

§ 35. Antiguo sistema inglés de medidas

1. Muchos países tuvieron diferentes sistemas de medidas en sus mismos estados. Algunos conservan aún dichos sistemas, y aunque oficialmente se haya adoptado el sistema decimal, se usan aún medidas antiguas. Por el interés especial que tienen para el marino nos ocuparemos del sistema inglés de medidas.

$$\text{Medidas de longitud} \left\{ \begin{array}{l} \text{Yarda} = 3 \text{ pies} \\ \text{pie} = 12 \text{ pulgadas} \\ \text{pulgada} \end{array} \right.$$

Para hacer las reducciones de medidas al sistema métrico mencionamos, por ser las más cómodas para los cálculos, las siguientes equivalencias:

$$\begin{array}{lll} 1 \text{ m} = 1,0936 \text{ yd} & 1 \text{ m} = 3,2809 \text{ ps} & 1 \text{ plg} = 2,54 \text{ cm} \\ 1 \text{ yd} = 0,91438 \text{ m} & 1 \text{ ps} = 0,30479 \text{ m} & 1 \text{ cm} = 0,3937 \text{ plg.} \end{array}$$

Conociendo las equivalencias en las medidas de longitud podemos también reducir superficies y volúmenes, de acuerdo con lo que vimos en § 31 y 32. En efecto:

1 m = 1,0936 yd. ; y elevando ambos miembros al cuadrado resulta:

$$1 \text{ m}^2 = (1,0936)^2 \text{ yd}^2, \text{ es decia: } 1 \text{ m}^2 = (1,197) \text{ yd}^2$$

2. En la marina suele usarse la **milla marina** que equivale a **1852,2 m.**

Además, para medir la velocidad se usa el **nudo**. Se dice que la velocidad de un barco es de 1 nudo cuando recorre una milla en una hora. Por tanto, si la velocidad es de 12 nudos (los Avisos) el barco recorre 12 millas cada hora.

EJEMPLO.

Cuántos kilómetros ha navegado un barco que da 15 nudos, al cabo de una singladura de 8 horas?

$$15 \text{ nudos} = 15 \times 1852,2 \text{ m. en una hora; luego en 8 horas ha caminado} \\ 8 \times 15 \times 1852,2 \text{ m} = 222\,264 \text{ m} = \mathbf{222,264 \text{ Km.}}$$

3. **Medidas de peso.** Son de uso frecuente las siguientes medidas de peso:

$$1 \text{ tonelada: siendo } 1000 \text{ Kgr.} = 0,984 \text{ Ton.}$$

$$1 \text{ libra : } \gg 1 \text{ Kgr.} = 2,205 \text{ lb.}$$

4. Para hacer con mayor facilidad las reducciones se calculan tablas de equivalencias. Damos a continuación las del «Anuario Naval Inglés». (Los puntos están usados en lugar de las comas de los decimales.

I. LONGITUD

Métrico a inglés

Inglés a métrico

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Mts.	Yardas	Pies	Pulgadas	Yard	Metros	Pies	Metros	Pulg.	Centim.
1	1.0936	3.2809	39.37	1	0.91438	1	0.30479	1	2.5400
2	2.1873	6.5618	78.74	2	1.82877	2	0.60959	2	5.0799
3	3.2809	9.8427	118.11	3	2.74315	3	0.91438	3	7.6199
4	4.3745	13.1236	157.48	4	3.65753	4	1.21918	4	10.1598
5	5.4682	16.4045	196.85	5	4.57192	5	1.52397	5	12.6998
6	6.5618	19.6854	236.22	6	5.48630	6	1.82877	6	15.2397
7	7.6555	22.9663	275.60	7	6.40068	7	2.13356	7	17.7797
8	8.7491	26.2472	314.97	8	7.31507	8	2.43836	8	20.3196
9	9.8427	29.5281	354.34	9	8.22945	9	2.74315	9	22.8596

II. PESO

Métrico-inglés			Inglés-métrico	
I	II	III	IV	V
Kilóg.	Toneladas	Libras	Libras	Kilóg.
1	.000984	2.2046	1	0.4536
2	.001968	4.4092	2	0.9072
3	.002953	6.6139	3	1.3608
4	.003937	8.8185	4	1.8144
5	.004921	11.0231	5	2.2680
6	.005905	13.2277	6	2.7216
7	.006889	15.4323	7	3.1751
8	.007874	17.6370	8	3.6287
9	.008858	19.8416	9	4.0823

EJEMPLOS.

1. Expresar en pies 2367 metros. Las tablas I y III (Long.) nos dan:

metros		pies
2000	=	6561.8
300	=	984.3
60	=	196.9
7	=	23.0
2367 m		= 7766.0 ps

2. Expresar 385 libras en kilogramos. Las tablas IV y V (Peso) nos dan:

libras		kilogramos
300	=	136.08
80	=	36.29
5	=	2.27
385 lb		= 174.64 Kgr.

3. Expresar 725 pulgadas en centímetros. Las tablas IX y X nos dan:

700	=	1777.97
20	=	50.80
5	=	12.70
725 plg.		= 1841.47 cm.

4. Expresar en toneladas 78265 Kgr. Las tablas I y II (Peso) nos dan:

kilógramos		toneladas
70000	=	68.89
8000	=	7.87
200	=	0.19
60	=	0.06
5	=	0.005
78265 Kgr.	=	77.015 Ton.

OBSERVACIONES.

a) Como las tablas dan las equivalencias para 1, 2, 3, ... etc. de cada unidad, para obtenerlas para 10, 100, ..., 20, 200, ..., 30, 300, ... basta multiplicar el valor dado en la tabla por 10, 100, 1000, etc.; lo cual se hace fácilmente corriendo la coma. Así, en el 2.º ejemplo, para encontrar la equivalencia de 300 libras en kilógramos buscamos la de 3, que es 1,3608 y lo multiplicamos por 100, es decir corremos la coma dos lugares a la derecha, obteniendo 136,08.

b) Para obtener la equivalencia en toneladas, p. ej. de 78265 Kgr. buscamos las de 70000, de 8000, de 200, de 60 y de 5; y después sumamos; pues 78265 es igual a $70000 + 8000 + 200 + 60 + 5$.

c). Cuando hay varios decimales y no queremos conservar tantas cifras procedemos de la siguiente manera; si la primera cifra despreciada es igual o mayor que 5 se aumenta 1 unidad a la anterior; si es menor que 5 no se modifica.

Así p. ej. si conservamos hasta los centésimos escribiremos:

en lugar de	3,485	3,49
» » »	24,536	24,54
» » »	18,524	18,52

Así hemos procedido en los cuatro ejemplos tratados. En el primer ejemplo se tiene: $300 \text{ m} = 984,27 \text{ pies}$; pero como aproximamos hasta la cifra de los decimos hemos puesto $300 \text{ m} = 984,3 \text{ ps}$; pues la primera cifra despreciada es 7, que es mayor que 5.

En cambio, en el cuarto se tiene: $800 \text{ Kgr.} = 7,874 \text{ Ton.}$; pero como aproximamos hasta el centésimo escribimos: $800 \text{ Kgr.} = 7,87 \text{ Ton.}$; pues la primera cifra despreciada es menor que 5.

EJERCICIOS.

1. Expresar 4,08 m en pulgadas.
2. Reducir 25 cm^2 a plg^2 .
3. Reducir a cm^2 $12,5 \text{ plg}^2$.
4. Expresar en cm^3 el volumen de un cubo de 8,3 plg. por arista.
5. Expresar en m^3 un volumen de 120 pies³.
6. Expresar en yds una longitud de 246,8 m.
7. Reducir a millas 749863 m.
8. Reducir a gramos 49,05 lb.
9. Expresar en toneladas 47894,6 Kgr.

10. Determinar la velocidad en nudos de un barco que camina 40000 m en 2 horas.
11. Determinar el número de metros que recorre en 1 segundo un barco cuya velocidad es de 21 nudos.
12. Determinar el espacio que recorre en 3 horas un viento de 60 Km. por hora.
13. Determinar el camino de un bote abandonado en un río cuya corriente «tira» 1,5 milla (por hora), al cabo de 1 día.
14. Cuántas toneladas métricas será la carga de un barco si es de 800 toneladas inglesas,
15. Cuántas libras son 2,25 toneladas inglesas ?

§ 36. Medidas de ángulos

1. Consideremos en el plano del papel una recta (fig. 19 bis). Si marcamos en ella un punto, como o , quedan formadas dos semi-rectas; una a la izquierda de o , otra a la derecha. En

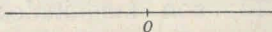


Fig. 19 bis

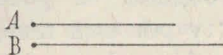


Fig. 20

la fig. 20 hemos dibujado dos semi-rectas: una de extremo A , otra de extremo B .

Dibujemos ahora dos semi-rectas cuyo extremo sea común (fig. 21). Hay que tener presente que las semi-rectas no tienen fin, es decir debemos imaginarlas prolongadas indefinidamente, por el lado que hemos marcado con puntos.

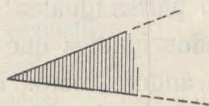


Fig. 21

La parte de plano que limitan (o encierran) estas dos semi-rectas se denomina ángulo.

2. En la fig. 22 hemos dibujado dos ángulos que tienen la siguiente particularidad: un lado de uno de ellos, y uno del otro, están formados por la misma recta; o como se dice vulgarmente: un lado de uno de los ángulos es la prolongación de un lado del otro ángulo; estos ángulos se denominan adyacentes.

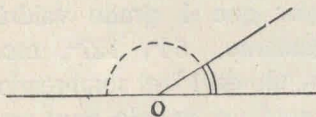


Fig. 22

3. Dos ángulos que pueden superponerse, como los de la figura 23 son iguales. Para verificarlo hacemos coincidir

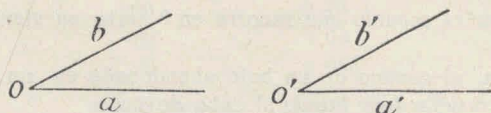


Fig. 23

o con o' , y la dirección de a con la de a' ; si después coincide b con b' los ángulos son pues iguales.



Fig. 24

Sean ahora los ángulos de la fig. 24; son adyacentes e iguales; los llamamos ángulos rectos; es decir:

Lámase ángulo recto al que es igual a su adyacente.

4. Los ángulos se pueden sumar, como nos enseña la geometría; y por esta razón (§ 13) son magnitudes que se pueden medir. La unidad para medir un ángulo tiene que ser otro ángulo, porque como ya vimos (§ 21) una magnitud se mide (compara) siempre con otra de la misma clase.

Sea el de la fig. 25 un ángulo recto, formado por las semirectas Oa y Ob . Dividamos a dicho ángulo en 90 partes iguales; es decir en 90 ángulos iguales que sumados nos dan el ángulo recto. Hemos sombreado uno de ellos; lo denominamos ángulo del grado sexagesimal, o simplemente un grado, y lo indicamos: 1.º Por consiguiente: llá-

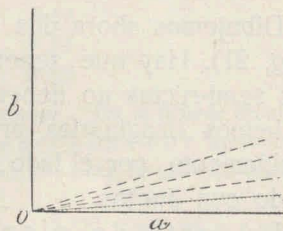


Fig. 25

mase **un grado** al ángulo igual a la noventa avas parte del ángulo recto.

Así resulta: un ángulo 3 veces mayor que 1 grado valdrá 3 grados; lo indicamos 3º. Análogamente, 54º, 127º, etc. Imaginemos dividido en 60 partes el ángulo de 1º (el sombreado en la figura); una de estas divisiones será un ángulo muy pequeño que se denomina **1 minuto** de arco.

Este ángulo muy pequeño de 1 minuto dividido en 60 par-

tes iguales dá un ángulo, más pequeño aún, que se denomina **1 segundo**. Lo indicamos 1".

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} 1 \text{ ang. recto} &\equiv 90^\circ && (\text{se lee } 90 \text{ grados}) \\ 1^\circ &\equiv 60' && (\gg 60 \text{ minutos}) \\ 1' &\equiv 60'' && (\gg 60 \text{ segundos}) \end{aligned}$$

La designación *minuto* y *segundo* se usa también para medida del tiempo; pero entonces se lo indica de otra manera: segundo con una *s*, y minuto con una *m*. Ejemplo:

3h 25^m 12^s significa: 3 horas + 25 minutos + 12 segundos de tiempo.

Cuando un ángulo no alcanza a un número entero de grados ni minutos, sino que hay grados, minutos y segundos, se lo escribe poniéndolos a continuación. Ejemplos:

125° 34' 28", se lee 125 grados, 34 minutos, 28 segundos;

y esto quiere decir en realidad 125° + 34' + 28"; pues a 125° hay que sumarle una fracción de grado, 34', y a este resultado una fracción de minuto, 28", para obtener el ángulo total.

§ 37. Números compuestos

1. Para expresar las magnitudes en sistemas de medidas que no son decimales hay que emplear números compuestos por distintas unidades de la misma clase. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 22\text{h } 35^{\text{m}} 15^{\text{s}} & \quad (22 \text{ horas, } 35 \text{ minutos, } 15 \text{ segundos}) \\ 32^\circ 12' 09'' & \quad (32 \text{ grados, } 12 \text{ minutos, } 9 \text{ segundos}) \\ 15 \text{ yd } 2 \text{ ps } 7 \text{ plg} & \quad (15 \text{ yardas, } 2 \text{ pies, } 7 \text{ pulgadas}). \end{aligned}$$

Estas expresiones se llaman **números compuestos**.

2. *Reducción a la unidad más pequeña.* a) Reducir 22h 35^m 15^s a segundos:

	22
22h = 60 ^m	
22h = 22.60 ^m = 1320 ^m	× 60
sumando los 35 ^m se tiene: 1320 ^m + 35 ^m = 1355 ^m	1320
1 ^m = 60 ^s	+ 35
1355 ^m = 1355.60 ^s = 81300 ^s	1355
sumando los 15 ^s se tiene: 81300 ^s + 15 ^s = 81315^s	× 60
	81300
Al margen hemos dispuesto la forma práctica de conducir estas operaciones.	+ 15
	81315

b) Reducir a pulgadas 2 yd 2 ps 5 plg.:

$$\begin{array}{r}
 1 \text{ yd} = 3 \text{ ps} \\
 2 \text{ yd} = 2.3 \text{ ps} = 6 \text{ ps} \\
 \text{sumando los 2 ps se tiene: } 6 \text{ ps} + 2 \text{ ps} = 8 \text{ ps} \\
 1 \text{ ps} = 12 \text{ plg.} \\
 8 \text{ ps} = 8.12 \text{ plg.} = 96 \text{ plg.} \\
 \text{sumando las 5 plg. se tiene: } 96 \text{ plg.} + 5 \text{ plg.} = 101 \text{ plg.}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 2 \\
 \times 3 \\
 \hline
 6 \\
 + 2 \\
 \hline
 8 \\
 \times 12 \\
 \hline
 96 \\
 \times 5 \\
 \hline
 101
 \end{array}$$

3. Reducción a la unidad mayor. a) Sea ahora reducir 22h 25^m 15^s a horas.

Como la primera del número está ya expresada en horas, reduciremos los 25^m 15^s. Para ello reducimos todo a segundo:

$$\begin{aligned}
 25^m &= 25.60^s = 1500^s \\
 1500^s + 15^s &= 1515^s
 \end{aligned}$$

Ahora bien: 1h = 60^m = 60.60^s = 3600^s; y por tanto: si 3600^s equivalen a 1h, 1515^s equivaldrán a $\frac{1515}{3600}$ de hora, es decir: 0h, 419..., y «redondeando» el centésimo = 0h, 42. Esta fracción de hora deberá sumarse a las 22; resulta así: 22h, 42.

b) Reducir 2 yd 2 ps 5 plg. a yardas.

Como la primera parte del número está ya expresada en yardas, reduciremos solamente los 2 ps 5 plg. Para ello reducimos a pulgadas:

$$\begin{aligned}
 2 \text{ ps} &= 2.12 \text{ plg.} = 24 \text{ plg.} \\
 24 \text{ plg.} + 5 \text{ plg.} &= 29 \text{ plg.}
 \end{aligned}$$

Ahora bien: 1 yd = 3 ps = 3.12 = 36 plg.; y por tanto: si 36 plg. equivalen a 1 yd, 29 plg. equivaldrán a la $\frac{29}{36}$ de yardas, es decir a 0yd, 805..., o sea 0yd, 81. Esta fracción de yarda deberá sumarse a las 2; resulta así: 2,81 yd.

4. Transformar en número compuesto una fracción ordinaria de la unidad mayor. a). Expresar en grados, minutos y segundos $\frac{28534}{65}$ de grado.

Haciendo la división se encuentra como cociente completo: $438 + \frac{64}{65}$. Debemos reducir a minutos y segundos la fracción propia de grado $\frac{64}{65}$. Sabiendo que $1^\circ = 60'$, $\frac{64}{65}$ de grado equivaldrá a

$$\frac{64}{65} \cdot 60' = \frac{3840'}{65} = 59' + \frac{5'}{65}$$

Hay pues 59' para sumar a los 438°; nos resta reducir a segundos $\frac{5}{65}$ de minuto. Sabiendo que $1' = 60''$, $\frac{5}{65}$ de minuto equivaldrán a $\frac{5}{65} \cdot 60$ segundos; es decir 4'',6. El resultado es pues 438° 59' 4'',6.

b) Expresar en horas, minutos y segundos 0_h,345. Como el número entero de horas es 0, reduciremos la fracción 0,345 a minutos y segundos: 0_h,345 = 0,345.60 = 20^m,7. Tenemos ya 20^m; reduciremos 0^m,7 a segundos: 0^m,7 = 0,7.60^s = 42^s; luego el resultado es 0_h,345 = 0_h 20^m 42^s.

c) Expresar en horas, minutos y segundos $\frac{368}{28}$ de hora.

Haciendo la división de 368 por 28 se obtiene el cociente completo:

$13 + \frac{4}{28}$; debemos ahora reducir a minutos y segundos la fracción propia $\frac{4}{28}$ de hora. Puesto que 1_h = 60^m, $\frac{4}{28}$ de hora serán $\frac{4}{28} \cdot 60^m$ o sea $\frac{240}{28}$ minutos. Haciendo la división obtenemos $8 + \frac{4}{7}$ de minutos. Reduciremos $\frac{4}{7}$ de minutos a segundos: $\frac{4}{7}$ de m. = $\frac{4}{7} \cdot 60^s = 34^s$. El resultado es pues 13^h 8^m 34^s.

d) Expresar en grados, minutos y segundos 0°,896. Tenemos ya 0°; reduciremos a minutos y segundos 0,896 de grado.

1° = 60'; 0,896 de grado = 0,896.60 minutos; o sea 53',76; reduciremos 0,76 de minutos a segundos:

1' = 60''; 0,76 de minuto = 0,76.60 segundos; o sea 45'',6. El resultado es pues:

$$0^\circ 53' 45'', 6$$

5. Adición de números compuestos. Es claro que los números compuestos que han de sumarse deben pertenecer a una misma magnitud, o como se dice a la misma clase. Por ejemplo: no se pueden sumar horas, minutos y segundos con yardas, pies y pulgadas.

EJEMPLO.

Sumar: 32° 06' 12'', 18° 14' 09'', 30° 51' 40''.

Deberemos sumar los grados entre-sí, los minutos entre sí, y los segundos entre-sí. Disponemos así la operación:

32° 06' 12''	Pero en 61'' hay 1' y 1''; dejamos 1'' y al minuto lo
18 14 09	sumamos a los 71, y obtenemos 72'; en los cuales hay
30 51 40	1° y 12'; dejamos los 12' y el grado lo sumamos a los
80° 71' 61''	80, obteniendo 81°. El resultado de la suma es pues:

$$81^\circ 12' 01''$$

(*) Escribimos siempre 01'' en vez de 1''; 06' en vez de 6', etc. para mayor comodidad en las sumas y restas.

Observación. La operación de reducir a la unidad superior puede hacerse mentalmente. Así, en vez de escribir 61" escribimos el resto que se obtiene reduciendo a la unidad superior, es decir 1", y llevamos 1' para sumar a la otra columna. En la columna de los minutos obtendremos entonces 72'; escribimos el resto, 12' y llevamos 1° para sumar a la columna de los grados, que nos da 81°.

Dispondremos en otro ejemplo la operación de modo que se vea esta manera de proceder.

sumar : 12h 13^m 40^s , 25h 58^m 35^s , 10h 03^m 19^s , 8h 56^m 45^s.

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 2 \\
 12h \ 13^m \ 40^s \\
 25 \ 58 \ 35 \\
 10 \ 03 \ 19 \\
 08 \ 56 \ 45 \\
 \hline
 57^{\circ} \ 12' \ 19''
 \end{array}$$

6. Substracción de números compuestos. Para efectuar la substracción de números compuestos se dispone el substraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las unidades de la misma clase. Pueden suceder dos casos: *a)* todas las cantidades del minuendo son mayores que las del substraendo. *b)* Alguna de las cantidades de las unidades menores son mayores en el substraendo que en el minuendo.

EJEMPLOS.

a) Restar de 23h 18^m 32^s , 19h 14^m 16^s. Disponemos la operación como dijimos y restamos las columnas por separado.

$$\begin{array}{r}
 23h \ 18^m \ 32^s \\
 19 \ 14 \ 16 \\
 \hline
 4h \ 04^m \ 16^s
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \text{Análogamente} \\
 95^{\circ} \ 45' \ 27'' \\
 62^{\circ} \ 18' \ 13'' \\
 \hline
 33^{\circ} \ 27' \ 14''
 \end{array}$$

b) Restar de 23h 15^m 12^s , 8h 18^m 15^s. El minuendo es en total mayor que el substraendo; pero los minutos y segundos del substraendo son mayores que los del minuendo. Para evitar este inconveniente procedemos así:

De las 23 horas tomamos 1 hora, o sea 60 minutos, que las sumamos a los 15 minutos; obtenemos 22h 75^m 12^s. Lo mismo hacemos con los minutos: de los 75^m tomamos 1^m o sea 60^s que los sumamos a los 12^s; resulta el número 22h 74^m 72^s del que podemos restar 8h 18^m 15^s como en el caso *a)*. Obtenemos

$$\begin{array}{r}
 22h \ 74^m \ 72^s \\
 8 \ 18 \ 15 \\
 \hline
 14h \ 56^m \ 57^s
 \end{array}$$

Para verificar si la operación está bien sumamos el substraendo con el resto y debemos obtener el minuendo.

$$\begin{array}{r}
 \text{verificación} \\
 1 \ 1 \\
 8h \ 18^m \ 15^s \\
 14 \ 56 \ 57 \\
 \hline
 22h \ 15^m \ 12^s
 \end{array}$$

PROBLEMA. Siendo un ángulo de un triángulo $48^{\circ} 25' 14''$, y otro de los ángulos $120^{\circ} 40' 18''$, hallar el tercer ángulo.

La geometría nos enseña que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180° ; bastará pues restar la suma de los ángulos dados de 180° para obtener el tercero. Efectuemos, en primer lugar, la suma:

$$\begin{array}{r} 120^{\circ} 40' 18'' \\ 48 \quad 25 \quad 14 \\ \hline 169^{\circ} 05' 32'' \end{array}$$

Ahora, para restar esta suma de 180° , escribimos en vez de 180° su equivalente: $179^{\circ} 59' 60''$ (pues los $60''$ nos dan $1'$ que sumando a los $59'$ nos dá $60'$, o sea 1° , que sumado a 179° nos dá 180°).

Resulta:

$$\begin{array}{r} 179^{\circ} 59' 60'' \\ 169 \quad 05 \quad 32 \\ \hline 10^{\circ} 54' 28'' \end{array}$$

7. Multiplicación de un número compuesto por un número. Primer caso: el multiplicando es compuesto y el multiplicador un número entero.

EJEMPLO.

Multiplicar por 4, 2 yd 3 ps 8 plg. Bastaría multiplicar cada sumando, es decir 2, 3 y 8, por 4; obtenemos: 8 yd 12 ps 32 plg; que se puede también escribir 12 yd 2 ps 8 plg.

Para efectuar la operación nos hemos fundado en que 2 yd 3 ps 8 plg. significa $2 \text{ yd} + 3 \text{ ps} + 8 \text{ pulg.}$; y que para multiplicar una suma por un número se multiplica cada sumando por el número y se suman los productos parciales.

Segundo caso: el multiplicando es compuesto y el multiplicador fraccionario. Se reduce el multiplicando a la unidad mayor; después se efectúa el producto por el multiplicador, y finalmente se reduce a número compuesto el resultado.

EJEMPLO.

Multiplicar $17^{\text{h}} 28^{\text{m}} 14^{\text{s}}$ por 0,68.

Se tiene: $17^{\text{h}} 28^{\text{m}} 14^{\text{s}} = 17^{\text{h}},47$; efectuando el producto obtenemos: $17^{\text{h}},47 \times 0,68 = 11^{\text{h}},8796$; que es equivalente a $11^{\text{h}} 52^{\text{m}} 49^{\text{s}}$, que expresa nuestro resultado.

Tercer caso: el multiplicador es un número compuesto; se lo reduce a una misma unidad.

EJEMPLO.

Un automóvil recorre en $1^{\text{h}} 80$ kilómetros; cuánto recorrerá en $8^{\text{h}} 20^{\text{m}} 30^{\text{s}}$?

Reduciendo a horas tenemos: $8^{\text{h}} 20^{\text{m}} 40^{\text{s}} = 8^{\text{h}},833$. Ahora basta multiplicar este número por 80, y obtenemos: **664,64** km. que es el resultado.

8. División. Primer caso: el dividendo y el divisor son números compuestos de la misma clase. Basta reducirlos a una misma unidad, y después hacer la división como se hace ordinariamente; se acostumbra por mayor comodidad reducirlos a la menor unidad.

EJEMPLO.

Dividir $8^h 30^m 20^s$ por $5^h 18^m 46^s$.

Tenemos $8^h 30^m 20^s \equiv 30620$ s

$5^h 18^m 46^s \equiv 19126$ s; y finalmente $30620 \div 19126 = 1,600$.

Segundo caso: el dividendo es compuesto, el divisor entero.

EJEMPLO.

Dividir $32^h 28^m 14^s$ por 5.

Podemos reducir primero a segundos, dividir por 5, y después reducir nuevamente a número compuesto. Obtenemos así:

$32^h 28^m 14^s \equiv 116894$ seg. ; $116894 \text{ seg} \div 5 = 23378,8$ seg.; y finalmente $23378,8 \equiv 6^h 29^m 38,8$, que es el resultado.

Podemos también proceder en la siguiente forma:

Dividimos las 32^h por 5; obtenemos 6^h y sobran dos, o sean 120^m , que sumados a los 28^m del dividendo nos da 148^m ; dividimos estos por 5 nos da 29^m y sobran 3^m o sea 180^s , que sumados a los 14^s del dividendo nos da 194^s ; dividiendo estos por 5 obtenemos $38,8$; sumando los cocientes sucesivos obtenemos: $6^h 29^m 38,8$ que es el mismo resultado obtenido anteriormente en la otra forma.

Al margen hemos indicado las operaciones.

Tercer caso: el dividendo y el divisor son compuestos pero de diferente clase:

EJEMPLO.

Un móvil recorrió 60 yd 2 ps 10 plg. en $40^m 50^s$; cuántos metros recorre por hora?

$60 \text{ yd } 2 \text{ ps } 10 \text{ plg.} \equiv 2314 \text{ plg.}$; $4^m 50^s \equiv 290^s$

Si en 290^s recorre 2314 pulg., en 1 seg recorre $\frac{2314}{290}$ pulgadas; y en 1

hora, o sea 3600^s , recorre $\frac{2314}{290} \times 3600$ pulgadas = 29450 pulgadas.

Nos falta únicamente reducir estas pulgadas a metros. Las reducimos primero a centímetros con la tabla I (IX, X) § 35; resulta: 74802 cm; y dividiendo por 100 para reducir a metros obtenemos finalmente:

748,02 metros por hora, que es el resultado.

CAPITULO IX

NUMEROS NEGATIVOS

§ 38. Generalidades

1. **Números ordinales.** Como dijimos al principio de estas lecciones de Aritmética, los números sirven no sólo para contar, sino también para ordenar. Por ejemplo: para saber qué lugar ocupa un cadete en su compañía se manda «numerarse». El primero dice uno, el que sigue (2º) dice dos, el tercero dice tres, etc.

Si cortamos la fila en el que al numerarse tiene el número 10, es decir en el décimo, la colección de cadetes (pelotón) contendrá 10 unidades. Lo mismo sucedería si cortáramos la fila en el cadete número 20, o en cualquier otro: la colección que resulta tiene tantos elementos como el número que le corresponde al último cuando se los ordena.

En una manera análoga, damos a los pisos de una casa los números 1, 2, 3, 4, y decimos 1.º piso, 2.º, 3.º, 4.º piso.

Cuando empleamos los números para ordenar decimos que usamos números ordinales: 1º, 2º, 3º, etc.

2. Sea ahora la de la fig. 26 una semi-recta de extremo A; y un segmento que tomamos como unidad de medida. Designamos, por tan-

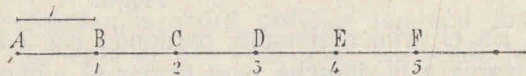


Fig. 26

to, su longitud por 1. Si vamos aplicando sucesivamente este segmento sobre la recta, a partir de A, los segmentos que tienen por extremo A y dichos puntos, tendrán por medidas 1, 2, 3, 4, etc.

En este caso los números marcarán también el orden de estos puntos sobre la recta. Para el punto A podemos utilizar el número 0.

3. Para obtener los números de orden de los distintos puntos podemos proceder de la siguiente manera:

Al punto B corresponde el número 1, o sea $0 + 1$.

Al punto C » » » 2, » » $0 + 2$.

Al punto D « » » 3, » » $0 + 3$.

Además: si queremos pasar del número de un punto, como C, al del que está un lugar después a la derecha, sumamos a su número 1; así:

a C corresponde 3; a D corresponde 4 y es:

$$3 + 1 = 4.$$

Si en cambio queremos pasar de un punto como D al que está un lugar antes a la izquierda, a su número hay que restarle 1. Así:

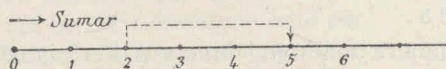
a D corresponde 4; a C corresponde 3, y

$$4 - 1 = 3$$

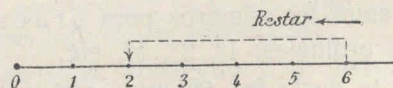
En general: partiendo de un número cualquiera podemos sumar o restar otro corriéndonos a la derecha o a la izquierda tantos lugares como indica el número a sumar o restar. Leyendo el número que corresponde al punto al cual llegamos obtenemos el resultado de la operación.

EJEMPLOS

$$2 + 3 = 5$$



$$6 - 4 = 2$$



Pig. 27

En el primer ejemplo, partiendo del 2 nos hemos corrido tres lugares a la derecha para sumar el número 3; obtenemos 5.

En el segundo ejemplo, partiendo del 6 nos corremos 4 lugares a la izquierda para restar el número 4; obtenemos 2.

4. Estudiaremos algunas operaciones que, hasta ahora, no podemos hacer:

a). No podemos determinar un número que sumado a 7 nos de 5; o lo que es lo mismo no podemos hacer la operación $5 - 7$; y en general: no podemos, hasta ahora, restar de un número otro mayor.

b) Si hemos numerado los puntos equidistantes de la recta, a partir de A hacia la derecha, con los números 1, 2, 3, 4, ..., no podremos numerar, siguiendo la misma ley de ordenación, con números positivos, los puntos de la izquierda.

Daremos todavía otros ejemplos que nos muestran la necesidad de definir otra clase de números.

Supongamos que hemos marcado con cero la temperatura del hielo, cuando se funde; con 100° la temperatura del vapor de agua hirviente; con 1° , 2° , 3° , etc., las que corresponden a los puntos de la columna de un termómetro después de dividir en 100 partes el espacio entre 0° y 100° . Si un cuerpo tiene una temperatura inferior a la del hielo descenderá aún más la columna del termómetro. No podemos marcar con números positivos los nuevos puntos, pues de acuerdo con la ley de ordenación adoptada, ellos se han utilizado ya para los puntos hacia arriba de cero. Para evitar este inconveniente decimos: 1° bajo cero, 2° bajo cero, etc.

5. Todas estas operaciones que acabamos de mencionar y que no podemos hacer con los números positivos se pueden hacer creando, o adoptando, otros números llamados negativos.

Para ello volvamos al ejemplo, ya considerado, de los puntos de la recta (fig. 28).

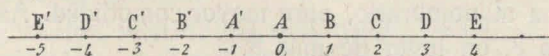


Fig. 28

Los puntos ordenados A, B, C, D, ... eran también los extremos de segmentos medidos por el número que corresponde a cada extremo. Propongámonos ahora ordenar también los puntos que están a la izquierda de A; y siempre siguiendo la misma ley, es decir que: se pasa del número de orden de un punto al número de orden del que está inmediatamente a su izquierda restando la unidad.

Por consiguiente, si el punto está a lugares a la derecha de otro pasaremos a su número de orden sumándole a al número que correspondía al primero; si está a lugares a la izquierda, restándole a al número de orden que correspondía al primero.

Aunque no tenga sentido, por ahora restar, de un número dado otro mayor, apliquemos estas definiciones, partiendo del punto A. Tendremos:

número de B: $0 + 1$	número de A': $0 - 1$
número de C: $0 + 2$	número de B': $0 - 2$
número de D: $0 + 3$	número de C': $0 - 3$

De la misma manera que cuando tenemos $0 + 1, 0 + 2, 0 + 3, \dots$ dejamos de escribir el cero, lo haremos cuando tengamos $0 - 1, 0 - 2, 0 - 3, \dots$. Nos resultan así los números $-1, -2, -3, \dots$ que denominamos números negativos. Son los mismos números naturales (que denominamos positivos), precedidos del signo $-$ (menos).

Los números positivos y negativos forman una familia o clase que denominamos relativos.

Sea un número relativo, como $+2$; denominamos opuesto al que tiene signo negativo, es decir (-2) ; análogamente, el opuesto de (-2) es $(+2)$.

También llamamos *valor absoluto* de un número negativo al número sin tener en cuenta el signo. Lo expresamos encerrando el número entre dos rayitas verticales. Por ejemplo:

$$|-3| = 3, \quad |+2| = 2.$$

Cuando un número relativo está precedido del signo $+$ lo suprimimos al nombrarlo, para mayor comodidad. Así, decimos: el número 8, en lugar de más 8.

6. Adición de números negativos. Tenemos ahora que explicar lo que entendemos por suma de números relativos. Para ello tenemos que dar algunas definiciones, que estén de acuerdo con las que dimos al definir lo que se entendía por sumar la unidad y restar la unidad, al crear los números relativos. Ellas son:

1. *Sumar* a un número relativo dado otro número positivo significa determinar el número del orden del elemento que está tantos lugares a la derecha del primero como indica el segundo.

EJEMPLOS.

Partiendo de un positivo:

$2 + (3) =$ número de orden del elemento que está 3 lugares a la derecha de 2 = 5 (fig. 29).

Partiendo de un negativo :

$(-2) + (3) =$ número de orden del elemento que está 3 lugares a la derecha de $(-2) = 1$ (fig. 29).

2. *Restar* de un número relativo dado un número positivo significa determinar el número de orden del

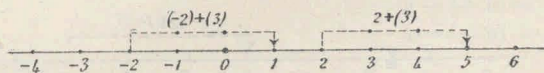


Fig. 29

elemento que está tantos lugares a la izquierda del primero como indica el segundo.

EJEMPLOS.

$2 - (3) =$ número de orden del elemento que está 3 lugares a la izquierda de $2 = -1$ (fig. 30).

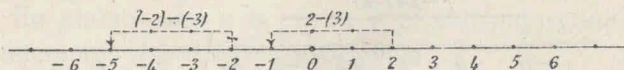


Fig. 30

3. Sumar un número negativo significa restar el opuesto; y recíprocamente, restar un número negativo significa sumar el opuesto.

Como se vé, por esta última definición, cuando el segundo número (sumando o substraendo) es negativo, cambiamos el sentido hacia el cual nos corríamos en el orden, en el caso de las definiciones 1 y 2. Cuando allí decíamos a la derecha, decimos aquí a la izquierda, y vice-versa.

EJEMPLOS.

$$2 + (-2) = 2 - (2)$$

$$2 - (-3) = 2 + (3)$$

$$(-2) + (-3) = (-2) - (3)$$

$$(-2) - (-3) = (-2) + (3)$$

7. **Práctica de la adición con números relativos.** Recordando las definiciones y ayudándonos con los elementos ordenados podemos efectuar las operaciones de adición y subtracción. El siguiente esquema nos facilitará la memoria:

restar $\leftarrow$ positivo $\rightarrow$ sumar
 sumar $\leftarrow$ negativo $\rightarrow$ restar

EJEMPLOS.

$$2 + (+3) = + (2 + 3) = + 5$$

$$+5 + (-3) = +(5 - 3) = +2$$

$$+3 + (-5) = -(5 - 3) = -2$$

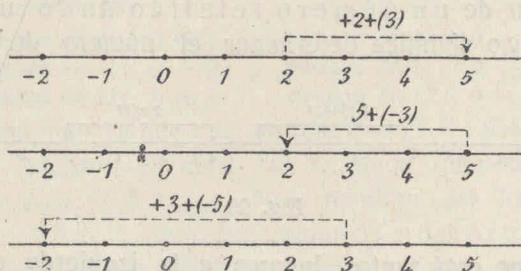


Fig. 31

$$\begin{cases} +5 - (+3) = +5 + (-3) = 2 & (\text{ej. } 2^{\circ}) \\ +3 - (+5) = +3 + (-5) = -2 & (\text{ej. } 3^{\circ}) \end{cases}$$

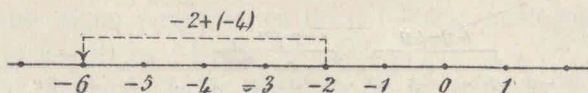


Fig. 32

$$+2 - (-4) = +(2 + 4) = 6$$

$$-2 + (+4) = +4 + (-2) = 2$$

$$-2 + (-4) = -(2 + 4) = -6$$

$$-2 - (+4) = -2 + (-4) = -6$$

$$-2 - (-4) = -2 + (+4) = 2$$

(fig. 32)

Los resultados de estas operaciones se pueden expresar con las siguientes reglas:

I. Para sumar dos números negativos se procede como si fueran positivos y al resultado se antepone el signo $-$.

II. Para restar dos números positivos se resta del mayor el menor y al resultado se antepone el signo que precedía al mayor.

III. Para sumar un número positivo y otro negativo se restan sus valores absolutos y se precede el resultado del signo del mayor.

IV. Sumar un número negativo es lo mismo que restar el opuesto, y vice-versa.

Generalización. Vamos a escribir ahora con letras, que re-

presentarán números cualesquiera, las operaciones anteriores. Tendremos:

$$\begin{array}{ll}
 +a + (+b) = +(a + b) & +a - (-b) = +(a + b) \\
 +a + (-b) = +(a - b) = -(b - a) & -a + (+b) = +b + (-a) \\
 (A) \quad +a - (+b) = +a + (-b) & -a + (-b) = -(a + b) \\
 & -a - (+b) = -a + (-b) \\
 & -a - (-b) = -a + (+b)
 \end{array}$$

OBSERVACION.

Con la introducción de los números negativos la substracción adquiere completa generalidad; es decir, podemos efectuar la operación en todos los casos. Así, tendremos:

$$6 - 4 = 2 \quad 5 - 8 = -3 \quad 9 - 11 = -2$$

Con los números relativos queda también resuelto en todos los casos el siguiente problema: dada la suma de dos números y uno de los sumandos, determinar el otro. En efecto: sea a la suma, b el sumando conocido y x el que queremos determinar; tendremos:

$$a = b + x \quad ; \quad \text{luego } a - b = x$$

EJEMPLOS.

1. La suma de dos números es 8, uno de los sumandos es 2; cuál es el otro?

$$8 = 2 + x \quad 8 - 2 = x \quad 6 = x$$

2. La suma de dos números es 5, uno de los sumandos es 7; cuál es el otro?

$$5 = 7 + x \quad 5 - 7 = x \quad -2 = x$$

8. Uso del paréntesis. De las fórmulas del cuadro (A) podemos sacar otras consecuencias:

Así, vemos, por la segunda, que al sumar $(-b)$ el resultado es el mismo que sacar el paréntesis y colocar b al lado de a con el signo que tenía, es decir $-$.

En cambio, según la cuarta es: $+a - (-b) = a + b$, es decir, al restar $(-b)$ el resultado es el mismo que sacar el paréntesis y cambiar el signo al número que encierra.

Esta regla vale también para el caso de sumas y restas sucesivas de varias cantidades positivas y negativas. Enunciaremos pues la siguiente

Regla: se pueden suprimir los paréntesis en las expresiones compuestas de sumas y restas, con-

servando los mismos signos en las cantidades que contienen cuando los paréntesis están precedidos de signo $+$, y cambiando los signos cuando están precedidos de signo $-$.

Sea ahora una expresión como la siguiente:

$$\{[(2+(-1))-3]+4\}-5$$

Ella significa lo siguiente: a 2 se suma (-1) ; al resultado se resta 3; al nuevo resultado se suma 4; y a lo que resulte se resta 5.

Efectuemos la operación paulatinamente; obtenemos:

$$\{[(1)-3]+4\}-5=\{[-2]+4\}-5=\{-2+4\}-5=2-5=-3$$

La operación se puede hacer también, conforme a lo que dijimos, teniendo en cuenta que no hay ningún paréntesis precedido por el signo $-$, de modo que al quitarlos no se cambia ningún signo. Resulta entonces:

$2-1-3+4-5$; y si vamos haciendo la operación sucesivamente, obtenemos, como antes, -3 .

EJEMPLOS.

$$1. \quad \{-3+[-1-(-2)]-3+1\}=-3-1+2-3+1=-4$$

$$2. \quad \{-2-[-1-(-1+3)]-2\}+3=\{-2-[-1+1-3-2]\}+3=$$

$$\{-2+1-1+3+2\}=6$$

OBSERVACIÓN.

Como puede verse en el segundo ejemplo hemos procedido quitando el paréntesis más interior, después el que sigue después el que sigue a éste, y así hasta terminarlos; y es esta la manera más segura para no equivocarse. Sea:

$$3. \quad +\{-[+(-3)]\}=+\{-[-3]\}=+\{+3\}=+3$$

$$4. \quad -\{-[+(-3)]\}=-\{-[-3]\}=-\{+3\}=-3$$

En este ejercicio hay un solo número, 3, afectado sucesivamente de varios signos: el resultado es el mismo número, afectado de signo positivo cuando lo precede un número par de signos negativos; y afectado de signo negativo cuando lo precede un número impar de signos negativos.

§ 39. Multiplicación de números relativos

1. Téngase para efectuar, la siguiente suma:

$$(-2) + (-2) + (-2)$$

Abreviamos esta suma, como en el caso de los números positivos, escribiendo:

$$(1) \quad (-2) \times 3$$

Pero según aprendimos en el § 38 podemos poner:

$$(-2) + (-2) + (-2) = -(2 + 2 + 2) = -(2 \times 3);$$

luego, escribiendo la igualdad entre este resultado y la forma abreviada (1), obtenemos:

$$(2) \quad (-2) \times 3 = -2 \times 3 = -6.$$

Esta expresión nos dice: el resultado de multiplicar el número negativo (-2) por el número positivo 3 es un número negativo cuyo valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos.

Análogamente obtendríamos: $(-3) \times 5 = -(3 \times 5) = -15$; y en general:

$$(3) \quad (-a) \times b = -ab$$

2. Sea ahora el producto $3 \times (-2)$. Para dar la definición de producto de 3 por (-2) no podemos fundarnos en la suma, como en el caso anterior; pues no tiene sentido «sumar» un número negativo de veces.

Pero si admitimos que valga para el producto de los números negativos la propiedad que hemos ya estudiado en la multiplicación de números positivos, y denominado conmutativa, es decir, si podemos cambiar el orden de los factores, tendremos: $3 \times (-2) = (-2) \times 3 = -(2 \times 3)$, como en el caso anterior. En general, tendremos:

$a \times (-b) = (-b) \times a = -(b \times a)$, o también $-(a \times b)$; es decir:

$$(4) \quad a \times (-b) = -(a \times b) = -ab$$

Las fórmulas (3) y (4) nos expresan la siguiente regla:

1. El producto de dos factores es negativo si uno de los factores es negativo y el otro positivo.

3. Veamos ahora qué entendemos por producto de dos factores negativos, como $(-3) \times (-2)$.

Para ello volvamos a la fórmula

$$a \times (-b) = - [a \times b]$$

Pongamos en los dos miembros $(-a)$ en lugar de a ; resulta:

$$(-a) \times (-b) = - [-a \times b];$$

pero el segundo miembro, como vimos en (3) es $+ab$; luego, nos resulta así:

$$(5) \quad (-a) \times (-b) = +ab$$

De acuerdo con este resultado la fórmula (5) nos expresa:

II. El producto de dos números negativos es positivo.

EJEMPLOS.

$$(-2) \times (-5) = 10 ; (-5) \times 4 = -20 ; 2 \times (-5) = -10$$

$$(-5) \times (-6) = 30 \quad (1) \quad (-1) \times (-1) = +1 \quad (-1) \times (-1) = 1$$

APLICACIONES.

1. Supongamos ahora un producto en que entren varios factores negativos, como ser:

$$(-2) \times 3 \times (-1) \times (-4) \times (5) \times (-3)$$

Esta expresión tiene en realidad el siguiente significado: se efectúa el producto de los dos primeros factores; el resultado se multiplica por el tercer factor; el nuevo resultado se multiplica por el cuatro factor; y así se sigue hasta agotarlos.

Es fácil comprender que cada dos factores negativos el producto se convertirá en positivo, es decir: el resultado final será positivo si el número de factores negativos es par; será en cambio negativo si el número de factores negativos es impar.

De acuerdo con esto, para efectuar un producto compuesto de factores negativos y positivos, se cuenta el número de factores negativos, para determinar el signo; se escribe éste y después se multiplican los factores como si fueran positivos.

EJEMPLOS.

$$1. \quad (-5) (2) (-1) (4) (-2) = - 5.2.1.4.2 = - 48$$

$$3 (-2) (-1) (-2) (-3) = + 3.2.1.2.3 = + 36$$

2. También podremos ya efectuar potencias de números negativos. En efecto, recordemos que una potencia es un producto de varios factores iguales. Así, tendremos:

$$(-2)^3 = (-2) (-2) (-2) = - 2.2.2 = - 2^3$$

$$(-2)^4 = (-2) (-2) (-2) (-2) = + 2.2.2.2 = + 2^4$$

En general $(-a)^n$ será *positivo* si n es *par*, *negativo* si n es *impar*.
Por ejemplo:

$$(-a)^5 = -a^5 \quad (-a)^6 = a^6$$

OBSERVACIÓN

Es muy sencillo probar que las operaciones con potencias de números relativos obedecen a las mismas leyes que las que hemos estudiado en el caso de los números naturales. No las deduciremos; y sólo nos concretaremos a enunciarlas cuando hagamos la recapitulación de estas lecciones.

EJERCICIOS.

$$(-a)^{2n} = +a^{2n}$$

En efecto, $2n$ es siempre un número par, cualquiera sea el valor de n .
En cambio,

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$$

En efecto, $2n$ es siempre par; sumándole la unidad tendremos un número que será siempre impar; pero siendo el exponente impar, la potencia será negativa.

EJEMPLOS.

$$\begin{array}{ll} (-1)^{2n} = 1 & \text{cualquiera sea } n \\ (-1)^{2n+1} = -1 & \text{» } n \end{array}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Efectuar:
 $(-1 + 2) - (-2 + 5) - (-2) + (2 - (-2) + 1)$ R. 7
2. Efectuar $\{- [- (-4)]\}$ R. 4
3. Efectuar $\{a - [b + (a - b) - a] - b\}$ R. $b - a$
4. Efectuar $\{m - [-n - (m - n)] - n - m\}$ R. $n - m$
5. Efectuar $(-2)(-5) + (-2)(-1) - (-2)^3(-1)$ R. 0
6. Efectuar $(-1)^5(-2) + [1^2 - (-2^3) - 5]$ R. 8
7. Efectuar $(-a)b + b(-a) - 2ab$ R. $-4ab$
8. Efectuar $(-a)b(-1) - (a)(-b) + 5ab$ R. $5ab$
9. Efectuar $(-a)^2(-b)^2 + 2a^2b^2 - a^2b^2(-1)$ R. $4a^2b^2$
10. Efectuar $(-a)(-b)(-c) + 2abc(-1)^3$ R. $-3abc$

§ 40. División de números relativos

1. Conociendo la regla para multiplicar números relativos podemos ya interpretar la división de números relativos en los casos en que el cociente sea exacto.

Así por ejemplo, hemos visto que

$$(-2) \times 3 = -6$$

Por ser el producto de (-2) por 3 igual a -6 escribimos:

$$\frac{-6}{-2} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{-6}{-3} = 2$$

Análogamente, por ser $(-5) \times 4 = -20$, escribimos

$$\frac{-20}{4} = -5.$$

Análogamente, por ser $(-5)(-6) = 30$, escribimos

$$\frac{30}{-6} = -5.$$

En forma general: de las fórmulas:

$$a(-b) = -ab$$

$$(-a)(-b) = +ab,$$

obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \frac{-ab}{-b} &= +a \\ \frac{-ab}{a} &= -b \\ \frac{+ab}{-a} &= -b \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Los ejercicios numéricos hecho y las (A) nos muestran que para dividir números relativos se dividen como los números naturales; y en cuanto al signo del cociente vale la misma ley que en el caso de la multiplicación, es decir:

1. El cociente de dos números relativos es positivo cuando ellos tienen el mismo signo, negativo en caso contrario:

EJERCICIOS.

$$1. \quad \frac{-25}{5} = -5 \quad ; \quad \frac{-25}{-5} = 5 \quad ; \quad \frac{25}{-5} = -5$$

$$2. \quad \frac{-a^2}{-a} = a \quad ; \quad \frac{-a^2}{a} = -a \quad ; \quad \frac{a^2}{-a} = -a$$

$$3. \quad \frac{-ab^2}{-a} = +b \quad ; \quad \frac{-abc}{-c} = +ab; \quad \frac{abc}{-ab} = -c$$

§ 41. Número racional

1. Así como hemos definido los números enteros con signo negativo, es decir los números relativos, podemos también hacerlo con las fracciones. Para ello recordemos que una fracción es el cociente de la división de dos números naturales. Análogamente, tendremos para los números relativos:

$$-6 \div 2 = -3 = -\frac{6}{2} \quad \text{es decir igual al número fraccionario } \frac{6}{2} \\ \text{con signo } -.$$

$$-6 \div -3 = 2 = \frac{6}{3}$$

$$+6 \div -3 = -2 = -\frac{6}{3} \quad \text{es decir igual al número fraccionario } \frac{6}{3} \\ \text{con signo } -.$$

2. Extenderemos ahora la definición de fracciones empleando para el numerador y denominador números relativos, es decir también números negativos.

Admitiremos la convención

$$-\frac{2}{3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{-2}{-3} = +\frac{2}{3}$$

y en general

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad ; \quad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} ;$$

es decir:

II. Una fracción es positiva si el numerador y denominador tienen igual signo; negativa en caso contrario.

3. Hemos estudiado hasta ahora las siguientes clases de números:

Enteros y positivos, es decir, números naturales; enteros positivos o negativos, es decir números relativos; fracciones de numerador y denominador positivos y negativos.

Denominamos ahora números racionales al representado por el símbolo $\frac{a}{b}$, con el cual pueden representarse los números fraccionarios y los enteros, ya sean estos positivos o negativos.

EJEMPLOS.

1. El número entero y positivo, es decir natural, 3, puede representarse por cualquiera de las fracciones siguientes:

$$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{15}{5}, \frac{-12}{-4}, \frac{3n}{n}.$$

2. El número negativo -2 puede representarse por cualquiera de las fracciones:

$$\frac{-4}{2}, \frac{6}{-3}, \frac{2}{-1}, \frac{-2}{1}$$

Resumen. Podemos expresar con el siguiente cuadro los números que conocemos:

Números naturales	}	Relativos	}	Racionales
Enteros negativos		Fraccionarios		

En el siguiente curso completaremos el caudal de nuestros números con los denominados irracionales.

§ 42. Recapitulación

1. Hemos iniciado nuestras lecciones estudiando los números naturales y sus propiedades. Con tal objeto, hemos definido las siguientes operaciones:

adición , multiplicación , potenciación ;

y sus operaciones inversas, cuando ellas eran posibles, es decir cuando conducían a números naturales; ellas son, respectivamente:

substracción , división , radicación

2. Para dar mayor generalidad a la división de números naturales, hemos debido definir otra clase de números, que hemos denominado fraccionarios, y representado por el símbolo

(1) $\frac{a}{b}$, donde **a** y **b** son números naturales.

Los naturales están también incluidos en esta clase de números; pues cuando **a** es divisible por **b**, el símbolo (1) representa un número entero.

Una vez definida esta nueva clase de números hemos extendido o generalizado a ellos las operaciones mencionadas en 1.

Para ello hemos tenido que dar nuevas definiciones de dichas operaciones, pues algunas de las que se referían a aquellos números carecían de sentido si las aplicábamos a los nuevos números.

Así, por ejemplo, dentro de los números enteros podemos fundarnos en la adición para definir la multiplicación:

$$2 \times 3 = 2 + 2 + 2;$$

pero no podemos hacerlo con los números fraccionarios, porque $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$ no puede interpretarse como $\frac{2}{3}$ «sumando $\frac{5}{7}$ de veces», lo cual carece de sentido.

Análogamente, para dar mayor generalidad a la substracción hemos introducido los números relativos, y las nuevas definiciones se han fundado en el significado ordinal de estos números.

3. Principio de permanencia. Desde que salimos de los números naturales, es decir al entrar a utilizar los fraccionarios y negativos, tuvimos que ir dando nuevas definiciones. No quiere decir esto que la Aritmética pueda hacerse al paladar de cada uno, pues las definiciones no son antojadizas o arbitrarias; han sido tales que cuando las fracciones representan números naturales, las nuevas definiciones conducen al mismo resultado que la aplicación de las que corresponden a los números naturales. Así, por ejemplo:

Según la definición adoptada de producto de fracciones es:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} ;$$

aplicándola a

$$\frac{4}{2} \times \frac{15}{3} = \frac{60}{6} = 10 ,$$

lo mismo que obtenemos con los números enteros que representan: $2 \times 5 = 10$.

Además, todas las propiedades de que gozan las operaciones con números naturales han sido conservadas al dar las nuevas definiciones; lo cual constituye el principio de permanencia de las leyes formales de la Aritmética.

4. **La igualdad.** En cuanto a la igualdad, debemos recordar que ella goza también de propiedades que hemos mencionado, y aplicado constantemente; son fáciles de verificar y aplicar a todos los números utilizados. Las consignamos en el número siguiente.

5. Representemos con letras griegas los números racionales, es decir números que pueden ser positivos, negativos, enteros, o fraccionarios. Las propiedades mencionadas se expresan: (*)

Igualdad	$\alpha = \alpha$	Propiedad reflexiva
	si $\alpha = \beta$, es $\beta = \alpha$	» simétrica
	si $\alpha = \beta$, y $\beta = \gamma$, es $\alpha = \gamma$	» transitiva
Adición	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	» conmutativa
	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$	» asociativa
	si $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$, es;	
	$\alpha + \gamma = \beta + \delta$	» uniforme
Multiplicación	$\alpha \beta = \beta \alpha$	» conmutativa
	$\alpha (\beta \gamma) = (\alpha \beta) \gamma = \alpha \beta \gamma$	» asociativa
	$(\alpha + \beta) \gamma = \alpha \gamma + \beta \gamma$	» distributiva
	si $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$, es:	
	$\alpha \gamma = \beta \delta$	» uniforme

OBSERVACIONES.

1. La propiedad uniforme, que para mayor simplicidad nosotros hemos aplicado a dos igualdades, se puede aplicar, tanto en el caso de la adición como en el de la multiplicación, a cualquier número de igualdades.

2. Análogamente respecto de la propiedad asociativa de la adición y multiplicación.

3. La propiedad distributiva de la multiplicación es también aplicable cuando los sumandos son más de dos.

4. Algunas de estas propiedades se enuncian en forma útil para el mecanismo operatorio de la aritmética, como ser:

(*) Las letras griegas utilizadas se leen:

α alfa, β beta, γ gamma, δ delta.

Igualdad

- I. Todo número es igual a sí mismo.
- II. Si un número es igual a otro, este es igual a aquel.
- III. Si un número es igual a otro y este es igual a un tercero, el primero es igual al tercero; o bien: dos números respectivamente iguales a un tercero, son iguales entre sí.

Adición

- I. El orden de los sumandos no altera la suma.
- II. En una suma de varios sumandos se pueden substituir varios de ellos por su suma efectuada.
- III. Sumando miembro a miembro varias igualdades resulta una nueva igualdad.

Multiplicación

- I. El orden de los factores no altera el producto.
 - II. En un producto de varios factores se pueden substituir varios de ellos por su producto efectuado.
 - III. El producto de una suma por un número, o de un número por una suma, es igual a la suma de los productos del número por cada uno de los sumandos.
 - IV. Multiplicando miembro a miembro varias igualdades resulta una nueva igualdad.
6. Podemos ahora trabajar con expresiones en que se combinan las operaciones antes definidas. Para ello tendremos presentes las fórmulas a utilizar, que son, además de las mencionadas que expresan las propiedades, las que hemos deducido al tratar particularmente las operaciones. Recordaremos las más importantes:

Fracciones. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. si $ad = bc$

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} \dots + \frac{m}{n} = \frac{a + b + \dots + m}{n}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \dots \times \frac{l}{m} = \frac{a \times c \times \dots \times l}{b \times d \times \dots \times m}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Estas fórmulas dan lugar, respectivamente, a los siguientes enunciados:

- I. Dos fracciones son iguales cuando lo son los productos de sus términos cruzados.
- II. Para sumar varias fracciones de igual denominador se suman los numeradores y se conserva el mismo denominador.
- III. Multiplicando (o dividiendo) ambos términos de una fracción por un mismo número se obtiene una fracción equivalente (o igual).
- IV. Para multiplicar varias fracciones se multiplican sus numeradores y denominadores entre sí.
- V. Para dividir una fracción por otra se multiplica la primera por la segunda invertida.
- VI. Para elevar una fracción a una potencia se elevan a dicha potencia ambos términos.

Números relativos. $\alpha + (-\beta) = \alpha - (\beta)$

$$a \cdot b = a b$$

$$(-a) b = a(-b) = -a b$$

$$(-a)(-b) = a b$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{+a}{+b} = +\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\left(\frac{a}{b}\right)$$

Estas fórmulas dan lugar a los siguientes enunciados:

I. Sumar un número relativo es lo mismo que restar el opuesto, y vice-versa.

II. El producto de dos números relativos es igual al producto de sus valores absolutos, precedido del signo — si son de distintos signos, del signo + si son de igual signo.

Esquemáticamente suele expresarse:

$$+ \cdot - = - \cdot + = -$$

$$- \cdot - = + \cdot + = +$$

III. El cociente de dos números relativos es igual al cociente de los valores absolutos, precedido del signo — si son de distintos signos, del signo + si son de igual signo.

$$+ : - = - : + = -$$

$$- : - = + : + = +$$

Potencias

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$x^m : x^n = x^{m-n} \quad \text{si } n < m$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

$$(x \beta \dots \gamma)^n = x^n \beta^n \dots \gamma^n$$

Estas fórmulas dan lugar a los siguientes enunciados:

I. Para multiplicar dos potencias de igual base se suman los exponentes.

II. Para dividir dos potencias de igual base se resta del exponente de la del numerador el de la del denominador.

III. Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes.

IV. Para elevar a una potencia un producto de varios factores, se eleva a dicha potencia cada uno de los factores.

Cálculo del valor numérico de las siguientes expresiones:

$$1 \quad A = X^3 + 5X^2 + 7X - 6 \quad \text{para } X = 2 \quad R: 56$$

$$2 \quad B = \frac{2a^2y^3 + 5a^2y - 7a^3y + 4a}{5a^2y^2 - 7a^2y - 8a^2} \quad \text{para } a = 5, y = 4 \quad R: \frac{117}{55}$$

$$3 \quad C = a^3 - b^3 + c^3 + 3abc \\ \text{para } a = 0,05 \quad b = 0,1 \quad c = -0,07 \quad R: -0,001946$$

$$4 \quad D = \sqrt[3]{d^2 + 3c + b} \quad d = 4 \quad c = 3 \quad b = 2 \quad R: 5$$

$$5 \quad E = \sqrt{16a} + \sqrt{3b} - 5\sqrt{5c} + \sqrt{49e} \\ a = 4 \quad b = 3 \quad c = 5 \quad e = 9 \quad R: 7$$

$$6 \quad F = x\sqrt{x^2 - 8y} + y\sqrt{x^2 + 8y} \quad x = 5 \quad y = 3 \quad R: 26$$

$$7 \quad G = \frac{a^2b}{7} + \sqrt{7ab(2c^2 - ab)} - (2a - 3b)^3 \\ a = 3 \quad b = \frac{7}{5} \quad c = 2 \quad R: 11$$

$$8 \quad H = \frac{a - b + c}{a - b - c} - \frac{ad - bc}{bd + ac} - \sqrt{\frac{b^3}{a^3} - \frac{a^3}{c^3}} \\ \text{para } a = 1 \quad b = 2 \quad c = -\frac{1}{2}, \quad d = 0 \quad R: 1$$

$$9 \quad K = a + b\sqrt{x+y} - (a-b)\sqrt[3]{(x-y)} \\ a = 10 \quad b = 8 \quad x = 12 \quad y = 4 \quad R: 38$$

$$10 \quad M = (10a + 20b)\sqrt[3]{(x-b)y} - 3a\sqrt[3]{(x-b)y^2} + 5b \\ a = \frac{5}{7} \quad b = \frac{1}{2} \quad x = 5 \quad y = \frac{9}{2} \quad R: 70$$

Adición y sustracción. Sumar las siguientes expresiones:

$$11 \quad (a^2 + 2ab + b^2, x^4y^3 - (m+n)x^3y^2 + (p-q+t)x^2y \\ (m-n)x^3y^2 + (p-q-t)x^2y - (a^2 - 2ab + b^2)x^4y^3 \\ (m+n)x^4y^3 - (a+b)x^3y^2 + abc x^2y \\ - (m-n)x^4y^3 + (a+b+1)x^3y^2 + x^2y \\ R: 2(2ab+n)x^4y^3 - (2n-1)x^3y^2 + (abc+2p+1)x^2y$$

$$12 \quad a(a-1)x^2y^2 + 4b(2m-3n)x^2y^3 - c(p+q)x^3y^4 \\ x^2y^3 - (p-cp-cq+q)x^3y^4 + ax^2y^2 \\ - 3c(2m-3n)x^2y^3 + (p+q)x^3y^4 - (8bm-12bn)x^2y^3 + (a-1)xy^2 \\ R: (a^2 + a - 1)xy^2 + \{1 - 3c(2m - 3n)\}x^2y^3$$

$$13 \quad \left\{ a - x - (x - 2a) + 2a - x \right\} - \left\{ a - 2x - (2a - x) + x - 2a \right\}$$

$$R: 8a - 3x.$$

$$14 \quad \frac{3}{5}a^4b^3c^2 + \frac{9}{8}a^3b^3c^4 + \frac{3}{4}a^4b^2c^3 - (3a^4b^3c^2 - 10,4a^3b^3c^4 - a^4b^4c^3)$$

$$R: -2,4a^4b^3c^2 + 11,525a^3b^3c^4 + 0,75a^4b^2c^3 + a^4b^4c^3$$

$$15 \quad 3a - \left\{ a + b - [a + b + c - (a + b + c + d)] \right\} \quad R: 2a - b - d$$

$$16 \quad x^4 - \left\{ 4x - [6x^2 - (4x - 1)] \right\} - \left\{ x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \right\}$$

$$R: -8x(x^2 + 1)$$

$$17 \quad a - \left\{ 2a - 3b - [4a - 5b - bc - (7a - 8b - 9c - 10d)] \right\}$$

$$\text{para } a = 1 \quad b = 1/2 \quad c = 3 \quad d = 1/5 \quad R: 26,5$$

$$18 \quad \text{Valor de } m - n - o - p$$

$$\text{para } m = a^2 + b^2 + c^2 \quad n = a^2 + b^2 - c^2$$

$$o = a^2 - b^2 + c^2 \quad p = b^2 + c^2 - a^2 \quad R: 0$$

$$19 \quad \text{Valor de } y - [z - \{x - (y - t)\}]$$

$$\text{siendo } x = 3a^2 - 2ab + 5b^2$$

$$y = 7a^2 - 8ab + 5b^2$$

$$z = 9a^2 - 5ab + 3b^2$$

$$t = 11a^2 - 3ab - 4b^2$$

$$R: = -17a^2 + 6ab + 6b^2$$

$$20 \quad \text{Valor de } G - \{F - [H - (E + G)]\}$$

$$\text{para } E = 5a^3 + 3a^2b - 7b^3$$

$$F = 8a^3 - 9a^2b - 3b^3$$

$$G = 9a^2b - 3a^3 - 7b^3$$

$$H = 8a^2b - 7a^3 - 2b^3$$

$$R: -20a^3 + 14a^2b + 8b^3$$

Multipliación.

$$21 \quad \left(\frac{7}{5}a^m b^n c^p - \frac{55}{7}a^n b^p c^m - \frac{52}{9}a^p b^m c^n \right) \cdot 2,5a^m b^m c^m$$

$$R: \frac{55}{6}a^{2m} b^{m+n} c^{m+p} - \frac{165}{14}a^{m+n} b^{m+p} c^{2m} - \frac{130}{9}a^{m+p} b^{2m} c^{m+n}$$

$$22 \quad \left[24x^{m+2n-1} - 42x^{2m-3n+2} + 25x^{2n+3m-2} \right] \cdot 25x^{2-m-2n}$$

$$R: 600x - 1050x^{m-3n+4} + 625x^{2m}$$

$$23 \quad [70p^{m-p-1} - 65p^{2-3m-2p} + 5p^{2p+m}] \cdot \frac{5}{5}p^2p^{-m+1}$$

$$R: 42p^p - 39p^{3-4m} + 3p^{4p+1}$$

$$24 \quad (-m^4 - n^4 + m^3 n + m n^3 - m^2 n^2) \cdot (-n - m) \quad R: m^5 + n^5$$

$$25 \quad (x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x - 11) \cdot (x^2 - 2x + 3) \quad R: x^6 + 10x - 33$$

$$26 \quad (a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5) (a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3) \\ R: a^8 - 8a^7 b + 28a^6 b^2 - 56a^5 b^3 + 70a^4 b^4 - 56a^3 b^5 + 28a^2 b^6 - 8ab^7 + b^8$$

$$27 \quad \left\{ x(x+a) - a(x-a) \right\} \cdot \left\{ x(x-a) - a(a-x) \right\} \\ R: x^4 - a^4$$

$$28 \quad [x^p (q-1) + y^q (p-1)] \cdot [x^p (q-1) - y^q (p-1)] \\ R: x^{2p} (q-1) - y^{2q} (p-1)$$

$$29 \quad \left\{ (a-1)x^2 + (a^2 - a)x - a \right\} \cdot \left\{ (a+1)x^2 - a^2 x \right\} \\ R: (a^2 - 1)x^4 + (a^2 - a)x^3 - (a^4 - a^3 + a^2 + a)x^2 + a^3 x$$

$$50 \quad \left\{ (a^2 - b^2)x^2 + (-a+b)x + a-b \right\} \cdot \left\{ (a+b)x - a+b \right\} \\ R: (a^3 + a^2 b - ab^2 - b^3)x^3 + (-a^2 + b^2 - a^3 + a^2 b + ab^2 - b^3)x^2 + \\ + (2a^2 - 2ab)x - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$31 \quad \left\{ (a^2 + ab + b^2)x^3 + 5(a+b)x^2 + (a-b)x - 1 \right\} \cdot (a-b) \\ R: (a^3 - b^3)x^3 + 5(a^2 - b^2)x^2 + (a^2 - 2ab + b^2)x - a + b$$

Simplificar

$$32 \quad (a+b)^2 - (a+b)(a-b) - \left\{ a(2b-2) - (b^2 - 2a) \right\} \quad R: 3b^2$$

$$33 \quad (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \\ R: 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

$$34 \quad (a+b)(a-b) - \left\{ a+b-c - (b-a+c) + (b+c-a) \right\} (a-b-c) \\ R: 2bc + c^2$$

$$35 \quad \text{Si } 2s = a + b + c, \text{ demostrar que}$$

$$36 \quad (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

División.

$$37-38-39 \quad \frac{(a+bx^2)^{p+1}}{(a+bx^2)^{p-1}}; \frac{7b(y-z)^5}{-\frac{21}{5}b(y-z)^4}, \frac{(m-n)a^9 b^7 c^5}{(n-m)a^2 b^3 c^4}$$

$$R: (a+bx^2)^2 \quad R: -\frac{5}{3}(y-z) \quad R: -a^7 b^4 c$$

$$40-41 \quad \frac{4x^5(8-m^2)^3}{0,44x^3(m^2-8)} ; \quad \frac{-(m-5)a^{5m}b^4p c^3q}{-(5-m)a^{4m}b^4p c^2q}$$

$$R: -\frac{100}{11}x^2(8-m^2)^2$$

$$R: -a^m c q$$

$$42-45 \quad \frac{15m^2(1-x^2)^4}{\frac{55}{4}m(x^2-1)^3} ; \quad \frac{4m^5n^2 + \frac{2}{9}m^4n^5 - \frac{6}{7}m^3n^6}{\frac{2}{3}m^3n}$$

$$R: -\frac{12}{11}m(1-x^2)$$

$$R: 6m^2n + \frac{1}{3}mn^4 - \frac{9}{7}n^5$$

$$47-45 \quad \frac{x^5(a^2+b^2) - 2x^4(a^3+b^3)^3}{x^3(a^2+b^2)} ; \quad \frac{(b+c)(b-c)^2 + (c-b)(b+c)^2}{(b+c)(b-c)}$$

$$R: x^2 - 2x(a^2+b^2)^3$$

$$R: -2c$$

$$46 \quad \frac{-0.14a^7b^5c^6 + 0.28a^6b^4c^5 - 0.21a^5b^3c^4 + 0.07a^3b^3c^6}{-0.07a^2b^3c^3}$$

$$R: 2a^5b^4c^3 - 4a^4b^3c^2 - 3a^3b^2c^3 - ab^2c^3.$$

Factorizar las expresiones siguientes:

$$47-48-49-50 \quad h^6 - m^6 ; \quad x^2 - y^2 ;$$

$$R: (h^3 + m^3)(h^3 - m^3) \quad R: (x+y)(x-y)$$

$$x^4 - y^4 ; \quad 1 - x^8$$

$$R: (x+y)(x-y)(x^2+y^2) \quad R: (1+x)(1-x)(1+x^2)(1+x^4)$$

$$51-52-53 \quad x^2 - (a-b)^2 ; \quad c^2 + 2cd + d^2 ; \quad 25x^2y^4 + 20x^2yz + 4z^2$$

$$R: (x-a+b)(x+a-b) \quad R: (c+d)^2 \quad R: (5x^2y^2 + 2z)^2$$

$$54-55-56 \quad 9x^4 - 6x^2z^2 + z^4 ; \quad 9a^2x^4 - 25 ; \quad 16 - a^2b^4z^6$$

$$R: (3x^2 - z^2)^2 \quad R: (3ax^2+5)(3ax^2-5) \quad R: (4+ab^2z^3)(4-ab^2z^3)$$

$$57-58-59 \quad x^6 - 64 ; \quad x^8 - 256 ; \quad ax^3y - ax^2y^3$$

$$R: (x^3+8)(x^3-8) \quad R: (x+2)(x-2)(x^2+4)(x^2+16) \quad R: ax^2y(x+y)(x-y)$$

$$60-61 \quad 2x^5y - 2x^2y^5 ; \quad a^{16} - x^{16}$$

$$R: 2xy(x+y)(x-y)(x^2+y^2) \quad R: (a+x)(a-x)(a^2+x^2)(a^4+x^4)(a^8+x^8)$$

Fracciones.

Simplificar

$$62-63-64 \quad 2a + \frac{ax-a}{x} ; \quad 5ax - \frac{ax^2-a^2}{x} ; \quad y + \frac{x-y}{2}$$

$$R: \frac{a(3x-1)}{x}$$

$$R: \frac{a}{x}(4x^2+a^2)$$

$$R: \frac{x+y}{2}$$

$$65-66-67 \quad a - b - \frac{a-b-c}{2} ; \quad \frac{(a+b)^2}{4ab} - 1 ; \quad \frac{(a-b)^2}{4ab} + 1$$

$$R: \frac{a-b+c}{2} \quad R: \frac{(a-b)^2}{4ab} \quad R: \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

$$68-69-70 \quad 2a + \frac{2b^2}{a-2b} ; \quad a+x + \frac{a^2+x^2}{a-x} ; \quad 1 - \frac{a^2-2ax+x^2}{a^2+x^2}$$

$$R: \frac{2(a-b)^2}{a-2b} \quad R: \frac{2a^2}{a-x} \quad R: \frac{2ax}{a^2+x^2}$$

$$71-72-73 \quad \frac{x^2y-xy}{x^2-1} ; \quad \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2+2ab+b^2} ; \quad \frac{x^4-y^2}{x^3+xy}$$

$$R: \frac{xy}{x+1} \quad R: (a+b) \quad R: \frac{x^2-y}{x}$$

$$74-75 \quad \frac{7x^3y+7xy^3}{x^4-y^4} ; \quad \frac{3ax+9x^2}{4a^2-36x^2}$$

$$R: \frac{7xy}{x^2-y^2} \quad R: \frac{3x}{4(a-3x)}$$

$$76-77-78 \quad \frac{(5x-10)^2}{4x^3-16x} ; \quad \frac{(a-b)^3}{a^3-ab^2} ; \quad \frac{ax^m-bx^{m+1}}{a^2bx-b^3x^3}$$

$$R: \frac{25(x-2)}{4x(x+2)} \quad R: \frac{(a-b)^2}{a(a+b)} \quad R: \frac{x^{m-1}}{b(a+bx)}$$

Operaciones con fracciones.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

$$79-80 \quad \frac{p}{ab} + \frac{q}{ac} + \frac{r}{bc} ; \quad \frac{p-q}{pq} + \frac{r-p}{pr} + \frac{q-r}{qr}$$

$$R: \frac{pc+qb+ar}{abc} \quad R: 0$$

$$81-82 \quad \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} ; \quad \frac{c}{x} + \frac{b}{x^3} + \frac{a}{x^5}$$

$$R: \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \quad R: \frac{a+bx^2+cx^4}{x^5}$$

$$83-84 \quad \frac{1}{x+y} + \frac{2-y}{x^2-y^2} ; \quad \frac{az}{a^2-z^2} - \frac{a-z}{a+z}$$

$$R: \frac{1}{x-y} \quad R: \frac{3az-a^2-z^2}{a^2-z^2}$$

$$85-86 \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-3} \quad ; \quad \frac{a}{x(a-x)} - \frac{x}{a(a-x)}$$

$$R: \frac{4x^2 - 5x - 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} \quad R: \frac{a+x}{ax}$$

$$87-88 \quad \frac{a}{2a-2b} - \frac{b}{2b-2a} \quad ; \quad \frac{5a-4b}{7} - \frac{2a-b-c}{3} + \frac{15a-4c}{12}$$

$$R: \frac{a+b}{2a-2b} \quad R: \frac{85a-20b}{84}$$

$$89-90 \quad \frac{a}{a-x} + \frac{3a}{a+x} - \frac{2ax}{a^2-x^2} \quad ; \quad \frac{a-2b}{3c} - \frac{b-3c}{2a} + \frac{4ab+3bc}{6ac}$$

$$R: \frac{4a}{a+x} \quad R: \frac{2a^2+9c^2}{6ac}$$

$$91 \quad \frac{4m-3n}{3(1-n)} - \frac{m+3n}{3(1-n)} + \frac{2n}{1-n} \quad R: \frac{m}{1-n}$$

$$92 \quad \frac{2a^2}{b^2-4a^2} - \frac{b}{b+2a} + \frac{a}{2a-b} \quad R: \frac{ab-b^2}{b^3-4a^2}$$

$$93 \quad \frac{1}{(x-3)(x-4)} - \frac{2}{(x-2)(x-4)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} \quad R: 0$$

$$94 \quad \frac{a+b-c}{a-b+c} - \frac{a-b+c}{a+b-c} - \frac{4(b-c)^2}{a^2-(b-c)^2} \quad R: \frac{4(b-c)}{a+b-c}$$

$$95 \quad \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b} \right) - \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{b^2}{a^2-b^2} \right) \\ R: \frac{2a^2b^2 - 2a^3b - 2ab^3}{a^4 - b^4}$$

$$96 \quad \left\{ \frac{a+b}{8(a-b)} - \frac{a-b}{6(a+b)} \right\} - \left\{ \frac{5ab}{12(a^2-b^2)} - \frac{5a}{9(a+b)^2} \right\} \\ R: \frac{9ab(a+b) - 3(a^3+b^3) + 40a(a-b)}{72(a^2-b^2)(a+b)}$$

Multipliación.

$$97-98 \quad \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{(x+2)^2} ; \frac{(a-b)^2}{b+a} \cdot \frac{b}{x(a-b)}$$

$$R: \frac{1}{(x-1)(x+2)} \quad R: \frac{(a-b)b}{x(a+b)}$$

$$99-100 \quad \left(b + \frac{a^2}{b}\right) \cdot \left(a - \frac{b^2}{a}\right) ; \quad \frac{2a+b}{2a-b} \cdot \frac{a+2b}{a-2b}$$

$$R: \frac{a^4 - b^4}{ab}$$

$$R: \frac{2a^2 + 5ab + 2b^2}{2a^2 - 5ab + 2b^2}$$

$$101-102 \quad \frac{xa}{x+a} \left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right) ; \quad \left(a + \frac{ab}{a-b}\right) \cdot \left(b - \frac{ab}{a+b}\right)$$

$$R: x-a$$

$$R: \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}$$

$$103-104 \quad \frac{4ax}{cy} \cdot \frac{cxp - p^2}{6x^2 + 6xp} ; \quad \left(1 - \frac{x-p}{x+p}\right) \cdot \left(2 + \frac{2p}{x-p}\right)$$

$$R: \frac{2a(cxp - p^2)}{3c(x+p)}$$

$$R: \frac{4xp}{x^2 - p^2}$$

$$105-106 \quad \frac{a^4 - b^4}{a^2 - 2ab + b^2} \cdot \frac{a-b}{a^2 + ab} ; \quad \frac{1-x^2}{1+p} \cdot \frac{1-p^2}{x^2+x} \cdot \left(1 + \frac{x}{1-x}\right)$$

$$R: \frac{a^2 + b^2}{a}$$

$$R: \frac{1-p}{x}$$

$$107-108 \quad \left(\frac{4a}{3x} + \frac{3x}{2b}\right) \left(\frac{2b}{3x} + \frac{3x}{4a}\right) ; \quad \left(x+1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x-1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$R: \frac{8ab}{9x^2} + 2 + \frac{9x^2}{8ab}$$

$$R: x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$109-110 \quad (x^2 - x + 1) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) ; \quad \left(\frac{a}{bc} - \frac{b}{ac} - \frac{c}{ab} - \frac{2}{a}\right) \cdot \left(1 - \frac{2c}{a+b+c}\right)$$

$$R: x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$R: \frac{(a-c)^2 - b^2}{abc}$$

Division

$$111-112 \quad \frac{ax - x^2}{(a+x)^2} : \frac{x^2}{a^2 - x^2} ; \quad 9x^4 y^5 z^6 : \frac{27x^6 y^9 z^7}{4m^3 n^2 o^2}$$

$$R: \frac{(a-x)^2}{x(a+x)}$$

$$R: \frac{4m^3 n^3 o^2}{3x^2 y^4 z}$$

$$113-114 \quad \frac{a^2 - 4x^2}{a^2 + 4ax} : \frac{a^2 - 2ax}{a^2 + 4x^2} ; \quad \frac{6(ab-b^2)}{a(a+b)^2} : \frac{2b^2}{a(a^2-b^2)}$$

$$R: \frac{x(a+2x)}{a^2}$$

$$R: \frac{3(a-b)^2}{b(a+b)}$$

$$115-116 \quad \frac{4a(a^2-x^2)}{3b(c^2-x^2)} : \frac{a^2-ax}{bc+bx} \quad ; \quad \left(5x^2 - \frac{1}{5}\right) : \left(x + \frac{1}{5}\right)$$

$$R: \frac{4(a+x)}{3(c-x)}$$

$$R: 5x - 1$$

$$117 \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) : \left(x + \frac{1}{x}\right) \quad R: \frac{x^2+1}{x}$$

$$118 \quad \left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x}\right) : \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1+x}\right) \quad R: 1$$

$$119 \quad \left(\frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x}\right) : \left(\frac{x}{1+x} - \frac{1-x}{x}\right) \quad R: \frac{1}{2x^2-1}$$

$$120 \quad \left\{1 + \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2\right\} : \left\{1 - \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2\right\} \quad R: \frac{a^2+x^2}{2ax}$$

$$121 \quad \text{Calcular el valor de } \frac{a-x}{b-x} \text{ para } x = \frac{ab}{a+b} \quad R: \frac{a^2}{b^2}$$

$$122 \quad \text{Valor de la expresión } \frac{x-a}{b} - \frac{x-b}{b} \\ \text{para } x = \frac{a^2}{a-b} \quad R: \frac{b}{a}$$

$$123 \quad \text{Valor de la expresión } \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} - \frac{y^2}{x^2-y^2} \\ \text{Para } y = \frac{5x}{4} \quad R: \frac{16}{7}$$

$$124 \quad \text{Valor de la expresión } \left(\frac{2x-a}{2x-b}\right)^2 - \frac{a-x}{b-x} \\ \text{para } x = \frac{ab}{a+b} \quad R: 0$$

$$125 \quad \left[a - \frac{2a}{x + \frac{1}{x}}\right] : \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} - 1\right) \quad R: \frac{2ax}{x^2+1}$$

$$126-127 \quad a - \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{ab}{a-b}}} \quad ; \quad \frac{1}{x + \frac{1}{1 + \frac{x+1}{3-x}}}$$

$$R = \frac{2a^2b^2 - ab^3 + a^2 - 3ab + b^2}{2ab^2 - b^3 + a - b} \quad R: \frac{4}{3(x+1)}$$

CAPITULO X

OPERACIONES ALGEBRAICAS

§ 43. Expresiones algebraicas

1. En la primera parte de estas lecciones hemos estudiado las operaciones fundamentales de la aritmética, y sus propiedades; y para dar completa generalidad a los razonamientos hemos reemplazado los números por letras, que los representan. Nos ocuparemos ahora más detenidamente de las reglas operatorias y de la resolución de problemas generales.

2. Denominamos expresión algebraica a toda combinación de letras (que representan números) y números, ligados por las operaciones aritméticas, es decir, por la adición, sustracción, multiplicación, potenciación y radicación ⁽¹⁾.

Esta última operación sólo tiene significado para nosotros, hasta ahora, cuando se trata de raíces exactas. No hemos dado todavía sentido, en estas lecciones, a símbolos como $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$, etc.; por lo tanto, carecerá también de significado una expresión general como $\sqrt{a}$, cuando no represente a un cuadrado como 4, 9, 16, etc. En cambio, tendrán significado, en general, las expresiones en que no figure indicación de raíz sobre ninguna letra, y que denominamos expresiones algebraicas racionales.

EJEMPLOS.

$$\text{a) } 2a^3b^2c + \frac{2}{5}ab^2 - a + 1 \quad ; \quad \text{b) } \frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{x^2y^2}{z} + y$$

La primera de estas expresiones algebraicas se denomina entera, porque contiene únicamente las operaciones enteras, es decir: adición, sustracción, y elevación a potencias de expo-

(*) Potenciación significa elevación a potencia; y radicación, extracción de raíz.

nente natural (que es un caso particular de la multiplicación). En cambio, la segunda se denomina fraccionaria, por contener la división, es decir *letras* como denominador.

3. Cuando en una expresión algebraica reemplazamos las letras por números y efectuamos las operaciones indicadas obtenemos un número que se denomina *valor numérico* de la expresión para los valores particulares atribuidos a las letras.

EJEMPLOS.

1. Si en la expresión $a)$ del número anterior hacemos

$$a = 5, \quad b = -2, \quad c = \frac{1}{2}, \quad \text{obtenemos}$$

$$2 \cdot 5^3 (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot (-2)^2 - 5 + 1 = 108 + 8 - 5 + 1 = 114;$$

este es el valor numérico de la expresión para los valores atribuidos a sus letras.

2. La misma expresión algebraica $a)$, para el sistema de valores.

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 2, \quad c = -1, \quad \text{toma el valor numérico } \frac{7}{6}.$$

Se da por entendido, en la anterior definición de valor numérico, que las operaciones a que están sometidas las letras sean posibles; así, por ejemplo, los denominadores deberán ser diferentes de cero.

EJEMPLOS.

La expresión $b)$ tiene por valor numérico 48 para $x = 2, y = 3, z = -2$. Carece, en cambio, de significado para $z = 0$.

4. Dos expresiones algebraicas se llaman *equivalentes* cuando tienen el mismo valor numérico para cualquier sistema de valores que se atribuya a sus letras.

EJEMPLOS.

$(a + b)^2$ y $a^2 + b^2 + 2ab$ son dos expresiones equivalentes. En efecto, haciendo, $a = 1, b = 2$, resulta:

valor numérico de $(a + b)^2$ igual a $3^2 = 9$.

» » » $(a^2 + b^2 + 2ab)$ » » $1^2 + 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 9$;

haciendo, $a = -1, b = 1$, resulta:

valor numérico de $(a + b)^2$ igual a $0^2 = 0$

» » » $a^2 + b^2 + 2ab$ » » $(-1)^2 + 1^2 + 2(-1) \cdot 1 = 0$

y así siguiendo, encontraríamos el mismo valor numérico con las dos expresiones, cualesquiera fueran los valores atribuidos a a y b . En cambio, las expresiones

$2x - 2$, y $x + 1$ sólo toman el mismo valor numérico para $x = 3$; en efecto, la primera da $2 \cdot 3 - 2 = 4$, y la segunda $3 + 1 = 4$. Para cualquier otro valor de x toman las dos expresiones valor numérico diferentes; así, para $x = 1$ la primera da 0 y la segunda 2.

5. Cuando dos expresiones algebraicas son equivalentes se lo expresa colocando entre ambas el signo $\equiv$. Así, escribimos

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + b^2 + 2ab.$$

Si no hace falta recordar especialmente que las expresiones son equivalentes se usa, sencillamente, el signo $=$, y escribimos

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \quad (\text{para cualquier valor de } a \text{ y de } b)$$

y se la denomina una igualdad. Si en cambio escribimos:

$$2x - 2 = x + 1 \quad (\text{para } x = 3)$$

esta igualdad sólo se satisface para $x = 3$; es pues una igualdad condicional. Se dice también que es una **ecuación**. Podemos, pues, sentar la siguiente:

DEFINICIÓN. Denominanse ecuaciones las igualdades que sólo se satisfacen para ciertos valores de sus letras, denominados **raíces o soluciones**.

EJEMPLOS.

$2x - 2 = x + 1$ es una ecuación cuya solución es $x = 3$
 $x^2 - 5x + 6 = 0$ es una ecuación cuyas soluciones son $x = 2$, $x = 3$;
 pues para cualquiera de estos valores el primer miembro se anula.

Resolver una ecuación significa determinar sus soluciones o raíces. La parte de la matemática que trata de este problema se denomina **teoría de las ecuaciones**. De ella nos ocuparemos más adelante.

§ 44. Polinomios

1. Si una expresión algebraica está compuesta exclusivamente por productos de números y letras, se denomina monomio. Así, por ejemplo:

$$4 a^2 b c, \quad \frac{2}{5} a b c^3, \quad \sqrt{4} x y^2,$$

son monomios. No lo son, en cambio, las expresiones

$$\frac{a+b}{c}, \quad \frac{a b^2}{c}, \quad a-b+1.$$

Si en un monomio efectuamos el producto de los factores numéricos conocidos, el número que se obtiene se denomina coeficiente. Se lo coloca generalmente delante del monomio.

EJEMPLOS.

$2x \cdot y \cdot 4 \cdot 2^2$. x es un monomio; se puede llevar a la forma:

$32x^2y$; 32 es el coeficiente; x^2y la parte literal.

$(-2a)(-b)(-c)^2(-1)$ es un monomio; se puede llevar a la forma:

$-2abc^2$; es (-2) el coeficiente; abc^2 la parte literal.

2. Se denomina grado de un monomio al número de factores literales que lo componen. Así, por ejemplo:

$4a^2bc$ es un monomio de 4º grado ($a \cdot a \cdot b \cdot c$, es decir, 4 factores)
 $-x^3yz$ es un monomio de 5º grado.

x es un monomio de primer grado; su coeficiente es 1.

3. DEFINICIÓN. Se denomina polinomio a toda expresión compuesta por adiciones y susbtracciones de monomios.

EJEMPLOS.

Son polinomios

$$2x^2y - 4xy + 1; \quad (-2)xy - 5(x^2y) - 1; \quad x^2 - 2xy + y^2; \quad x^2 + y$$

En particular, se denominan trinomios a los compuestos de tres monomios, como los tres primeros ejemplos; binomios, a los compuestos por dos, como el último.

Los monomios que componen el polinomio se denominan, también, términos; los que tienen la misma parte literal se denominan términos semejantes; se pueden asociar, dando al polinomio la forma reducida.

EJEMPLO.

El polinomio $3x^2y + xy^2 - 2(-x)^2y - 1$ puede escribirse $(3x^2y - 2x^2y) + xy^2 - 1$, o sea $x^2y + xy^2 - 1$, que es su forma reducida.

Se denomina grado de un polinomio al del término de mayor grado.

EJEMPLOS.

$2x^2y^3 - x^4 + y^2$ es un polinomio de 5º grado.

$abc - a^4 - b^2c$ es un polinomio de 4º grado.

Cuando todos sus términos son del mismo grado el polinomio se denomina homogéneo.

EJEMPLOS.

$x^2 + 2xy + y^2$ es un polinomio homogéneo de 2º grado, ordenado según las potencias decrecientes de x y crecientes de y .

$x^2 + 2xy + 1$ no es un polinomio homogéneo.

§ 45. Operaciones enteras con polinomios

1. Adición. Se denomina suma de varias expresiones algebraicas enteras a una expresión reducida que para cualquier sistema de valores de sus letras adquiere un valor numérico igual a la suma de los valores numéricos de las expresiones que se suman. Si las expresiones son polinomios, bastará, para sumarlos, colocarlos uno a continuación de otro con los signos que tienen y efectuar todas las operaciones que conduzcan al polinomio reducido.

EJEMPLOS.

Sumar los polinomios

$$\begin{aligned} & ax + 5x^3 - 2ax^2 + 3a^2x - a^3 - x^3 \\ & a^3 + x^3 - 3a^2x + 2a^3 - a^2x ; \\ & - 2a^3 + x^3 + a^2x - 6x^3 + ax^2 . \end{aligned}$$

Si representamos estos polinomios por A, B, C, respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned} A+B+C = & ax + 5x^3 - 2ax^2 + 3a^2x - a^3 - x^3 + a^3 + x^3 - 3a^2x + 2a^3 - a^2x \\ & - 2a^3 + x^3 + a^2x - 6x^3 + ax^2 ; \end{aligned}$$

o también

$$\begin{aligned} A+B+C = & ax + (5x^3 - x^3 + x^3 + x^3 - 6x^3) + (ax^2 - 2ax^2) + \\ & + (3a^2x - 3a^2x - a^2x + a^2x) , \end{aligned}$$

o sea :

$$A+B+C = ax - ax^2$$

Podemos verificar que este último polinomio cumple la definición de la suma. En efecto, demos valores cualesquiera a las letras.

$$\begin{array}{lcl} a = 1 & , & \text{se tiene: valor numérico de A es } 31 \\ x = 2 & & \text{» » » B » } 3 \\ & & \text{» » » C » } -36 \end{array}$$

valor numérico de $a x - a x^2$ es -2 ; y es, efectivamente,

$$A + B + C = 31 + 3 - 36 = -2.$$

En la práctica se facilita la operación reduciendo cada polinomio y colocando en columnas los términos semejantes.

$$\begin{array}{rcl} A & \dots & 4x^3 - 2ax^2 + 3a^2x + ax - a^3 \\ B & \dots & x^3 - 4a^2x + 3a^3 \\ C & \dots & -5x^3 + ax^2 + a^2x - 2a^3 \\ \hline & & -ax^2 + ax \end{array}$$

2. Substracción. Para restar un polinomio, B, de otro, A, es suficiente, de acuerdo con la propiedad § 38, 7

$$A - (+B) = -A + (-B),$$

cambiar los signos de todos los términos del polinomio sustraendo y sumarlos al otro polinomio.

EJEMPLO.

Con los dos polinomios A y B del ejemplo anterior, tenemos:

$$A - B = 4x^3 - 2ax^2 + 3a^2x + ax - a^3 - x^3 + 4a^2x - 3a^3,$$

y después de las reducciones:

$$A - B = 3x^3 - 2ax^2 + 7a^2x + ax - 4a^3.$$

3. Se pueden combinar adiciones y substracciones, o como decimos efectuar la suma algebraica de varios polinomios.

EJEMPLOS.

$$\begin{array}{rcl} A + B - C & = & 10x^3 - 3ax^2 - 2a^2x + ax + 4a^3 \\ A - B - C & = & 8x^3 - 3ax^2 + 6a^2x + ax - 2a^3 \\ -A + B + C & = & -8x^3 - 3ax^2 - 6a^2x - ax - 2a^3 \\ -A - B - C & = & ax^2 - a^3 \\ -A - B + C & = & -10x^3 + 3ax^2 + 2a^2x - ax - 4a^3 \end{array}$$

4. Producto. Al estudiar los fundamentos y propiedades de la multiplicación hemos aprendido a multiplicar monomios; y los conocimientos que se refieren a productos de sumas y restas indicadas nos permiten multiplicar polinomios.

DEFINICIÓN. Se denomina producto de dos expresiones enteras a otra expresión entera cuyo va-

lor numérico es igual al producto de los valores numéricos de las expresiones dadas, para cualquier sistema de valores que se den a sus letras.

EJEMPLO.

Efectuar el producto de los polinomios

$$\begin{aligned} & x^2 - 4xy + y^3 - 4x^3y + 6x^2y^2 \\ & y^2 + x^2 - 2xy. \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación (§ 3, 5) obtenemos el producto multiplicando cada término de uno de los polinomios por todos los del otro, y sumando los productos parciales.

Si se ordenan los dos polinomios según las potencias crecientes o decrecientes de una misma letra, se facilita, como puede verse, la operación; el polinomio producto se obtiene ya reducido.

$$\text{Polin. A} \quad x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

$$\text{Polin. B.} \quad x^2 + 2xy + y^2$$

$$\begin{aligned} & x^6 - 4x^5y + 6x^4y^2 - 4x^3y^3 + x^2y^4 \\ & + 2x^5y - 8x^4y^2 + 12x^3y^3 - 8x^2y^4 + 2xy^5 \\ & + x^4y^2 - 4x^3y^3 + 6x^2y^4 - 4xy^5 + y^6 \end{aligned}$$

$$\text{Polin. AB} \quad x^6 - 2x^5y - x^4y^2 + 4x^3y^3 - x^2y^4 - 2xy^5 + y^6$$

§ 46. División de polinomios

1. División exacta. Sea el producto de un polinomio por un monomio:

$$(3x^2 + 2xy - y^2) \cdot 2xy^2 = 6x^3y^2 + 4x^2y^3 - 2xy^4$$

Si nos diéramos el polinomio producto, $6x^3y^2 + 4x^2y^3 - 2xy^4$, y el monomio $2xy^2$, la operación que permite deducir el polinomio $3x^2 + 2xy - y^2$, que multiplicado por este monomio origina el polinomio dado, se denomina división exacta del polinomio por el monomio.

Para realizarla nos fundamos en la división de una suma indicada por un número (§ 6,6), según la cual basta dividir cada término de la suma por el número y sumar los cocientes parciales. Obtenemos así:

$$\begin{aligned} \frac{6x^3y^2 + 4x^2y^3 - 2xy^4}{2xy^2} &= \frac{6x^3y^2}{2xy^2} + \frac{4x^2y^3}{2xy^2} - \frac{2xy^4}{2xy^2} \\ &= 3x^2 + 2xy - y^2 \end{aligned}$$

2. Consideremos, ahora, el producto de dos polinomios:

$$(x^2 - 3x^2 + 4x - 1) \quad \text{y} \quad (x^2 + 2x + 1)$$

Efectuando el producto obtenemos

$$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1,$$

es decir, podemos escribir:

$$(1) \quad x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 \\ = (x^2 + 2x + 1)(x^3 - 3x^2 + 4x - 1)$$

Representando el polinomio producto por A y los factores por B y C, tendríamos:

$$(2) \quad A = B \cdot C.$$

Si nos proponemos ahora la siguiente pregunta: Hay un polinomio que multiplicado por el polinomio B da el polinomio A, debemos contestar: sí, el polinomio C, de acuerdo con (2) y (1).

La operación mediante la cual dados los dos polinomios A y B determinamos el otro polinomio C, que satisface a la expresión (2), se denomina división del polinomio A por el polinomio B.

Para obtener el polinomio cociente nos basamos en los dos teoremas siguientes:

I. Si los polinomios dividendo A, y divisor B, están ordenados en un mismo sentido según las potencias de una misma letra, el primer término del cociente, es decir, de C, se obtiene dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor.

En efecto, supongamos los dos polinomios dados ordenados según las potencias decrecientes de la misma letra. El término de mayor grado del producto, en nuestro ejemplo x^5 , se obtendrá multiplicando los dos términos de mayor grado de los factores; en nuestro ejemplo x^3 y x^2 . Tendremos así:

$$x^5 = x^3 \cdot x^2$$

Por consiguiente, dado x^5 y x^3 , como sucede en nuestro caso, determinaríamos x^2 por la división $x^5 \div x^3$. Queda pues probado el teorema I.

II. Si se conoce un cierto número de primeros términos del cociente y restamos del dividendo el producto del polinomio formado con dichos términos por el divisor, se obtiene un polinomio que se denomina resto parcial. Si dividimos el

primer término de este resto parcial por el primer término del divisor obtenemos el primer término que sigue en el cociente al último conocido.

En efecto, descompongamos el cociente C en una suma de dos polinomios, C' y C'' ; es decir: $C = C' + C''$.

Substituyendo en la (2) tenemos:

$$A = B(C' + C'') \quad , \text{ o sea } A = BC' + BC'' \quad , \text{ o sea}$$

$$(3) \quad A - BC' = BC''$$

El producto BC' es un polinomio, y la diferencia del primer miembro es precisamente el polinomio que hemos denominado resto parcial. Si lo designamos por R' , tendremos:

$$(2') \quad R' = B \cdot C''$$

Esta igualdad, que es de la misma forma que la (2), nos dice que en la división de R' por B es C'' el cociente; luego, aplicando el teorema enunciado en 1 obtendríamos el primer término de C'' dividiendo el primero de R' por el primero de B ; y como este primer término de C'' , es el primero que sigue en el cociente $C = C' + C''$ a los conocidos C' , queda demostrado el enunciado II.

Si en particular aplicamos nuestro teorema considerando conocido el primer término, solamente, del cociente, nos servirá para determinar el segundo término (que es el primero de los que siguen al primero). Conocidos los dos primeros aplicamos nuevamente el teorema para determinar el tercero (que es el primero que sigue a la suma de los dos primeros); y así seguimos hasta terminar la división.

En la práctica se van colocando los sucesivos restos parciales horizontalmente, disponiendo la operación como en el siguiente ejemplo:

Dividendo	$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 19x + 6$	$x^2 + 2x - 3$ divisor
Prod. div. por x^3 :	$x^5 + 2x^4 - 3x^3$	$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ cociente
Primer resto parcial:	$-4x^4 - 3x^3 + 20x^2 - 19x + 6$	
Prod. div. por $-4x^2$:	$-4x^4 - 8x^3 + 12x^2$	
Segundo resto parcial:	$5x^3 + 8x^2 - 19x + 6$	
Prod. div. por $5x$:	$5x^3 + 10x^2 - 15x$	
Tercer resto parcial:	$-2x^2 - 4x + 6$	
Prod. div. por -2 :	$-2x^2 - 4x + 6$	
	0	

3. División entera. Supongamos dados dos números naturales, como 20 y 6. Sabemos ya que no existe otro número natural cuyo producto por 6 dé 20; es decir, no es exacta la división de 20 por 6. Pero sí existen dos números, 3 y 2, que cumplen las condiciones

$$(1) \quad 20 = 6 \cdot 3 + 2 \quad 2 < 3$$

Si nos damos los números 20 y 6 y nos proponemos determinar 3 y 2 de modo que se cumplan las (1), decimos que hemos determinado el cociente, 3, y el resto, 2, en la división entera de 20 por 6.

En general, si representamos el dividendo por a , el divisor por b , y los números que hay que determinar, cociente y resto, respectivamente, por c y r , tendremos que deberán cumplirse:

$$a = b \cdot c + r \quad r < b$$

Análogamente sucede en el caso de dos polinomios A y B. No existirá siempre un polinomio que multiplicado por B nos dé A. Cuando existe decimos que A es divisible por B, y determinamos el cociente en la forma que acabamos de ver. Pero a pesar de ello siempre será posible determinar dos polinomios, C y R, de modo que se cumplan las dos siguientes condiciones:

$$(2) \quad A = B \cdot C + R \quad : \quad \text{grado de } R < \text{grado de } B$$

Cómo determinar los polinomios C y R siendo dados A y B? Sean, por ejemplo, los polinomios:

$$A = 3x^5 + x^4 + x^3 + 5x^2 - x + 1$$

$$B = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Empecemos la división de A por B, como si ella fuera posible, en la forma que hemos estudiado en el § 46,2. Aplicando el procedimiento estudiado obtendremos una serie de restos parciales, y una serie de términos que formarían el cociente si la división de los dos polinomios fuera posible, es decir exacta.

Ahora bien: el grado de cada resto parcial va disminuyendo por lo menos en una unidad respecto del anterior. Llegará pues un momento en que el resto parcial es de grado inferior al del divisor; no será entonces posible dividir el primer término de dicho resto por el primero del divisor (no sería divisible). Pero, por la definición (3) § 46, cada resto parcial es igual al ex-

ceso del dividendo sobre el producto del divisor por el cociente obtenido; lo cual valdrá también para el último resto obtenido. Luego, designándolo por R, y el cociente por C, tendremos:

$$A - B \cdot C = R \quad ; \quad A = B \cdot C + R \quad ;$$

y por lo dicho , grado de R < grado de B ;

luego, se cumplen las condiciones (2), y será C el cociente, R el resto de la división entera del polinomio A por el polinomio B.

Refiriéndonos al ejercicio propuesto, tenemos:

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 + x^4 + x^3 + 5x^2 - x + 1 & x^3 + x^2 + x + 1 \\ 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 & 3x^2 - 2x \\ \hline -2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 & \\ -2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x & \\ \hline R = & 4x^2 + x + 1 \end{array}$$

Efectuando el producto de $x^3 + x^2 + x + 1$ por $3x^2 - 2x$, y sumando al resultado $4x^2 + x + 1$ debemos obtener

$$3x^5 + x^4 + x^3 + 5x^2 - x + 1$$

4. De lo visto anteriormente podemos deducir la siguiente

Regla. Para dividir un polinomio por otro (de menor grado) se ordenan ambos según las potencias decrecientes de la misma letra. Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor; el resultado será el primer término del cociente.

Se multiplica el cociente obtenido por el divisor y este producto se resta del dividendo; se obtiene así el primer resto parcial. Se divide el primer término de este resto parcial nuevamente por el primero del divisor, y se obtiene el segundo término del cociente.

Se multiplica este segundo término del cociente por el divisor y se resta este producto del primer resto parcial; se obtiene así el segundo resto parcial. Se continúa en esta forma hasta obtener un resto parcial de grado inferior al del divisor. Este resto parcial será el resto de la división.

CAPITULO XI

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

§ 47. Ecuación de primer grado con una incógnita

1. En el § 43, 5 aprendimos a distinguir entre una igualdad y una ecuación. Dijimos que una ecuación era una igualdad que se satisfacía únicamente para ciertos valores de sus letras, llamados soluciones o raíces de la ecuación. La teoría de la resolución de ecuaciones, de cuya parte elemental nos ocuparemos ahora, tiene por objeto, dada una ecuación, determinar sus soluciones.

2. En un estudio más completo demostraremos que una ecuación tiene tantas soluciones como su grado. Así, por ejemplo, las ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 & \text{tiene tres soluciones:} & x = 1, x = -1, x = 2 \\ y^3 - 5y + 6 = 0 & \text{» dos »} & y = 2, y = 3 \\ 2\alpha - 3 = 0 & \text{» una solución:} & \alpha = 3/2. \end{array}$$

como puede comprobarse substituyendo la letra, o incógnita, por los números indicados y efectuando las operaciones; obtendremos siempre la identidad $0 = 0$.

Nosotros nos limitaremos al estudio de ecuaciones de primer grado. En este caso, la ecuación puede contener varios términos con la letra incógnita pero siempre al primer grado, y denominadores numéricos. Por ejemplo:

$$\frac{x+1}{3} - x + 2 = 3x + \frac{x-2}{4} + 1$$

es también una ecuación de primer grado.

3. Sean dos ecuaciones de primer grado, tales como:

$$\frac{x+1}{3} - 1 + 2x = \frac{x-1}{2} + \frac{7}{2}$$

$$\frac{x}{2} + 2x - 4 = x - 1$$

Ambas ecuaciones tienen la misma solución: $x = 2$. En efecto, reemplazando en la primera y en la segunda x por 2 obtenemos, respectivamente, las identidades:

$$4 = 4$$

$$1 = 1.$$

Decimos entonces que las dos ecuaciones son equivalentes; y sentamos la siguiente

DEFINICIÓN. Dos ecuaciones se llaman equivalentes cuando tienen la misma solución.

El procedimiento para resolver una ecuación consiste en efectuar con ella las transformaciones que nos den siempre una ecuación equivalente más sencilla, hasta llegar a una en que la solución sea evidente. En general, el procedimiento a seguir será el siguiente:

Quitar los denominadores, multiplicando ambos miembros de la igualdad por el mínimo común múltiplo de los denominadores; pasar al primer miembro todos los términos que estén afectados por la incógnita, y al segundo los que no lo estén; efectuar las reducciones de los términos del primer miembro y los del segundo, por su parte. El primer miembro quedará en la forma de un número multiplicado por x , y el segundo será un número, es decir

$$a x = b.$$

Dividiendo el segundo miembro por el coeficiente de x obtendremos la solución de la ecuación en la forma

$$x = \frac{b}{a}$$

EJEMPLOS.

$$1. \quad \frac{x+1}{5} - 1 + 2x = \frac{x-1}{2} + \frac{7}{2}$$

Multipliquemos ambos miembros por 6:

$$\begin{aligned} (x+1) 2 - 6 + 12x &= (x-1) 3 + 21 \\ 2x + 2 - 6 + 12x &= 3x - 3 + 21 \\ 2x + 12x - 3x &= -3 + 21 - 2 + 6 \\ 11x &= 22 \end{aligned}$$

$$x = \frac{22}{11} = 2.$$

$$2. \quad 4t - \frac{2t-1}{2} + t - 1 = \frac{1-t}{8} + 2t + 1$$

$$32t - 8t + 4 + 8t - 8 = 1 - t + 16t + 16$$

$$32t - 8t + 8t + t - 16t = 1 + 16 - 4 + 8$$

$$17t = 21$$

$$t = \frac{21}{17}$$

§ 48. Sistemas de ecuaciones de primer grado

1. Una ecuación puede contener también más de una incógnita. Así, por ejemplo, la ecuación

$$(1) \quad 2x - 3y = 1,$$

contiene dos incógnitas: x e y . Esta igualdad no se satisfará para cualquier valor de x y cualquier valor de y ; o como decimos, no será satisfecha para cualquier par de valores (x, y) ; por eso decimos que es una ecuación. En efecto, si sustituimos x por 1, e y por 2, el primer miembro toma el valor 4, y el segundo el valor 1. Si sustituimos, en cambio, x por 5, e y por 3, la igualdad se satisface. En efecto, es:

$$2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1.$$

Decimos entonces que el par de números $(5, 3)$ es una solución de la ecuación $2x - 3y = 1$.

Podemos ver fácilmente que no es la única solución, y que hay infinitas soluciones, es decir infinitos pares de números que la satisfacen. En efecto, basta dar un valor arbitrario a y ; nos queda una ecuación que no contiene más que x ; resolviéndola obtenemos un valor de x , y asociado al de y , los dos valores que la satisfacen.

EJEMPLOS.

De la (1) deducimos:

$$x = \frac{1+3y}{2} ; \quad \text{para } y = 0 \text{ es } x = 1/2$$

$$y = -1 \quad \gg \quad x = -1$$

$$y = 4 \quad \gg \quad x = 13/2$$

$$y = \frac{1}{3} \quad \gg \quad x = 1$$

etc.

es decir, $(1/2, 0)$, $(-1, -1)$, $(13/2, 4)$, $(1, 1/3)$ etc., son soluciones de la ecuación.

Análogamente hubiéramos podido elegir arbitrariamente valores de x , y determinar las correspondientes de y .

Decimos pues que una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones, que no determina una solución o que es indeterminada.

2. Consideremos ahora dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$2x + 3y = 12$$

$$3x - 2y = 5$$

La primera tendrá, según hemos visto, un número infinito de soluciones; lo mismo sucede, por su parte, con la segunda. Son, soluciones, por ejemplo

de la 1ª: $(0,4)$, $(6,0)$, $(-6,8)$, $(3, 2)$, $(2, 8/3)$, etc.

de la 2ª: $(-1-4)$, $(1, -1)$, $(3, 2)$, $(2, 1/2)$, $(4, 7/2)$ etc.

Pero hay una sola solución que es común a las dos ecuaciones; en este caso es $(3, 2)$. Decimos entonces que $(3, 2)$ es la solución del sistema de las dos ecuaciones consideradas simultáneamente. Sentamos pues la siguiente

DEFINICIÓN. Se dice que dos o más ecuaciones con igual número de incógnitas forman un sistema cuando deben ser satisfechas por la misma solución.

En la teoría de las ecuaciones se estudia en qué casos un sistema de ecuaciones tiene solución. Nosotros nos limitaremos al estudio elemental de la cuestión, suponiendo que se trata de sistemas que tienen solución.

3. Los procedimientos que conducen a la resolución de sistemas de ecuaciones se basan en el mismo principio que en el caso de la ecuación de primer grado con una incógnita: obtener sistemas equivalentes, es decir que tengan la misma solución, pero más sencillos, hasta llegar a uno de solución evidente.

Esto se consigue, por ejemplo, con los métodos de eliminación de una de las incógnitas. En qué forma?. Lo aclararemos con algunos

EJEMPLOS.

$$2x + 3y = 12$$

$$3x - 2y = 5$$

Si multiplicamos la primera por 3 y la segunda por 2, obtenemos un sistema equivalente:

$$\begin{aligned} 6x + 9y &= 36 \\ 6x - 4y &= 10; \end{aligned}$$

y restando ordenadamente:

$$\begin{array}{r} 6x + 9y = 36 \\ 6x - 4y = 10 \\ \hline 13y = 26 \end{array} \quad y = \frac{26}{13} = 2;$$

y substituyendo este valor en una cualquiera de las ecuaciones del sistema propuesto, la primera, por ejemplo:

$$2x + 3 \cdot 2 = 12 \quad ; \quad 2x = 6 \quad , \quad x = 3;$$

luego la solución es (3,2).

2. Resolveremos el mismo sistema siguiendo otro camino: deduzcamos el valor de x de la primera ecuación, como si y fuera conocido; resulta:

$$x = \frac{12 - 3y}{2};$$

substituyendo esta expresión de x en la segunda ecuación, obtenemos:

$$3 \frac{12 - 3y}{2} - 2y = 5,$$

es decir, una ecuación con una sola incógnita, que ya sabemos resolver.

Para hacerlo multiplicamos por 2; obtenemos:

$$36 - 9y - 4y = 10 \quad , \quad -13y = -26 \quad y = 2;$$

y obtendremos x como ya hicimos, substituyendo y por el valor encontrado, en una cualquiera de las ecuaciones.

3. Lo mismo podríamos proceder resolviendo las dos ecuaciones respecto de la misma incógnita; por ejemplo:

$$x = \frac{12 - 3y}{2} \quad , \quad x = \frac{5 + 2y}{3};$$

e igualando los segundos miembros, obtenemos:

$$\frac{12 - 3y}{2} = \frac{5 + 2y}{3}$$

es decir, nuevamente una ecuación de primer grado con una incógnita, que sabemos resolver.

Multiplicando por 6:

$$\begin{aligned} 36 - 9y &= 10 + 4y \\ -13y &= -26 \end{aligned} \quad y = 2.$$

4. Los procedimientos seguidos en los ejemplos ante-

riores para eliminar una de las incógnitas y resolver el sistema, se conocen en la teoría con los nombres de método de reducción y método de substitución, respectivamente.

El método de reducción consiste fundamentalmente, en: multiplicar una o las dos ecuaciones por números que permitan igualar los coeficientes de una de las incógnitas; después sumar ambas ecuaciones si dichos coeficientes tienen distinto signo, restarlas si tienen el mismo signo.

Conviene convertir los coeficientes que se quiere igualar en su mínimo común múltiplo, para usar números más pequeños.

EJEMPLOS.

1. Sea

$$\begin{aligned} 6x + 4y &= 12 \\ 4x - 3y &= 6 \end{aligned}$$

Si queremos eliminar x multiplicamos la primera por 2 y la segunda por 3, pues $12 = \text{m. c. m. } (6, 4)$, y es $12 \div 6 = 2$, $12 \div 4 = 3$; luego

$$\begin{array}{r} 12x + 8y = 24 \\ 12x - 9y = 18 \\ \hline 17y = 6 \end{array} \quad y = \frac{17}{6}$$

2. Sea

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ -x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

basta aquí multiplicar la segunda por 2 y sumarla con la primera, para eliminar x . Obtenemos:

$$3y = 3, \quad y = 1$$

3. Sea

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

basta sumar ordenadamente; obtenemos:

$$2x = 8, \quad x = 4.$$

El método de substitución consiste en deducir una de las incógnitas como si la otra fuera conocida, de una cualquiera de las ecuaciones, y substituirlo en la otra ecuación.

5. Generalización. Si representamos por a_1 el coeficiente de x en la primera ecuación, por b_1 el de y ; por c_1 la cantidad que no contiene x ni y , es decir el término independiente; y si representamos los valores correspondientes en la segunda ecuación por a_2 , b_2 , c_2 , podemos expresar en for-

ma general un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$(1) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$$

Apliquemos el método de reducción para resolverlo. Para ello multipliquemos la primera por b_2 , la segunda por b_1 , y restemos ordenadamente; obtendremos una ecuación con la sola incógnita y .

Análogamente, si multiplicamos la primera por b_2 , la segunda por b_1 , y restamos; obtenemos una ecuación en x . Resulta:

$$\begin{array}{rcl} a_2 a_1 x + b_1 a_2 y & = & c_1 a_2 \\ a_2 a_1 x + b_2 a_1 y & = & c_2 a_1 \\ \hline (b_1 a_2 - b_2 a_1) y & = & c_1 a_2 - c_2 a_1 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y & = & c_1 b_2 \\ a_2 b_1 x + b_1 b_2 y & = & c_2 b_1 \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1) x & = & c_1 b_2 - c_2 b_1 \end{array}$$

Cambiando el signo en ambos miembros de la primera de estas ecuaciones (con lo cual no altera) y deduciendo de esta el valor de y , de la otra el de x , obtenemos:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

A los mismos valores llegaríamos con el método de sustitución.

En estas expresiones observamos que el denominador es común: $a_1 b_2 - a_2 b_1$. Puede obtenerse en la siguiente forma: escribimos los coeficientes en columnas, en el orden que tienen en las ecuaciones, y multiplicamos en cruz, restando del primer producto el segundo, como muestra el siguiente esquema:

$$(I) \quad \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ & \nearrow \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

• Además, los numeradores se obtienen de acuerdo con el mismo esquema, y con la siguiente regla: Se reemplaza en el

cuadro (1) los coeficientes de la incógnita cuyo denominador se calcula por los términos independientes, c_1, c_2 . Tenemos:

$$\text{Denominador de } x: \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$\text{Denominador de } y: \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

EJEMPLO.

Sea el sistema:

$$2x + 3y = 12$$

$$3x - 2y = 5$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 = -13$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 = -39$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 12 \cdot 3 = -26$$

$$x = \frac{-39}{-13} = 3 \quad ; \quad y = \frac{-26}{-13} = 2.$$

OBSERVACIÓN. Cuando las ecuaciones del sistema no están dadas en la forma (1) se las lleva a dicha forma haciendo las transformaciones del caso, antes de resolver el sistema. Por ejemplo:

Sea resolver

$$\frac{2x-1}{2} + \frac{y+1}{3} = \frac{x-1}{4} + \frac{3}{2}$$

$$\frac{x+1}{8} - \frac{y-1}{3} = \frac{x}{4} + \frac{y-1}{3}$$

Obtenemos, después de reducciones, el sistema equivalente:

$$9x + 4y = 17$$

$$3x + 16y = 19$$

cuya solución es (1,2), que será también la solución del sistema propuesto.

6. El mismo procedimiento de eliminación se puede aplicar a un sistema de más de dos ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas. Sea, por ejemplo, un sistema de tres ecuaciones

$$(2) \quad \begin{aligned} 2x - 3y - 2z &= 2 \\ -3x - 2y + z &= 4 \\ x + y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

Eliminemos x entre la 1.^a y la 2.^a y también entre la 2.^a y la 3.^a; obtenemos:

$$\begin{aligned} -13y - 4z &= 14 \\ y + 10z &= 28 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones obtenemos $z = 3$, $y = -2$. Substituyendo estos valores en una cualquiera de las ecuaciones del sistema (2) deducimos $x = 1$; luego, la solución es $(1, -2, 3)$, como puede comprobarse fácilmente.

§ 49. Planteamiento y resolución de problemas

1. Las ecuaciones son de frecuente aplicación en la resolución de problemas; pues el planteamiento de un problema conduce generalmente a la resolución de una ecuación o de un sistema.

Aunque en realidad la resolución de un problema exige en cada caso un estudio particular, podemos indicar en forma general algunas características del proceso a seguir.

1.º Planteamiento del problema; es decir, elegir las incógnitas que representen las soluciones del problema, y expresar en fórmulas algebraicas las condiciones a que deben satisfacer.

2.º Resolución de las ecuaciones a que conduce el planteamiento del problema.

Además, si reemplazamos los datos numéricos por letras que pueden tomar diferentes valores, en vez de resolver un problema, resolvemos un **grupo** de problemas, o mejor dicho todos los que se pueden obtener después dando valores numéricos concretos a las letras. En tal caso podemos agregar:

3.º Discusión de las soluciones; es decir, ver como ellas se comportan y varían en los diferentes problemas de la misma índole o forma que el propuesto.

Aclararemos estos conceptos con algunos ejemplos.

PROBLEMAS.

1. Determinar un número tal que su mitad más la tercera parte del número que se obtiene sumando 4 al dato es igual al duplo de dicho número, menos 8.

Representando el número que buscamos por x , de acuerdo con el enunciado del problema, se tiene:

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{3}(x+4) = 2x - 8;$$

ecuación que resuelta nos da la solución del problema:

$$x = 8.$$

II. Un jugador entra a jugar con 100 pesos. Juega dos veces; se pregunta cuál es la suma ganada o perdida sabiendo que: en la primera jugada gana el doble de lo que le queda al final de la segunda; y que en la segunda jugada ha perdido 150 pesos (Bourlet):

Designemos por x el dinero ganado o perdido, correspondiendo el signo positivo al primer caso, negativo al segundo. En ambos casos, al fin de la partida tendrá $(100+x)$ pesos. En la primera jugada gana 2 $(100+x)$; luego, poseerá $100+2(100+x)$. En la segunda jugada pierde 150 pesos; le queda pues $100+2(100+x)-150$, suma que debe ser igual a $100+x$; luego, tenemos la ecuación:

$$100 + 2(100 + x) - 150 = 100 + x,$$

la cual resuelta nos da:

$$x = -50.$$

El resultado es negativo, y por consiguiente el jugador ha perdido 50 pesos.

III. Determinar el punto de intersección de la tangente exterior común a dos circunferencias de radios r y r' con la recta que determinan sus centros, cuya distancia es d ; discutir las soluciones.

Determinaremos el punto buscado, X (fig. 33) por su distancia al centro O. Sea $OX = x$. La comparación de los triángulos semejantes OTX, O'T'X nos da:

$$\frac{x}{x-d} = \frac{r}{r'}$$

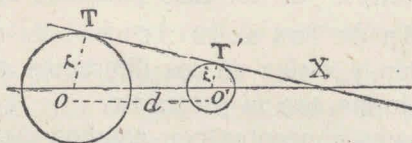


Fig. 33

Efectuando los productos cruzados, obtenemos: $x \cdot r' = (x-d)r$; ecuación de primer grado que resuelta nos da

(1)

$$x = \frac{r}{r-r'} d$$

Discusión:

Si es $r > r'$, es x positivo, y el punto X está a la derecha de O.

Si es $r < r'$, es x negativo, y el punto X está a la izquierda de O.

Si es $r = r'$ siendo d diferente de cero, la solución (1) se presenta en la forma

$$x = \frac{rd}{0},$$

que carece para nosotros de significado, pues no tiene sentido la división por cero. Geométricamente se lo vé fácilmente; pues si las dos circunferencias tienen igual radio, la tangente común es paralela a la recta O O', determinada por los centros; luego no se cortan, y el punto X no existe.

Podemos, sin embargo, dar a este resultado otra interpretación: si en vez de ser $r = r'$ es r muy próximo a r' es $r - r'$ muy próximo a cero y el valor de x , fracción de denominador muy pequeño, es muy grande. El punto X está muy alejado a la derecha de O. Y se alejará tanto más cuanto más próximo sea $r - r'$ a cero, o sea cuanto menos difieran r y r' ; y se alejará más allá de cualquier distancia, por grande que sea, con tal de tomar r' suficientemente próximo a r . Expresamos esta circunstancia diciendo que x crece infinitamente, o es infinito, cuando r' tiende a r .

IV. Pedro pregunta a Juan cuántos años tiene; y Juan contesta: Tengo el doble de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la edad que tu tienes; y cuando tú tengas la edad que yo tengo, nuestras dos edades sumarán 72 años. ¿Qué edad tiene Pedro, y qué edad Juan?

Designemos por: x la edad actual de Juan.

y » » » » Pedro.

De acuerdo con el enunciado será $x > y$; además, la diferencia de edades, que siempre se mantiene, será $(x - y)$. Tendremos:

Cuando Juan tenía la edad y , la de Pedro era $y - (x - y)$, es decir $2y - x$; y según el enunciado el doble de este número debe ser igual a x ; obtenemos así la primera ecuación: $(2y - x) 2 = x$; que después de las transposiciones da

$$(1) \quad 3x - 4y = 0$$

Además, cuando Pedro tenga x años, Juan tendrá $x + (x - y)$, es decir $2x - y$; y según el enunciado, este número sumado a x da 72; luego, obtenemos la segunda ecuación $2x - y + x = 72$, que después de transposiciones da:

$$(2) \quad 3x - y = 72$$

Por consiguiente, x e y deberán satisfacer al sistema de las dos ecuaciones (1) y (2). Resolviéndolo por uno cualquiera de los procedimientos estudiados, obtenemos:

$$x = 32, \quad y = 24,$$

que como puede comprobarse fácilmente satisfacen a las condiciones enunciadas en el problema.

V. Sean dos triángulos rectángulos, (fig. 34) cuyos ángulos rectos son opuestos por el vértice. Sean a, b , los catetos, c la hipotenusa, de uno de los triángulos; a', b', c' los correspondientes elementos del otro. Determinar las distancias x e y del punto de intersección I de las hipotenusas a la prolongación de los lados.

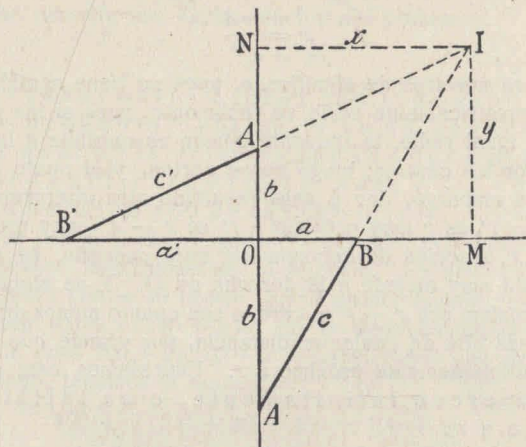


Fig. 34

Comparando los triángulos semejantes $B' A' O$, $B' I M$, obtenemos:

$$\frac{B' O}{A' O} = \frac{B' M}{I M} \quad ; \quad \text{y siendo}$$

$$B' O = a' \quad ; \quad A' O = b' \quad ; \quad B' M = a' + x \quad ; \quad I M = y \quad ,$$

resulta :

$$(1) \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a' + x}{y}$$

Análogamente, comparando los triángulos semejantes $A O B$, $A N I$, deducimos :

$$(2) \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{b + y}$$

Efectuando los productos cruzados en cada una de estas igualdades, y transponiendo, obtenemos :

$$(3) \quad \begin{aligned} b' x - a' y &= -b' a' \\ b x - a y &= b a \end{aligned}$$

Para determinar x e y hay que resolver este sistema de ecuaciones. Resolviéndolo, por cualquiera de los procedimientos estudiados, encontramos:

$$(4) \quad x = \frac{a a' (b' + b)}{a' b - a b'} \quad ; \quad y = \frac{b b' (a' + a)}{a' b - a b'}$$

Discusión. El sistema tendrá solución siempre que sea $a' b - a b' \neq 0$. En el caso en que fuera $a' b - a b' = 0$, no tendrían significado x ni y , pues, como ya lo hicimos notar, no tiene sentido la división por cero. Pero, sin embargo, este caso puede también interpretarse geoméricamente. En efecto, supongamos

$$a' b - a b' = 0 \quad ; \quad \text{deducimos} \quad a' : b' = a : b$$

Pero si se cumple esta relación de proporcionalidad entre los lados homólogos los dos triángulos son semejantes; luego $\text{ang. } A = \text{ang. } A'$ y por tanto c y c' serán paralelos; luego, no se encontrarán, es decir el punto I no existe; por tanto, el problema no tiene solución.

En el caso en que sea $a' b > a b'$, es decir $a' : b' > a : b$, el denominador de las (4) es negativo; luego son negativos x e y ; lo cual se interpretará en la siguiente forma: x es negativa porque I, en nuestra figura, quedará a la izquierda de $A A'$; y es negativa porque queda debajo de $B B'$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Operaciones enteras con polinomios.

Comprobar las identidades:

- $4[(a^2 - b^2)cd + (c^2 - d^2)ab]^2 + [(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) - 4abcd]^2 \equiv (a^2 + b^2)^2(c^2 + d^2)^2$
- $xyz + (y+z)(z+x)(x+y) \equiv (x+y+z)(yz + zx + xy)$
- $\frac{[a+b](a+c) + 2a(b+c)]^2 - (a-b)^2(a-c)^2}{a} \equiv 8(b+c)(c+a)(a+b)$
- $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3(bcd + cda + dab + abc) \equiv (a+b+c+d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad - bc - bd - cd).$
- $\frac{b+c}{bc}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2 + a^2 - b^2) + \frac{a+b}{ab}(a^2 + b^2 - c^2) \equiv 2(a+b+c)$

División de polinomios.

- Dividir el polinomio $x^5 - 6x^3 - 19x - 2x^4 + 20x^2x + 6$ por $-3x^2 + 2x$.
R: división exacta; cociente: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.
- Dividir el polinomio $x^4 + 3x^5 + 5x^2 + x^3 - x + 1$ por $x^2 + x^3 + 1 + x$ y comprobar que se cumplen las (4) § 46, haciendo $x = -2$.
R: cociente: $C = 3x^2 - 2x$; Resto: $R = 4x^2 + x + 1$; para $x = -2$ obtenemos: $-65 = -5 \cdot 16 + 15$; $-65 = -65$.
- Dividir el polinomio $3x^4 - 1 + 6x - 5x^2$ por $x^2 - 3x + 4$, y comprobar que se verifica $A \equiv B \cdot C + R$.
 $C = 3x^2 + 9x + 10$; $R = -59$.

Arit. y Alg., 12.

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

9. Efectuar la división exacta

$$(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc) : (a + b + c)$$

$$C = a^2 - a(b + c) + b^2 + c^2 + 5bc.$$

10. Efectuar la división exacta

$$x^3 - 3x^2 + 3x + y^3 - 1 : x + y - 1.$$

$$x^2 - x(y + 2) + y^2 + y + 1.$$

11. Dividir $x^4 + 1$ por $x^2 + 1$.

$$C = x^2 - 1 ; R = 2.$$

12. Dividir $x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ por $x - 3$.

$$C = x - 5 ; R = 5x - 18.$$

13. Dividir $a^4 - a^3b + 2a^2b^2 - ab^3 + b^4$ por $a^2 + b^2$.

$$\text{Cociente } C = a^2 - ab + b^2$$

Ecuación de primer grado.

Resolver las ecuaciones:

$$14. \quad \frac{3x - 5}{4} = \frac{4 - x}{2} + \frac{9 - 2x}{6} \quad x = 3$$

$$15. \quad \frac{t - 1}{2} + \frac{1 - 2t}{3} = -\frac{1 - t}{4} - \frac{1}{2} \quad t = 7/5$$

$$16. \quad + \frac{1}{2}(\alpha - 1) - \frac{1}{3}(2\alpha + 1) = \alpha - \frac{\alpha - 1}{3} \quad \alpha = 7$$

$$17. \quad \frac{m - 0,1}{2} - \frac{2m - 0,2}{5} = \left(m - \frac{1}{2}\right)2 - \frac{m}{0,1} \quad m = 11/90$$

Sistemas de ecuaciones.

$$18. \quad \begin{aligned} 45a - 105b &= 30 \\ 2a - b &= 7 \end{aligned} \quad \text{solución } (3,1)$$

$$19. \quad \begin{aligned} 105m - 862n &= -1085 \\ 102m - 864n &= -1092 \end{aligned} \quad \text{solución } (3, 3/2)$$

$$20. \quad \begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{3}{y+1} &= \frac{5}{4} \\ \frac{4}{x} - \frac{7}{y+1} &= \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \text{solución } (2,3)$$

$$21. \quad \begin{aligned} \frac{3x+1}{3} - \frac{2y-2}{4} &= \frac{2x-5}{6} + \frac{4y-6}{12} + 3 \\ \frac{2x-6}{4} - \frac{y+1}{4} &= \frac{2x-2}{8} + \frac{y-2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{solución } \left(\frac{95}{13}, \frac{11}{13}\right)$$

22.
$$\begin{aligned} 16x + y - 15z &= -56 \\ 6x - 4y + 12z &= 84 \\ 2x + 2y - z &= 3 \end{aligned}$$
 solución : (2, 3, 7).
23.
$$\begin{aligned} x + y &= 19 \\ y + z &= 21 \\ z + x &= 24 \end{aligned}$$
 solución : (11, 8, 13).

Problemas.

24. Determinar un número cuya mitad más su tercera parte sea igual a su novena parte más 13. R : 18.

25. En un gallinero hay conejos y gallinas. Se cuentan 35 cabezas y 110 patas. Cuántos conejos y cuántas gallinas hay?.

R : 20 conejos ; 15 gallinas.

26. Determinar un número de tres cifras sabiendo que : la cifra de las unidades es el triple de la cifra de las centenas ; que la cifra de las centenas más la de las decenas, más uno, es igual a la de las unidades ; que la suma de las cifras es once. R : 236

27. Determinar un número de tres cifras sabiendo que : la suma de sus cifras es 7 ; la cifra de las unidades es el doble de la de las decenas ; sumando al número el que se obtiene invirtiendo sus cifras resulta el número 545. R : 124.

