

A. SARRAT

APLICACIONES GEOMÉTRICAS



APLICACIONES
GEOMÉTRICAS

1692

SIGNOS EMPLEADOS EN ESTA OBRITA

SIGNOS: LÉASE:

+ mas

— menos

× multiplicado por

÷ dividido por

$\sqrt{\quad}$ raíz cuadrada

$\sqrt[3]{\quad}$ raíz cúbica

$\pi \frac{22}{7}$ ó 3,1415926

= igual

: es a

:: como

x término incógnito

m. metro

m.^{cd} metro cuadrado

m.^{co} metro cúbico

d.^{cd} decímetro cuadrado

d.^{co} decímetro cúbico

c.^{cd} centímetro cuadrado

c.^{co} centímetro cúbico

471

APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Con mas de cien Figuras intercaladas en el texto

Y

VARIOS PROBLEMAS RESUELTOS

POR

A. SARRAT

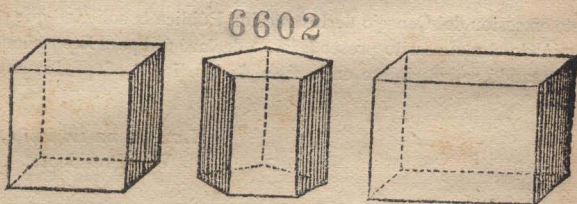
Profesor de idiomas y contabilidad, autor de varias obras didácticas,
miembro de varias sociedades científico-literarias.

OBRA DESTINADA AL USO DE LAS ESCUELAS PRIMARIAS

Y APROBADA AL EFECTO POR LAS AUTORIDADES COMPETENTES
COMO TEXTO DE ENSEÑANZA.

QUINTA EDICION

Aumentada de un suplemento por el mismo Autor.



245

BUENOS AIRES

TIPOGRAFIA Y LITOGRAFIA DEL «COURRIER DE LA PLATA»
202, Calle San Martin, 202

1880

BIBLIOTECA NACIONAL

125X185

Al Señor Presidente del Consejo de Instruccion Pública.

SEÑOR PRESIDENTE:

El abajo firmado, con todo el respeto debido, solicita del Consejo de Instruccion pública la aprobacion de la obra adjunta titulada: *Aplicaciones geométricas*, destinada al uso de las Escuelas Primarias.

Una parte de este opúsculo, señor Presidente, fué aprobada en el tratado de aritmética del mismo autor: pero habiéndose determinado á publicar separadamente estas sencillas nociones de geometría con el referido título, y visto las adiciones hechas de la demostracion del cuadrado de la hipotenusa, agri- mensura y nivelacion; el abajo firmado se ha creído en la obligacion de someter á nuevo exámen esta obrita así modificada.

Por tanto, espera, señor Presidente, que el Consejo de Instruccion Pública se dignará tomar esta solicitud en buena consideracion.

Con esto tiene el honor de decirse, con el mas profundo respeto, del señor Presidente, el muy atento y seguro servidor.

A. Sarrat.

Buenos Aires, Noviembre 8 de 1866.

CONSEJO DE INSTRUCCION PÚBLICA.

Buenos Aires, Marzo 19 de 1867.

Visto en sesion del Consejo de Instruccion Pública la solicitud que precede y examinado el manuscrito presentado, se declaró útil para la enseñanza primaria y mandó se inscribiese en la lista de los libros adoptados para este objeto.

LUIS J. DE LA PEÑA,
Vice-Presidente.

Será furtivo y perseguido como tal todo ejemplar que no lleve la firma del autor.

A large, ornate handwritten signature in dark ink, which appears to read "A. Sarrat", enclosed within a decorative, swirling oval frame.

APLICACIONES GEOMÉTRICAS

§ 1. — PRELIMINARES.

1° — Definiciones.

Geometría—Quiere decir mensura de la tierra, porque tal fué el objeto primitivo de esta ciencia que trata de la forma de los cuerpos y de la mensura de la estension.

Cuerpo—Llámanse cuerpo todo objeto que se puede ver, tocar y pesar. Los cuerpos son : *sólidos* como los metales, las piedras y las maderas, etc.; *líquidos* como el agua, el vino, etc.; *gaseosos* como el aire y el gas.

Volúmen—Es la porcion del espacio que ocupa un cuerpo.

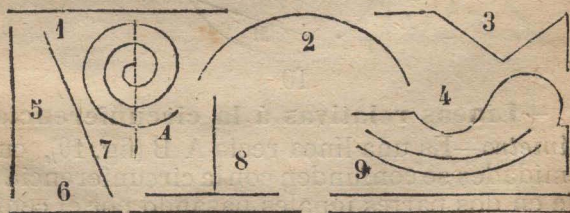
Superficie—Es la parte exterior de los cuerpos y los separa del espacio.

Línea—Es la parte que termina una superficie.

Punto—El punto geométrico es la estremidad de una línea, se concibe en todas partes de ella, y es siempre considerado sin dimensiones.

2° — Líneas

Línea recta (fig. 1.) Es aquella que tiene todos sus puntos en una misma direccion y es el camino mas corto de un punto á otro.



Línea curva (fig. 2) Es aquella cuyos puntos no son en una misma direccion.

Línea quebrada—(fig. 3) Es aquella que se forma de líneas rectas cuyas direcciones son diferentes.

Línea mixta—(fig. 4) Es aquella que se forma de partes rectas y de partes curvas.

La línea recta segun la direccion que tiene en el espacio se llama tambien :

Línea vertical (fig. 5) Cuando tiene la direccion del hilo de un péndolo.

Línea horizontal—(fig. 6) Cuando tiene la direccion del nivel del agua en calma.

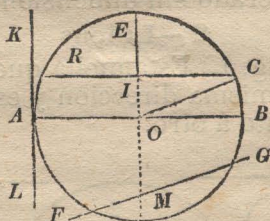
Línea oblicua (fig. 7) Cuando no es ni vertical ni horizontal.

Línea perpendicular—(fig. 8) Es aquella que encontrando otra línea recta forma con ella ó con su prolongacion dos ángulos iguales.

Líneas paralelas—(fig. 9) Son aquellas que conservan entre sí siempre la misma distancia y no pueden encontrarse por mas que se prolonguen.

La figura A es una línea espiral.

Circunferencia—Es una línea curva que tiene todos sus puntos igualmente distantes de un punto comun O llamado centro (fig. 10).



10

3°. — Líneas relativas á la circunferencia

Diámetro—Es una línea recta A B (fig. 10), cuyas estremidades se confunden con la circunferencia que divide en dos partes iguales pasando por el centro.

Rádío—Es una línea recta O C (fig. 10), que vá del centro á la circunferencia y es igual á la mitad del diámetro.

Arco—Es una porcion de circunferencia R E C. (fig. 10).

Cuerda—Es una línea recta R C (fig. 10), que pasa por las estremidades de un arco.

Flecha—Es una línea recta E I (fig. 10) perpendicular á una cuerda que divide en dos partes iguales, y mide la mayor distancia de esta al arco; su prolongacion I O pasa por el centro de la circunferencia.

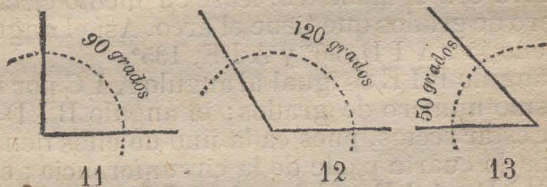
Secante—Es una línea recta F G (fig. 10) que corta la circunferencia en dos puntos y la divide en dos partes desiguales.

Tangente—Es una línea recta K L (fig. 10) que toca la circunferencia en un solo punto A.

4°—Ángulos

Angulo—Es el espacio comprendido entre dos líneas que se encuentran en un punto llamado el vértice del ángulo y tiene por medida el arco, descrito desde el vértice como centro, comprendido entre dos líneas que se llaman los dos lados del ángulo.

Angulo recto—(fig. 11) Es aquel que tiene por medida la cuarta parte de la circunferencia y vale 90 grados; sus lados son perpendiculares entre sí.



Angulo obtuso—(fig. 12) Es aquel cuyo arco tiene mas de 90 grados y es por consiguiente mayor que el ángulo recto.

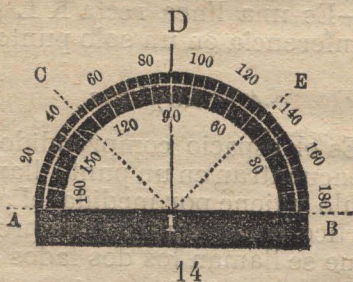
Angulo agudo—(fig. 13) Es aquel que tiene menos de 90 grados y es menor que el ángulo recto.

Para medir los ángulos se ha de tener presente que toda circunferencia grande ó chica, se divide en 360 partes iguales llamadas grados; el grado en 60 minutos y el minuto en 60 segundos.

Un ángulo de 18 grados, 25 minutos, 37 segundos se escribe $18^{\circ} 25' 37''$.

Aunque en el sistema decimal se considere la circunferencia dividida en 400 centígrados, el centígrado en 100 minutos y el minuto en 100 segundos, se usa el primero.

Los ángulos se miden con un *semicírculo* ó *transportador* de latón ó de asta dividido en grados (fig. 14).



Llevando el instrumento sobre el ángulo propuesto de modo que el vértice ocupe exactamente el centro del medio círculo, y que uno de los lados coincida bien con el diámetro, léase en medio círculo el número de grados que tiene el arco. Así el ángulo A I C tiene 45° , A I D, 90° y A I E, 135° .

El ángulo B I E es igual al ángulo A I C por tener el mismo número de grados; el ángulo B I D = D I A por estar rectos, pues cada uno de ellos tiene por medida la cuarta parte de la circunferencia; el ángulo B I C = A I E y el ángulo A I E = A I C + C I D + D I E.

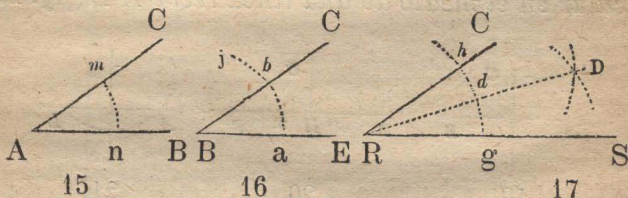
El *semicírculo* sirve también para trazar un ángulo igual á otro; pero esta cuestión se resuelve también y con mucha facilidad con la regla y el compás, como sigue:

Sea propuesto de hacer un ángulo igual á otro (fig. 15), describáse desde el vértice A, con una abertura de compás arbitraria, un arco m n (fig. 15) terminado en los dos lados del ángulo. Desde el punto B de la línea indefinida B E (fig. 16) y con la misma abertura de compás describáse el arco indefinido a j, tómese a b igual á m n, tírese B C y se tendrá el ángulo propuesto.

Si fuese pedido un ángulo 2, 3 ó n veces mayor, se tomaria sobre el arco indefinido una cantidad que fuese 2, 3 ó n veces la primera.

Del mismo modo se dividen los ángulos en partes iguales ó proporcionales, dividiendo así los arcos.

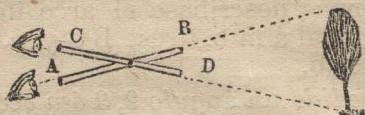
Sea propuesto de dividir el ángulo C R S (fig. 17) en dos partes iguales.



Desde el vértice R describáse el arco g h, y de los puntos de interseccion de este con los dos lados, describáse dos arcos de mismo rádio que se corten en D, tírese R D que corte el arco en d, y queda resuelta la cuestion.

El instrumento mas adecuado para medir los ángulos sobre el terreno, es incontestablemente el grafómetro compuesto de un medio círculo de laton dividido en grados, de un diámetro que varía de 16 á 27 centímetros, cuyas estremidades son terminadas por dos pinulas, así como las puntas de la alidada; esta última es una regla móvil dividida en dos partes iguales por el tornillo que le sirve de eje y la tiene sujeta al centro del medio círculo.

Si el grafómetro es fuera de nuestro alcance por su precio elevado, tomaremos los ángulos sobre el terreno con dos reglas bien paralelas reunidas entre sí como un par de tijeras (fig. 18) lo que permite llevar

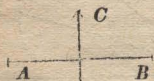


18

los mismos ángulos sobre el papel á donde se pueden medir con el medio círculo que ya conocemos (fig. 14).

5°—Modo de trazar las perpendiculares

CASO 1°.—Sea propuesto de levantar una perpendicular en el medio de una línea recta $A B$ (fig. 19).



19



20



21

De las estremidades A y B , y con una abertura de compás mayor que la mitad de $A B$, describese de un mismo radio dos arcos que se corten en C y en S y la línea $C S$ será la perpendicular pedida, y además partirá la línea $A B$ en dos partes iguales.

CASO 2°.—Sea propuesto de levantar una perpendicular en un punto dado H sobre una línea recta $A P$ (fig. 20).

Del punto H como centro describese de un mismo radio los arcos $m m$, y con un radio mas grande describese desde los puntos de interseccion de dichos arcos con la línea $A P$ dos arcos que se corten en C cuya interseccion unido con el punto H y la línea $C H$ es la perpendicular que se pide.

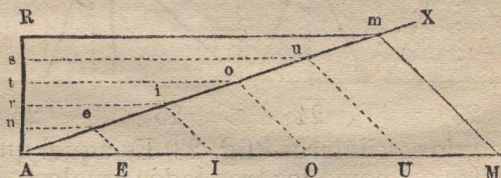
CASO 3º—De un punto dado *M* fuera de una recta *A L*. (fig. 21) sea propuesto bajar una perpendicular sobre dicha línea.

Póngase una de las puntas del compás en el punto *M*, y describáse el arco *A L*, y de los puntos de interseccion *A* y *L* describáse dos arcos de un mismo radio que se corten en *S*, y tírese la línea *M S* que es la que se busca.

Los carpinteros, los herreros y los albañiles, etc., etc., trazan las perpendiculares con una escuadra, cuya construccion consiste en dos reglas de madera ó de metal reunidas en forma de una *T* ó de un ángulo recto.

6º Division de las líneas rectas en partes iguales

Sea propuesto de partir la línea *A M* en 5 partes iguales (fig. 22).



22

Del punto *A* tírese una línea indefinida *A X* haciendo con *A M* un ángulo cualquiera y sobre la línea indefinida hágase cinco divisiones arbitrarias, pero iguales entre sí. Sea *A e* la medida arbitraria, llevese *A e* de *e* en *i*, de *i* en *o*, de *o* en *u* y de *u* en *m*; tírese la línea *m M* y por los puntos de division tírense las líneas *u U*, *o O*, etc., paralelas á *m M*, cuyas intersecciones *E*, *I*, *O*, *U* dividen *A M* en cinco partes iguales.

Si fuese propuesto de dividir una línea dada en partes proporcionales se formaria la proporcion dada con una medida arbitraria sobre la línea indefinida, y las paralelas tiradas por los puntos de division determinarian la referida proporcion sobre la línea propuesta.

§ II—SUPERFICIES

La superficie tiene dos dimensiones: largo y ancho; hay superficies llanas, convexas y cóncavas.

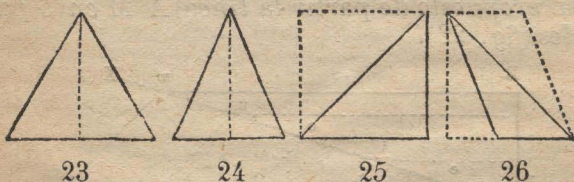
Superficie llana—Es aquella en que se puede aplicar una buena regla en todas sus direcciones.

Superficie convexa—Es aquella que sobresale en el medio como la parte exterior de una bola.

Superficie cóncava—Es aquella cuyo centro es mas hundido que los lados, como el interior de una taza.

1°—Triángulos

Triángulo es la superficie encerrada por tres líneas que forman tres ángulos; el triángulo es el mas sencillo de los polígonos (1).



Triángulo equilátero—(fig. 23) Es aquel que tiene los ángulos así como los tres lados iguales.

Triángulo isóceles—(fig. 24) Es aquel que tiene dos ángulos y dos lados iguales.

Triángulo rectángulo—(fig. 25) Es aquel que tiene un ángulo recto; el lado opuesto á este se llama hipotenusa.

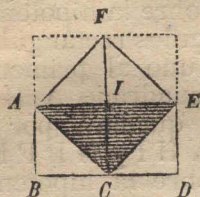
Triángulo escaleno—(fig. 26) Es aquel que tiene sus ángulos y sus lados desiguales.

2°— Triángulo rectángulo

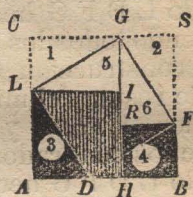
TEOREMA—El cuadrado hecho sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados hechos sobre los otros dos lados.

(1) Llámase polígono en general toda superficie plana terminada por líneas rectas.

DEMOSTRACION — En efecto, sea el triángulo isóceles $A B C$ (fig. 27) rectángulo en B , despues de formado el cuadrado $A C E F$ sobre la hipotenusa $A C$ prolónguese $B C$ de una cantidad $C D$ igual á $B A$ ó á su equivalente $B C$, puesto que el triángulo es isóceles, y formados los cuadrados iguales $A B C I$, é $I C D E$ prolónguese $C I$ hasta F y se tendrá :



27



28

El triángulo $A C E$ comun al cuadrado de la hipotenusa y á la suma de los otros dos, y luego igual al triángulo $A F E$, por tener un lado comun $A E$ y los otros iguales como lados de un mismo cuadrado ; el triángulo $C I E$ es igual al triángulo $C D E$ por la misma razon ; así como $C A F = C E F$; y los triángulos $C E F$ y $A F E$ son iguales por estar cada uno la mitad del mismo cuadrado ; pero estos últimos tienen una parte comun $F I E$, pues entón-ces el triángulo $A I N = C I E$.

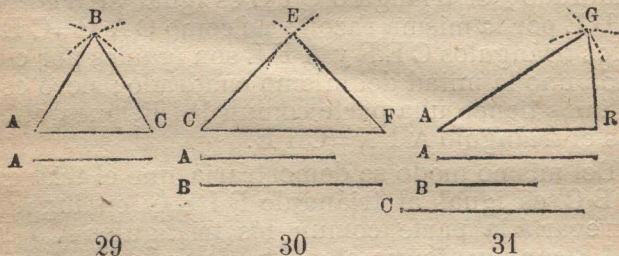
Del mismo modo se demostraria que el triángulo $A B C$ es igual al triángulo $F I E$, y en lugar de agregar á la parte comun los triángulos $A I F$ y $F I E$ con que forma el cuadrado de la hipotenusa, se les puede agregar los triángulos iguales $A B C$ y $C D E$ con que constituye la suma de los otros dos cuadrados y por consiguiente se tendrá : $A C^2 = B^2 - B C^2$ y recíprocamente $A B^2 = A C^2 - B C^2$, y $B C^2 = A C^2 - A B^2$.

Para no dejar duda ninguna damos en seguida esta otra demostracion.

Sea el triángulo escaleno $L A D$ (fig. 28) rectángulo en A . Después de prolongado el lado $A D$ de una cantidad $D B$ igual á $L A$ y construido sobre $A B$ el cuadrado $A B S C$, así como $L D F G$ sobre la hipotenusa $L D$; $L A H I$ sobre $L A$ y $H B E R$ sobre $H B$, siendo $H B$ igual á $A D$, prolongúese $H R$ hasta G , y luego restando del cuadrado $A B S C$ los triángulos 1, 2, 3 y 4, se tiene por resto el cuadrado $L D F G$ hecho sobre la hipotenusa $L D$. Pero siendo todos los triángulos rectángulos é iguales por construcción cada uno al primero $L A D$, se puede restar del mismo cuadrado $A B S C$ los triángulos 1, 2, 5 y 6 y quedará por resto la suma de los cuadrados $L A H I$ y $H B E R$ igual al cuadrado $L D F G$ hecho sobre la hipotenusa $L D$. Pues entonces $L D^2 = A D^2 + A L^2$, etc.

3º — Construcción de los triángulos

Construir un triángulo equilátero conociendo uno de sus lados A (fig. 29).



Tírese la línea recta $A C$ igual á A , y de sus extremidades como centros y con un radio igual á la línea A describáse dos arcos que se corten en B , y las rectas que unen el punto de intersección á las extremidades de $A C$ forman el triángulo pedido.

Construir un triángulo isóceles conociendo la base B y uno de sus lados iguales A (fig. 30).

Tírese la línea CE igual á B y de las estremidades C F con un rádio igual al lado A describáse dos arcos que se corten en E , y las líneas EF y EC forman el triángulo.

Construir un triángulo escáleno conociendo los tres lados ABC (fig. 31).

Tírese la línea AR igual al lado A ; de la estremidad R como centro y con un rádio igual á B describáse un arco en G , y de la estremidad A con un rádio igual á C describáse un arco en G que corte el primero, y del punto de interseccion tírese las líneas GR y GA .

4º — Cuadriláteros

El cuadrilátero es un polígono de cuatro lados; hay cinco cuadriláteros que son: el cuadrado, rectángulo, el paralelógramo, losange y el trapecio.

Cuadrado (fig. 32) es aquel que tiene los cuatro lados iguales y los ángulos rectos.



32



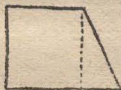
33



34

Rectángulo (fig. 33) es aquel que tiene sus lados iguales y paralelos dos á dos y los ángulos rectos.

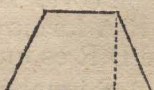
Paralelógramo (fig. 34) es aquel que tiene sus lados iguales y paralelos dos á dos y los ángulos opuestos iguales; siendo dos de ellos obtusos y los otros dos agudos.



35



36



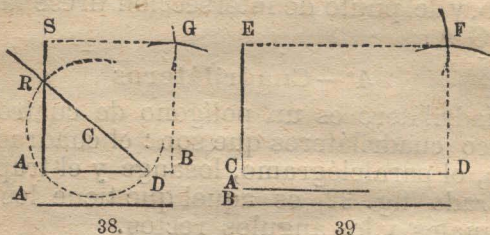
37

Losange (fig. 36) es aquel que tiene los cuatro lados iguales y paralelos dos á dos y los ángulos opuestos iguales; siendo dos de ellos obtusos y agudos los otros.

Trapezio (fig. 36 y 37) es aquel que solo tiene dos lados paralelos. Trapecio rectángulo es aquel que además de tener sus dos lados paralelos tiene tambien dos ángulos rectos.

5° — Construccion de los cuadriláteros

Sea propuesto de construir un cuadrado conociendo el lado A (fig. 38).



Hay que tener presente que las dos líneas rectas que unen las estremidades del diámetro á cualquier punto de la circunferencia, forman entre sí en dicho punto un ángulo recto formando así un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el diámetro.

Tírese la línea A B igual á A, y de un punto cualquiera C, tomado como centro fuera de A B, describáse una circunferencia que pase por la estremidad A y corte A B en D, de este punto de interseccion tírese una línea que pase por el centro C cuya prolongacion corte la circunferencia en un punto R y la línea R A forma con A B un ángulo recto en A puesto que D R es un diámetro.

Hágase A S igual á A ; y de los puntos B y S con un rádio igual tambien al lado propuesto describáse dos arcos que se corten en G, y tirando las líneas S G y G B queda formado el cuadrado.

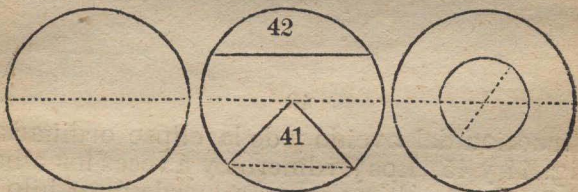
Construir un rectángulo conociendo los dos lados A y B (fig. 39).

Fórmese un ángulo recto en C haciendo C D igual á B y C E igual á A; del punto E, con un rádio igual á B, describese un arco en F y del punto D, con un rádio igual á A, describese otro arco que corte el primero, tírese las líneas E F y F D.

Para construir los demás cuadriláteros divídanse en dos triángulos por una diagonal y procédase á la construccion de los triángulos del modo indicado (Titulo 3°).

6°—Superficies curvas

Círculo (fig. 40) es la superficie encerrada por una circunferencia.



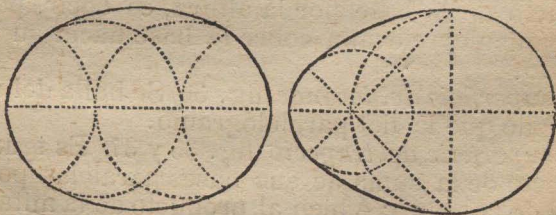
40

43

Sector (fig. 41) Es la superficie encerrada entre dos rádios y el arco que los separa.

Segmento (fig. 42) Es la superficie comprendida entre el arco y la cuerda de una circunferencia.

Corona (fig. 43) Es la superficie comprendida entre dos circunferencias desiguales que tienen el mismo centro.



44

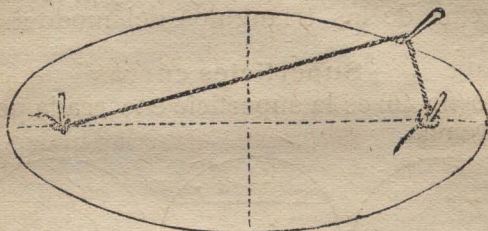
45

Ovala ó elipse ordinaria (fig. 44) Es una superficie circular comprendida entre cuatro líneas curvas reunidas entre sí é iguales dos á dos.

Ovoido (fig. 45) Es una superficie formada de un medio círculo y de la mitad de un elipse.

7°—Construccion de las figuras curvas

Las *figuras curvas* se trazan con el compás, y aunque esta operacion no ofresca ninguna dificultad hemos indicado con líneas auxiliares de puntos la



46

construccion del ovoido y de la elipse ordinaria en las fig. 44 y 45. Los jardineros y á veces los albañiles, trazan esta última con una cuerda ó un hilo como queda indicado (fig. 46).

8°—Mensura de las superficies

La *superficie del cuadrado* (fig. 32) Es igual al producto de una de sus bases multiplicada por sí mismo.

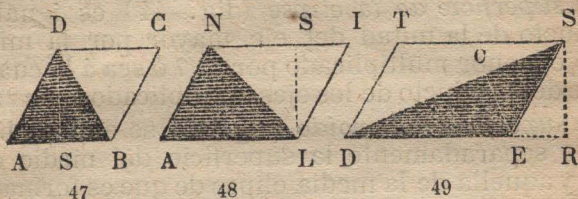
La *superficie del rectángulo* (fig. 33) Es igual al producto de su base por la altura.

La *superficie del paralelogramo* (fig. 34) Es igual al producto de su base por la altura, es decir, por la perpendicular elevada sobre la base hácia su lado opuesto.

La *superficie del losange* (fig. 36) Se halla del mismo modo que la del paralelogramo.

La *superficie del trapecio* (fig. 35 y 37) Es igual al producto de la suma de sus bases paralelas por la mitad de la altura; ó bien al producto de la mitad de la suma de sus bases paralelas por la altura; ó sea tambien á la mitad del producto de la suma de sus bases paralelas por la altura.

La superficie del triángulo (fig. 23, 24, 25 y 26) es igual al producto de su base por la mitad de la altura: puesto que el triángulo es la mitad de un cuadrilátero de misma base y misma altura. La altura de un triángulo es la perpendicular elevada sobre su base, ó sobre la prolongacion de esta, hácia el ángulo opuesto.



Así el triángulo A B D (fig. 47) es la mitad del cuadrado A B C D, siendo la base comun A B y la altura S D.

El triángulo A L N (fig. 48) es la mitad del cuadrilátero A L I N, siendo la base comun A L y la altura L S.

El triángulo D E S (fig. 49) es la mitad del cuadrilátero D E S T, siendo la base comun D E y la altura R S tomada del punto R sobre la prolongacion de la base D E; tomando D S por base de este último triángulo se tiene C E por altura.

La superficie del círculo (fig. 40) es igual al cuadrado del rádio multiplicado por $22/7$ ó sea al producto de la circunferencia por la mitad del rádio; puesto que se puede considerar el círculo como formado de una infinidad de triángulos teniendo por base la circunferencia y por altura el rádio.

La circunferencia es siempre igual al diámetro multiplicado por $22/7$, así 22 es á 7 como la circunferencia es al diámetro; y recíprocamente, 7 es á 22 como el diámetro es á la circunferencia.

La superficie del sector (fig. 41) es igual á la mitad del producto del arco por el rádio.

La superficie del segmento (fig. 42) es igual á la superficie del sector construido sobre el mismo arco menos la superficie del triángulo formado por los dos rádios y la cuerda del segmento.

La superficie de la corona (fig. 43) es igual á la superficie del círculo mayor menos la del círculo menor.

La superficie de la elipse (fig. 44) es igual al producto de la mitad del eje mayor por la mitad del eje menor multiplicado por $22/7$ ó sea    la cuarta parte del producto de los ejes multiplicados por $22/7$.

La superficie del ovoido (fig. 45) se obtiene buscando separadamente la superficie del medio círculo y aquella de la media elipse de que es formado.

La superficie de un polígono irregular, cualquiera que sea el número de sus lados, se obtiene partiéndolo en trapecios y en triángulos; buscando separadamente la superficie de cada uno de estos; la suma de los resultados espresa exactamente la superficie del polígono.

Problemas sobre las superficies

(1)    Cuál es la superficie de un terreno de forma rectangular de 347 metros de largo y 250 de ancho?

R. 86750 metros cuadrados    sean 867 áreas 50 cent   reas.

(2)    Cuál es la superficie del piso de un cuarto de 8 metros 50 de largo 6 metros 40 de ancho?

R. 54 metros cuadrados 40 dec  metros cuadrados.

(3)    Cuál es la superficie de las cuatro paredes de una sala de 7 metros, 45 de largo 6 metros 18 de ancho y 5 metros de alto?

R. 136 metros 30 dec  metros.

(4) Qué costará el tablado del piso de un cuarto de 8 metros de largo, 7 m. 50 de ancho    1 peso 25 el metro cuadrado?

R. 75 pesos fuertes.

(5)    Qué se pagar   por cortar un campo de alfalfa de 3 cuabras de largo y $2\frac{1}{2}$ de ancho    120 pesos por cuadra cuadrada?

R. 900 pesos.

(6)    Qué costará el desmonte de un terreno de 325 metros de largo y 245 de ancho    0 ps. 55 por   rea?

R. 437 pesos 6375.

(7)    Qué costará el empedrado de una calle de 12 cuabras de largo y 12 varas de ancho    15 ps. la vara cuadrada?

R. 324,000 ps.

(8) ¿Qué costará el papel para una sala de 8 metros 60 de largo, 7 metros 20 de ancho y 5 metros de alto, teniendo presente que las puertas y las ventanas ocupan una superficie de 6 metros cuadrados 45, y que el rollo del papel de 8 metros de largo, 0.50 de ancho vale 1 peso fuerte 25 céntimos?

R. 47 \$ 3593.

(9) ¿Cuál es la superficie de un terreno que tiene la forma de un trapecio cuyas bases paralelas son de 247 metros uno, 150 otro, siendo la distancia que las separa de 320 metros?

R. 63520 metros cuadrados ó sean 635 áreas 20 centiáreas.

(10) ¿Cuanto se pagará por una tabla de pino de 3 varas 2 piés de largo, 1 pié 6 pulgadas de ancho por una punta y 10 pulgadas por la otra; á razon de 2 ps. 6 reales el pié cuadrado?

R. 35 ps. 201.

(11) ¿Cuál es la superficie de un círculo de 2m.50 de diámetro, y cuál es el lado de un cubo de igual superficie?

R. Superficie 4 m. cd. 9107, lado 2 metros 2160.

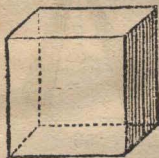
(12) ¿Cuál es la superficie de un sector de 45 grados en el círculo exterior?

R. 0. mcd. 61 d. cd. 38 centímetros cd. 39 mil cd. 28.

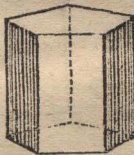
§ III — CUERPOS GEOMÉTRICOS

I° — Definiciones

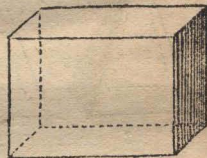
Los cuerpos sólidos son los únicos de que se ocupa la geometría, los principales son: el cubo, el paralelepípedo, el prisma, el cilindro, la pirámide, el cono, la esfera y los poliedros.



50



51



52

Todo cuerpo sólido reúne las tres dimensiones: largo, ancho y alto.

Cubo (fig. 50) es un sólido que tiene las tres dimensiones iguales; las seis faces que lo determinan son cuadrados iguales y perfectos.

Paralelepípedo (fig. 52) es un sólido cuyas bases son paralelas é iguales dos á dos.

Prisma (fig. 51) es un sólido que tiene dos bases paralelas formadas por dos polígonos iguales,

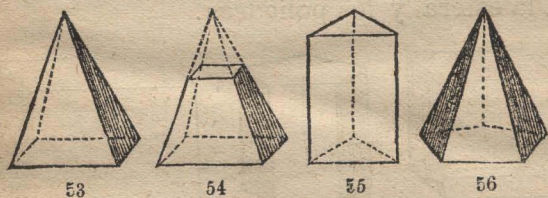
las partes laterales son rectángulas iguales, cuando las bases son polígonos regulares y perpendiculares á los lados.

Segun el polígono que le sirve de base el prisma es triangular, si tiene por base un triángulo ; cuadrangular, si tiene un cuadrado ; y en fin pentagonal, si tiene un pentágono, etc.

Pirámide (Fig. 53, 54 y 56) es un sólido que tiene por base inferior un polígono y por base superior un solo punto ; los lados son formados con triángulos iguales, cuyos vértices se reunen en un solo punto llamado el vértice de la pirámide.

Segun el polígono que le sirve de base la pirámide es triangular, si tiene un triángulo ; cuadrangular, si tiene un cuadrado ; y pentagonal, si tiene un pentágono, etc.

La pirámide es regular cuando todos los lados del polígono son iguales y que la perpendicular bajada del vértice sobre la base pasa por el centro de esta.



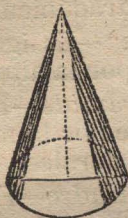
Pirámide tronca (Fig. 54) es una pirámide que carece de una porcion de su parte superior y tiene así dos bases como un prisma.

Cilindro (Fig. 58) es un sólido que tiene por bases paralelas dos círculos iguales.

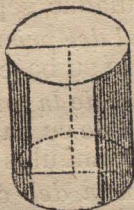
Cono (Fig. 57) es un sólido que tiene por base inferior un círculo y por base superior un solo punto.

Cono tronco (Fig. 59) es un cono que carece de una porcion de su parte superior y tiene dos bases formadas por dos círculos desiguales.

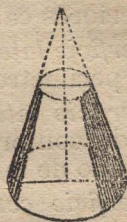
El cono es regular cuando la perpendicular bajada desde su vértice sobre la base pasa por el centro del círculo de esta.



57



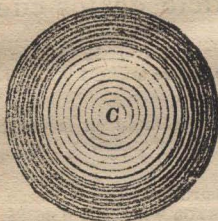
58



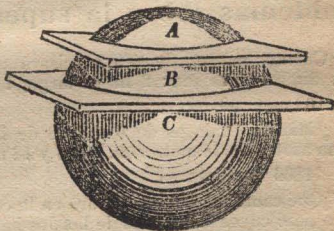
56

Esfera—(Fig. 60) es un cuerpo sólido terminado por una superficie curva, cuyos puntos son todos igualmente distantes de un punto comun llamado centro.

Las líneas consideradas en la esfera son: el radio que vá del centro á la superficie; el diámetro ó eje que pasa por el centro y se termina á la superficie; el ecuador ó gran círculo que divide la esfera en dos



60



61

partes iguales y á igual distancia de los polos.

Zona B—(Fig. 61) es una porcion de la esfera comprendida entre dos círculos paralelos.

Calota esférica A—(Fig. 61) es una porcion de la esfera separada por un círculo cualquiera.

2°— Superficie exterior de los cuerpos

La superficie exterior de los cuerpos á faces llanas es igual á la suma de las superficies de todas las faces exteriores calculadas separadamente.

La superficie lateral del prisma—Es igual al producto del perímetro de su base por la altura.

La superficie lateral de la pirámide—Es igual al producto del contorno de su base por la mitad de la altura de uno de los triángulos laterales.

La superficie convexa del cilindro—Es igual al producto de la circunferencia del círculo de su base por la altura.

La superficie de la esfera—Es igual al cuadrado del diámetro multiplicado por $\frac{22}{7}$; ó sea á cuatro veces la superficie del gran círculo.

La superficie de la zona—Es igual al producto de la circunferencia de un gran círculo por la altura perpendicular de la zona.

La superficie de la calota—Se determina del mismo modo que la superficie de la zona.

Problemas sobre la superficie de los cuerpos

(1) Cuántos metros de tela precisará para envolver 15 cajones iguales cuyas dimensiones son: 2 m. de largo, 1 m. 18 de ancho y 0 m. 70 de alto?
R. 163 met. 50 dec.

(2) ¿Cuántas baldosas de 0 m. 18 de lado, entrarán en la construcción de una azotea de 18 metros de largo y 18 m. 50 de ancho?
R. 14866 baldosas.

(3) ¿Qué cantidad de lata entrará en la construcción de una docena de baldes de pozo cuyos diámetros de las dos bases son 0 m. 32 y 0 m. 25, siendo este último el del fondo, y la altura lateral 0 m. 35?
R. 4 metros cuad. 35 d 1284.

(4) ¿Cuántas pizarras de 0 m. 30 de largo y 0 m. 22 de ancho precisará y cuánto costarán á razon de 10 \$ el millar para cubrir un techo cuya superficie se compone de dos trapecios iguales separados por un ariste culminante de 40 metros de largo teniendo por base 48 metros cada uno y de dos triángulos iguales de 8 metros de base; siendo la altura comun, de los trapecios y de los triángulos igual á 6 metros: teniendo presente que la pizarra tiene $\frac{1}{3}$ de merma por los que se dobla de una encima de otra?

- R. 11636 baldosas que importan 116 \$ 36 4/11.
- (5) ¿Cuántas hojas de oro, de 0 m 30 de largo y 0 m 20 de ancho, precisará para cubrir las partes laterales de una pirámide cuadrangular de 10 metros de alto y 9 metros cuadrados de base?
- R. 100.
- (6) ¿Cuál es la superficie lateral de un cono cuyo radio es de 0 m 25 y la distancia del vértice a cualquier punto de la circunferencia es de 1 m. 20?
- R. 0 m. 94 de 28 cent. cuad. 40 mil cd.
- (7) ¿Cuál es la superficie de una esfera de 0 m 50 de diámetro, y cuál es el lado de un cubo de igual superficie?
- R. S. 0, m 7857. L. 0 m 3618.
- (8) ¿Cuál es la superficie medio del globo de la tierra, puesto que el radio del polo se ha calculado igual á 6356740 metros y el radio del ecuador á 6378000 metros?
- R. 509689886687771 metros cuadrados 3/7.
- (9) ¿Cuál es el radio de un círculo igual en superficie á la suma de las superficies de un círculo de 0 m 22 de diámetro, de un cuadrado de 0 m 33 de lado, y de un triángulo de 1 m 20 de base, 0 m 45 de altura.
- R. 0 m 49149.
- (10) ¿Cuál es el lado de un cubo igual en superficie á una esfera de 1 metro de diámetro?
- R. 0 m. 72374.
- (11) ¿Cuántas hojas de zinc de 2 metros de largo 1 m 20 de ancho precisará para un tubo de 135 metros de largo y 0 m 30 de diámetro.
- R. 52 hojas 241047.
- (12) ¿Cuál es el radio de una esfera igual en superficie á un círculo de 2 m. de diámetro?
- R. 0,50.

3°—Volúmen de los cuerpos

El volúmen del cubo es igual al producto de la superficie de su base por la altura, ó sea el cubo de uno de sus lados.

El volúmen del paralelepípedo es igual al producto de la superficie de su base por la altura, ó sea el producto de las tres dimensiones.

El volúmen del prisma es igual al producto de la superficie de la base por la altura.

El volúmen de la pirámide es igual al producto de su base por la tercera parte de la altura perpendicular ó sea á la tercera parte del producto de la superficie de su base por la altura.

El volúmen de la pirámide tronca es igual al producto de la suma de las dos bases paralelas y una tercera base proporcional entre las dos primeras por la tercera parte de la altura perpendicular del tronco.

El volúmen del cilindro es igual al producto del círculo de su base por la altura.

El volúmen del cono es igual al producto de la superficie de su base por la tercera parte de la altura perpendicular.

El volúmen del cono tronco se determina como el de la pirámide tronca; así llamando H la altura del tronco R , el rádio de la base mayor, y r el rádio de la base inferior, cuyas superficies son respectivamente espresadas por $R^2 \times 22 \div 7$, y $r^2 \times 22 \div 7$.

La superficie proporcional entre las dos, es $\sqrt[2]{(R^2 \times 25 \div 7) \times (r^2 \times 22 \div 7)}$ ó sea $\sqrt[2]{\left(\frac{22}{7}\right)^2 \times R^2 \times r^2}$; es decir $\left(\frac{22}{7}\right) \times Rr$.

La espresion del volúmen del cono tronco es $\frac{1}{3} H \times (\frac{22}{7} Rr + \frac{22}{7} r^2 + \frac{22}{7} Rr)$ ó bien $\frac{1}{3} \frac{22}{7} H (R^2 + r^2 + Rr)$.

El volúmen de la esfera es igual á la tercera parte del producto de su superficie por el rádio ó sea la sexta parte del producto de la superficie por el diámetro; y en fin, siendo la superficie de la esfera igual al cuadrado del diámetro multiplicado por $22 \div 7$, su volúmen es tambien igual á la sexta parte del cubo del diámetro multiplicado por $22 \div 7$.

El volúmen del sector esférico es igual al producto de la superficie de la calota que le sirve de base por la tercera parte del rádio de la esfera á que pertenece.

El volúmen del segmento esférico á una sola base, es igual á la mitad del volúmen de un cilindro de misma base y misma altura, aumentada del volúmen de una esfera de un diámetro igual á la altura del segmento.

El volúmen del segmento esférico comprendido entre dos bases paralelas es igual á la mitad del producto de la suma de sus bases paralelas por la altura, aumentada del volúmen de una esfera de un diámetro igual á la altura del segmento.

El volúmen de un tonel ó barrica es igual á la capacidad de un cilindro del mismo largo, teniendo

por base un círculo de un diámetro igual á las dos terceras partes del diámetro tomado á igual distancia de los extremos y á la tercera parte de uno de los diámetros de los fondos.

Se obtiene el volúmen de pequeños objetos que no tienen formas geométricas regulares, poniendo dichos objetos en un vaso de forma cilíndrica ó prismática, cuyo volúmen sea fácil á calcular, despues de haber llenado el vaso de agua hasta cubrir los objetos, se retiran estos teniendo cuenta del movimiento del agua, cuyo volúmen observado antes y despues de retirar los objetos, da una diferencia que espresa el volúmen de los cuerpos sumerjidos.

Problemas sobre el volúmen de los cuerpos

(1) ¿Cuál es el volúmen de un cajon de 2 metros de largo 1m 50 de ancho y 0m 80 de alto?

R. 2 metros cúbicos 400 d.cos.

(2) ¿Cuántos hectólitros de agua cabrán en un algabe de 4 metros de largo, 3 metros de ancho, y 4m 50 de alto?

R. 54 metros ó sean $54 \times 10 = 540$ hectólitros.

(3) ¿Cuál es el volúmen del cuerpo de una persona que habiéndose metido en una bañadera de forma de un paralelepípedo de un metro cuadrado de base se ha observado que al momento de la inmersión el agua ha subido de 0m 055 milímetros?

R. 0m 055 decímetros cúbicos ó 55 milésimos de metro cúbico.

(4) ¿Qué costará un monton de trigo de forma cónica de 15 metros de circunferencia y 2m 50 de alto a 9 ps. 50 el hectólitro?

R. 1416 ps. 90125.

(5) ¿Qué cantidad de agua cabrá en un cilindro de 1m 50 de diámetro y 1 metro de alto?

R. 1 m. 767 d.cos 757 c.cos ó sean 17 hectólitros 67 litros 857.

(6) ¿Cuál es el volúmen de una esfera de un metro de diámetro y cuál es el lado de un cubo de igual volúmen?

R. 0m. 8061.

(7) ¿Cuál es el rádio de una esfera cuyo volúmen es igual á un metro cúbico?

R. 0m. 620.

(8) Un propietario no teniendo medidas legales para medir el trigo que ha cosechado, se ha servido de un cajon de 0m. 90 de largo, 0m. 45 de ancho y 0m. 40 de alto, el cual ha llenado 1456 veces ¿cuántos hectólitros de trigo hay en todo?

R. 157 metros 248 c. sean 1572 hectólitros 48 litros.

(9) ¿Cuántos metros cúbicos de materiales precisará para la construcción de una pared de 12 metros de largo, 0m. 80 de ancho y 8 metros de alto?

R. 76 metros cúbicos 800 decímetros cúbicos.

(10) ¿Qué profundidad se dará á un algebe de forma cilíndrica de 3m.50 de diámetro para que pueda contener 50 metros cúbicos de agua?

R. 5 metros 1948.

(11) ¿Qué cantidad de agua cabrá en una tina que tiene la forma de un cono tronco cuya altura perpendicular es de 0m. 85, siendo el diámetro superior de 1m.95 y el de la base inferior 1m.25?

R. 1 mco. 849 decos. 041 centímetros cúbicos 550 ó sean 18 hectl. 49 lit^r y 04155.

(12) ¿Cuál es el volúmen del territorio de la República del Paraguay cuya superficie es de 230,000 kilómetros cuadrados, suponiendo que la circunferencia de la tierra es exactamente igual á 40 millones de metros?

R. 4878787878787878 m.cos ó sean 487878 miriámetros cúbicos 787878 hectómetros cúbicos 787878 metros cúbicos.

§ IV — AGRIMENSURA

1° — Definiciones

La *agrimensura* es la parte de la geometría que trata exclusivamente de la mensura de los terrenos, cuyo origen, aunque atribuido á los Egipcios, se pierde en los tiempos mas remotos, y creemos que aquel arte era ya conocido mucho antes por los Hebreos; lo que hicieron aquellos, fué sin duda perfeccionarlo en la parte relativa á la reduccion de los planos topográficos por medio de las escalas de proporcion para conocer los límites de sus propiedades rurales, destruidas por las inundaciones periódicas del Nilo, ó cubiertas por el limo que dejaban las aguas.

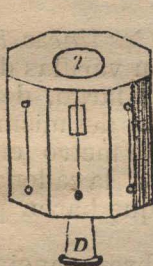
Los instrumentos indispensables para medir los terrenos y levantar los planos son :

La *escuadra de agrimensor* llamada octógono, que algunas veces tiene la forma cilíndrica, cuyo uso es de levantar perpendiculares á las líneas trazadas sobre el terreno; la *cadena de agrimensor* de 10 metros de largo llamada decámetro: las *fichas* y los *piquetes* ó *jalones*.

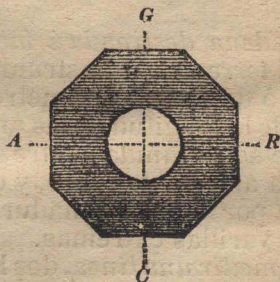
La *construccion del octógono* (fig. 62) consiste en una caja de bronce, forma de un prisma octogonal, que tiene ordinariamente un decímetro de largo; en cada una de las 8 partes laterales se halla una hendidura vertical muy fina llamada *pínula*; cuatro de estas son terminadas por una abertura

rectangular llamada ventana, que ocupa inversamente la parte superior en las dos pínulas opuestas, y es dividida en dos partes iguales por un hilo ó cerda colocada á continuacion de la hendidura formando con esta una línea recta.

Las pínulas intermediarias á estas cuatro son unas hendiduras finas que dividen en dos partes iguales los ángulos rectos formados por la interseccion de las primeras y son terminadas por una abertura circular; cuando la escuadra es cilíndrica se halla longitudinalmente dividida en ocho partes iguales por las pínulas. Debajo de la tapa inferior se tornilla un cañoncito D por medio del cual se coloca á la estremidad de un palo labrado que se clava en el suelo; cuando la operacion esta concluida se desarma la escuadra y se introduce el cañoncito adentro por medio de una abertura circular T practicada al efecto en la tapa superior lo que permite ponerla cómodamente en un estuche y llevarla en el bolsillo.



62



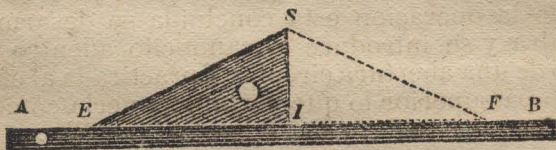
63

Antes de servirse de la escuadra es bueno averiguar si es exacta, despues de clavarla verticalmente en un terreno horizontal y despejado hágase colocar cuatro jalones A R G C (fig. 63) en las direcciones de los ángulos rectos dados por las cuatro pínulas opuestas; concluida aquella operacion hágase dar vuelta al instrumento, sin cambiarlo de lugar y sin alterar su posicion vertical, hasta que las pínulas que daban

la direccion de la línea A R den la de C G que las de C G de A R, y si en esta posicion se ven los cuatro jalones como en la primera, es prueba evidente de que la escuadra es exacta, y cuanto mas lejos se colocan los jalones tanto mas exacta es la verificacion.

Se verifica la escuadra de madera E S I (fig. 64) con que se levantan las perpendiculares sobre el papel para la construccion del plano del modo siguiente:

Arrímese la escuadra á una buena regla A B, y tírese la línea I S, y sin mover la regla dése vuelta la escuadra de modo que la punta E se halle en F y vuélvase á tirar del mismo punto I la línea I S, y si esta coincide bien con la primera la escuadra es exacta.



64

La cadena destinada á medir las líneas trazadas sobre el terreno es construida con varillas de fierro de dos ó de cuatro decímetros de largo, deduccion hecha de la longitud de las argollas del mismo metal con que son reunidas entre sí; de metro en metro hay una argolla de cobre, y en fin, la cadena es terminada por dos empuñaduras que hacen parte de las dos varillas extremas.

Para medir una línea, dos hombres manejan la cadena: el que vá atrás arrima la empuñadura al punto de partida; el que vá adelante lleva todas las fichas que ordinariamente son 10, y cuando la cadena está bien tendida señala la longitud en el suelo clavando una ficha y sigue adelante; cuando el que viene atrás encuentra la ficha le arrima la punta de la cadena y colocada la siguiente ficha por el que vá adelante recoge aquella, y así sucesivamente, y como es natural, llega un momento en que todas las fichas han cambiado de mano y mientras el de adelante vuelve sobre sus pasos para proveerse otra vez de ellas, el de

atrás tiene una ficha distinta de las demas que nunca debe entregar al otro y la clava en el suelo en lugar de la última que acaba de arrancar para entregarla; en esta circunstancia el agrimensor apunta 100 m.

Se ha de cuidar de que la cadena siga siempre una línea recta y horizontal, que sea bien tendida y que ninguna de las argollas quede enredada.

Las fichas son unas varillas de hierro de 4 ó 5 decímetros de largo afiladas por una punta para clavarlas en el suelo y dobladas de la otra en forma de argolla.

Sea propuesto medir sobre el terreno una línea curva A I C L S (fig. 65).



65

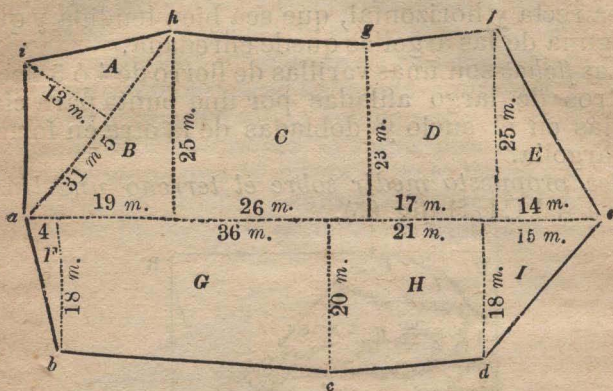
Empezando en el punto C tírese la cadena en la direccion CB y CD; determinando los puntos S y A con un plomo, ó mas sencillamente, cuando la cadena es bien tendida, arrímasele á la punta una ficha que se deja caer libremente del punto B y vá á clavarse en S. Si al contrario seguimos la direccion del terreno CS, la cadena llegará solamente al punto L produciendo así un error igual á LS.

Si algunas veces la pendiente del terreno no permite tender toda la cadena en una posicion horizontal mídase con la mitad ó con menos, si es necesario.

Los *piquetes* ó *jalones* son unos bastones de palo de 1 ó 2 metros de largo terminados por una punta de fierro, llevando en la otra una tablilla de madera ó de metal; úsase á veces unos palos afilados por una punta para clavarlos en el suelo y hendidos á la otra para recibir un pedazo de papel.

Ahora que conocemos los instrumentos necesarios pasemos á la práctica.

Sea propuesto determinar la superficie de un polígono irregular a b c d e f g h i (fig. 66).



66

Triángulo	A = $31,5 \times 13 : 2 =$ m. c. 204,75
Id	B = $19 \times 25 : 2 =$ 237,50
Trapezio	C = $25 \times 23 : 2 =$ 624,00
Id	D = $23 \times 25 : 2 =$ 408,00
Triángulo	E = $25 \times 14 : 2 =$ 175,00
Id	F = $4 \times 18 : 2 =$ 36,00
Trapezio	G = $18 \times 20 : 2 =$ 684,00
Id	H = $20 \times 21 : 2 =$ 399,00
Triángulo	I = $15 \times 18 : 2 =$ 135,00

Suma 2903,25

Empiézase por reconocer la figura del terreno pasando al rededor de él, clavando un jalon en cada uno de sus ángulos, tomando luego los dos ángulos opuestos mas distantes a e, trácese con jalones la directriz ó diagonal que servirá de base de operacion y levántese sobre ella, con la escuadra, perpendiculares hácia todos los ángulos, midiéndolas al mismo tiempo con la cadena así como las distancias entre

sus piés para trasladarlas luego al papel y formar el plano con una escala arbitraria para que todas las líneas sean exactamente reducidas.

El plano que representa nuestra lámina es reducido con escala de 1 milésimo, es decir, que 1 milímetro sobre el papel representa un metro sobre el terreno y recíprocamente, cuya superficie se obtiene calculando separadamente la de los triángulos y trapecios formados por las perpendiculares y sumando los resultados, se halla 2903 m. cd. 25 ó sean 29 áreas 03 centiáreas 25.

2°—Escala de proporcion

Levantar el plano de un campo es trazar sobre el papel la figura exacta del terreno con todos sus pormenores, conservando la igualdad de los ángulos y la proporcionalidad de los lados.

Siendo imposible representar sobre una hoja de papel la figura de un campo, de un prado, de un bosque ó de una quinta en sus verdaderas dimensiones, es preciso disminuir todas las líneas en la misma proporcion, conservando la direccion de los lados, es decir, la igualdad de los ángulos. Así es que en pintura y sobre todo en fotografía se hace una semejanza perfecta de la naturaleza.

Es de suma importancia, antes de empezar el dibujo de un plano, de buscar la proporcion en que se ha de representar el objeto propuesto, y por consiguiente la escala que debe servir de base á todas las operaciones.

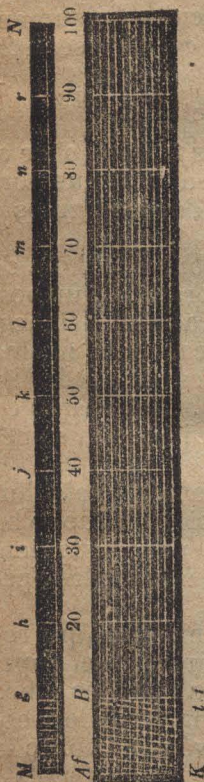
Llámanse escala de proporcion á una línea que representa la longitud que debe ocupar sobre el papel una línea de cierto número de metros tomados sobre el terreno, lo que permite apreciar la verdadera extension de una línea del plano llevándola sobre la escala.

El plano puede estar en cualquier proporcion con el terreno ó el objeto que representa; y de ahí se concibe un número indefinido de escalas.

Sin embargo, las escalas decimales construidas á

1 decímetro, á 1 centímetro y á 1 milímetro, etc., son mucho mas cómodas en la práctica que las que son construidas en cualquier otra proporcion arbitraria.

La escala muy adoptada en las mensuras de poca estension es de 1 milímetro por un metro, y es tanto mas cómoda que se halla en el comercio decímetros de madera y de metal muy bien grabados.



Así, por ejemplo; una línea de 125 metros medida sobre el terreno ocupa sobre el papel $125 \div 1000 = 0 \text{ m. } 125$ milímetros.— El plano cadastral francés es de 1 á 5000; así un milímetro representa 5 metros cuya proporcion varía en el plano general segun la estension de las secciones; porque cuando el territorio excede de 1200 hectáreas, la proporcion es de 1 á 10000 y de 1 á 20000, si pasa de 3000 hectáreas. Siendo todos los planos parcelarios construidos con escala de 1 á 1500 ó sean 4 milímetros por 10 metros.

En los planos de carpinteria y albañileria tómake generalmente un centímetro y algunas veces hasta un decímetro por 1 metro.

Se comprenderá ahora que la eleccion de la escala depende únicamente del objeto que se ha de representar, y que á mayor sea la extension menor ha de ser la escala como se vé en los mapas jeográficos.

Para construir una escala de proporcion (fig. 67) tírese una línea indefinida MN y llévase sobre esta 10 veces la abertura del compás que debe representar 1 metro sobre el terreno, y la línea Mg que contiene las 10 partes iguales re-

presenta entónces 10 metros ó un decámetro, llévase Mg, de g á h , de h á i , de i á j , de j á k , etc. hasta N porque generalmente la escala se compone de 10 partes iguales de modo que toda entera representa 10 decámetros ó 100 m.

Para proceder con mas precision úsase una escala que permite apreciar los décimos de la unidad, llamada por esta razon escala de *dímas* ó décimos.

Construir una escala decimal (fig. 68) A B H K es á voluntad un cuadrado ó un rectángulo; divídase A B en 10 partes iguales así como K H; de la primera division de A B, tírese una oblicua f K, y de la segunda division de A B á la primera de K H, tírese otra oblicua paralela á la primera, así sucesivamente hasta B t.

Tomando ahora una abertura de compás igual á A B, se puede con esta misma abertura recorrer las dos líneas paralelas á A K y B H, pero si en lugar de seguir la direccion de B H, se sigue B t, es claro que á cada una de las líneas horizontales que se baje, hay que apretar un poco el compás hasta llegar al punto t que dista 1 metro del punto H; pues entónces cada una de las 10 divisiones desde B hasta t, difiere de la precedente de un decímetro.

3°—Mensura de las distancias inaccesibles

Sea propuesto de medir la distancia entre dos puntos A y B (fig. 69) situados uno de cada lado de un río.

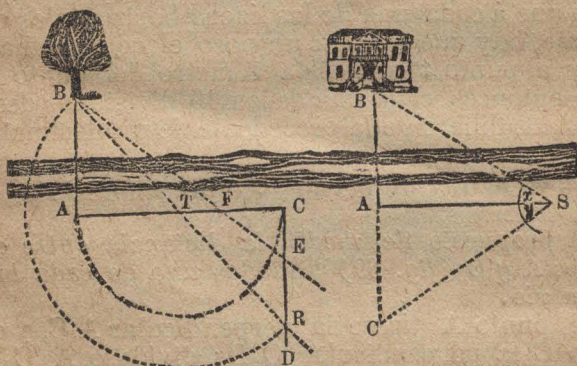
Del punto A tírese la perpendicular A C, y del punto C la perpendicular C D; divídase A C en dos partes iguales con un jalon T; tómese en la línea C D un punto R que sea en línea recta con el jalon T y el punto inaccesible B; mídase C R que es igual á A B.

En efecto, los dos triángulos A B T y T C R, son iguales por tener dos lados iguales A T y T C comprendidos entre dos ángulos iguales; y por consi-

guiente, tomando el triángulo $T C R$ y haciéndolo girar sobre el eje T hasta que el punto C llegue en A , el punto R cae en B por estar iguales los ángulos en T como opuestos por el vértice; siendo rectos los ángulos A y C , queda demostrado que $C R = A B$.

Si no se puede prolongar $C D$ hasta el punto R , y que un obstáculo detenga, por ejemplo, en el punto E , clávese un jalon F en la interseccion de $E B$ con $A C$ y se tiene la proporcion $F C : C E :: F A : A B$; puesto que los ángulos A y C son rectos, $A F B$ y $E F C$ iguales como opuestos por el vértice; pues entónces los lados homólogos de los triángulos son proporcionales.

Sea propuesto de medir la línea $A B$ (fig. 70)—Tírese la perpendicular $A S$ y hágase en el punto S dos ángulos iguales x é y ; el lado $S C$ corta la prolongacion de $A B$ en el punto C y por consiguiente $A C$ es igual á $A B$.



69

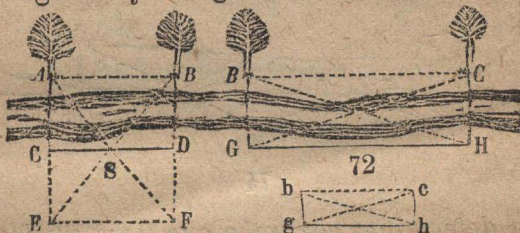
70

En efecto, siendo el lado $A S$ comun á los dos triángulos, se puede considerar como el eje de una visagra, y haciendo girar al rededor de él el triángulo $A S C$, el lado $S C$ toma la direccion de $S B$, puesto que los ángulos x é y son iguales; siendo rectos los ángulos formados en A por la perpendicular $A S$, el lado $A C$ toma la direccion de

A B, y el punto C ha de caer necesariamente en B; pues entonces $CA = AB$.

Si los dos puntos son inaccesibles como $A B$ (fig. 71) por hallarse ambos del otro lado de un río y que el terreno sea despejado, tírese una línea indefinida y sobre ella las perpendiculares $C A$ y $D B$ hacia los dos puntos propuestos A y B ; divídase $C D$ en dos partes iguales con un jalon S y sobre la prolongacion $A C$ clávese otro jalon E que sea en línea recta con $S B$, y sobre la prolongacion de $B D$ el jalon F que sea en línea recta con $S A$, y se tiene $E F = A B$.

En efecto, siendo $CA = DE$ y $CE = BD$ como se ha demostrado (fig. 69) AE y BF son iguales, y como perpendiculares á CD son también paralelas; pues entonces AB y EF que unen las estremidades de dos paralelas iguales forman un paralelógramo y son iguales.



71

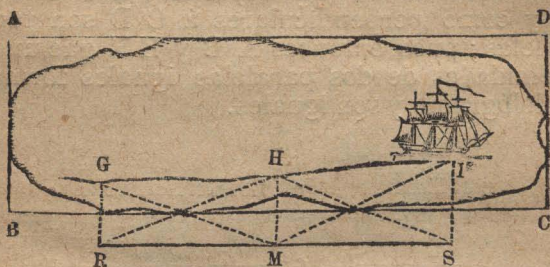
73

Si despues de tirada la línea G. H (fig. 72) no se pueden prolongar las paralelas B G y C H, tírese del punto G la línea G C que divide el ángulo recto G en dos partes B G C y C G H; hágase lo mismo en el ángulo recto H y con una escala arbitraria tómese g h sobre el papel (fig. 73) y divídase el ángulo recto g en dos partes iguales á las de G y el ángulo recto h en dos partes iguales á las de H y por los puntos de division tírese g c y h b que corten las perpendiculares en los puntos b y c; tírese b c y médase con la misma escala y se tiene el resultado que se busca.

En este último caso, no es necesario que los ángulos en G y en H sean rectos, ni tampoco iguales; así las líneas G B y H C son á voluntad perpendiculares ú oblicuas á G H, hasta que los ángulos sean fielmente trasladados al papel.

La proporcion de las líneas del plano que representa nuestra lámina, como se puede ver, es de 1 á 2.

La superficie de una laguna (fig. 74) es igual á la superficie del cuadrilátero A B C D menos las superficies de las pequeñas fracciones del terreno que se hallan entre el agua y los lados del cuadrilátero.



74

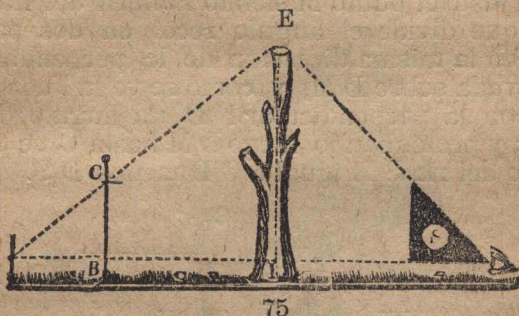
Para determinar el rumbo que lleva un buque y á qué distancia se halla por mas lijero que camine, tírese una línea arbitraria R S (fig. 74) despues de haberla dividido en 2 partes iguales y trazado las perpendiculares en R M S, colócase un individuo al pié de cada una de ellas.

Cuando el 1º que se halla en R da la señal de que el buque está en la perpendicular R G, el 2º apunta el ángulo G M R; el primero y el tercero á una señal del segundo, cuando el buque corta la perpendicular M H, apuntan los ángulos H R M y H S M, el segundo á la señal del tercero apunta el ángulo I M S.

Concluida así la operacion, trázanse con una escala arbitraria los ángulos iguales que han de dar el resultado.

Para medir la altura de un árbol $E I$ (fig. 75) clávese un baston en A y otro en B y se tiene la proporcion $AB : BC :: AI : IE$.

O mas bien clávese á la punta de un baston una escuadra de dibujar S , cuyos lados del ángulo recto sean iguales, de modo que forme exactamente un triángulo isóceles.



Fijese un punto I en el árbol y retírese hasta un punto en que uno de los lados del ángulo recto dispuesto en direccion horizontal indique el punto I y la hipotenusa la punta E del árbol; la distancia medida desde el punto así determinado hasta el pié del árbol es igual á la altura IE á cuyo resultado se agrega la altura comprendida desde I hasta el suelo.

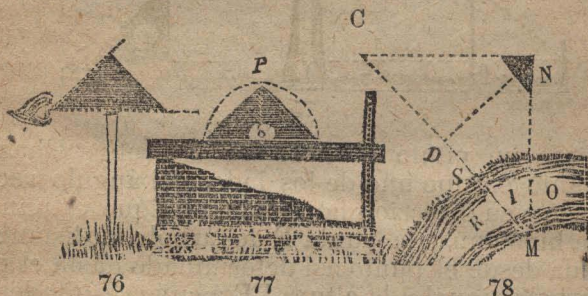
El resultado es el mismo dando á la hipotenusa la direccion horizontal en lugar de la oblicua (fig. 76).

El instrumento así modificado puede tambien servir de nivel agregándole solo un plomillo suspendido con un hilo del ángulo recto P (fig. 77) y el instrumento será de nivel cuando la direccion del hilo se confunda con la perpendicular que ba-

jada del ángulo recto sobre la hipotenusa divide esta en dos partes iguales.

Si en lugar de clavar la escuadra del modo indicado (fig. 76) se clava por encima de la punta del baston en direccion horizontal en lugar de vertical se tiene un instrumento muy sencillo para medir las distancias inaccesibles.

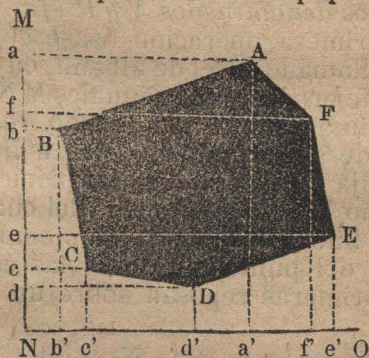
Si se trata de determinar el ancho de un rio SM (fig. 78) pásese la escuadra desde D hácia N hasta encontrar un punto en que un lado de la escuadra indique justo el punto M siendo la línea del instrumento que divide el ángulo recto en dos partes iguales en la misma direccion de la perpendicular ND elevada sobre DM , y como se ve la línea NM forma con la perpendicular ND un ángulo de 45 grados; y prolongando luego DM hasta C se tiene el ancho del rio SM igual á CD menos DS .



A defecto de la escuadra, tómesese una hoja de papel cuidadosamente doblada en cuatro, vuélvase á doblar de modo que los dos lados del ángulo recto caigan el uno sobre el otro, formando así un ángulo de 45 grados, el cual se puede usar en lugar de la escuadra.

Sea propuesto de levantar el plano de un polígono inaccesible $ABCDEF$ (fig. 79) por medio de las coordenadas de sus vértices reducidas á dos ejes rectangulares

Sean MN y NO los dos ejes perpendiculares entre sí, tírese sobre NM las perpendiculares a A , f F , e , E , c C , y d D , siendo el polígono inaccesible nos basta medir las distancias que separan los pies de las perpendiculares es decir, a f , f b , b e , e c , c d . Hágase la misma operacion sobre NO , tirando las perpendiculares c' C , d' D , a' A , f' F y e' E , medidas las distancias b' c' , c' d' , d' a' , a' f' y f' e' no hay mas que reducir las cantidades á la escala de proporcion y trazar el plano sobre el papel. Las inter-



79

secciones de las perpendiculares aa' , bb' , ff' , ee' , cc' , dd' , en A , B , C , D , E , F , determinan las proyecciones de todos los vértices del polígono.

§ V—NIVELACION

1º — Definiciones

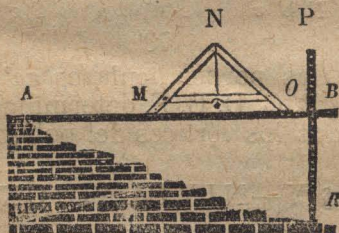
Aunque las desigualdades de la superficie terrestre sean muy cortas en comparación de la gran masa del globo, es necesario saber en muchísimas ocasiones, de cuanto un punto es mas elevado ó mas alto que otro, y la operacion geométrica por la cual se averigua se llama nivelacion. Los instrumentos usados en esta son varios, segun las distancias que separan los puntos á nivelar.

Llámanse *línea de nivel*, *superficie de nivel*, una línea ó una superficie paralela al horizonte, á la superficie de las aguas en calma; así, el líquido contenido en un vaso cualquiera, aunque este se incline, la superficie de aquel queda siempre horizontal.

La direccion de un hilo sosteniendo un plomo suspendido libremente ó la vertical, es perpendicular á aquella superficie.

Sea propuesto de hallar la diferencia de la altura de dos puntos denominados *A* y *R* (fig. 80).

En esta primera operacion úsase el nivel á perpendículas llamado nivel de albañil, cuya construccion consiste en dos reglas iguales *M N* y *N O*, formando ordinariamente un ángulo recto, porque generalmente sirve tambien de escuadra, una tercera regla fija la direccion de las primeras y forma el travesaño *M O*, por en medio del cual pasa atravesado un hilo sosteniendo un plomo libremente suspendido del punto *N*, cuando las estremidades de las dos primeras reposan sobre un plano horizontal.



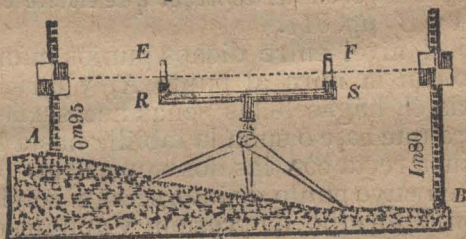
80

Procédase á la operacion poniendo el nivel sobre la regla *A B* y hágase subir ó bajar la estremidad *B* hasta que el hilo indique que la direccion de la regla es horizontal, hecho esto léase el número de divisiones que se hallan en la regla *P R* desde el suelo hasta su punto de interseccion con la regla *A B* y nótese.

Para evitar todo error en caso de que el instrumento no sea bien construido, repítase la operacion cambiando punta por punta la regla A B con el nivel ; si este segundo resultado difiere del primero, súmense los dos y la mitad de la suma es el verdadero.

Así, suponiendo que el primer resultado sea 1 metro 354 y el segundo 1 metro 356, la suma es 2 metros 710, cuya mitad, 1 metro 355, indica que el punto A es mas elevado que el punto R de 1 metro 205 milímetros.

Cuando las distancias á nivelar esceden 15 á 20 metros, úsase de preferencia el nivel de agua que permite tomar la diferencia de altura entre dos puntos distantes de 50 á 80 metros uno de otro, y de hallar aquella diferencia entre dos puntos aun mas distantes por medio de cierto número de puntos intermediarios como se practica en la construccion de los caminos y de los canales de irrigacion, etc. Llámase estacion de nivel la operacion que se hace entre cada uno de los puntos.



81

El nivel de agua (fig. 81) fórmase de un tubo R S de hoja de lata ó de cobre recurvado en las puntas á ángulo recto sobre la direccion del tubo en cuyas extremidades se adaptan dos tubos cilíndricos de vidrio E F, siendo estos tanto que posible de igual diámetro.

Sólidamente fijado el nivel sobre el pié que lo sostiene, llenase el tubo de agua hasta la tercera parte

de los tubos de vidrio, y cuando el líquido es en calma, las dos superficies que forma en los vidrios son en una misma línea horizontal.

La construccion de este nivel es fundada sobre el siguiente principio hidrostático: «Si en un tubo de «brazos comunicantes se hecha un líquido cualquier, «ra, subirá en ambos brazos á una misma altura. »

La regla que acompaña al nivel de agua, es ordinariamente de dos metros de largo dividida en decímetros y centímetros, provista de una tablilla cuadrada de madera ó de metal dividida en cuatro cuadritos iguales, pintados dos de blanco y dos de negro siendo del mismo color los que se hallan entre los ángulos opuestos por el vértice. La tablilla corre de una punta á otra de la regla, pudiéndose fijar en cualquier punto de ella, por medio de un tornillo de presion que se halla detrás del brazalet por dentro del cual corre la regla. La figura 81 representa un modelo de la regla con tablilla que comunmente se llama *mira*.

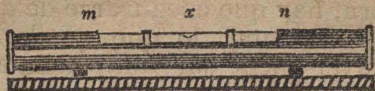
Sea propuesto de determinar con este último instrumento, la diferencia de nivel que existe entre dos puntos A y B (fig. 81).

Puesto el nivel entre dichos puntos mándese un individuo con la mira al punto A, y dirigiendo el nivel hácia él, hágasele las señas necesarias con la mano para que baje ó suba la tablilla hasta hallarse esta en línea recta con las dos superficies del agua del nivel en cuyo punto de interseccion con la regla, se fija con el tornillo de presion, y apúntese el número de la regla; trasladando luego la mira al punto B sin mover el nivel, hágase una operación análoga á la del punto A y la diferencia de los dos resultados es la diferencia de altura que se busca.

Supóngase haber tenido 0m95 al punto A y 1m80 al punto B, cuya diferencia de nivel es $1m80 - 0m95 = 0m85$.

Usase el nivel de aire (fig. 82) cuando las distancias á nivelar esceden de 60 á 80 metros, ó que la opera-

cion requiere mucha precision, este instrumento consiste en un tubo de vidrio un poco recurvado,

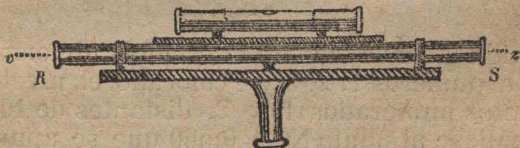


82

lleno ordinariamente de espíritu de vino dejando un vacío donde se introduce una gorgorita de aire x ; ajústase el tubo en un cilindro de cobre que descansa sobre una regla y deja ver el vidrio por la parte superior convexa $m n$.

El principio hidrostático en que está fundada su construccion es este: «Si dos fluidos ó dos líquidos, «ó un fluido y un líquido incapaces de mezclarse «están en una misma vasija, aquel que á igual volúmen tenga menos peso, ocupará la parte superior.» Siendo el espíritu de vino mas denso que el aire, este se irá entónces en la parte mas alta, y si aplicando el instrumento sobre un plano y dándole vuelta conserva siempre el medio del tubo es señal de que el plano es horizontal. Este es el nivel que usan generalmente los carpinteros para colocar las mesas de billar y otros muebles.

Usase el nivel de aire con anteojo R S (fig. 83) para la nivelacion entre puntos muy distantes como en los ferro-carriles, canales de navegacion, etc.



83

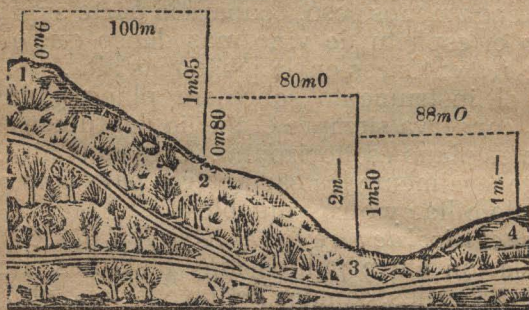
En el centro del anteojo crúzanse rectangularmente dos hilos ó cerdas, siendo la línea $v z$ que pasa por el centro ocular y la interseccion de los hilos bien paralela con el nivel. El instrumento así cons-

truido descansa sobre un plano que puede dar vuelta sobre el eje que le sirve de pié.

A cada estacion, antes de dirigir el nivel de aire hácia la mira, hay que asegurarse de que sea perfectamente horizontal, lo que queda confirmado cuando el nivel puede dar una vuelta entera sobre su eje sin que la burbuja de aire se mueva del centro.

Cuando los puntos á nivelar son muy distantes ó que la mira no alcanza por estar el terreno muy inclinado, divídese la línea en varias secciones que se nivelan separadamente, como se ha dicho, haciendo una estacion de nivel en cada una y sumando los resultados.

Sea propuesto de hallar la diferencia de nivel que existe entre dos puntos A y B (fig. 84).



84

Partida la línea en tres secciones determinada por los números 1, 2, 3 y 4 colocado el nivel entre los puntos numerados 1 y 2, distantes de 100 metros, hállese al punto N° 1 0m60 que se apunta en el registro á la tercera columna y en la línea del piquete N° 1, y volviendo hácia el piquete N° 2, hállese en este 1m95 que tambien se apunta en la misma columna en la línea del piquete N° 2, llevando la diferencia 1m35 á la cuarta columna.

Con operaciones análogas se sigue nivelando las demas secciones, apuntando los resultados en el registro, cuyo resultado final da 268 m. de distancia entre los puntos A B y 2 metros 05 de diferencia del nivel, es decir, $(2,05 \times 100) \div 268 = 0m\ 764$ por cien aproximativamente.

Registro de nivelacion

NUMEROS de los piquetes	DISTANCIAS entre los piquetes	NUMEROS de la mira anotados	DIFERENCIA		Observaciones
			en mas	en menos	
1º	100 m.	0.00			
		0.60			
		—	1 m. 35	—	
2º	80 m.	1.95			
		0.80			
		—	1 m. 20	—	
3º	88 m.	2 m.			
		1.50			
		—	—	0 m. 50	
4º		1 m.			
SUMAS.	268 m.	—	2 m. 55	0 m. 50	

Resultado 2m55 — 0m 50 = 2m05

La nivelacion es muy importante para desaguar los terrenos pantanosos y dirigir las aguas corrientes en el sentido mas conveniente á nuestros intereses.

Es generalmente admitido que las aguas corren fácilmente sobre una pendiente de un centímetro por metro.

1ª. APLICACION—Sea propuesto de agotar una laguna por medio de un desagadero, siendo la distancia de la laguna á la salida de la propiedad de 500 metros; ¿cuál ha de ser, á lo ménos, la diferencia de

nivel entre el fondo de la laguna y el punto de salida de la propiedad?

R. A 1 centímetro por metro son 500 cen. ó 5 metros

2^a. APLICACION—A 284 metros de la salida de una propiedad, hay aguas estagnantes cuyo fondo tiene con el punto de salida una diferencia de nivel 1 m39; ¿podrán dichas aguas agotarse por una zanja?

R. No, puesto que precisaria una diferencia de nivel de 2m84 para tener un centímetro por metro.

En los planos de nivelacion úsanse generalmente dos escalas, una para las distancias y otra para las alturas del nivel para que los accidentes del terreno sean mas sensibles á la vista.

Así en nuestra lámina (fig. 84) las distancias son representadas con escala de un milímetro por 4 metros, siendo la de las alturas de 1 decímetro por 1 metro.

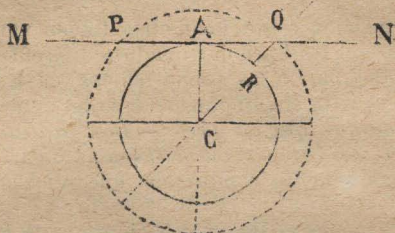
Se ha de observar que es muy importante en la práctica de colocar el nivel tanto que sea posible á igual distancia de los dos puntos á nivelar cuando esta es muy considerable.

En efecto, si por un punto cualquiera A (fig. 85) de la superficie de la tierra, se concibe una línea tangente M N, se dice que los puntos P Q de esta línea igualmente distantes del punto de contacto son en el nivel verdadero porque se puede concebir que por ellos pasa una superficie semejante á la de la tierra; pues entónces dos puntos están en el nivel verdadero siempre que como A R estén á igual distancia del centro de la tierra y estarán en el nivel aparente, si como A y Q ó como A y N, ó como A y M distan desigualmente de dicho centro.

Uniendo el centro C con un punto cualquiera Q de la tangente en A, el punto Q es en el nivel aparente con el punto A, y el punto R en el verdadero; la parte Q R interceptada entre los dos puntos es la diferencia entre el nivel aparente y el verdadero.

En una distancia de 50 metros considérase como nula la diferencia del nivel aparente al verdadero,

puesto que comparada á la gran masa del globo, se puede considerar como línea recta aunque realmente sea una parte de la circunferencia de la tierra.



85

Cuando la operacion requiere mucha precision, se reduce siempre el nivel aparente al verdadero cuya fórmula se halla del modo siguiente:

Considerando que $RQ = CQ - CR$ (fig. 85) y como en el supuesto de ser la tierra esférica, el ángulo A

es recto y $QR = \sqrt{(CA^2 + AQ^2)} - CR$; representando la diferencia por D , la distancia por d y el

rádio de la tierra por R, se tiene; $D = \sqrt{(R^2 + d^2)} - R$.

Para tener la diferencia del nivel aparente al verdadero, súmese el cuadrado del radio de la tierra con el cuadrado de la distancia, y de la raíz cuadrada de esta suma, réstese el mismo radio de la tierra.



SUPLEMENTO

1º—Definiciones

Las proposiciones de geometría tienen varios grados de evidencia, lo que les hace dar nombres diferentes.

Llámanse *axiomas* á las proposiciones cuya verdad parece evidente al espíritu sin ningún esfuerzo del entendimiento. Así: *El todo es mayor que su parte*:—*Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí* son axiomas, puesto que el espíritu mas sencillo comprende que dichas proposiciones son exactas.

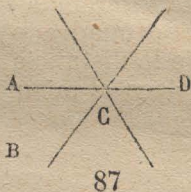
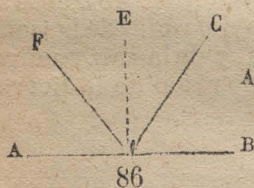
Llámanse *teoremas* á las proposiciones cuya evidencia no se manifiesta á primera vista. Así la proposición: *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales*, es un teorema que se hace evidente por medio de *razonamientos* cuyo conjunto se llama *demonstración*.

De una demostración resultan á veces varias consecuencias llamadas *corolarios*.

Si la proposición es una cuestión á resolver, llámase *problema* y el resultado *solución*.

2º—Ángulos

I TEOREMA.—*Cuando una línea recta C I encuentra otra recta A B forma dos ángulos llamados adyacentes cuya suma es igual á dos ángulos rectos* (fig. 86).



En efecto, elevando la perpendicular I E, los dos ángulos A I C y C I B ocupan el mismo espacio que los dos ángulos rectos A I E, E I B, y por consiguiente, valen dos ángulos rectos.

Los dos ángulos A I C, C I B son suplementos uno de otro, porque uno de ellos es exactamente lo que falta al otro para ser igual á dos ángulos rectos, es decir, á 180 grados.

I COROLARIO.—*Todos los ángulos formados en un mismo*

punto y del mismo lado de una línea recta valen dos ángulos rectos. Así los ángulos CIB , EIC , FIE , FIA (fig. 86) ocupan el mismo espacio que los ángulos rectos AIE , EIB .

II COROLARIO—*Todos los ángulos que se pueden formar al rededor de un punto valen cuatro ángulos rectos.*

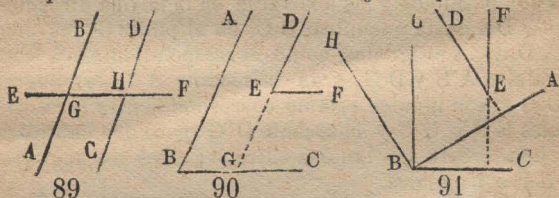
En efecto, se acaba de ver que todos los ángulos formados al rededor de un punto C y del mismo lado de una línea recta AB (fig. 87) valen dos ángulos rectos, sucede lo mismo de los ángulos formados del otro lado de la línea; pues entónces todos los ángulos formados al rededor de un punto valen cuatro ángulos rectos.

II TEOREMA—*Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

En efecto, sean los ángulos CEB , AED (fig. 88) opuestos por vértices, si á cada uno de ellos se agrega BED los dos ángulos adyacentes CEB y BED valen juntos dos ángulos rectos; pero dos cantidades que agregadas á una tercera dan la misma suma son iguales entre sí; y por la misma razon los ángulos AEC y BED son tambien iguales.

3º—Ángulos y paralelas

I TEOREMA—*Cuando dos paralelas AB y CD (fig. 89) son cortadas por una secante EF , los ángulos que se hallan de*



un mismo lado de esta, y cuyas aberturas tienen la misma direccion, son iguales.

En efecto, los ángulos BGH y DHF que tienen por uno de sus lados la secante EF y por el otro las paralelas BG , DH tienen necesariamente la misma abertura, y son, por consiguiente, iguales; sucede lo mismo de los demás ángulos formados por las paralelas y cuyas aberturas tienen la misma direccion.

Hé aquí los ocho ángulos BGH , DHF , DHG , BGE , AGH , CHF , AGE , CHG : llamados ángulos correspondientes.

Se ha dicho que el ángulo BGH es igual á DHF ; pero

D H F es igual, como opuesto por el vértice, al ángulo G H C ; pues entónces $B G H = G H C$; por la misma razon los ángulos A G H y G H D son iguales. Llámense aquellos cuatro ángulos *alternos-internos* ; *alternos* porque son situados en los lados de la secante, é *internos* porque son en el interior de las paralelas.

Las ángulos B G H y D H F son iguales, pero B G H es igual á su opuesto por el vértice E G A : pues $D H F = E G A$. Aquellos cuatro ángulos son los llamados *alternos externos* : *alternos* por estar situados de los dos lados de la secante, y *externos* por estar al exterior de las paralelas.

Así cuando dos paralelas son cortadas por una secante los ocho ángulos correspondientes son iguales cuatro á cuatro ; los cuatro ángulos alternos-internos, son iguales dos á dos, así como los cuatro ángulos alternos-externos.

RECÍPROCAMENTE : Si dos líneas rectas cortadas por una tercera tienen los ángulos correspondientes iguales, los ángulos alternos internos iguales así como los ángulos externos, se deduce que las dos líneas son paralelas.

I COROLARIO — Si dos ángulos tienen sus lados paralelos y las aberturas dirigidas en la misma direccion, aquellos ángulos son iguales.

En efecto, supóngase los ángulos A B C, D E F (fig. 90) cuyos lados son paralelos y las aberturas en la misma direccion : prolonguese DE hasta encontrar B C, en el punto G, los ángulos A B C, D G C son iguales como correspondientes, á causa de las paralelas A B y D G, y de la secante B C ; los ángulos D E F, D G C son iguales como correspondientes á causa de las paralelas E F y G C y la secante D G ; pero dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre si ; pues los ángulos A B C y D E F son iguales.

II TEOREMA — Dos ángulos A B C y D E F (fig. 91) que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales (ó suplementarios).

En efecto por el vértice B tirese B H paralela á E D, y B G paralela á E F ; los dos ángulos H B G y D E F son iguales ó suplementarios por tener sus lados respectivamente paralelos, pues A B siendo perpendicular á D E lo es tambien á su paralela B H, así mismo B C perpendicular á E F lo es tambien á la paralela B G. Si de los dos ángulos A B H y C B G iguales como rectos se resta la parte comun A B G los restos H B G y A B C son iguales.

Pues entónces A B C y D E F son iguales (ó suplementarios).

4º Angulos, círculo, y circunferencia

I TEOREMA—*La perpendicular elevada del medio de una cuerda pasa siempre por el centro del círculo y divide en dos partes iguales el arco sostenido por la cuerda.*

En efecto, siendo CO perpendicular sobre el medio de AB (fig. 92), cada uno de sus puntos es á igual distancia de las extremidades A y B ; además AO y OB son dos distancias iguales, puesto que son dos radios; de donde resulta que la perpendicular elevada en el medio de una cuerda pasa por el centro del círculo.

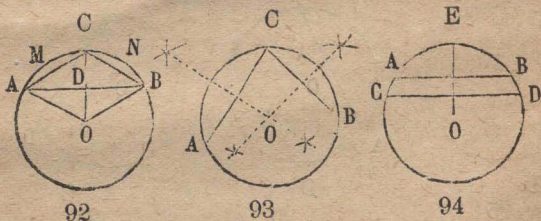
Si el punto C pertenece á la perpendicular OC hallase este entónces á igual distancia de los puntos A y B , y $AC = CB$ siendo AC y CB cuerdas iguales, los arcos sostenidos AMC y CNB son tambien iguales.

I COROLARIO—*Dividir un ángulo y un arco en dos partes iguales* (Véase la fig. 17 pag. 9).

II COROLARIO—*Hacer pasar una circunferencia por tres puntos dados no en línea recta.*

Sean ABC los tres puntos; tírese las líneas rectas AC y BC (fig. 93) que pueden considerarse como dos cuerdas, y elevando una perpendicular en el medio de cada una de ellas, estas perpendiculares debiendo pasar por el centro se encuentran en dicho punto. En efecto debiendo hallarse el centro en cada una de las perpendiculares, no puede hallarse mas que en su interseccion.

III COROLARIO—*En virtud del mismo teorema hallar el centro de un círculo.*



Sea el círculo (fig. 93) del que se busca el centro tómense los tres puntos ABC en la circunferencia repítase la operacion anterior.

IV COROLARIO—*Dos cuerdas paralelas interceptan sobre la circunferencia arcos iguales.*

En efecto, bajando la perpendicular OE sobre CD (fig. 94)

es al mismo tiempo perpendicular á AB y divide los arcos CE , DE en dos partes iguales por el punto E . Si de los dos arcos CA , DE , que son iguales, se resta los arcos iguales AE , BE , los restos CA y DB quedan necesariamente iguales.

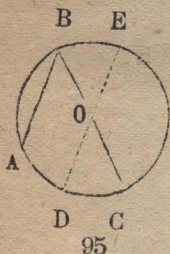
II TEOREMA—*Todo ángulo inscrito es la mitad del ángulo al centro que corresponde al mismo arco.*

1º *El centro O (fig. 95) puede hallarse en uno de los lados BC del ángulo.*

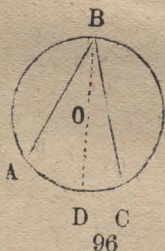
Tírese el diámetro DE paralelo á AB ; el ángulo DOC es igual al ángulo ABC como correspondiente; pues el ángulo al centro DOC tiene por medida el arco DC ; el ángulo ABC tiene entonces la misma medida. Pero los ángulos DOC y BOE son iguales como opuesto por el vértice, el arco DC es igual al arco BE ; siendo paralelas las líneas rectas AB y DE los arcos interceptados AD y BE son iguales. De donde resulta que los dos arcos DC y AD siendo iguales á BE son iguales entre sí y por consiguiente DC es la mitad de AC . Pues ABC tiene por medida la mitad de AC .

2º *El centro O (fig. 96) puede hallarse en el centro del ángulo inscrito ABC .*

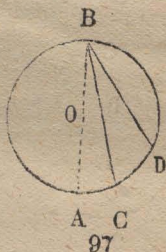
Tírese el diámetro BD , el ángulo ABD tiene por medida la mitad de AD en virtud de lo que se ha demostrado, así mismo el ángulo DBC tiene por medida la mitad de DC . Pues la suma de aquellos dos ángulos es decir, el ángulo ABC tiene por medida la mitad de AD mas la mitad de DC , es decir, la mitad de AC .



95



96



97

3º *El centro O (fig. 97) puede hallarse situado fuera del ángulo inscrito BCD .*

Tírese el diámetro BA , el ángulo ABD tiene por medida la mitad de AD y el ángulo BCD la mitad de AD menos la mitad de AC ; ó bien la mitad de $(AD - AC)$ es decir, la mitad de CD .

Pues en todos los casos el ángulo inscrito tiene por medida la mitad del ángulo comprendido entre sus lados.

I COROLARIO—*Todo ángulo inscrito cuyos lados se terminan á las extremidades del diámetro es un ángulo recto.*

5° — Triángulos

TEOREMA — *La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos ó sea á 180 grados.*

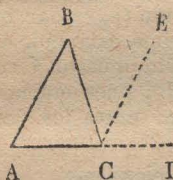
Sea el triángulo $A B C$ (fig. 98). Prolónguese el lado $A C$ y por el vértice C tírese $C E$ paralela á $A B$. Los ángulos $A B C$ y $B C E$ son iguales como alternos internos; los ángulos $B A C$ y $E C D$ lo son como correspondientes. La suma de los tres ángulos del triángulo es entonces igual á la suma de los tres ángulos $B C A$, $B C E$, $E C D$ formados en el punto C de un mismo lado de $A D$. Pero aquella última suma equivale á dos ángulos rectos; pues entonces la suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.

I COROLARIO—*Siendo dados dos ángulos de un triángulo se obtiene el tercero.*

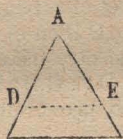
En efecto, haciendo la suma de los dos ángulos dados, el suplemento de aquella suma es el ángulo buscado.

II COROLARIO—*Un triángulo no puede tener mas de un ángulo recto ni mas de un ángulo obtuso, porque en los dos casos la suma de los tres ángulos es más de 180 grados.*

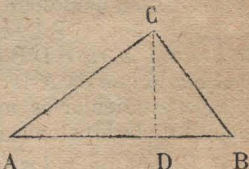
III COROLARIO—*Llámanse ángulo exterior á un triángulo, un ángulo tal que $D C B$ (fig. 98) formado por un lado $B C$ y por la prolongacion $C D$ de uno de los otros lados. Todo ángulo exterior á un triángulo equivale á la suma de los otros dos interiores opuestos.*



98



99



100

En efecto, siendo $B C D$ la suma de los ángulos $E C D$ y $B C E$, equivale á la suma de los ángulos A y B .

II TEOREMA—*Dos triángulos equiángulos son semejantes.*

Se demuestra que la línea $D E$ (fig. 99) paralela á la base del triángulo $B A C$, divide sus dos lados en partes proporcionales de modo que se tiene $A D : A B :: A E : A C$.

Pero los ángulos ADE , ABC son iguales por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, y sucede lo mismo con los ángulos AED , ACB ; los triángulos ADE , ABC son entonces equiángulos; y teniendo sus lados homólogos proporcionales son semejantes,

Cuando los dos ángulos de un triángulo son iguales á los dos ángulos de otro triángulo, el tercer ángulo del uno es también igual al tercero del otro; de donde se infiere que dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos iguales cada uno á cada uno.

III TEOREMA — *Si del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC (fig. 100) se baja una perpendicular CD sobre la hipotenusa AB . 1° Los dos triángulos ADC y CDB son semejantes al triángulo primitivo ABC . 2° Los dos triángulos ADC y CDB son semejantes entre sí. 3° La perpendicular CD es medio proporcional entre los segmentos AD y BD , y la hipotenusa AB . 4° Cada lado del ángulo recto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.*

1° Los dos triángulos ADC y ABC son semejantes; en efecto, el ángulo A es común, y además cada triángulo tiene un ángulo recto: pues entonces son semejantes y por consiguiente el ángulo ACD es igual al ángulo CBD .

Sucede lo mismo en los triángulos CDB y ACB , de donde resulta que el ángulo BCD es igual al ángulo CAD .

2° Siendo los dos triángulos ACD y CDB semejantes al triángulo ABC son semejantes entre sí.

3° Comparando los lados de los triángulos semejantes ACD y CBD , se tiene: AD , lado opuesto al ángulo ACD y CBD , es á CD , su homólogo en el otro triángulo (por estar opuesto al ángulo igual BCD) como CD en el primer triángulo opuesto al ángulo A es á DB en el otro triángulo opuesto á su igual DCB ; lo que da $AD : CD :: CD : DB$; pues entonces CD ó la perpendicular es medio proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa.

4° Comparando los lados de los triángulos semejantes ACD y ACB se tiene AD , opuesto al ángulo ACD , es á CA en el otro triángulo opuesto, á su igual CBD , como AC hipotenusa del primer triángulo, es á AB hipotenusa del segundo, lo que da $AD : CA :: CA : AB$.

En los dos triángulos CDB y ACB se tiene $DB : CB :: CB : AB$; pues cada lado del ángulo recto es medio proporcional entre el segmento que le es adyacente y la hipotenusa entera.

I COROLARIO—*Haciendo en las proporciones $AD : CA :: CA : AB$, y $DB : CB :: CB : AB$, el producto de los extremos igual al de los medios, se tiene $CA \times CA$, ó $CA^2 = AD \times AB$, y $CB \times CB$, ó $CB^2 = DB \times AB$; sumando estos dos resultados se tiene $CA^2 + CB^2 = (AD + DB) \times AB$. Pero $AD \times DB$ es AB ; pues entonces $CA^2 + CB^2 = AB \times AB$ ó AB^2 ; es decir que el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados del ángulo recto; como se ha demostrado (§ II título 2, pág. 12).*

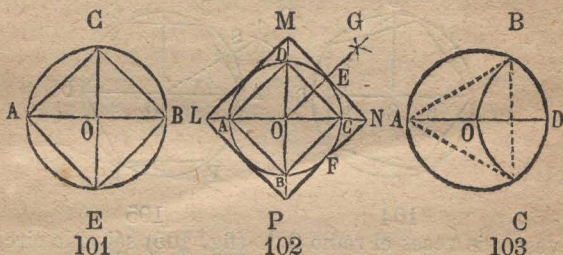
6°—Polígonos regulares inscritos y circunscritos en el círculo

Llámanse *polígono regular inscrito* á un polígono regular que tiene todos los vértices de sus ángulos en la circunferencia.

Polígonos regulares circunscritos son aquellos cuyos lados son tangentes á la circunferencia.

Vamos á indicar los métodos gráficos para inscribir y circunscribir los polígonos mas sencillos en un círculo.

I PROBLEMA—*Inscribir un cuadrado en un círculo.*



Tírese el diámetro AB (fig. 101). De los puntos A y B con una misma abertura del compás arbitraria describase dos arcos en C , uniendo su interseccion con el centro O y prolongando CO hasta encontrar la circunferencia en E ; se tiene los cuatro puntos A, C, B, E que son los vértices de los cuatro ángulos del cuadrado $ACBE$.

II PROBLEMA—*Siendo dado el cuadrado inscrito $ABCD$ (fig. 102) sea propuesto de circunscribir otro cuadrado.*

De los puntos D y C con el mismo radio tomado á voluntad, describase dos arcos cuya interseccion G unida con el centro O , determina el punto E , donde el lado MN del cuadrado circunscrito debe tocar la circunferencia; del mismo modo se obtiene los puntos de tangencia de los demas lados y no hay mas que

llevar las perpendiculares á los rádios por dichos puntos que son las extremidades.

La misma construccion se aplica   un polígono de un número cualquiera de lados.

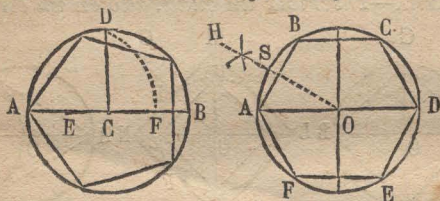
III PROBLEMA—*Inscribir en un  rculo un triángulo equilátero.*

Tírese el diámetro A D (fig. 103). Del punto D, como centro y con una abertura de compás igual al rádio describese un arco que corte la circunferencia en B y en C; tirando A B, B C y A C, se tiene el triángulo equilátero inscrito.

IV PROBLEMA — *Inscribir en un  rculo en un pentágono regular*

Sobre el diámetro A B (fig. 104) elévese al centro C el rádio perpendicular C D, divídase C A en dos partes iguales lo que da el punto E, del punto E como centro y con un rádio igual   E D describese el arco D F; la distancia D F que es la cuerda del arco D F, es el lado del pentágono regular, que se lleva cinco veces en la circunferencia.

V PROBLEMA—*Inscribir un exágono regular en un  rculo.*



104

105

Lávese seis veces el rádio O A (fig. 105) sobre la circunferencia de A en B, y de B en C, etc., etc., y no hay mas que tirar las líneas B C, A B, F A, etc., etc.,

Describiendo de los puntos A y B dos arcos que se corten en H y tirando H O, se tiene el punto S, medio del arco A S B y las cuerdas A S y S B son los lados de un polígono de doce lados   *dodec gono*.

En general, dividiendo en dos partes iguales el arco que corresponde al lado de un polígono inscrito, la cuerda de uno de los nuevos arcos es el lado de un polígono regular de un número de lados doble.

COROLARIO—*De lo que precede se deduce:*

1  Que conociendo los lados del cuadrado (fig. 101) se conocen por la biseccion del arco los lados de los polígonos   8,   16,   32,   64, etc., etc., lados.

Conociendo los lados de los polígonos regulares á tres lados se conocen por la biseccion aquellos de los polígonos regulares á 6 á 12, á 24, á 48, etc., etc., lados.

Conociendo los lados de los polígonos regulares de cinco lados, se hallan del mismo modo los lados de los polígonos regulares á 10, á 20, á 40, á 80, etc., etc., lados.

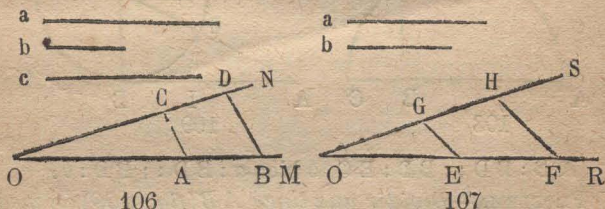
2º Que sabiendo circunscribir un polígono regular á todo polígono regular inscrito se conocen igualmente los polígonos circunscritos á 8, á 16, á 32, etc., lados, á 6, á 12, á 24, etc., lados, á 10, á 20, á 40, etc., lados.

Considerase el círculo como un intermedio entre un polígono regular inscrito y un polígono semejante circunscrito de un número indefinido de lados. En efecto considerando un polígono regular de 3072 lados inscritos y otro semejante de 3072 circunscrito, aquellos dos polígonos se aproximarán tanto, que el círculo puede sin inconveniente asimilarse á uno de ellos. Si aquella conclusion no es de un rigor matemático, tiene al menos el gran mérito de estar al alcance de todas las inteligencias.

7º—Líneas proporcionales

I PROBLEMA—Hallar una cuarta línea proporcional á tres líneas dadas a b c , de modo que representada aquella línea por x , se tenga la proporcion $a : b :: c : x$.

Al efecto tírese dos líneas indefinidas OM y ON bajo un ángulo cualquiera (fig. 106).



Sobre OM tómese dos líneas $OA = a$, y $AB = b$. Sobre ON tómese $OC = c$, despues de reunidos los puntos A y C por la línea AC tírese BD paralela á CA y la línea CD será la cuarta proporcional que se busca, puesto que las paralelas AC y BD cortan proporcionalmente los lados del ángulo BOD y se tiene.

$OA : AB :: OC : CD$ ó bien $a : b :: c : CD$.

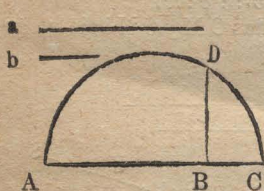
II PROBLEMA—Hallar una tercera línea proporcional á dos líneas dadas a y b , es decir que siendo dicha línea representada por x , se tenga la proporcion $a : b :: b : x$.

Este problema no difiere del precedente sino en que c es igual á b . Tirese dos líneas rectas OR y OS (fig. 107) haciendo un ángulo cualquiera y tómese $GE = a$, $EF = b$, $OG = b$: tirese GE y HF paralela á GE , la línea GH es la tercera proporcional pedida, puesto que á causa de las paralelas GE y HF se tiene la proporción $OE : FE :: OG : GH$ pero siendo EF igual á OG se tiene:

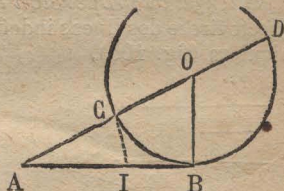
$$OE : EF :: EF : GH \text{ ó bien } a : b :: b : GH.$$

III PROBLEMA—Hallar una línea media proporcional entre dos líneas a y b , es decir que sea tal que representada por x se tenga la proporción $a : x :: x : b$.

Tómese sobre una línea recta indefinida una distancia $AB = a$ (fig. 108) y á continuación otra $BC = b$. Sobre BC como diámetro describese una circunferencia. Del punto B sobre AC elévese la perpendicular BD que termina á la circunferencia y es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro como lo hemos ya demostrado (Teor. III, pág. 56) ó lo que es lo mismo que la perpendicular bajada del ángulo recto de un triángulo rectángulo es medio proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa y por consiguiente tenemos la proporción :



108



109

$$AB : BD :: BD : BC, \text{ ó bien } a : BD :: BD : b.$$

IV PROBLEMA—Dividir una línea AB (fig. 109) en media y extrema razón. Por esta proporción se entiende determinar sobre AB un punto I dividiendo aquella línea en dos partes tales que la mayor AI sea media proporcional entre la menor parte IB y la línea entera AB .

Elévese del punto B una perpendicular BO igual á la mitad de AB . Del punto O como centro y con un radio OB describese una circunferencia y por los puntos A y O tirese una línea que corte la circunferencia en los puntos C y D . Del punto A como centro y con un radio AC describese el arco CI que corte AB en I que es el punto de división pedido.

En efecto, obsérvese primero que, siendo el radio OB la mitad de AB , el diámetro CD es igual á AB , y luego siendo la línea AB perpendicular á la extremidad del radio, es tangente á la circunferencia de donde se tiene:

$$AD : AB :: AB : AC \quad (1)$$

$$\text{y luego } AD-AB : AB :: AB-AC : AC \quad (2)$$

pero $AD-AB$ es igual á $AD-CD$, es decir á AC ó á su igual AI . De otra parte $AB-AC$ es igual á $AB-AI$ ó á IB , y en fin el último término AC puede sostituirse por AI y la proporción (2) se puede entónces escribir:

$$AI : AB :: IB : AI.$$

ó bien poniendo los medios en lugar de los extremos y los extremos en lugar de los medios se tiene

$$AB : AI :: AI : IB$$

lo que se trataba de demostrar.

V PROBLEMA.—Hallar la superficie de un triángulo cuyos lados tienen 25, 30 y 35 metros de largo.

Sean los lados $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (fig. 110); bajando del vértice A la perpendicular AD sobre el lado opuesto BC se tiene:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 BC \times BD ;$$

$$\text{pues } BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \text{ cuyo valor da}$$

$$AB^2 - BD \text{ ó } AD^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2$$

$$= \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$\text{pues } AD = \frac{\sqrt{[4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]}}{2a}$$

Sea S la área del triángulo y se tiene

$$S = \frac{1}{2} BC \times AD ; \text{ pues,}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{[4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]}.$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}.$$

Esta fórmula puede todavía reducirse á otra mas cómoda para el cálculo logarítmico; basta observar que la cantidad $4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$ es el producto de los factores.

$$2ac + (a^2 + c^2 - b^2) \text{ y } 2ac - (a^2 + c^2 - b^2);$$

$$\text{el } 1^{\text{o}} = (a+c)^2 - b^2 = (a+c+b)(a+c-b);$$

$$\text{el } 2^{\text{o}} = b^2 - (a-c)^2 = (b+a-c)(b-a+c);$$

y se tiene:

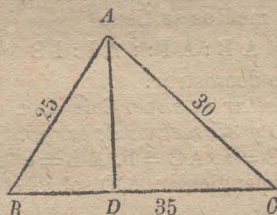
$$S = \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)](b+c-a)}.$$

y en fin si se hace $\frac{a+b+c}{2} = p$, lo que nos da

$$a+b+c = 2p, \quad a+b-c = 2p-2c,$$

$$a+c-b = 2p-2b, \quad b+c-a = 2p-2a,$$

se tiene mas fácilmente



110

$$S = \sqrt{(p \cdot p - a \cdot p - b \cdot p - c)}.$$

De donde se deduce que para tener la superficie de un triángulo cuando se conocen los tres lados, hay que tomar la mitad de la suma de los tres lados y restar sucesivamente de esta media suma cada uno de los tres lados, lo que da tres restos, y la raíz cuadrada del producto de los tres restos, multiplicado por la media suma espresa le superficie del triángulo.

Aplicando este principio al problema propuesto se tiene:

$$(25+30+35) \div 2 = 45$$

$$45 - 25 = 20$$

$$45 - 30 = 15$$

$$45 - 35 = 10$$

$$\text{superficie} = \sqrt{45 \times 20 \times 15 \times 10}$$

$$= \sqrt{135600} = 36\text{m. cd. } 74234$$

y la altura del triángulo será

$$(367,4234 \times 2) \div 35 = 20^{\text{m}} 9956 \frac{8}{35}$$

Empleando los logaritmos y representando la superficie por X se tiene.

$$\log X = \frac{\log. 45 + 1. 20 + 1. 15 + 1. 10}{2}$$

$$\log. 45 = 1,65321$$

$$\log. 20 = 1,30103$$

$$\log. 15 = 1,17609$$

$$\log. 10 = 1,00000$$

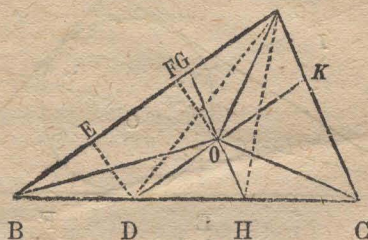
$$2\log. X = 5,13033$$

$$\log. X = 2,56516$$

$$X = 36,74240$$

lo que da una diferencia de 0,0006 centímetros cuadrados de superficie y $0^m 00001\frac{1}{2}$ de altura.

VI PROBLEMA—Hallar un punto en un triángulo tal que las líneas tiradas de dicho punto á los ángulos dividan el triángulo en tres partes iguales.



111

Sea ABC (fig. 111) el triángulo propuesto.

Dividiendo la base BC en tres partes iguales se tiene los tres triángulos iguales BAD, DAH y HAC por tener todos igual base y misma altura.

Tirando DK paralela á AB y HG paralela á CA y uniendo el punto de intersección O con los tres ángulos ABC, se tienen los tres triángulos iguales BOA, AOC y COB.

En efecto los triángulos BAO y BAD son iguales por tener la misma base BA comun, y las alturas FO y ED iguales por ser ambas perpendiculares á BA, y comprendidas entre las paralelas BA y DK. Se demostraria del mismo modo que los triángulos CAO y CAH son iguales.

Pues si el triángulo BAO es igual al triángulo BAD, y CAO

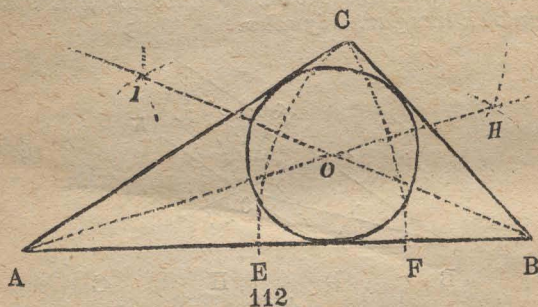
igual á CAH, la parte sobrante BOC ha de ser igual al triángulo DAH como queda demostrado y de donde sacamos la regla siguiente :

REGLA—*Para determinar en un triángulo un punto tal que las líneas tiradas de dicho punto hácia los ángulos dividan el triángulo en tres partes iguales basta dividir en tres partes iguales uno de los lados del triángulo y el punto de interseccion de las paralelas tiradas de los puntos de division á los lados mas próximos del triángulo es el punto que se busca.*

Si la division del triángulo fuese pedida en proporciones dadas se partiria uno de sus lados en dichas proporciones y se ejecutaria la misma operacion.

Círculo inscrito en un triángulo

Detérminese el centro de la circunferencia (fig. 112) por la interseccion de las líneas que dividen los ángulos en dos partes iguales. Estas líneas toman el nombre de *bisectrices*.



Sea el triángulo ACB del punto A como centro y con una abertura de compás igual á AC, tírese el arco CF, de las estremidades de este es decir de los puntos C y F, tírese dos arcos del mismo radio, que se cortan en H, tírese AH que divide el ángulo A en dos partes iguales.

Divídase del mismo modo el ángulo B, y el punto de interseccion O de las líneas AH y BI es el centro de la circunferencia ; pues se comprende fácilmente que, debiéndose hallar el centro á igual distancia de los lados del ángulo, se halla necesariamente sobre la línea que lo divide en dos partes iguales y por consiguiente en la interseccion de las bisectrices.

ÍNDICE

§ I — PRELIMINARES

Título 1º — Definiciones.....	4
» 2º — Líneas.....	4
» 3º — Líneas relativas á las circunferencias.....	6
» 4º — Angulos.....	7
» 5º — Perpendiculares.....	10
» 6º — Division de las líneas.....	11

§ II — SUPERFICIES

Título 1º — Triángulos.....	12
» 2º — Triángulo rectángulo.....	12
» 3º — Construccion de los triángulos.....	14
» 4º — Cuadriláteros.....	15
» 5º — Construccion de los cuadriláteros.....	16
» 6º — Superficies curvas.....	17
» 7º — Construccion de las figuras curvas.....	18
» 8º — Mensuras de las superficies.....	18

§ III — CUERPOS GEOMÉTRICOS

Título 1º — Definiciones.....	21
» 2º — Superficie exterior de los cuerpos.....	24
» 3º — Volúmen de los cuerpos.....	25

§ IV — AGRIMENSURA

Título 1º — Definiciones y aplicaciones.....	28
» 2º — Escala de proporcion.....	33
» 3º — Mensura de las distancias inaccesibles con aplicaciones..	35

§ V — NIVELACION

Título 1º — Definiciones y aplicaciones.....	41
» 2º — Registro de nivelacion.....	47

SUPLEMENTO

Título 1º — Definiciones.....	50
» 2º — Angulos.....	50
» 3º — Angulos y paralelas.....	51
» 4º — Angulos, círculos y circunferencias.....	53
» 5º — Triángulos.....	54
» 6º — Poligonos regulares inscritos y circunscritos.....	57
» 7º — Líneas proporcionales. (Aplicaciones).....	59

