TRATADO PRÁCTICO
DE
MATEMÁTICAS PARA INGENIEROS

W. N. ROSE

SEGUNDA EDICIÓN

EDITORIAL LABOR, S. A.

TRATADO PRÁCTICO DE

MATEMÁTICAS PARA INGENIEROS

para el uso
de ingenieros, arquitectos, peritos, ayudantes
y de los alumnos de las respectivas carreras

SEGUNDA PARTE

NOTA BIBLIOGRÁFICA

Primera edición : 1922
Traducción de la tercera edición inglesa

Segunda edición : 1936
Traducción de la cuarta edición inglesa

TRATADO PRÁCTICO
DE
MATEMÁTICAS PARA INGENIEROS

para el uso de ingenieros, arquitectos, peritos y ayudantes y de los alumnos de las respectivas carreras

SEGUNDA PARTE

COMPRENDIENDO
EL CÁLCULO INFINITESIMAL Y SUS APLICACIONES, LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA Y LA TEORÍA DE ERRORES

POR

W. N. ROSE, B. Sc. Eng.

Profesor de Matemáticas en la Sección de Ingeniería de la Universidad de Londres (Goldsmith College)

TRADUCCIÓN DE LA 4.ª EDICIÓN INGLESA
Y REDUCIDA AL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

POR

JOSÉ M.ª PLANS FREYRE

Miembro de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y Catedrático de la Universidad de Madrid

Y

CÉSAR DE MADARIAGA

Ingeniero de Minas

Con 143 figuras y numerosos ejemplos resueltos

SEGUNDA EDICIÓN AUMENTADA

EDITORIAL LABOR, S. A.

BARCELONA - MADRID - BUENOS AIRES - RIO DE JANEIRO

1936

Talleres Gráficos Ibero-Americanos, S. A. : Provenza, 86, BARCELONA

PREFACIO

Expuesto el plan de este tomo II por el autor, en lo que sigue, y hecha la presentación global de la obra en las atinadísimas palabras con que prologan su traducción los traductores del tomo I, poca cosa tenemos que añadir.

Hagamos constar, ante todo, que este segundo tomo, que se ofrece hoy al público de habla española, es complemento necesario del primero para todo el que quiera tener una base matemática sólida y suficiente para emprender el estudio de los problemas corrientes de la técnica. Desarrollado bajo la misma idea que el tomo primero, no se habrán de buscar en él acrobatismos de rigor ni disquisiciones abstractas, perfectamente inútiles para todo aquel que estudia la matemática como medio y no como fin. Las matemáticas, según la didáctica de Rose, entran en la mente del estudiante por vía intuitiva con preferencia a la lógica, y para ello se vale constantemente de ejemplos tomados de la técnica, prodigados a granel, y admirablemente elegidos para ilustrar cada teoría en particular. Con este método se logran a un tiempo dos fines a cual más importante: primero, interesar al estudiante hacia la matemática haciéndole contemplar el vasto panorama de sus aplicaciones y amenizándole su estudio; segundo, familiarizarle, desde un principio, con las fórmulas técnicas y los datos numéricos con que ha de luchar después. Los capítulos en los que más se pone de manifiesto el punto de vista del autor y, por consiguiente, los que mejor caracterizan la obra son, a nuestro modo de ver, los capítulos VII y X.

Creemos, como los traductores del primer tomo, que dicha obra tan útil bajo todos conceptos ha de prestar un admirable servicio a la enseñanza técnica de nuestro país y que ha de merecer una acogida tan favorable como la que ha obtenido entre los profesionales y Escuelas técnicas del Reino Unido.

Hemos procurado esmerarnos en la reducción al sistema métrico; mas como todos estamos expuestos a errores, agradeceremos toda indicación que se nos haga en este sentido. La mayor parte de los cálculos han sido hechos con la regla (cuyo uso constante recomendamos a los lectores), por lo cual la aproximación resulta entonces limitada.

La EDITORIAL LABOR, *como siempre esmerada y espléndida en la presentación.*

* * *

En esta segunda edición, adaptada a la última edición inglesa, se ha añadido al final un grupo de «Ejercicios varios», acompañados de sus soluciones.

LOS TRADUCTORES.

PRÓLOGO DEL AUTOR

En relación con la finalidad y el alcance de este trabajo no necesitamos añadir nada a la afirmación hecha en el Prefacio del primer tomo. Se afirma allí que las materias han sido seleccionadas y a través de los ejemplos aplicadas de tal modo a los problemas prácticos que los dos tomos «abarcan toda la labor matemática necesaria para la práctica del ingeniero y para los estudiantes de cualquier rama de la ciencia del ingeniero».

Del mismo modo que en el primer volumen se ha tenido sumo cuidado en la eliminación de todas las reglas y procedimientos de exclusivo interés académico; pero no se ha descuidado la importancia y necesidad del razonamiento lógico.

Con la excepción de los capítulos consagrados a la trigonometría esférica y cálculo de probabilidades, este volumen comprende el estudio del cálculo diferencial e integral. Como quiera que es muy importante y casi forzoso que para ser presentada esta materia en forma inteligible se dedique gran atención a la interpretación gráfica de las reglas, hay que tener sumo cuidado en asegurar que los métodos gráficos sean exclusivamente auxiliares. De acuerdo con esto, se ha tratado todo basándose sobre principios algebraicos; pero en toda ocasión en que han sido necesarias pruebas o construcciones gráficas para ampliar o explicar la materia, han sido utilizadas con la mayor extensión posible. Así, desde el comienzo se ha demostrado claramente la relación entre el incremento relativo de una cantidad y la pendiente de una curva; y esta correlación entre el método algebraico y el método gráfico se ha llevado a través de todos los grados del desarrollo de la materia tratada.

El concepto de «valores límites» mencionado brevemente en la primera parte, se trata ampliamente en el capítulo I, escogiendo un ejemplo familiar de la dinámica como ilustración: en este capítulo se dan también dos métodos de diferenciación gráfica, de los cuales el segundo y el menos familiar es el de aplicación más simple.

Las diversas reglas para la derivación de funciones algebraicas y trigonométricas son expuestas con detalle en el capítulo II; el capítulo III, que contiene las reglas para la derivación de una función de función, un producto de funciones, etc., junto con una introducción a la derivación parcial, puede ser considerado como un complemento del capítulo II.

Del razonamiento abstracto necesario para la comprensión de un concepto tal como el de «valores límites», el espíritu práctico vuelve con gusto a las aplicaciones de la derivación que se encuentran en el capítulo IV; la determinación de los valores máximos y mínimos tienen en este sentido un fuerte atractivo. Teniendo en cuenta la importancia de esta parte de la materia, se insertan una variada colección de ejemplos prácticos en los cuales el método de solución ha sido el factor principal para su selección. En este capítulo se expone también el empleo del teorema de Taylor en los casos de interpolación, partiendo de tablas como la de presiones de vapor.

Los capítulos V y VI contienen las reglas necesarias para la integración de las funciones que se presentan en la teoría y práctica del ingeniero. El primero sirve como una introducción del cálculo integral, explicando por medio de gráficos el significado de los símbolos $\int$ *y* **dx**, *mientras que en el último se exponen tipos varios de integrales, algunos de ellos de un carácter algo complicado. Con esta ocasión se introducen también las fórmulas de reducción y se hace mención de la función Gamma y sus aplicaciones.*

En el capítulo VII se encuentran ejemplos de aplicación de las reglas de integración y se trata especialmente de la determinación del perímetro de la elipse, el método gráfico para fijar la posición de la vertical del c. d. g., el trazado de las curvas de los momentos primero y segundo y la valuación del momento de inercia de un vibrador compuesto.

La utilidad de las coordenadas polares para el ingeniero electrotécnico se muestra con ejemplos de la potencia lumínica de lámparas y el empleo del diagrama de Rousseau para determinar la potencia lumínica esférica media. También se inserta en este capítulo el método gráfico del Dr. Fleming para la determinación de las medias cuadrá-

ticas en las corrientes, ya que ello requiere el empleo de las coordenadas polares.

Las ecuaciones diferenciales se presentan tan frecuentemente que los métodos de solución exigen un estudio cuidadoso. El capítulo IX presenta los tipos más comunes y la selección de ejemplos, planteados y resueltos, pone en evidencia la necesidad de una apreciación propia del método de solución.

El capítulo X, con su aplicación del cálculo a los problemas que se encuentran en el estudio de la termodinámica, resistencia de materiales, mecánica, electricidad e hidráulica aplicadas, suministra una prueba mayor de la necesidad de un conocimiento firme de la materia para el ingeniero que desea adquirir una buena base en los diversos aspectos de la técnica.

Los dos últimos capítulos contienen materias interesantes al topógrafo, escogiéndose problemas de los que más frecuentemente se presentan en la práctica. También se consagra una atención particular a la investigación referente a la corrección de errores de observación.

El autor lamenta grandemente el hecho de que el inspirador de esta obra y malogrado Mr. W. J. Lineham no haya visto su terminación. A su entusiasmo por sus ideales pedagógicos y a su gran amabilidad personal hacia el autor hemos de rendirle aquí un tributo. También agradecemos sinceramente a los señores J. L. Bale y C. B. Clapham, B. Sc., su valiosa ayuda.

Se ha tenido sumo cuidado en editar el libro exento de errores; pero como probablemente pueden existir aún algunos, estimaremos como un gran favor el que nos sean notificados.

EL AUTOR

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO V

Integración

CAPÍTULO VI

Nuevos procedimientos de integración

CAPÍTULO VII

Valores medios. Medias cuadráticas. Volúmenes. Longitudes de arcos. Areas de superficies de revolución. Centros de gravedad. Momentos de inercia.

CAPÍTULO VIII

Coordenadas polares

CAPÍTULO IX

Ecuaciones diferenciales simples

CAPÍTULO X

Aplicaciones del cálculo

CAPÍTULO XI

Análisis armónico

CAPÍTULO XII

Resolución de triángulos esféricos

CAPÍTULO XIII

Probabilidades matemáticas y teorema de los mínimos cuadrados

TABLAS MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS PARA INGENIEROS

PARTE II

INTRODUCCIÓN

Las materias que se tratan en este volumen presentan mayor dificultad que las correspondientes a la Parte I. Muchos de los procedimientos descritos aquí dependen de reglas expuestas y demostradas en el primer volumen; y por consiguiente es de recomendar que, antes de empezar la lectura de este tomo, se dedique especial atención a la Parte I, págs. 546-554, 559-563, 565-569 y 337-366, así como puede ser de gran utilidad el conocimiento de las formas de las curvas descritas en el capítulo IX.

Abreviaturas adoptadas:

$\rightarrow$	Significa	«tiende a»
$=$	»	«igual» o «igual a»
$+$	»	«más»
$-$	»	«menos»
$\times$	»	«multiplicado por»
$:$	»	«dividido por»
$\therefore$	»	«por consiguiente»
$\pm$	»	«más menos»
$>$	»	«mayor que»
$<$	»	«menor que»
$\odot$	»	«círculo»
$\odot$cia	»	«circunferencia»
$\propto$	»	«varía como»
∞	»	«infinito»
$\angle$	»	«ángulo»
$\triangle$	»	«triángulo» o «área del triángulo»
$\underline{4}$ ó $4!$	»	«factorial de cuatro», cuyo valor es el del producto $1 \times 2 \times 3 \times 4$, o sea 24
$^nP_2$	»	«el número de permutaciones de n objetos tomados de dos en dos»

${}^{n}C_2$	Significa	«el número de combinaciones de n objetos tomados de dos en dos»
n_3	»	«$n\ (n - 1)\ (n - 2)$»
η	»	«rendimiento»
α	»	«ángulos en grados»
θ	»	«ángulo en radianes»
H.P.I.	»	«potencia indicada en caballos»
H.P.E.	»	«potencia efectiva en caballos»
k.p.h.	»	«kilómetros por hora»
r.p.m.	»	«revoluciones por minuto»
r.p.s.	»	«revoluciones por segundo»
V.I.	»	«variable independiente»
F°	»	«grados Farenheit»
C°	»	«grados centígrados»
F.E.M.	»	«fuerza electromotriz»
I.	»	«momento de inercia»
E.	»	«módulo de elasticidad»
S_n	»	«suma de n términos»
S_∞	»	«suma de infinito número de términos»
Σ	»	«suma de»
τ	»	«temperatura absoluta»
μ	»	«coeficiente de rozamiento»
arc sen$x$	»	«arco cuyo seno es x»
e	»	«la base de los logaritmos neperianos»
g	»	«aceleración debida a la gravedad»
cms.	»	«centímetros»
grs.	»	«gramos»
$\underset{x \to a}{\mathrm{L}} y$	»	«límite al cual se acerca y, a medida que x se aproxima al valor a»
c.d.g.	»	«centro de gravedad»
c.d.p.	»	«centro de presión»
k	»	«radio de giro»
j ó i	»	«$\sqrt{-1}$»
$f'(x)$	»	«primera derivada de una función de x»
$f''(x)$	»	«segunda derivada de una función de x»
$\frac{dy}{dx}$	»	«la derivada o coeficiente diferencial de y respecto a x»
$\int y dx$	»	«la integral de y respecto a x como V.I.»
δ	»	«incremento o diferencia de»
D	»	«la operación $\frac{d}{dx}$»
ρ	»	«densidad»

CAPÍTULO I

Introducción al Cálculo Diferencial

El siglo XVII será siempre notable por el gran número de matemáticos que produjo y aún más por la importancia de las investigaciones que éstos llevaron a cabo. A principios del siglo Neper y Briggs introdujeron sus sistemas de logaritmos; Wallis y otros dirigieron sus investigaciones a la cuadratura de las curvas, lo cual lograron en algunos casos por medio de desarrollos en serie, aunque el teorema del binomio les era entonces desconocido.

En 1665 Newton, al investigar los métodos de cuadratura enunció lo que él llamaba un sistema de «fluxiones» o cantidades fluyentes: suponiendo que x e y fueran cantidades fluyentes, expresaba la velocidad con que éstas aumentaban por $\dot{x}$ e $\dot{y}$ respectivamente. Mediante el empleo de estos nuevos símbolos pudo determinar expresiones para las tangentes de las curvas e igualmente para sus radios de curvatura Al mismo tiempo Leibnitz de Leipzig trató el mismo problema y llegó prácticamente al mismo sistema a pesar de que él obtenía sus tangentes determinando «diferencias de números». A Leibnitz se debe la introducción del vocablo «diferencial» y de la notación diferencial, dx y dy para las diferenciales de x y de y; él escribió también por primera vez como expresión de la suma de un número de cantidades el símbolo $\int$ siendo su primera idea emplear la palabra «omnia» o abreviadamente «omn». Así al sumar un número de cantidades tales como x escribió primero «omnia x» que para abreviar redujo a «omn x», y que después modificó dándole la forma $\int x$.

Durante algún tiempo se originó una gran controversia respecto a la paternidad del «cálculo» que unos atribuían a Newton y otros a Leibnitz, designando con este término genérico una colección clasificada de reglas; hoy en día se admite generalmente que aquellos descubrimientos fueron independientes y que resultaron ser en realidad resumen y complemento natural de investigaciones y descubrimientos de muchas mentalidades.

El cálculo fué después desarrollado por Euler, Bernoulli, Legendre y otros muchos, pero hasta fechas muy recientes siguió siendo simplemente una «colección clasificada de reglas»; cuya verdadera importancia y vasto campo de aplicación permanecían aun ocultos.

Hoy en día, sin embargo, el conocimiento del cálculo se considera especialmente para el ingeniero como una parte esencialísima de su bagaje intelectual; las reglas han sido de tal modo modificadas que no constituyen ninguna seria carga para la memoria y la significación verdadera de los procedimientos ha sido presentada tan claramente, que el estudio del cálculo supone hoy muy pocas dificultades incluso para el ingeniero ultrapráctico.

Esta revolución de las ideas ha sido producida casi enteramente por el esfuerzo de hombres que, dando realidad a la amplia potencialidad del cálculo, han organizado la enseñanza de esta materia y han hecho de ella una cosa viviente.

El cálculo puede ser dividido en dos secciones: *Cálculo diferencial* y *Cálculo integral*. El Cálculo diferencial, como se puede deducir del nombre, es la parte que trata de las *diferencias* o más concretamente, de la comparación entre las diferencias de dos cantidades. Así el procedimiento de la diferenciación se reduce a un cálculo de incrementos; pero el modo como se calculan estos incrementos depende de la forma en que se presentan los problemas: si las cantidades dadas se representan por coordenadas de una curva el incremento relativo de la ordenada respecto de la abscisa, para un valor particular de ésta, viene medido por la pendiente de la curva en el punto considerado.

La derivación no es ni más ni menos que **la determinación de los incrementos relativos o de las pendientes de las curvas** (*)

El término «incremento relativo» no implica necesariamente un incremento con relación al tiempo, tal como las variaciones de la corriente eléctrica por segundo o bien la proporción de energía que se puede acumular por minuto; sino la variación de una cantidad comparada con la variación de otra cantidad.

Presentemos como aclaración el siguiente ejemplo:

La velocidad de un móvil ha sido medida a varias distancias de su punto de partida, obteniendo los resultados que se expresan a continuación:

s (distancia en metros)	0	5	12
v (velocidad en metros por segundo)..	10	14	15

(*) Traducimos por *incremento relativo* la expresión inglesa «rate of change» *(N. del T.)*

Se trata de hallar «el incremento relativo al espacio de la velocidad» para cada intervalo de espacio.

Considerando el desplazamiento hasta los 5 metros, el cambio en la velocidad correspondiente a este cambio de posición es de 14—10, o sea, 4 metros por segundo.

De aquí $$\frac{\text{cambio de velocidad}}{\text{cambio de posición}} = \frac{14 - 10}{5 - 0} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

o sea, el cambio de velocidad por cada metro de cambio de posición es de 0,8 metros por segundo y el incremento de la velocidad es de 0,8 por segundo y por metro.

Del mismo modo si s varía de 0 a 12 el cambio de $v = 15 - 10 = 5$ ó bien el incremento de la velocidad para este período $= \frac{5}{12}$ metros por segundo por metro.

Igualmente el incremento de v cuando s varía entre 5 y 12

$$= \frac{15 - 14}{12 - 5} = \frac{1}{7} \text{ metro por segundo y por metro.}$$

Los incrementos han sido por lo tanto hallados por comparación de diferencias. El concepto «diferencia de», se presenta frecuentemente en este estudio y para evitar su continuada repetición se adopta un símbolo que es la letra δ (delta), forma griega de la d, letra inicial de la palabra «diferencia»: esta letra debe ser pues considerada como una abreviatura y por consiguiente no puede realizarse sobre ella ninguna operación que no sea factible cuando en vez de δ se ponga la frase por entero. Dicho de otro modo, las reglas que se aplican a las cantidades algebraicas como las de multiplicación, división, adición o sustracción no pueden usarse correctamente sobre δ.

Así mv (expresión de la cantidad de movimiento) significa m multiplicada por v, o sea una masa multiplicada por una velocidad, mientras que δv representa «el incremento de v», o sea el incremento de la velocidad.

Igualmente δt es el incremento del tiempo o de la temperatura según los casos. Empleando esta notación, los resultados anteriores pueden ser escritos en la siguiente forma abreviada:

(1) Cuando s varía de 0 a 5 $\qquad \delta v = 14 - 10 = 4$

$\delta s = 5 - 0 = 5$

y $$\frac{\delta v}{\delta s} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

(2) Cuando s varía de 0 a 12 $\qquad \delta v = 15 - 10 = 5$

$\delta s = 12 - 0 = 12$

y $$\frac{\delta v}{\delta s} = \frac{5}{12} = 0{,}417$$

(3) Cuando s varía de 5 a 12 $\quad \delta v = 15 - 14 = 1$

$$\delta s = 12 - 5 = 7$$

y $$\frac{\delta v}{\delta s} = \frac{1}{7} = 0{,}143$$

Hacemos notar, insistiendo en lo que hemos dicho, que no se puede suprimir la letra δ del numerador y del denominador de la fracción $\dfrac{\delta v}{\delta s}$.

El resultado final (1), esto es $\dfrac{\delta v}{\delta s} = 0{,}8$ cuando s varía de 0 a 5 exige una aclaración. De los datos suministrados no podemos saber en realidad si el incremento de la velocidad por cada metro desde 0 a 5 es 0,8 metros por segundo: todo lo que sabemos con certeza es que al variar s de 0 a 5 el incremento relativo *medio* de la velocidad durante ese espacio es de 0,8 metros por segundo. Suponiendo que la variación de la velocidad es continua y constante durante todo el período considerado, el valor $\dfrac{\delta v}{\delta s}$ obtenido representaría el incremento relativo *instantáneo* de la velocidad en cualquier punto del período considerado.

Es frecuente tabular los valores de las cantidades originales y de sus incrementos y siempre que no se manifieste lo contrario los valores medios de los incrementos se escriben en el medio de sus respectivos períodos.

De este modo obtendremos la siguiente tabla:

s	v	δs	δv	$\dfrac{\delta v}{\delta s}$
0	10	—	—	—
—	—	5	4	$\frac{4}{5}=0{,}8$
5	14	—	—	—
—	—	7	1	$\frac{1}{7}=0{,}143$
12	15	—	—	—

Para poder distinguir entre los incrementos relativos *instantáneo* y *medio* la notación se modifica ligeramente empleando la d en vez de la δ; así $\dfrac{dv}{dt}$ representa un incremento relativo *instantaneo* (*) de

(*) Conviene hacer observar al principiante que el adjetivo instantáneo no implica en éste caso el concepto de «rápido» que a veces se le asigna. *(N. del T.)*

la velocidad y $\frac{\delta v}{\delta t}$ el incremento relativo *medio* de la misma. Una vez más indicaremos que d no puede ser separada de v o t, y que dt no significa $d \times t$ ni $\frac{dv}{dt}$ puede dar por reducción $\frac{v}{t}$.

Veamos ahora otro ejemplo para demostrar claramente la diferencia entre un incremento instantáneo y un incremento medio.

Consideremos por ejemplo las distancias recorridas al final del 1.°, 2.° y 3.° segundos del movimiento de un cuerpo que cae libremente bajo la influencia de la gravedad.

t (segundos)..	0	1	2	3
s (metros)	0	4,9	19,6	44,1

Se trata de hallar las velocidades medias durante los diversos intervalos de tiempo e igualmente las velocidades instantáneas al final del 1.°, 2.° y 3.° segundos.

Las velocidades medias se encuentran del modo descrito anteriormente, esto es, comparando las diferencias del espacio y el tiempo y los resultados son los correspondientes a la siguiente tabla:

t	s	δs	δt	$v = \frac{\delta s}{\delta t}$
0	0	—	—	—
—	—	4,9	1	4,9
1	4,9	—	—	—
—	—	14,7	1	14,7
2	19,6	—	—	—
—	—	24,5	1	24,5
3	44,1	—	—	—

Las velocidades medias, esto es, los valores de la última columna se han expresado en las líneas entre los valores del tiempo para indicar que son las cantidades medias de los correspondientes intervalos. Como se sabe también que en este caso la velocidad crece uniformemente es perfectamente correcto afirmar que las velocidades instantáneas al final de los 0,5, 1,5 y 2,5 segundos vienen dadas respectivamente por las velocidades medias que abarcan los tres períodos que son 4,9, 14,7 y 24,5 metros por segundo.

Hemos encontrado así las velocidades instantáneas en los medios segundos, pero no las de los finales del 1.°, 2.° y 3.° segundos. La determinación de estas velocidades introduce un proceso ya algo más importante que ilustra mucho acerca de los elementos de la diferenciación y por lo tanto lo explicaremos con más detalle.

El estudiante de dinámica, sabe que la ley que relaciona el espacio y el tiempo en el caso de la caída de los cuerpos, es $s = \frac{1}{2} gt^2 = 4{,}9\, t^2$, y observando la tabla de los valores de s y de t podemos comprobar esta ley; así, cuando $t = 2$, $s = 19{,}6$ igual a $4{,}9 \times 2^2$ o sea $4{,}9 \times t^2$.

Para hallar la velocidad instantánea al final del primer segundo, tenemos que calcular las velocidades medias correspondientes a pequeños intervalos de tiempo en las proximidades de un segundo y observar a qué cifra se aproximan estas velocidades a medida que el intervalo se va tomando cada vez más pequeño.

Así para $t = 1$ $\quad s = 4{,}9 \times 1^2 = 4{,}9$

$t = 1{,}1$ $\quad s = 4{,}9 \times 1{,}1^2 = 5{,}929$

$\delta s = 5{,}929 - 4{,}9 = 1{,}029$ $\quad \delta s = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$

$$v \text{ (media)} = \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{1.029}{0{,}1} = 10{,}29$$

Es decir, la velocidad media en el intervalo de tiempo de 1 a 1,1 es 10,29 metros por segundo. Este valor es algo aproximado a la velocidad al final del primer segundo pero no puede ser el valor exacto puesto que aún en el pequeño intervalo de tiempo, de 0,1 segundo la velocidad ha aumentado en una cantidad apreciable. Una mayor aproximación se obtendrá desde luego haciendo el intervalo de tiempo igual a 0,01 segundo.

Y entonces tendremos $t = 1$ $\quad s = 4{,}9$

$t = 1{,}01$ $\quad s = 4{,}9 \times 1{,}01^2 = 4{,}99849$

$\delta s = 0{,}09849$ $\quad \delta t = 0{,}01$

$$v \text{ (media)} = \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{0{,}09849}{0{,}01} = 9{,}849$$

Podremos obtener un valor aun más aproximado a la verdad haciendo el intervalo de tiempo igual a 0,001 segundo.

$t = 1$ $\quad s = 4{,}9$

$t = 1{,}001$ $\quad s = 4{,}9 \times 1{,}001^2 = 4{,}9098049$

$\delta s = 0{,}0098049$ $\quad \delta t = 0{,}001$

$$v \text{ (media)} = \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{0{,}0098049}{0{,}001} = 9{,}8049$$

Tomando intervalos de tiempo aun más pequeños se obtendrían para la velocidad aproximaciones cada vez más correctas; los valores de v tienden todos a 9,8 y por lo tanto puede decirse que para $t = 1$, $v = 9{,}8$ metros por segundo.

Empleando el lenguaje de la página 550 (MATEMÁTICAS PARA INGENIEROS. PARTE I), podemos afirmar que el valor límite de v cuando t tiende a la unidad es de 9,8, resultado que se puede expresar en forma abreviada como sigue

$$v \text{ (media)} \to 9{,}8 \text{ cuando } \delta t \to 0 \text{ y } t = 1$$

en que el símbolo $\to$ significa «tiende a»

$$\text{pero} \qquad (v \text{ media}) = \frac{\delta s}{\delta t} \text{ y así } \frac{\delta s}{\delta t} \to 9{,}8 \text{ cuando } \delta t \to 0 \text{ y } t = 1.$$

Ahora bien, una velocidad instantánea es el valor límite de una velocidad media, o sea:

$$(v \text{ instantánea}) = \lim_{\delta t \to 0} (v \text{ media})$$

$$\text{esto es: } \frac{ds}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta s}{\delta t}$$

Razonando de una manera análoga se puede probar que la velocidad instantánea al final del 2.° segundo es 19,6 y al final del 3.° 29,4.

Podemos continuar este ejemplo calculando los valores de la aceleración, lo cual puede hacerse puesto que conocemos la velocidad.

Tabulando como anteriormente, tenemos:

	v	δv	δt	$a = \frac{\delta v}{\delta t}$
1	9,8	—	—	—
—	—	9,8	1	9,8
2	19,6	—	—	—
—	—	9,8	1	9,8
3	29,4	—	—	—

Como puede observarse, la aceleración media es constante, siéndolo también la aceleración instantánea.

Los resultados obtenidos pueden ser agrupados ahora en una tabla en la cual se introducen nuevos símbolos por la siguiente razón. Una velocidad es el incremento relativo de un desplazamiento y se halla «derivando el espacio con relación al tiempo» y una aceleración es el incremento relativo de una velocidad y por lo tanto implica una doble derivación.

Por esta razón mientras que $\frac{ds}{dt}$ se llama la primera *derivada* o *coeficiente diferencial*, de s con relación a t, $\frac{dv}{dt}$ es la primera derivada de v con relación a t, y la segunda derivada de s con relación a t.

Por lo tanto $v = \frac{ds}{dt}$ y $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$, empleándose para esta última la notación $\frac{d^2s}{dt^2}$ la cual indica que se ha derivado dos veces s con relación a t.

La tabla completa de los valores de la velocidad y de la aceleración es la siguiente:

s	t	δs	δt	$v=\frac{\delta s}{\delta t}$	$\delta v=\delta\left(\frac{\delta s}{\delta t}\right)$	δt	$a=\frac{\delta v}{\delta t}=\frac{\delta^2 s}{\delta t^2}$
0	0	—	—	—	—	—	—
—	—	4,9	1	4,9	—	—	—
4,9	1	—	—	—	9,8	1	9,8
—	—	14,7	1	14,7	—	—	—
19,6	2	—	—	—	9,8	1	9,8
—	—	24,5	1	24,5	—	—	—
44,1	3	—	—	—	—	—	—

El ejemplo siguiente se refiere a un caso similar que trataremos por el método gráfico.

Ejemplo 1. — Los experimentos hechos con una bola que rueda sobre un plano inclinado han dado los siguientes resultados:

t (segundos) .	0	1	2	3
s (cms.) . .	0	20	80	180

Hay que trazar las curvas que den el espacio, la velocidad y la aceleración para cualquier valor del tiempo, en el intervalo entre o y 3 segundos.

Marcando los valores dados s vertical y t horizontalmente, se obtiene la curva «espacio-tiempo», que es una parábola (fig. 1).

Escogiendo dos puntos P y Q de la curva no muy distantes se traza la cuerda PQ, la vertical QN y la horizontal PN.

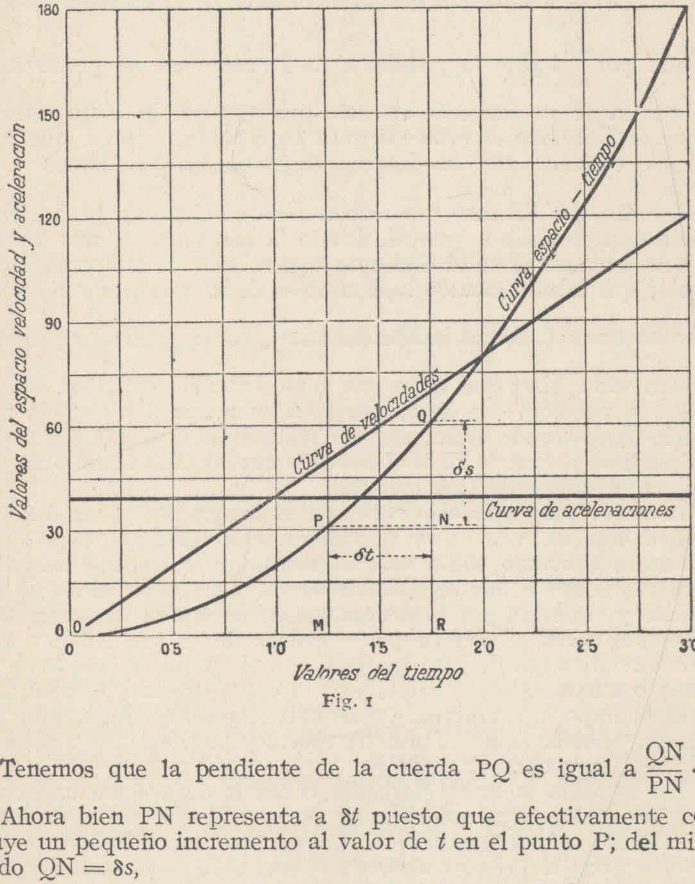


Fig. 1

Tenemos que la pendiente de la cuerda PQ es igual a $\frac{QN}{PN}$.

Ahora bien PN representa a δt puesto que efectivamente constituye un pequeño incremento al valor de t en el punto P; del mismo modo $QN = \delta s$,

así pues, pendiente de la cuerda $PQ = \frac{\delta s}{\delta t}$

Pero $\frac{\delta s}{\delta t}$ es la velocidad media entre los tiempos OM y OR, por lo tanto la velocidad media viene medida por la pendiente de la cuerda en cuestión. Si ahora hacemos tender Q hacia P la cuerda PQ tiende a confundirse con la tangente en P y tomando Q muy próximo a P la cuerda PQ y la tangente en P se hacen prácticamente indistinguibles coincidiendo ambas rectas en el límite. Por lo tanto, como la pendiente de la cuerda PQ da el valor de $\frac{\delta s}{\delta t}$ y el valor límite de $\frac{\delta s}{\delta t}$ es $\frac{ds}{dt}$, se deduce que la inclinación de la tangente viene expresada por $\frac{ds}{dt}$; pero la pendiente de la curva en un punto se define por la de su tangente en este punto y por lo tanto con esto hemos desarrollado el principio más importante, esto es, que la derivación coincide con la determinación de las pendientes de las curvas.

(Indicaremos de paso que esto nos proporciona un buen ejemplo en cuestión de límites, porque, siendo la pendiente de una curva o la de su tangente el valor límite de la pendiente de la cuerda, esto es el valor que resulta cuando los extremos de la cuerda coinciden, este valor no toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, como podría suponerse a primera vista, sino que tiene una representación definida).

Así la pendiente de la tangente en cualquier punto de la curva espacio-tiempo mide el incremento relativo instantáneo del espacio con relación al tiempo para el instante considerado o, en otras palabras, la velocidad en este instante.

Trazando tangentes a la curva en varios puntos y calculando las pendientes se halla una serie de valores de la velocidad; estos valores se marcan tomando como base el tiempo y se obtiene una nueva curva cuyas ordenadas representan el valor de la velocidad en cada instante y conocida por la denominación de «curva de velocidades». Como esta curva se obtiene por el cálculo de las pendientes o incrementos relativos se designa también con el nombre de curva *de pendientes* o curva *derivada*, recibiendo la curva original, esto es, la de espacio-tiempo la denominación de curva *primitiva*. En nuestro caso la curva de velocidades es una línea recta y por lo tanto su pendiente es constante y tiene el valor 40.

Por lo tanto la curva derivada, o sea la de aceleraciones es una línea horizontal cuya ordenada es 40.

Resultan así las tres curvas, esto es, la curva primitiva o de espacio-tiempo, la *primera derivada* o curva de velocidades y la *segunda derivada* o curva de aceleraciones.

DERIVACIÓN GRÁFICA. — La construcción precisa de la curva de pendientes es una operación muy molesta porque el procedimiento que se acaba de describir requiere el trazado de un gran número de tangentes, el cálculo de sus respectivas pendientes y la representación gráfica de estos valores.

Hay sin embargo dos métodos gráficos de derivación que dan resultados muy aproximados siempre que se utilicen cuidadosamente.

Método 1.° — (Véase fig. 2). Se divide la base en pequeños intervalos cuyas longitudes pueden ser desiguales, pero escogidos de tal modo que las porciones de curva que unen los extremos de ordena-

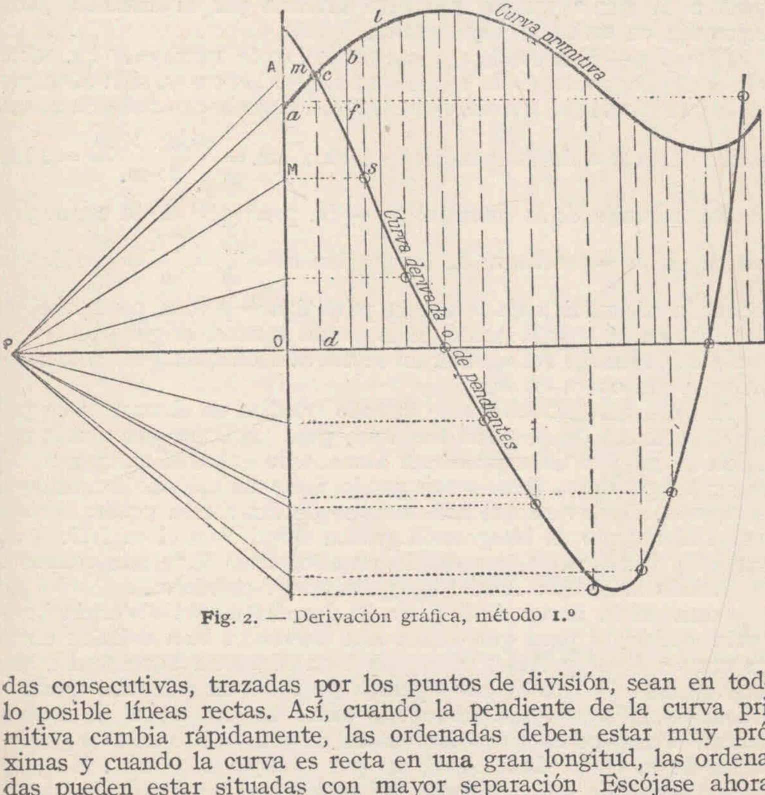


Fig. 2. — Derivación gráfica, método 1.°

das consecutivas, trazadas por los puntos de división, sean en todo lo posible líneas rectas. Así, cuando la pendiente de la curva primitiva cambia rápidamente, las ordenadas deben estar muy próximas y cuando la curva es recta en una gran longitud, las ordenadas pueden estar situadas con mayor separación Escójase ahora, un polo P a la izquierda de una vertical OA, siendo la distancia OP un número entero de unidades con arreglo a la escala horizontal y levántense las ordenadas en los puntos medios de todos los intervalos.

Por P se traza PA paralela a *ab*, primera porción de la curva y luego por A la horizontal A*c* hasta que encuentre en *c* a la ordenada media de la primera faja; *dc* mide entonces, en una cierta escala, la pendiente de la cuerda *ab* y por lo tanto la de la tangente a la curva primitiva en *m*, o sea, la pendiente media de la curva primitiva entre *a* y *b* con una cierta aproximación

Continuando el proceso trazando PM paralela a bl y la horizontal Ms hasta encontrar en s a la ordenada media de la segunda faja, tendremos que cs es una porción de la curva derivada o de pendientes.

Repitiendo las operaciones para todas las fajas y uniendo por trazo continuo los puntos c, s, etc , se obtendrá la curva derivada.

Indicando la escala de las pendientes a lo largo de un eje vertical, el diagrama queda completo, siendo **la escala de las pendientes igual a la escala vertical primitiva dividida por la distancia polar expresada en unidades horizontales.**

Ejemplo —Si la escala original vertical es de 1 cm. = 40 kg. × m. y la escala horizontal es de 1 cm. = 10 metros, entonces, si la distancia polar p se toma igual a 2 cm. esto es, 20 unidades horizontales, la nueva escala vertical o de las pendientes será $1 \text{ cm.} = \dfrac{40 \text{ kg.} \times \text{m.}}{20 \text{ m.}} = 2 \text{ kg.}$

Demostración de la construcción. —La pendiente de la curva primitiva en m = pendiente de la porción $ab = \dfrac{bf}{af} = \dfrac{\text{OA}}{p} = \dfrac{cd}{p}$ o bien, la ordenada cd, medida en la escala primitiva $= p \times$ la pendiente de la curva en m. Por lo tanto, si la escala vertical original se divide por p la ordenada dc, medida en la nueva escala, es igual a la pendiente de la curva en m.

La gran desventaja de este método consiste en el trazado de paralelas a líneas de pequeña longitud, pues un ligero error en la posición de las plantillas puede ser aumentado extraordinariamente al trazar las paralelas. Se necesita por lo tanto un cuidado extremo en el trazado. Obsérvese que este método de derivación gráfica corresponde al método de integración gráfica descrito en el capítulo VII, parte I y tratado con gran detalle en el capítulo V de este volumen.

Método 2.° —Sea ABC (fig. 3) la curva primitiva.

Corramos la curva ABC hacia la derecha a una distancia horizontal suficiente para que exista una diferencia bien definida entre las curvas DEF y ABC; y sin que esta distancia horizontal h sea muy grande. Por los diversos puntos del eje horizontal OX trácense ordenadas iguales a las diferencias entre las ordenadas de ambas curvas, considerando como minuendos de estas diferencias las ordenadas de la curva dada ABC; así por ejemplo $ab = a'b'$. Unamos los extremos de las ordenadas así obtenidas, resultando la curva GbH y corramos ésta hacia la izquierda una distancia horizontal $\dfrac{h}{2}$, con cuya operación obtendremos la curva MPN que es la curva derivada de la primitiva ABC. El diágrama se completa trazando la escala de las pendientes que es la primitiva escala vertical dividida por h (expresada en unidades horizontales).

Este método puede ser simplificado por el empleo de papel de calco milimetrado transparente, en efecto: Se coloca el papel sobre el diágrama y se traza la curva ABC sobre él; se corre después éste cuidadosamente la distancia necesaria, esto es h; se toman las diversas diferencias de ordenadas entre las curvas, tales como $a'b'$. Se llevan estas diferencias a partir de OX como base, pero sobre ordenadas corridas de $\frac{h}{2}$ unidades hacia la izquierda con relación a las diferencias medidas anteriormente. Por último, se traza la curva por los puntos así obtenidos que será la curva de pendientes.

Ejemplos del empleo de estos dos métodos:

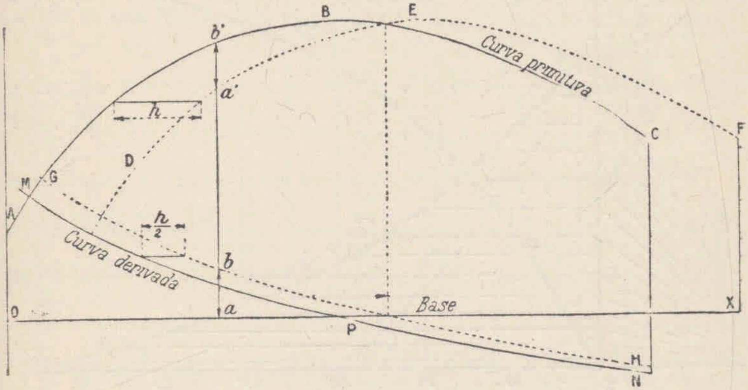


Fig. 3. — Derivación gráfica, método 2.º

Ejemplo 2. — La temperatura del devanado de un motor es medida en varios instantes durante el paso de una fuerte corriente, obteniéndose los siguientes resultados.

Tiempo (minutos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Temperatura, C.º	20	26	32,5	41	46	49	52,5	54,5	56,5	58	59,5	61	61,7	62

Hay que trazar una curva que represente la variación de la temperatura y una que muestre la proporción en que esta temperatura va aumentando en cada instante durante todo el período de 65 minutos. Señalados los valores de la temperatura con relación a una base de tiempo obtenemos la curva primitiva de la figura 3*a*.

Para trazar la curva de pendientes dividimos primeramente la base de tal modo que las porciones de la curva entre dos ordenadas consecutivas tengan aproximadamente la misma inclinación en toda su longitud, o sea, que los elementos de la curva sean aproximadamente trozos de líneas rectas. Así en la figura no hay cambio apreciable de pendiente entre los puntos A y a, o bien, a y d. No es necesario trazar los ordenadas por los puntos de división en toda su longitud puesto que lo único que se precisa son las intersecciones con la curva primitiva.

Después se elige un polo P, 20 unidades horizontales a la izquierda de A y se traza por P la línea PB paralela a la porción Aa de la curva. La horizontal Bb corta a la ordenada media de la primera faja en b y b, es un punto de la curva derivada o curva de pendientes.

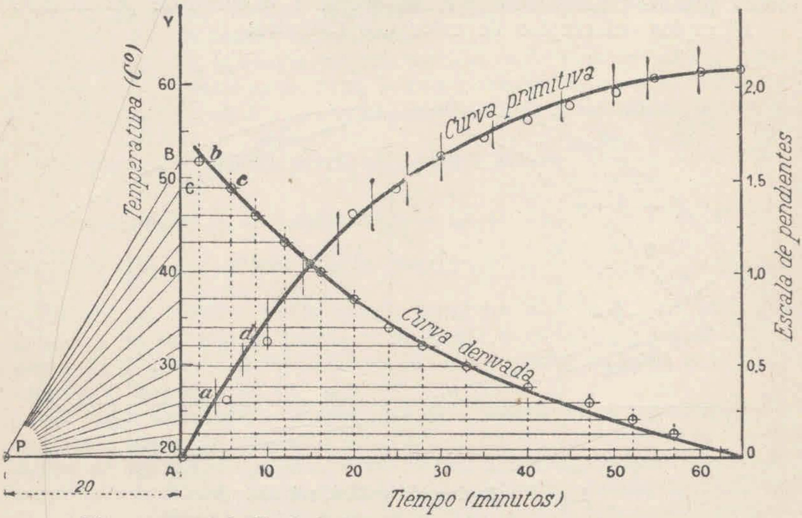


Fig. 3a. — Variación de la temperatura del devanado de un motor

Repitiendo el proceso para la segunda faja, trazando PC paralela a ad y Cc horizontal hasta encontrar a la ordenada media de la segunda faja en c, obtendremos un segundo punto c de la curva derivada. Uniendo estos puntos obtendremos la curva de pendientes en cuestión, cuyas ordenadas dan los incrementos relativos de la temperatura. Se observará que este incremento va disminuyendo hasta los 65 minutos en que tiene el valor cero, lo cual indica que al llegar a este punto las pérdidas por radiación comienzan a equilibrar al calentamiento debido al paso de la corriente.

Como la distancia polar es de 20 unidades, la escala de pendientes será

$$= \frac{\text{escala vertical original}}{20};$$

en la figura la escala vertical original es 25 mm. = 20 unidades, la escala de las pendientes será de 25 mm. = 1 unidad, escala que está indicada a la derecha del diagrama.

Ejemplo 3. — Trazar la curva $y = x^2$ cuando x varía de 0 a 3, y emplear el método 2.º para obtener la curva derivada.

Los valores de las ordenadas de la curva primitiva $y = x^2$ son los siguientes.

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9

con cuyos valores obtenemos la curva OAB de la figura 4.

Tomando $h = 0,5$ unidades horizontales, corremos la curva esta magnitud con lo que obtenemos la curva CG. Las diferencias de ordenadas

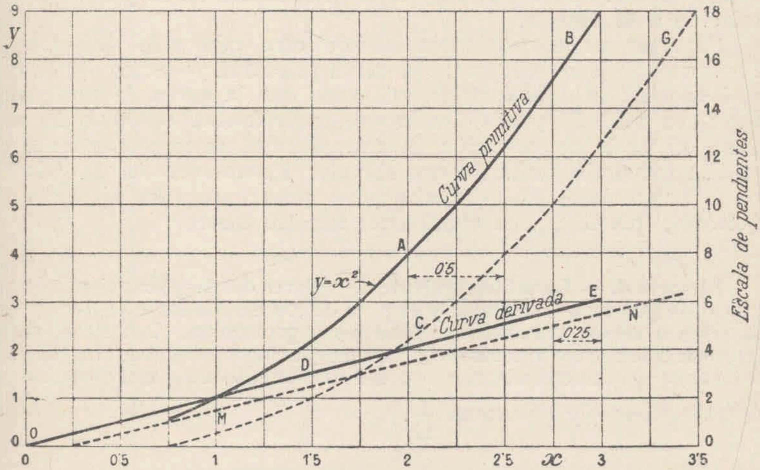


Fig. 4. — Derivación gráfica

entre estas curvas se toman a partir del eje de abscisas ox. Así, cuando $x = 3$, la ordenada de la curva OAB es de 9 unidades y la de CG es 6,25, de modo que la diferencia es 2,75 y ésta es la ordenada de la curva MN. Corriendo ahora esta curva a la izquierda, una distancia $= \frac{0,5}{2}$, esto es, 0,25 unidades horizontales, obtendremos la verdadera curva derivada ODE, que es una línea recta, como podía esperarse, puesto que la curva primitiva es una parábola de segundo grado.

En lo que se refiere a la escala de pendientes, la nueva escala vertical será

$$= \frac{\text{escala vertical antigua}}{h}$$

y como $h = 0{,}5$, la nueva escala vertical, o escala de pendientes que se emplea al medir ordenadas de la curva ODE, es dos veces la escala vertical original.

La curva derivada suministra muchos datos referentes a la primitiva. Así, cuando la ordenada de la curva derivada es cero, esto es, cuando toca o corta el eje horizontal, la pendiente de la primitiva es cero; pero si la pendiente es cero, la curva es horizontal. Así sucede cuando hay un máximo o un mínimo. Por lo tanto a todo máximo o mínimo en la curva primitiva corresponde en la derivada una ordenada igual a cero (*).

Igualmente, una ordenada positiva de la curva derivada supone una pendiente positiva de la primitiva, lo cual indica que, en las proximidades del punto considerado, la pendiente aumenta con la abscisa. Del mismo modo una ordenada grande de la curva de pendientes indica un cambio rápido de la ordenada de la primitiva con relación a la abscisa.

Esta última circunstancia sugiere otra aún más importante. Por un cuidadoso examen de la curva primitiva podemos ver lo que *está pasando* en *cada instante*, mientras que la curva de pendientes nos lleva más allá y nos dice lo que *probablemente sucederá*. En realidad, el modo de variación de una cantidad es frecuentemente de mucha mayor importancia que el valor instantáneo de la misma; como aclaraciones de esta afirmación presentamos los ejemplos siguientes, que muestran claramente nuestro aserto.

Ejemplo 4. — La tabla siguiente da valores del desplazamiento de un navío de guerra de 21 nudos y el peso de los elementos ofensivos y defensivos a saber: armamento, blindajes y protección. Con estos datos hay que calcular los valores de Q (razón del armamento, etc., al desplazamiento) y q (incremento relativo del armamento etc., con respecto al desplazamiento) y finalmente $\frac{q}{Q}$.

Desplazamiento P en toneladas	18000	20000	22000	24000	26000	28000	30000
Armamento, etc. p en toneladas	6880	7850	8830	9820	10810	11820	12845

Los valores de Q se hallan directamente por división y son los siguientes

(*) Esto no quiere decir que a *todos* los puntos de ordenada cero de la derivada correspondan máximos o mínimos de la primitiva. Por ejemplo, un punto de inflexión de tangente horizontal no es ni máximo ni mínimo y sin embargo a él corresponde un punto de ordenada nula en la curva derivada. (*N. del T*).

P	18000	20000	22000	24000	26000	28000	30000
Q	0,383	0,392	0,401	0,409	0,416	0,422	0,428

Los valores de q, o sea $\frac{dp}{dP}$, pueden ser hallados construyendo la curva de pendientes (a) o tabulando las diferencias (b)

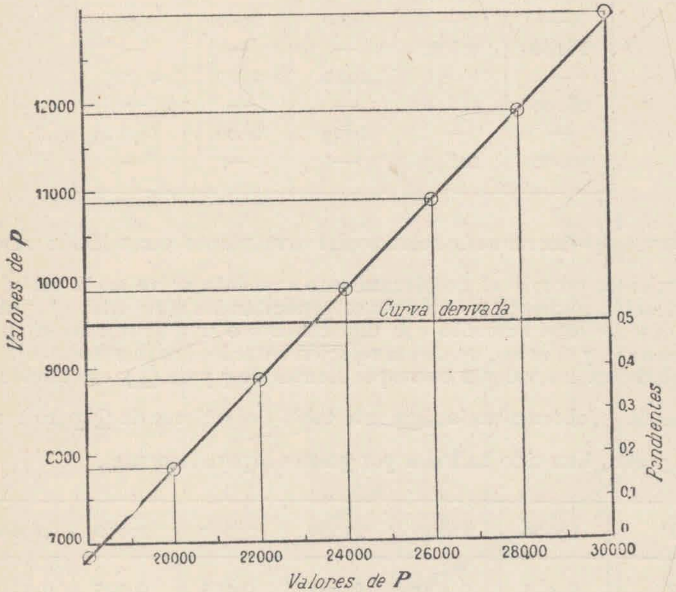


Fig. 5. — Desplazamiento y armamento de un buque de guerra

(a) *Por construcción de la curva de pendientes.* — Llevando los valores de p sobre un eje vertical y los de P sobre un eje horizontal (fig. 5) resulta que los puntos determinados están aproximadamente en línea recta, Por lo tanto, la curva de pendientes es una línea horizontal, cuya ordenada en cualquier punto representa la pendiente de la curva primitiva. Midiendo su valor resulta 0,498; es decir, el *valor medio* de $\frac{dp}{dP}$ entre los límites considerados es 0,498. Este valor medio no da sin embargo tantos datos para nuestros estudio como los diversos incrementos considerados para cada variación del desplazamiento.

(b) *Tabulando las diferencias* como en los ejemplos anteriores, tendremos

P	p	δp	δP	$q = \frac{\delta p}{\delta P}$
18000	6880	—	—	—
—	—	970	2000	0,485
20000	7850	—	—	—
—	—	980	2000	0,490
22000	8830	—	—	—
—	—	990	2000	0,495
24000	9820	—	—	—
—	—	990	2000	0,495
26000	10810	—	—	—
—	—	1010	2000	0,505
28000	11820	—	—	—
—	—	1025	2000	0,5125
30000	12845	—	—	—

Ahora $\frac{\delta p}{\delta P}$ = incremento relativo del armamento con relación al desplazamiento; cuando el desplazamiento aumenta se ve en la tabla que esta relación aumenta y entonces se presentan las siguientes preguntas.

¿Coincide este aumento con un aumento o una disminución en los valores de Q, y si es así, cuál es la relación entre los dos incrementos?

Tabulando los valores correspondientes de q y de Q y calculando los valores de $\frac{q}{Q}$, obtenemos la siguiente tabla (los valores de Q para 19000, 21000 y etc., han sido hallados por puntos separadamente).

P	19000	21000	23000	25000	27000	29000
q	0,485	0,490	0,495	0,495	0,505	0,5125
Q	0,387	0,396	0,405	0,412	0,419	0,426
$\frac{q}{Q}$	1,253	1,236	1,223	1,202	1,203	1,204

Examinando la tabla se puede ver que la fracción $\frac{q}{Q}$ decrece cuando los navíos se hacen mayores. En otras palabras, mientras que el armamento aumenta con el desplazamiento, el aumento no es tan grande como debiera corresponder al tamaño del buque, puesto que el peso de la maquinaria necesaria es mayor en proporción al peso del armamento y protección en los barcos grandes que en los pequeños.

Por lo tanto, en igualdad de las demás condiciones, más allá de cierto punto, es mejor confiar en un mayor número de buques que en unos pocos de gran tamaño.

Ejemplo 5. — Friend da las siguientes cifras como resultado de pruebas sobre placas de hierro expuestas a la acción del aire y del agua. Las placas originales pesaban aproximadamente 2,5 y 3 grs.

Representando los valores correspondientes se obtienen las curvas de la corrosión en los dos casos. Veamos los resultados

Tiempo en días.	2	7	13	19	26	32	37
A la luz. Pérdida de peso en grs.......	0,0048	0,031	0,0645	0,08	0,093	0,126	—
En la oscuridad. Pérdida en grs.......	0,0032	0,0208	0,037	0,058	0,0674	0,0816	0,0916

Las dos series de valores se han representado en la figura 6, siendo las respectivas curvas, LLL para las placas expuestas a la luz y DDD para las placas en la obscuridad. El efecto de la acción de la luz se ve muy

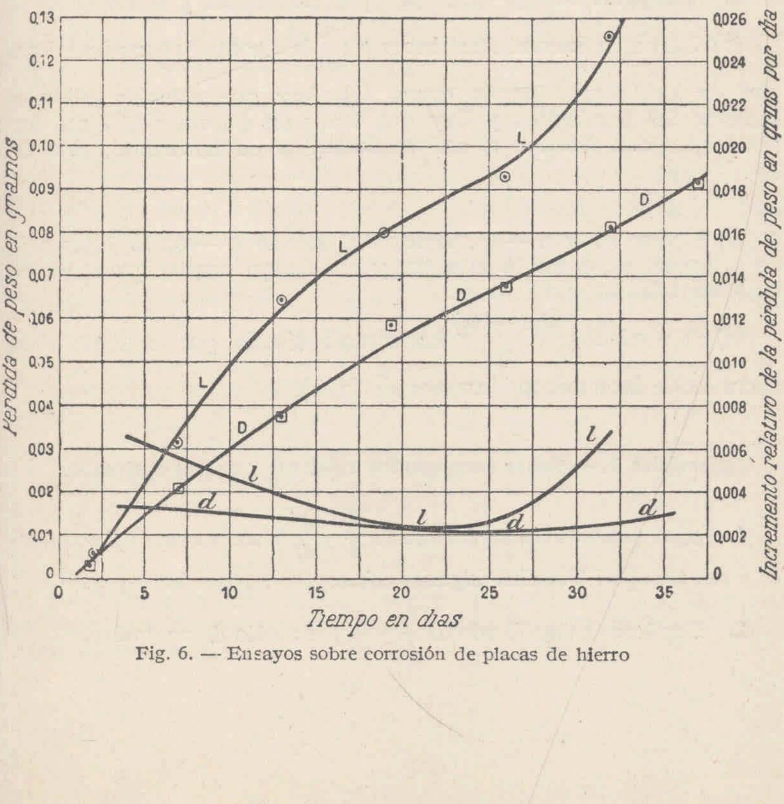


Fig. 6. — Ensayos sobre corrosión de placas de hierro

claramente al examinar estas curvas. Se han trazado luego las curvas de pendientes para los dos casos empleando el método 2.º, pero no se señalan las construcciones auxiliares. La curva *lll* es la de la pendiente de LLL y la *ddd* la de la curva DDD.

Se observará que en los dos casos el incremento relativo de la pérdida es mayor al comienzo y disminuye hasta un valor mínimo después de veinte días de exposición en el caso de la curva *lll* y después de veinticinco días en el caso de la curva *ddd*.

Después de alcanzar estos mínimos los incrementos se hacen más rápidos, siendo este efecto aún más marcado para los placas expuestas a la luz; y en estas condiciones la curva *lll* enseña que la acción corrosiva es una cuestión seria ya que se ve que el incremento de la pérdida aumenta constantemente.

Constituyen una demostración excelente de la utilidad de las curvas de pendientes, las curvas de enfriamiento de los metales. En los primeros tiempos de la investigación en esta rama de la ciencia, solamente se trazaba la curva del enfriamiento, esto es, se representaban las temperaturas tomando como base el tiempo. Sin embargo, ulteriores investigaciones han mostrado que son necesarias otras tres curvas, esto es, una curva de incrementos inversos, una curva de diferencias y una curva derivada de las diferencias. Las ordenadas correspondientes son:

(*a*) Temperatura (θ) — tiempo (t); t horizontal y θ vertical.

(*b*) Curva de incrementos inversos: $\frac{dt}{d\theta}$ horizontal y θ vertical. Para obtener esta curva de la curva (*a*), hay que calcular cuidadosamente las pendientes y hay que tener en cuenta que éstas son pendientes con relación al eje vertical y no al horizontal, esto es, $\frac{dt}{d\theta}$ y no $\frac{d\theta}{dt}$.

(*c*) θ vertical y $\theta - \theta_1$, horizontal siendo $\theta - \theta_1$ la diferencia de temperatura entre la muestra y un cuerpo neutro que se enfría bajo las mismas condiciones.

(*d*) θ vertical y $\frac{d(\theta - \theta_1)}{d\theta}$ horizontal; siendo por lo tanto esta curva la de incrementos inversos de la (*c*).

Ejercicios 1. — Sobre incrementos relativos y curvas derivadas.

1. ¿Que representan las fracciones $\frac{\delta s}{\delta t}$ y $\frac{ds}{dt}$ (siendo s un deplazamiento y t el tiempo)? Tómense algunas cifras para ilustrar la respuesta.

2. Explicar el significado de $\frac{\delta s}{\delta t}$ y $\frac{ds}{dt}$ por medio de un gráfico.

3. Cuando una armadura gira en un campo magnético la F.E.M. producida depende de la proporción en que son cortadas las líneas de fuerza. Expresar esta afirmación en forma abreviada.

4. En una corriente variable, el voltaje V es igual a la resistencia R multiplicada por la corriente I mas la autoinductancia L multiplicada por el incremento relativo de la corriente con relación al tiempo. Exprésese esta relación en forma simbólica.

5. En un cierto momento un determinado cuerpo se halla a 45,3 cms. de distancia de un punto fijo; 2,14 segundos después está a 21,7 cms. del mismo. Hallar la velocidad media durante este movimiento y determinar en qué momento daría probablemente el resultado la velocidad instantánea.

6. A 3 metros del extremo de una viga el momento de flexión es de 5 toneladas × m.

A 3,208 m. del mismo tiene por valor 5,07 tons. × m. Si el esfuerzo cortante se mide por el incremento relativo del momento de flexión, determinar cuál es el esfuerzo cortante medio entre estos puntos.

7. Tabular los valores de $q = \frac{\delta p}{\delta P}$ para el siguiente caso en que las cifras se refieren a una buque de guerra de 23 nudos.

P	18000	20000	22000	24000	26000	28000	30000	32000
p	6170	7080	8000	8930	9890	10855	11820	12810

8. Tabular los valores de $\frac{q}{Q}$ para el caso de un buque de guerra de 25 nudos, partiendo de las cifras siguientes.

P	18000	20000	22000	24000	26000	28000	30000	32000
p	5210	6050	6910	7790	8660	9550	10460	11370

$$q = \frac{\delta p}{\delta P}; \quad Q = \frac{p}{P}.$$

9. Tabular los valores de la velocidad y la aceleración para el siguiente caso.

Espacios en metros...	1	2,4	4,4	6	7,6	11,2	15,6	20,4
Tiempos en segundos..	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	1,0	1,2	1,4

10. Trazar la curva espacio-tiempo para las cifras dadas en el problema 9 y obtener por derivación gráfica la curva de velocidades y la de aceleraciones.

11. Trazar las curvas $y = 0{,}5\ x^3$ desde $x = -2$ a $x = +4$ é igualmente la curva derivada ¿Cuál es la ordenada de esta última para $x = 1{,}94$?

12. Dadas las siguientes cifras para las temperaturas medias del año (la media durante 50 años), trazar una curva que exprese los incrementos relativos de la temperatura y determinar en qué estaciones del año son más rápidos en ambos sentidos.

Tiempo (intervalos de $\frac{1}{3}$ de mes)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura...............	38,6	37,9	38,4	39,8	38,5	39,5	40,3	40,7	41,5	45,5	45,5

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
48,5	49,3	52	55	57,2	58,4	60,5	61,4	62,5	62,9	62,2	62,5	61,1	59,8

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
58,2	55,8	54,2	51	48,8	46,8	43.5	42,1	40,0	39,8	38,8	38,6

13. s es el desplazamiento de un tranvía a partir de un punto fijo en t segundos. Trazar las curvas del espacio velocidad y aceleración con relación al tiempo.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s	0	1,3	3,6	7,0	11,3	16,6	23,0	30,3	38,6	48,0	58,3

Indicar con precisión las escalas.

14. La tabla siguiente da las temperaturas de un cuerpo durante su enfriamiento. Dibujar la curva con los valores dados y obtener de ellos por derivación, la curva de los incrementos relativos del enfriamiento. ¿Qué deducciones se pueden hacer de la curva final?

Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatura	58	57	56,5	54,5	53,5	52,5	51,5	51	50	49

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
48,5	48	47	46,5	46	45,5	45	44	43,5	43

15. Las siguientes cifras dan el momento de flexión en varios puntos a lo largo de una viga apoyada en los dos extremos y cargada uniformemente. Trazar la curva de los momentos de flexión y por derivación gráfica obtener las curvas del esfuerzo cortante y de las cargas.

Indicar claramente las escalas y hallar el valor de la carga por metro lineal.

Distancia en metros a partir de un extremo	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Momento de flexión en toneladas metro	0	3,5	6,3	8,4	9,6	10	9,6	8,4	6,3	3,5	0

16. Tomando valores de θ en la proximidad de 15^{o} hallar el incremento relativo instantáneo de sen θ con relación a θ (θ expresado en radianes). Comparar el resultado con el valor de cos 15.º ¿En qué forma general puede ser expresado el resultado?

17. Siendo el esfuerzo cortante en varios puntos de una viga, los que se indican, trazar la curva de las cargas (esto es, la curva derivada) y hallar el valor de la carga á 3,5 ms. del extremo izquierdo.

Distancia en ms.	0	1	2	3	4	1	6
Esfuerzo cortante en tons.	0	0,1	0,3	0,6	1	1,5	2,1

18. La ecuación siguiente expresa el valor de una F.E.M.

$$E = 150 \text{ sen } 314\, t + 50 \text{ sen } 942\, t.$$

Obtener por derivación gráfica la forma sinusoidal de la corriente que dicha F.E.M. hará pasar por un condensador de 20 microfaradios, de capacidad, suponiendo que la pérdida del condensador sea despreciable.

La fórmula es $I = C\dfrac{dE}{dt}$, en que I es la corriente y C la capacidad.

19. Si la cantidad de movimiento es el producto de la velocidad por la masa y la fuerza se define como el incremento relativo de la cantidad de movimiento con relación al tiempo, demostrar que la fuerza está expresada por el producto de la masa por la aceleración.

20. Las cifras siguientes expresan las velocidades aproximadas de una locomotora que corre por una vía no muy a nivel. Trazar la curva de aceleraciones

Tiempo (min. y seg.)	0	1,0	2,15	6,15	9,22	11,45	14,26	16,35	20,52	23,10
Velocidad (Kms. por hora)	0	6	10	18,2	22,8	25,5	28	29,2	28,6	26,1

21. Tomando las siguientes cifras referentes al CO_2 para uso de una máquina refrigerante, trazar la curva de los incrementos y hallar el valor de $\frac{dp}{dt}$ para $t = -7^o,8$ C.

t C°	—20,6	—17,5	—15	—12.2	—9,4	—6,7	—3,9	—1,1	+ 1,7	+ 4,4
p Kgs/cms.²	20,4	22	24	26	28	30,2	32,5	35	37,6	40,5

22. El peso de una muestra de hierro colado fué medido después de haberlo calentado varias veces con los siguientes resultados; el aumento de peso es debido a los gases exteriores a la mufla.

N.° de veces que se ha calentado	0	2	6	12	22	23	24	25	26	27	30	35	39	45
Peso..........................	146,88	146,94	147,04	147,54	148,02	148,11	148,27	148,36	148,46	148,61	149,18	150,49	152,36	156,44

Trazar la curva que representa esta tabla de valores y construir la de los incrementos.

23. Las cifras de la tabla siguiente son las lecturas de la temperatura de una muestra de acero, durante el enfriamiento. Representar estos dos valores tomando los tiempos en el eje horizontal y de ella deducir la curva de los incrementos inversos, esto es la curva en que los valores de $\frac{dt}{d\theta}$ se sitúan horizontalmente y las temperaturas a lo largo del eje vertical.

Tiempo (t) en segundos..	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225
Temperatura en C° (θ).	850	848	844,7	842	839,5	838,5	838,2	838,1	838	837,9	837,5

240	255	270	285	292,5	300	315	330	345	360	367,5	375	390	405
836	833	829	825	823,3	822,2	821,7	821.5	821,3	821,1	819	815	813	811,6

CAPÍTULO II

Derivación de funciones

DERIVACIÓN DE ax^n. — Se ha dicho ya en el capítulo I como se pueden relacionar entre sí las variaciones de dos cantidades y hallar por lo tanto el incremento con que una varía en relación con la otra en cada momento, cuando se conocen varias series de valores de las dos variables. En gran número de casos, sin embargo, las dos cantidades están relacionadas por una ecuación, indicando que la una depende de la otra, o bien, en otras palabras, que la una es *función* de la otra. Así, si $y = 5x^3$, y tiene un valor determinado para cada valor que se dé a x, y este hecho se expresa en la forma abreviada $y = f(x)$. Igualmente si $z = 17x^2y - 4xy^3 + 5$ l. n. y, en la que x e y varían, z depende de los valores que se den a x y a y, o sea $z = f(xy)$.

Para derivar una función no es necesario calcular una serie de valores de x y de y para después hacer con ellos lo mismo que se hizo con los valores indicados en el capítulo anterior. Esto originaría una gran pérdida de tiempo y no daría resultados exactos. Por el contrario se puede obtener una serie de reglas deducidas de los primeros principios que permiten la derivación de las funciones sin tener que recurrir a tablas ni al auxilio de gráficos.

Comenzaremos por desarrollar la primera de las reglas del cálculo diferencial y nos ocuparemos de la función $y = ax^n$ considerando primero el caso $y = x^3$. Nuestro problema se reduce a encontrar el modo de variar y con relación a x cuando ambas cantidades (y variable dependiente y x variable independiente) están unidas por la ecuación $y = x^3$.

El incremento relativo de y con relación a x está dado por el valor de $\frac{dy}{dx}$ que se escribe a veces Dy, cuando está bien explícito que la derivación se hace con relación a x, teniendo el *operador* D muchas e importantes propiedades como se verá más adelante.

Si se expresa la función por $f(x)$, $\frac{dy}{dx}$ se escribe a menudo $\frac{df(x)}{dx}$ o $f'(x)$; $\frac{dy}{dx}$, Dy, $\frac{df(x)}{dx}$ o $f'(x)$ se llama la *derivada* o el *coeficiente diferen-*

cial de y con relación a x. El significado completo del último de estos términos se expondrá en el capítulo III.

Deseamos hallar una regla que nos dé el incremento relativo instantáneo de y con relación a x, cuando $y = x^3$, y que esta regla sirva para todos los valores de x. Del mismo modo que anteriormente, el incremento relativo instantáneo tiene que ser determinado como valor límite del incremento relativo medio.

Supongamos ahora que x varía en la cantidad δx, de modo que el nuevo valor de x es $x + \delta x$; y, al depender de x, tiene que variar también adquiriendo un nuevo valor $y + \delta y$, ahora, como la relación que une x con y es $y = x^3$, tendremos para *todos* los valores de x
(nuevo valor de y) = (nuevo valor de x)^3

o sea: $y + \delta y = (x + \delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \delta x + 3x \cdot (\delta x)^2 + (\delta x)^3$ (1)
pero $y = x^3$ .... (2)

Luego, restando miembro a miembro (2) de (1):

$$y + \delta y - y = 3x^2 \cdot \delta x + 3x\,(\delta x)^2 + (\delta x)^3$$
$$\delta y = 3x^2 \cdot \delta x + 3x\,(\delta x)^2 + (\delta x)^3.$$

Dividiendo por δx

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \delta x + (\delta x)^2.$$

Con esto hemos encontrado el valor *medio* del incremento relativo correspondiente a un pequeño intervalo δx, y para deducir el incremento instantáneo hay que reducir el intervalo indefinidamente.

Hagamos $\delta x = 0{,}001$; y se tendrá:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 3x^2 + 3x\,0{,}001 + 0{,}000001$$
$$= 3x^2 + 0{,}003x + 0{,}000001$$

mientras que si $\delta x = 0\text{'}00001$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 3x^2 + 3x \times 0{,}00001 + 0{,}0000000001. \qquad (3)$$

Es evidente que si reducimos aun más el intervalo δx, el 2.° y 3.° términos de (3) podrán despreciarse prácticamente en comparación con el primero. En el límite por lo tanto, el segundo miembro se convierte en $3x^2$ y de consiguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 3x^2.$$

o bien
$$\frac{dx^3}{dx} = 3x^2.$$

Esta relación puede ser interpretada gráficamente del siguiente modo. Trazando la curva $y = x^3$ y después la curva de pendientes por cualquiera de los métodos del capítulo I, se hallará que la ecuación de esta última es precisamente $y = 3x^2$.

Las dos curvas se han trazado en la figura 7.

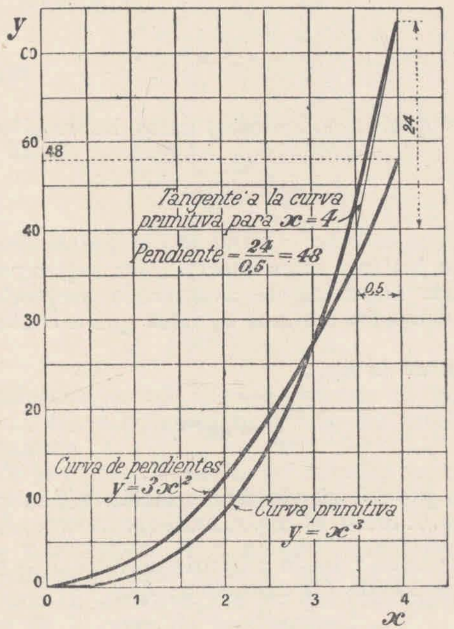


Fig. 7. — Curva primitiva y curva de pendientes

Ejemplo 1. Hallar la pendiente de la curva $y = x^3$ para $x = 4$.

$$\text{La pendiente de la curva} = \frac{dy}{dx} = \frac{dx^3}{dx} = 3x^2$$

$$\text{y si } x = 4 \qquad \frac{dy}{dx} = 3 \times 4^2 = \underline{48}.$$

Lo cual significa que en la proximidad de $x = 4$, la ordenada de la curva $y = x^3$ varía 48 veces más deprisa que la abscisa, circunstancia que se puede ver en la figura.

Del mismo modo se encontraría que $\frac{dx^4}{dx} = 4x^3$ y $\frac{dx^5}{dx} = 5x^4$, (aconsejamos al lector compruebe los resultados por sí mismo).

Poniendo estas relaciones en otra forma, tenemos:

$$\frac{dx^3}{dx} = 3x^2 = 3x^{3-1}$$

$$\frac{dx^4}{dx} = 4x^3 = 4x^{4-1}$$

$$\frac{dx^5}{dx} = 5x^4 = 5x^{5-1}$$

Observamos que en todos estos casos los resultados toman la forma

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$

Por lo tanto los tres casos considerados sugieren una regla general, pero sería naturalmente aventurado aceptarla como regla cierta sin una demostración más rigurosa que a continuación exponemos.

Demostración de la regla:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$

Supongamos $y = x^n$, siendo esta relación válida para todos los valores de x . . . . (1)

Si hacemos variar x hasta adquirir el valoı $x + \delta x$, y toma el nuevo valor $y + \delta y$: de (1) deducimos que

$$y + \delta y = (x + \delta x)^n.$$

Desarrollando $(x + \delta x)^n$ por el teorema del binomio (véase página 559, tomo I)

$$y + \delta y = x^n + nx^{n-1}\delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}(\delta x)^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}(\delta x)^3 + \ldots\ldots + (\delta x)^n \qquad (2)$$

Restando (1) de (2)

$$\delta y = nx^{n-1}\delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}(\delta x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}(\delta x)^3 + \ldots (\delta x)^n$$

dividiendo por δx,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1,2}x^{n-2}(\delta x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}(\delta x)^2 + \text{térmi-}$$

nos en $(\delta x)^3$ y potencias más elevadas de δx.

Hagamos decrecer continuamente δx; como quiera que δx es factor del segundo término y de todos los sucesivos, los valores de estos términos pueden hacerse todo lo pequeños que se quiera, disminuyendo el valor de δx.

Por lo tanto $$\frac{\delta y}{\delta x} \to nx^{n-1}$$

o bien, en el límite, $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = nx^{n-1}$$

Podemos pues establecer la primera regla de derivación de funciones, que es

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

es decir, la derivación rebaja el exponente de la potencia en una unidad, pero la nueva potencia tiene que ser multiplicada por el primitivo exponente.

La razón de la existencia del factor n puede comprenderse fácilmente teniendo en cuenta que cuanto mayor sea n, mayor es la pendiente de la curva primitiva y por lo tanto el incremento de y con relación a x. El exponente n, determina realmente la pendiente de la curva primitiva (véase parte I, pág. 413),y por lo tanto, es factor importante en la derivación, ya que esta operación es la que da la ecuación de la curva de pendientes.

Para generalizar completamente la regla, tengamos en cuenta la existencia del coeficiente a en ax^n.

Se comprende fácilmente que si hemos trazado la curva $y = x^3$, la curva $y = 4x^3$ será la misma anterior modificada simplemente multiplicando la escala vertical por 4. Por lo tanto, al medir la pendiente de la curva, el incremento vertical será 4 veces mayor para la curva $y = 4x^3$ que para la curva $y = x^3$, con tal que se tomen los mismos incrementos horizontales.

Ahora bien, la pendiente de la curva $y = x^3$ está dada por la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

por lo tanto la de la curva $y = 4x^3$ vendrá dada por

$$\frac{dy}{dx} = 4 \times 3x^2 = 12x^2.$$

En otras palabras, el factor constante 4 se conserva como factor en la derivación. Siendo esto también cierto para cualquier otro factor constante,

$$\frac{d}{dx} ax^n = nax^{n-1}.$$

Es decir, un factor constante antes de la derivación, sigue siendo lo propio después de dicha operación.

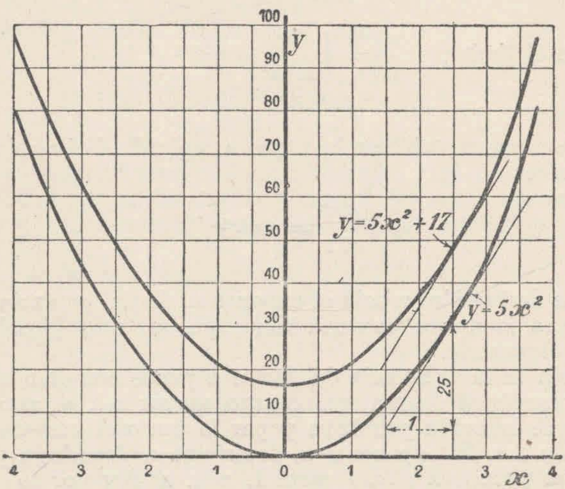


Fig. 8

Podemos abordar la derivación de un polinomio discutiendo el caso simple $y = 5x^2 + 17$ (un binomio o expresión de dos términos). Las curvas $y = 5x^2$; $y = 5x^2 + 17$, han sido trazadas en la figura 8 en la cual se ve que la última curva no es más que la primera desplazada verticalmente en una cantidad igual a 17 unidades verticales, es decir, las dos curvas tienen idéntica forma y por lo tanto sus pendientes en puntos correspondientes son iguales. En consecuencia, si trazamos una tangente a cada curva en el punto de abcisa $x = 2{,}5$ la pendiente de ambas tangentes viene medida por $\frac{25}{1}$, es decir, 25. Vemos por lo tanto en la figura 8 que el término 17 no altera para nada la pendiente.

Por lo tanto: $\frac{d}{dx} 5x^2 = \frac{d}{dx}(5x^2 + 17)$.

Ahora bien, derivando $5x^2 + 17$, término a término, tendremos

$$\frac{d}{dx}(5x^2 + 17) = \frac{d}{dx} 5x^2 + \frac{d}{dx} 17 = \frac{d}{dx} 5x^2 + 0$$
$$= \frac{d}{dx} 5x^2$$

puesto que siendo 17 constante, e independiente en absoluto de x, su incremento relativo es cero.

Se ve en este ejemplo que es un procedimiento perfectamente lógico derivar término a término y sumar después los resultados, y el método puede aplicarse del mismo modo a expresiones de cualquier número de términos.

De aquí $\frac{d}{dx}(ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots . d)$

$$= nax^{n-1} + b(n - 1)x^{n-2} + c(n - 2)x^{n-3} + \ldots .$$

y también $\frac{d}{dx}(ax^n + b) = nax^{n-1}$.

Apliquemos ahora estas reglas a varios ejemplos numéricos:

Ejemplo 2. Derivar con respecto a x la función

$$9x^{1.6} + 4 + 2x^{0,5}.$$

$$\frac{d}{dx}(9x^{1,6} + 4 + 2x^{0,5}) = \frac{d}{dx} 9x^{1,6} + \frac{d}{dx} 4 + \frac{d}{dx} 2x^{0,5}$$
$$= (9 \times 1{,}6x^{0,6}) + 0 + (2 \times 0{,}5x^{-0,5})$$
$$= 14{,}4x^{0,6} + x^{-0,5} \text{ o bien } 14{,}4x^{0,6} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ejemplo 3. Si $y = 0{,}8 \times \sqrt{\frac{1}{x^3}}$, hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$

$$y = 0{,}8 \times \sqrt{\frac{1}{x^3}} = 0{,}8 \times \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 0{,}8x^{-\frac{3}{2}} \text{ o bien, } 0{,}8x^{-1,5}$$

de modo que comparando con la expresión general

$$a = 0{,}8 \qquad n = -1{,}5.$$

por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = -1{,}5 \times 0{,}8x^{-1{,}5-1} = -1{,}2x^{-2{,}5} \quad \text{o bien} \quad -\frac{1{,}2}{x^{2{,}5}}.$$

Ejemplo 4. Dada la ecuación $pv^{1{,}41} = C$, que representa la expansión adiabática del aire, hallar $\frac{dp}{dv}$.

Se trata de derivar p con relación a v. y antes de esto, expresaremos p en función de v.

Tenemos $pv^{1{,}41} = C$, de modo que $p = \frac{C}{v^{1{,}41}} = Cv^{-1{,}41}$.

De aquí $\frac{dp}{dv} = \frac{d}{dv} Cv^{-1{,}41} = C \times -1{,}41v^{-2{,}41} = -1{,}41Cv^{-2{,}41}$

y este resultado puede expresarse en función de p y v, escribiendo en vez de C su valor $pv^{1{,}41}$.

Así: $\frac{dp}{dv} = -1{,}41 \times pv^{1{,}41} \times v^{-2{,}41} = -1{,}41pv^{-1} = -\frac{1.41p}{v}$.

Ejemplo 5. — La fórmula que da la resistencia eléctrica de una cierta longitud de alambre a la temperatura de t° C, es

$$R_t = R_0(1 + \alpha t)$$

en que R_0 es la resistencia a 0° C. Hallar el aumento de la resistencia por cada grado de aumento en la temperatura y por ohmio de resistencia inicial; deducir de aquí una interpretación de α.

El problema puede abordarse desde dos puntos de vista:

a) Según los principios preliminares.

$$R_t = R_0(1 + \alpha t) = R_0 + R_0\alpha t$$
$$R_t - R_0 = R_0\alpha t.$$

esto es, aumento de la resistencia para t° C. $= R_0\alpha t$

» » » » 1° C. $= \frac{R_0\alpha t}{t} = R_0\alpha$.

y como éste es el aumento de la resistencia para la resistencia inicial R_0 se deduce que el aumento de la resistencia para 1°C. por ohmio de resistencia inicial es $\frac{R_0\alpha}{R_0} = \alpha$.

b) Por derivación.

Incremento relativo de R_t con relación a $t = \frac{dR_t}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}(R_0 + R_0\alpha t)$$
$$= 0 + R_0\alpha = R_0\alpha$$

y por lo tanto el incremento de la resistencia para 1ºC por ohmio de resistencia inicial es α.

El símbolo α es por lo tanto el «coeficiente de temperatura», siendo su valor numérico para metales puros de 0,0038.

Ejemplo 6. — Hallar el valor de $\frac{d}{ds}\left(4s^4 - \frac{3}{s^2} + 6s^{\frac{1}{2}} - 1{,}8^4\right)$.

Escribamos la expresión en la siguiente forma $4s^4 - 3s^{-2} + 6s^{0,5} - 1{,}8^4$

Tendremos:

$$\frac{d}{ds}(4s^4 - 3s^{-2} + 6s^{0,5} - 1{,}8^4) = 4 \times 4s^3 - (3 \times -2s^{-3}) + (6 \times 0{,}5s^{-0,5}) - 0$$

$$= 16^3s + 6s^{-3} + 3s^{-0,5}$$

$$= 16s^3 + \frac{6}{s^3} + \frac{3}{\sqrt{s}}$$

Ejemplo 7. — Dada la relación $x = a^{\frac{2}{n}}\left(1 - a^{\frac{n-1}{n}}\right)$ que es una fórmula referente a la salida de un gas por un orificio, hallar la expresión de $\frac{dx}{da}$.

La expresión $a^{\frac{2}{n}}\left(1 - a^{\frac{n-1}{n}}\right)$ es un producto de funciones de la variable independiente (en este caso a) y no puede ser derivada como tal producto con nuestros conocimientos actuales. Queda, sin embargo, eliminada la dificultad efectuando el producto indicado.

En efecto:

$$x = a^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{n-1}{n} + \frac{2}{n}} = a^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{n+1}{n}}$$

$$\frac{dx}{da} = \frac{d}{da}\left(a^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{n+1}{n}}\right)$$

$$= \frac{2}{n} \times a^{\frac{2}{n}-1} - \frac{n+1}{n} a^{\frac{n+1}{n}-1}$$

$$= \frac{2}{n} a^{\frac{2-n}{n}} - \frac{n+1}{n} a^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\left(2a^{\frac{2-n}{n}} - (n+1)a^{\frac{1}{n}}\right)$$

Ejemplo 8. — Determinar el valor de

$$\frac{d}{dm}\left(\frac{17m^{0,75} - 0{,}45m^{9,86} + 11 + 2{,}4m^{4,32}}{5m^{4,32}}\right).$$

Para evitar el cociente de funciones de m dividimos cada término por $5m^{4,32}$ y tendremos la expresión

$$= \frac{17m^{6,75}}{5m^{4,32}} - \frac{0,45m^{9,86}}{5m^{4,32}} + \frac{11}{5m^{4,32}} + \frac{2,4m^{4,32}}{5m^{4,32}}$$

$$= 3,4m^{-3,57} - 0,09m^{5,54} + 2,2m^{-4,32} + 0,48$$

$$\frac{d}{dm} \text{(de la expresión)} = (3,4 \times -3,57m^{-4,57}) - (0,09 \times 5,54m^{4,54})$$

$$+ (2,2 \times -4,32m^{-5,32} + 0)$$

$$= -12,14m^{-4,57} - 0,499m^{4,54} - 9,50m^{-5,32}$$

$$= -\left(\frac{12,14}{m^{4,57}} + 0,499m^{4,54} + \frac{9,50}{m^{5,32}}\right)$$

Demostración de la construcción de la curva de pendientes dada en la página 14.

Nos ocuparemos primero del caso particular en que la ecuación de la curva primitiva es $y = x^2$.

Refiriéndonos a la figura 4, la ecuación de la curva OAB es $y=x^2$; la ecuación de la curva CG es $y_1 = (x - h)^2 = x^2 + h^2 - 2xh$.

Por lo tanto las diferencias de las ordenadas de ambas curvas serán:

$$= x^2 - x^2 - h^2 + 2xh$$

$$= 2xh - h^2$$

de modo que la ecuación de la curva MN es

$$y_2 = 2xh - h^2$$

Ahora bien, la curva ODE es la curva MN corrida hacia la izquierda una distancia igual a $\frac{h}{2}$ unidades horizontalmente, y por lo tanto su ecuación es $y_3 = 2\left(x + \frac{h}{2}\right)h - h^2$, puesto que en vez de x tenemos que escribir $\left(x + \frac{h}{2}\right)$.

Por lo tanto la ecuación de la curva ODE es

$$y_3 = 2xh$$

ó

$$\frac{y_3}{h} = 2x$$

si hacemos pues $Y = \frac{y_3}{h}$, $\qquad Y = 2x$

o lo que es lo mismo, la ecuación de la curva ODE es la de pendientes de la curva $y = x^2$ con tal que las ordenadas sean leídas a una cierta escala que es la primitiva escala vertical dividida por h expresada en unidades horizontales.

Tenemos por lo tanto que la curva ODE es la curva de pendientes de la curva OAB.

Antes de discutir el caso general, tomemos el caso de la curva primitiva $y = x^3$.

Si corremos la curva hacia la derecha una distancia h, la ecuación de la curva nueva es

$$y_1 = (x - h)^3$$

y la ecuación de la curva que da las diferencias de las ordenadas es

$$\begin{aligned} y_2 = y - y_1 = x^3 - (x - h)^3 &= x^3 - x^3 + 3x^2h - 3xh^2 + h^3 \\ &= 3x^2h - 3xh^2 + h^3 \end{aligned}$$

Corriendo la curva $\frac{h}{2}$ unidades a la izquierda se obtiene su ecuación escribiendo $\left(x + \frac{h}{2}\right)$ en vez de x, resultando

$$\begin{aligned} y_3 &= 3\left(x + \frac{h}{2}\right)^2 h - 3\left(x + \frac{h}{2}\right)h^2 + h^3 \\ &= 3x^2h + \frac{3h^3}{4} + 3h^2x - 3xh^2 - \frac{3h^3}{2} + h^3 \\ &= 3x^2h + \frac{h^3}{4} \end{aligned}$$

Dividiendo por h

$$\frac{y_3}{h} = 3x^2 + \frac{h^2}{4}$$

o bien,

$$Y = 3x^2 + \frac{h^2}{4}$$

Ahora bien, si tomamos h suficientemente pequeño, $\frac{h^2}{4}$ es despreciable en comparación con $3x^2$ y tendremos por lo tanto como ecuación de la curva resultante $Y = 3x^2$, que coincide con la de la curva derivada $y = 3x^2$, considerando las ordenadas medidas en la escala primitiva dividida por h.

Estudiemos ahora el caso de la primitiva $y = x^n$. Adaptando la notación anterior tendremos,

$$y_1 = (x - h)^n$$

$$y_2 = y - y_1 = x^n - (x - h)^n = x^n - \left(x^n - nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} x^{n-2}h^2 - \ldots\right)$$

$$= nx^{n-1}h - \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} x^{n-2}h^2 + \ldots$$

Escribamos ahora $\left(x + \frac{h}{2}\right)$ en vez de x y tendremos

$$y_3 = n\left(x + \frac{h}{2}\right)^{n-1} h - \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\left(x + \frac{h}{2}\right)^{n-2} h^2 + \ldots$$

$$\frac{y_3}{h} = \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h + \frac{n(n-1)(n-2)}{8} x^{n-3}h^2 + \ldots\right.$$

$$\left. - \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h - \frac{n(n-1)(n-2)}{4} x^{n-3}h^2 - \ldots\right]$$

$$= nx^{n-1} + \text{términos que contienen el factor } h.$$

Por lo tanto si h es suficientemente pequeño

$$\mathrm{Y} = \frac{y_3}{h} = nx^{n-1}.$$

Ejercicios 2. — Sobre la derivación de las potencias de la variable independiente

1. Hallar, aplicando los principios preliminares, el coeficiente diferencial de x^4.

2. Halla la pendiente de la curva $y = \frac{8}{x^2}$ para $x = 0{,}5$

(*a*) Por medición ordinaria, (*b*) por derivación.

3. La sensibilidad de un regulador está medida por el cambio de altura correspondiente al cambio de velocidad expresada en una fracción de la velocidad. Así, si h y v representan la altura y la velocidad, la sensibilidad $= dh : \frac{dv}{v}$.

Si la altura es inversamente proporcional al cuadrado de la velocidad, hallar una expresión para el valor de la sensibilidad.

Derivar con relación a x las funciones de los ejercicios 4 a 15.

4. $3x^9$. **5.** $\frac{15}{x^5}$. **6.** $81,5x^{-0.23}$. **7.** $19x^{1,72}$. **8.** $\frac{0,215}{4x^{-0,16}}$.

9. $\frac{8x^{4,13}}{2,94x^{-7,55}}$. **10.** $5\sqrt[9]{x^{-2}}$. **11.** $\left(\frac{4x^{-2}}{7x^{\frac{3}{5}}}\right)^{\frac{1}{2}}$. **12.** $\frac{(x^{3,7})^{2,9}}{15x^{1,42}}$.

13. $15x^3 - 16x^{2,8} - \frac{14}{2x^3} + 87$. **14.** $9y^{8.17}$. **15.** $\frac{8a^2b^{1.75}}{7\cdot\sqrt[3]{27x^{1,5}}}$.

16. Hallar el valor de $\frac{dp}{dv}$ cuando $pv^{1,3} = 570$ y $v = 28,1$.

17. Hallar el valor de $\frac{d}{dv}\left(\frac{1,17v^9 - 2v^{0,8} - 3v^{0,72} + v^{-0,04} + 24}{8v^{4,16}}\right)$.

18. Si $E = -15 + 14\,T - 0,0068\,T^2$, hallar el valor del incremento de E con relación a T cuando T vale 240.

19. Calcular el valor de $\frac{dH}{dv}$ en la fórmula $\frac{dH}{dv} = \frac{1}{\gamma - 1}\left\{v\frac{dp}{dv} + \gamma p\right\}$ cuando $pv^{1,3} = C$ y $\gamma = 1,4$.

20. Hallar la velocidad de descarga $\left(\frac{dm}{dt}\right)$ de aire a través de un orificio de un depósito (siendo la presión de 4 Kgs/cm.²) con los siguientes datos

$$pV = mRT\,;\ R = 29,27;\ V = 1,350;\ T = 300$$

Tiempo en segundos (t)	0	60	135	255	315
Presión en kgs./cm.² (p)	6,3	4,5	3,0	1,5	1

Nota — Representar los valores de p, en función de los de t y hallar $\frac{dp}{dt}$ para $p = 4$.

21. Si P es el desplazamiento en peso de un buque.
p el peso de los elementos ofensivos y defensivos
$P = aP + bP^{\frac{2}{3}} + p$.

Hallar el incremento del armamento y de la protección en relación con el incremento del desplazamiento.

22. Si $M = \frac{w(l-x)^2y}{2l}\left(1 + \frac{y}{l}\right) - \frac{w(y-x)^2}{2}$ hallar $\frac{dM}{dx}$, siendo l e y constantes.

23. Si $M = \frac{Wy}{2l^2}(l^2 - 4y^2)$ hallar el valor de y para el cual $\frac{dM}{dy} = 0$.

24. Si $S = \frac{w}{2}\left\{\frac{(x+ny)^2}{l} - \frac{x^2}{y}\right\}$, hallar el valor de $\frac{dS}{dx}$.

25. Hallar el valor de h para el cual $\frac{dD}{dh} = 0$, cuando

$$D = \frac{f_c + f_t}{2Eh}\left\{\frac{l^2}{4} + \frac{ld}{4} + \frac{lh^2}{d}\right\}.$$

(h es la altura de una viga Warren y el valor que se halla será la altura para la máxima rigidez).

26. Si $p = \frac{2B}{r^3} - A$ y $q = \frac{B}{r^3} + A$, hallar el valor de $r\frac{dp}{dr}$, expresado en función de p y q.

(Este problema se refiere a los esfuerzos en una gruesa esfera siendo p la presión radial y q la tensión).

27. En un cierto vapor la relación entre la temperatura absoluta T y la presión absoluta p está dada por la ecuación $T = 150p^{\frac{1}{4}} + 258$ y el calor latente L está dado por $L = 795 - 0{,}5\ T$. Hallar el volumen en m.^{3} por kg. del vapor, cuando la presión absoluta es de 5,67 kg. por cm.^{2} partiendo de la fórmula

$$V - 0{,}00125 = \frac{JL}{10.000T} \cdot \frac{dT}{dp} \qquad (J = 427).$$

28. Para una carga uniforme en movimiento sobre una viga de longitud l, el momento de flexión M en un punto dado es

$$M = \frac{wry}{l}\left(l - y + x - \frac{r}{2}\right) - \frac{wx^2}{2}.$$

Si y es una constante, hallar la expresión del esfuerzo cortante, (es decir el incremento relativo del momento de flexión).

29. Dados: ρ = resistencia eléctrica en microohmios por cm.^{3}

x = porcentaje de aluminio en el acero.

tenemos $\rho = 12 + 12x - 0{,}3x^3$ para el acero pobre en carbono.

Hallar el incremento relativo de ρ con relación al del aluminio cuando $x = 4$.

30. La ecuación que da la forma que toma un alambre de tracción eléctrica es

$$y = \frac{x^2}{2000} - \frac{x^3}{1760}$$

y el radio de curvatura $= \dfrac{1}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$

Hallar el valor de los radios de curvatura.

A continuación exponemos dos ejemplos que muestran la gran utilidad de las reglas de derivación, por lo que se refiere a las vigas cargadas.

Ejemplo 9. — Probar que el esfuerzo cortante en cualquier punto de una viga está dado por el incremento relativo del momento de flexión en este punto.

Consideramos dos secciones de la viga apartadas la una de la otra en δx (*V.* fig. 9). Estando definido el esfuerzo cortante por la suma de

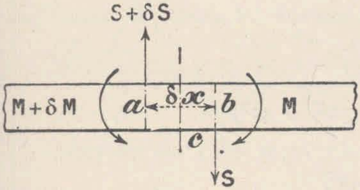


Fig. 9

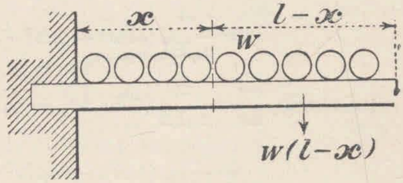


Fig. 10

Ejemplos sobre vigas cargadas

todas las fuerzas a la derecha de la sección que se considera, sea S el esfuerzo cortante en b, y $S + \delta S$ en a. Entonces, el momento resultante de todas las fuerzas a la derecha de b (esto es, el momento de flexión en b) $=$ M, y el momento en

$$a = \mathrm{M} + \delta\mathrm{M}.$$

Tomando momentos respecto de c

$$M + \delta\mathrm{M} = \mathrm{M} + (\mathrm{S} + \delta\mathrm{S})\frac{\delta x}{2} + \mathrm{S}\left(\frac{\delta x}{2}\right)$$

$$= \mathrm{M} + \mathrm{S}\cdot\delta x + \frac{\delta\mathrm{S}\cdot\delta x}{2}$$

o bien
$$\delta\mathrm{M} = \mathrm{S}\delta x + \frac{\delta\mathrm{S}\cdot\delta x}{2}.$$

Dividiendo por δx
$$\frac{\delta\mathrm{M}}{\delta x} = \mathrm{S} + \frac{\delta\mathrm{S}}{2};$$

cuando δx decrece indefinidamente, δS puede despreciarse y

$$\underline{\frac{d\mathrm{M}}{dx} = \mathrm{S}.}$$

Este ejemplo tiene relación con el siguiente.

Ejemplo 10. — Para una viga de longitud l, empotrada en un extremo y cargada uniformemente con w tons. por metro, la flecha a distancia x está dada por la fórmula

$$y = \frac{w}{24EI}(6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4)$$

siendo E el módulo de Young correspondiente al material en cuestión é I el momento de inercia de la sección.

Hallar los valores de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ y de $\frac{d^4y}{dx^4}$.

$$y = \frac{w}{24EI}(6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4).$$

derivando, $$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{24EI}(6l^2 \times 2x) - (4l \times 3x^2) + 4x^3)$$

$$= \frac{w}{24EI}(12l^2x - 12lx^2 + 4x^3)$$

$$= \frac{w}{6EI}(3l^2x - 3lx^2 + x^3).$$

volviendo a derivar, $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{w}{6EI}(3l^2x - 3lx^2 + x^3)\right]$$

$$= \frac{w}{6EI}(3l^2 - 6lx + 3x^2)$$

$$= \frac{w}{2EI}(l^2 - 2lx + x^2)$$

$$= \frac{w}{2EI}(l - x)^2$$

derivando de nuevo, $$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{w}{2EI}(l^2 - 2lx + x^2)\right]$$

$$= \frac{w}{2EI}(0 - 2l + 2x)$$

$$= \frac{w}{EI}(x - l)$$

y si seguimos derivando

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{w}{EI}(x - l)\right]$$

$$= \frac{w}{EI}(1 - 0) = \frac{w}{EI}.$$

Se pueden encontrar interpretaciones físicas para las varias derivadas.

Refiriéndonos a la figura 10, consideremos una sección x a la derecha del extremo fijo. A la derecha de esta sección hay una longitud de viga $l - x$ cargada con w tons. por metro, de modo que la carga total en dicha longitud es $w(l - x)$ y como la carga está distribuída por igual, puede suponerse concentrada a la distancia $\frac{l - x}{2}$ de la sección.

Ahora bien, el momento flector de la sección es igual al momento resultante de todas las fuerzas a la derecha de la sección, o sea

$$= \text{fuerza} \times \text{distancia} = w(l - x) \times \left(\frac{l - x}{2}\right) = \frac{w}{2}(l - x)^2$$

Comparando este resultado con el valor encontrado para $\frac{d^2y}{dx^2}$ observamos que ambos son iguales si se exceptúan las constantes E, I; así $\frac{d^2y}{dx^2}$ tiene que expresar el valor del momento flector.

La regla que relaciona M, momento flector con $\frac{d^2y}{dx^2}$ es

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{I}} = \mathrm{E}\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{o bien} \quad \mathrm{M} = \mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2}$$

cuya demostración daremos en un capítulo posterior.

Por otro lado hemos probado en el ejemplo anterior que el esfuerzo cortante está dado por el incremento relativo del momento flector; así,

$$\begin{aligned} \mathrm{S} = \frac{d\mathrm{M}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2}\right) &= \mathrm{EI}\frac{d^3y}{dx^3} \\ &= \mathrm{EI} \times \frac{w}{\mathrm{EI}}(x - l) \\ &= w(x - l) \end{aligned}$$

resultado que concuerda con nuestra afirmación de que el esfuerzo en cada sección es la suma de todas las cargas a la derecha de dicha sección. (La razón del signo negativo de $(x - l)$, en vez de $l - x$ no la discutiremos ahora). Continuando nuestro estudio tenemos,

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w}{\mathrm{EI}}$$

o bien
$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=w$$

y como w es la carga sobre la viga y

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d}{dx}\left(EI\frac{dy^3}{dx^3}\right)=\frac{dS}{dx}$$

resulta que la carga está medida por el incremento relativo del esfuerzo cortante.

Si ahora trazamos la línea elástica, obtendremos por curvas derivadas sucesivas, la curva de pendientes de la línea elástica, la del momento de flexión, la de los esfuerzos cortantes y por último la de las cargas.

Ejemplo 11. — El trabajo efectuado durante la expansión del gas, en una turbina de gas está dado por

$$W=\frac{n}{n-1}P_1V_0\frac{T_1}{T_0}\left(1-r^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

en la que r es la relación de expansión.

Comparar el resultado de la regulación por expansión y la regulación por variación de temperatura inicial, desde el punto de vista de rendimiento.

Veamos primero lo referente a la expansión, es decir, consideraremos T_1 constante y r variable. En este caso el incremento del trabajo con relación a r es $\frac{dW}{dr}$.

Ahora
$$\frac{dW}{dr}=\frac{d}{dr}\left[\frac{n}{n-1}P_1V_0\frac{T_1}{T_0}\left(1-r^{\frac{n-1}{n}}\right)\right]$$

$$=\frac{n}{n-1}P_1V_0\frac{T_1}{T_0}\left(0-\frac{n-1}{n}r^{\frac{n-1}{n}-1}\right)$$

$$=-\frac{n}{n-1}P_1V_0\frac{T_1}{T_0}\times\frac{n-1}{n}r^{-\frac{1}{n}}$$

$$=-\frac{P_1V_0T_1}{T_0r^{\frac{1}{n}}}$$

Consideramos ahora r constante y T_1 variable

Entonces
$$\frac{dW}{dT_1}=\frac{n}{n-1}\frac{P_1V_0}{T_0}\left(1-r^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

y expresando los dos resultados en forma de relación tendremos

$$\frac{dW}{dr} : \frac{dW}{dT_1} = -\frac{P_1V_0T_1}{T_0r^{\frac{1}{n}}} \times \frac{(n-1)T_0}{nP_1V_0\left(1 - r^{\frac{n-1}{n}}\right)}$$

$$= \frac{(1-n)\,T_1}{nr^{\frac{1}{n}}\left(1 - r^{\frac{n-1}{n}}\right)}$$

LONGITUDES DE LAS SUBTANGENTES Y SUBNORMALES DE LAS CURVAS. — La proyección de la tangente a una curva sobre el eje de las x es conocida con el nombre de *subtangente*, es decir, la distancia «sub» o «bajo» la tangente. La proyección de la normal se denomina *subnormal*.

La pendiente de una curva en un punto, medida por la de la tangente en dicho punto, está dada por el valor de $\frac{dy}{dx}$ o, si $\alpha =$ inclinación de la tangente con relación al eje de las x,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

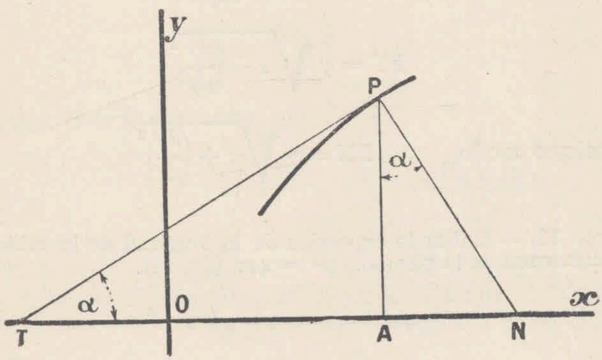


Fig. 11. — Subtangente y subnormal

En la figura 11. $\frac{PA}{AT} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$

por lo tanto $AT = PA\frac{dx}{dy}$

pero $AT =$ subtangente y $PA = y$

y por lo tanto la longitud de la subtangente $= y\,\frac{dx}{dy}$

Por otro lado $\angle$ APN $= \alpha$, puesto que $\angle$ TPN es un ángulo recto

$$\operatorname{tg} \angle \mathrm{APN} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{PA}} = \frac{\text{subnormal}}{y}$$

es decir, $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{subnormal}}{y}$$

o bien, $$\text{subnormal} = y \times \operatorname{tg} \alpha = y \frac{dy}{dx}$$

Para hallar la longitud de la tangente PT se tiene

$$\begin{aligned}(\mathrm{PT})^2 &= (\mathrm{PA})^2 + (\mathrm{AT})^2 \\ &= y^2 + y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \\ &= y^2\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]\end{aligned}$$

$$\mathrm{PT} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

Del mismo modo $$\mathrm{PN} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Ejemplo 12. — Hallar la expresión de la longitud de la subtangente y de la subnormal de la parábola $y^2 = 4ax$ (fig. 12).

$$y^2 = 4ax \qquad y = 2\sqrt{a} \,.\, x^{\frac{1}{2}}$$

luego $$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{a} \,.\, \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \text{ o bien } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$$

Por lo tanto la longitud de la subtangente

$$\begin{aligned}&= y\frac{dx}{dy} \\ &= y \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}\sqrt{x} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \\ &= \underline{2x}\end{aligned}$$

Este resultado hace ver una importante propiedad de la parábola y es de gran utilidad para el trazado de las tangentes. Como AT $= 2x = 2 \times$ AO. Para trazar la tangente en cualquier punto P, se baja la perpendicular al eje, se toma OT = OA y se traza TP

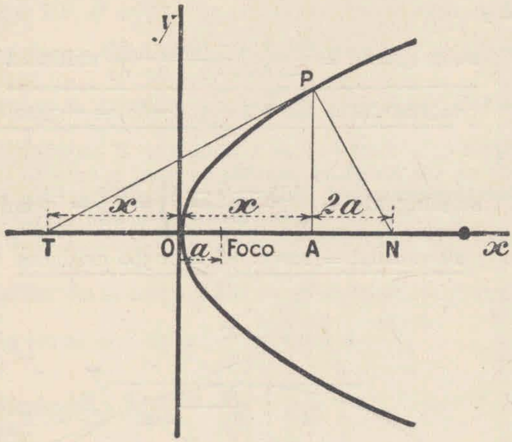


Fig. 12

La longitud de la subnormal AN $= y \dfrac{dy}{dx}$

$$= y \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{a}\sqrt{x}\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$$

$$= \underline{2a}$$

es decir, la longitud de la subnormal es independiente de la posición de P con tal de que la subnormal se mida sobre el eje de la parábola.

Ejemplo 13. — Hallar las longitudes de la subtangente y la subnormal de la parábola $y = 15x^2 - 2x - 9$

para $x = -2$, y para $x = 3$

El eje de la parábola es vertical y por lo tanto la subnormal, que se mide sobre el eje de la x no es constante puesto que está dada por el valor $y \dfrac{dy}{dx}$.

Ahora bien $\qquad y = 15x^2 - 2x - 9$

y $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 30x - 2$

Por lo tanto, la subtangente $= y\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{15x^2 - 2x - 9}{30x - 2}$

y la subnormal $= y\dfrac{dy}{dx} = (15x^2 - 2x - 9)\,(30x - 2)$

Para $x = -2$

$$\text{subtangente} = \frac{60 + 4 - 9}{-60 - 2} = -\frac{55}{62} \text{ unidades}$$

$$\underline{\text{subnormal} = (60 + 4 - 9)\,(-62) = -3410 \text{ unidades}}$$

Para $x = 3$

$$\text{subtangente} = \left(\frac{135 - 6 - 9}{88}\right) = \frac{120}{88} = \frac{15}{11} \text{ unidades}$$

$$\underline{\text{subnormal} = 120 \times 88 = 10560 \text{ unidades}}$$

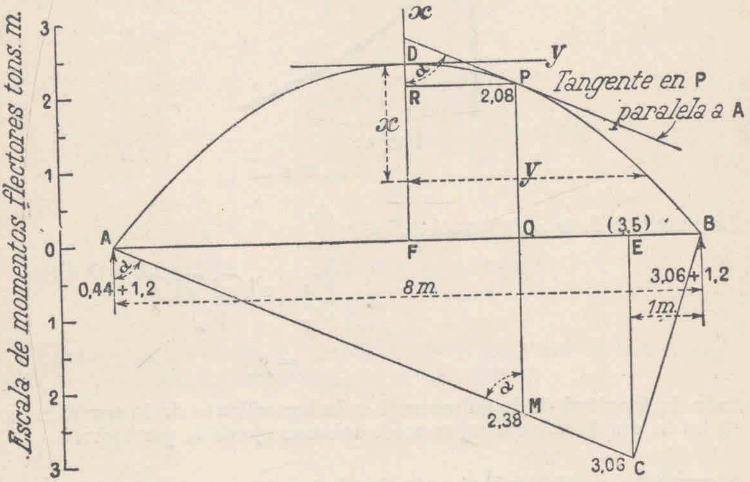


Fig. 13

Ejemplo 14. — Un árbol de 8 metros entre soportes pesa 300 kgs. por metro lineal y sobre él está montado a 1 metro de uno de los soportes un volante de 3,5 tons. Hallar en qué punto tenemos el momento flector máximo y calcularlo.

Considerando el árbol como una viga apoyada en sus dos extremos AB (V. fig. 13) podemos trazar los diagramas de los momentos flectores para los diversos sistemas de cargas, o sea, ADB para la carga uniforme, que es el peso del árbol, y ACB para la carga concentrada.

La carga total distribuída es wl es decir, $0{,}300 \times 8 = 2{,}4$ toneladas, que da iguales reacciones de 1,2 tons. en A y B; la curva de momentos flectores es una parábola cuyo vértice es D siendo la máxima ordenada DF $= \frac{wl^2}{8} = \frac{0,3 \times 8^2}{8} = 2,4$ tons. × metro. Si para comodidad del ulterior trabajo se escogen los ejes x e y como indicamos en la figura, la ecuación de la parábola es $y^2 = 4ax$, o tomando el valor de y como FB y el de x como DF, $4^2 = 4a \times 2,4$ de la cual resulta $4a = 6,66$ ó $y^2 = 6,66x$.

La carga de 3,5 tons. produce reacciones de $\frac{7}{8} \times 3,5$ tons. en B y de $\frac{1}{8} \times 3,5$ tons. en A, es decir, $R_B = 3,06$ $R_A = 0,44$. Por lo tanto, el momento de flexión en E es $3,06 \times 1 = 3,06$ toneladas metro.

Como el momento total se obtiene adicionando las ordenadas de la curva ADB con las de ACB, el momento de flexión máximo se determina trazando la tangente a la parábola que sea paralela a AC y la posición que satisface a esta condición puede ser encontrada rápidamente por derivación:

La ecuación de la curva ADB es $y^2 = 6,66x$, ó, $y = 2,58x^{\frac{1}{2}}$, y la pendiente de la curva está dada por el valor de $\frac{dy}{dx}$.

Ahora si $y = 2,58x^{\frac{1}{2}}$, $\qquad \frac{dy}{dx} = 2,58 \times \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

esto es $\qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2,58}{2x^{\frac{1}{2}}}$

Refiriéndonos a la curva ACB, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AE}{EC} = \frac{7}{3,06}$

y por lo tanto, en el punto buscado

deberá tenerse $\qquad \frac{2,58}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{7}{3,06}$

o bien, $\qquad x^{\frac{1}{2}} = \frac{2,58 \times 3,06}{14}$

esto es $\qquad (DR)^{\frac{1}{2}} = \frac{2,58 \times 3,06}{14}$.

Y como $(PR)^2 = 6,66 \times DR$ se tendrá $PR = \frac{\sqrt{6,66} \times 2,58 \times 3,06}{14}$

$$= 1,45$$

El momento máximo se obtiene por lo tanto a la distancia $4 - 1,45 = 2,55$ del soporte de la derecha.

Para hallar el valor del momento máximo, tendremos

$$DR = \left(\frac{2,58 \times 3,06}{14}\right)^2 = 0,318$$

$$PQ = DF - DR = 2,4 - 0,318 = 2,082 \text{ tons. metro}$$

y también $QM = \frac{AQ}{AE} \times EC = \frac{5,45}{7} \times 3,06 = 2,38$ ton. m.

Por lo tanto el valor del momento máximo es $2,38 + 2,08 = \underline{4,46}$ toneladas metro.

Ejercicio 3. — Sobre las longitudes de subtangentes y subnormales y sobre resistencias de vigas

1. Hallar la longitud de la subnormal y de la subtangente de la curva $5y = 4x^3$ en el punto para el cual $x = 3$.

2. Si $y = \frac{gx^2}{2V^2}$, $V = 35,6$ y $g = 9,8$. hallar el valor de x para el cual la pendiente de la curva es de $\frac{1}{17,4}$.

3. Un arco parabólico tiene una luz de 50 metros y una flecha de 8. Hallar la ecuación de la tangente y la pendiente del arco. ¿Cuál es la pendiente de la tengente en el extremo?

4. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $p = \frac{450}{v^{1,2}}$ en el punto $v = 5$.

En los ejercicios 5 a 7, y, es una flecha, x una distancia a lo largo de la viga. Hallar en cada caso, expresiones para el momento flector M, el esfuerzo cortante S y la carga L. La viga es de sección uniforme y de longitud l.

5. La viga está apoyada en ambos extremos y cargada con un peso W en el centro.

$$y = \frac{W}{2EI}\left(\frac{lx^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right) \quad (x \text{ es la distancia a partir del centro}).$$

6. La viga está apoyada en ambos extremos y cargada uniformemente con un peso w por metro lineal.

$$y = \frac{w}{2EI}\left(\frac{l^2x^2}{8} - \frac{x^4}{12}\right) \quad (x \text{ es la distancia a partir del centro}).$$

7. Un brazo de grúa está cargado con un peso W en el extremo libre

$$y = \frac{W}{EI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \quad (x \text{ es la distancia a partir del extremo fijo}).$$

8. Hallar las longitudes de las proyecciones sobre el eje de las y de la tangente y de la normal a la parábola $x^2 = 10b^2y + 4c$ siendo $x = 9a$.

9. Demostrar que la subnormal (a lo largo del eje de la parábola) $x^2 = 6y$ es constante y hallar el valor de esta constante.

10. Si $EI \frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} - \frac{Px^2}{2} + C$ y $C = \frac{Pl^2}{2} - \frac{wl^3}{12}$ hallar el valor de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

DERIVACIÓN DE FUNCIONES EXPONENCIALES. — La regla de derivación que acabamos de dar se aplica solamente a las funciones que comprenden la variable independiente elevada a una determinada potencia. Hay que buscar ahora un método para la derivación de las funciones exponenciales, es decir, aquellas en que la variable independiente aparece en el exponente; como e^{5x} o bien, 4^x.

Cuando tratamos del trazado de la curva $y = e^x$ (véase parte I, página 429) se observó que trazando las tangentes a la curva en varios puntos, las pendientes de esas tangentes son iguales a las ordenadas de la curva primitiva en los puntos en que tocan a la curva. Por lo tanto, la curva de pendientes de la curva $y = e^x$ coincide con la primitiva, es decir,

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

o, el incremento relativo de la función es igual al valor de la función misma.

Podemos establecer algebraicamente el resultado del siguiente modo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots .$$

Suponiendo que una serie de un número ilimitado de términos puede ser derivada término a término, sumando después los resultados, para obtener la derivada (lo cual es cierto para todos los casos que hemos de tratar), tendremos derivando

$$\begin{aligned} \frac{de^x}{dx} &= 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{6} + \frac{4x^3}{24} + \ldots . \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots . \\ &= e^x \end{aligned}$$

De aquí resulta otra propiedad para la función e^x: la de que la subtangente $= y\frac{dy}{dx} = e^x \times \frac{1}{e^x} = 1$; es decir, la subtangente es constante e igual a la unidad.

La curva $y = e^x$ puede ser de utilidad como calibre o plantilla para medir pendientes de líneas, trazando la curva en papel transparente y moviéndola sobre la línea que se quiere comprobar basta que la curva y la línea tengan la misma dirección. Bastará entonces leer la ordenada de la curva teniendo en cuenta después el necesario cambio de escalas.

Continuando el estudio de las reglas de derivación, tratemos de encontrar la regla para la función e^{bx}.

Refiriéndonos a la parte I (pág. 430) observamos que si trazamos la curva $y = e^x$, ésta representa también la ecuación $y = e^{bx}$, dividiendo los números correspondientes a las abscisas de la curva $y = e^x$ por b. Si medimos ahora la pendiente de la curva construída, o sea, la que tiene por ecuación $y = e^x$, podemos obtener de ella la pendiente de la curva $y = e^{bx}$ multiplicando la pendiente por b sin variar las distancias verticales, puesto que las distancias horizontales en el caso de $y = e^{bx}$ son $\frac{1}{b}$ de las correspondientes a $y = e^x$.

Por lo tanto la pendiente de la curva $y = e^{bx}$ es $b \times$ pendiente de la curva $y = e^x$

o bien
$$\frac{de^{bx}}{dx} = be^{bx}$$

Hay que hacer observar que la potencia de la función es la misma después de la derivación, pero el multiplicador de la variable independiente se hace multiplicador de la función después de la derivación.

Conviene recordar esta última regla, es decir, **todo multiplicador o divisor de la V. I. en la función se transforma en multiplicador o divisor de la función después de la derivación.**

De e^{bx} podemos pasar a ae^{bx} cuya derivada está dada por

$$\frac{dae^{bx}}{dx} = abe^{bx}$$

Ejemplo 15. — Si $y = 5e^{-\frac{1}{6}x}$, hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 5e^{-\frac{1}{6}x} = 5 \times -\frac{1}{6} e^{-\frac{1}{6}x}$$

$$= -\frac{5}{6} e^{-\frac{1}{6}x}.$$

Refiriéndonos al último ejemplo, observamos que el exponente de e es exactamente el mismo antes y después de la derivación. El factor $-\frac{1}{6}$ multiplica la V. I. en la función original y por lo tanto actúa como coeficiente después de la derivación. Del mismo modo el factor 5 se conserva durante toda la derivación.

Ejemplo 16. — Si $C = C_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$, en que C y C_0 representan corrientes eléctricas, R la resistencia de un circuito, L la autoinducción del circuito y t el tiempo, hallar el incremento relativo de C con relación al tiempo.

Este ejemplo demuestra la importancia del incremento relativo con relación al incremento absoluto mismo, pues nos enseña que para un circuito inductivo la variación de la corriente es a menudo extremadamente rápida y por lo tanto peligrosa.

Incremento de C con relación al tiempo

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt} C_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$= C_0 \times -\frac{R}{L} e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$= -\frac{R}{L} C_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$= -\frac{R}{L} C.$$

es decir, el incremento negativo de la corriente, cuando cesa la F.E.M. aplicada, es proporcional a la corriente en el momento en que el circuito se abre.

Para ilustrar mejor el ejemplo, véase el caso para el cual la corriente en el momento de cesar la F.E.M. es de 14,5 amp., la resistencia del circuito 6,4 ohm., y su autoinductancia 0,006 henry.

El incremento relativo de la corriente es por tanto de

$$= -\frac{6{,}4}{0{,}006} \times 14{,}5 = -15470 \text{ amps.}$$

por segundo, mientras que la corriente normal es solamente de 14,5 amps.

Las expresiones e^x y e^{bx} son formas particulares de la función exponencial general a^x. Para derivar ésta podemos proceder por uno de los dos métodos:

a) *Partiendo de los principios preliminares.* En la parte I, página 566 se da el desarrollo en serie de a^x, o sea

$$a^x = 1 + x \text{ l. n. } a + \frac{(x \text{ l. n. } a)^2}{\lfloor 2} = \frac{(x \text{ l. n. } a)^3}{\lfloor 3} + \ldots$$

Derivando término a término

$$\frac{da^x}{dx} = 0 + \text{l.n. } a + (\text{l.n. } a)^2 x + (\text{l.n. } a)^3 \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$= \text{l.n. } a \left(1 + x \,\text{l.n. } a + \frac{(x \,\text{l.n. } a)^2}{\lfloor 2} + \frac{(x \,\text{l.n. } a)^3}{\lfloor 3} + \dots\right)$$

$$= \text{l.n. } a \times a^x$$

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \,\text{l.n. } a.$$

b) *Deduciendo el resultado de la derivación de e^{bx}.*

Sea $a^x = e^{bx}$

de manera que $a = e^b$, y por lo tanto l.n. $a = b$.

Tendremos $\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{bx} = be^{bx} = \text{l.n. } a \times e^{bx}$

$= \text{l.n. } a \times a^x$

o bien, a^x l.n. a.

De aquí $$\frac{da^x}{dx} = a^x \cdot \mathbf{l.n.}\ a.$$

Ejemplo 17. — Hallar el valor de $\frac{d4^x}{dx}$

En este caso $a = 4$ y l.n. $4 = 1,3863$

Por tanto $\frac{d4^x}{dx} = \underline{1,3863 \times 4^x.}$

Obsérvese bien que este resultado no puede ser simplificado relacionando 1,3863 con 4 y escribiendo el resultado como $5,5452^x$

Ejemplo 18. — Hallar el valor de $\frac{d^2}{ds^2}(3,6)^s$.

Tenemos $a = 3,6$; l.n. $3,6 = 1,2809$

luego $\frac{d}{ds}(3,6)^s = \text{l.n. } 3,6 \times (3,6)^s = 1,2809 \times (3,6)^s$.

por tanto

$$\frac{d^2}{ds^2}(3,6)^s = \left\{\frac{d}{ds}(3,6)^s\right\} = \frac{d}{ds}(1,2809 \times (3,6)^s)$$

$$= 1,2809 \times \frac{d}{ds}(3,6)^s = 1,2809 \times 1,2809 \times (3,6)^s$$

$$= \underline{1,64(3,6)^s.}$$

Ejemplo 19. — Dado $s = 4e^{5t} + 7e^{-5t}$, hallar el valor de $\frac{d^2s}{dt^2} - 25s$.

$$s = 4e^{5t} + 7e^{-5t}$$

$$\frac{ds}{dt} = (4 \times 5e^{5t}) + (7 \times -5e^{-5t})$$

$$20e^{5t} - 35e^{-5t}.$$

Volviendo a derivar

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 100e^{5t} + 175e^{-5t}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} - 25s = 100e^{5t} + 175e^{-5t} - 100e^{5t} - 175e^{-5t} = \underline{0.}$$

DERIVACIÓN DE l.n. x. — La regla para la derivación de funciones logarítmicas puede ser deducida, bien del desarrollo en serie de l.n. $(1 + x)$, o deduciendo el resultado del de la derivación de e^x. Considerando ambos métodos sucesivamente tendremos:

a) Partiendo de los principios preliminares. — Sea $y = \text{l.n. } x$. Si incrementamos x en δx, y toma un nuevo valor $y + \delta y$;

$$y + \delta y = \text{l.n.}(x + \delta x).$$

Ahora bien, $\text{l.n.}(x+\delta x) = \text{l.n. } x\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right) = \text{l.n. } x + \text{l.n.}\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)$,

Por lo tanto,

$$(y + \delta y) - y = \text{l.n. } x + \text{l.n.}\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right) - \text{l.n. } x$$

esto es, $$\delta y = \text{l.n.}\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)$$

$\text{l.n.}\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)$ puede ser desarrollado en serie en la forma

$$\text{l.n.}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$ (véase parte I, pág. 567)

de modo que

$$\text{l.n.}\left(1+\frac{\delta x}{x}\right) = \left(\frac{\delta x}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^4 + \ldots.$$

o sea $$\delta y = \left(\frac{\delta x}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^4 + \ldots.$$

dividiendo por δx:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\delta x}{2x^2} + \frac{(\delta x)^2}{3x^3} - \frac{(\delta x)^3}{4x^4} + \ldots.$$

Haciendo el valor de δx tan pequeño como se quiera podemos hacer el segundo y los términos sucesivos tan pequeños como queramos, y evidentemente el valor límite de la serie será $\frac{1}{x}$

es decir $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto $$\underline{\frac{d\,\text{l.n.}\,x}{dx} = \frac{1}{x}}$$

b) *Partiendo del resultado* $\frac{de^x}{dx} = e^x$

Sea $y = \text{l.n.}\,x$; de modo que $x = e^y$;

se tiene $$\frac{dx}{dy} = \frac{de^y}{dy} = e^y.$$

Ahora bien, $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\frac{\delta x}{\delta y}}$ y considerando los valores límites de estas

fracciones, $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Queremos hallar $\frac{dy}{dx}$ y hemos encontrado una expresión para $\frac{dx}{dy}$.

De aquí
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$$

o bien
$$\frac{d\,\text{l.n.}\,x}{dx}=\frac{1}{x}$$

Este resultado puede ser ampliado para comprender la forma más general, o sea:

$$\frac{d}{dx}\,\text{l.n.}\,(\mathrm{A}x+\mathrm{B})=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}$$

Pues con arreglo a la regla dada en la página 52, la A que multiplica la V. I. en la función primitiva tiene que aparecer como multiplicador después de la derivación.

Todas estas reglas se aplican a funciones que comprenden logaritmos naturales, pero pueden ser modificadas para los casos en que se trata de logaritmos vulgares,

puesto que $\log x = 0{,}4343\,\text{l.n.}\,x$

se tendrá
$$\frac{d\log x}{dx}=0{,}4343\,\frac{d\,\text{l.n.}\,x}{dx}=\frac{0{,}4343}{x}$$

y
$$\frac{d}{dx}\log(\mathrm{A}x+\mathrm{B})=\frac{0{,}4343\mathrm{A}}{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}$$

Hay que observar que en todas las funciones logarítmicas precedentes, hemos considerado la V. I. elevada a la primera potencia solamente; si la V. I. se eleva a una potencia superior a la primera, hay que emplear otras reglas de que hablaremos más adelante.

Ejemplo 20. — Si $y=\text{l.n.}\,7x$ hallar $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\,\text{l.n.}\,7x=\frac{7}{7x}=\frac{1}{\underline{x}}$$

o de otro modo $\text{l.n.}\,7x=\text{l.n.}\,7+\text{l.n.}\,x$

y por tanto $\quad \dfrac{d}{dx}\text{l.n.}\, 7x = \dfrac{d}{dx}\text{l.n.}\, 7 + \dfrac{d}{dx}\text{l.n.}\, x$

$$= 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Ejemplo 21. — Diferenciar con relación a t la expresión log $(5t - 14)$ y hallar el valor numérico de la derivada cuando $t = 3,2$.

$$\frac{d}{dt}\log(5t - 14) = \frac{0,4343 \times 5}{5t - 14} = \underline{\frac{2,1715}{5t - 14}}$$

Cuando $t = 3,2$

$$\frac{d}{dt}\log(5t - 14) = \frac{2,1715}{16 - 14} = 1,0858.$$

Podemos hallar aproximadamente el resultado tomando valores de $t = 3,19$ y $3,21$ y calculando el valor de $\dfrac{\delta \log(5t - 14)}{\delta t}$.

Así, cuando

$$t = 3,19, \log(5t - 14) = \log(15,95 - 14) = \log 1,95 = 0,2900.$$

$$t = 3,21; \log(5t - 14) = \log(16,05 - 14) = \log 2,05 = 0,3118.$$

y como $\quad \delta \log(5t - 14) = 0,3118 - 0,2900 = 0,0218.$

$$\delta t = 3,21 - 3,19 = 0,02$$

y $\quad \dfrac{\delta}{\delta t}\log(5t - 14) = \dfrac{0,0218}{0,02} = 1,09.$

DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS senh x Y cosh x. — Expresando las funciones hiperbólicas mediante funciones exponenciales,

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Así, para derivar senh x podemos derivar $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Por tanto $\quad \dfrac{d \operatorname{senh} x}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$$= \cosh x$$

y también $\quad \dfrac{d}{dx}\cosh x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$= \operatorname{senh} x.$$

Ejemplo 22. — Hallar la pendiente con respecto a la horizontal de un cable que pese 0,75 kg. por metro y sometido a una tensión de 15 kg. en peso, al final de un tramo de 16 metros.

La ecuación de la forma que toma el cable es

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) = c \cosh \frac{x}{c}$$

en donde $\quad c = \dfrac{\text{tensión horizontal}}{\text{peso por metro}} = \dfrac{15}{0,75} = 20.$

Necesitamos saber la pendiente de la curva cuando $x = 8$ lo cual se obtiene por el valor de $\dfrac{dy}{dx}$ en aquella

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\, c \cosh \frac{x}{c} = c \times \frac{1}{c} \operatorname{senh} \frac{x}{c}$$

Cuando $x = 8 \quad \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{senh} \dfrac{8}{20} = \operatorname{senh} 0,4 = 0,4108$

Este valor es el de la tangente del ángulo de inclinación sobre la horizontal, que es por tanto 22° 20′.

Ejercicios 4. — Acerca de la derivación de a^x, l.n. x y las funciones hiperbólicas

Derivar con respecto a x las funciones de los números 1 a 20.

1. e^{-5x}. **2.** $1,5e^{4,1x}$. **3.** $\dfrac{27}{e^{7x}}$. **4.** $4,15^x$. **5.** $8,72^{2x}$.

6. $e^{9x} + 5e^{-7x}$. **7.** $2x^e$. **8.** 14×2^x. **9.** $41e^{0,25x} + \dfrac{19}{e^{0,16x}} + e^{0,414} + 17$.

10. $3,14e^{5,1x} - 5x^{9,45} + 3,1^{3x} + b$. **11.** $\dfrac{10e^{0,4x}}{5e^{8x}} \times \dfrac{3e^{7,2x}}{2e^{-4,6x}}$. **12.** l.n. $7x$.

13. 3 l.n. $(4 - 5x)$. **14.** $10 \log 8x$. **15.** c l.n. $(4xa + 5^b)$

16. $9e^{-0,2x} -$ l.n. $0,2x + \dfrac{5,71}{x^{0,43}}$. **17.** l.n. $2x(3x - 4,7)$.

18. l.n. $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{(7-4x)}$. **19.** $(e^x)^3 + 4\cosh 2x - 1,7 \log 2,3x$.

20. l.n. $3x^2 + 5x^{-0,7} - 1,8\,(1,8^x) + 12$.

21. Si $y = A_1e^{-3x} + A_2e^{-4x}$, hallar el valor de $\frac{d^2y}{dx_2} + 7\frac{dy}{dx} + 12\,y$

22. Hallar $\frac{d}{dv}$ l.n. $(3 - 4v)$ cuando $v = 1,7$. Comprobar aproximadamente el resultado tomando los valores de $v = 1,65$, $1,75$.

23. Determinar el valor de $\frac{d}{du}\,71$ l.n. $(18 - 0,04u)$.

24. Hallar el valor de $\frac{d}{dt}\log 18\,t$.

25. Si $T = 50e^{0,2\theta}$, hallar el incremento de T con relación a θ.

26. Si $C = C_0\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$, siendo C y C_0 corrientes eléctricas, R la resistencia del circuito y L su autoinducción, hallar el incremento de la corriente C con relación al tiempo t.

27. Dado $v = 2,03\log(7 - 1,8u)$, hallar $\frac{dv}{du}$.

28. Hallar el valor de $\frac{d}{dx}\,5\cosh\frac{x}{4}$ y también el de $\frac{d}{dy}\,p$ senh $\frac{y}{q}$.

29. Una fuerza electromotriz está dada por la ecuación

$$E = A\cosh\sqrt{lr} \times x + B\ \mathrm{senh}\sqrt{lr} \times x.$$

Hallar el valor de $\frac{d^2E}{dx^2}$ en función de E.

30. Si $W = 144\,(p_1\,(1 + \text{l. n. } r) - rp_b)$ hallar el valor de r que hace $\frac{dW}{dr} = 0$; siendo W el trabajo desarrollado en la expansión del vapor desde la presión p_1 y siendo r la razón de expansión.

31. Hallar el valor de $\frac{dy}{dx} + ay$, cuando $y = \frac{b}{a} - \frac{A}{a}\,e^{-ax}$.

32. Si $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + Ce^{-1x}$, hallar el valor de

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 14\frac{dy}{dx} + 24y.$$

33. Hallar el valor de $\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{Vr_1}{r_2}$ cuando $V = A_1e^{\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\cdot x} + A_2e^{-\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\cdot x}$

34. Nernst da la siguiente regla que relaciona la presión p del refrigerante (tal como anhídrido carbónico o amoniaco) y su temperatura absoluta τ.

$$p = A + B\ \text{l.n.}\ \tau + C\tau + \frac{D}{\tau}$$

en la que A, B, C, y D son constantes. Hallar la expresión de $\frac{dp}{d\tau}$.

DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. — Antes de comenzar a establecer las reglas para la derivación de sen x y cos x, es conveniente recordar dos proposiciones trigonométricas necesarias para demostrar estas reglas.

a) Cuando el ángulo es pequeño, el seno puede ser reemplazado por el ángulo mismo expresado en radianes, es decir

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1 \qquad \text{(véase parte I, pág. 554).}$$

b) $\text{sen A} - \text{sen B} = 2 \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) \text{sen } \frac{(A - B)}{2}$ (véase parte I, pág. 352).

Para hallar $\frac{d}{dx}$ sen x haremos lo que en casos anteriores;

Sea $\qquad y = \text{sen } x; \; y + \delta y = \text{sen } (x + \delta x)$

por tanto $\qquad \delta y = y + \delta y - y = \text{sen } (x + \delta x) - \text{sen } x$

$$= 2 \cos\left(\frac{2x + \delta x}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\delta x}{2}\right)$$

Dividiendo por δx.

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2 \cos\left(\frac{2x + \delta x}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\delta x}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{2x + \delta x}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$= \cos\left(\frac{2x + \delta x}{2}\right) \times \left(\frac{\text{sen } \frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}\right)$$

El límite de $\frac{\delta y}{\delta x}$ es $\frac{dy}{dx}$, y el del miembro de la derecha es cos x, puesto que $\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)$ se aproxima indefinidamente a cos x a mepida que δx disminuye, y el valor límite de $\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}\right)$, que podemos escribir $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, es 1.

De aquí, $$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} \text{ o bien } \frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\mathrm{L}} \frac{\delta y}{\delta x} = \cos x$$

o $$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \cos x.$$

Razonando del mismo modo, podemos obtener la derivada de $\cos x$, estando dado su valor por la expresión

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x.$$

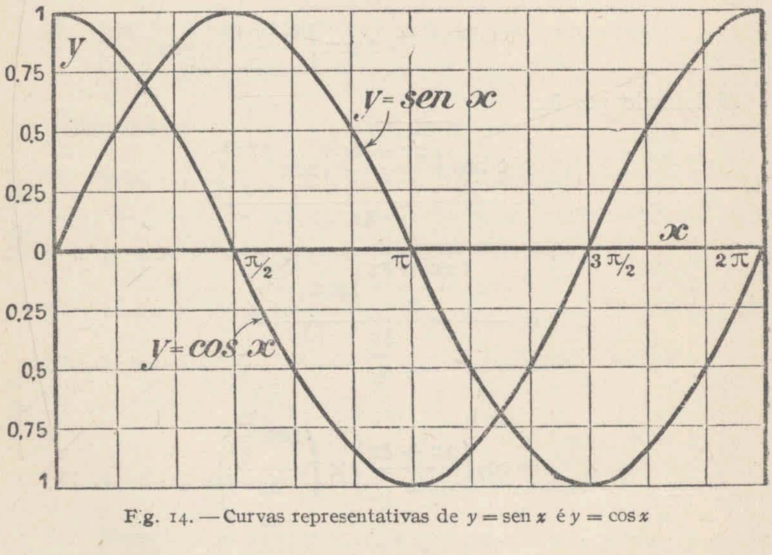


Fig. 14. — Curvas representativas de $y = \operatorname{sen} x$ é $y = \cos x$

Las curvas del seno y coseno ayudan a la mejor apreciación de estos resultados. En la figura 14, se han trazado las dos curvas; se puede observar que la curva del coseno es exactamente la misma del seno corrida hacia atrás en el sentido del eje horizontal; por lo tanto la curva de pendientes tiene en uno y otro caso idéntica forma. Esta circunstancia se verifica igualmente para la curva primitiva $y = e^{bx}$, y este hecho sugiere la idea de que tiene que existir alguna relación entre estas diversas funciones. Más adelante insistiremos sobre este particular.

Es un gran inconveniente la presencia del signo «menos» en la relación $\frac{d \cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x$ por ser difícil recordar si el signo se presenta al diferenciar sen x o cos x. Una imagen mental de las curvas, o las curvas mismas serán de una gran ayuda. La curva del cos y la del sen difieren en fase de $\frac{1}{4}$ del periodo (véase fig. 14) pero son exactamente iguales.

Considerando $y = \operatorname{sen} x$ como la primitiva, cuando x es pequeña sen x y x son casi iguales y por lo tanto la pendiente de la curva es 1; cuando x aumenta de 0 a $\frac{\pi}{2}$ la pendiente de la curva disminuye hasta hacerse 0 para $x = \frac{\pi}{2}$.

La ordenada de la curva del cos cuando $x = 0$ es la unidad y disminuye hasta que se anula para $x = \frac{\pi}{2}$. Desde $x = \frac{\pi}{2}$ hasta $x = \pi$ la pendiente de la curva del sen es negativa pero aumenta en valor absoluto hasta -1 siendo éste el valor para $x = \pi$. Observamos que las ordenadas de la curva del cos varían exactamente del mismo modo en magnitud y en signo. Por lo tanto, la curva del coseno es la curva de pendientes de la curva del seno.

Consideremos ahora la cosinusoide como la primitiva.

Para $x = 0$, la curva es horizontal y la pendiente es nula: desde $x = 0$ hasta $x = \frac{\pi}{2}$ dicha pendiente aumenta en valor absoluto pero es negativa, alcanzando su máximo valor negativo, -1, para $x = \frac{\pi}{2}$. Por otra parte las ordenadas de la sinusoide son todas positivas desde $x = 0$ hasta $x = \frac{\pi}{2}$ de modo que a pesar de dar estas ordenadas las pendientes de la curva, en lo que a magnitud se refiere, su signo es contrario. En otros términos, la sinusoide debe sustituirse por su simétrica respecto del eje de las x para tener la curva de pendientes de la cosinusoide, o sea, la curva $y = -\operatorname{sen} x$ es la curva de pendientes de la curva $y = \cos x$.

Para resumir podemos decir que la curva derivada de la sinusoide o de la cosinusoide es la misma curva corrida hacia atrás según el eje de la x en una distancia horizontal igual a $1/4$ de periodo.

Así podemos decir en seguida que la derivada de $y = \operatorname{sen}(x + b)$ es $y = \cos(x + b)$, puesto que la curva $y = \operatorname{sen}(x + b)$ es la misma sinusoide corrida hacia atrás en una cantidad dada por el valor de b sin variar en nada ni la amplitud ni el período.

Así $$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x+b) = \cos(x+b)$$

y de igual modo

$$\frac{d}{dx}\cos(x+b) = -\operatorname{sen}(x+b).$$

y también $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(5x+6) = 5\cos(5x+6)$ puesto que 5 multiplica a la variable independiente en la función primitiva.

Por lo tanto, en general

$$\frac{d}{dx}\mathrm{A}\operatorname{sen}(\mathrm{B}x+\mathrm{C}) = \mathrm{AB}\cos(\mathrm{B}x+\mathrm{C})$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{A}\cos(\mathrm{B}x+\mathrm{C}) = -\mathrm{AB}\operatorname{sen}(\mathrm{B}x+\mathrm{C})$$

Derivar tg x con relación a x.

Sea $y = \operatorname{tg} x;\ y + \delta y = \operatorname{tg}(x+\delta x)$

$$\delta y = y + \delta y - y = \operatorname{tg}(x+\delta x) - \operatorname{tg} x$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x+\delta x)\cos x - \cos(x+\delta x)\operatorname{sen} x}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}[(x+\delta x) - x]}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\delta x}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

Dividiendo por δx

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\operatorname{sen}\delta x}{\delta x} \times \frac{1}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

Al tender δx a cero, $\frac{\operatorname{sen}\delta x}{\delta x}$ tiende a la unidad y $(x+\delta x)$ tiende a valer x.

De aquí $\quad \dfrac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\mathrm{L}} \dfrac{\delta y}{\delta x} = 1 \times \dfrac{1}{\cos x \cos x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

por tanto $\quad \dfrac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x.$

Del mismo modo se puede probar que

$$\frac{d \cot x}{dx} = - \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Generalizando

$$\frac{d}{dx} \mathrm{A} \operatorname{tg} (\mathrm{B}x + \mathrm{C}) = \mathrm{AB} \sec^2 (\mathrm{B}x + \mathrm{C})$$

$$\frac{d}{dx} \mathrm{A} \cot (\mathrm{B}x + \mathrm{C}) = - \mathrm{AB} \operatorname{cosec}^2 (\mathrm{B}x + \mathrm{C})$$

$$\frac{d}{dx} \mathrm{A} \operatorname{cosec} (\mathrm{B}x + \mathrm{C}) = - \frac{\mathrm{AB} \cos (\mathrm{B}x + \mathrm{C})}{\operatorname{sen}^2 (\mathrm{B}x + \mathrm{C})}$$

$$\frac{d}{dx} \mathrm{A} \sec (\mathrm{B}x + \mathrm{C}) = \frac{\mathrm{AB} \operatorname{sen} (\mathrm{B}x + \mathrm{C})}{\cos^2 (\mathrm{B}x + \mathrm{C})}$$

Ejemplo 23. — Hallar la pendiente de la curva que representa la ecuación $s = 5{,}2 \operatorname{sen} (40t - 2{,}4)$ para $t = 0{,}07$.

La pendiente de la curva es

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} 5{,}2 \operatorname{sen} (40t - 2{,}4) = 5{,}2 \times 40 \cos (40t - 2{,}4)$$
$$= 208 \cos (40t - 2{,}4)$$

Así, cuando

$t = 0{,}07$, la pendiente $= 208 \cos (2{,}8 - 2{,}4) = 208 \cos 0{,}4$ radianes
$= 208 \cos 22{,}9^{\circ}$
$= \underline{192.}$

Ejemplo 24. — Derivar con relación a z la función

$$9{,}4 \cot (7 - 5z)$$

$$\frac{d}{dz} 9{,}4 \cot (7-5z) = 9{,}4 \times -5 \times -\operatorname{cosec}^2 (7 - 5z)$$

$$= \underline{47 \operatorname{cosec}^2 (7 - 5z).}$$

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE. — Podemos hacer ahora un exámen más preciso del movimiento armónico simple. Supongamos una manivela de longitud r (véase fig. 15) que partiendo de la posi-

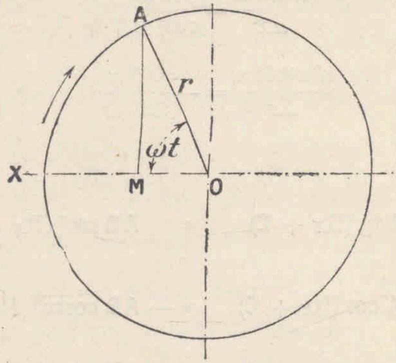


Fig. 15

ción OX gira con velocidad angular constante ω, en el sentido de las agujas de un reloj. Supongamos alcanzada la posición OA a los t segundos después de comenzado el movimiento; el ángulo recorrido en este intervalo es AOM $= \omega t$, puesto que la distancia angular recorrida en un segundo es de ω radianes y la distancia angular en t segundos es de ωt radianes.

Considerando el corrimiento a lo largo del eje horizontal, este corrimiento en el tiempo t será $s =$ OM

$$= \text{AO} \cos \text{AOM} = r \cos \omega t.$$

Por lo tanto la velocidad será $\dfrac{ds}{dt} = -r\omega \operatorname{sen} \omega t$

y la aceleración $\dfrac{dv}{dt} = -r\omega \times \omega \times \cos \omega t = -\omega^2 \times r \cos \omega t$

$$= -\omega^2 s,$$

esto es, la aceleración es proporcional al corrimiento pero está dirigida hacia el centro; así, cuando el corrimiento aumenta partiendo del centro, también aumenta la aceleración hacia dicho centro. Cuando el corrimiento es máximo, la aceleración es máxima. Esto es, si la manivela entra en la posición OX, la aceleración tiene su máximo valor $\omega^2 r$ y está dirigida hacia el centro, siendo la velocidad en x cero. En O la aceleración es $-\omega^2 \times 0 = 0$ y la velocidad es máxima. Un decalado inicial de la manivela no afecta la antedicha relación entre la aceleración y el corrimiento. La ecuación del movimiento es entonces $s = r \cos(\omega t \pm c)$ en que c es el ángulo de decalado: la derivación, para hallar la velocidad y la aceleración es exactamente la misma de antes.

Ejemplo 25. — Demostrar que la ecuación $s = 5 \operatorname{sen} 4t - 12 \cos 4t$, es la de un movimiento armónico simple y hallar su velocidad angular

$$s = 5 \operatorname{sen} 4t - 12 \cos 4t.$$

Se tiene
$$v = \frac{ds}{dt} = (5 \times 4 \cos 4t) - (12 \times 4 \times -\operatorname{sen} 4t)$$
$$= 20 \cos 4t + 48 \operatorname{sen} 4t$$
$$a = \frac{dv}{dt} = (20 \times 4 \times -\operatorname{sen} 4t) + (48 \times 4 \cos 4t)$$
$$= -80 \operatorname{sen} 4t + 192 \cos 4t$$
$$= -16 (5 \operatorname{sen} 4t - 12 \cos 4t) = -16s$$

esto es, la aceleración es proporcional al espacio recorrido.

Ahora bien en el movimiento armónico simple la aceleración es $= -\omega^2 s$.

por tanto $\omega^2 = 16$ o sea la velocidad angular ω

$$= \underline{4 \text{ radianes por sec.}}$$

La última pregunta podría ser tratada de otro modo, expresando primero, $5 \operatorname{sen} 4t - 12 \cos 4t$ en la forma $M \operatorname{sen}(4t + c)$ (véase parte I, pág. 342) y derivando.

Este método indica que un movimiento armónico simple puede ser descompuesto en otros dos que difieren en fase y amplitud.

Ejercicios 5. — Derivación de funciones trigonométricas

Derivar con respecto a x las funciones de los núms. 1 á 16.

1. $\operatorname{sen}(4 - 5{,}3x)$. **2.** $3{,}2 \cos 5{,}1x$. **3.** $0{,}16 \operatorname{tg}(3x + 9)$.

4. $2{,}15 \operatorname{sen}\left(\frac{1{,}7x - 5}{4}\right)$. **5.** $8 \cot 5x$.

6. $43{,}15 \sec (0{,}05 - 0{,}117x)$. **7.** $bc \cos (d - gx)$.

8. $4 \cos 5x - 7 \operatorname{sen} (2x - 5)$. **9.** $\operatorname{sen} 5{,}2x \cos 3{,}6x$.

10. $2{,}17 \cos 4{,}5x \cos 1{,}7x$. **11.** $9{,}04 \operatorname{sen} (px + c) \operatorname{sen} (qx - \ldots)$.

12. $5 \operatorname{sen}^2 x$. **13.** $0{,}065 \cos^2 3x$.

14. $\cos^2 (7x - 1{,}5) + \operatorname{sen}^2 (7x - 1{,}5)$.

15. $3x^{1{,}72} - 5{,}14 \text{ l.n. } (3x - 4{,}1) + 0{,}14 \operatorname{sen} (4{,}31 - 0{,}195x) + 24{,}93x$.

16. $7{,}05 \operatorname{sen} 0{,}015x - 0{,}23 \cos (6{,}1 - 0{,}23x) + 1{,}85 \operatorname{tg.} (4x - 0{,}7)$.

17. El recorrido de una válvula desde su posición media está dado aproximadamente por el valor $x = -1{,}2 \cos \omega t - 1{,}8 \operatorname{sen} \omega t$ en que ω es la velocidad angular del eje de la manivela (300 r. p. m.) y t el tiempo en segundos a partir del punto muerto.

Hallar la velocidad y la aceleración de la válvula.

18. Si $s = 4{,}2 \operatorname{sen} (2{,}1 - 0{,}17t) - 0{,}315 \cos (2{,}1 - 0{,}17t)$ siendo s un recorrido y t el tiempo, hallar una expresión en función de s para la aceleración: ¿Qué clase de movimiento representa esta ecuación?

19. La corriente en un circuito varía según la ley

$$C = 3{,}16 \operatorname{sen} (2\pi ft - 3{,}06).$$

A qué velocidad varía la corriente cuando $t = 0{,}017$ siendo la frecuencia $f = 60$?

20. Si la línea elástica de una barra es una sinusoide ¿qué forma tendrá la curva de los momentos de flexión?

21. Si y es la flecha de una barra de hierro a una distancia x del extremo, siendo la carga aplicada F

$$y = \frac{\dfrac{Bl}{8} \cos \dfrac{\pi x}{l}}{\dfrac{EI\pi^2}{l^2} - F}$$

Hallar el valor de $EI \dfrac{d^2y}{dx^2} + Fy + \dfrac{Bl}{8} \cos \dfrac{\pi x}{l}$; siendo x é y las únicas variables.

22. La fuerza electromotriz del primario de un transformador está dada por la expresión.

$$E = 1500 \operatorname{sen} pt + 100 \operatorname{sen} 3\, pt - 42 \cos pt + 28 \cos 3\, pt.$$

Hallar la velocidad con que varía la F.E.M.

23. Sea un movimiento dado por la ecuación $s = \operatorname{sen} 12t - \dfrac{12}{13} \operatorname{sen} 13t$.

Demostrar que la aceleración es $= 25 \operatorname{sen} 12t - 169s$.

CAPÍTULO III

REGLAS ADICIONALES DE DERIVACIÓN

DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE FUNCIÓN. — Aunque la expresión $e^{\text{sen}\,4x}$ es esencialmente una función de x, también puede ser considerada como función de sen $4x$ que a su vez lo es de x. Sea, para más claridad, $u = \text{sen}\,4x$. Entonces tendremos $e^{\text{sen}\,4x} = e^u$, función de u, y además $u = \text{sen}\,4x$, función de x.

La regla para derivar una función de función es la siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

regla que puede demostrarse fácilmente.

Sea y una función de u, y u una función de x. Entonces y será función de una función de x. Demos a x una incremento δx; puesto que u depende de x adquirirá, al crecer x, un nuevo valor $u + \delta u$, y de igual modo, y tomará el valor $y + \delta y$. Por ser estos incrementos cantidades que, aunque pequeñas, admiten medida, pueden aplicárseles las reglas de la aritmética, de modo que

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \times \frac{\delta u}{\delta x}$$

Cuando δx tiende hacia o, estas fracciones se acercan a los límites $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{du}$ y $\frac{du}{dx}$ respectivamente; de modo que, en el límite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Del mismo modo, si y es función de u, u de w, y w de x se probaría que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dw}\times\frac{dw}{dx}$$

Se observará que en el segundo miembro de la ecuación, dy figura como primer numerador y dx como último denominador, mientras que en el primer miembro forman éstos respectivamente el único numerador y el único denominador; de modo que los demás numeradores y denominadores del segundo miembro obran como si se redujesen mútuamente. Así, pues, la regla puede retenerse por una simple analogía con las de la aritmética:

$$\frac{4}{5}=\frac{4}{51}\times\frac{51}{7{,}6}\times\frac{7{,}6}{5}.$$

Ejemplo 1. — Sea $y = e^{\text{sen}\, 4x}$. Hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$.

Pongamos $u = \text{sen}\, 4x$. Tendremos $\frac{du}{dx} = 4 \cos 4x$. Por otra parte $y = e^u$.

Puesto que ahora y es función de u, tendremos

$$\frac{dy}{du}=\frac{de^u}{du}=e^u=e^{\text{sen}\, 4x}$$

Luego, aplicando la regla $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

tendremos
$$\frac{dy}{dx}=e^{\text{sen}\, 4x}\times 4\cos 4x$$
$$=\underline{4\cos 4x\times e^{\text{sen}\, 4x}}$$

Ejemplo 2. — Hallar el valor de $\frac{d}{dx}\,\text{l.n.}\,(\cos 2x)^3$.

Sea $v = (\cos 2x)^3$ y $u = \cos 2x$

Tendremos: $y = \text{l.n.}\, v \quad v = u^3$

Apliquemos la regla

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\times\frac{dv}{du}\times\frac{du}{dx}$$
$$=\frac{d\,\text{l.n.}\,v}{dv}\times\frac{du^3}{du}\times\frac{d\cos 2x}{dx}$$
$$=\frac{1}{v}\times 3u^2\times -2\,\text{sen}\, 2x$$
$$=\frac{-6\,\text{sen}\, 2x\times(\cos 2x)^2}{(\cos 2x)^3}=\frac{-6\,\text{sen}\, 2x}{\cos 2x}$$
$$=\underline{-6\,\text{tg}\, 2x.}$$

$$u=\cos 2x \qquad \frac{du}{dx}=-2\,\text{sen}\, 2x$$
$$v=u^3 \qquad \frac{dv}{du}=3u^2$$

Ejemplo 3. — El radio de una esfera decrece a razón de 0,02 cm. por minuto. ¿Como decrecen (*a*) la superficie y (*b*) el peso, cuando el radio es de 15 cms. y el peso de 0,3 gr. por cm.^{3}?

Si r = radio, $\frac{dr}{dt}$ es el incremento relativo del radio, que en este caso es igual a 0,02 cm. por minuto.

a) La superficie es $4\pi r^2$. La velocidad de disminución de la superficie será, pues,

$$\begin{aligned}
&= \frac{dS}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(4\pi r^2) \\
&= 4\pi \cdot \frac{dr^2}{dt} \\
&= 4\pi \cdot \frac{dr^2}{dr} \times \frac{dr}{dt} \\
&= 4\pi \times 2r \times \frac{dr}{dt} \\
&= 8\pi r \times -0{,}02
\end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando $r = 15$, $\frac{dS}{dt} = 8\pi \times -0{,}02 \times 15 = -7{,}53$. La superficie disminuye pues a razón de 7 cm.^{2}, 53 por minuto.

b) El volumen es $= \frac{4}{3}\pi r^3$.

De modo que la velocidad de disminución del volumen será

$$= \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

y la disminución del peso tendrá lugar a la velocidad de

$$= \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3} \times 0{,}3 \cdot \pi r^3\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}4\pi r^3) = 0{,}4\pi \cdot \frac{dr^3}{dt} &= 0{,}4\pi \times \frac{dr^3}{dr} \times \frac{dr}{dt} \\
&= 0{,}4\pi \times 3r^2 \times \frac{dr}{dt} \\
&= 0{,}4\pi \times 3r^2 \times -0{,}02.
\end{aligned}$$

Cuando $r = 15$ $\quad \frac{dW}{dt} = 0{,}4\pi \times 3 \times 225 \times -0{,}02 = -16{,}93$

el peso disminuye pues a razón de 16,93 gr. por minuto.

Ejemplo 4. — Hallar las expresiones de la velocidad y de la aceleración del émbolo de una máquina de vapor horizontal cuando la manivela da n revoluciones por segundo.

A cada revolución, el ángulo descrito es $= 2\pi$ radianes. Por lo tanto en un segundo, quedan recorridos $2\pi n$ radianes de modo que la velocidad angular es $= 2\pi n$. Tendremos, pues, $\frac{d\theta}{dt} = 2\pi n$.

De la figura 16 $\qquad CD = l \operatorname{sen} \alpha$

$$CD = r \operatorname{sen} \theta$$

De modo que $\qquad l \operatorname{sen} \alpha = r \operatorname{sen} \theta$

y

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{l}{r} \operatorname{sen} \alpha; \ \operatorname{sen} \alpha = \frac{r}{l} \operatorname{sen} \theta$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \operatorname{sen}^2 \theta} = \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \operatorname{sen}^2 \theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si la biela es larga comparada con la manivela, $\frac{r}{l}$ es pequeña y $\frac{r^2}{l^2}$ todavía más, de modo que podemos escribir aproximadamente

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \operatorname{sen}^2 \theta$$

Sea AB = la carrera del émbolo desde su punto muerto

$$= x = AE + OE - BO = l + r - BD - DO$$

$$= l + r - l \cos \alpha - r \cos \theta$$

$$= l + r - l\left(1 - \frac{r^2}{2l^2} \operatorname{sen}^2 \theta\right) - r \cos \theta$$

$$= r + \frac{r^2}{2l} \operatorname{sen}^2 \theta - r \cos \theta$$

$$= r + \frac{r^2}{2l}\left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) - r \cos \theta$$

$$= r + \frac{r^2}{4l} - \frac{r^2 \cos 2\theta}{4l} - r \cos \theta$$

Ahora bien, la velocidad del émbolo es

$$= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{ r + \frac{r^2}{4l} - \frac{r^2 \cos 2\theta}{4l} - r \cos \theta \right\}$$

Apliquemos la regla

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}$$

Tendremos

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{d\theta}\left\{r+\frac{r^2}{4l}-\frac{r^2\cos 2\theta}{4l}-r\cos\theta\right\}\times\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\left\{0+0-\left(\frac{r^2}{4l}\times-2\operatorname{sen}2\theta\right)-(r\times-\operatorname{sen}\theta)\right\}\times 2\pi n$$

$$=2\pi nr\left\{\frac{r\operatorname{sen}2\theta}{2l}+\operatorname{sen}\theta\right\}$$

o, si hacemos

$$\frac{l}{r}=m$$

$$v=\frac{dx}{dt}=\underline{2\pi nr\left\{\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2m}+\operatorname{sen}\theta\right\}}$$

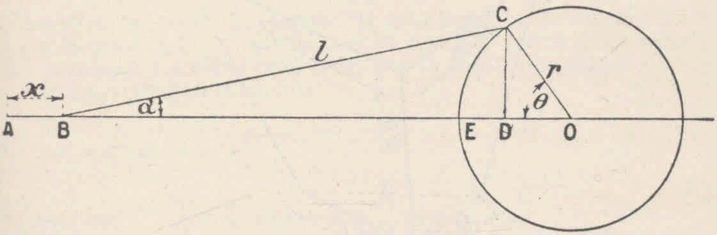


Fig. 16. — Velocidad y aceleración de un émbolo.

La aceleración será

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{d\theta}\cdot 2\pi nr\left\{\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2m}+\operatorname{sen}\theta\right\}\times\frac{d\theta}{dt}$$

$$=2\pi nr\left\{\frac{\cos 2\theta}{m}+\cos\theta\right\}\times 2\pi n$$

$$=\underline{4\pi^2n^2r\left\{\cos\theta+\frac{\cos 2\theta}{m}\right\}}$$

Ejemplo 5. — El agua entra en un depósito a razón de 2000 litros por minuto. El depósito tiene forma de pirámide truncada cuyas dimensiones son: parte superior 40 × 28 metros y parte inferior 20 × 14 metros. Profundidad: 12 metros. A qué velocidad sube el agua cuando está a un nivel de 4 metros?

En 12 metros la longitud de la sección decrece 20 metros. Por lo tanto, en 8 metros decrece $\frac{20\times 8}{12}=13\frac{1}{3}$ m. La longitud de la sección al nivel 4 metros será por lo tanto $40-13\frac{1}{3}=26\frac{2}{3}$ m.

Aplicando igual razonamiento a la anchura

$$28 - (\tfrac{2}{3} \times 14) = 18\tfrac{2}{3} \text{ m. por tanto,}$$

la superficie al nivel 4 ms. será

$$26\tfrac{2}{3} \times 18\tfrac{2}{3} = 498 \text{ m}^2.$$

$$2000 \text{ litros} = \frac{2000}{1000} \text{ m.}^3$$

de modo que el incremento del volumen $\frac{dV}{dt} = 2$ m.^{3} por minuto.

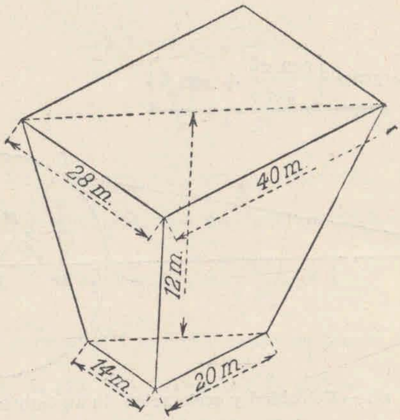


Fig. 17

Sea A el área de la superficie, h la altura del agua:

Tendremos $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(A\,h).$

Y, dado un intervalo muy pequeño, podremos hacer A constante.

Tendremos, pues, $\frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt}$

De donde $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} \times \frac{dV}{dt} = 2\,\frac{1}{498} = 0{,}004$ m.

$= 4$ mm. por minuto.

Ejemplo 6. — Si se traza una curva de velocidades sobre una base de espacios, probar que la subnormal de dicha curva representa la aceleración:

La subnormal de una curva es $= y\,\frac{dy}{dx}$ (V. pág. 46)

En este caso, puesto que v está referida sobre un eje vertical y s sobre un eje horizontal, la subnormal es

$$= v\frac{dv}{ds}$$

$$= v\cdot\frac{dv}{dt}\times\frac{dt}{ds}$$

$$= v\times a\times\frac{1}{v}$$

$$= a$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{puesto que } \dfrac{dv}{dt} = \text{incremento relativo de la velocidad} & = a \\ \text{y} \quad \dfrac{ds}{dt} = \text{incremento relativo del espacio} & = v \end{array}\right\}$$

Consideremos, como un ejemplo de esta regla, el de un movimiento debido a la gravedad. En este caso $v^2 = 2\,gs.$; la curva de la velocidad es una parábola. La subnormal será, por lo tanto, constante de modo que la aceleración será constante.

La subnormal es $= v\dfrac{dv}{ds}$

Ahora bien, $\dfrac{dv^2}{ds} = \dfrac{d}{ds}\cdot 2gs = 2\,g\cdot\dfrac{ds}{ds} = 2\,g.$

pero $\dfrac{dv^2}{ds} = \dfrac{dv^2}{dv}\cdot\dfrac{dv}{ds} = 2v\dfrac{dv}{ds}$

por consiguiente $2v\dfrac{dv}{ds} = 2g$

$$v\frac{dv}{ds} = g$$

luego la subnormal o aceleración será $= g$.

Ejercicios 6. — Sobre la derivación de una función de función

Hallar **1.** $\dfrac{d}{dx}\cdot e^{\text{sen } 2x}$. **2.** $\dfrac{d}{dv}\,\text{l.n. } v^2$. **3.** $\dfrac{d}{dt}\,2\cos^2 t$.

4. $\dfrac{d}{dx}\,8\,\text{sen } x^3$. **5.** $\dfrac{d}{dx}\,3{,}14\,\text{tg}\,(5x^2 + 7x - 2)$. **6.** $\dfrac{d}{dx}\,a^{\text{sen } 3x}$.

7. $\dfrac{d}{dx}\,e^{x^{1,85}}$. **8.** $\dfrac{d}{dx}\,\log\,(3 + 7x - 9x^3)$. **9.** $\dfrac{d}{ds}\cos\,(\text{l.n. } s^5)$

10. $\frac{d}{dx}$ l. n. tg. $\frac{x}{2}$.

11. En la teoría de los acoplamientos Hooke se necesita hallar una expresión para $\frac{\omega_B}{\omega_A}$ o sea, razón de las velocidades angulares.

Si $\omega_B = \frac{d\phi}{dt}$, $\omega_A = \frac{d\theta}{dt}$ y $\operatorname{tg}\phi = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos\alpha}$ hallar la expresión $\frac{\omega_B}{\omega_A}$ en función de θ, ϕ y α.

12. Hallar la expresión de la pendiente de la cicloide en cualquier punto. La ecuación de la cicloide es $x = a\ (\theta + \operatorname{sen}\theta)$

$$y = a\ (1 - \cos\theta)$$

x, y, medidas según se ve en la figura 18.

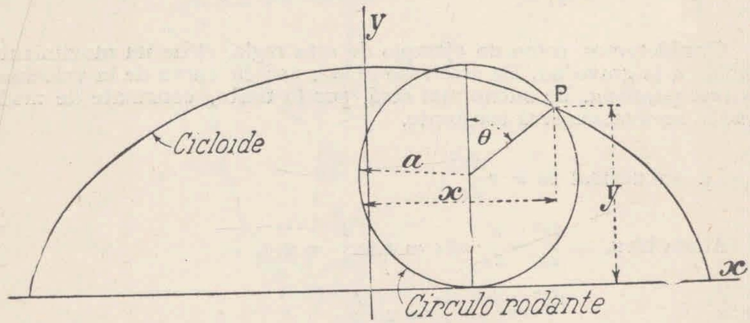


Fig. 18

13. Suponiendo que la pérdida de carga debida al movimiento turbulento del agua en una cañería se exprese por $h = C\ (AV^2 + B\,V^{\frac{3}{2}})$, siendo V = velocidad media en metros por segundo; demostrar que la pendiente de la curva en la cual l.n. h y l.n. V figuran como coordenadas rectangulares es

$$\frac{d\ \text{l.n.}\ h}{d\ \text{l.n.}\ V} = \frac{2\,V^{\frac{1}{2}} + \frac{3B}{2A}}{V^{\frac{1}{2}} + \frac{B}{A}}$$

14. Si $3x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$

probar que $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(4x + 5y)^3}$$

15. Un depósito en forma de cono de revolución cuya altura es de 7 metros y su diámetro de base de 6 metros, colocada de modo que el eje esté vertical y el vértice hacia abajo, se llena de agua a razón de 10 metros cúbicos por minuto. Hallar la velocidad con que se eleva la superficie:

a) Cuando la profundidad del agua es de 4 metros.
b) Cuando hay en la vasija 60 metros cúbicos.

16. Si $\frac{1}{1-E}=(r)^{\frac{R}{K}}$ probar que $\frac{dE}{dK}=-\frac{R}{K^2}\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{R}{K}}$ l.n. r.

17. Si $x^3-6x^2y+6xy^2+y^2=$ constante, probar que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-4xy-2y^2}{2x^2-y^2+4xy}.$$

18. Se tornea un peso anular en un torno. Hay que saber la disminución de peso cuando el torno ha hecho una penetración de profundidad 0,1 mm. El material es hierro colado de densidad = 7,2. El diámetro exterior del anillo es 10 cm. su longitud 5 cm. Hallar el peso disminuído así como una expresión general para representarlo cuando el diámetro varía, dejando fija la penetración de 0,1 mm. del torno.

19. Hallar el valor de $\frac{d}{dt}\left\{\text{l.n. tg}\frac{7t}{2}+15t^3\right\}$

20. Si $P=\frac{F^2l}{2EA}$ y $\frac{dF}{dW}=u$, hallar $\frac{dP}{dW}$. (Este problema se presenta en el cálculo de los esfuerzos de los sistemas con enlaces superfluos).

21. Hallar el ángulo que forma la tangente a la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2$ en el punto ($x=2$, $y=-3$), con el eje de las x.

22. Hallar la pendiente de la curva $4x^2+4y^2=25$, en el punto ($x=2$, $y=-\frac{3}{2}$) dando el ángulo con una aproximación de 1 minuto.

23. Si se define la fuerza como el incremento relativo de la energía cinética con relación al espacio y la energía cinética $=\frac{pv^2}{2g}$ probar que la fuerza $=\frac{pa}{g}$.

24. Si $x=8$ l.n. $(12\,t^3-74)$ hallar el valor de $\frac{dx}{dt}$.

DERIVACIÓN DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES DE x. — Ya hemos visto que para derivar una suma de varios términos se deriva cada uno de los términos por separado y se suman los resultados obtenidos. Podría, pues, creerse que la derivación de un producto se hace por el mismo método, es decir, por multiplicación de las derivadas de cada uno de los factores. Pero tal procedimiento sería inexacto. Así,

$$\frac{d}{dx}(\text{l.n. } x\times x^2) \text{ no es igual a } \frac{d\,\text{l.n. } x}{dx}\times\frac{dx^2}{dx}=\frac{1}{x}\times 2x=2$$

La regla es la siguiente: Si u y v son funciones de x y si tenemos $y = uv$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

Demostración. — Demos a x un incremento δx; puesto que u y v son funciones de x, cuando x pasa a $x + \delta x$, u adquiere el valor $u + \delta u$ y v se convierte en $v + \delta v$. Ahora bien, puesto que $y = uv$, tendremos

$$y + \delta y = (u + \delta u)\,(v + \delta v) = uv + \delta u \cdot u + \delta v \cdot v + \delta u\,\delta v$$

de donde, por substracción

$$\delta y = u\,\delta v + v\,\delta u + \delta u \cdot \delta v$$

Dividamos por δx

$$\frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \delta u \cdot \frac{\delta v}{\delta x}$$

Cuando δx tiende hacia o, $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta v}{\delta x}$ y $\frac{\delta u}{\delta x}$ tienden hacia $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ y $\frac{du}{dx}$ y el término $\delta u\frac{\delta v}{\delta x}$ se hace despreciable, de modo que en el límite tendremos

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

La regla puede extenderse al caso de un producto de más de dos funciones de x. Así, si u, v, w, son tres funciones de x,

$$\begin{aligned}\frac{d(uvw)}{dx} &= \frac{d(w\mathrm{V})}{dx} \text{ haciendo } \mathrm{V} = uv \\ &= w\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{V}\frac{dw}{dx} \\ &= w\frac{d(uv)}{dx} + uv\frac{dw}{dx} \\ &= w\left(v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}\right) + uv\frac{dw}{dx}\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{d(uvw)}{dx} = wv\frac{du}{dx} + wu\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx}$$

Ejemplo 7. — Hallar $\frac{dy}{dx}$ cuando $y = x^2$ l. n. x.

Sea $\quad u = x^2 \quad$ de modo que $\frac{du}{dx} = 2x$

$$v = \text{l. n. } x \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}.$$

tendremos $\quad \frac{d \cdot uv}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} = (\text{l. n. } x \times 2x) + \left(x^2 \times \frac{1}{x}\right)$

$$= \underline{x\,(1 + 2\,\text{l. n. } x)}.$$

Ejemplo 8. — Hallar el valor de $\frac{d}{dt}[5e^{-7t} \times \text{sen}\,(6t - 4)]$.

Hagamos $\quad u = 5e^{-7t} \quad$ de modo que $\frac{du}{dt} = 5\,(-7e^{-7t}) = -35e^{-7t}$

$$v = \text{sen}\,(6t - 4) \qquad \frac{dv}{dt} = 6\cos\,(6t - 4)$$

Tendremos pues, $\frac{d \cdot uv}{dt} = v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}$

$$= [\text{sen}\,(6t - 4) \times -35e^{-7t}] + [5e^{-7t} \times 6\cos\,(6t - 4)]$$

$$= \underline{5e^{-7t}\,[6\cos\,(6t - 4) - 7\,\text{sen}\,(6t - 4)]}$$

Ejemplo 9. — Si $2q + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(p\,x^2) = 0$, demostrar que $2q = -2p - x\frac{dp}{dx}$ en cuya expresión p es función de x. Este ejemplo tiene aplicación a las granadas esféricas.

Si p es función de x, $p\,x^2$ es de la forma $u.v$, en el que $u = p$ y $v = x^2$

De modo que $\quad \frac{d}{dx}px^2 = x^2\frac{dp}{dx} + p\frac{dx^2}{dx} = x^2\frac{dp}{dx} + 2xp.$

Luego $\quad 2q + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(px^2) = 2q + x\frac{dp}{dx} + 2p$

o sea $\quad 0 = 2q + x\frac{dp}{dx} + 2p$

de donde $\quad \underline{2q = -2p - x\frac{dp}{dx}}.$

Ejemplo 10. — Hallar el valor de $\frac{d}{dx}[9x^4 \operatorname{sen}(3x-7) \text{ l.n. } (1-5x).]$

Hagamos respectivamente

$$u = x^4 \qquad v = \operatorname{sen}(3x-7) \qquad w = \text{l.n. } (1-5x)$$

tendremos

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 \qquad \frac{dv}{dx} = 3\cos(3x-7) \qquad \frac{dw}{dx} = \frac{-5}{1-5x} = \frac{5}{5x-1}$$

De donde

$$\frac{d}{dx}[9x^4 \operatorname{sen}(3x-7) \text{ l.n. } (1-5x)] = 9\frac{d}{dx}(uvw)$$

$$= 9\left[wv\frac{du}{dx} + wu\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx}\right]$$

$$= 9\left[\text{l.n. } (1-5x) \operatorname{sen}(3x-7)\, 4x^3 + \{\text{l.n. } (1-5x)x^4 \times 3\cos(3x-7)\}\right.$$
$$\left. + x^4 \operatorname{sen}(3x-7)\frac{5}{5x-1}\right]$$

$$= 9x^3\left[4 \operatorname{sen}(3x-7) \text{ l.n. } (1-5x) + 3x\cos(31x-7) \text{ l.n. } (1-5x)\right.$$
$$\left. + \frac{5x \operatorname{sen}(3x-7)}{5x-1}\right].$$

Ejercicios 7. — Derivación de productos

Derivar con relación a x las funciones núms. 1 a 12.

1. $x^2 \operatorname{sen} 3x$. **2.** $\text{l.n. } 5x \times 2\,x^{3,4}$. **3.** $e^{9x} \log 9x$

4. $4x^{-5} \operatorname{tg}(3,1-2,07x)$ **5.** $\cos(3,2x)\cos(1,95x+4)$.

6. $\cos(5-3x) \operatorname{tg} 2x$ **7.** $8x^{1,6}\cos(3+8x) + 16\,x^{1,6}$.

8. $9 \text{ l.n. } x^3 \times 5^{3x}$ **9.** $e^{x \text{ l.n. } x}$ **10.** $\frac{5}{4}e^{4x}\left\{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\right\}$.

11. $6e^{5x+2}(5x+2)^2$. **12.** $7,2 \operatorname{tg}\frac{x}{8} \text{ l.n. } x^7$.

13. Si $y = Ae^{3x}\cos\left(\frac{2x}{3} + B\right)$ hallar el valor de

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + \frac{85}{9}y.$$

14. Hallar el valor de $\frac{d}{dt}e^{-5t}\cosh(-5t)$.

15. $y = (A + Bx)e^{-4x}$. Hallar el valor de $\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y$.

16. Si $V = 250$ sen $(7t - 0{,}116)$, $A = 7{,}2$ sen $7t$ y $W = VA$, hallar el valor de $\frac{dW}{dt}$.

17. Derivar con relación a t la expresión $15t^2$ sen $(4 - 0{,}8t)$.

18. Hallar el valor de $\frac{d}{dt}(4t^{3.7} \cos 3t)$.

DERIVACIÓN DE UN COCIENTE. — Si u y v son funciones de x y hacemos $y = \frac{u}{v}$ tendremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Demostración

(*a*) *Directa.* — Sea $y = \frac{u}{v}$. Si x se convierte en $x + \delta x$, u se convierte en $u + \delta u$, v en $v + \delta v$; y en $y + \delta y$.

Tendremos pues,

$$y + \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v}$$

y por lo tanto

$$\delta y = y + \delta y - y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\delta u - uv - u\delta v}{v(v + \delta v)} = \frac{v\delta u - u\delta v}{v(v + \delta v)}$$

Dividiendo por δx

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{v(v + \delta v)}\left\{v\cdot\frac{\delta u}{\delta x} - u\cdot\frac{\delta v}{\delta x}\right\}.$$

En el límite, las expresiones $\frac{\delta y}{\delta x}, \frac{\delta u}{\delta x}$ y $\frac{\delta v}{\delta x}$ se convierten en $\frac{dy}{dx}, \frac{du}{dx}$ y $\frac{dv}{dx}$ mientras que $v + \delta v$ se confunde con v. Tenemos, pues,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

(*b*) *Por aplicación de la regla anterior del producto*

$$y = \frac{u}{v} = uv^{-1}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot (uv)^{-1} = v^{-1}\frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv^{-1}}{dx}$$

$$= \left(\frac{1}{v}\frac{du}{dx}\right) + \left(u \cdot \frac{dv^{-1}}{dv} \times \frac{dv}{dx}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{v} \cdot \frac{du}{dx}\right) + \left(u \times -1v^{-2} \times \frac{dv}{dx}\right)$$

$$= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Ejemplo 11. — Diferenciar con relación a s la expresión

$$\frac{4s^3 + 7s}{5 \cos (3s + 4)}.$$

Hagamos $u = 4s^3 + 7s$, de modo que $\frac{du}{ds} = 12s^2 + 7$

Sea $v = 5 \cos (3s + 4,)$ entonces $\frac{dv}{ds} = -15 \operatorname{sen} (3s + 4)$.

Luego

$$\frac{d}{ds} \cdot \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{ds} - u\frac{dv}{ds}}{v^2}$$

$$= \frac{[5 \cos (3s + 4 \times (12s^2 + 7)] - [(4s^3 + 7s) \times -15 \operatorname{sen} (3s + 4)]}{25 \cos^2 (3s + 4)}$$

$$= \frac{(12s^2 + 7)[\cos (3s + 4)] + (12s^3 + 21s)[(\operatorname{sen} (3s + 4)]}{5 \cos^2 (3s + 4)}.$$

Ejemplo 12. — Si $y = 9^{4x} \times \frac{1}{\text{l.n. } 7x}$ hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$.

Sea $u = 9^{4x}$, luego $\frac{du}{dx} = 4 \times 9^{4x} \text{ l n. } 9 = 4 \times 2{,}1972 \times 9^{4x}$

$$= 8{,}789 \times 9^{4x}$$

$v = \text{l.n. } 7x$, luego $\frac{dv}{dx} = \frac{7}{7x} = \frac{1}{x}$.

De donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(\text{l.n. } 7x \times 8{,}79 \times 9^{4x}) - \left(9^{4x} \times \frac{1}{x}\right)}{(\text{l.n. } 7x)^2}$$

$$= \frac{9^{4x}[(8.79x \times \text{l.n. } 7x) - 1]}{x\,(\text{l.n. } 7x)^2}$$

Ejemplo 13. — Regulador de Resorte (Fig. 19).
La ecuación es

$$\omega^2 = \frac{g[T + 2Q(l - \sqrt{l^2 - r^2})]}{W\sqrt{l^2 - r^2}}$$

en la que Q = fuerza necesaria para alargar el resorte en una unidad, T = tensión del resorte; W = peso de cada bola; ω = velocidad angular; r = radio de la trayectoria de las bolas; l = longitud de los brazos.

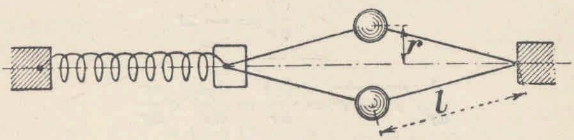


Fig. 19. — Regulador de resorte

Si $W = 1$ Kg.; $g = 9{,}81$ $\frac{d\omega}{dr} = 80$ cuando $\omega = 26$

$r = 0{,}1$ m. y $l = 0{,}5$ m.

Hallar T y Q

Como hay dos incógnitas, hacen falta dos ecuaciones. Substituyamos en la ecuación inicial los valores simbólicos por valores numéricos. Tendremos:

$$(26)^2 = \frac{9{,}81[T + 2Q(0{,}5 - \sqrt{(0{,}5)^2 - (0{,}1)^2}]}{1 \times \sqrt{(0{,}5)^2 - 0{,}1)^2}}$$

o sea

$$676 = \frac{9{,}81\,[T + 2Q\,(0{,}50 - 0{,}49)]}{0{,}49} = \frac{9{,}81}{0{,}49}(T + 0{,}02Q)$$

De donde

$T + 0{,}02\,Q = 33{,}73 \cdots\cdots$ (1) | $\frac{676 \times 0{,}49}{9{,}81} = \frac{331{,}24}{9{,}81} = 33.73$

Por otra parte,

$$\frac{d\omega}{dr} = 80 \text{ cuando } \omega = 26$$

Pero

$$\frac{d\omega^2}{dr} = \frac{d\omega^2}{d\omega} \times \frac{d\omega}{dr} = 2\omega\frac{d\omega}{dr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Además

$$\frac{d}{dr}\frac{g[T + 2Q(1 - \sqrt{l^2 - r^2})]}{W\sqrt{l^2 - r^2}} = \frac{d}{dr}\left(\frac{u}{v}\right)$$

haciendo

$$u = g[T + 2Q(l - \sqrt{l^2 - r^2})]$$

$$v = W\sqrt{l^2 - r^2}$$

Puesto que para determinar $\frac{du}{dr}$ y $\frac{dv}{dr}$ es necesario encontrar el valor de $\frac{d\sqrt{l^2 - r^2}}{dr}$, pongamos $y = l^2 - r^2$

de modo que

$$\frac{dy}{dr} = -2r$$

y

$$\frac{d}{dr}\sqrt{l^2 - r^2} = \frac{dy^{\frac{1}{2}}}{dr} = \frac{dy^{\frac{1}{2}}}{dy} \times \frac{dy}{dr}$$

$$= \tfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \times -2r$$

$$= -\frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}}$$

De modo que

$$\frac{du}{dr} = g\left\{0 + 0 + \frac{2Qr}{\sqrt{l^2 - r^2}}\right\} = \frac{2gQr}{\sqrt{l^2 - r^2}}$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{Wr}{\sqrt{l^2 - r^2}}.$$

Luego

$$\frac{d}{dr}\frac{u}{v} = \frac{v\frac{du}{dr} - u\frac{dv}{dr}}{v^2}$$

$$= \frac{W\sqrt{l^2 - r^2} \times \frac{2gQr}{\sqrt{l^2 - r^2}} + \frac{g[T + 2Q(l - \sqrt{l^2 - r^2})]Wr}{\sqrt{l^2 - r^2}}}{W^2(l^2 - r^2)} \quad \ldots \quad (3)$$

Por consiguiente, derivando ambos miembros de la ecuación original con respecto a r, y de las relaciones (3) y (2), resulta

$$2\omega\frac{d\omega}{dr}=\frac{gr}{W}\left\{\frac{2Q+\frac{1}{\sqrt{l^2-r^2}}[T+2Q(l-\sqrt{l^2-r^2})]}{l^2-r^2}\right\}$$

Substituyamos las letras por sus valores numéricos:

$$2\times 26\times 80=\frac{9{,}81\times 0{,}1}{1}\times\left\{\frac{2Q+\frac{1}{0{,}49}[T+2Q(0{,}5-0{,}49)]}{0{,}24}\right\}$$

$$=\frac{0{,}981}{0{,}24}\left\{2Q+\frac{1}{0{,}49}(T+0{,}02Q)\right\}$$

Apliquemos el valor hallado (1)

$$2\times 26\times 80=\frac{981}{240}\left\{2Q+\frac{33{,}73}{0{,}49}\right\}$$

De donde

$$0{,}98\,Q+33{,}73=\frac{2\times 26\times 80\times 240\times 0{,}49}{981}=498{,}69$$

y por consiguiente,

$$Q=\frac{498{,}69-33{,}73}{0{,}98}=474{,}3$$

$$T=33{,}73-0{,}02\,Q=33{,}73-9{,}48=24{,}25$$

DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS. — Las funciones trigonométricas inversas intervienen con gran frecuencia en el cálculo integral. Es, pues, necesario establecer las reglas para su derivación; y, en vista de la importancia que tienen dichas funciones, los resultados obtenidos habrán de estudiarse atentamente.

El concepto de función trigonométrica inversa ha sido explicado ya, (parte I, pág. 365) de modo que sólo es menester aquí recordarlo brevemente. Así, arc sen x es una función trigonométrica inversa, definida de modo que si $y=\text{arc sen } x$, es sen $y=x$.

Derivación de arc sen x con relación a x. — Sea $y=\text{arc sen } x$ de modo que sen $y=x$.

Tendremos

$$\frac{d\,\text{sen}\,y}{dx}=\frac{dx}{dx}=1$$

$$\frac{d\,\text{sen}\,y}{dx}=\frac{d\,\text{sen}\,y}{dy}\times\frac{dy}{dx}$$

luego

$$1 = \cos y \times \frac{dy}{dx}$$

o

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

luego

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Igualmente

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,cos} x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(y varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$).

Ejemplo 14. — Hallar el valor de $\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$.

Sea $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$, es decir, $\operatorname{tg} y = \frac{x}{a}$

y por tanto $\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 + x^2}{a^2}$

Ahora bien, $\frac{d \operatorname{tg} y}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}$

y $\frac{d \operatorname{tg} y}{dx} = \frac{d \operatorname{tg} y}{dy} \times \frac{dy}{dx}$

luego $\frac{1}{a} = \sec^2 y \times \frac{dy}{dx}$

o sea $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a \sec^2 y} = \frac{1}{a} \times \frac{a^2}{a^2 + x^2} = \underline{\frac{a}{a^2 + x^2}}$

Ejemplo 15. — Hallar el valor de $\frac{d}{dx} \operatorname{arg\,cosh} \frac{x}{a}$.

Sea

$$y = \operatorname{arg\,cosh} \frac{x}{a}$$

Entonces

$$\cosh y = \frac{x}{a}.$$

De modo que

$$\frac{d \cosh y}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}.$$

Pero

$$\frac{d \cosh y}{dx} = \frac{d \cosh y}{dy} \times \frac{dy}{dx} = \operatorname{senh} y \frac{dy}{dx}.$$

Luego

$$\frac{1}{a} = \operatorname{senh} y \times \frac{dy}{dx} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Ahora bien,

$$\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$$

Luego

$$\operatorname{senh}^2 y = \cosh^2 y - 1 = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{x^2 - a^2}{a^2}$$

y

$$\operatorname{senh} y = \pm \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Substituyamos este valor de senh y en (1)

$$\frac{1}{a} = \pm \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \times \frac{dy}{dx}$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

luego

$$\frac{d}{dx} \arg \cosh \frac{x}{a} = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Ejercicios 8. — Sobre la derivación de cocientes y la de funciones inversas

Derivar con relación a x las funciones Núms. 1 al 12.

1. $\dfrac{5x^3}{e^{7x-5}}$.

2. $\dfrac{\text{l.n.}\,(2 - 7x)}{\cos(2 - 7x)}$.

3. $5 \operatorname{arc sen} \dfrac{4x}{7}$.

4. $\operatorname{arc} \cos \dfrac{bx}{d^2}$.

5. $\dfrac{5^{2,2x}}{e^{9x-4}}$.

6. $\dfrac{\cosh 1{,}8x}{4^{1,8x}}$.

7. $\dfrac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+3}{\sqrt{6}}$.

8. $\dfrac{7 \arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$.

9. $\dfrac{wb\,(a-x)\,x}{2\,(b-x \operatorname{ctg} B)}$.

10. $\dfrac{x}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

11. $\dfrac{l^3-6l^2x+12lx^2-7x^3}{3l-4x}$. (Expresión que se presenta en problemas sobre vigas).

12. $\dfrac{e^{\operatorname{sen}(1{,}2x+1.7)}}{\text{l.n.}\,(8x^2-7x+3)}$.

13. Suponiendo conocidos $\dfrac{d}{dx}\cosh x$ y $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh} x$, hallar $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tgh} x$.

Los números 14 y 15 se refieren a la circulación del agua en las tuberías: v = velocidad del agua, Q = cantidad de agua que circula; θ ángulo central que abarca el perímetro mojado.

14. Si $v = 4\left(1-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$ hallar $\dfrac{dv}{d\theta}$.

15. Si $Q = 3{,}75\,\dfrac{(\theta-\operatorname{sen}\theta)^{\frac{3}{2}}}{\theta^{\frac{1}{2}}}$ hallar $\dfrac{dQ}{d\theta}$.

16. Derivar con relación a y la expresión

$$\text{l.n.}\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} y.$$

17. Si v (una velocidad) $= r\,\omega\left(\operatorname{sen}\theta+\dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{2\sqrt{m^2-\operatorname{sen}^2\theta}}\right)$, y $\dfrac{d\theta}{dt}=\omega$, hallar la aceleración $\dfrac{dv}{dt}$; hallar también la aceleración cuando θ es muy pequeño.

18. Si $\operatorname{sen}\phi = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{m}$ y $\dfrac{d\theta}{dt}=\omega$, hallar la velocidad angular $\dfrac{d\phi}{dt}$ de una biela, así como su aceleración angular $\dfrac{d^2\phi}{dt^2}$.

19. Si $x = \dfrac{w \operatorname{tg}^2\theta + q}{(p-q)\operatorname{tg}\theta}$ hallar $\dfrac{dx}{d\theta}$ y luego el valor de $\operatorname{tg}\theta$ que hace $\dfrac{dx}{d\theta}=0$.

20. Hallar $\dfrac{dM}{dx}$ cuando $M = \dfrac{wx\,(l-x)\,(l-2x)}{2\,(3l-2x)}$. M es un momento de flexión; l = longitud de la viga; x una porción de dicha longitud.

21. Derivar respecto a t el cociente $\dfrac{5\,\text{l.n.}\,(5t-8)}{t^3}$.

DERIVACIÓN PARCIAL. — Al tratar de la ecuación PV = CT en la teoría de las máquinas térmicas, se sabe que C es constante mientras que P, V y T varían. Si damos a una de estas variables un valor determinado, los valores de las otras dos variables no quedan determinados; así, por ejemplo, suponiendo C y T conocidos, el producto PV lo será también, pero no los valores individuales de P y V. Si fijamos ahora, el valor de una de estas dos variables, sea P, podremos calcular el de V. Por lo tanto, V depende de P y de T, y por consiguiente puede variar, ya sea variando P, ya sea variando T. Para hallar el incremento de V cuando varían P y T, se añade el incremento de V debido al de P (suponiendo T invariable) al incremento de V debido al de T (suponiendo P invariable). Los incrementos relativos así utilizados se llaman incrementos relativos *parciales* y en el límite *derivadas parciales* y el proceso de su determinación se denomina *derivación parcial.*

En el caso de dos variables, se puede trazar una curva plana para representar la relación que las une. Cuando las variables son tres, hace falta una superficie. Los ejes de coordenadas son rectangulares entre sí, dos en el plano del papel y el otro perpendicular a él. Si x, y, z, son las variables, diremos que z es función de x, y, lo que en forma abreviada se escribe $z = f(x, y)$. Igualmente, se escribirá

$$x = f(y, z)$$

$$y = f(x, z)$$

Si consideramos la primera de estas ecuaciones, suponiendo que los ejes Oy y Ox son horizontales (fig. 20) la figura nos dará su significación. Si damos un valor a x, sabremos la distancia del punto representado al papel, ya sea hacia adelante, ya sea hacia atrás. Si damos un valor a y, determinamos la distancia del punto al plano xz a la derecha o a la izquierda, es decir, la vertical del punto en cuestión, y su altura en esta vertical queda determinada al fijar el valor de z. Si z permanece constante y se hace variar a y y a x se determinan puntos que se hallarán todos en un mismo plano horizontal y si se unen estos puntos por un trazo continuo formarán una curva. Si, por consiguiente, una de las cantidades es constante, las variaciones de las variables se representarán en un plano; pero ya sabemos que en el plano, la variación de una variable con relación a otra se mide por la pendiente de la curva representativa; podemos, pues, dar una significación geométrica a las derivadas parciales.

Si nos referimos a la figura 20, el punto P, está determinado por sus coordenadas x, y, z o SQ, OS, QP.

Sea x constante. El punto se moverá dentro del plano LTND. La pendiente de la curva LPT, dada por la tangente del ángulo PMN, mide el incremento relativo instantáneo de z con relación a y cuando x es constante, que es lo que hemos llamado derivada parcial de z con relación a y. Esta derivada parcial puede expresarse en la forma

$\frac{\partial z}{\partial y}$ o, mejor $\left(\frac{dz}{dy}\right)_x$ (*) y si no hay ambigüedad posible sobre la cantidad que permanece constante, puede suprimirse el subíndice. Tenemos, pues,

$\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\operatorname{tg} \angle \text{PMN}$ (la pendiente es negativa puesto que z decrece cuando y crece).

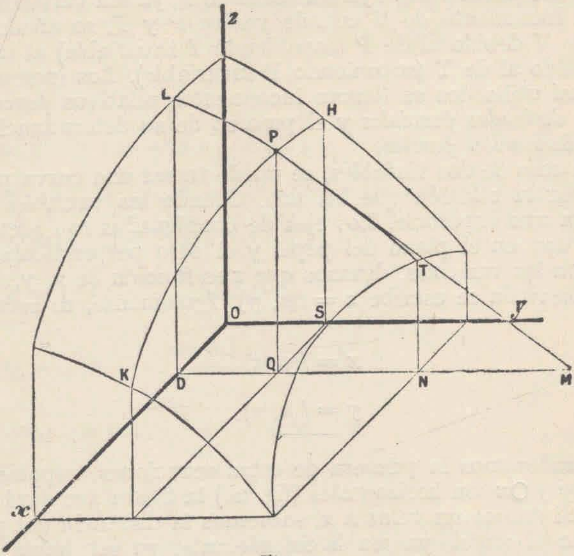


Fig. 20

Asimismo, la pendiente de la curva KPH $= \left(\frac{dz}{dx}\right)$.

Si las variables se hallan ligadas por una ecuación, las derivadas parciales pueden obtenerse mediante las reglas usuales de derivación.

Ejemplo 16. — Sea $z = 5x^2y - 2x^3y^2 + 20e^{xy}$.

Hallar

$$\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right), \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) \text{ y } \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

(*) En España está mucho más generalizada la notación $\frac{\partial z}{\partial y}$. (*N. del T.*)

Para hallar $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ hagamos y constante, y derivemos al modo usual

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = (5y \times 2x) - (2y^2 \times 3x^2) + 20ye^{xy}$$
$$= \underline{10xy - 6x^2y^2 + 20ye^{xy}}$$

De donde deduciremos

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = (10y \times 1) - (6y^2 \times 2x) + (20y \times ye^{xy})$$
$$= \underline{10y - 12xy^2 + 20y^2e^{xy}}.$$

Para hallar $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ y $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, hagamos x constante:

$$z = 5x^2y - 2x^3y^2 + 20e^{xy}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = (5x^2 \times 1) - (2x^3 \times 2y) + 20x \cdot e^{xy}$$
$$= \underline{5x^2 - 4x^3y + 20xe^{xy}}$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0 - (4x^3 \times 1) + (20x \times x \cdot e^{xy})$$
$$= \underline{20x^2e^{xy} - 4x^3}.$$

Ejemplo 17. — Sea $z = 6 \text{ l.n. } xy - 18x^5y^2$ hallar $\left(\frac{d^2z}{dx \cdot dy}\right)$ y $\left(\frac{d^2z}{dy \cdot dx}\right)$ y sacar las consecuencias que se deducen del resultado.

Para hallar $\left(\frac{d^2z}{dx \cdot dy}\right)$, buscamos primero el valor de $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ siendo x constante; llamemos Y al resultado. Buscaremos después $\left(\frac{dY}{dx}\right)$, tratando a y como constante. El resultado obtenido será $\left(\frac{d^2z}{dx \cdot dy}\right)$

Ahora bien

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{6 \times x}{xy} - 18x^5 \times 2y = \frac{6}{y} - 36x^5y = Y.$$

Derivando esta expresión con relación a x tendremos

$$\left(\frac{dY}{dx}\right) = 0 - 180x^4y$$

Es dec

$$\left(\frac{d^2z}{dx \cdot dy}\right) = \underline{-180x^4y}.$$

Ahora bien,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{6 \times y}{xy}\right) - (18y^2 \times 5x^4) = \frac{6}{x} - 90y^2x^4$$

$$\left(\frac{d}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy \cdot dx}\right) = 0 - (90x^4 \times 2y) = \underline{-180x^4y.}$$

Resulta, pues, que

$$\left(\frac{d^2z}{dx \cdot dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy \cdot dx}\right).$$

La consecuencia es que el orden con que se efectúe la derivación no influye sobre el resultado.

DIFERENCIAL TOTAL. — Si y es función de x, $y = f(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x).$$

Por lo tanto

$$dy = f'(x)dx$$

dy y dx se llaman *diferenciales* y $f'(x)$ es el coeficiente de la diferencial dx; de aquí su nombre: *coeficiente diferencial.*

Si z es función de x e y, $z = f(x, y)$, la diferencial total dz se obtiene de las diferenciales parciales dx, dy, por medio de la regla siguiente:

$$\mathbf{dz} = \left(\frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dx}}\right)\mathbf{dx} + \left(\frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dy}}\right)\mathbf{dy}.$$

Se comprenderá esta regla acudiendo a la idea fundamental de incremento relativo. Así, si damos a cada una de las variables incrementos susceptibles de medida, representados por δz, δx, δy, tendremos:

$$\delta z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right)\delta y.$$

es decir

incremento total de z = incremento de z debido al incremento de x
+ incremento de z debido al incremento de y

El incremento de z debido al de x se mide multiplicando el incremento de x por el incremento relativo de z con relación a x, hecho que puede demostrarse consultando la figura (fig. 21).

Sea P el punto (x, y, z), que se mueve sobre una superficie pasando a una posición próxima Q. El movimiento total se compone de los parciales siguientes:

(*a*) Movimiento δx de P a P′ en el que y es constante.
(*b*) Movimiento δy de P′ a Q en el que x es constante.

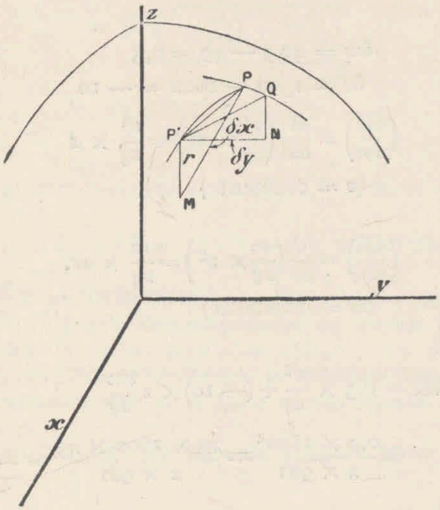


Fig. 21

En (*a*), z aumenta de una cantidad MP′, y

$$\mathrm{MP'} = \mathrm{PM} \times \operatorname{tg} \angle \mathrm{MPP'}$$

$$= \delta x \times \text{valor medio de } \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

En (*b*) el cambio de $z = \mathrm{NQ}$

$$= \delta y \times \text{valor medio de } \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

Si P, P′ y Q son muy próximos, los valores medios pueden igualarse a las pendientes en los puntos respectivos, y

cambio total de $z = \delta z$

$$= \mathrm{MP'} + \mathrm{NQ} = \delta x\left(\frac{dz}{dx}\right) + \delta y\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Ejemplo 18. — Si la energía cinética $= K = \frac{mv^2}{2g}$, hallar su incremento cuando m pasa de 49 a 49,5 y v de 1600 a 1590.

Tendremos por la regla anterior

$$\delta K = \delta m \left(\frac{dK}{dm}\right) + \delta v \left(\frac{dK}{dv}\right).$$

Ahora bien

$$\delta m = 49{,}5 - 49 = 0{,}5$$

$$\delta v = 1590 - 1600 = -10$$

$$\left(\frac{dK}{dm}\right) = \frac{d}{dm}\left(\frac{v^2}{2g} \times m\right) = \frac{v^2}{2g} \times 1$$

$$(v = \text{constante})$$

y además

$$\left(\frac{dK}{dv}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{m}{2g} \times v^2\right) = \frac{m}{2g} \times 2v.$$

$$(m = \text{constante})$$

De modo que

$$\delta K = 0{,}5 \times \frac{v^2}{2g} + (-10) \times 2\,\frac{vm}{2g}$$

$$= \frac{0{,}5 \times 1600^2}{2 \times 981} - \frac{20 \times 1600 \times 49}{2 \times 981} = \underline{-146}$$

Ejemplo 19. — Se mide una cantidad de agua Q por la fórmula

$$Q = C\,\frac{\pi D^2}{4}\sqrt{2gH}$$

Si r_1 es el error probable de D, que representa un diámetro, r_2 el error probable de H, que representa la carga y $R =$ error probable de Q,

$$R = \sqrt{r_1^2\left(\frac{dQ}{dD}\right)^2 + r_2^2\left(\frac{dQ}{dH}\right)^2}$$

Hallar la expresión de R

$$\left(\frac{dQ}{dD}\right)_H = \frac{d}{dD}\left(C \times \frac{\pi}{4}\sqrt{2gH} \cdot D^2\right)$$

$$= 2D \times C \times \frac{\pi}{4}\sqrt{2gH}.$$

$$\left(\frac{dQ}{dH}\right)_D = \frac{d}{dH}\left(C \times \frac{\pi}{4} D^2\sqrt{2g} \cdot H^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2H^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\pi C D^2}{4}\sqrt{2g}$$

De donde

$$R = \sqrt{\frac{r_1^2 C^2 D^2 \pi^2 \times 2gH}{4} + \frac{r_2^2 \times \pi^2 C^2 D^4 \times 2g}{64H}}$$

$$= C \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \sqrt{2gH} \cdot \sqrt{r_1^2 \frac{4}{D^2} + r_2^2 \frac{1}{4H^2}}$$

$$= Q \sqrt{4\left(\frac{r_1}{D}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{H}\right)^2}.$$

Es decir,

$$\frac{R}{Q} = \sqrt{4\left(\frac{r_1}{D}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{H}\right)^2}$$

de modo que si el error probable de D es 3 % y el de H 1 % el de Q será

$$\sqrt{4\,(0{,}03)^2 + \tfrac{1}{4}\,(0{,}01)^2} = 0{,}0602 = 6\ \%\ \text{aproximadamente.}$$

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA. — Es a veces necesario derivar una expresión que puede descomponerse en varios factores; en tal caso y con el fin de evitar repetidas aplicaciones de las reglas de derivación de productos y cocientes, se pueden tomar logaritmos y luego derivar haciendo uso de la regla de derivación de una función de función.

Mediante un oportuno uso de este artificio puede ahorrarse mucho trabajo.

Ejemplo 20. — Hallar el valor de $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{(3x-4)\,(4x+7)}{2x-9}\right\}$.

Sea

$$y = \frac{(3x-4)\,(4x+7)}{2x-9}$$

$$\text{l.n.}\, y = \text{l.n.}\,(3x-4) + \text{l.n.}\,(4x+7) - \text{l.n.}\,(2x-9)$$

De donde

$$\frac{d\,\text{l.n.}\,y}{dx} = \frac{3}{(3x-4)} + \frac{4}{(4x+7)} - \frac{2}{(2x-9)}$$

Pero

$$\frac{d\,\text{l.n.}\,y}{dx} = \frac{d\,\text{l.n.}\,y}{dy} \times \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{3}{(3x-4)} + \frac{4}{(4x+7)} - \frac{2}{(2x-9)}$$

osea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x - 4)(4x + 7)}{(2x - 9)} \times$$

$$\left\{\frac{24x^2 - 66x - 189 + 24x^2 + 144 - 140x - 24x^2 - 10x + 56}{(3x - 4)(4x + 7)(2x - 9)}\right\}$$

$$= \frac{24x^2 - 216x + 11}{(2x - 9)^2}.$$

(Como práctica, el lector puede repetir el ejercicio anterior haciendo $y = \dfrac{12x^2 + 5x - 28}{(2x - 9)}$ y aplicando la regla de la derivación de cocientes)

Este método es muy útil cuando se presentan potencias de funciones de la variable.

Ejemplo 21. — Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ cuando $y = \dfrac{(7x + 2)^3(x - 1)}{(2x - 5)^2}$

Apliquemos el método:

$$\text{l.n. } y = 3 \text{ l.n. } (7x + 2) + \text{l.n. } (x - 1) - 2 \text{ l.n. } (2x - 5)$$

Luego

$$\frac{d \text{ l.n. } y}{dy} = \frac{3 \times 7}{(7x + 2)} + \frac{1}{(x - 1)} - \frac{2 \times 2}{(2x - 5)}$$

$$= \frac{42x^2 + 105 - 147x + 14x^2 - 31x - 10 - 28x^2 + 20x + 8}{(7x + 2)(x - 1)(2x - 5)}$$

$$= \frac{28x^2 - 158x + 103}{(7x + 2)(x - 1)(2x - 5)}$$

Por otra parte

$$\frac{d \text{ l.n. } y}{dx} = \frac{d \text{ l.n. } y}{dy} \times \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx}$$

Luego

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{28x^2 - 158x + 103}{(7x + 2)(x - 1)(2x - 5)}$$

y, por consiguiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(7x + 2)^3(x - 1)}{(2x - 5)^2} \times \frac{28x^2 - 158x + 103}{(7x + 2)(x - 1)(2x - 5)}$$

$$= \frac{(7x + 2)^2(28x^2 - 158x + 103)}{(2x - 5)^3}$$

Ejercicios 9. — Sobre la derivación parcial y logarítmica

1. Se han medido los lados de un rectángulo con errores probables de r_1 y r_2. Si A = área, a y b son los lados, hallar el error probable R de A, teniendo en cuenta que

$$R = \sqrt{r_1{}^2\left(\frac{dA}{da}\right)_b^2 + r_2{}^2\left(\frac{dA}{db}\right)_a^2}$$

siendo las derivadas parciales.

2. Si $z = 3{,}26x^5e^{2y}$ hallar $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ y $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$.

3. Si $s = t^{5,2} - pt^2 + \text{l.n.}\ (5p - 3) \times e^{4t}$, hallar $\left(\frac{ds}{dp}\right)_t$ y $\left(\frac{ds}{dt}\right)_p$.

4. Si $v = (4 - u)^2(3 + 8u)^3$, hallar $\frac{dv}{du}$.

5. Si $y = \frac{(1 + x)^n}{(1 - x)^n}$, probar que $\frac{dy}{dx} = \frac{2ny}{1 - x^2}$.

6. Si $y = 8x(1{,}7 + 0{,}2x)^4$, hallar $\frac{dy}{dx}$.

7. Derivar con respecto a x, $\frac{x + 3}{(x^2 + 6x + 5)^2}$

8. Hallar la velocidad de salida $\frac{dm}{dt}$ del aire contenido en un depósito cuando $m = \frac{pv}{c\tau}$, siendo m, p, v, τ, todos variables.

9. Si $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y u es función de x, é y, probar que

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_y = \cos\theta\left(\frac{du}{dr}\right)_\theta - \frac{1}{r}\,\text{sen}\,\theta\left(\frac{du}{d\theta}\right)_r$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_x = \text{sen}\,\theta\left(\frac{du}{dr}\right)_\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\left(\frac{du}{d\theta}\right)_r.$$

CAPÍTULO IV

Aplicaciones de la derivación

Habiendo ya explicado las reglas de derivación para las funciones algebraicas y trigonométricas, nos hallamos en situación de aplicarlas a la resolución de problemas prácticos. El orden de problemas, en que más se revela la gran utilidad de la derivación es el de los máximos y mínimos. A este orden de problemas dedicaremos pues ahora nuestra atención.

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS. — Numerosos son los casos tanto en la teoría como en la práctica de la ingeniería, en los que se necesita, dadas dos cantidades dependientes, entre sí, hallar el valor de la primera que hace a la segunda máxima o mínima. Por ejemplo, puede desearse agrupar cierto número de acumuladores de manera que den el máximo de corriente posible. Conociendo el voltaje y la resistencia interna de cada acumulador, así como la resistencia del conductor que ha de atravesar la corriente, se puede, por medio de una sencilla derivación, determinar la relación que ha de existir entre la resistencia externa y la resistencia interna total para que la corriente obtenida sea máxima.

De igual modo, podría ser útil hallar el coste mínimo de una instalación hidráulica para el transporte de cierta potencia dada en caballos-vapor. Aquí intervendrían varias cantidades variables, tales como el diámetro de la tubería, precio de la fuerza, longitud de la tubería transmisora, etc., cada una de las cuales podría figurar como variable principal.

Expresando todas las condiciones en función de la variable principal escogida según el plan que a continuación se expone, se llegaría con relativa facilidad a la solución deseada.

Ya se ha expuesto más arriba (parte I, pág. 226) un método gráfico para la solución de tales problemas. Aunque directo y general en sus aplicaciones, este método es bastante engorroso, y, a menos de trazar los gráficos a gran escala en las cercanías de los máximos o mínimos, los resultados obtenidos no pasan de una mediana aproximación. El método analítico no adolece de este defecto, pero no debe olvidarse que no es tan general en su aplicación.

La teoría del método analítico puede exponerse de modo siguiente. La pendiente de una curva mide el incremento relativo de la ordenada con relación al de la abscisa. Por lo tanto, cuando la pendiente es nula, el incremento relativo vale cero, y la función presenta un

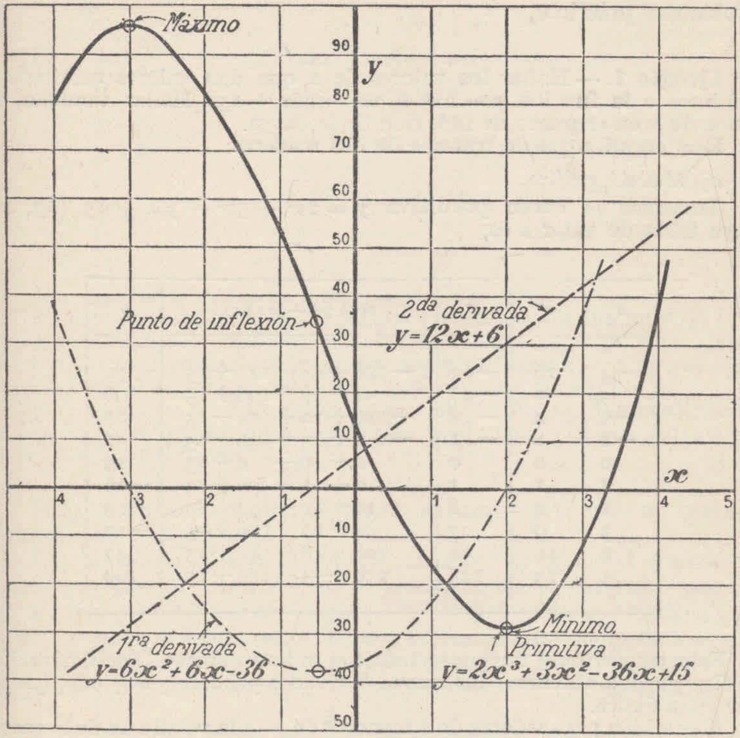


Fig. 22. —Máximos y mínimos

punto máximo o mínimo (*). Pero ya sabemos que la pendiente de una curva se mide por la derivada o coeficiente diferencial de lo función: por tanto, la función pasa por un máximo o mínimo, cuanda la derivada es nula (*).

Por consiguiente, para hallar los máximos y mínimos de una función, empezaremos por determinar su derivada y luego buscaremos los valores de la variable que hacen nula a esta derivada. Los

(*) *N. del T.* — En la pág. 18 ya digimos que esto no es rigurosamente cierto; pero los casos de excepción son poco frecuentes en las aplicaciones prácticas. Este es, pues, el valor que hemos de dar a la afirmación del texto.

valores mínimos y máximos deseados se obtendrán sustituyendo en la función estos valores de la variable. La regla, en forma concisa será pues la siguiente: **Para hallar el valor de la variable que hace máxima o mínima a la función, derívese, iguálese a cero la derivada y resuélvase la ecuación resultante.**

Examinemos una aplicación teórica antes de aplicar la regla a problemas prácticos.

Ejemplo 1. — Hallar los valores de x que dan valores máximos o mínimos a la función $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$. Hallar también, el valor de x en el punto de inflexión de la curva.

Esta cuestión puede tratarse de dos maneras:

a) Método gráfico.

Trazamos la curva primitiva $y = 2x^2 + 3x^3 - 36x + 15$ (fig. 22) cuya tabla de valores es,

x	x^2	x^3	$2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$	y
-4	16	-64	$-128 + 48 + 144 + 15$	79
-3	9	-27	$-54 + 27 + 108 + 15$	96
-2	4	-8	$-16 + 12 + 72 + 15$	83
-1	1	-1	$-2 + 3 + 36 + 15$	52
0	0	0	$0 + 0 - 0 + 15$	15
1	1	1	$2 + 3 - 36 + 15$	-16
2	4	8	$16 + 12 - 72 + 15$	-29
3	9	27	$54 + 27 - 108 + 15$	-12
4	16	64	$128 + 48 - 144 + 15$	47
5	25	125	$250 + 75 - 180 + 15$	160

Esta curva tiene un punto máximo y uno mínimo. Por derivación gráfica pueden obtenerse las curvas derivadas primera y segunda, que se ven en la figura.

Ahora bien para valores de x menores de -3 la pendiente de la curva primitiva es positiva, puesto que las ordenadas de la primera curva derivada son positivas. Cuando $x = -3$ la curva primitiva es horizontal y la curva derivada primera corta el eje OX; y puesto que las ordenadas de esta curva dan los valores de $\frac{dy}{dx}$, vemos que cuando la curva primitiva pasa por un valor máximo o mínimo el valor de $\frac{dy}{dx} = 0$. Para valores de x entre -3 y $+2$ la pendiente de la primitiva es negativa, cuando $x = +2$, la pendiente es 0, y a partir de este punto se hace positiva. Así pues los valores buscados de y corresponden a $x = -3$ y $x = +2$; y son: máximo para $x = -3$ y mínimo para $x = +2$.

Esta investigación es muy útil para tratar luego la cuestión analíticamente. En realidad, para la comprensión total del problema deben combinarse los dos métodos.

b) Método analítico

Sea $$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6).$$

Hagamos $\frac{dy}{dx} = 0$, siguiendo la regla dada

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{o sea} \quad (x^2 + x - 6) = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = +2 \end{cases}$$

Los valores buscados de x son pues -3 y $+2$.

Podemos averiguar si corresponden a máximos o a mínimos de y.

Hay un método evidente, pero lento. Se da a x un valor próximo a -3, primero algo inferior y luego algo superior. Sea $x = -3{,}1$ y $x = -2{,}9$. Efectuando el cálculo se comprueba que cuando x pasa de $-3{,}1$ á -3 y luego a $-2{,}9$, y pasa de $95{,}85$ a 96 y luego a $95{,}85$. Por consiguiente $x = -3$ tiene que ser un máximo. De igual manera se demostraría que $x = +2$ es un mínimo.

Pero esta labor aritmética puede evitarse siguiendo un procedimiento más matemático.

En la curva derivada cuya ecuación es $y = 6x^2 + 6x - 36$, cuando x pasa de -4 a -3 la ordenada de la derivada pasa de 36 a 0; cuando x pasa de -3 a $-0{,}5$ la ordenada es negativa pero crece en valor absoluto; es decir, que en las proximidades de $x = -3$ la pendiente de la curva derivada es negativa. Pero la pendiente de la primera curva derivada es la ordenada de la segunda curva derivada y está expresada por $\frac{d^2y}{dx^2}$, de modo que llegamos a la consecuencia de que en el entorno de un valor máximo de la función original la derivada segunda es negativa.

De igual modo veríamos que en el entorno de un valor mínimo de la función original la derivada segunda es positiva. De modo que podemos dictar la regla siguiente: **Una vez hallados los valores de la variable que dan a la función valores máximos o mínimos, sustitúyanse estos valores en la expresión de la segunda derivada; si para un valor de la variable, la derivada segunda es negativa, el valor correspondiente de la función será máximo; si es positiva, el valor será mínimo.**

Esta regla puede expresarse del modo siguiente:

Sea $y = f(x)$ y sean x_1; x_2 valores de x que hacen $f'(x) = 0$.

Se buscará los valores de $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ para $x = x_1$ y $x = x_2$, sean $f''(x_1)$, $f''(x_2)$. Si $f''(x_1)$ es negativo, $f(x_1)$ es un máximo de y. Si $f''(x_1)$ es positivo, $f(x_1)$ es un mínimo de y.

Apliquemos la regla al ejemplo actual.

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15.$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 36$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 12x + 6.$$

Si $x = -3$

$f''(-3) = 12(-3) + 6 = -30$ luego $f(-3)$ es un máximo.

Si $x = +2$ $\quad f''(+2) = 12 \times 2 + 6 = +30$, $f(+2)$ es un mínimo.

En la segunda curva derivada, cuya ecuación es $y = 12x + 6$, observamos que su ordenada es negativa para todo valor de x mayor que $-0,5$ en cuyo punto la curva corta al eje ox.

Esto indica que para $x = -0,5$ la primera curva derivada pasa por un máximo o mínimo (en este caso mínimo). Pero esta curva es la de pendientes de la primitiva y, por lo tanto, para $x = -0,5$ la pendiente de la primitiva pasa por un máximo o mínimo y en este punto cambia, por lo tanto, el sentido del movimiento de la tangente a la curva. Un punto así se denomina *punto de inflexión* de la curva.

Por lo tanto, son puntos de inflexión aquellos para los cuales $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Estos puntos se presentan en la teoría de las vigas empotradas, ya sabemos que el momento de flexión en una sección cualquiera es proporcional al valor de $\frac{d^2y}{dx^2}$; por lo tanto, cuando el momento de flexión es nulo, debe darse en la curva un punto de inflexión.

Ejemplo 2. — Hallar los puntos de inflexión de una viga empotrada en sus extremos y uniformemente cargada con w unidades por metro, siendo la ecuación de la línea elástica

$$y = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{wlx^3}{12} - \frac{wl^2x^2}{24} - \frac{wx^4}{24}\right)$$

Podemos considerar la cuestión gráfica o físicamente. Mediante el primer procedimiento hay que hallar los valores de x que anulen a $\frac{d^2y}{dx^2}$. Razonando con arreglo a la física llegamos a los mismos resultados. En efecto, el momento de flexión, que se expresa por EI $\frac{d^2y}{dx^2}$, cambia de signo, como se ve, por el cambio de curvatura de la viga (fig. 23), y por lo tanto hay dos puntos en los que el momento de flexión tiene que ser nulo, puesto que su variación es uniforme y continua, y como $M = EI \frac{d^2y}{dx^2}$ habrá que anular $\frac{d^2y}{dx^2}$.

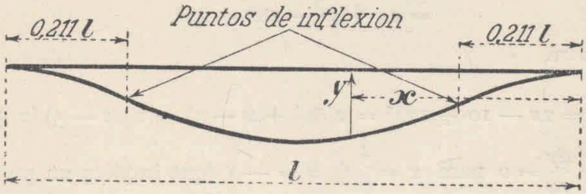


Fig. 23

Ahora bien:

$$y = \frac{w}{EI}\left(\frac{lx^3}{12} - \frac{l^2x^2}{24} - \frac{x^4}{24}\right)$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{EI}\left[\left(\frac{l}{12} \times 3x^2\right) - \left(\frac{l^2}{24} \times 2x\right) - \frac{4x^3}{24}\right]$$

$$= \frac{w}{EI}\left(\frac{lx^2}{4} - \frac{l^2x}{12} - \frac{x^3}{6}\right)$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{EI}\left[\left(\frac{l}{4} \times 2x\right) - \left(\frac{l^2}{12} \times 1\right) - \frac{3x^2}{6}\right]$$

$$= \frac{w}{EI}\left(\frac{lx}{2} - \frac{l^2}{12} - \frac{x^2}{2}\right).$$

Por consiguiente

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} = w\left(\frac{lx}{2} - \frac{l^2}{12} - \frac{x^2}{2}\right)$$

y para $M = 0$,

$$6lx - l^2 - 6x^2 = 0.$$

$$x = \frac{6l \pm \sqrt{36l^2 - 24l^2}}{12} = \frac{l}{12}(6 \pm 3{,}46) = \begin{cases} 0{,}789l \\ \underline{\underline{0{,}211l}} \end{cases}$$

Los puntos de inflexión se presentan pues ambos a una distancia de los extremos igual a 0,211 de la distancia entre éstos.

Ejemplo 3. — Dividir en dos partes una línea de 5 cm. de longitud de modo que el cuadrado de una de ellas mas cuatro veces el cubo de la otra sea un mínimo.

Sea x una parte. La otra será $5 - x$. Luego $(5 - x)^2 + 4x^3$ debe hacerse un mínimo.

Sea
$$y = (5 - x)^2 + 4x^3$$
$$= 25 + x^2 - 10x + 4x^3.$$

Se tendrá

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 10 + 12x^2 = 2(6x^2 + x - 5) = 2(6x - 5)(x + 1).$$

Luego $\frac{dy}{dx} = 0$ para $x = \frac{5}{6}$ ó $x = -1$ (que implica un punto divisorio exterior).

Veamos si estas soluciones nos dan un máximo o un mínimo

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 12x^2 + 2x - 10$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 24x + 2.$$

Luego

$$f''\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{24 \times 5}{6} + 2, \text{ positiva, luego } f\left(\frac{5}{6}\right) \text{ es mínimo}$$

$$f''(-1) = 24(-1) + 2, \text{ negativa} \qquad f(-1) \text{ es máximo.}$$

La solución es pues un punto a $\frac{5}{6}$ cm. del extremo.

Ejemplo 4. — Si s = superficie de un aeroplano.
S = superficie de las alas
K = coeficiente ascencional.

la «fineza», f se obtiene por la fórmula $f^2 = \frac{KS}{0,08s}$.

El «empuje» necesario para la sustentación es igual a $C\left(i + \frac{1}{f^2 i}\right)$, C = constante, i = ángulo de ataque en radianes.

Si suponemos $S = 25s$ y $K = 0,4$, hallar el ángulo de ataque para el que se necesita un empuje mínimo.

$$f^2 = \frac{KS}{0,08s} = \frac{0,4 \times 25}{0,08} = 125.$$

El empuje $E = C\left(1 + \frac{1}{f^2 i}\right)$, y como i es la única variable que entra en esta expresión tenemos.

$$\frac{dE}{di} = C\left(1 - \frac{1}{f^2 i^2}\right)$$

Igualemos a 0

$$\frac{dE}{di} = C\left(1 - \frac{1}{f^2 i^2}\right) = 0$$

Luego

$$i^2 = \frac{1}{f^2} = \frac{1}{125}$$

$$i = 0{,}0895.$$

Cuando $i = 0{,}0895$ radiaı es, el empuje será pues o máximo o mínimo. Busquemos la segunda derivaua

$$\frac{d^2E}{di^2} = C\left(0 + \frac{2}{f^2 i^3}\right)$$

que para el valor de $i = 0{,}0895$, es positiva.

Luego el empuje para este valor de i es mínimo y el problema está resuelto.

Ejemplo 5. — Hallar las dimensiones del cilindro máximo inscriptible en un cono de revolución cuya altura es 6 cm. y cuya base tiene un diámetro de 10 cm.

Sea x el radio de la base del cilindro, sea y su altura. Su volumen será $V = \pi x^2 y$. Hemos de obtener una expresión de y en función de x antes de derivar con respecto a x.

De los triángulos ADC, EFC (fig. 24) que son semejantes, se deduce

$$\frac{6}{5} = \frac{y}{5 - x}$$

o sea

$$y = \frac{6}{5}(5 - x)$$

Luego

$$V = \pi x^2 \times \frac{6}{5}(5 - x) = \frac{6\pi}{5}(5x^2 - x^3)$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{6\pi}{5}(10x - 3x^2).$$

Ahora bien

$$\frac{dV}{dx} = 0 \text{ cuando } x(10 - 3x) = 0$$

o sea, para $x = 0$ (cilindro de $V = 0$)

o para $x = \frac{10}{3}$ cm.

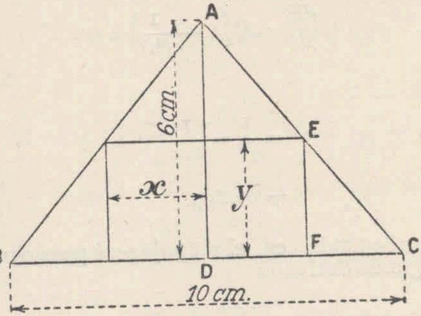


Fig. 24

En cuyo caso

$$y = \frac{6}{5}\left(5 - \frac{10}{3}\right) = \underline{2 \text{ cm.}}$$

y por lo tanto

$$V = \pi \times \left(\frac{10}{3}\right)^2 \times 2 = \underline{69{,}8 \text{ cm.}^3}$$

Ejemplo 6. — El coste total de explotación (evaluado en libras esterlinas por hora) de un cierto barco es

$$C = 4{,}5 + \frac{v^3}{2100}$$

v = velocidad en nudos por hora. Hallar la velocidad que da el coste mínimo por viaje.

El coste total del viaje depende del

a) Coste por hora; y
b) Número de horas que dura el viaje.

A su vez, (*b*) depende de $\frac{1}{v}$, de modo que si el viaje es de 2000 millas náuticas el tiempo empleado será $\frac{2000}{v}$. En general, para K millas náuticas, $T = \frac{K}{v}$ horas.

Tendremos pues que el coste total de un viaje de K millas valdrá

$$= C_t = \frac{K}{v} \times \left(4{,}5 + \frac{v^3}{2100}\right)$$

$$= K\left(4{,}5v^{-1} + \frac{v^2}{2100}\right)$$

Derivemos con relación a v

$$\frac{dC_t}{dv} = K\left[4{,}5 \times (-1 \times v^{-2}) + \frac{2v}{2100}\right]$$

$$= K\left(-\frac{4{,}5}{v^2} + \frac{v}{1050}\right)$$

y anulemos esta derivada para determinar el valor buscado.

$$-\frac{4{,}5}{v^2} + \frac{v}{1050} = 0$$

o sea $$v^3 = 4{,}5 \times 1050 = 4725$$

$$\underline{v = 16{,}78 \text{ nudos.}}$$

Ejemplo 7. — Una tubería recibe agua con una carga de 60 metros. La pérdida de carga debida al rozamiento en la tubería es proporcional al cuadrado de la velocidad. Hallar la pérdida de carga debida al rozamiento cuando la potencia transmitida es máxima.

Sea v la velocidad. La pérdida de carga es Kv^2 (K constante) y la carga efectiva $= 60 - Kv^2 = H_e$.

La potencia transmitida W es proporcional al producto de la cantidad (en kilos por minuto) por la carga efectiva (en metros). O lo que es lo mismo, al área de la sección (en m²) por la velocidad (en m. por minuto) multiplicado por 1000 y por la carga efectiva.

Tendremos pues,

$$W = CvH_e, \text{ en donde } C = \text{constante}$$

$$= Cv(60 - Kv^2)$$

$$= C(60v - Kv^3)$$

De donde $$\frac{d}{dv}W = C(60 - 3Kv^2)$$

$$= C(60 - 180 + 3\,H_e)$$

$$= C(3H_e - 120)$$

Luego $$\frac{dW}{dv} = 0 \text{ cuando } H_e = \frac{120}{3} = 40.$$

La potencia es pues máxima cuando la carga perdida es un tercio de la carga suministrada. El rendimiento máximo es pues $\frac{2}{3}$, o sea 66,66 %.

Ejemplo 8. — La rigidez de una barra es proporcional a la anchura y al cubo de la altura de la sección. Hallar las dimensiones de la viga de máxima rigidez que puede sacarse de un cilindro de 4 cm. de diámetro. Sabemos que (fig. 25).

$$R = Kbd^3 \qquad K = \text{constante}$$

La anchura y la altura varían, pero están ligadas entre sí, puesto que de la figura se desprende que $b^2 = 16 - d^2$.

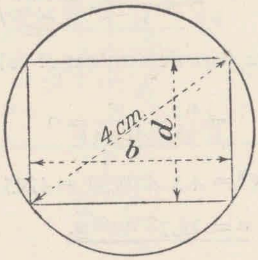


Fig. 25

Por lo tanto, podemos substituir b por su expresión en función de d y derivar luego con relación a d; así se tiene

$$R = Kd^3\sqrt{16 - d^2}.$$

Expresión bastante engorrosa para el cálculo, pero como se trata de cantidades positivas, R pasará por su máximo cuando R^2 sea máximo (*) y por lo tanto podemos operar con R^2.

$$R^2 = K^2d^6(16 - d^2) = K^2(16d^6 - d^8)$$

$$\frac{dR^2}{d.d} = K^2(96d^5 - 8d^7) = 8\,d^5(12 - d^2)$$

que será nulo para $d = 0$ (que da la rigidez mínima $= 0$) y

para $$d^2 = 12$$

$$d = \underline{3{,}464}\ \text{cm.}$$

y $$b = \sqrt{16 - 12} = \underline{2\ \text{cm.}}$$

(*) Si se tratase de cantidades negativas el razonamiento no sería válido. Supongamos, en efecto que los valores de y cerca de un máximo fuesen $-13, -12, -11$ $-10, -11, -12$, los valores de y^2 correspondientes serían $+169, +144, +121, +100$ $+121, +144$, así pues, si $y = -10$ (valor máximo) cuando $x = 4$, para este mismo valor, será $y^2 = 100$ un mínimo de y^2.

Ejemplo 9. — Hallar la forma de un canal rectangular cuya sección tenga un área dada, de modo que permita el máximo de gasto, sabiendo que

$$Q = Av,\ v = c\sqrt{mi},\ m = \text{radio medio o hidráulico} = \frac{\text{area}}{\text{perímetro mojado}}$$

i = pendiente de la superficie. Q gasto.

Sean b y a la anchura y altura de la sección

$$ba = A \qquad b = \frac{A}{a}$$

$$m = \frac{A}{b+2a} \text{ y por tanto } v = c\sqrt{i}\sqrt{\frac{A}{b+2a}}$$

$$= c\sqrt{Ai}\cdot\frac{1}{\sqrt{b+2a}}$$

Luego
$$Q = Av = Ac\sqrt{Ai}\cdot\frac{1}{\sqrt{b+2a}}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{b+2a}} \text{ haciendo } K = Ac\sqrt{Ai}$$

Q será máximo cuando lo sea Q^2

$$Q^2 = K^2\frac{1}{b+2a} = K^2\cdot\frac{1}{b+\frac{2A}{b}}.$$

Q^2 será máximo cuando su denominador sea mínimo; designándole por D,

$$D = b + \frac{2A}{b};\quad \frac{dD}{db} = \frac{d}{db}\left(b+\frac{2A}{b}\right) = 1 - \frac{2A}{b^2}$$

de modo que
$$\frac{dD}{db} = 0 \text{ cuando } b = \sqrt{2A}$$

siendo entonces
$$a = \frac{A}{b} = \frac{A}{\sqrt{2A}} = \sqrt{\frac{A}{2}}$$

Las dimensiones deseadas son pues.

$$\underline{\text{profundidad} = \sqrt{\frac{A}{2}}}$$

$$\underline{\text{anchura} \quad = \sqrt{2A}}$$

Ejemplo 10. — En cierta máquina de vapor, la potencia efectiva W por metro cúbico de vapor, en función de r, relación de expansión, es

$$W = \frac{4240\left(\frac{1 + \text{l.n.}\, r}{r}\right) - 955}{\frac{0{,}00833}{r} + 0{,}000903}$$

Hallar el valor de r que hace W máximo.

Simplifiquemos la expresión antes de diferenciarla

$$W = \frac{4240\,(1 + \text{l.n.}\, r) - 955\, r}{0{,}00833 + 0{,}000903\, r}$$

W es pues un cociente $\frac{u}{v}$, siendo $\frac{u = 4240\,(1 + \text{l.n.}\, r) - 955 r}{v = 0{,}00833 + 0{,}000903\, r}$

Tendremos pues $$\frac{du}{dr} = \frac{4240}{r} - 955$$

y $$\frac{dv}{dr} = 0{,}000903$$

De donde $$\frac{dW}{dr} = \frac{v\frac{du}{dr} - u\frac{dv}{dr}}{v^2} =$$

$$= \frac{(0{,}00833 + 0{,}000903 r)\left(\frac{4240}{r} - 955\right) - [4240(1 + \text{l.n.}\, r) - 955 r] \times 0{,}000903}{(0{,}00833 + 0{,}000903 r)^2}$$

$\frac{dW}{dr} = 0$ cuando lo sea el numerador de la expresión precedente o sea,

cuando $\frac{1}{r} - 0{,}225 - 0{,}1084\ \text{l.n.}\ r = 0$

ecuación que se puede resolver trazando las curvas $y_1 = 0{,}1084$ l.n. r

$y_2 = \frac{1}{r} - 0{,}225$ y hallando su intersección.

La solución es $\underline{r = 2{,}93}$.

Ejemplo 11. — El valor de una corriente eléctrica secundaria está expresado por la fórmula

$$y = \frac{I}{2}\left(e^{-\frac{Rt}{L+M}} - e^{-\frac{Rt}{L-M}}\right)$$

donde

L = inductancia del circuito primario.
R = resistencia del circuito primario.
M = coeficiente de inducción mutua.
I = corriente estacionaria

Hallar el valor de t que hace a y máximo

$$y = \frac{I}{2}\left(e^{-\frac{Rt}{L+M}} - e^{-\frac{Rt}{L-M}}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{I}{2}\left(-\frac{R}{L+M}\,e^{-\frac{Rt}{L+M}} + \frac{R}{L-M}\,e^{-\frac{Rt}{L-M}}\right)$$

que será nula cuando

$$\frac{R}{L-M}\,e^{-\frac{Rt}{L+M}} = \frac{R}{L+M}\,e^{-\frac{Rt}{L+M}}$$

o lo que es lo mismo,

$$e^{-\frac{Rt}{L-M}+\frac{Rt}{L+M}} = \frac{L-M}{L+M}$$

$$e^{\frac{Rt(L-M-L-M)}{L^2-M^2}} = \frac{L-M}{L+M}$$

$$e^{-\frac{2MRt}{L^2-M^2}} = \frac{L-M}{L+M}$$

ó
$$e^{\frac{2MRt}{L^2-M^2}} = \frac{L+M}{L-M}$$

Adoptemos la forma logarítmica

$$\text{l.n.}\left(\frac{L+M}{L-N}\right) = \frac{2MRt}{L^2-M^2}$$

de donde
$$\underline{t = \frac{L^2-M^2}{2MR}\,\text{l.n.}\left(\frac{L+M}{L-M}\right)}$$

Si se trata de tres variables, x, y, z, relacionadas por una expresión de la forma $z = f(x, y)$, para hallar los valores de x e y que corresponden a máximos o mínimos de z, hay que determinar en qué puntos es horizontal el plano tangente a la superficie $z = f(xy)$. El problema analítico consiste en hallar los valores de x, y, que satisfacen simultáneamente a las ecuaciones $\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0$, $\left(\frac{dy}{dz}\right) = 0$, siendo estas derivadas parciales.

Ejemplo 12. — La constante eléctrica de tiempo de una bobina cilíndrica de alambre (tiempo en el cual la corriente baja de su valor total a un valor igual a 0,632 del mismo) puede expresarse aproximadamente por $K = \frac{mxyz}{ax + by + cz}$ en que z es la longitud del eje de la bobina, y la diferencia entre los radios exterior é interior y x el radio medio; a, b, c, son constantes. Dado un volumen fijo de cable hallar los valores, de x, y, que hacen máxima la constante de tiempo. Tenemos:

Volumen V del cable = sección × longitud; $V = 2\pi x \times y \times z$; luego $z = \dfrac{V}{2\pi xy}$.

Por otra parte, $K = m \times \dfrac{xyz}{ax + by + cz}$ será máximo cuando $\dfrac{ax + by + cz}{xyz}$ sea mínimo, o sea cuando sea mínimo

$$p = \frac{a}{yz} + \frac{b}{xz} + \frac{c}{xy}$$

$$= \frac{a \times 2\pi xy}{yV} + \frac{b \times 2\pi xy}{xV} + \frac{c}{xy}$$

$$= \frac{2\pi xya}{yV} + \frac{2\pi xyb}{xV} + \frac{c}{xy}.$$

Ahora bien, derivando parcialmente

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_y = \frac{2\pi a}{V} + \left[\frac{c}{y} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi a}{V} - \frac{c}{x^2y}.$$

De igual modo $$\left(\frac{dp}{dy}\right)_x = \frac{2\pi b}{V} - \frac{c}{xy^2}.$$

Igualemos ambos a o

$$\frac{2\pi a}{V} = \frac{c}{x^2y} \quad [I]$$

$$\frac{2\pi b}{V} = \frac{c}{xy^2} \quad [II]$$

o sea $$x^2y = \frac{cV}{2\pi a}$$

$$xy^2 = \frac{cV}{2\pi b}$$

De esta última resulta $$x = \frac{cV}{2\pi by^2}$$

Substituyamos en la anterior

$$\frac{c^2V^2y}{4\pi^2b^2y^4} = \frac{cV}{2\pi}$$

que se reduce a $$y^3 = \frac{cVa}{2\pi b^2}$$

Y por consiguiente $$y = \sqrt[3]{\frac{caV}{2\pi b^2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{cbV}{2\pi a^2}}$$

Ejercicios 10. — Valores máximos y mínimos

1. Si $M = 15\,x - 0{,}01x^2$, hallar el valor de x que hace máximo a M

2. Igual problema para $M = 3{,}42x - 0{,}1x^2$.

3. M es un momento de flexión y x una longitud. Hallar x en función de l de modo que M sea máximo, y hallar también el valor máximo de M.

$$M = \frac{wx}{2}(l - x).$$

4. El mismo enunciado del núm. 3, pero haciendo

$$M = \frac{Wx}{3}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

5. El trabajo realizado por un motor en serie en un tiempo t es

$$W = \frac{et\,(E - e)}{R}$$

e = fuerza contra electromotriz,
E = voltaje de la corriente.
R = resistencia del inducido.

El rendimiento eléctrico es $\frac{e}{E}$. Hallar el rendimiento eléctrico cuando el régimen es tal que la carga de trabajo es la máxima normal.

Hallar en los problemas 6, 7 y 8 los valores de x que dan máximos o mínimos para y; analizar la naturaleza de estos puntos.

6. $y = 4x^2 + 18x - 41$. **7.** $y = 5x - 9x^2 + 18$.

8. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 51$. Hallar también en este caso el valor de x en el punto de inflexión.

9. Diez y seis elementos de acumuladores, cada uno de 1 ohmio de resistencia interior y de 1 voltio, se hallan conectados en circuito mixto sobre una resistencia de 4 ohmios. Hallar el sistema de distribución que da la corriente máxima. (Sea $\frac{16}{x}$ filas con x acumuladores por fila).

10. Se utilizan 40 metros cuadrados de plancha de metal para construir un tanque abierto, de base cuadrada.
Hallar las dimensiones que dan la capacidad máxima.

11. Sea $W = 4C^2 + \frac{74}{C}$. Hallar el valor de C para el cual W es máximo o mínimo y averiguar la naturaleza de este punto.

12. M (momento de flexión) $= W \frac{l - x}{l} (x + y) - Wy$. ¿Para qué valor de x es M máximo? (W, l, y, son constantes).

13. El precio de un cable eléctrico (en pesetas por Km.) puede expresarse por

$$C = \frac{15730}{x} + 1531x$$

en donde x = sección en cm.^{2}
Hallar la sección que da el coste mínimo así como este coste.

14. Una ventana tiene por forma un rectángulo más un semicírculo sobre uno de sus lados como diámetro. El perímetro total es de 10 m.
Hallar las dimensiones de manera que dé paso al máximo de luz.

15 El gasto de un barco en libras esterlinas por hora es

$$C = 3{,}2 + \frac{V^3}{2200}$$

V = velocidad en nudos. Hallar el valor de V que hace mínimo el gasto de un viaje de 3000 millas náuticas. Comparar el valor hallado con los que resultan a las velocidades de un 10 % mayor y menor.

16. Un peso aislado P. rueda sobre un puente colgante arriostrado por medio de vigas articuladas. Cuando el peso está en A, a una distancia x del centro, el momento de flexión en este punto es $M_A = \frac{Px}{2l^2}(l^2 - 4x^2)$

Hallar el valor de x que hace máximo a M_A.

17. Un depósito de acero abierto de sección circular ha de contener 10,000 litros de agua. Hallar las dimensiones que requieran la cantidad mínima de plancha de acero.

18. Sea un recipiente de base cuadrada, construído con una hoja de estaño de 128 dcm. cuadrados. La profundidad de la tapa es de 10 cm. Hallar las dimensiones que darán la capacidad máxima.

19. La rigidez de una viga de sección rectangular es proporcional a la anchura y al cubo de la altura. Hallar la relación entre los lados de la sección de la viga de máxima rigidez, dado un perímetro fijo.

20 Un peso distribuído uniformemente sobre una longitud r rueda a lo largo de una viga de longitud l, y el momento de flexión M debido a este peso, en un punto dado, es

$$M = \frac{wry}{l}\left\{l - y + x - \frac{r}{2}\right\} - \frac{wx^2}{2}$$

Hallar el valor de x que hace M máximo.

21. Hallar el valor de V (velocidad) que hace R (resistencia) máximo sabiendo que

$$R = \frac{V^2}{54} - \frac{3(V - 12)}{V + 12}$$

22. Si $L = \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{1}{r}(r^2 - x^2)$, hallar el valor de x que hace L máximo.

23. Un chorro de agua de velocidad v, choca con una plancha que se mueve en igual dirección con una velocidad u. El rendimiento $\eta = \frac{2u(v-u)^2}{v^3}$. Hallar los valores de u que dan el rendimiento máximo y mínimo así como también este rendimiento máximo.

24. Si $\eta = \frac{2u(v - n)}{v^2}$ hallar el valor de u para el cual es máximo η.

25. Dado que $Q = K\,\mu\,T_1\,(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$, hallar valores de θ entre 0^o y 360^o que hacen a Q máximo, tratando K, μ y T_1 como constantes.

26. Un cilindro de máquina de explosión tiene d por diámetro y l por longitud. Hallar el valor de $\frac{d}{l}$ que hace mínima la razón. $\frac{\text{Area de refrigeración}}{\text{Capacidad}}$. Trátese el volumen como constante.

27. Si la superficie de refrigeración de un cilindro de una máquina de explosión es $S = 2\pi r^2 + 2\pi rl + 0{,}2r^2$, ($l$ = longitud, r = radio), hallar el valor de $\frac{l}{r}$ que hace mínima la fracción $\frac{\text{superficie de refrigeración}}{\text{capacidad}}$. El volumen se considerará como constante.

28. Dado que $y = \frac{K^2 - 5{,}2K + 60{,}2}{K^2 + 9}$ hallar los valores de K que dan valores máximos o mínimos de y.

29. Si $M = \frac{wR^2}{2}\left(\frac{1}{4} - \operatorname{sen}^2\theta\right) - 0{,}934wR^2\left(\cos\theta - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ hallar los valores de θ que hacen máximo a M (M es el momento de flexión de un arco circular cargado con un peso uniforme w por metro y R el radio del arco).

30. Un canal abierto cuyos lados tienen la inclinación de 45^o ha de tener una sección de 1,2 metros cuadrados. Hallar las dimensiones de la sección más favorable (esto es, la sección que con el área dada tenga perímetro mínimo).

31. Si $M = \frac{w(2xl - 3x^2)^2}{8(l^2 - 2x^2)}$ hallar el valor de x que hace a M momento de flexión, máximo. La ecuación final se resolverá trazando la curva después de dar un valor determinado a l.

32. En el estudio de los muros de sostenimiento se presenta la ecuación siguiente:

$$P = \frac{\rho h^2}{72} \times \frac{1 - \mu \operatorname{tg} \theta}{1 - \mu^2 + 2\mu \cot \theta}$$

Hallar la expresión que da el valor θ (en función de tg θ) que hace a P máximo. (μ, ρ y h son constantes).

33. Dado que la potencia de una máquina se expresa por la ecuación

$$H = C(fnl^3 - K\rho n^3 l^5)$$

en donde C = constante; l = carrera; ρ = densidad media del material de la máquina; K = constante que depende de la distribución de las masas en la máquina; n = revoluciones por minuto y f = coeficiente de seguridad del material, hallar el valor de l que da el máximo de HP para máquinas de distintos tamaños.

34. Hallar el punto máximo de la curva de las probabilidades

$$y = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{h^2}}$$

así como sus puntos de inflexión.

35. En un compresor de dos fases, dejando a un lado los espacios muertos, si P_1 y V_1 son la presión inicial y el volumen del cilindro de baja presión, P_2 la presión del depósito intermedio y P_3 la presión de descarga del cilindro de alta presión el trabajo total de los dos cilindros es:

$$W = \frac{n}{n-1} P_1 V_1 \left\{ \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} + \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 2 \right\}.$$

Hallar el valor de P_2 que hace a W mínimo, tratando a P_1, V_1 y P_3 como constantes.

36. Hallar la altura h de una viga Warren que dé la rigidez máxima, sabiendo que la

$$\text{rigidez} = \frac{f_c + f_t}{2Eh} \left\{ l^2 + \frac{ld}{4} + \frac{lh^2}{d} \right\}$$

en donde d = longitud de un vano; l = flecha. f_c, f_t, E constantes del material.

37. El rendimiento de una turbina de reacción se expresa por

$$\eta = \frac{2(n-1)}{(1+K)n^2 - 1}$$

Hallar el valor de n para el cual es máximo η.

38. El peso de vapor que pasa por un orificio, de la presión P_1 a la P_2 es

$$W = A_2 \sqrt{2g\frac{P_1}{v_1} \times \frac{n}{n-1}\left\{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right\}}$$

Si $n = 1{,}135$, hallar el valor de $\frac{P_2}{P_1}$ que hace W máximo.

39. Hallar la altura del cilindro máximo inscriptible en un paraboloide de revolución cortado por un plano perpendicular al eje y distante 6 unidades del origen. El paraboloide está engendrado por una parábola que gira alrededor del eje x y cuya ecuación es $y^2 = 5x$.

40. Si $M = W\left\{x - \frac{x+y}{l}\right\}$ (y, l, constantes) hallar el valor de x que hace M máximo.

41. Sean T, t y T_f las tensiones del ramal tractor, del conducido y la fuerza centrífuga de una correa transmisora y v = velocidad en metros por segundo.

$$\text{HP transmitidos} = \frac{v(T-t)}{75}.$$

Dados $T_f = \frac{wv^3}{g}$; la tensión máxima permitida para la correa $= T_m = T + T_f$; el coeficiente μ de fricción entre correa y polea; el ángulo θ que abraza la correa en radianes y $\frac{T}{t} = e^{\mu\theta}$, hallar el valor se T_t en función de T_m para el máximo de HP transmitidos.

42. Si $y = 3x^4 + 2x^3 - 78x^2 - 240x + 54$, hallar los valores de x que dan máximos y mínimos para y, distinguiendo unos de otros. Hallar los valores de x en los puntos de inflexión.

43. El esfuerzo radial en un disco rotatorio es

$$= p_x$$
$$= \frac{w\omega^2}{8gm}(3m+1)\left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} - x^2\right)$$

en cuya expresión x es la única variable. Hallar el valor de x que hace a p_x máximo, y dar el valor de este máximo.

44. Una tubería de longitud l y diámetro D termina en una boca de diámetro d por la cual se descarga el agua de un depósito cuyo nivel se mantiene a una altura constante h por encima de la boca. Hallar el valor de d que hace máxima la energía cinética K del chorro. Esta cantidad se expresa por la fórmula

$$K = \rho\frac{\pi}{4}d^2\left(\frac{2gD^5h}{D^5 + 4fld^4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

(Se puede buscar el máximo de K buscando el de $K^{\frac{2}{3}}$)

45. Probar que el cuboide de volumen máximo inscriptible en una esfera de radio a es un cubo de lado $= 0{,}577\,a$.

46. La velocidad del émbolo de una máquina se expresa por

$$2\pi nr\left(\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2m} + \operatorname{sen}\theta\right)$$

θ = inclinación de la manivela con relación al eje.

Si $m = \dfrac{\text{longitud de la biela}}{\text{longitud de la manivela}} = 8$, hallar los valores de θ entre 0 y 360° que dan la velocidad máxima.

CÁLCULO DE ERRORES. — Es otra de las aplicaciones de la derivación. Así por ejemplo, al hacer un cierto experimento, se toman ciertas lecturas y se deducen de ellas ciertos resultados; si existe

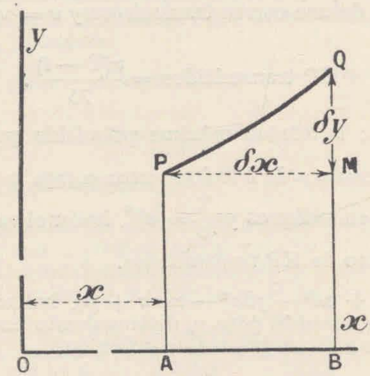


Fig. 26

posibilidad de algún pequeño error en las lecturas y se necesita hallar el error resultante en el cálculo, podrá utilizarse el método que a continuación se explica.

Supongamos dos cantidades A, B, relacionadas por la fórmula A = KB; si el valor hallado para B es ligeramente erróneo, el error de A dependerá del de B en la proporción con que cambie A respecto de B. Así, por ejemplo, si A cambia tres veces más de prisa que B y el error de B es 0,1 %, el error relativo de A será $3 \times 0{,}1$, o sea 0,3 %.

Vamos a tratar esta cuestión bajo otro punto de vista. Supongamos que en lugar de leer x (fig. 26) hemos leído $x + \delta x$. Entonces, la medida de x vendría representada por OB en lugar de OA (fig. 26). El error sería pues $\dfrac{\delta x}{x} \times 100\ \%$. Este error es causa de otro en y, que estimaremos como igual a $y + \delta y = \mathrm{BQ}$ en vez de $y = AP$. El error de y será $\frac{\delta y}{y} \times 100\ \%$. Para comparar estos dos errores, procederemos del modo siguiente: $\frac{\delta y}{\delta x}$ = pendiente de PQ; si δx es muy pequeño, (como debe ser, de lo contrario habría que repetir el experimento) puede identificarse esta pendiente en la del arco o tangente en P o en Q. De modo que aproximadamente podremos hacer

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

o, lo que es lo mismo

$$\delta y = \frac{dy}{dx} \times \delta x.$$

De donde, error de la función = error de la variable × la derivada.

Ejemplo 13. — Al medir el diámetro de una barra cuyo diámetro verdad es 4 cm. se hizo un error de 2 %. Hallar el error en el peso.

$$p = \frac{\pi}{4} d^2 l \rho \qquad \rho = \text{densidad}$$

$$= \mathrm{K}d^2 \qquad \text{siendo } \mathrm{K} = \frac{\pi l}{4} \rho$$

$$\delta d = \frac{2}{100} \times 4 = 0{,}08 \text{ cm}$$

$$\frac{dp}{d \cdot d} = \frac{d\mathrm{K}d^2}{d \cdot d} = 2\mathrm{K}d \quad \text{luego } \frac{dp}{p} \times 100 = \frac{2\mathrm{K}d \times 0{,}08}{\mathrm{K}d^2} \times 100$$

o sea

$$= \frac{0{,}16}{d} \times 100 = \frac{16}{4} = \underline{4\%}$$

Ejemplo 14. — Suponiendo error de 0,5 % en la medida de los diámetros de barras de 1 cm. a 5 cm. de diámetro, con las cuales se hacen experimentos de torsión, ¿qué error posible hay en las medidas de los esfuerzos?

Se sabe que $\mathrm{T} = \frac{\pi}{16} f d^3$. Esfuerzo $f = \frac{16\mathrm{T}}{\pi} \times \frac{1}{d^3}$

$$\frac{df}{d.d} = \frac{16\mathrm{T}}{\pi} \times \left(-\frac{3}{d^4}\right) = -\frac{48\mathrm{T}}{\pi d^4}.$$

El error δd en el diámetro es de 0,5 %

es decir $$\delta d = \frac{0{,}5}{100} \times d.$$

Por lo tanto el error en f,

$$\delta f = \frac{df}{d.d} \times \delta d = -\frac{48T}{\pi d^4} \times \frac{0{,}5d}{100}$$

De donde error por ciento

$$= 100 \times \frac{\delta f}{f} = 100 \times -\frac{48T}{\pi d^4} \times \frac{0{,}5}{100}\, d \times \frac{\pi d^3}{16T}$$
$$= -3.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Error mínimo} = 0{,}03 \times \text{esfuerzo mínimo}\\ \text{Error máximo} = 0{,}03 \times \text{esfuerzo máximo}\end{array}\right\}.$$

Si el error sobre el diámetro es por exceso, el error sobre el esfuerzo será por defecto.

DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIE. TEOREMAS DE TAYLOR Y MACLAURIN. — Muchas de las funciones elementales, como en l.n. $(1 + x)$, sen x, cos x, etc., pueden expresarse por medio de series. Este desarrollo se hace por aplicación del teorema de Maclaurin.

Sea $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ para todos los valores de x

Entonces $f(0) = a + (b \times 0) + (c \times 0^2) + \ldots = a.$

Damos por supuesto que la derivación término a término del desarrollo, da la derivada de la función, de modo que la relación

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + \ldots$$

es cierta para todo valor de x. Por tanto para $x = 0$

$$f'(0) = b$$

$f'(0)$ significa que primero se calcula $f'(x)$, y luego se sustituye en el resultado x por 0. Una nueva derivación dará $f''(0) = 2c$

luego, $$c = \frac{f''(0)}{2}$$

Del mismo modo

$$f'''(x) = 6d + \text{términos conteniendo } x, \text{ y potencias más elevadas de } x$$

de donde $$f'''(0) = 6d = 1.2.3.d$$

y $$d = \frac{f'''(0)}{1.2.3} \quad \text{o} \quad \frac{f'''(0)}{\underline{|3}}$$

Por lo tanto podremos escribir

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{\underline{|2}} + \frac{f'''(0)x^3}{\underline{|3}} + \ldots.$$

Este es el *teorema de Maclaurin.* El *teorema de Taylor,* que puede considerarse como más general se demuestra de análoga manera. He aquí su expresión:

$$f(x + h) = f(h) + xf'(h) + \frac{x^2}{\underline{|2}}f''(h) + \frac{x^3}{\underline{|3}}f'''(h) + \ldots\ldots$$

o, también, como se escribe algunas veces, para dar un desarrollo de $f(x)$:

$$f(x) = f(h) + (x - h)f'(h) + \frac{(x - h)^2}{\underline{|2}}f''(h) + \frac{(x - h)^3}{\underline{|3}}f'''(h) + \ldots.$$

Si hacemos $h = 0$ en cualquiera de estos dos desarrollos hallamos el desarrollo de Mauclaurin.

Apliquemos ahora estos teoremas para obtener series de gran importancia.

Ejemplo 15. Hallar el desarrollo de $\cos x$

Sea $$f(x) = \cos x.$$

Tendremos $$f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(x) = \frac{d \cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x$$

$$f'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-\operatorname{sen} x) = -\cos x$$

$$f''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(-\cos x) = \operatorname{sen} x.$$

$$f'''(0) = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

Ahora bien $\quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{\underline{|2}} + \dots$

Por lo tanto $\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \dots$

Ejemplo 16. — Hallar el desarrollo en serie de l.n. $(1 + x)$.

$$f(x) = \text{l.n. } (1 + x).$$

$$f(0) = \text{l.n. } 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{d\,\text{l.n. } (1 + x)}{dx} = \frac{1}{1 + x}$$

$$f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1 + x}\right) = -\frac{1}{(1 + x)^2}$$

$$f''(0) = \frac{-1}{1} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{(1 + x)^2}\right) = \frac{2}{(1 + x)^3}$$

$$f'''(0) = \frac{2}{1} = 2.$$

De modo que

$$\text{l.n. } (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Compárese con la serie hallada por un método distinto pág. 567, parte I.

Ejemplo 17. — Probar que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$. $(i = \sqrt{-1})$.

Ecuación de gran importancia por relacionar, las funciones exponen-‐ial y trigonométricas.

Hallemos primero la serie de sen x.

$f(x) = \operatorname{sen} x.$	luego	$f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$
$f'(x) = \cos x$	»	$f'(0) = \operatorname{sen} 0 = 1$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x.$	»	$f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = -0.$
$f'''(x) = -\cos x.$	»	$f'''(0) = -\cos 0 = -1.$

Por lo tanto $\quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \ldots$

e $\quad i \operatorname{sen} x = i\left(x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \ldots\right)$

Busquemos ahora la serie para e^{ix}

$$\begin{array}{llll} f(x) = e^{ix} & \text{luego} & f(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = ie^{ix} & \text{»} & f'(0) = ie^0 = i = \sqrt{-1} \\ f''(x) = i^2e^{ix} & \text{»} & f''(0) = i^2e^0 = i^2 = -1 \\ f'''(x) = i^3e^{ix} & \text{»} & f'''(0) = i^3e^0 = i^3 = -\sqrt{-1} \end{array}$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{\underline{|2}} + \frac{i^3x^3}{\underline{|3}} + \ldots = 1 + ix - \frac{x^2}{\underline{|2}} - \frac{ix^3}{\underline{|3}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} + \ldots$$

Además ya conocemos la serie de $\cos x$ (Ejemplo 15).

Tendremos pues:

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = \left(1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} \ldots\right)$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{\underline{|2}} - \frac{ix^3}{\underline{|3}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} + \frac{ix^5}{\underline{|5}} \ldots = e^{ix}$$

El teorema de Taylor puede aplicarse para hallar una solución más exacta a una ecuación de la que ya se conoce una solución aproximada. Se suman los dos primeros términos del desarrollo

$$f(x + h) = f(h) + xf'(h)$$

o cambiando x y h

$$f(h + x) = f(x) + hf'(x)$$

Si h es pequeña comparada con x los dos términos pueden representar aproximadamente el valor de la serie entera.

Supongamos encontrado con cierta aproximación un valor de la raíz, que llamaremos x.

Sea $x + h$ la verdadera solución. La ecuación anterior nos dará un valor de h muy aproximado y por lo tanto un valor de $x + h$.

Sea por ejemplo, el caso siguiente: Por aproximación se sabe que una de las raíces de la ecuación $x^4 - 1{,}5x^3 + 3{,}7x - 21{,}554 = 0$, difiere poco de 2,4. Para acercarnos más al valor exacto seguiremos el método siguiente:

Calculemos el primer miembro $f(x)$, para $x = 2{,}4$,

$$f(2{,}4) = 33{,}178 - 20{,}736 + 8{,}88 - 21{,}554 = -0{,}232.$$

El valor exacto $x + h$ debe dar $f(x + h) = 0$.

Por lo tanto

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x)$$

luego $$0 = -0{,}232 + hf'(2{,}4) \quad \text{y} \quad h = \frac{0{,}232}{f'(2{,}4)}$$

pero $$f'(x) = 4x^3 - 4{,}5x^2 + 3{,}7$$

De modo que

$$f'(2{,}4) = 55{,}30 - 25{,}92 + 3{,}7 = 33{,}08$$

y $$h = \frac{0{,}232}{f'(2{,}4)} = \frac{0{,}232}{33{,}08} = 0{,}007$$

la segunda aproximación será pues, $x + h = 2{,}4 + 0{,}007 = 2{,}407$.

Este método debe emplearse usualmente en vez del método gráfico cuando se desean resultados muy exactos. El ejemplo siguiente enseña el procedimiento de interpolación que es a veces necesario, cuando las tablas de valores dadas son insuficientes.

Ejemplo 18. — Se desean usar tablas que den las presiones del vapor de 10° en 10° de diferencia de temperatura, para obtener el valor exacto de $\frac{dp}{dt}$ cuando $t = 132°$ C. Las cifras de la línea correspondiente a $t = 130°$ (valor más próximo a 132°) son las siguientes

t	p	$\frac{dp}{dt}$	$\frac{d^2p}{dt^2}$	$\frac{d^3p}{dt^3}$	$\frac{d^4p}{dt^4}$
130	141,80019	4,241965	0,1029357	0,00184744	0,000019166

Calcular muy exactamente el valor de $\frac{dp}{dt}$ cuando $t = 132°$.

Apliquemos el teorema de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x) + \frac{h^3}{\lfloor 3}f'''(x) + \ldots$$

Hagamos $f(x) = \frac{dp}{dt}$ para $t = 130$

$$f(x+h) = \frac{dp}{dt} \text{ para } t = 132 \text{ de modo que } h = 2.$$

$$f'(x) = \frac{d}{dt}\frac{dp}{dt} = \frac{d^2p}{dt^2} \quad f''(x) = \frac{d^3p}{dt^3} \text{ etc. . . . para } t = 130.$$

El desarrollo en serie puede pues escribirse así

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{132} = \left(\frac{dp}{dt}\right)_{130} + 2\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)_{130} + \frac{2^2}{\underline{|2}}\left(\frac{d^3p}{dt^3}\right)_{130} + \frac{2^3}{\underline{|3}}\left(\frac{d^4p}{dt^4}\right)_{130} + \dots$$

Substituyamos los valores de la tabla

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{132} = 4{,}241965 + 2 \times 0{,}1029357 + 2 \times 0{,}00184744 + \frac{4}{3} \times 0{,}000019166$$
$$= \underline{4{,}4515569}$$

Ejercicios 11.—Sobre cálculo de pequeños errores y desarrollos en serie

1. Si $R = R_0(1 + at + bt^2)$ cuando R_0 (resistencia de un conductor a 0° C) es 1,6; a (el coeficiente térmico de resistencia del material) es 0,00388 y $b = 0{,}000000587$ hallar el error en R si se mide t como 101 en lugar de 100.

2. La cantidad de agua que se vierte por un orificio es

$$Q = \frac{8}{15} \times 0{,}64 \times \sqrt{2g}H^{\frac{5}{2}},$$

siendo H la profundidad del orificio. Hallar el error por ciento en Q producido por una medición de H tal como 0,198 en lugar de 0,2.

3. Si $y = 4x^{1,76}$, $y = 17{,}33$ para $x = 2{,}3$. Hallar el cambio que sufre y cuando x pasa a 2,302.

4. Se ha hallado $x = -2{,}44$ como primera aproximación de la raíz de la ecuación $10^{\frac{2x}{3}} = 16 + 4x - x^2$.
Hallar una solución más exacta.

5. Hallar el valor de x que satisface a la ecuación $x^{1,5} - 3 \operatorname{sen} x = 3$. sabiendo que 2,67 es una solución aproximada.

6. La altura de un regulador Porter está expresada por

$$h = \frac{W + w + f}{w} \times \frac{g}{n^2}$$

en donde n = número de revoluciones por minuto. Si $W = 50$, $w = 1$ y $f = 5$, hallar el cambio de altura debido al cambio de velocidad de 200 a 197 revoluciones por minuto.

7. Al calcular las coordenadas de una estación topográfica se estimó la posibilidad de un error de 3′(1½ por cada lado) en la lectura de orientación de una línea del ángulo.
Si se tomó como lectura 7° 12′ y la longitud de la línea era 274 metros. hallar los errores posibles en las coordenadas del otro extremo de la línea. (Coordenadas = longitud × coseno del ángulo y longitud × seno.)

8. Hallar por los métodos estudiados en este capítulo un desarrollo en serie de la función a^x.

9. Siguiendo las cifras del ejemplo 18, pág. 124 calcular muy exactamente la presión p a 133°C.

10. La ecuación $d^3 + 0,65d - 0,5 = 0$ se presenta al buscar la flecha de un cable. Se ha hallado gráficamente en primera aproximación $d = 0,53$. Hallar una solución más aproximada.

11. Una de las raíces de la ecuación $6a^2 - 11a - 34,8 = 0$ se aproxima a 3,5. Hallar un valor más aproximado.

12. Al buscar r, relación de expansión de cierta máquina monocilíndrica, se obtuvo la ecuación $1 + \text{l.n.}\, r - 0,389r = 0$. Gráficamente se encuentra un valor de $r = 7,88$, que aparentemente satisface la ecuación. Hallar la raíz de un modo más exacto.

Hallar soluciones más exactas de los casos núms. 13 y 14 partiendo de las raíces aproximadas que se dan.

13. $e^{3x} - 5x^2 - 17 = 0$; 1,03.

14. $d^6 - 4,19d - 0,35 = 0$; 1,34.

CAPÍTULO V

INTEGRACIÓN

Discutida ya la parte del Cálculo que trata de la derivación, podemos pasar al estudio de la integración que tiene muchas más aplicaciones y es, sin duda alguna, de más difícil compresión.

Al igual de lo que sucede con la derivación, la integración exige para su estudio una atención muy cuidadosa en los principios fundamentales. Así pues, trataremos aquí de la introducción al estudio del Cálculo integral con bastante detalle.

CONCEPTO DE INTEGRACIÓN. — El vocablo *integral* lleva consigo una idea de totalidad; significa un número totalizado como suma de sus partes o fracciones constituyentes. El proceso de *integración* implica una suma o totalización; mientras que el de derivación es un proceso de comparación de pequeñas diferencias. La diferenciación supone sustracción, mientras la integración supone adición; la diferenciación se refiere al mayor o menor grado de variación, y en cambio la integración se refiere al resultado del cambio total. Gráficamente, la derivación significa determinación de pendientes de curvas; mientras que la integración supone determinación de áreas. La *integración* es una operación *inversa* de la derivación y, como tal, tiene mayores dificultades. (Recordaremos este carácter de las operaciones inversas comparando, por ejemplo, la elevación al cuadrado y la extracción de raíz; la supresión de paréntesis y la determinación del factor común).

Una operación inversa es siempre más vaga en sus resultados que la operación directa, porque al hacer una operación directa sólo se obtiene un resultado, mientras que los resultados de una operación inversa pueden ser varios, como veremos por ejemplo, al tratar de las integrales indefinidas.

Para ilustrar la relación entre estas dos operaciones — integrar y derivar — podremos considerar el caso de una velocidad y una aceleración. Supongamos que se dan valores de v y t mediante la tabla

t	0,1	0,15	0,20	0,25	0,30
v	28,4	29,7	30,5	33,4	36,5

tendremos

δv	1,3	0,8	2,9	3,1
δt	0,05	0,05	0,05	0,05
$a = \frac{\delta v}{\delta t}$	26	16	58	62

Hallaremos las aceleraciones comparando diferencias de velocidad con diferencias de tiempo.

Consideremos ahora la cuestión bajo otro punto de vista y supongamos que se nos dan estas aceleraciones y que queremos hallar el cambio total de la velocidad en un tiempo dado. El cambio total será debido a la suma de los incrementos ocurridos en los pequeños períodos de tiempo cuya suma da el tiempo total dado. En el primer período, de 0,05 segundos, la aceleración media era 26, es decir, la velocidad aumentaba a razón de 26 unidades por segundo cada segundo. Por lo tanto el incremento en este período fué 26 $\times$ 0,05 unidades por segundo = 1,3 unidades por segundo.

En los períodos sucesivos, los respectivos incrementos fueron 0,8, 2,9 y 3,1.

Luego el cambio total en el período de 0,2 segundos considerado $= 1{,}3 + 0{,}8 + 2{,}9 + 3{,}1 = 8{,}1$ unidades por segundo, de modo que si la velocidad inicial era 28,4, la final será $28{,}4 + 8{,}1 = 36{,}5$. Se observará que la aceleración se expresa por $\frac{\delta v}{\delta t}$, mientras que los incrementos de velocidad son de la forma $a\delta t$, de modo que el cambio total, suma de los pequeños cambios parciales, es de la forma $\Sigma a\delta t$.

Para hallar integrales seguiremos pues en orden inverso el proceso de derivación. Si se da una función expresada mediante símbolos, para integrarla será mejor transformar las reglas de derivación, de modo que sean más fácilmente aplicables; este método es puramente analítico.

Si se dan sólo valores numéricos, la integración se reduce a una determinación de área. Por consiguiente.

Desde el *punto de vista analítico*:

La derivación implica cálculo de incrementos relativos.

La integración implica suma de pequeñas cantidades.

Desde el *punto de vista gráfico*:

La derivación mide pendientes de curvas.

La integración mide áreas limitadas por curvas.

Como sucede en la derivación, existen símbolos especiales para expresar las operaciones de integración.

Si consideramos una integral como un área, tendrá que poseer dos dimensiones, longitud y anchura, y ya vimos anteriormente, (Parte I. Cap. VII) que para medir un área se divide la base en pequeños elementos, no necesariamente de igual longitud, pero todos muy pequeños, cuanto más mejor.

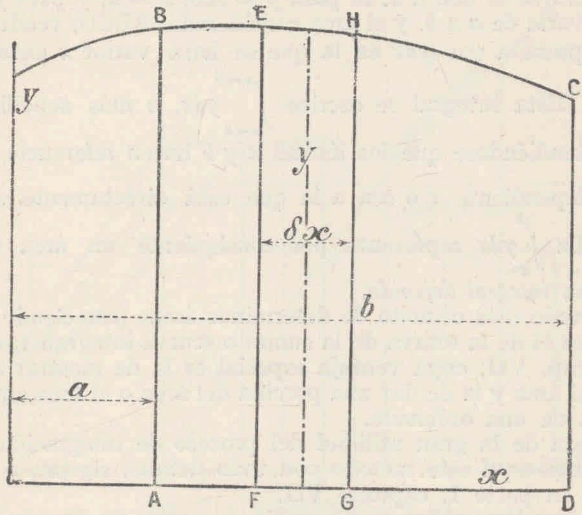


Fig. 27

Así para hallar el área ABCD (fig. 27) la podemos suponer dividida en zonas tales como EFGH; medir el área de cada una de estas zonas y sumar los resultados. Las porciones de curva EH correspondientes a cada una de estas zonas se pueden confundir con su cuerda EH, de modo que EFGH se resuelve en un trapecio cuya área = base × altura media. La altura media puede considerarse como igual a FE o a GH, cualquiera de las cuales puede representarse por y; FG puede representarse por δx. Resulta, pues, área EFGH $= y\delta x$ y por consiguiente

$$\left.\begin{array}{r}\text{Area total entre la curva, las}\\ \text{ordenadas límites y el eje } x\end{array}\right\} = \Sigma y\delta x \text{ (aproximadamente)}$$

Por muy pequeña que sea la anchura de las zonas, esta suma no da más que un valor aproximado del área, pero a medida que δx disminuye, este valor se aproxima más al exacto.

Por lo tanto, según sabemos por nuestros conocimientos previos sobre límites, podemos decir que, el valor límite de $\Sigma y\delta x$ debe dar el área exacta.

Este valor límite se designa con símbolos especiales, a saber $\int ydx$ que representa el área comprendida entre la curva y el eje x, cuando no se definen sus ordenadas límites laterales, $\int ydx$ se llama por esta razón *integral indefinida.*

La variable independiente es x y el valor del área dependerá de los valores que se den a x. Si para $y = \text{AB}$, $x = a$, y para $y = \text{CD}$, $x = b$, x varía de a a b, y el área considerada, ABCD, vendrá por lo tanto, expresada por $\int ydx$ en la que se hará variar x entre $x = a$ y $x = b$. Esta integral se escribe $\int_{x=a}^{x=b} ydx$, o más sencillamente, $\int_a^b ydx$ entendiéndose que los límites a y b hacen referencia a la variable independiente x o sea a la que está directamente asociada con «d». La $\int_a^b ydx$ representa por consiguiente un área definida y se llama *integral definida.*

El método más cómodo de determinar áreas (careciendo de planímetro) es el de la «curva de la suma» o «curva integral» tratado en parte I, cap. VII; cuya ventaja especial es la de mostrar el crecimiento del área y la de dar una porción del área o el área entera por la lectura de una ordenada.

En vista de la gran utilidad del proceso de integración gráfica explicaremos aquí este método con todo detalle, siguiendo el plan adoptado en parte I, capítulo VII.

La integración gráfica es un medio de sumar un área por medio de la regla y de la escuadra, por una combinación de los principios de la adicción de zonas trapezoidales y de las figuras semejantes.

Limitemos un área (fig. 28) por una curva $a'b'z'$ una línea de base y dos ordenadas verticales aa' zz'. Se divide la base de manera que las anchuras de las zonas trapezoidales sigan los cambios de curvatura entre a', z', y por consiguiente con anchuras no necesariamente iguales; y se elevan ordenadas (trazadas de puntos en la figura) por los puntos medios de los intervalos.

Se proyectan los extremos de cada una de estas ordenadas sobre una vertical como BB'. Se escoge un *polo* P a la izquierda de dicha vertical, a una distancia de ella llamada distancia polar $= p$, que sea un número entero de unidades horizontales. Se une el polo con cada una de las proyecciones y se trazan paralelas, dentro de cada una de las zonas, a las líneas polares respectivas, de modo que resulte una línea quebrada continua, llamada **curva de la suma** o **curva integral** (*).

(*) En este segundo tomo nos parece mejor traducir «sum curve» por «curva integral». — *N. del T.*

Así, la recta *am*, paralela a PB′, se limita en la primera zona; la paralela a PC′, en la segunda zona, etc. La ordenada de la curva integral en un punto cualquiera dará el área de la curva original comprendida entre *a* y la ordenada del punto considerado. Refiriéndonos a la figura 28,

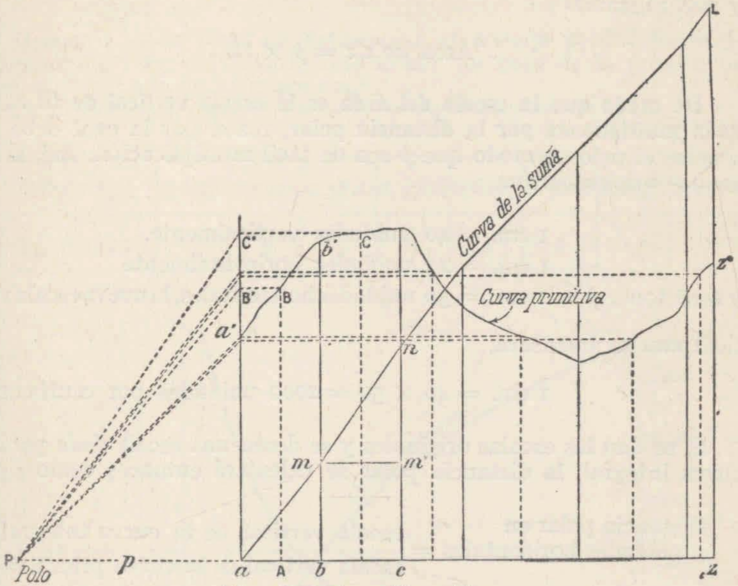


Fig. 28 — Integración gráfica

$$\text{Area de la zona } abb'a' = ab \times \text{AB}$$

pero (por semejanza de triángulos)

$$\frac{\text{B}'a \text{ ó BA}}{p} = \frac{bm}{ab}$$

luego $$\text{AB} \times ab = p \times bm$$

es decir, $bm = \dfrac{\text{área de la zona}}{p}$ o sea, área de la zona $= p \times bm$

de modo que *bm* mide el área de la primera zona a una escala especial que depende exclusivamente de *p*. De igual modo se probaría que

$$nm' = \frac{\text{área de la segunda zona}}{p}$$

De donde, sumando nm' y bm

$$cn = \frac{\text{área de la primera y segunda zona}}{p}$$

y generalizando

$$\text{Area } aa'z'z = p \times \overline{zL}$$

De modo que la escala del área es la escala vertical de la curva dada multiplicada por la distancia polar, razón por la cual debe escogerse el polo de modo que p sea de fácil multiplicación. Así, si las escalas originales son

1 cm. = 40 unidades verticalmente.
1 cm. = 25 unidades horizontalmente

y si se toma $p = 2$ cm. = 50 unidades horizontales, la nueva escala vertical para las áreas será,

1 cm. = 40 × 50 = 2000 unidades por centímetro.

Si se dan las escalas originales y se desea una escala *dada* para la curva integral, la distancia polar se calculará entonces como sigue

$$\text{Distancia polar en unidades horizontales} = \frac{\text{escala vertical de la curva integral}}{\text{escala vertical de la curva primitiva}}$$

De modo que si la curva primitiva es de velocidad-tiempo, a las escalas 1 cm. = 50 cm. por segundo (vertical) y 1 cm. = 0,1 segundo (horizontal) y la escala de la curva integral (que será una curva de espacio-tiempo) ha de ser 1 cm. = 25 cm., tendremos

p (en unidades horizontales) $= \frac{25}{50} = 0{,}5$ y como en escala horizontal 1 cm. = 0,1 segundo la distancia polar será 5 cm.

La integración no se limita a una determinación de área; cierto, que puede considerarse la integral como un área, pero si la ordenada no representa una nueva longitud, sino, por ejemplo, una sección recta, el valor de la integral mediría un volumen.

La forma de la integral será siempre $\int y dx$ pero y y x podrán representar cantidades de distinta naturaleza.

Supongamos, por ejemplo, que se traza una curva para representar la expansión de un gas, tomando por ordenada las presiones y por abscisas los volúmenes. El área de la curva será $\int_{v_1}^{v_2} p dv$,

(v_1 y v_2 = volúmenes inicial y final respectivamente). Esta expresión tiene por dimensiones presión × volumen $= \frac{\text{kg.}}{\text{m.}^2} \times \text{m.}^3 = \text{kg.} \times \text{m.}$ El área representará pues, el trabajo producido por la expansión.

He aquí un caso como ilustración:

Ejemplo 1. — Se trata de determinar el trabajo producido en la expansión de 1 kg. de vapor seco saturado que pasa de la presión de 7 kg. por cm.² a la de 1 kg. por cm.²

De las tablas de vapor (*) sacamos los siguientes datos:

v (m³ por kg.)	0,2786	0,3220	0,3820	0,4708	0,6163	0,9006	1,2571	1,7220
p (kg. por cm²)	7	6	5	4	3	2	1,4	1

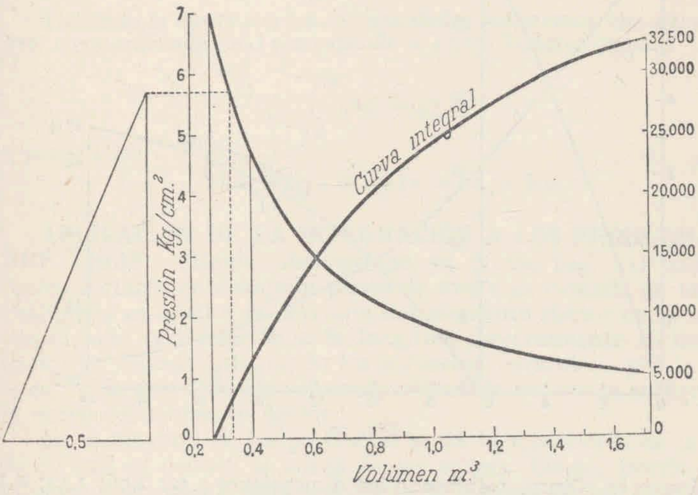


Fig. 29

Representando estos valores obtenemos la curva de la figura 29, siendo ésta la curva primitiva.

Se escoge entonces un polo a una distancia polar = 0,5 unidades horizontales, por ejemplo, y se construye la curva integral cuya ordenada extrema dará, a cierta escala, el trabajo desarrollado en la expansión.

(*) Para presentar el problema en unidades métricas utilizamos las tablas de Mollier (v. *Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch*, I pág. 416, 23.ª edición. Berlín, 1920). — *N. del T.*

Ahora bien, la nueva escala vertical será = escala anterior × 0,5, valor de la distancia polar, pero multiplicada además por 10.000 para pasar de cm.², a que se refieren las presiones, a m², toda vez que el trabajo se expresa en kg. × m.

De acuerdo con esta modificación en la escala, la ordenada extrema vale aproximadamente 32500, es decir, que el trabajo desarrollado en la expansión es aproximadamente = 32500 kg. m. o, expresado en lenguaje más matemático;

$$\int_{0,279}^{1,722} pdv = 32.500 \text{ aproximadamente}$$

Ejemplo 2. — Han sido medidos a seis alturas equidistantes los diámetros de una columna de piedra de 2 metros de altura cuya sección

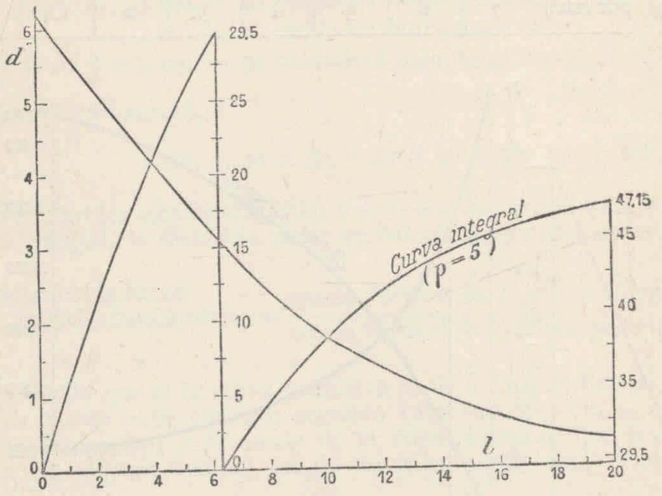


Fig. 30

disminuye en altura, resultando las dimensiones 2,52; 2,06; 1,54; 1,15; 0,80; 0,58 dm. respectivamente. Hallar su peso sabiendo que su densidad es 2,24

Obtendremos el volumen trazando las áreas como ordenadas con la longitud o altura por base. El área de una sección cualquiera será $\frac{\pi}{4} d^2$ y el volumen total en dm.³ será

$$\int_0^{20} A dl = \int_0^{20} \frac{\pi}{4} d^2 dl$$

$$\text{y el peso} = 2,24 \int_0^{20} \frac{\pi}{4} d^2 dl.$$

Como $\frac{\pi}{4}$ es un factor constante puede prescindirse de él hasta el final y su efecto es simplemente alterar la escala; **un factor constante antes de la integración permanece como tal después de la misma.**

Tendremos pues

$$\text{peso} = \frac{2,24 \times \pi}{4} \int_0^{20} d^2 dl = 1,75 \int_0^{20} d^2 dl.$$

La integral será de la forma tipo si en vez de d^2 escribimos y, y en vez de l escribimos x de tal modo que las ordenadas representen d^2 y las abscisas las longitudes, obteniendo los valores siguientes.

l	0	4	8	12	16	20
y ó d^2	6,34	4,24	2,36	1,32	0,64	0,336

Trazando la curva con los valores dados hallaremos una curva integral cuya ordenada final corresponde a 47,15. Tendremos pues

$$\int_0^{20} d^2 dl = 47,15$$

y por lo tanto

$$\text{Peso} = 1,75 \times 47,15 = 82,51 \text{ Kg.}$$

APLICACIÓN DE LA INTEGRACIÓN A LOS PROBLEMAS SOBRE VIGAS. — Hemos demostrado ya (véase pág. 41) que el esfuerzo cortante en cualquier punto de una viga cargada de un modo cualquiera es igual a la derivada del momento flector en la sección, considerada con relación a la longitud. Inversamente el momento flector se calcula integrando los esfuerzos cortantes, por lo tanto, si se da la curva de los esfuerzos cortantes, su curva integral será la curva del momento flector.

En la mayoría de los problemas se da la repartición de la carga, de la cual se deduce la curva de las cargas. Luego, puesto que el esfuerzo cortante en cada sección es la integral de las fuerzas a un lado o a otro de la sección, la curva integral de la carga será la curva del esfuerzo cortante; la curva integral de esta curva o segunda curva integral de la curva de las cargas será la curva del momento flector, y la cuarta curva integral, será la curva de la línea elástica. Si adoptamos la simbolización integral, tendremos: (Siendo C = carga. E_c = esfuerzo cortante. M = momento flector, y = flecha).

$$E_c = \int C dx$$

$$M = \int E_c dx = \int [\int C dx] dx = \iint C (dx)^2$$

$$y = \iint M (dx)^2 = \iiiint C (dx)^4$$

Si la carga no es uniforme pero es continua, la integración se puede hacer gráficamente. (El tan conocido método del polígono evita la mitad de estas curvas; el polígono de las cargas da en seguida la curva de los momentos de flexión).

Ejemplo 3. — La carga sobre una viga de 24 m. apoyada en sus extremos varía de un modo continuo según la tabla siguiente.

Trazar las curvas del esfuerzo cortante y del momento de flexión dando sus valores máximos.

Distancia en m. a partir de un extremo	0	4	7	10	12	14	17	20	24
Carga en tons por metro	0,44	0,58	0,86	1,06	1,1	1,06	0,86	0,58	0,44

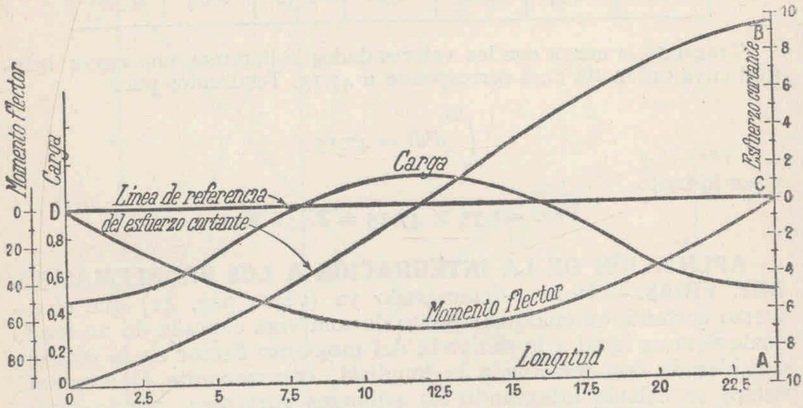


Fig. 31. — Problema sobre una viga cargada

Primeramente trazamos la curva de las cargas de la figura 31; la curva integral da la curva de los esfuerzos cortantes, aunque no podremos utilizarla hasta no haber calculado las reacciones de los apoyos.

Para hallarlas tendremos en cuenta que han de ser iguales, puesto que la carga es simétrica esto es cada una = $\frac{1}{2}$ de la carga total

Ahora bien la última ordenada AB de la curva integral, obtenida de la curva de cargas es igual a 19 y por lo tanto las reacciones serán = 9,5 toneladas.

Trazaremos pues una horizontal por la mitad de la altura, que nos dará la verdadera línea de referencia del esfuerzo cortante. Toda ordenada elevada desde esta base hasta la línea del esfuerzo cortante dará el valor del esfuerzo cortante en el punto de la viga marcado por la abscisa correspondiente.

Observamos que el esfuerzo cortante cambia de signo y se anula en el centro de la viga. Por lo tanto, el momento flector será máximo en el centro. Trazando la curva integral del esfuerzo cortante desde CD como base, resulta la curva del momento flector.

Detallamos a continuación las escalas por ser el punto que puede ofrecer alguna dificultad.

Las escalas de la figura 31 son las siguientes:

Para la longitud 1 cm. = 2,5 m.
Para la carga 1 cm. = 0,4 ton. por metro.

Distancia polar para la primera curva integral (es decir, la del esfuerzo cortante.)

= 4 cm. = 4 × 2,5 = 10 unidades horizontales

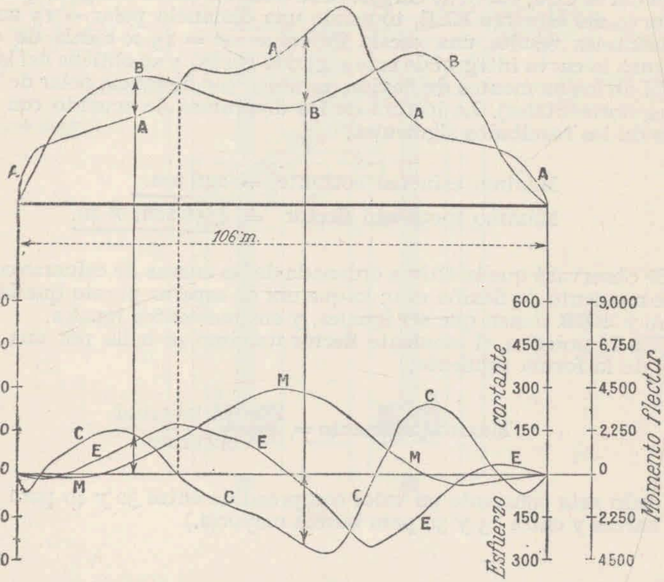


Fig. 32 — Esfuerzo cortante y momento flector para el casco de un barco

Luego, la escala de los esfuerzos cortantes = 0,4 × 10
o sea 1 cm. = 4 ton.

La distancia polar de la segunda curva integral es también

= 4 cm. = 10 unidades horizontales

Luego la escala de momentos flectores = 4 × 10 = 40
o sea 1 cm. = 40 ton. × m.

De acuerdo con estas escalas, las lecturas serán

Esfuerzo cortante máximo = 9,5 ton.
Momento flector máximo = 68 ton. × metro.

Ejemplo 4. — En la figura 32 AAA es la curva de los pesos o distribución de cargas, BBB la curva de flotamiento o contrapresión del agua, para un barco de longitud 106 m.; la escala de cargas está indicada en la figura. Trazar las curvas del esfuerzo cortante y del momento flector sobre el casco y medir los máximos de estas cantidades.

Precisa primero construir la curva de las cargas sobre una base recta, para la cual se toman como ordenadas desde una línea horizontal las diferencias entre las ordenadas respectivas de AAA y BBB. Se obtiene así la curva CCC, curva de cargas. Si se traza su curva integral, que nos da la curva del esfuerzo EEE, tomando una distancia polar = 15 unidades horizontales resulta una escala de esfuerzos = 15 × escala de cargas. Se traza la curva integral de esta segunda curva, y se obtiene así la curva MMM de los momentos de flexión (también con distancia polar de 15 unidades horizontales). La lectura de los diagramas de acuerdo con las escalas da los resultados siguientes:

Máximo esfuerzo cortante = 246 ton.
Máximo momento flector = 4350 ton. × m.

Se observará que la última ordenada de las curvas de esfuerzo cortante y de momento de flexión es 0; lo que era de esperar puesto que las áreas AAA y BBB tienen que ser iguales, y sus momentos iguales.

[En la práctica, el momento flector máximo, se halla por una expresión de la forma siguiente:

$$\text{Máximo momento} = \frac{\text{Peso} \times \text{longitud}}{\text{Constante}}$$

teniendo esta constante un valor comprendido entre 30 y 40 para pequeños barcos y entre 25 y 30 para barcos mayores.]

INTEGRAFO DE CORADI. — Instrumento ideado para trazar mecánicamente las curvas integrales. Consiste en un carro que rueda sobre cuatro ruedas A (fig. 33); un brazo ranura C, que lleva el trazador B que se mueve sobre la curva primitiva y un brazo D que lleva el lápiz E que traza la curva integral. Cuando el operador mueve B sobre la primitiva, el brazo C se desliza sobre los pivotes G y P variando su inclinación respecto de la horizontal. Por medio de un paralelogramo, queda obligado E a moverse siempre paralelamente al movimiento instantáneo de C. La rueda F sirve para guiar a B, sobre la primitiva. El principio del instrumento es bien sencillo. El polo está en P. Los extremos de las ordenadas se proyectan sobre la vertical según G por medio de horizontales BG.

En cada instante, el lápiz E traza la paralela a PG con movimiento continuo. La distancia polar puede cambiarse a voluntad, cambiando la posición del pivote P en el brazo horizontal que lo soporte. Y si hace falta una distancia polar muy pequeña se puede emplear el pivote H en vez del G.

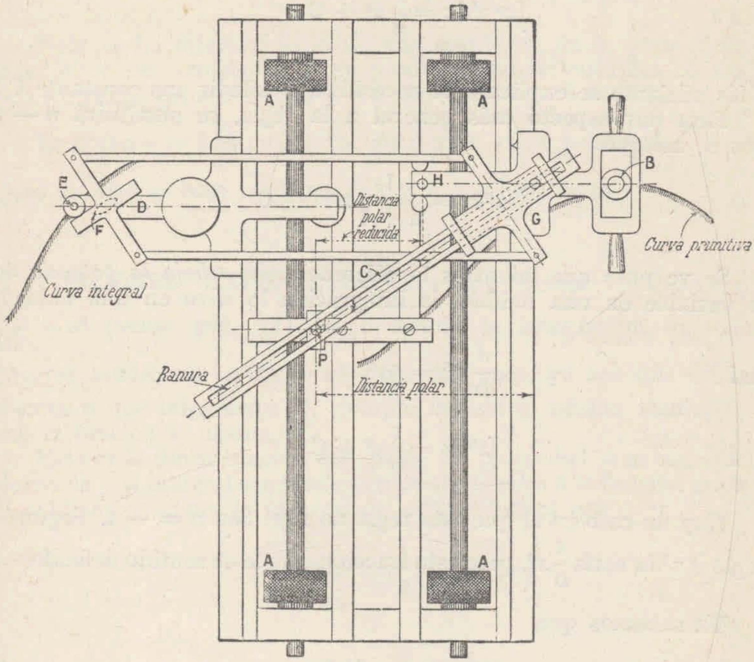


Fig. 33

REGLAS PARA LA INTEGRACIÓN DE FUNCIONES SENCILLAS. — Puesto que la integración es la operación inversa de la derivación pueden integrarse muchas funciones sin más que expresar en otros términos los resultados obtenidos mediante las reglas de derivación.

INTEGRACIÓN DE POTENCIAS DE X. — La primera regla dada en la derivación fué

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

Para presentarla en forma de *integral* no tenemos más que pasar la dx del primer miembro como factor del segundo y sustituir la «d» del primer miembro por una $\int$ en el segundo, de donde

$$x^n = \int nx^{n-1}dx$$

o sea
$$\int x^{n-1}dx = \frac{1}{n}x^n + C$$

(Más adelante se explicará la necesidad de añadir una constante C.)

Para dar aspecto más general a la regla, se sustituirá $n - 1$ por n, así que

$$\int \mathbf{x^n dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+1}}\mathbf{x^{n+1}} + \mathbf{C.}$$

Se ve pues que mientras la diferenciación *rebaja la potencia* de la variable en una unidad, la integración lo *eleva* en una unidad.

Así
$$\frac{d}{dx}x^5 = 5x^4$$

$$\int x^5dx = \frac{1}{6}x^6 + C.$$

Hay un caso en el que esta regla no rige. Sea $n = -1$. Según la regla $\int x^{-1}dx$ sería $\frac{1}{0}x^0$, pero esta fracción carece de sentido definido.

Ya sabemos que

$$\frac{d}{dx}\text{l. n. } x = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

luego
$$\int \mathbf{x^{-1}dx} = \mathbf{l. n.\ x} + \mathbf{C.}$$

Todo factor constante antes de la integración permanece constante después de la misma. Así

$$\int ax^ndx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C.$$

Asimismo, una expresión compuesta de la suma de varias funciones puede integrarse sumando las integrales de cada uno de sus sumandos.

Así:
$$\int (ax^n + b)\,dx$$
$$= \int ax^n dx + \int bdx$$
$$= \frac{a}{n+1}x^{n+1} + bx + C.$$

Nota. — La diferenciación de una constante da 0, pero la integración de una constante da su producto por la variable. La razón de este hecho resulta evidente si se interpreta gráficamente.

La curva $y = b$ es una recta horizontal, cuya pendiente, $\frac{db}{dx} = 0$, pero su área = base $\times$ altura = $x \times b$. $\left(\int bdx = bx\right)$.

FUNCIONES EXPONENCIALES. — Ya hemos probado que $\frac{de^x}{dx} = e^x$ (véase pág. 51) luego siendo la integración operación inversa tendremos $\int e^x dx = e^x + C$. Así pues, ya sea que diferenciemos o que integremos e^x, siempre nos da el mismo resultado, o sea la función e^x misma.

Esta es la única función que posee tal propiedad, a saber, que la derivada y la integral son iguales entre sí e iguales a la función misma. Consideremos ahora la integral de ae^{bx}. Sabemos que

$$\frac{dae^{bx}}{dx} = abe^{bx}$$

luego
$$\int ae^{bx}dx = \frac{a}{b}e^{bx} + C.$$

Para evitar toda confusión sobre el papel que desempeñan a y b en estas dos ecuaciones, se razonará del modo siguiente: a es un multiplicador constante de toda la función y por consiguiente permanece constante después de la integración; b sólo multiplica a la variable y por lo tanto mediante la diferenciación pasa a ser un multiplicador del resultado, luego en la integración debe aparecer como divisor. Debe observarse gran cuidado en la aplicación de esta regla.

Ejemplo 5. — Hallar el valor de $\frac{d}{dt}(15t^4 - 7t^{0,9} + 83)$ y el de $\int\left(60t^3 - \frac{6,3}{t^{0,1}}\right)dt$.

Derivemos la primera expresión

$$\frac{d}{dt}(15t^4 - 7t^{0,9} + 83)$$
$$= 60t^3 - 6,3t^{-0,1} + 0.$$

Integremos la segunda expresión

$$\int\left(60t^3 - \frac{6,3}{t^{0,1}}\right) dt = \int 60t^3 dt - \int 6,3t^{-0,1}\, dt$$
$$= \frac{60 \times t^4}{4} - \frac{6,3}{-0,1+1}\, t^{-0,1+1} + C$$
$$= 15t^4 - 7t^{0,9} + C.$$

Obsérvese que la integración de la derivada no reproduce exactamente la función por la aparición del término C que puede ser cualquier valor independiente de la variable.

Volveremos sobre este punto más adelante.

Ejemplo 6. — Si $pv^{1,32} = C$, hallar el valor de $\int p dv$.

Para expresar p en función de v, tendremos:

$$p = \frac{C}{v^{1,32}} = Cv^{-1,32}$$

$$\int p dv = \int Cv^{-1,32}\, dv = C \times \frac{1}{-1,32+1}\, v^{-1,32+1} + K. \qquad (K = \text{constante})$$
$$= \frac{C}{-0,32}\, v^{-0,32} + K.$$

Expresemos el valor de C en función de p y v

$$\int p dv = -\frac{pv^{1,32} \times v^{-0,32}}{0,32} + K$$
$$= -\frac{pv}{0,32} + K = \underline{-3,125pv + K.}$$

Ejemplo 7. — Hallar $\int p dv$ cuando $pv = C$.

En este caso $\qquad p = Cv^{-1}$

$$\int p dv = \int \frac{C}{v}\, dv = C\,\text{l.n.}\, v + K$$

o sea

$$\int p dv = \underline{pv\,\text{l.n.}\, v + K.}$$

Ejemplo 8. — Hallar el valor de $\int 17e^{2x}dx$

$$\int 17e^{2x}dx = 17 \times \frac{1}{2} e^{2x} + C = \underline{8,5e^{2x} + C.}$$

Obsérvese que 17 es un factor constante; 2 multiplica la variable independiente, y por esto aparece como un divisor después de la integración; de este modo la potencia de e sigue siendo la misma.

Ejemplo 9. — Hallar el valor de $\int (40e^{5v} + v^{5,4})dv.$

$$\int (40e^{5v} + v^{5,4})dv = \int 40e^{5v}dv + \int v^{5,4}dv \quad \text{(separando los términos)}$$

$$= \frac{40}{5} e^{5v} + \frac{1}{6,4} v^{6,4} + C$$

$$= \underline{8e^{5v} + 0,156v^{6,4} + C.}$$

Ejemplo 10. — Hallar la expresión de $\int a^x dx$ y aplicarla a $\int 12 \times (5)^{4x}dx$.

Sabemos que $\qquad \frac{d}{dm} a^x = a^x \text{ l. n. a.}$

luego $\qquad \int a^x dx = \underline{\frac{1}{\text{l. n. } a} a^x + C.}$

y, por consiguiente

$$\int 12 \times (5)^{4x}dx = \left(12 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{\text{l.n. } 5} \times 5^{4x}\right) + C$$

$$= \frac{3}{1,609} \times 5^{4x} + C. \qquad \text{l.n. } 5 = 1,609.$$

$$= \underline{1,864 \times 5^{4x} + C.}$$

Se podría llegar a un resultado análogo por un método distinto

$$\int 12 \times 5^{4x}dx = 12 \int (5^4)^x dx$$

$$= 12 \times \frac{1}{\text{l.n. } 625} \times (5^4)^x \times C.$$

$$= \frac{12}{6,44} \times 5^{4x} \times C \qquad (\text{l.n. } 625 = 4,64).$$

$$= \underline{1,864 \times 5^{4x} + C.}$$

Ejercicios 12. — Sobre integración gráfica

1. La aceleración de un móvil está dada por la tabla adjunta en ciertos momentos dados. Hallar por integración gráfica las curvas de velocidades y de espacio-tiempo tomando el tiempo por base, e indicar claramente las escalas adoptadas.

Tiempo....	0	0,008	0,016	0,02	0,028	0,036	0,044	0,048	0,06	0,068	0,072	0,084	0,10	0,158	0,12
Aceleración.	0	75	87,5	87,5	87,5	87,5	87,5	83	0	78	85	87,5	87,5	83	0

2. Una curva de aceleraciones con base de tiempos tiene un área de 4,7 cm.^{2} La base de la curva es 2,50 cm. y representa 25 segundos. La escala de la aceleración es de 1 cm. = 36 cm. por seg.^{2} Si la velocidad inicial es de 132 cm. por seg. hallar la velocidad a los 25 seg.

3. Una gabarra está cargada simétricamente y flota sobre agua tranquila. La curva de carga es un triángulo con su vértice en el centro, y la curva de flotamiento es un rectángulo. Trazar las curvas de los esfuerzos cortantes y momentos de flexión.

4. — La curva de cargas de un barco de 106 m. se da en la tabla adjunta. Trazarla y, por intergación gráfica, deducir las curvas de esfuerzos cortantes y momentos de flexión.

Distancia a un extremo en m.	0	2	3	11	17	26	31	34	41	49	60	64	72	80	85	96	100	106
Carga en ton. por m.	0	1	0	—8,5	—10,2	—7,5	0	5,2	7,5	10,3	17	18,7	0	—14,8	—16,2	0	3	0

5. La tabla de los valores de presión y volumen del diagrama teórico completo de una máquina de triple expansión es

v	0	0,03	0,06	0,12	0,18	0,24	0,3	0,36
p	24	24	12	6	4	3	2,4	2

Hallar la presión inicial en cada cilindro de modo que el trabajo producido por ciclo sea el mismo para todos.

Se dividirá la última ordenada de la curva integral en 3 partes iguales. (Se trazarán horizontales por estos puntos, hasta llegar a la curva integral y desde los puntos de intersección se elevarán verticales hasta la curva de expansión).

6. Un cuerpo que pesa 3000 kgs. ha sido elevado por medio de un cable dotado de un dinamómetro indicador que da la fuerza F kgs. sobre el cable. La tabla de valores de F por altura x es la siguiente:

x	0	20	40	65	75	95	110	140
FKg.	8000	7950	7850	7500	7400	6800	6400	4000

Hallar el trabajo cuando el cuerpo se halla a 80 metros. ¿Qué parte es energía potencial y qué parte es energía cinética? Hallar también el trabajo a los 140 m.

7. La corriente de una batería ha sido medida en tiempos determinados dando los resultados siguientes:

Tiempo (horas)....	0	1	2	3	5	6	7,8	9	10	12	14	15
Corriente (amperios)	25	28	32,8	37	39,6	39,5	36	32	29	24	25,3	27

Si su capacidad se mide por $\int C dt$ hallar la capacidad en amperios-horas.

8. La tabla siguiente da las velocidades aproximadas de una locomotora sobre una línea no muy llana. Trazar una curva que dé la distancia recorrida hasta un momento cualquiera.

Tiempo (min-seg.)....	0	1	2,15	6,15	9,22	11,45	14,26	16,35	20,52
Velocidades (Km. p. h.)	0	6	10	18,2	22,8	25,5	28	29,2	28,6

9. La curva de carga de una estación central puede construirse con los datos siguientes:

Tiempo (horas)...	0	1	2	3	4	5	6	7	7,5	8	9	10	11
Carga (1000 amp.)	3,5	1	1	2	1	6,4	14	17	17,8	16,4	11,3	8,7	8,2

12	1	2	3	4	5	5,5	6	7	8	9	10	11	12
7,8	8	7,6	8,7	12,5	19	23,3	21	12,4	11	10,5	9,6	9	6

Hallar el número total de amp. suministrados en 24 horas.

10. La velocidad de un tranvía eléctrico, con control reostático, resulta de la tabla siguiente.

Tiempo (seg.).........	0	26,6	66,6	80,1	99
Velocidad en m. por seg.	0	12,2	12,2	11,4	0

Trazar la curva del espacio recorrido y dar la distancia recorrida a los 99 segundos.

Sobre la integración de las potencias de x y de las funciones exponenciales

11. ¿Qué significación tienen los símbolos $\int$ y dx en la expresión $\int x^2 dx$?

Integrar con relación a x las funciones dadas en los ejemplos 12 á 27.

12. $4x^{1,62}$. **13.** $70,15$. **14.** $\frac{3}{x^3}$ **15.** $\frac{x^2}{x^{n+1}}$ **16.** $e^{0,7x}$.

17. $x^9 - \frac{10}{x} + 14$. **18.** $\frac{3,47}{x^{-0,04}} - 5x$. **19.** $4x^e + \frac{1}{4}e^x$.

20. $12e^{9x-5}$. **21.** $\frac{15,7}{e^{1,2-2,4x}}$. **22.** $0,17e^{1,4}$ **23.** $\frac{b(x^5)^{0,4}}{cx^{1,59}}$.

24. $2,54x^{-0,16} - 8,2x^{-1} + \frac{7,04}{e^{2,6x}} + 1,13$. **25.** $\frac{82e^{2x} \times e^{-5x}}{(7e^{2,4x})^3}$.

26. $(e^3)^{0,17x} - x^{-0,23} + \frac{5,03x^{2,04}}{e^{0,9}}$. **27.** $0,94x^{0,18}\cos\theta - \frac{1,76x^0}{e^{14-0,8x}}$.

Hallar los valores de las siguientes integrales

28. $\int v^5 dv$. **29.** $\int \frac{du}{u^4}$. **30.** $\int 35 dt$. **31.** $\int e^{5s-4} ds$.

32. $\int p dv$ cuando $pv^{1,17} = C$. **33.** $\int 14 \times 2^s ds$.

34. $\int (4x^{-2} + 5x + 17x^3 - 8)dx$. 35. $\int 3{,}1^t dt$. 36. $17\int \frac{dp}{e^{3p}}$.

37. $\int (e^{4t} + e^{-5t} - e)dt$. 38. $\iint 32{,}2(dt)^2$. 39. $2{,}1 \iint x^{-5}(dx)^2$.

40. Integrar la ecuación $\frac{dp}{dv} = -n\frac{p}{v}$.

41. En la salida del aire por una tobera, si x es la distancia de la tobera hacia fuera y v la velocidad, se verifica la relación $v \propto \frac{1}{x}$.

Asimismo δA (elemento de área de la corriente) $= K\delta x \sqrt{x}$. La cantidad de movimiento adicional para el pequeño elemento considerado es $\delta M = v\delta A$. Probar que M, incremento total de la cantidad de movimiento puede representarse por $C - \frac{D}{\sqrt{x}}$, siendo C y D constantes.

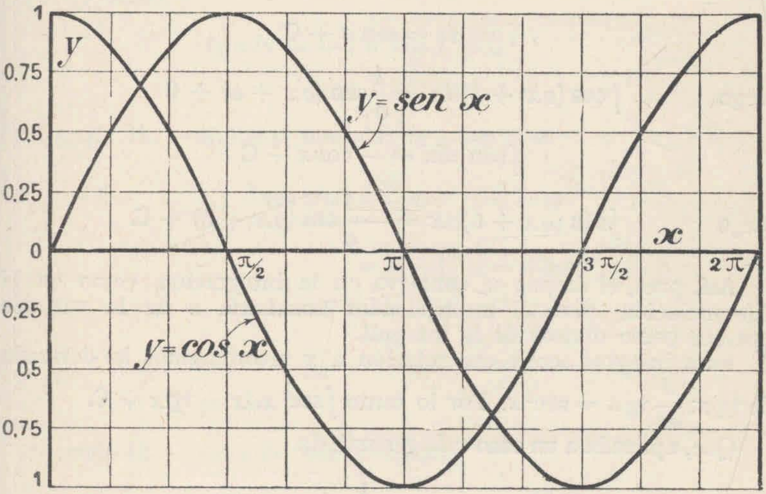


Fig. 34

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. — Ya sabemos que la curva derivada de la del seno o del coseno es la misma curva primitiva trasladado hacia *atrás* un cuarto de período. Inversamente la curva integral de la del seno o del coseno es la misma curva trasladada hacia *adelante* un cuarto de período. En otras palabras, la integración no altera la forma de la curva. Si tomamos como primitiva la curva seno veremos (fig. 34) que si la trasladamos hacia adelante un cuarto de período, la curva obtenida es la del coseno invertida, o, en lenguaje analítico mientras que la ecuación de la curva primitiva es $y = \operatorname{sen} x$, la ecuación de la curva integral será $y = -\cos x$. Por lo tanto $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$. De igual modo se probaría que $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x$. Repitamos aquí las ecuaciones de derivación e integración de estas funciones:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \qquad \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C.$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C.$$

Nota. — Al diferenciar el coseno, aparece el signo menos en el resultado; al integrar el seno, aparece el signo menos en el resultado; es preciso fijar bien estos hechos en la memoria, a lo que ayudará el estudio gráfico de la cuestión.

Extendamos las reglas antedichas:

$$\int \cos dx = \operatorname{sen} x + C$$

luego $$\int \cos (ax + b) dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} (ax + b) + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

luego $$\int \operatorname{sen} (ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos (ax + b) + C.$$

Así, pues, el ángulo se conserva en la integración, como en la diferenciación, pero el multiplicador constante a de la variable aparece como divisor de la integral.

Para integrar $\sec^2 x$ con relación a x recordaremos la derivada de tg x: $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x$. Por lo tanto $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$.

Que, aplicada a un caso más general, da

$$\int \sec^2 (ax + b) dx = \frac{1}{a} \operatorname{tg} (ax + b) + C.$$

y de igual modo

$$\int \operatorname{cosec}^2 (ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cot (ax + b) + C.$$

Añadiremos aquí otras dos integrales importantes

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\operatorname{l.n.} \cos x + C$$

$$\int \cot x \, dx = \operatorname{l.n.} \operatorname{sen} x + C.$$

Para verificarlas podemos invertir la operación, derivando ambos miembros. Así, en cuanto a la primera ecuación

$$\frac{d}{dx}(-\text{l.n.}\cos x) = -\frac{d}{dx}\text{l.n.}\ u \qquad \text{siendo } u = \cos x$$

de donde

$$= -\frac{d\,\text{l.n.}\ u}{dx} \times \frac{du}{dx} \qquad \frac{du}{dx} = -\operatorname{sen} x$$

$$= -\frac{1}{u} \times -\operatorname{sen} x$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

y por lo tanto,

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\text{l.n.}\cos x + \text{C}.$$

Ejemplo 11. — Hallar el valor de $\int (5 - \operatorname{sen} 4t)dt$.

$$\int (5 - \operatorname{sen} 4t)dt = \int 5dt - \int \operatorname{sen} 4t\, dt$$

$$= 5t - \left(\frac{1}{4} \times -\cos 4t\right) + \text{C}$$

$$= \underline{5t + \frac{1}{4}\cos 4t + \text{C}.}$$

Ejemplo 12. — Calcular $\int \operatorname{sen}(5 - 4t)dt$.

$$\int \operatorname{sen}(5 - 4t)dt = -\frac{1}{4} \times [-\cos(5 - 4t)] + \text{C} = \underline{\frac{1}{4}\cos(5 - 4t) + \text{C}.}$$

Ejemplo 13. — Si se da una fuerza $\text{P} = 36{,}4 \operatorname{sen}(100s - 0{,}62)$, hallar el valor de $\int \text{P}ds$.

$$\int \text{P}ds = \int 36{,}4 \operatorname{sen}(100s - 0{,}62)ds = \frac{36{,}4}{100} \times [-\cos(100s - 0{,}62)] + \text{C}$$

$$= \underline{-0{,}364\cos(100s - 0{,}62) + \text{C}.}$$

Ejemplo 14. — Hallar el valor de $\int E ds$ en la que

$$E = 7{,}2s^4 - 3s^{-1} + 15s^{0,8} + 12 \cos(4 - 3s)$$

$$\int E ds = \left(7{,}2 \times \frac{1}{5} s^5\right) - 3 \text{ l.n. } s + \frac{15}{1{,}8} s^{1,8} + \left(12 \times -\frac{1}{3} \text{sen}(4 - 3s)\right) + C$$

$$= \underline{1{,}44s^5 - 3 \text{ l.n. } s + 8{,}33s^{1,8} - 4 \text{ sen}(4 - 3s) + C.}$$

Ejemplo 15. — Si $R = 11 \sec^2(3 - 4{,}7v)$ hallar $\int R dv$.

$$\int R dv = \int 11 \sec^2(3 - 4{,}7v) dv = \frac{11}{-4{,}7} \text{tg}(3 - 4{,}7v) + C$$

$$= \underline{-2{,}343 \text{ tg}(3 - 4{,}7v) + C.}$$

Ejercicios 13. — Integración de funciones Trigonométricas

Integrar con relación a x las funciones 1 al 10.

1. $3 \text{ sen } 4x$. **2.** $-5{,}18 \cos(3 - 3x)$. **3.** $7 \sec^2\left(3 - \frac{1}{7}x\right)$.

4. $x^{-0,012} - 0{,}14 \cos(0{,}05 - 0{,}117x)$. **5.** $e^{5,4x} + 5 \text{ sen}(b + ax)$.

6 $9{,}45 \text{ sen } 8t$. **7.** $-3{,}08 \text{ sen } 2(2{,}16x - 4{,}5)$.

8. $9e^{0,7x} + \frac{3{,}47}{x^5} - 1{,}83 \text{ tg } x$.

9. $4{,}27 \text{ sen}\left(\frac{3x - 2{,}8}{7}\right) + 0{,}2 \cos 9x - 4x^{1,74} + 3^{2x+5}$.

10. $2 \text{ sen}^2 x - 2{,}91 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{4} - 3{,}7x\right) + 2 \cos^2 x - 14{,}2 \text{ cosec}^2 \frac{3\pi x}{5}$.

11. La aceleración de un móvil resulta de la ecuación

$$a = -49 \text{ sen}(7t - 0{,}26)$$

Hallar expresiones para la velocidad y el espacio, este último calculado en función de la aceleración.

12. Si $\frac{d^2x}{d\theta^2} = 4\pi^2n^2r\left(\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{m}\right)$ hallar los valores de $\frac{dx}{d\theta}$ y de x. (x = desplazamiento del émbolo en máquina de vapor).

13. Hallar el valor de $\int [5^{2p} + \cos(3{,}7 - 7{,}2p)] dp$.

14. Si $v = 117 \text{ sen } 6t - 29{,}4 \cos 6t$, hallar el valor de $\int v dt$

INTEGRALES DEFINIDAS E INDEFINIDAS. — Las integrales dadas hasta aquí, aunque correctas no dan un valor determinado. Si han de expresar un área, la integral tiene que encerrarse dentro de ciertos límites; y en las integrales indicadas no hemos hecho mención de límites para la variable independiente, de modo que hemos estado tratando tan sólo de áreas e integrales indefinidas.

Para indicar que puede prescindirse de cierta parte del área, se introduce una constante C en la forma general de la expresión. Así $\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C$. En cuanto se define la integral, y por lo tanto el área, desaparece la constante C. Por otra parte, si $\int x^3dx = \frac{1}{4}x^4 + C$, inversamente, debe darse $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4 + C\right) = x^3$.

Así es en efecto:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4 + C\right) = \frac{d}{dx}\frac{1}{4}x^4 + \frac{d}{dx}C = x^3 + 0 = x^3$$

(puesto que C es independiente de x). Así sucede en el ejemplo 5, página 142, en cuyo caso C = 83).

Es pues necesario añadir la constante en todos los ejemplos de integración; en muchos casos prácticos la determinación del valor de la constante es una parte importante del problema y por lo tanto su omisión puede acarrearnos graves errores. He aquí una lista de integrales importantes en la que C representa la constante

$$\int (ax^n + b)dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + bx + C$$

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int bdx = bx + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \text{l.n.}\ x + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\text{l.n.}\ (ax + b) + C$$

$$\int ae^{bx}dx = \frac{a}{b}e^{bx} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\text{l.n.}\, a} \times a^x + C$$

$$\int \operatorname{sen}(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax+b) + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b) + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \operatorname{tg}(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\,\text{l.n.}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\text{l.n.}(\cos x) + C$$

$$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\,\text{l.n.}\operatorname{sen}(ax+b) + C$$

$$\int \cot x dx = \text{l.n.}(\operatorname{sen} x) + C$$

DETERMINACIÓN DE LOS VALORES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS. — En la página 130 hemos visto que el valor límite de $\Sigma y\delta x$ es $\int y dx$, y que el área de ABCD, figura 27, viene dada por el valor de $\int_a^b y dx$. Vamos a ver ahora cómo puede hallarse el valor de una integral definida.

El área de la zona EFGH puede expresarse como un elemento del área debajo de la curva, que llamaremos $\delta\bar{A}$, de manera que $\delta\bar{A} = y\delta x$ y $\frac{\delta\bar{A}}{\delta x} = y$ aproximadamente, o bien $\frac{d\bar{A}}{dx} = y$ exactamente. Por lo tanto $\bar{A}$ es una función que, derivada respecto de x, da y, o, en otros términos, $\bar{A} = \int y dx$. Supongamos ahora que y es una función de x tal que $\frac{d\Phi(x)}{dx} = y$; entonces tendremos $\Phi(x) + c = \int y dx$, y $\bar{A} = \Phi(x) + C$.

En el caso del área que se considera, su medición empieza cuando $x = a$; esto es, que su valor es cero cuando $x = a$.

Por lo tanto $0 = \Phi(a) + c$, $C = -\Phi(a)$ y $\bar{A} = \Phi(x) - \Phi(a)$. Designando, pues, el área ABCD por A, observaremos que $\bar{A}$ debe tener el valor A cuando $x = b$, y por lo tanto $A = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Así, por ejemplo, si $y = x^2$, $a = 2$ y $b = 4$, $\Phi(x) = \frac{x^3}{3}$

y $$\int_2^4 x^2 dx = \left(\frac{4^3}{3}\right) - \left(\frac{2^3}{3}\right) = 18\tfrac{2}{3}$$

lo cual significa que si se traza la curva $y = x^2$ y se halla el área limitada por ella y el eje de las x entre las ordenadas $x = 2$ y $x = 4$, su valor será $18\frac{2}{3}$ unidades.

Conviene observar que C desaparece, y por esto, cuando se trata de integradas definidas, es usual omitir la constante.

Por brevedad se escribe $\int_2^4 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_2^4$, símbolo que desarrollado significa

$$\left(\frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) \text{ es decir } \frac{56}{3}.$$

Ejemplo 16. — Hallar el valor de $\int_{0,1}^{0,4} 4e^{3x} dx$.

$$\int_{0,1}^{0,4} 4e^{3x} dx = \left(\frac{4}{3} e^{3x}\right)_{0,1}^{0,4} = \frac{4}{3}\left(e^{3x}\right)_{0,1}^{0,4}$$

$$= \frac{4}{3}\left(e^{3\times 0,4} - e^{3\times 0,1}\right)$$

$$= \frac{4}{3} e^{1,2} - e^{0,3})$$

$$= \frac{4}{3}(3,3201 - 1,3499)$$

$$= \underline{2,625.}$$

Ejemplo 17. — Evaluar la integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 \cos 4x + 7) dx$$

Tenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 \cos 4x + 7)dx = \left(\frac{5}{4} \operatorname{sen} 4x + 7x\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{5}{4} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{2} + \frac{7\pi}{2} - \frac{5}{4} \operatorname{sen} 4 \times 0 - 7 \times 0\right)$$

$$= \left(0 + \frac{7\pi}{2} - 0 - 0\right)$$

$$= \frac{7\pi}{2} = 11.$$

Ejemplo 18. — Hallar el valor de

$$A = \frac{\int_2^4 5x^5\, dx}{\int_2^4 5x^3 dx}.$$

$$A = \frac{5\int_2^4 x^5 dx}{5\int_2^4 x^3 dx} = \frac{\left(\frac{x^6}{6}\right)_2^4}{\left(\frac{x^4}{4}\right)_2^4}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}(4^6 - 2^6)}{\frac{1}{4}(4^4 - 2^4)} = \underline{11,2.}$$

Obsérvese que, aparte del factor 5, no se pueden efectuar reducciones con los demás coeficientes sin antes haber substituído los valores 4 y 2 en lugar de x, para efectuar la operación indicada simbólicamente.

Así pues, sería erróneo decir

$$\frac{\left(\frac{x^6}{6}\right)_2^4}{\left(\frac{x^4}{4}\right)_2^4} = \left(\frac{2}{3} x^2\right)_2^4 = \frac{2}{3}(12) = 8.$$

Ejemplo 19. — El radio de acción de un areoplano puede obtenerse de la expresión $-\int_1^q \frac{m}{q}\, dq$ en la que m = Kilos. Kilometros por kilo de esencia y $q = \frac{\text{carga en cualquier momento}}{\text{carga inicial}}$.

Tomando $q = 0{,}6$ y $m = 4000$ hallar el radio de acción total

$$-\int_1^q \frac{m}{q}\,dq = -m\int_1^q \frac{dq}{q} = -m\left(\mathrm{l.n.}\,q\right)_1^q$$

$$= -m\,(\mathrm{l.n.}\,q - \mathrm{l.n.}\,1)$$

$$= -m\,\mathrm{l.n.}\,q$$

ahora como $q = 0{,}6$, $\mathrm{l.n.}\,q = \bar{1}{,}4892 = -0{,}5108$.

Por lo tanto el radio de acción será $= 4000 \times 0{,}5108 = \underline{2043\ \mathrm{km.}}$

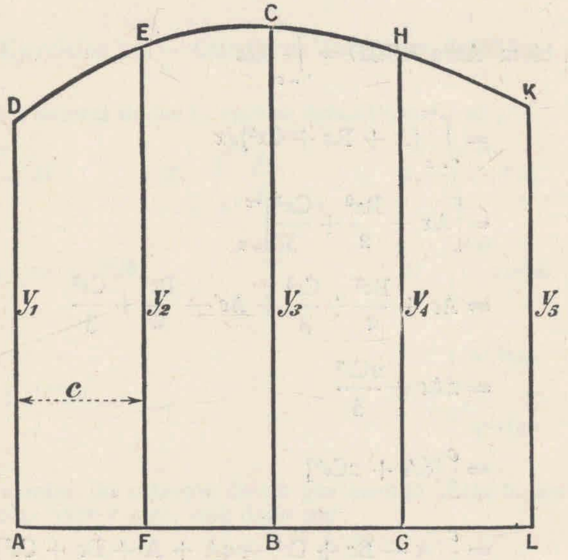


Fig. 35. — Demostración de la regla de Simpson

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE SIMPSON PARA LA DETERMINACIÓN DE ÁREAS DE FIGURAS CURVAS IRREGULARES. — Esta regla, dada en la página 380 de la parte I, dice que:

$$\text{Area} = \frac{\text{longitud de una división de la base}}{3}\left\{\begin{array}{l}\Sigma \text{ ordenadas extremas} + \\ 4\Sigma \text{ ordenadas pares} + \\ 2\Sigma \text{ ordenadas impares.}\end{array}\right\}$$

Sea una porción del área a medir, por ejemplo ABCD, figura 35. Sea la base AB $= 2c$. Sea la ecuación de la porción DEC

$$y = A + Bx + Cx^2$$

de modo que DEC es una porción de parábola. Podemos suponer que el origen está en F, y por lo tanto las abscisas de D, E, C, serán respectivamente $-c$, o, $+c$. Luego:

$$\begin{aligned} AD &= y_1 = A + B(-c) + C(-c)^2 = A - Bc + Cc^2 \\ FE &= y_2 = A + B \times 0 + C \times 0^2 \quad = A \\ BC &= y_3 = A + Bc + Cc^2 \qquad\quad = A + Bc + Cc^2. \end{aligned}$$

Ahora bien: Area ABCD $= \int_{-c}^{+c} y dx$

$$= \int_{-c}^{+c} (A + Bx + Cx^2)dx$$

$$= \left[Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{3}\right]_{-c}^{+c}$$

$$= Ac + \frac{Bc^2}{2} + \frac{Cc^3}{3} + Ac - \frac{Bc^2}{2} + \frac{Cc^3}{3}$$

$$= 2Ac + \frac{2Cc^3}{3}$$

$$= \frac{c}{3}[6A + 2Cc^2]$$

$$= \frac{c}{3}[A - Bc + Cc^2 + 4A + A + Bc + Cc^2]$$

$$= \frac{c}{3}[y_1 + 4y_2 + y_3]$$

Añadamos otra zona de $2c$ de anchura a la derecha de Bc, tomando doble anchura de faja, para que sea par el número de divisiones de la base.

Si GH $= y_4$ y LK $= y_5$

Area BLKC $= \frac{c}{3}[y_3 + 4y_4 + y_5]$

o sea, Area ALKD $= \frac{c}{3}[y_1 + 4y_2 + y_3 + y_3 + 4y_4 + y_5]$

$$= \frac{c}{3}[y_1 + y_5 + 4(y_2 + y_4) + 2(y_3)].$$

Si supusiésemos añadida otra zona de $2c$ de ancho

Area $= \frac{c}{3}[y_1 + y_7 + 4(y_2 + y_4 + y_6) + 2(y_3 + y_5)].$

Generalizando, resulta la regla dada.

Ejercicios 14. — Cálculo de Integrales definidas

Hallar los valores de las integrales definidas n.º 1 al 7.

1. $\int_{1,02}^{1,16} x^3 dx.$ **2.** $\int_{1,7}^{2,4} \frac{dv}{v}.$ **3.** $\int_{0,2}^{0,55} e^{4s} ds.$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 5,1 \operatorname{sen} 0,2\theta d\theta.$ **5.** $\int_{0,3}^{0,46} 2t^{1,7} dt.$

6. $\int_{2,3}^{2,7} 5,2^{4,1x} dx.$ **7.** $\dfrac{\int_1^3 x^{1,74} dx}{\int_1^3 x^{0,44} dx}.$

8. El cambio de entropía de un gas cuando varía la temperatura absoluta entre 357° y 430°, está dado por

$$\int_{357}^{430} 0,85 \frac{d\tau}{\tau}.$$

Hallar este cambio.

9. Si $H = \frac{2I}{p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \theta d\theta$, hallar el valor de H.

10. La densidad media útil del flujo en un motor trifásico es

$$B = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{11}{12}\pi} B_{max} \operatorname{sen} \theta d\theta.$$ Hallar B en función de B_{max}.

11. Expresar sen at cos bt en forma de suma de dos términos e integrar la expresión hallada con relación a t.

Si $a = \frac{2\pi}{T}$ y $b = 3a$, hallar el valor de la integral entre o y T.

12. Si $h = \frac{v_1 r_1^2}{g}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^3}$, hallar h.

13. Sabiendo que $EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2} - Px$, y que $\frac{dy}{dx} = 0$ cuando $x = l$, siendo además $y = 0$ cuando $x = 0$ y también cuando $x = l$; hallar el valor de P y una expresión de y.

14. Si $M = \frac{wx^2}{2}$; $\frac{M}{I} = E\frac{d^2y}{dx^2}$; $\frac{dy}{dx} = 0$ e $y = 0$ cuando $x = l$, hallar una expresión para y.

15. Sabiendo que $M = \frac{w}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) - K$; $\frac{M}{IE} = \frac{d^2y}{dx^2}$; sabiendo también que si $x = \frac{l}{2}$, $\frac{dy}{dx} = 0$ y que si $x = \pm\frac{l}{2}$, $y = 0$; hallar una expresión de y. (Caso de una viga empotrada cargada uniformemente).

16. Hallar el valor de $\int_0^l (lx - x^2)^2 dx$.

17. Calcular $3\int_{0,2l}^{l} x(l^2 - 2lx + x^2)dx$, integral que se presenta en el cálculo de vigas.

18. Si $Q = \int_0^h q dx$ y $q = \frac{1 - \text{sen}\,\phi}{1 + \text{sen}\,\phi}\,wx$, hallar Q (presión horizontal total de un muro de sostenimiento de altura h; w = densidad de la tierra, ϕ ángulo de talud natural del terreno).

19. Hallar el área entre la porción positiva de la curva

$$y = 3x - 4x^2 + 11$$

y el eje de x, y compararla con el área del rectángulo circunscrito.

20. Calcular $\int_{4,6}^{15,8} p dv$ cuando $pv^{1,37} = 0,935$ (*)

(*) En este problema p representa la presión de un gas en kg por cm²; v es el volumen específico en m³ por kg; la ecuación $pv^{1,37} = 0,935$ representa la expansión y la integral es el trabajo desarrollado durante la misma. — *N. del T.*

21. Si $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^{1,4} - \frac{5}{x^2}$; $\frac{dy}{dx} = 10,5$ cuando $x = 1$, e $y = 14$ cuando $x = 2$, hallar y en función de x.

22. Calcular $\int_{1,47}^{2,31} \frac{4}{13 - 5x} dx$.

23. Hallar el valor de n, dado por la relación $n = \int_0^l \frac{Ne^{ax}dx}{l}$.

24. La fuerza centrífuga total sobre un anillo $= \int_{R_2}^{R_1} \frac{2\pi w V_1^2 r^2 dr}{R_1^2}$. Hallar la expresión de la fuerza.

25. El área de una curva de momentos flectores dada, es

$$-\int_0^l \left(\frac{1}{2} al - \frac{a^3}{2l}\right) da;$$

hallar este valor.

26. H, esfuerzo horizontal sobre un arco parabólico

$$= \frac{5wl^2}{8r} \int_0^{\frac{1}{2}} (x^2 - 2x^3 + x^4) dx$$

Hallar la expresión de H.

27. El trabajo (*) desarrollado por un motor en ciclo de Rankine, con vapor saturado, es $= \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{L}{\tau} d\tau$. Hallar el trabajo entre las temperaturas límites absolutas de 345° C. y 445° C. Siendo $L = 800 - 0,7\tau$.

28. Evaluar $\int_1^{2.4} [e^{0.5s} - \operatorname{sen}(2s - 7)] ds$.

29. Hallar el valor de n frecuencia de las vibraciones transversales de una viga apoyada por los dos extremos y cargadas de manera uniforme con w toneladas por metro cuando la ecuación de la línea elástica es

$$y = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2lx^3 - l^3x)$$

y

$$n^2 = \frac{g\int_0^l y dx}{4\pi^2 \int_0^l y^2 dx}.$$

(*) La integral escrita da en realidad calor. Entiéndase, pues, el equivalente de trabajo en calorías. — *N. del T.*

30. Según experimentos de Dieterici, existen las relaciones siguientes:

Siendo s = volumen específico del amoníaco líquido
y e = calor específico del mismo
para temperaturas sobre 32° F (0° C) se tiene

$$c = 1{,}118 + 0{,}001156\,(t - 32)$$

y

$$s = \int_0^t c\,dt.$$

Hallar s cuando $t = 45°$ F.

Para emplear unidades métricas, en lugar de inglesas, se tendría

$$c = 1{,}118 + 0{,}0021\,t; \quad (t \text{ en grados C})$$

y

$$s = \frac{1}{27{,}6}\int_0^{1{,}8t+32} c\,dt.$$

31. Si $Q = \dfrac{\pi dt\rho}{8l\mu}\displaystyle\int_0^s (s^2 - x^2)\,dx$. Q = fuga de un flúido a través de una válvula bien ajustada, hallar este valor.

32. Calcular la integral siguiente, que indica el total de amperio-conductores por polo en los tres arrollamientos de un motor de ferrocarril.

$$\frac{3}{2}C\sqrt{2}\int_0^l \frac{2h}{\pi}A_1 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\,dx.$$

33. El gasto Q de un líquido viscoso de coeficiente de viscosidad μ, en un tubo cilíndrico de radio r es igual a

$$Q = \int_0^a \frac{\pi f(a^2 - r^2)\,r\,dr}{2\mu}.$$

Hallar Q.

34. Siendo $u = \dfrac{4\pi l}{10}\left[\displaystyle\int_x^{x_1}\frac{dx}{\pi x} + \frac{y}{2x}\right]$ hallar su valor.

35. Hallar el área entre la curva $y = 2x^3 - 11x^2 - 21x + 90$, el eje de las x y las ordenadas que corresponden a $x = -3$ y $x = 7$.

36. Evaluar $Q = \dfrac{8B}{H}\displaystyle\int_0^H (H - h)\,h^{\frac{1}{2}}dh$, siendo $B = 1{,}5$ y $H = 0{,}6$.

37. Hallar el valor de $\displaystyle\int_{-2}^{3{,}5} (5a - 11)^2 da$.

38. Determinar el tiempo t necesario para descargar por encima de una presa de longitud b, bajando el nivel del agua desde 0,36 m. a 0,15 m., valiéndose de la fórmula

$$t = \int_{0,15}^{0,36} \frac{\mathrm{A}\,dh}{\mathrm{K}bh^{\frac{3}{2}}}$$

y siendo $\mathrm{A} = 1{,}8$, $\mathrm{K} = 1{,}65$ y $b = 1{,}65$.

39. Evaluar $\displaystyle\int_{\frac{1}{\text{[illegible]}}}^{\frac{1}{300}} 40 \operatorname{sen}\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) dt.$

CAPÍTULO VI

NUEVOS PROCEDIMIENTOS DE INTEGRACIÓN

Por medio de las reglas enumeradas en el capítulo anterior se puede integrar gráficamente cualquier función y analíticamente las funciones sencillas. La integración gráfica es aplicable siempre, pero implica con frecuencia engorrosas preparaciones aritméticas, por lo cual es preferible a veces recurrir al método analítico. Se trata pues de elegir en cada caso el método más conveniente, teniendo en cuenta que la ventaja del método gráfico sólo rige en el caso de *integrales definidas.*

Se hace pues necesario exponer procedimientos y artificios de cálculo para la integración de funciones algo complicadas; y aun no siendo indispensable retener en la memoria estas fórmulas será conveniente, por lo menos, conocerlas a fin de que puedan ser halladas con más facilidad cuando sea menester. Es imposible tratar todas las integrales que pueden presentarse en la práctica; lo más que puede hacerse es desarrollar formas-tipos que comprendan grandes grupos de funciones, dejando que ellas inspiren la solución de casos particulares.

INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES. — Muchas fracciones racionales pueden descomponerse en fracciones simples a las cuales se pueden aplicar reglas más elementales de integración. Si por ejemplo se nos pide que integremos con relación a x la fracción $\frac{8x - 30}{2x^2 - 15x + 28}$, pronto nos damos cuenta de que no podemos efectuar la operación con los conocimientos adquiridos en el capítulo anterior. Pero descomponiendo la fracción del modo explicado en la parte I, capítulo XII, nos encontramos con que el problema se resuelve mediante la integración de dos fracciones simples. Así:

$$\frac{8x-30}{2x^2-15x+28}=\frac{2}{x-4}+\frac{4}{2x-7}$$ (véase parte I, pág. 546).

Luego $$\int\frac{8x-30}{2x^2-15x+28}dx=\int\frac{2}{x-4}dx+\int\frac{4}{2x-7}dx$$

$$=2\,\text{l.n.}\,(x-4)+\frac{4}{2}\text{l.n.}\,(2x-7)+\text{l.n.}\,C$$

$$=\text{l.n.}\,(x-4)^2+\text{l.n.}\,(2x-7)^2+\text{l.n.}\,C$$

$$=\text{l.n.}\,[C\,(x-4)^2\,(2x-7)^2].$$

[Obsérvese que la constante se ha escrito bajo la forma l.n. C en lugar de C para poder llegar a este resultado agrupando C bajo el mismo paréntesis.]

Ejemplo 1. — Hallar el valor de $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$

Pongamos $$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x+a)}$$

$$=\frac{A(x+a)+B(x-a)}{x^2-a^2}.$$

De donde $$1=A(x+a)+B(x-a).$$

Para $x=a$ $$1=A(2a)+0$$

de donde $$A=\frac{1}{2a}.$$

Para $x=-a$ $$1=0+B(-2a)$$

de donde $$B=-\frac{1}{2a}.$$

Luego $$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

Y por consiguiente

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}[\text{l.n.}\,(x-a)-\text{l.n.}\,(x+a)+\text{l.n.}\,C]$$

$$=\underline{\frac{1}{2a}\,\text{l.n.}\,\frac{C(x-a)}{(x+a)}}.$$

Esta es una forma tipo.

Puede deducirse de ésta una forma más general del modo siguiente:

Ejemplo 2. — $\int \frac{dx}{(x+a)^2 - b^2}$.

Sea $(x + a) = X$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2 - b^2} = \int \frac{dX}{X^2 - b^2}$$

$$= \frac{1}{2b} \text{l.n.} \frac{C(X - b)}{(X + b)}$$

$$= \frac{1}{2b} \text{l.n.} \frac{C(x + a - b)}{(x + a + b)}$$

Aclaración

$x + a = X.$

Luego $dX = dx$

INTEGRACIÓN POR CONVERSIÓN DE UN PRODUCTO EN UNA SUMA. — Los productos no pueden ser objeto de integración directa; pero cuando las funciones son trigonométricas siempre se puede descomponer el producto en una suma o diferencia cuyos términos son directamente integrables. Es conveniente repasar, parte I, pág. 337 y 352, antes de continuar este párrafo.

Ejemplo 3. — Hallar el valor de $A = \int [4 \operatorname{sen} 5t \times 3 \cos 2t] dt$

$$4 \operatorname{sen} 5t \times 3 \cos 2t = 12 \operatorname{sen} 5t \cos 2t$$

$$= 6 \times 2 \operatorname{sen} 5t \cos 2t$$

$$= 6 [\operatorname{sen} 7t + \operatorname{sen} 3t]$$

Luego

$$A = 6 [\int \operatorname{sen} 7t dt + \int \operatorname{sen} 3t dt]$$

$$= 6 \left[-\frac{1}{7} \cos 7t - \frac{1}{3} \cos 3t + C \right]$$

$$= 6C - \frac{6}{7} \cos 7t - 2 \cos 3t.$$

Ejemplo 4. — Hallar $\int \operatorname{sen}^2 x dx$.

$$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

de modo que: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ (véase pág. P. 346.)

Luego $\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2} [\int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx]$

$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + C \right]$$

$$= 0{,}5x - 0{,}25 \operatorname{sen} 2x + 0{,}5C.$$

Ejemplo 5. — Hallar $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Sabemos que $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \sec^2 x dx - \int dx$$

$$= \underline{\operatorname{tg} x - x + C.}$$

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE. — Hay casos en los cuales el cambio de variable permite la integración pero la aplicación de este método requiere gran familiaridad con los tipos integrables directamente.

Así, por ejemplo, $\int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c}$ es un tipo que permite la aplicación de este método. En efecto, el numerador es exactamente la diferencial del denominador. Por lo tanto, si llamamos u el denominador, tendremos una integral de la forma $\int \frac{du}{u}$ que sabemos integrar dándonos $\text{l.n.}\ u + \text{l.n.}\ C$.

$$= \text{l.n.}\ Cu = \underline{\text{l.n.}\ C(ax^2 + bx + c).}$$

En muchos casos puede verificarse la integración sustituyendo funciones algebraicas que aparecen bajo el signo integral por funciones trigonométricas, como se verá en los ejemplos 6 al 10.

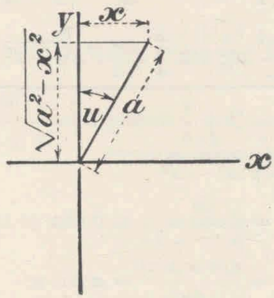


Fig. 36

Ejemplo 6. — Hallar $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Sea $x = a \operatorname{sen} u$ (como se ve en la figura 36).

Tendremos $a^2 - x^2 = a^2(1 - \operatorname{sen}^2 u) = a^2 \cos^2 u$

y $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u$ (como se ve por la figura 36)

De donde $$\frac{dx}{du} = \frac{d(a \text{ sen } u)}{du} = a \cos u$$

$$dx = a \cos u \, du.$$

Luego $$\int\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a \cos u \times a \cos u \times du$$

$$= a^2 \int \cos^2 u \, du$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2u) du \quad \text{(puesto que } \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(u + \frac{1}{2} \text{ sen } 2u + C\right).$$

Este resultado, aunque no expresado en función de x, es ya útil para muchas aplicaciones. Si se desea en función de x, tendremos:

$$\text{sen } u = \frac{x}{a} \qquad u = \text{arc sen } \frac{x}{a}$$

$$\cos u = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}.$$

Luego: $$\frac{1}{2} \text{ sen } 2u = \text{sen } u \cos u = \frac{x}{a} \times \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left(\frac{a^2}{2} \times \text{arc sen } \frac{x}{a}\right) + \left(\frac{a^2}{2} \times \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + K$$

$$= \frac{a^2}{2} \text{ arc sen } \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + K.$$

Ejemplo 7. Hallar $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Sea $$x = a \text{ sen } u \qquad \text{o sea} \qquad u = \text{arc sen } \frac{x}{a}$$

Tendremos, pues, $$\frac{dx}{du} = \frac{d(a \text{ sen } u)}{du} = a \cos u$$

y $$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u.$$

Luego: $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos u \, du}{a \cos u} = \int du$$

$$= u + C$$

$$= \text{arc sen } \frac{x}{a} + C.$$

Ejemplo 8. — Hallar $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Para este caso, haremos $x = a \operatorname{senh} u$, es decir, $u = \arg \operatorname{senh} \frac{x}{a}$

De donde $\frac{dx}{du} = \frac{d}{du}(a \operatorname{senh} u) = a \cosh u$.

Y como $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$ (v. pág. 359 Parte I),

o sea $\cosh^2 u = 1 + \operatorname{senh}^2 u$

tendremos
$$\cosh^2 u = 1 + \frac{x^2}{a^2}$$
$$= \frac{a^2 + x^2}{a^2}$$

o sea
$$a^2 + x^2 = a^2 \cosh^2 u$$
$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \cosh u.$$

Por lo tanto
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{a \cosh u\, du}{a \cosh u} = \int du = u + C$$
$$= \arg \operatorname{senh} \frac{x}{a} + C.$$

Teniendo en cuenta (pág. 366 Parte I), vemos que
$$\arg \cosh \frac{x}{a} = \text{l.n.}\, \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$
$$\arg \operatorname{senh} \frac{x}{a} = \text{l.n.}\, \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}.$$

Luego
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \underline{\arg \operatorname{senh} \frac{x}{a} + C = \text{l.n.}\, \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + C.}$$

Ejemplo 9. — Hallar el valor de $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ y deducir de él el valor de $\int \frac{du}{\sqrt{(x^2 + a)^2 - b^2}}$.

Para resolver la primera haremos
$$x = a \cosh u \quad \text{o sea} \quad u = \arg \cosh \frac{x}{a}$$
$$\frac{dx}{du} = a \operatorname{senh} u$$
$$dx = a \operatorname{senh} u\, du$$
$$x^2 - a^2 = a^2 \cosh^2 u - a^2 = a^2 (\cosh^2 u - 1) = a^2 \operatorname{senh}^2 u$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{dx}{a \operatorname{senh} u} = \int \frac{a \operatorname{senh} u \, du}{a \operatorname{senh} u}$$

$$= \int du$$

$$= u + C$$

$$= \arg\cosh \frac{x}{a} + C$$

$$= \text{l.n.} \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C.$$

Para deducir la segunda integral, haremos.

$x + a = X$, de modo que $dx = dX$ y

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x + a)^2 - b^2}} = \int \frac{dX}{\sqrt{X^2 - b^2}}$$

$$= \text{l.n.} \frac{X + \sqrt{X^2 - b^2}}{b} + C$$

$$= \text{l.n.} \frac{x + a + \sqrt{(x + a)^2 - b^2}}{b} + C.$$

Ejemplo 10. — Hallar el valor de $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

El cambio de variable conveniente en este caso es

$$x = a \operatorname{tg} u \qquad \text{o sea} \qquad u = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$$

Tendremos,

$$\frac{dx}{du} = \frac{d}{dx} (a \operatorname{tg} u) = a \sec^2 u$$

y como $x^2 + a^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 u + a^2 = a^2 (\operatorname{tg}^2 u + 1) = a^2 \sec^2 u$

resulta que

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{a \sec^2 u \, du}{a^2 \sec^2 u} = \frac{1}{a} \int du$$

$$= \frac{1}{a} u + C$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$$

Como generalización de este resultado podemos determinar la $\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2}$.

Pongamos $\qquad x + a = X$

de donde $\qquad \frac{dX}{dx} = \frac{d(x+a)}{dx} = 1$

es decir, $\qquad dX = dx$

Por consiguiente

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \int \frac{dX}{X^2+b^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{X}{b} + C$$

$$\text{es decir,} \qquad = \frac{1}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+a}{b} + C.$$

En los ejemplos que siguen se ponen de manifiesto cambios de variable mediante substituciones algebraicas.

Ejemplo 11. — Hallar el valor de $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$.

El método consiste en dar a la integral una forma tal que se pueda aplicar uno de los procedimientos ya conocidos. Así pues, observaremos que:

$$2ax - x^2 = a^2 - x^2 - a^2 + 2ax = a^2 - (x-a)^2$$

Luego:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} = \int \frac{dX}{\sqrt{a^2-X^2}} \quad \begin{cases} X = x - a \\ dX = dx \end{cases}$$

y según hemos visto en el ejemplo 7, esta integral tiene por valor

$$\operatorname{arc\,sen} \frac{X}{a} + C.$$

Luego, $$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x-a}{a} + C.$$

Ejemplo 12. — Hallar $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

En este caso el cambio de variable es puramente algebraico.

Sea $\qquad u = \frac{1}{x} \qquad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

$$dx = -x^2 du$$

$$(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} = \left(a^2 + \frac{1}{u^2}\right)^{\frac{3}{2}} = (a^2u^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{u^3}$$

$$= (a^2u^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \times x^3.$$

Luego $$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-x^2du}{(a^2u^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \times x^3} = -\int \frac{du}{x(a^2u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\int \frac{udu}{(a^2u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hagamos otro cambio:

$$y = a^2u^2 + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 2a^2u$$

$$udu = \frac{1}{2a^2}dy.$$

Luego: $$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2a^2}\int \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2a^2} \times \left(-2 \times \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{a^2y^{\frac{1}{2}}} + C = \frac{1}{a^2(a^2u^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + C$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} \times \frac{1}{\left(a^2 \times \frac{1}{x^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}}\right) + C$$

$$= \underline{\frac{x}{a^2(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} + C.}$$

Ejemplo 13. — La ecuación $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{At}{\sqrt{t^2 - 1}}$ se presenta en la teoría matemática del movimiento de los flúidos y es de gran utilidad en el estudio de la aviación. Resolver la ecuación con relación a z.

Para obtener z, hay que integrar con relación a t.

Hagamos $u = t^2 - 1$, de modo que $\dfrac{du}{dt} = 2t \quad dt = \dfrac{du}{2t}$.

Luego $$z = \int \frac{Atdt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \int \frac{Atdu}{u^{\frac{1}{2}} \times 2t} = \frac{Adu}{2u^{\frac{1}{2}}}$$

$$= A\left(\frac{1}{2} \times 2u^{\frac{1}{2}}\right) + C$$

$$= Au^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \underline{A\sqrt{t^2 - 1} + C.}$$

Muchas integrales de la forma $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)}$ se resuelven por el cambio de variable $z = x^{-n}$.

de donde
$$\text{l.n.}\, z = -n\,\text{l.n.}\, x$$

$$\frac{d\,\text{l.n.}\, z}{dz} = -n\frac{d\,\text{l.n.}\, x}{dz}$$

o sea
$$\frac{1}{z} = -n\frac{d\,\text{l.n.}\, x}{dx} \times \frac{dx}{dz}$$

$$= -n \times \frac{1}{x} \times \frac{dx}{dz}$$

o sea, por fin,
$$dx = -\frac{xdz}{nz}.$$

La integral $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)}$ queda así reducida a $-\frac{1}{n}\int \frac{dz}{(az+b)}$, cuyo valor es $-\frac{1}{na}\,\text{l.n.}\,(az+b) = \frac{1}{na}\,\text{l.n.}\left(\frac{x^n}{a+bx^n}\right)$.

Ejemplo 14. — Evaluar $\int \frac{dx}{x(4+5x^7)}$.

Se substituye x^7 por z^{-1}, de modo que en comparación con el cambio de variable tipo, se tiene $n = 7$. Resulta, pues,

$$\int \frac{dx}{x(4+5x^7)} = -\frac{1}{7}\int \frac{dz}{4z+5} = -\frac{1}{28}\left[\text{l.n.}\,(4z+5) + \text{l.n.}\,C\right]$$

$$= -\frac{1}{28}\left[\text{l.n.}\left(\frac{4}{x^7}+5\right) + \text{l.n.}\,C\right]$$

$$= -\frac{1}{28}\left[\text{l.n.}\left(\frac{4+5x^7}{x^7}\right) + \text{l.n.}\,C\right]$$

$$= -\frac{1}{28}\left[\text{l.n.}\,\frac{C(4+5x^7)}{x^7}\right]$$

$$= \underline{\frac{1}{28}\,\text{l.n.}\left(\frac{x^7}{C(4+5x^7)}\right).}$$

Ejemplo 15. — Hallar $A = \int \frac{x^4 dx}{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}$. El denominador es irracional.

En este caso es conveniente hacer una substitución que lo racionalice. Sea $u^2 = 1 - 2x$.

$$\frac{du^2}{dx} = \frac{du^2}{du} \times \frac{du}{dx} = 2u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(1 - 2x) = -2$$

$$2u\frac{du}{dx} = -2 \qquad dx = -udu.$$

Además $\quad \dfrac{1 - u^2}{2} = x \qquad x^4 = \left(\dfrac{1 - u^2}{2}\right)^4.$

o, desarrollando por la fórmula del binomio,

$$x^4 = \frac{1}{16}(1 - 4u^2 + 6u^4 - 4u^6 + u^8)$$

Luego:

$$A = \frac{1}{16}\int\frac{(1 - 4u^2 + 6u^4 - 4u^6 + u^8)(-udu)}{u}$$

$$= -\frac{1}{16}\left(u - \frac{4u^3}{3} + \frac{6u^4}{5} - \frac{4u^7}{7} + \frac{u^9}{9}\right) + C$$

$$= -\frac{u}{16}\left(1 - \frac{4}{3}u^2 + \frac{6u^4}{5} - \frac{4u^6}{7} + \frac{u^8}{9}\right) + C$$

$$= -\frac{(1 - 2x)^{\frac{1}{2}}}{16}\left[1 - \frac{4}{3}(1 - 2x) + \frac{6}{5}(1 - 2x)^2 - \frac{4}{7}(1 - 2x)^3 + \frac{1}{9}(1 - 2x)^4\right] + C$$

que puede desde luego simplificarse.

En el ejemplo siguiente se da un caso de substitución de una función trigonométrica por una función algebraica.

Ejemplo 16. — Hallar $\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}$.

Puesto que $\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$, $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

Por consiguiente

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \times \cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

Ahora bien, si hacemos $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

tendremos $$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

o sea $$dx = \frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

Luego $$\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}\times 2du}{\sec^2\frac{x}{2}\times u}$$

$$= \int\frac{du}{u} = \text{l.n.}\, u + C$$

$$= \text{l.n.}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

INTEGRACIÓN POR PARTES. — Al derivar un producto de funciones de x, establecimos la regla

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \quad \text{(véase pág. 78).}$$

Integremos esta ecuación con relación a x. Tendremos

$$uv = \int vdu + \int udv$$

o sea $$\int udv = uv - \int vdu.$$

ecuación que constituye a su vez una regla práctica muy útil para la integración de ciertas funciones.

Ejemplo 17. — Hallar $\int 4x.e^x dx$.

Sea $$\begin{cases} u = 4x & \text{luego} \quad du = 4dx \\ dv = e^x dx & \text{»} \quad v = e^x. \end{cases}$$

Tendremos $$\int 4x.e^x dx = \int udv$$

$$= uv - \int vdu$$

$$= 4x.e^x - \int e^x.4dx$$

$$= 4x.e^x - 4e^x + C.$$

Ejemplo 18. — Hallar $\int 5x^2.e^{4x}dx$.

Sea $\quad u = 5x^2 \quad$ de donde $\quad du = 10xdx$

y sea además $\quad dv = e^{4x}dx \quad$ » » $\quad v = \frac{1}{4}e^{4x}$.

Tendremos
$$\int 5x^2.e^{4x}dx = \int udv$$
$$= uv - \int vdu$$
$$= 5x^2 \times \frac{1}{4}e^{4x} - \int \frac{1}{4}e^{4x}.10xdx$$
$$= \frac{5}{4}x^2.e^{4x} - \frac{5}{2}\int xe^{4x}dx.$$

Ahora bien,
$$\int xe^{4x}dx = x.\frac{1}{4}e^{4x} - \int \frac{1}{4}e^{4x}dx \quad \left[\text{haciendo} \begin{array}{l} u = x \\ v = \frac{1}{4}e^{4x} \end{array}\right]$$
$$= \frac{1}{4}x.e^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}$$

Luego, volviendo a la integral primitiva,
$$\int 5x^2.e^{4x}dx = \frac{5}{4}x^2.e^{4x} - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{4}x.e^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}\right) + C$$
$$= \frac{5}{4}e^{4x}\left[x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\right] + C.$$

Ejemplo 19. — Hallar $M = \int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,(bx + c)dx$ y
$$N = \int e^{ax}\cos(bx + c)dx.$$

(Ambas integrales han de resolverse juntas).

Sea $\left\{\begin{array}{ll} n = \mathrm{sen}\,(bx + c), & du = b\cos(bx + c)dx \\ dv = e^{ax}dx, & v = \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}. \end{array}\right.$

Tendremos, $M = \frac{1}{a}e^{ax}\,\mathrm{sen}\,(bx + c) - \int \frac{1}{a}e^{ax}b\cos(bx + c)dx$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\,\mathrm{sen}\,(bx + c) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx + c)dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\,\mathrm{sen}\,(bx + c) - \frac{b}{a}N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Haciendo un proceso de cálculo análogo, llegaríamos a la ecuación

$$N = \frac{1}{a} e^{ax} \cos (bx + c) + \frac{b}{a} M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Tenemos pues, un par de ecuaciones simultáneas para resolver. Multipliquemos (1) por b, (2) por a y transponiendo términos,

$$bM = \frac{b}{a} e^{ax} \operatorname{sen} (bx + c) - \frac{b^2}{a} N$$

$$bM = - e^{ax} \cos (bx + c) + aN.$$

Restando, $$0 = e^{ax}\left[\frac{b}{a} \operatorname{sen} (bx + c) + \cos (bx + c)\right] - N\left(\frac{b^2}{a} + a\right)$$

Luego $$N = e^{ax}\left[\frac{b \operatorname{sen} (bx + c) + a \cos (bx + c)}{a^2 + b^2}\right]$$

y sustituyendo arriba

$$M = e^{ax}\left[\frac{a \operatorname{sen} (bx + c) - b (\cos bx + c)}{a^2 + b^2}\right]$$

y, por consiguiente,

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} (bx + c) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \operatorname{sen} (bx + c) - b \cos (bx + c)] + C$$

$$\int e^{ax} \cos (bx + c) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [b \operatorname{sen} (bx + c) + a \cos (bx + e)] + C.$$

Ejemplo 20. — Una corriente eléctrica cuya intensidad i en el instante t, se expresa por la relación $i = I \operatorname{sen} pt$, pasa por los dos arrollamientos de un vatımetro, cuyas resistencias respectivas son R_1, R_2, y cuyas respectivas inductancias son L_1 ,L_2. Para hallar el valor de la corriente en cada uno de los circuitos, hay que resolver la integral

$\int Q e^{Pt} dt$, en la cual $P = \dfrac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}$

y $$Q = \frac{R_1 I}{L_1 + L_2} \operatorname{sen} pt + \frac{L_1 p I}{L_1 + L_2} \cos pt.$$

Calcular esta integral

$$Q = \frac{I}{L_1 + L_2} (R_1 \operatorname{sen} pt + p L_1 \cos pt) = \frac{I}{L_1 + L_2} \sqrt{R_1^2 + p^2 L_1^2} \operatorname{sen} (pt + c)$$

en que $c = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{pL_1}{R_1}$ (véase pág. 342, parte I)

De modo que,

$$Q = M \operatorname{sen} (pt + c) \text{ haciendo } M = \frac{I}{L_1 + L_2} \sqrt{R_1^2 + L_1^2 p^2}.$$

Tendremos pues

$$\int Qe^{Pt}.dt = \int e^{Pt}\,\text{M sen}\,(pt + c)dt = \text{M}\int e^{Pt}\,\text{sen}\,(pt + c)dt$$

integral del tipo calculado en el ejemplo precedente, cuyo valor es

$$\frac{Me^{Pt}}{P^2 + p^2}\,[\text{P sen}\,(pt + c) - p\cos\,(pt + c)] + C$$

en cuya forma conviene dejarla, puesto que en toda aplicación numérica sería fácil calcular P, M y c antes de substituir las cifras en el resultado del cálculo algebraico.

Los ejemplos que siguen son aplicaciones diversas de los procedimientos hasta aquí expuestos.

Ejemplo 21. — Hallar el valor de $\displaystyle\int_1^2 \frac{5dx}{x^2 + 8x + 15}$.

Sea $$\frac{5}{x^2 + 8x + 15} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x + 5} = \frac{A(x + 5) + B(x + 3)}{x^2 + 8x + 15}.$$

De donde $$5 = A(x + 5) + B(x + 3).$$

Para $x = -5,\quad 5 = 0 - 2B,\quad B = -2{,}5.$

Para $x = -3,\quad 5 = 2A\quad A = 2{,}5$

Luego $$\frac{5}{x^2 + 8x + 15} = \frac{2{,}5}{x + 3} - \frac{2{,}5}{x + 5}$$

$$\int_1^2 \frac{5dx}{x^2 + 8x + 15} = \int_1^2 \frac{2{,}5dx}{x + 3} - \int_1^2 \frac{2{,}5dx}{x + 5}$$

$$= 2{,}5\Big[\text{l.n.}\,(x + 3) - \text{l.n.}\,(x + 5)\Big]_1^2.$$

$$= 2{,}5\,[\text{l.n.}\,5 - \text{l.n.}\,7 - \text{l.n.}\,4 + \text{l.n.}\,6]$$

$$= 2{,}5\,[1{,}6094 - 1{,}9459 - 1{,}3863 + 1{,}7918]$$

$$= 2{,}5 \times 0{,}069 = \underline{0{,}1724.}$$

En un caso como éste, el método gráfico presenta ciertas ventajas. Puede incluso ser útil, en el caso de integrales definidas cuya integración analítica implica dificultades, el tratar la cuestión a la vez analítica y gráficamente, para que el método gráfico pueda servir de verificación del analítico.

En este ejemplo: $\int_1^2 \frac{5dx}{x^2 + 8x + 15} = 5 \int_1^2 \frac{dx}{(x+3)(x+5)} = 5 \int_1^2 y dx$

haciendo $$y = \frac{1}{(x+3)(x+5)}$$

se trazará la curva $y = \frac{1}{(x+3)(x+5)}$ y se hallará el área entre esta curva, el eje x y las ordenadas $x = 1$, $x = 2$.

La tabla para hacer el gráfico, será:

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	0,04167	0,03841	0,0355	0,03294	0,03064	0,02857

de donde se deduce la curva AB de la figura 37.

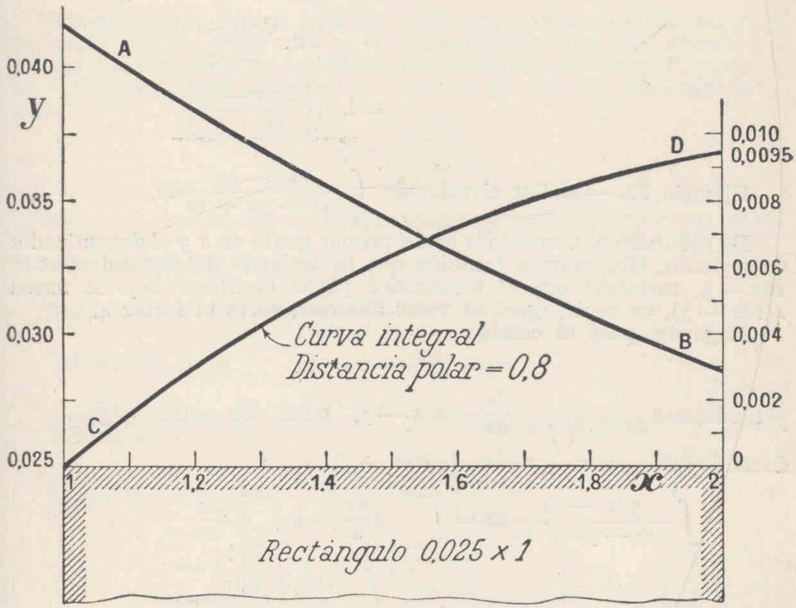


Fig. 37. — Integración gráfica del ejemplo 21

La curva integral de AB es CD, cuya última ordenada, medida con la escala de áreas es 0,0095. Esta cifra representa el área entre la curva AB, las ordenadas límites $x = 1$ y $x = 2$ y la línea base $y = 0,025$.

El área total bajo AB será = 0,0095 + área del rectángulo $0,025 \times 1 =$ $= 0,0095 + 0,025 = 0,0345$.

Luego $\displaystyle\int_1^2 y\,dx = \int_1^2 \frac{dx}{(x^2+8x+15)} = 0{,}0345$

y $\displaystyle\int_1^2 \frac{5\,dx}{(x^2+8x+15)} = 5 \times 0{,}0345 = \underline{0{,}1725}.$

Ejemplo 22. — Hallar el valor de $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-9}$.

$$4x^2 - 9 = 4\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 4\left[x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right].$$

Pero $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\,\text{l.n.}\,\frac{C(x-a)}{(x+a)}$ (véase Ejemplo 1, pág. 161)

Luego $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-9} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\times\frac{3}{2}} \times \frac{1}{4}\,\text{l.n.}\,\frac{C\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)}$

$$= \frac{1}{12}\,\text{l.n.}\,\frac{C(2x-3)}{2x+3}$$

$$= \underline{\text{l.n.}\left[\frac{C(2x-3)}{(2x+3)}\right]^{\frac{1}{12}}}$$

Ejemplo 23. — Hallar el valor de $\displaystyle\int_4^7 \frac{72x-20}{9x^2-5x+12}\,dx.$

En este caso el numerador es de primer grado en x y el denominador de segundo. Observamos también que la derivada del denominador es $18x-5$, mientras que el numerador puede escribirse bajo la forma $4(18x-5)$, es decir, igual al valor anterior, salvo el factor 4.

Hagamos pues el cambio

$$u = 9x^2 - 5x + 12$$

y tendremos $\displaystyle\frac{du}{dx} = 18x - 5,$ o sea $du = (18x-5)dx$

de modo que $(72x-20)dx = 4(18x-5) = 4du$

$$\int_4^7 \frac{72x-20}{9x^2-5x+12}\,dx = \int_{x=4}^{x=7} 4\frac{du}{u} = 4\int_{x=4}^{x=7}\frac{du}{u}$$

$$= 4\left(\text{l.n.}\,u\right)_{x=4}^{x=}$$

$$= 4\left[\text{l.n.}\,(9x^2-5x+12)\right]_4^7$$

$$= 4\,(\text{l.n.}\,418 - \text{l.n.}\,136)$$

$$= 4\,(\text{l.n.}\,4{,}18 - \text{l.n.}\,1{,}36)$$

$$= 4\,(1{,}4303 - 0{,}3075)$$

$$= \underline{4{,}49}.$$

Ejemplo 24. — Hallar el valor de $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 15}$.

Esta integral es del tipo $\int \frac{dx}{(x+a)^2 + b^2}$

puesto que

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 15 &= x^2 + 6x + 9 + 6 \\ &= (x+3)^2 + (\sqrt{6})^2 \end{aligned}$$

de modo que en este caso

$$a = 3, \quad b = \sqrt{6}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 15} &= \frac{1}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+a}{b} + C \text{ (Ejemplo 10, pág. 166).} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+3}{\sqrt{6}} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 25. — Sea un alambre conductor a potencial distinto al de la tierra. Si r = radio en cms., l = longitud en cms., σ = densidad de carga en la superficie, en unidades electrostáticas por cm.²; P, potencial en un punto del eje del alambre, debido a la carga en una longitud δx, será:

$$P = \frac{2\pi r \sigma \delta x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

de modo que el potencial en el punto medio $= 2\pi r\sigma \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{\sqrt{r^2 + x^2}}$; calcular esta integral.

Esta integral es del tipo $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Tendremos, pues,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \text{l.n.} \left\{ \frac{x + \sqrt{x^2 + r^2}}{r} \right\} \text{(Ejemplo 8, pág. 165)}$$

Luego $P_m = 2\pi r\sigma \left[\text{l.n.} \left\{ \frac{x + \sqrt{x^2 + r^2}}{r} \right\} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$

$$= 2\pi r\sigma \left[\text{l.n.} \left\{ \frac{\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2}}{r} \right\} - \text{l.n.} \left\{ \frac{-\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2}}{r} \right\} \right]$$

$$= 2\pi r\sigma \,\text{l.n.} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2} + \frac{l}{2}}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2} - \frac{l}{2}} \right\}$$

$$= 2\pi r\sigma \, \text{l.n.} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{l^2}{4r^2} + 1} + \frac{l}{2r}}{\sqrt{\frac{l^2}{4r^2} + 1} - \frac{l}{2r}} \right\}$$

o sea $$\pi d\sigma \, \text{l. n.} \left\{ \frac{\sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2 + 1} + \frac{l}{d}}{\sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2 + 1} - \frac{l}{d}} \right\}$$ en donde d es el diámetro del alambre.

El ejemplo siguiente implica el empleo de tres de los procedimientos explicados en este capítulo.

Ejemplo 26. — Hallar el valor de $\int \frac{(5x + 4)dx}{(x^2 + 2x + 7)(x+3)}$.

La fracción bajo la integral debe descomponerse ante todo en sus fracciones simples. Hagamos

$$\frac{5x + 4}{(x^2 + 2x + 7)(x + 3)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 7)} + \frac{C}{(x + 3)}$$ (v. parte I, pág. 548)

$$= \frac{(Ax + B)(x + 3) + C(x^2 + 2x + 7)}{(x^2 + 2x + 7)(x + 3)}$$

o sea $$5x + 4 = (Ax + B)(x + 3) + C(x^2 + 2x + 7).$$

Sea $x = -3$. Tendremos

$$-11 = C(9 - 6 + 7) = 10C$$

$$C = -\frac{11}{10}.$$

Los valores de A y B se pueden hallar igualando los coeficientes de x y x^2.

Igualando los coeficientes de x^2, $0 = A + C$

y por lo tanto $$A = \frac{11}{10}.$$

Igualando los coeficientes de x, $5 = 3A + B + 2C = \frac{33}{10} + B - \frac{22}{10}$

de donde $$B = \frac{39}{10}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{5x + 4}{(x^2 + 2x + 7)(x + 3)} = \frac{\frac{11}{10}x + \frac{39}{10}}{x^2 + 2x + 7} - \frac{\frac{11}{10}}{x + 3}$$

$$= \frac{1}{10}\left\{\frac{11x + 39}{x^2 + 2x + 7} - \frac{11}{x + 3}\right\}.$$

Podemos transformar el numerador de la primera fracción en una función sencilla de la derivada del denominador. En efecto, la derivada del denominador

$$= 2x + 2 = 2(x + 1)$$

y el numerador $= 11x + 11 + 28 = 11(x + 1) + 28.$

Sea

$$u = x^2 + 2x + 7$$

$$du = 2(x + 1)dx$$

y el numerador $\times\, dx = [11(x + 1) + 28]dx$

$$= \frac{11}{2}du + 28dx$$

Resulta pues que: $\displaystyle\int \frac{(5x + 4)dx}{(x^2 + 2x + 7)(x + 3)}$

$$= \frac{1}{10}\int\left\{\frac{11x + 39}{x^2 + 2x + 7} - \frac{11}{x + 3}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{10}\left\{\int\frac{(11x + 39)dx}{x^2 + 2x + 7} - \int\frac{11dx}{x + 3}\right\}$$

$$= \frac{1}{10}\left\{\int\frac{11du}{2u} + \int\frac{28dx}{x^2 + 2x + 7} - \int\frac{11dx}{x + 3}\right\}$$

$$= \frac{1}{10}\left\{\frac{11}{2}\,\text{l.n.}\,u + \frac{28}{\sqrt{6}}\,\text{arc tg}\,\frac{(x+1)}{\sqrt{6}} - \frac{11}{10}\,\text{l.n.}\,(x+3) + C\right\}\left[\begin{array}{l} x^2+2x+7 \\ =x^2+2x+1+6 \\ =(x+1)^2+(\sqrt{6})^2 \end{array}\right]$$

$$= \frac{11}{20}\,\text{l.n.}\,(x^2 + 2x + 7) + \frac{14}{5\sqrt{6}}\,\text{arc tg}\,\frac{(x + 1)}{\sqrt{6}} - \frac{11}{10}\,\text{l.n.}(x + 3) + C$$

$$= \text{l.n.}\frac{(x^2 + 2x + 7)^{\frac{11}{20}}}{(x + 3)^{\frac{11}{20}}} + \frac{14}{5\sqrt{6}}\,\text{arc tg}\,\frac{(x + 1)}{\sqrt{6}} + C.$$

Ejemplo 27. — En el cálculo de probabilidades se presenta la integral $I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Hallar su valor.

Substituyamos x por ax, y por lo tanto dx por adx, quedará

$$I = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \times adx,$$

multipliquemos por e^{-a^2}

$$I \times e^{-a^2} = \int_0^\infty e^{-a^2(1+x^2)} \times adx$$

Integremos con relación a a

$$\int_0^\infty \mathrm{I}e^{-a^2}da = \int_{x=0}^{x=\infty}\int_{a=0}^{a=\infty} e^{-a^2(1+x^2)}adadx$$

pero $\int_0^\infty \mathrm{I}e^{-a^2}da = \mathrm{I}\int_0^\infty e^{-a^2}da = \mathrm{I}\times\mathrm{I}$ puesto que $\int_0^\infty e^{-a^2}da$ e $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

tienen igual valor

Luego $$\mathrm{I}^2 = \int_{x=0}^{x=\infty}\int_{a=0}^{a=\infty} e^{-a^2(1+x^2)}\times adadx \quad \text{(1)}$$

El valor de la integral doble, lo hallaremos integrando primero con relación a a y luego con relación a x. Sea $A = a^2$, $dA = 2ada$, y sea también, $M = 1 + x^2$, entonces

$$\int_{a=0}^{a=\infty} e^{-a^2(1+x^2)}\cdot ada = \int_{a=0}^{a=\infty} e^{-AM}\frac{a}{2a}dA$$

$$= -\frac{1}{2M}\left(e^{-AM}\right)_0^\infty$$ puesto que los límites de a y los de A son los mismos.

$$= -\frac{1}{2M}(e^{-\infty} - e^0)$$

$$= -\frac{1}{2M}(0-1) = \frac{1}{2M}.$$

Volviendo a la ecuación (1) y sustituyendo allí este valor

$$\mathrm{I}^2 = \int_0^\infty \frac{1}{2M}dx = \int_0^\infty \frac{dx}{2(1+x^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} x\right)_0^\infty$$ (Ejemplo 10, pág. 166)

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg}\infty - \operatorname{arc\,tg} 0)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto $$\mathrm{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Como generalización de este resultado podría demostrarse que:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx = \frac{h}{2}\sqrt{\pi}.$$

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN. — Muchas de las integrales complicadas que se presentan en problemas difíciles de termodinámica, en resistencia de materiales y en electricidad, pueden hacerse depender, mediante oportunas sustituciones, de resultados obtenidos por un proceso de reducción. Para hacer ver los principios en que se basa este método, bueno será empezar por el estudio de los tipos más sencillos.

Se desea calcular las integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n\theta d\theta, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta, \text{ y } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m\theta \cos^n\theta d\theta$$

en las que m y n tienen valores enteros positivos cualesquiera.

El caso $m = n = 0$, se reduce a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$, cuyo valor sabemos es igual a $\frac{\pi}{2}$ .... (1)

Si $m = n = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \theta d\theta = -\left(\cos \theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = -(\cos 90° - \cos 0°) = 1 \ldots. \quad (2)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \left(\operatorname{sen} \theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = (\operatorname{sen} 90° - \operatorname{sen} 0°) = 1 \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

de cuyo par de resultados deducimos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta$$

o, más generalmente,

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a - x)dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

resultado de gran utilidad. De igual modo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2\theta d\theta = -\frac{1}{2\times 2}\Big(\cos 2\theta\Big)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0)$$

$$= \frac{1}{2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Por medio de un proceso de reducción, será posible calcular los casos generales haciéndolos depender de los resultados (1), (2), (3), (4) y (5).

Así $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

y en virtud de (4).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Sea $n = 3$, es decir calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta d\theta$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\theta) \operatorname{sen}\theta d\theta$$

$$= -\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (1 - u^2) du \quad \begin{cases} u = \cos\theta \\ du = -\operatorname{sen}\theta d\theta \end{cases}$$

Ahora bien,

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (1 - u^2) du = \left(u - \frac{u^3}{3}\right)_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}$$

luego $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta d\theta = -\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (1 - u^2) du = +\frac{2}{3}$

Si escribimos n en lugar de 3, expresaremos el resultado del modo siguiente,

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n \theta d\theta = \frac{n-1}{n}\\ \text{y asimismo,}\quad &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \frac{n-1}{n}\end{aligned}\right\} n = \text{número impar}$$

$$\text{Sea } n = 4; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta$$

expresión de la forma $\int u dv$ ($u = \operatorname{sen}^3 \theta \quad dv = \operatorname{sen} \theta d\theta \quad v = -\cos \theta$).

$$\text{Luego, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta d\theta = -\Big(\cos \theta \operatorname{sen}^3 \theta\Big)_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos \theta \,.\, d \operatorname{sen}^3 \theta$$

$$= -\Big(\cos \theta \operatorname{sen}^3 \theta\Big)_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \times 3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta d\theta$$

$$= 0 + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

puesto que

$$\Big(\cos \theta \operatorname{sen}^3 \theta\Big)_0^{\frac{\pi}{2}} = (0 \times 1) - (1 \times 0) = 0.$$

$$\text{Ahora bien, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen}^4 \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 d\theta$$

$$\text{Luego} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta d\theta$$

o bien $$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta$$

y $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta.$$

Queda así reducida la potencia a la mitad y como ya sabemos el resultado de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta d\theta$, hemos resuelto la integral.

Así $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta d\theta = \frac{3}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{16} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

que, poniendo n en lugar de 4, puede expresarse en la forma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n d\theta = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \frac{\pi}{2}$$ siendo n un número entero par.

De igual modo se probaría que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 \theta d\theta = \frac{5-1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 \theta d\theta = \frac{5-1}{5} \times \frac{5-3}{5-2} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}.$$

de la forma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n \theta d\theta = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \qquad n \text{ impar}$$

así como

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 \theta d\theta = \frac{6-1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta d\theta = \frac{6-1}{6} \times \frac{6-3}{6-2} \times \frac{6-5}{6-4} \times \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2}\,\frac{\pi}{2}$$

de la forma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n \theta d\theta = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \frac{n-5}{n-4} \times \frac{\pi}{2} \qquad n \text{ par}$$

Resumiendo los resultados obtenidos tendremos

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } n = \text{entero par} \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots 1}{n(n-2)(n-4)\ldots\ldots 2} \times \frac{\pi}{2}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } n = \text{entero impar} \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots 2}{n(n-2)(n-4)\ldots\ldots 1}\end{array}\right\}$$

Ejemplo 28. — Hallar el valor de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^9 \theta d\theta$. Aquí, $n = 9 =$ impar.

Luego $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^9 \theta d\theta = \frac{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3} = \underline{\frac{128}{315}}$$

Ejemplo 29. — Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} \theta d\theta$. Aquí, $n = 10 =$ par.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} \theta d\theta = \frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} \times \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{63 \times \pi}{512}}.$$

Ejemplo 30. — La expresión $-\frac{4\rho l}{\pi + 4}\int_{\infty}^{1} \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^3} dt$ da la presión teórica sobre un plano que se mueve en el aire. Calcularla:

$$\sqrt{t^2 - 1} = \sqrt{t^2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)} = t\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} = t \cos u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

haciendo $\operatorname{sen} u = \frac{1}{t}$.

Luego, si $\operatorname{sen} u = \frac{1}{t} = t^{-1}$ $\qquad \frac{d \operatorname{sen} u}{du} = \frac{dt^{-1}}{du} = \frac{dt^{-1}}{dt} \cdot \frac{dt}{du}$

y como $$\cos u = -\frac{1}{t^2}\frac{dt}{du}$$

$$dt = -\frac{du \cos u}{\operatorname{sen}^2 u}.$$

Cuando $t = \infty$ $\qquad \frac{1}{t} = 0 \qquad \operatorname{sen} u = 0 \qquad u = 0$

Cuando $t = 1$ $\qquad \frac{1}{t} = 1 \qquad \operatorname{sen} u = 1 \qquad u = \frac{\pi}{2}.$

Luego:

$$\int_{\infty}^{1}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3}\,dt = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u \operatorname{sen}^3 u \cos u du}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 u} = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u du = -\frac{\pi}{4}$$

es decir $$-\frac{4\rho l}{\pi+4}\int_{\infty}^{1}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3}\,dt = -\frac{4\rho l}{\pi+4}\times\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\frac{\pi\rho l}{\pi+4}}.$$

Examinaremos ahora la determinación de la $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^m\theta\cos^n\theta d\theta$, cuando m y n son enteros positivos. Veamos primero un caso sencillo:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta d\theta.$$

Sea $u = \operatorname{sen}^2\theta$ de modo que $\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{d\operatorname{sen}^2\theta}{d\operatorname{sen}\theta}\times\dfrac{d\operatorname{sen}\theta}{d\theta}$

$$= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$du = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta.$$

Sea $dv = \cos\theta d\theta$ de modo que $v = \operatorname{sen}\theta$.

Tendremos integrando por partes,

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta d\theta = \left(\operatorname{sen}^3\theta\right)_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta d\theta$$

de donde $$3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta d\theta = \left(\operatorname{sen}^3\theta\right)_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

o sea $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{3}$$

que se puede poner en la forma $\dfrac{m-1}{m+n}$.

Ejemplo 31. — H es la presión horizontal sobre un arco circular que soporta una carga uniforme p por metro,

$$H = \frac{pR^4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{4} - \operatorname{sen}^2 \theta\right)(\cos\theta - 0{,}866)d\theta}{2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos\theta - 0{,}866)d\theta}$$

si la luz es igual al radio (fig. 38).

Si $p = 0{,}5$ toneladas por metro y la cuerda = 20 metros, hallar H

$$H = \frac{0{,}5 \times 20}{2} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{4} - \operatorname{sen}^2 \theta\right)(\cos\theta - 0{,}866)d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos\theta - 0{,}866)d\theta}$$

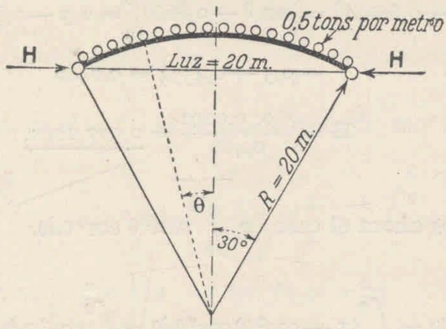


Fig. 38. — Arco circular

Integremos primero el numerador

$$\left(\frac{1}{4} - \operatorname{sen}^2\theta\right)(\cos\theta - 0{,}866) = \frac{1}{4}\cos\theta - 0{,}2165 - \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + 0{,}866\operatorname{sen}^2\theta$$

Luego $\int\left(\frac{1}{4} - \operatorname{sen}^2\theta\right)(\cos\theta - 0{,}866)d\theta$

$$= \int\frac{1}{4}\cos\theta d\theta - \int 0{,}2165\, d\theta - \int\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta d\theta + \int 0{,}866\operatorname{sen}^2\theta d\theta$$

pero hemos visto (p. 182) que $\int\operatorname{sen}^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta - \frac{1}{2}\int\cos 2\theta d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta$

y también que $\int\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\theta.$

De modo que

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{4}-\operatorname{sen}^2\theta\right)(\cos\theta-0{,}866)d\theta$$

$$=\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta\right)_0^{\frac{\pi}{6}}-\left(0{,}2165\theta\right)_0^{\frac{\pi}{6}}-\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\theta\right)_0^{\frac{\pi}{6}}+0{,}433\left(\theta-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right)_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{4}(0{,}5-0)-0{,}2165\left(\frac{\pi}{6}-0\right)-\frac{1}{3}\left((0{,}5)^3-0\right)+0{,}433\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times0{,}866-0+0\right)$$

$$=0{,}125-0{,}1134-0{,}0417+0{,}2267-0{,}1875=0{,}0091$$

El denominador por su parte nos dará

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos\theta-0{,}866)d\theta=\left(\operatorname{sen}\theta-0{,}866\theta\right)_0^{\frac{\pi}{6}}=0{,}5-0{,}866\times\frac{\pi}{6}$$

$$=0{,}5-0{,}4534=0{,}0466$$

De donde $$\mathrm{H}=\frac{5\times0{,}0091}{0{,}466}=\underline{0{,}977\ \text{tons.}}$$

Consideremos ahora el caso de $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta d\theta.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

que, según resultados ya establecidos,

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{8}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}.$$

Puede considerarse este resultado como obtenido por reducción de la potencia m de la integral tipo a $m-2$ y luego de la potencia $n=2$ de $\cos\theta$ a $n-2$, o sea 0. Así,

Reducción de m a $m-2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta d\theta=\frac{2-1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{m-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$

Reducción de n a $n - 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{2 - 1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{2-1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{n-1}{n+m} \frac{\pi}{2}.$$

De donde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{2-1}{4} \times \frac{2-1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}.$$

De igual modo reduciríamos $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta \cos^3 \theta d\theta.$

1.° Reducir m a $m - 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{4-1}{4+3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta \cos^3 \theta d\theta.$$

Luego, pasar de $m - 2$ a $m - 2 - 2$, o sea de $\operatorname{sen}^2 \theta$ a la potencia 0

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{4-1}{4+3} \times \frac{2-1}{2+3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta.$$

Reduzcamos ahora n a $n - 2$ (m ya es $= 0$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{4-1}{4+3} \times \frac{2-1}{2+3} \times \frac{3-1}{3+0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{3 \times 1 \times 2}{7 \times 5 \times 3}.$$

El cálculo de la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m \theta \cos^n \theta d\theta$ se efectúa, pues, por reducciones sucesivas de m y n de 2 en 2 unidades hasta que se llegue a 1 ó a 0.

Resultan los casos siguientes:

(a) m y n pares. La integral final será

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

(b) m y n impares. La integral final será

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2}$$

(c) m par y n impar o viceversa. La integral final será

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \quad \text{o bien} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \theta d\theta, \text{ cuyo valor es } 1.$$

En síntesis pues, resulta:

Caso (a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m \theta \cos^n \theta = \frac{(m-1)(m-3)\ldots.1}{(m+n)(m-2+n)\ldots.(2+n)} \times \frac{(n-1)(n-3)\ldots.1}{n(n-2)\ldots.2} \times \frac{\pi}{2}$$

Caso (b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m \theta \cos^n \theta d\theta = \frac{(m-1)(m-3)\ldots.2}{(m+n)(m-2+n)\ldots.(3+n)} \times \frac{(n-1)(n-3)\ldots.2}{(n+1)(n-1)\ldots.4} \times \frac{1}{2}$$

Caso (c) (m par y n impar)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m \theta \cos^n \theta d\theta = \frac{(m-1)(m-3)\ldots.1}{(m+n)(m-2+n)\ldots.(2+n)} \times \frac{(n-1)(n-3)\ldots.2}{n(n-2)\ldots.1} \times 1$$

Ejemplo 32. — Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8 \theta \cos^{10} \theta d\theta$.

Estamos en el caso (a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8 \theta \cos^{10} \theta = \frac{7 \times 5 \times 3 \times 1}{18 \times 16 \times 14 \times 12} \times \frac{9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1}{10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \underline{\frac{315\pi}{1179648}}.$$

Ejemplo 33. — Hallar el valor de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3\theta \cos^5\theta d\theta$.

Estamos en el caso (*b*)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3\theta \cos^5\theta d\theta = \frac{2}{8} \times \frac{4 \times 2}{6 \times 4} \times \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{24}}.$$

Ejemplo 34. — Hallar el valor de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^7\theta \cos^4\theta d\theta$.

Estamos en el caso (*c*), siendo *m* impar y *n* par

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^7\theta \cos^4\theta d\theta = \frac{6 \times 4 \times 2}{11 \times 9 \times 7} \times \frac{3 \times 1}{5 \times 3} \times 1 = \underline{\frac{16}{1155}}$$

Estas fórmulas son de gran utilidad en el cálculo de funciones algebraicas difíciles, que se pueden transformar por medio de substituciones trigonométricas.

Así para calcular $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$, conocida con el nombre de integral culeriana de primera especie y generalmente designada por el símbolo B(m, n), podemos sustituir x por $\text{sen}^2\theta$. Como para $x = 0$ $\text{sen}^2\theta = 0$, y $\theta = 0$, y además para $x = 1$, $\text{sen}^2\theta = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, tendremos

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2m-2}(1-\text{sen}^2\theta)^{n-1}dx$$

Ahora bien:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\,\text{sen}^2\theta}{d\theta} = \frac{d\,\text{sen}^2\theta}{d\,\text{sen}\,\theta} \times \frac{d\,\text{sen}\,\theta}{d\theta} = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

De modo que

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2m-2}\theta\cos^{2n-2}\theta \times 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta$$

que puede calcularse fácilmente.

Ejemplo 35. — Calcular $\int_0^1 x^4(1 - n^2)^{\frac{5}{2}}dx$.

Sea $x = \text{sen}\,\theta$ $\quad 1 - x^2 = \cos^2\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$$

para $x = 0$ $\quad \text{sen}\,\theta = 0 \quad \theta = 0$

para $x = 1$ $\quad \text{sen}\,\theta = 1 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

De donde

$$\int_0^1 x^4(1 - x^2)^{\frac{5}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^4\theta\cos^5\theta d\theta\cos\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^4\theta\cos^6\theta d\theta$$

$$= \frac{3 \times 1}{10 \times 8} \times \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{9\pi}{512}}.$$

Otro resultado importante que puede obtenerse por proceso de reducción es el valor de la integral $\int_0^\infty e^{-x}x^n dx$, llamada función Gamma de $(n + 1)$ y designada por el símbolo $\Gamma(n + 1)$.

Así $$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = \Gamma(n + 1)$$

y $$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \Gamma(n)$$

Esta segunda se llama también la integral culeriana de segunda especie.

Para calcular $\Gamma(n + 1)$ sea $u = x^n \quad dv = e^{-x}dx$

de modo que $v = -e^{-x} \qquad du = nx^{n-1}dx$

Tendremos $$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = \left(-e^{-x}x^n\right)_0^\infty - \int_0^\infty - e^{-x}.nx^{n-1}dx$$

$$= \left(-e^{-x}x^n\right)_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx.$$

Para $x = \infty$ $\quad e^{-x}x^n = \frac{1 \times \infty}{e^\infty}$ que puede probarse es igual a 0 (*).

(*) La expresión $\frac{1 \times \infty}{e^\infty}$ es indeterminada y, en realidad, carece de significado por sí misma. Al decirse que *es igual a cero*, quiere significarse que la función $e^{-x}x^n$, de que procede, *tiende a cero* al crecer x indefinidamente. *(N. del T).*

Y para $x = 0$ $\quad e^{-x}x^n = \dfrac{1 \times 0}{e^0} = 0.$

De modo que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$

o, lo que es lo mismo, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$

De igual modo se probaría que

$$\Gamma(n) = (n-1)\ \Gamma(n-1)$$

y así sucesivamente. Si n es entero, es evidente que la integral llega a reducirse a $\Gamma(1)$ a saber:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = -(e^{-\infty} - e^0) = -(0-1) = 1.$$

Por consiguiente

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots.1 = \underline{|n}.$$

Si n no es entero, la última relación no se aplica, pero el método general sí. Existen tablas que dan el valor de $\Gamma(n)$ para muchos valores, ya enteros, ya fraccionarios de n, de modo que si se puede reducir una integral a una función Gamma o a combinaciones de funciones Gamma, se podrá hallar su valor por medio de dichas tablas.

Ejemplo 36. — Calcular por medio de la función Gamma la integral de las probabilidades $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{h^2}}dx.$

Hagamos $X = \dfrac{x^2}{h^2}.$ Tendremos $\quad \dfrac{dX}{dx} = \dfrac{d\frac{x^2}{h^2}}{dx} = \dfrac{2x}{h^2}$

de modo que $\quad dX = \dfrac{2xdx}{h^2}$

$$dx = \frac{h^2}{2}\frac{dX}{x} = \frac{h^2}{2}\frac{dX}{h\sqrt{X}} = \frac{hdX}{2\sqrt{X}}.$$

Luego $\quad \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{h^2}}dx = \int_0^\infty e^{-X} \times \frac{hdX}{2\sqrt{X}} = \frac{h}{2}\int_0^\infty e^{-X}X^{-\frac{1}{2}}dX = \frac{h}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

y el valor de $\quad \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

Por lo cual $\quad \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{h^2}}dx = \underline{\frac{h}{2}\sqrt{\pi}.}$

Compárese con el ejemplo 27, página 179, en el que la integral calculada es algo más sencilla y se apreciará la rapidez de la solución por el uso de la función Gamma.

LISTA DE INTEGRALES IMPORTANTES

$$\int (ax^n + b)\,dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + bx + C.$$

$$\int ae^{bx}\,dx = \frac{a}{b}e^{bx} + C.$$

$$\int ba^{nx}\,dx = \frac{b}{n\,\text{l.n.}\,a}\cdot a^{nx} + C.$$

$$\int a\cos(bx+d)\,dx = \frac{a}{b}\operatorname{sen}(bx+d) + C.$$

$$\int a\operatorname{sen}(bx+d)\,dx = -\frac{a}{b}\cos(bx+d) + C.$$

$$\int a\operatorname{tg}(bx+d)\,dx = -\frac{a}{b}\,\text{l.n.}\cos(bx+d) + C.$$

$$\int a\cot(bx+d)\,dx = \frac{a}{b}\,\text{l.n.}\operatorname{sen}(bx+d) + C.$$

$$\int a\sec^2(bx+d)\,dx = \frac{a}{b}\operatorname{tg}(bx+d) + C.$$

$$\int a\operatorname{cosec}^2(bx+d)\,dx = -\frac{a}{b}\cot(b+d) + C.$$

$$\int a\cosh(bx+d)\,dx = \frac{a}{b}\operatorname{senh}(bx+d) + C.$$

$$\int a\operatorname{senh}(bx+d)\,dx = \frac{a}{b}\cosh(bx+d) + C.$$

$$\int a\operatorname{sech}^2(bx+d)\,dx = \frac{a}{b}\operatorname{tgh}(bx+d) + C.$$

$$\int a\operatorname{cosech}^2(bx+d)\,dx = -\frac{a}{b}\coth(bx+d) + C.$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx+d)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\operatorname{sen}(bx+d) - b\cos(bx+d)] + C.$$

$$\int e^{ax}\cos(bx+d)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[b\operatorname{sen}(bx+d) + a\cos(bx+d)] + C.$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(bx+d)} = \frac{1}{b}\,\text{l.n.}\left(\operatorname{tg}\frac{bx+d}{2}\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\,\text{l.n.}(ax+b) + C.$$

$$\int \operatorname{tg}(bx+d)\,dx = -\frac{1}{b}\,\text{l.n.}\cos(bx+d)+C.$$

$$\int \cot(bx+d)\,dx = \frac{1}{b}\,\text{l.n.}\operatorname{sen}(bx+d)+C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{b}+C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\,\text{l.n.}\frac{a+x}{a-x}+C.$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2-b^2} = \frac{1}{2b}\,\text{l.n.}\frac{x+a-b}{x+a+b}+C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \text{l.n.}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)+C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)^2+b^2}} = \text{l.n.}\left(\frac{x+a+\sqrt{(x+a)^2+b^2}}{b}\right)+C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \text{l.n.}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)+C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)^2-b^2}} = \text{l.n.}\left(\frac{x+a+\sqrt{(x+a)^2-b^2}}{b}\right)+C.$$

$$\int \frac{(ax+b)\,dx}{(ax^2+2bx+d)} = \frac{1}{2}\,\text{l.n.}(ax^2+2bx+d)+C.$$

$$\int \operatorname{cosec}(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,\text{l.n.}\left(\operatorname{tg}\frac{ax+b}{2}\right)+C.$$

$$\int \sec(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,\text{l.n.}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax+b}{2}\right)+C.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{a}+C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = 1-\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{a}+C.$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+C.$$

$$\int\sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{arg\,cosh}\frac{x}{a} + C.$$

$$\int\sqrt{(x + a)^2 - b^2}\, dx = \frac{1}{2}(x+a)\sqrt{(x+a)^2 - b^2} - \frac{b^2}{2}\operatorname{arg\,cosh}\frac{x+a}{b} + C.$$

$$\int\sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arg\,senh}\frac{x}{a} + C.$$

$$\int\sqrt{(x + a)^2 + b^2}\, dx = \frac{1}{2}(x+a)\sqrt{(x+a)^2 + b^2} + \frac{b^2}{2}\operatorname{arg\,senh}\frac{x+a}{b} + C.$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \frac{m - 1}{m + n}\int \operatorname{sen}^{m-2} x \,.\, \cos^n x\, dx - \frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \,.\, \cos^{n+1} x}{m + n} + C.$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{h^2}}\, dx = \frac{h\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\,\theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\, d\theta = \frac{(n - 1)(n - 3)(n - 5)\ldots 1}{n(n - 2(n - 4)\ldots 2}\frac{\pi}{2}$$

si n es entero par.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\, d\theta = \frac{(n - 1)(n - 3)(n - 5)\ldots 2}{n(n - 2)(n - 4)\ldots 1}$$

si n es entero impar.

$$\int_\infty^1 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3}\, dx = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m\theta \cos^n\theta \, d\theta = \frac{(m-1)(m-3)\ldots 1}{(m+n)(m+n-2)\ldots(n+2)} \times \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{n(n-2)\ldots 2} \times \frac{\pi}{2}$$

si m y n son ambos pares.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m\theta \cos^n\theta \, d\theta = \frac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(n+3)} \times \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(n+1)(n-1)\ldots 4} \times \frac{1}{2}$$

si m y n son ambos impares.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m\theta \cos^n\theta \, d\theta = \frac{(m-1)(m-3)\ldots 1}{(m+n)(m+n-2)\ldots(n+2)} \times \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 1}$$

si m es par y n impar.

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,dv \text{ (siendo } pv^n = C) = \frac{C}{1-n}(v_2^{1-n} - v_1^{1-n}) = \frac{p_2v_2 - p_1v_1}{1-n}.$$

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,dv \text{ (siendo } pv = C) = C \,\text{l.n.}\, \frac{v_2}{v_1}.$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{a+b\tau}{\tau} d\tau = a \,\text{l.n.}\, \frac{\tau_2}{\tau_1} + b(\tau_2 - \tau_1).$$

$$\int \operatorname{arc\,sen} ax\, dx = x \operatorname{arc\,sen} ax + \frac{1}{2}\sqrt{1-a^2x^2} + C.$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} ax\, dx = x \operatorname{arc\,tg} ax - \frac{1}{2a}\,\text{l.n.}\,(1+a^2x^2) + C.$$

$$\int (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{4}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right) + C.$$

$$\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3\pi a^4}{16}.$$

Ejercicios 15. — Sobre integración

Calcular los integrales de los números 1 a 18.

1. $\int \frac{dx}{2x^2-5}$. 2. $\int \frac{dx}{3x^2+6x+21}$. 3. $\int \frac{(x-1)\,dx}{9x^2-18x+17}$.

4. $\frac{4}{3}\int_1^{1\frac{1}{4}} \frac{(3{,}5-y)\,dy}{y+3}$, que se presenta en el cálculo de los esfuerzos sobre el gancho de una grúa.

5. $t = 95{,}5 \int_0^3 (6-h)^{\frac{1}{2}}\, dh$, que se refiere al tiempo necesario para vaciarse un depósito.

6. $\int\sqrt{3 - 4y^2\,dy}$. **7.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 5t \cos t\, dt$. **8.** $\int 8 \cos^2 6t\, dt$

9. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 5x}$. **10.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{WR}}{\mathrm{EI}}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{2}{1}\operatorname{sen}\theta\right) \mathrm{R}^2 \cos\theta\, d\theta$.

11. $\int 4 \operatorname{tg} 5t\, dt$. **12.** $\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx$. **13.** $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

14. $\int 5e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx$. **15.** $\int \frac{2dx}{(1 + x^2)^2}$. **16.** $\int_0^{\frac{\pi}{5}} x \operatorname{sen} x\, dx$.

17. $\int \cos\theta \operatorname{sen}^{2\theta} d\theta$. **18.** $h = \int_0^l \frac{64fQ^2}{2g\pi^2} \frac{dx}{(d + kx)^5}$, que expresa el gasto de agua de un tubo de diámetro que varía uniformemente, siendo el diámetro a la distancia x del extremo estrecho igual al diámetro en el extremo estrecho $+ kx$.

19. El tiempo necesario para que baje el nivel del líquido de un recipiente que tiene dos orificios a un lado puede hallarse por la fórmula

$$dt = \frac{110\, dh}{\sqrt{h + 12} + \sqrt{h}}$$

Calcular el tiempo entre los límites de h, 0 y 10.

20. Expresar e^{-t^2} en serie y con ella calcular el valor de

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\, dt.$$

21. La máxima intensidad del esfuerzo cortante sobre una sección circular de radio $r = \mathrm{S} = \frac{\mathrm{F}}{2r\mathrm{I}}\int_0^r 2(r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\, ydy$.

Si $\mathrm{I} = \frac{\pi r^4}{4}$, hallar una expresión sencilla de S.

22. Calcular la integral $\int \frac{dt}{t - \sqrt{t^2 - 4}}$. (Hay que racionalizar el denominador).

23. Calcular el valor de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 \theta d\theta$.

24. Si el valor de l.n. Γ (1,85) dado en las tablas es $\bar{1}$,9757, calcular $\int_0^\infty e^{-x} x^{1.85}\, dx$.

25. Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta \cos^7 \theta d\theta$.

26. Al hallar los esfuerzos sobre un arco circular hubo de determinarse el valor de

$$2\int_0^{\frac{\pi}{6}} R^3\left(\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta + \frac{3}{4}\right)d\theta.$$ Calcular esta integral.

27. Calcular la integral indefinida $\int\sqrt{21 - 5x - x^2}\, dx$.

28. La atracción F de un disco circular delgado de radio r sobre un cuerpo en el eje del disco y a la distancia z del centro, está dada por

$$F = -2\pi\sigma kz \int_0^a \frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

en que σ es la densidad del disco y K una constante.
Hallar el valor de F para este caso.

29. Determinar el tiempo t que emplea el agua en una tubería que enlaza una balsa con una turbina, para que su velocidad pase de V_1 a V_2, siendo dicho tiempo el que da la expresión :

$$t = \int_{V_1}^{V_2} \frac{LdV}{g(y - c)(V^2 - V_1^2)}$$

siendo además $cz^2 = y + cV_1^2$

CAPÍTULO VII

VALORES MEDIOS. MEDIAS CUADRÁTICAS. VOLÚMENES. LONGITUDES DE ARCOS. AREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN. CENTROS DE GRAVEDAD. MOMENTOS DE INERCIA.

DETERMINACIÓN DE VALORES MEDIOS. — Es con frecuencia necesario calcular el valor medio de una cantidad variable. Así, si una fuerza variable actúa contra una resistencia, el trabajo efectuado dependerá del valor medio de la fuerza. En electricidad, si conocemos los valores de la corriente y de la fuerza electromotriz en distintos momentos, durante el paso de la corriente el incremento medio del trabajo es igual al valor medio de su producto.

El *valor medio, promedio* o también *media* de una serie de valores se obtiene sumando los valores y dividiendo por su número. Si se traza una curva cuya ordenada dé la magnitud de la cantidad variable correspondiente a cada abscisa, el valor medio de la cantidad vendrá determinado por la altura media de la curva, o sea, su área dividida por la longitud de su base, lo que equivale a la definición indicada en el caso en que crece indefinidamente el número de ordenadas medidas.

Puede medirse el área por medio de un planímetro, en cuyo caso se puede disponer el aparato para que marque directamente la altura media, o por alguno de los métodos expuestos en la parte I, capítulo VII.

Para aclarar el concepto de valor medio considérense los ejemplos siguientes, el primero de los cuales es puramente aritmético.

Ejemplo 1. — Los valores correspondientes de una corriente y de la fuerza electromotriz que la produce son:

C	0	1,8	3,5	5	6,1	6,8	6,1	5	3,5	1,8
F E. M.	0	9	17,5	25	30,5	34	30,5	25	17,5	9

Hallar el valor medio de la potencia en el intervalo a que se refieren estos valores. La potencia viene medida por el producto P=C × F. E. M.

Luego los valores de la potencia son:

0 16,2 61,25 125 186,05 231,2 186,05 125 61,25 16,2

Cuya suma es 1008,2. Como son 10 los valores, el promedio será

$$\frac{1008{,}2}{10} = \underline{100{,}82.}$$

Se obtiene probablemente mejor resultado trazando la curva con los valores de la potencia, y determinando su área. Así en la figura 39, en

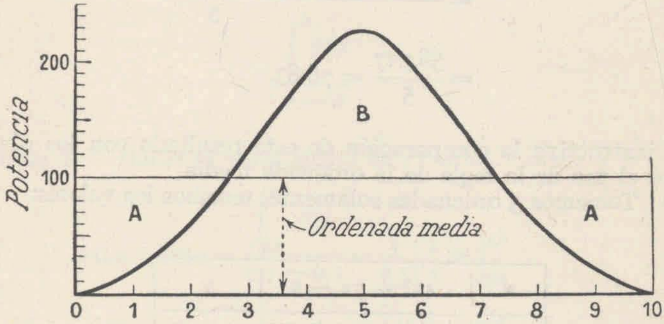


Fig. 39

la que, para mayor comodidad, se toma la base igual a 10 unidades el área medida resulta igual a 1013 unidades cuadradas.

La ordenada o altura media es pues $= \frac{1013}{10} = 101{,}3$ que nos da el valor medio de la potencia. La línea horizontal trazada a la altura 101,3 unidades divide el área en tres zonas tales que B = A + A.

Supongamos que queremos ahora hallar el valor medio de una una función $y = 4x^2 + 7x - 5$, cuando x varía entre 1 y 6. Ya sabemos que hay que empezar por determinar el área entre la curva, el eje Ox y las ordenadas $x = 1$, $x = 6$, y luego, dividir por la longitud de base. Como conocemos la relación entre y y x podemos proceder, sin necesidad del método gráfico, por una integración puramente algébrica; de este modo se obtiene además el resultado exacto, ya que en realidad el valor medio se refiere en este caso a un número infinito de ordenadas.

El área será: $\int_1^6 y dx = \int_1^6 (4x^2 + 7x - 5)\, dx.$

La base $= 6 - 1 = 5.$

$$\text{El valor medio} = \frac{\int_1^6 (4x^2 + 7x - 5)dx}{5}$$

$$= \frac{\left[\frac{4x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x\right]_1^6}{5}$$

$$= \frac{\left(\frac{4 \times 216}{3}\right) + \left(\frac{7 \times 36}{2}\right) - 30 - \frac{4}{3} - \frac{7}{2} + 5}{5}$$

$$= \frac{384{,}17}{5} = 76{,}83.$$

Es instructiva la comparación de este resultado con los obtenidos por el uso de la regla de la ordenada media.

(*a*) Tomemos 5 ordenadas solamente, tenemos los valores:

x	$4x^2 + 7x - 5$	y
$1\frac{1}{2}$	$9 + 10{,}5 - 5$	14,5
$2\frac{1}{2}$	$25 + 17{,}5 - 5$	37,5
$3\frac{1}{2}$	$49 + 24{,}5 - 5$	68,5
$4\frac{1}{2}$	$81 + 31{,}5 - 5$	107,5
$5\frac{1}{2}$	$121 + 83{,}5 - 5$	154,5

Suma = 382,5

$$\text{Promedio} = \frac{382{,}5}{5} = \underline{76{,}5}$$

(*b*) Tomemos 10 ordenadas, $x = 1\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{4}$, etc, que dan $y = 10$, 19,5, 31, 44,5, 60, 77,5, 97, 118,5, 142, 167,5.

Suma = 767,5

Promedio = 76,75.

De modo que cuantas más ordenadas se toman, más se acerca el resultado al valor exacto. Como la curva es una parábola de eje vertical, la regla de Simpson dará un resultado exacto con sólo tres ordenadas, por ejemplo, $x = 1$, $x = 3{,}5$ y $x = 6$, que dan

$A = 6$, $M = 68{,}5$, $B = 181$

$$\text{Promedio} \quad = \frac{6 + (4 \times 68{,}5) + 181}{6}$$

$$= \frac{461}{6} = 76{,}83.$$

Así, pues, si se conoce la ley que liga dos variables, el valor medio de una de ellas en relación con la variación de la otra se hallará integrando la primera como función de la segunda entre los límites dados y dividiendo después por la longitud de este intervalo, o sea, expresado en símbolos, si $y = f(x)$, el valor medio de y cuando x varía de a a b, será

$$\frac{\int_a^b y dx}{b - a}$$

Ejemplo 2. — Hallar el valor medio de e^{5x} entre $x = 0{,}2$ y $x = 0{,}7$

$$\text{valor medio} = \frac{\int_{0,2}^{0.7} e^{5x} dx}{0{,}7 - 0{,}2} = \frac{1}{0{,}5}\left[\frac{1}{5} e^{5x}\right]_{0,2}^{0,7}$$

$$= \frac{2}{5}[e^{3,5} - e^{1,0}]$$

$$= \frac{2}{5}[33{,}12 - 2{,}72]$$

$$= \underline{12{,}16.}$$

Si, por lo tanto, se trazase la curva $y = e^{5x}$ su ordenada media entre $x = 0{,}2$ y $x = 0{,}7$ sería 12,16.

Ejemplo 3. — Si $C = 5$ sen $3t$, hallar el valor medio de C.

Cuando (*a*) t varía entre 0 y $\frac{2\pi}{3}$

» (*b*) t » » 0 y $\frac{\pi}{3}$.

Cuando se trata de funciones trigonométricas, es conveniente comenzar por determinar el período de la función, pues de este modo se suele ahorrar mucha labor numérica. La curva del seno y la del coseno están constituídas por trozos que se repiten simétricamente a uno y otro lado del eje de la variable independiente (x o t según los casos), por lo tanto si se considera un período completo o un múltiplo del período, habrá tanta área a un lado como a otro de este eje. Si se considera el área que está por encima del eje como positiva y la que está debajo como negativa, el área total por período será pues nula; la ordenada media de la curva, y por consiguiente, el valor medio de la función serán también nulos. Volvamos al ejemplo.

El período de $$C = 5 \text{ sen } 3t$$

será $$\frac{2\pi}{\text{coef. de } t} = \frac{2\pi}{3}.$$

Por lo tanto, el valor medio en los intervalos

$$0 - \frac{2\pi}{3}, \quad 0 - \frac{4\pi}{3}, \quad \text{etc., será nulo.}$$

En consecuencia, cuando el cálculo da una base igual a un número entero de períodos, no hace falta integral. Integremos, sin embargo, aquí, como comprobación.

$$(a) \quad \text{valor medio de } C = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{5 \text{ sen } 3t\, dt}{\frac{2\pi}{3} - 0} = \frac{3 \times 5}{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\cos 3t\right)_0^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$= -\frac{5}{2\pi}(\cos 2\pi - \cos 0)$$

$$= -\frac{5}{2\pi}(1 - 1) = \underline{0.}$$

$$(b) \quad \text{valor medio de } C = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{5 \text{ sen } 3t\, dt}{\frac{\pi}{3} - 0} = \frac{3}{\pi} \times 5\left(-\frac{1}{3}\cos 3t\right)_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\frac{5}{\pi}(\cos \pi - \cos 0)$$

$$= -\frac{5}{\pi}(-1 - 1) = \underline{\frac{10}{\pi}}.$$

Si comparamos con la amplitud, que es la ordenada máxima de la curva y cuyo valor es $5 \text{ sen } \frac{\pi}{2} = 5$, observamos que

$$\frac{\text{Ordenada media correspondiente a } \frac{1}{2} \text{ período}}{\text{Ordenada máxima correspondiente a } \frac{1}{2} \text{ período}} = \frac{10}{\pi \times 5} = \frac{2}{\pi} = 0{,}637.$$

La altura media de una sinusoide es pues siempre $0{,}637 \times$ altura máxima.

Ejemplo 4. — Sea una corriente alterna de la forma

$$C = 0{,}5 \text{ sen } 120\pi t + 0{,}06 \text{ sen } 600\pi t$$

Hallar el valor medio de C.

El método gráfico será muy útil. En la figura 40 se han trazado las curvas

$$c_1 = 0{,}5 \text{ sen } 120\pi t.$$

$$c_2 = 0{,}06 \text{ sen } 600\pi t.$$

$$C = c_1 + c_2 = 0{,}5 \text{ sen } 120\pi t + 0{,}06 \text{ sen } 600\pi t.$$

El período de $c_1 = 0{,}5$ sen $120\pi t$, es $\frac{2\pi}{120\pi} = \frac{1}{60}$.

El de $c_2 = 0{,}06$ sen $600\pi t$, es $\frac{2\pi}{600\pi} = \frac{1}{300}$.

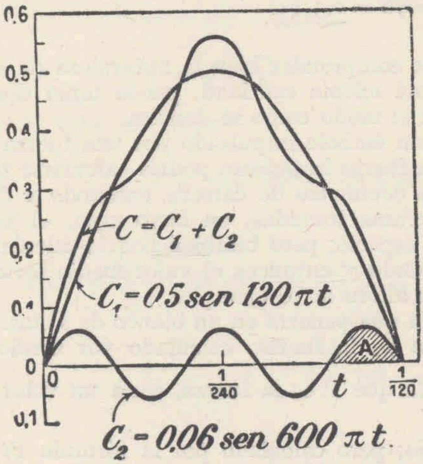


Fig. 40. — Problema sobre una corriente alterna

El de la curva completa es pues $\frac{1}{60}$.

Resulta del razonamiento del ejemplo anterior que la altura media de la curva $c_1 = 0{,}5$ sen $120\pi t$ en el intervalo $\frac{1}{120}$, es igual a $0{,}637 \times$ altura máxima $= 0{,}637 \times 0{,}5 = 0{,}3185$. En cuanto a la altura media de $c_2 = 0{,}06$ sen $600\pi t$, considerada en el mismo intervalo, se obtendrá dividiendo el área por la base. Como el intervalo $\frac{1}{120}$, comprende dos períodos completos de $\frac{1}{300}$ de la función y las áreas correspondientes son nulas, queda el área A (véase la figura) a dividir por el intervalo $\frac{1}{120}$ que es igual a 5 veces su propio intervalo $\frac{1}{600}$.

Así, pues, el valor medio de c_2 en el intervalo $\frac{1}{120}$

$$= \frac{\text{valor medio correspondiente al intervalo } \frac{1}{600}}{5}$$

$$= \frac{0{,}637 \times 0{,}06}{5} = 0{,}0076$$

Luego, valor medio de C = valor medio de c_1 + valor medio de c_2 = 0,3185 + 0,0076 = 0,3261.

Es menester comprender bien la naturaleza de estos valores medios, porque una misma cantidad, puede tener dos valores medios distintos según el modo como se definen.

Supóngase un émbolo impulsado por una fuerza variable. El valor medio de la fuerza impulsora podría calcularse tomando una lectura para cada decímetro de carrera, sumando y dividiendo por el número de lecturas tomadas, en cuyo caso, el valor medio sería con relación al espacio; pero también podría calcularse haciendo lecturas cada segundo y entonces el valor medio sería con relación al tiempo. Demos ahora otros ejemplos.

Sea una bala que penetra en un blanco de s cms. de profundidad. El valor medio de la fuerza, calculado por medio de la fórmula, $Ps = \frac{mv^2}{2g}$, en la que P es la fuerza, sería un valor medio con relación al espacio; pero calculado por la fórmula $Pt = \frac{mv}{g}$, daría la fuerza que produce en el tiempo t la pérdida de cantidad de movimiento y sería un valor medio respecto del tiempo.

Ilustremos con un ejemplo estas definiciones. Un móvil parte del equilibrio con una velocidad que crece uniformemente, a razón de 4 cms. por segundo. Hallar los valores medios de la velocidad con respecto al tiempo, y al espacio, si se considera un movimiento de 6 segundos de duración.

(Empléense las fórmulas $s = \frac{1}{2}at^2$, $v = at$, $v^2 = 2as$).

Tendremos, $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}4 \times 6^2 = 72.$

Luego cuando t varía de 0 a 6, s varía de 0 a 72.

Para hallar el valor medio de la velocidad con relación al tiempo, haremos el cálculo siguiente:

$$P_t(v) = \frac{\int_0^6 vdt}{6-0} = \frac{\int_0^6 atdt}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}at^2\right]_0^6 = \frac{1}{12} \times 4\,[36-0]$$

$$= 12 \text{ cm. por segundo.}$$

Para el valor medio respecto del espacio, tenemos

$$v^2 = 2as = 8s,$$

o sea,
$$v = \sqrt{8}\sqrt{s}$$

y por consiguiente valor medio de

$$v = \text{valor medio de } \sqrt{8}s^{\frac{1}{2}}.$$

Luego,
$$P_s(v) = \frac{\int_0^{72} \sqrt{8}s^{\frac{1}{2}}ds}{72-0} = \frac{1}{72} \times \sqrt{8}\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_0^{72}$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{72} \times \frac{2}{3}[72^{\frac{3}{2}} - 0]$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{108}[432\sqrt{2}]$$

$$= \frac{432 \times 4}{108} = 16 \text{ cm. por segundo.}$$

$P_t(v)$ y $P_s(v)$, representan estos valores medios o promedios, con relación al tiempo y al espacio respectivamente.

Ejemplo 5. — La resistencia eléctrica de un reostato a la temperatura t^o C., resulta de la fórmula.

$$R_t = 38\,(1 + 0{,}004t).$$

Hallar la resistencia media cuando t varía de 10° a 40° C.
(Se trata de un valor medio respecto de la temperatura).

$$P_t(R_t) = \frac{\int_{10}^{40} R_t dt}{40 - 10} = \frac{1}{30}\int_{10}^{40} 38\,(1 + 0{,}004t)dt$$

$$= \frac{38}{30}\left(t + 0{,}002t^2\right)_{10}^{40}$$

$$= \frac{38}{30}\,[40 + 3{,}2 - 10 - 0{,}2]$$

$$= \frac{38 \times 33}{30}$$

$$= \underline{41{,}8.}$$

Ejemplo 6. — Si $V = V_0 \operatorname{sen} qt$ y $C = C_0 \operatorname{sen}(qt - c)$ hallar el valor medio de VC (potencia).

$$VC = V_0 \operatorname{sen} qt \times C_0 \operatorname{sen}(qt - c)$$

$$= \frac{V_0C_0}{2}\,[2 \operatorname{sen} qt \operatorname{sen}(qt - c)]$$

$$= \frac{V_0C_0}{2}\,[\cos c - \cos(2qt - c)]$$

con un período $= \dfrac{2\pi}{q}$.

Luego: Valor medio de (VC)

$$= \frac{\frac{V_0C_0}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{q}} [\cos c - \cos(2qt - c)]\,dt}{\frac{2\pi}{q}}$$

$$= \frac{V_0C_0q}{4\pi}\left[\cos c \times t - \frac{1}{2q}\operatorname{sen}(2qt - c)\right]_0^{\frac{2\pi}{q}}$$

$$= \frac{q}{2\pi} \times \frac{V_0C_0}{2}\left[\frac{2\pi}{q}\cos c - \frac{1}{2q}\operatorname{sen}(4\pi - c) - 0 + \frac{1}{2q}\operatorname{sen}(-c)\right]$$

$$= \frac{V_0C_0q}{4\pi} \times \frac{2\pi}{q}\cos c \qquad \left[\begin{array}{l}\text{porque } \operatorname{sen}(4\pi - c) = \operatorname{sen}(-c) \\ -\operatorname{sen}(-c) + \operatorname{sen}(-c) = 0\end{array}\right]$$

$$= \underline{\frac{1}{2} V_0C_0 \cos c}$$

esto es, el valor medio de la potencia $= \frac{1}{2}$ de los productos de los valores máximos o amplitudes por el coseno del ángulo de retraso de fase. *Este resultado es muy importante.*

Si $c = 90^{o}$, o sea el retraso de fase $\frac{\pi}{2}$, entonces $\cos c = 0$, y los valores medios de la potencia en vatios $= \frac{1}{2} V_0 \times C_0 \times 0 = 0$, lo cual se verifica en el caso de la llamada *corriente anergética.*

Ejercicios 16. — Sobre valores medios

1. Si un gas se dilata según la ley $pv = 1,2$, hallar la presión media entre los volúmenes 2 y 4.

2. Hallar el valor medio de $e^{2.5y}$ cuando y varía entre 0 y 0,4.

3. Hallar la altura media de $q = 3x^3 + 5x - 7$ entre $x = -2$ y $x = +3$.

4. Hallar el valor medio de $2,18 \operatorname{sen} (3t - 1,6)$ cuando t varía entre 0,14 y 1,6.

5. Hallar el valor medio de $4,5 + 2 \operatorname{sen} 60t$ cuando t varía entre 0 y $\frac{\pi}{30}$. Resolver la cuestión gráficamente.

6. Hallar el valor medio de p siendo $pv^{1,37} = 0,865$ (*), y variando v entre 0,25 y 1,37.

7. La intensidad de iluminación I (en bujías-metro) de un arco colocado a 6,6 metros sobre el suelo, en función de la distancia d en m. al pie de la lámpara, es $I = 15,6 - 0,37d$ (**). Hallar la iluminación media, cuando d varía desde 0,15 m. hasta 3 m.

8. Se da una corriente alterna $C = 0,2 \operatorname{sen} 100\pi t + 0,01 \operatorname{sen} 300\pi t$. Hallar su valor medio cuando t varía de 0 a 0,02 segundos.

9. Dada la corriente anterior, hallar su valor medio, cuando t varía de 0 a 0,01 segundos.

10. Hallar el valor medio de $5 \operatorname{sen} 6t \times 220 \operatorname{sen} 4t$, cuando t varía entre 0 y $\frac{\pi}{3}$.

(*) Esta fórmula se refiere a la expansión de un gas; p es la presión en kg. por cm.^{2}; v es el volumen específico en m.^{3} por kg. *(N. del T).*

(**) Esta fórmula sólo es válida para puntos no muy alejados del pie del arco y procede de la reducción aproximada al sistema métrico de la fórmula inglesa $I = 1,4 - 0,01d$ (I en foot-candle, y d en pies). *(N. del T).*

11. La tabla siguiente da los valores de la presión a ambos lados del émbolo de un motor de aeroplano 160 H. P. Mercedes, para distintas posiciones del cigüeñal. Los valores positivos son los que se ejercen sobre la pared derecha, y los negativos los de la pared izquierda del pistón.

Angulo de la manivela con el punto muerto superior	0	40	80	100	120	140	160	180	200	240	280	300	320	330	345	360	10	40	80	120	160	180	200	220	240	260	280	290	320	360
Presión total (Kilos)	0	+95	0	—77	—79	—84	—45	0	+43	+109	+45	0	—14	0	+9,1	0	—270	—355	—325	—265	—77	0	+41	+77	+72	+68	+23	0	—95	0

Represéntense estos valores, considerándolos todos como positivos y determínese el valor medio de la presión durante el ciclo.

MEDIA CUADRÁTICA. — Puede medirse una corriente continua por cualquiera de sus tres efectos — descomposición química, efecto magnético, efecto calorífico. Pero en el caso de la corriente alterna, cuyo sentido cambia constantemente, los dos primeros efectos no sirven para la medida, puesto que los efectos, ya químicos, ya magnéticos, producidos por el paso en un sentido se neutralizan por el paso en sentido contrario. Por consiguiente, la medida de la corriente alterna debe hacerse por medio de su efecto calorífico. Este efecto C en unidades caloríficas, se mide por medio de la fórmula

$$C = \frac{I^2Rt}{J} \text{ en la que I es la corriente.}$$

Se ve, pues, que C varía como I^2.

Los instrumentos de medida están graduados de modo que aprecían la raíz cuadrada del valor medio del efecto calorífico, es decir, la raíz cuadrada del valor medio de los cuadrados de la intensidad (llamada *media cuadrática*) en otros términos, el instrumento acusa amperios virtuales, entendiéndose por amperio virtual, la corriente que produce en una resistencia dada y en un tiempo dado igual calor que un amperio en corriente continua y constante.

Pueden también emplearse amperímetros del tipo electro-dinamómetro, en cuyo caso lo que se observa es el promedio de I^2 cuya raíz cuadrada se llama corriente eficaz.

Iguales observaciones se aplican a la medida de la F. E. M.

Es pues, necesario saber determinar medias cuadráticas y saber comparar los valores virtuales con los valores estacionarios.

La determinación de medias cuadráticas es de la mayor importancia para la aplicación a problemas de electricidad y es en ocasiones aplicable a problemas de mecánica. Así, el cálculo del radio de giro es en realidad una determinación de una media cuadrática.

Veamos ahora, a fin de aclarar el concepto, un ejemplo aritmético sencillo, seguido de varios algebraicos y finalmente de casos sobre funciones trigonométricas.

Ejemplo 7. — Los valores de una corriente alterna, en varios tiempos dados, resultan de la tabla siguiente:

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
I	0	1,8	3,5	5	6,1	6,8	6,1	5	3,5	1,8	0

Hallar el promedio, así como la media cuadrática y comparar ambos valores.

El promedio se obtiene como se ha explicado anteriormente y es 3,96.

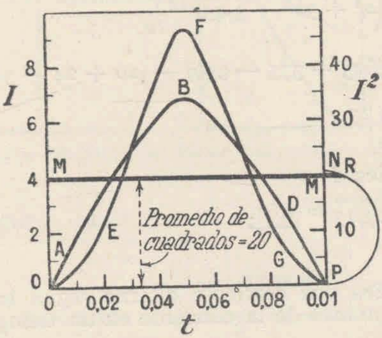


Fig. 41. — Media cuadrática de una corriente alterna

Los cuadrados son

0   3,24   12,25   25   37,21   46,24   37,21   25   12,25   3,24   0

cuya suma es $= 201,64$

y cuyo promedio es $= \dfrac{201,64}{10}$

(siendo el denominador 10 y no 11 porque los valores finales no cuentan más que por mitad cada uno, puesto que pertenecen por igual a las series limítrofes).

Luego: Media cuadrática $= \sqrt{20,16} = \underline{4,5}$.

Este problema puede resolverse gráficamente del modo siguiente:
Se traza la curva de I sobre una base de t, lo que da el perfil ABD (fig. 41). Se calcula el área y se divide por la base, lo cual da la altura media o promedio. Se traza luego la curva de I^2 = EFG. Se determina el área EFG y se traza MM a la altura media de esta curva. Sea MN = 1 unidad en la escala de las I^2 y descríbase un semi-círculo sobre PN; MM corta a este semi-círculo en R. MR = 4,5 = media cuadrática.

Así, pues, el valor medio es 3,96 y la media cuadrática es 4,5. La razón entre ambos $= \dfrac{4{,}5}{3{,}96} = \underline{1{,}14}$, se llama *factor de forma.*

Ejemplo 8. — Hallar la media cuadrática de $y = 2x^{1,5} - 3x$ cuando x varía de 2 a 5.

$$y^2 = (2x^{1,5} - 3x)^2 = 4x^3 + 9x^2 - 12x^{2,5}$$

Valor medio de y^2

$$= \frac{\int_2^5 (4x^3 + 9x^2 - 12x^{2,5})dx}{5 - 2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^4 + 3x^3 - 3{,}43x^{3,5}\right)_2^5$$

$$= \frac{1}{3}(625 + 375 - 959) - (16 + 24 - 38{,}8)$$

$$= 13{,}27.$$

Y por lo tanto

Media cuadrática de y

$$= \sqrt{13{,}27} = \underline{3{,}64.}$$

Desarrollo del cálculo

N.º	Log.
5	0,6990
	3,5
	34950
	20970
	2,44650
3,43	0,5353
959	2,9818
2	0,3010
	3,5
	15050
	9030
	1,05350
3,43	0,5353
38,8	1,5888

Ejemplo 9. — Sea una corriente alterna según la ley $I = I_0$ sen qt
I = valor instantáneo de la corriente en un tiempo t e I_0 valor máximo.

Hallar la media cuadrática.

Comenzaremos por hallar el cuadrado de la función en varios instantes, luego tomar el promedio y por último extraer la raíz.

Para facilitar el estudio de este importante problema, se ha trazado en la figura 42 la curva y = sen x, así como la curva y = sen^2 x, obtenida con los cuadrados de las ordenadas de la anterior. Se observará que mientras en la primera las ordenadas son ya positivas, ya negativas, la segunda sólo las tiene positivas. Asimismo, el período de la curva de los cuadrados es la mitad del de la curva primitiva. Por lo tanto, al calcular la altura media de esta curva, poco importa que se considere el período entero o medio período de la curva del seno. En el caso en cuestión, el cuadrado es $I_0^2 \operatorname{sen}^2 qt = \dfrac{I_0^2}{2}(1 - \cos 2qt)$, cuyo período es $\dfrac{2\pi}{2q}$, de modo que la integración podrá hacerse indistintamente sobre la base, o a $\frac{2\pi}{q}$ o bien, o a $\frac{\pi}{q}$.

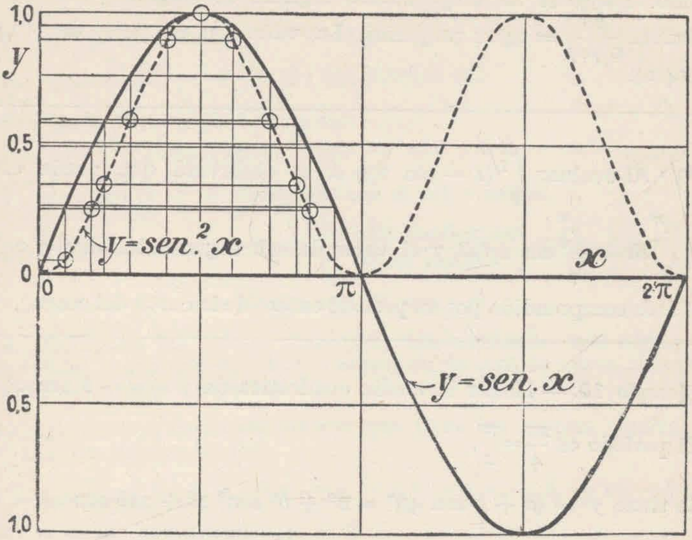


Fig. 42. — Media cuadrática de una corriente alterna

Tomando la segunda base

$$\text{valor medio de los cuadrados} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{q}} I_0^2 \operatorname{sen}^2 qt\, dt}{\frac{\pi}{q}}$$

$$= \frac{qI_0^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{q}} (1 - \cos 2qt)\, dt \quad (*)$$

$$= \frac{qI_0^2}{2\pi} \left[\left(t - \frac{1}{2q} \operatorname{sen} 2qt\right) \right]_0^{\frac{\pi}{q}}$$

$$= \frac{qI_0^2}{2\pi} \left[\frac{\pi}{q} - \frac{1}{2q} \operatorname{sen} 2\pi - 0 + \frac{1}{2q} \operatorname{sen} 0 \right]$$

$$= \frac{qI_0^2}{2\pi} \times \frac{\pi}{q} = \frac{I_0^2}{2}.$$

Y la media cuadrática $= \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ I_0;$

luego el valor eficaz de la corriente o de la F. E. M. = 0,707 de su valor máximo. Luego si un amperímetro registra 10 amperios, la corriente máxima es $\frac{10}{0{,}707} = 14{,}14$ amperios. La variación es, pues, de + 14,14 a — 14,14.

(*) Al evaluar $\int_0^{\frac{\pi}{q}} (1 - \cos 2qt)\, dt$ se observará que puede escribirse $\int_0^{\frac{\pi}{q}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{q}} \cos 2qt\, dt$, y el valor de este segundo término = 0, por ser el área comprendida por un período entero de la curva del coseno.

Ejemplo 10. — Hallar la media cuadrática de $y = a + b$ sen $4t$.

El período es $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Se tiene $y^2 = (a + b \operatorname{sen} 4t)^2 = a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 4t + 2ab \operatorname{sen} 4t =$

$$= a^2 + \frac{b^2}{2}(1 - \cos 8t) + 2ab \operatorname{sen} 4t$$

Luego: valor medio de cuadrados

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2 + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} \cos 8t + 2ab \operatorname{sen} 4t\right) dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^2}{2} \cos 8t dt + 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 4t\, dt \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(a^2 t + \frac{b^2 t}{2} - 0 + 0\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(a^2 \frac{\pi}{2} + \frac{b^2}{2}\frac{\pi}{2}\right) = a^2 + \frac{b^2}{2}$$

y media cuadrática

$$= \underline{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}}.$$

Ejercicios 17. — Sobre medias cuadráticas

Hallar las medias cuadráticas de las funciones de los números 1 a 7.

1. $x^3 + 2$ (x varía de 1 a 3).

2. e^{-7x} (x varía de $-0,1$ a $+0,65$).

3. $3,4 \operatorname{sen} 5,1t$. **4.** $0,165 \cos (0,07 - 2t)$.

5. $1,4 \operatorname{tg} 2t$ (t varía de 0 a 0,43).

6. $1,14 + 0,5 \cos 0,8t$.

7. $0,72 \operatorname{sen} (3 - 4t)$. Comparar con el valor medio.

8. Hallar el factor de forma $\left(\frac{\text{media cuadrática}}{\text{valor medio}}\right)$ de la onda

$$e = E_1 \operatorname{sen} pt + E_3 \operatorname{sen} 3\,pt.$$

9. Comparar los valores eficaces de dos corrientes, una cuya curva es sinusoidal, y con máximo de 100 amperios, la otra de curva triangular con máximo de 150 amperios.

10. Se da una corriente alterna que tiene los valores siguientes a intervalos de tiempo iguales.

3, 4, 4,5, 5,5, 8, 10, 6, 0, — 3, — 4, — 4,5, — 5,5, — 8, — 10, —6, 0.

Hallar la media cuadrática.

11. Cierto número de masas iguales están unidas a los extremos de sendas barras, que giran alrededor de un mismo eje. Si las longitudes de estas barras son respectivamente, 10, 9, 5, 8, 4, 13 y 15 cms. respectivamente, hallar el radio eficaz o de giro del sistema.
(Se busca la media cuadrática de los radios).

12. Hallar la media cuadrática de la función $\operatorname{sen}^2 \theta \cos^3 \theta$ en el período $0 - \frac{\pi}{2}$ (véase, pág. 182).

13. El valor de la corriente primaria en cierto transformador, a intervalos iguales, es:

0,20, 0,05, 0,07, 0,11, 0,14, 0,19, 0,21, 0,04, 0,08, 0,12, 0,15, 0,18, 0,21, 0,08, 0,04.

Hallar la media cuadrática de la corriente.

VOLÚMENES. — Si se traza una curva cuyas ordenadas sean los valores de las secciones transversales de un sólido en los distintos puntos de su longitud, el área comprendida entre la curva y el eje representará, a cierta escala, el volumen del sólido. En efecto, considerando un pequeño elemento de longitud δl, si el área media correspondiente a este elemento es A, el volumen δV de la porción del sólido será $A\delta l$ y el volumen total del sólido es la suma de todos estos pequeños volúmenes, $= \Sigma A\delta l$. Cuando δl tiende hacia o, $\Sigma A\delta l$ tiende hacia $\int A dl$ y por lo tanto

$$V \text{ (volumen del sólido)} = \int_0^l A dl.$$

Si se compara este resultado con la fórmula que da el área de una figura cerrada $\int y dx$, se observará que ambas son de igual forma y pueden hacerse idénticas si se escribe A en vez de y (esto es, si se representan las áreas por ordenadas) y l en vez x (o sea las longitudes por abscisas).

Cuando se conocen los valores de A y l se puede trazar e integrar la curva por cualquiera de los métodos dados, y si se prefiere hallar primero el área de la figura en centímetros cuadrados, se deducirá el volumen teniendo en cuenta la escala utilizada. Así, si 1 cm. (horizontal) representa x cms. de longitud y 1 cm. (vertical) representa y cms. cuadrados de área, 1 cm. cuadrado del área de la figura representa xy cm. cúbicos del volumen; o, si se prefiere un ejemplo numérico, si 1 cm. (horizontal) = 15 cm. longitud y 1 cm. (vertical) = 5 cm. cuadrados de sección, 1 cm. cuadrado del área de la curva = $5 \times 15 = 75$ cm. cúbicos del sólido. Si se halla el área de la figura por medio de la curva integral esta conversión no es necesaria puesto que ya está implícita en el método gráfico de integración. El ejemplo de la página 134 es un caso de determinación de volúmenes por integración gráfica. En éste, las áreas de las secciones no se trazan directamente, sino tan sólo los valores de d^2, dejando la multiplicación por el factor constante para el final.

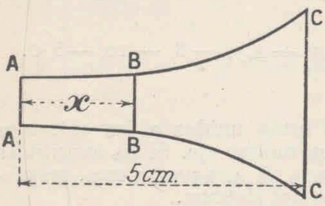


Fig. 43

Si el sólido no hubiese tenido sección circular, se habrían tomado directamente las secciones como ordenadas continuando el cálculo como se ha dicho antes. Vemos, pues, que la determinación del volumen de cualquier sólido irregular puede hacerse por un proceso de integración gráfica si se conocen secciones transversales paralelas a varias distancias de un extremo. Si se conoce la ley general de variación de estas secciones, puede ser más ventajoso buscar el resultado por un proceso analítico de integración.

Ejemplo 11. — La sección transversal de un sólido dado es $=(5x^3+8)$ centímetros cuadrados, siendo x la distancia en centímetros de la sección a un extremo. Hallar el volumen sabiendo que la longitud del sólido = 5 cms.

El cuerpo podría tener una proyección como indica la figura 43. La forma de sus secciones puede ser cualquiera, la única condición es que el área de toda sección BB sea $= 5x^3 + 8$. De modo que $AA = (5 \times 0) + 8 = 8$, y $CC = 5 \times 5^3 + 8 = 633$.

$$V = \int_0^5 A dx = \int_0^5 (5x^3 + 8)\, dx = \left(\frac{5x^4}{4} + 8x\right)_0^5 = \frac{3125}{4} + 40 = \underline{821{,}25 \text{ cms.}^3}$$

VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN. — Engéndrase un sólido de revolución por el giro de una figura cerrada en torno de un eje que no la corta. Así, limitándonos a figuras corrientes, el

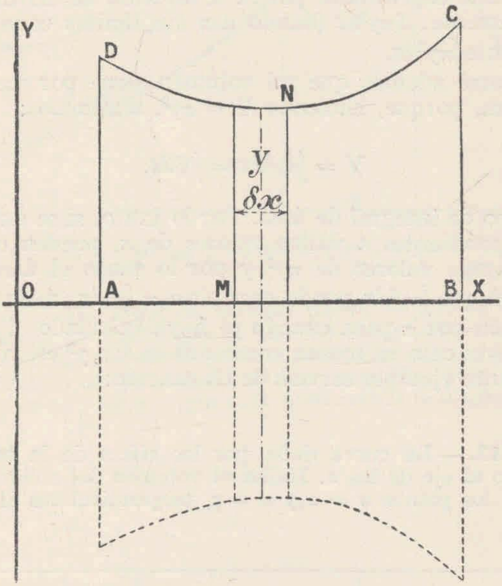


Fig. 44. — Volumen de un sólido de revolución

cono circular recto, el cilindro y la esfera son sólidos de revolución, engendrados respectivamente por el giro de un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos, un rectángulo en torno a uno de sus lados y un semicírculo en torno a su diámetro. Entre los menos conocidos, el más importante para el ingeniero es el hiperboloide de revolución, que resulta de la revolución de una hipérbola alrededor de uno de sus ejes, y se presenta en el diseño de las turbinas. El eje de revolución en todos estos casos forma parte del contorno de la figura giratoria, mientras que en el toro, engendrado por la rotación de un círculo, el eje de revolución es exterior al círculo generador.

La figura giratoria puede ser de cualquier forma.

Las únicas condiciones indispensables para la validez de la regla siguiente, son que el eje no corte la figura y que la sección perpendicular al eje sea circular.

Supongamos que la figura giratoria es del tipo indicado en el esquema ABCD (fig. 44), y sea el eje de revolución el de las x. Se pide el volumen del sólido de revolución engendrado.

Razonando de acuerdo con los primeros principios, es decir, volviendo al concepto de operar sobre un pequeño elemento y sumar después, tendremos que si la faja MN de altura, y, con un espesor δx gira en torno a OX, engendrará un cilindro. El radio de este cilindro será y, su altura o longitud δx; luego su volumen será $\pi y^2 \delta x$.

El volumen engendrado por la revolución de ABCD será pues, aproximadamente, $\Sigma \pi y^2 \delta x$ (dando a x sus límites correspondientes) y exactamente $\int \pi y^2 dx$.

Puede verse además que tal volumen tiene por medida el área de una figura, porque, haciendo $Y = \pi y^2$, tendremos:

$$V = \int \pi y^2 dx = \int Y dx.$$

que es el tipo de integral de área. Por lo tanto, si se dan los valores de y correspondientes a varios valores de x, pueden calcularse los correspondientes valores de πy^2 y por lo tanto el área resultante. Se observará que $\int \pi y^2 dx$ puede escribirse $\pi \int y^2 dx$, reservando así la multiplicación por π para cuando se haya calculado el área. Es decir que en este caso se toman como ordenadas y^2 en vez de πy^2.

El siguiente ejemplo servirá de ilustración:

Ejemplo 12. — La curva dada por las cifras de la tabla adjunta, gira en torno al eje de las x. Hallar el volumen del sólido engendrado, limitado por los planos $x = 2$ y $x = 7$, perpendiculares al eje de revolución.

x	2	3	4	5	6	7
y	44	42	44	46	45	38

Calculemos los valores correspondientes de y^2.

x	2	3	4	5	6	7
y^2	1936	1764	1936	2116	2025	1444

y los valores de y^2 trazados por puntos sobre las ordenadas suministran la curva ABC (fig. 45). Se integra después esta curva tomando como base el eje de las x y resulta la curva integral DEF. Se ha tomado la distancia

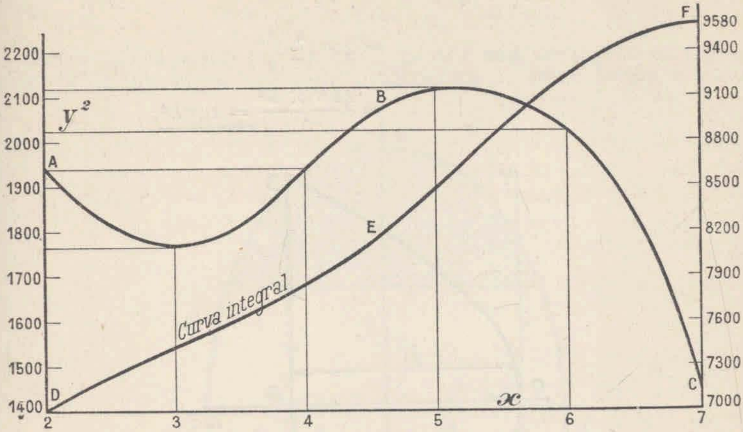


Fig. 45. — Volumen de un sólido de revolución

polar = 3, de modo que la escala vertical nueva = 3 veces la antigua. Pero se ha de tener en cuenta que la base de integración no es la verdadera, puesto que el valor de la primera ordenada es 1400 y no 0, por lo cual se ha omitido un rectángulo = 1400 × 5. Hay pues que empezar la escala nueva en 7000 y según esta numeración la última ordenada resulta = 9580.

Por lo tanto

$$V = \pi \int_2^7 y^2 \, dx$$

$$= \pi \times 9580$$

$$= \underline{30100} \text{ unidades cúbicas}$$

Cuando y y x se hallan relacionados por una ley, la integración puede llevarse a cabo según las reglas para la integración de funciones.

Ejemplo 13. — Hallar el volumen de un paraboloide de revolución y compararlo con el del cilindro circunscrito. El paraboloide de revolución resulta de la revolución de una parábola en torno a su eje. Supóngase una parábola situada como en la figura 46. La revolución tendrá lugar en torno a Ox.

La ecuación de la curva OB será $y^2 = 4ax$ (véase, parte I, pág. 129), es decir, que si OA = h, $(AB)^2 = 4ah$.

El volumen del sólido engendrado por OBA será, pues:

$$= \int_0^h \pi y^2 dx = \pi \int_0^h 4axdx$$

$$= 4a\pi \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^h$$

$$= \frac{4a\pi \times h^2}{2} = \underline{2a\pi h^2}.$$

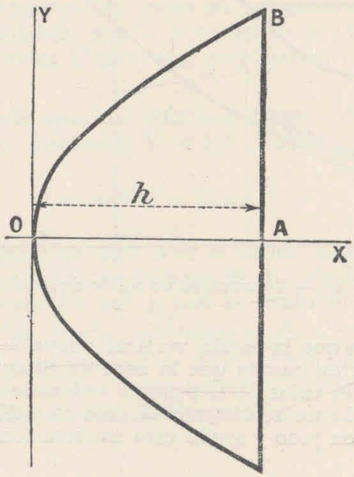


Fig. 46

El volumen del cilindro circunscrito.

$$= \pi\ (\mathrm{AB})^2 \times h$$

$$= \pi \times 4ah \times h$$

$$= 4a\pi h^2$$

luego el volumen del paraboloide

$$= \underline{\frac{1}{2} \text{ volumen del cilindro circunscrito.}}$$

Ejemplo 14. — La curva $y^2 = 64 - 2x^2$ gira en torno a oy.

Hallar el volumen del sólido engendrado, entre $x = 0$ y $x = 5$. Este caso difiere del anterior en que la curva gira en torno a oy y no en torno a Ox. El volumen será $\int \pi x^2 dy$ y no $\int \pi y^2 dx$.

Otro punto hay que observar: se nos dan los límites de x, mientras que en la integral $\int \pi x^2 dy$ necesitamos los límites de y.

Empecemos, pues, por calcular estos límites.

$$y^2 = 64 - 2x^2$$

Si $\quad x = 0, \quad y^2 = 64, \quad y = \pm 8$

Si $\quad x = 5, \quad y^2 = 14, \quad y = \pm 3{,}74.$

Estos dobles signos pueden prestarse a confusiones pero en realidad se trata de una elipse, colocada simétricamente con relación a los dos

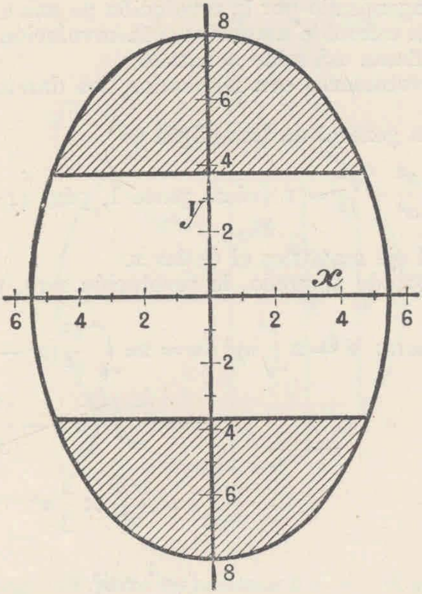


Fig. 47

ejes, y el volumen que se desea es el engendrado por las dos superficies rayadas, o sea el doble del engendrado por una de ellas (fig. 47).

Tomaremos, pues, solamente los valores positivos

$$V = \int_{3,74}^{8} \pi x^2 dy = \pi \int_{3,74}^{8} \left(32 - \frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= \pi \left(32\, y - \frac{y^3}{6}\right)_{3,74}^{8}$$

$$= \pi\, (256 - 85{,}3 - 119{,}5 + 8{,}7)$$

$$= 59{,}9\pi.$$

El volumen total $= 2 \times 59{,}9 \times \pi = 119{,}8 . \pi = \underline{376}$ unidades cúbicas.

Si los límites de y fuesen $+ 8$ y $- 8$ se pediría el volumen de todo el sólido que será:

$$\int_{-8}^{8} \pi x^2 dy = 2\pi \int_0^8 \left(32 - \frac{y^2}{2}\right) dy = 2\pi \left[32\, y - \frac{y^3}{6}\right]_0^8$$

$$= 2\pi\,(256 - 85{,}3)$$

$$= 341{,}4.\pi = \underline{1070} \text{ u. c.}$$

El sólido engendrado por la revolución de una elipse sobre su eje mayor se llama esferoide alargado; si la revolución se hace sobre el eje menor, se llama esferoide achatado.

Como sus volúmenes son necesarios, los daremos en forma general.

La ecuación general de una elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (véase parte I, pág. 418).}$$

Si $a > b$, el eje mayor es el de las x.

Para el esferoide alargado, la revolución será, pues, sobre a ox, y el volumen será: $V = 2 \int_0^a \pi y^2\, dx = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx$

$$= \frac{2\pi\, b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_0^a$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2} \times \frac{2}{3}\, a^3$$

$$= \frac{4}{3}\, \pi a b^2.$$

De igual modo se encuentra que el volumen de un esferoide achatado, es

$$V = \frac{4}{3}\, \pi a^2 b.$$

Si $b = a$, ambos coinciden con la esfera cuyo volumen será pues,

$$V = \frac{4}{3}\, \pi a^3.$$

Ejemplo 15. — Hallar el volumen de una zona esférica de radio r, limitada por los planos $x = a$, $x = b$.

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$ (fig. 48) eg o

$$y^2 = r^2 - x^2$$

y por tanto: $$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b (r^2 - x^2)dx$$

$$= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_a^b$$

$$= \pi \left[r^2 (b - a) - \frac{1}{3} (b^3 - a^3)\right]$$

$$= \pi \frac{b - a}{3} [3r^2 - (b^2 + ab + a^2)].$$

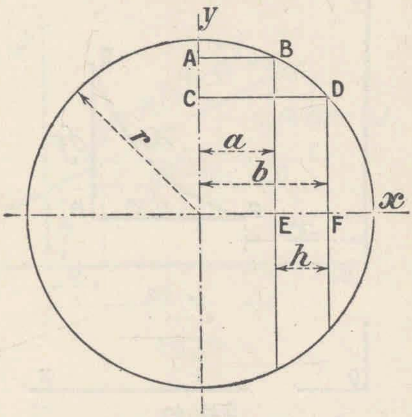


Fig. 48

Si (véase pág. 148, parte I), hacemos $b - a = h$ y $BE = r_1$ $DF = r_2$, tendremos $$a^2 = r^2 - r_1^2, \quad b^2 = r^2 - r_2^2$$

$$h^2 = (b - a)^2 = b^2 + a^2 - 2ab = r^2 - r_1^2 + r^2 - r_2^2 - 2ab$$

luego: $$ab = \frac{-h^2 + 2r^2 - r_1^2 - r_2^2}{2}$$

De modo que el volumen de la zona

$$= \frac{\pi h}{3}\left[3r^2 - r^2 + r_2^2 - r^2 + r_1^2 + \frac{h^2 - 2r^2 + r_1^2 + r_2^2}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left[\frac{3}{2} r_2^2 + \frac{3}{2} r_1^2 + \frac{h^2}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi h}{6} [3 (r_1^2 + r_2^2) + h^2]$$

LONGITUDES DE ARCOS. — Sea una pequeña porción de curva, PQ (fig. 49) P y Q son puntos muy cercanos.

La pequeña longitud de arco PQ se designa por medio de la expresión δs, y el arco completo por s.

Sea PM $= \delta x$ QM $= \delta y$.

Como que el arco PQ es con mucha aproximación igual a la cuerda PQ, podremos escribir

$$(\delta s)^2 = (\text{cuerda PQ})^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2$$

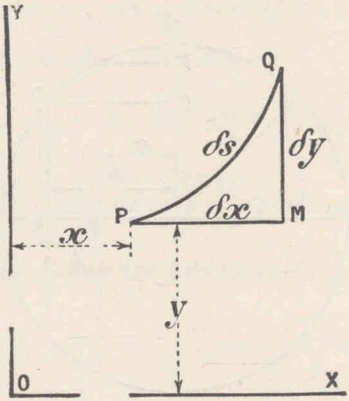


Fig 49

Luego $\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2$ y $\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2$

o sea, $\frac{\delta s}{\delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2}$ y $\frac{\delta s}{\delta y} = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2}$.

Cuando δx tiende hacia 0, $\frac{\delta s}{\delta x}$ tiende hacia $\frac{ds}{dx}$ etc., por consiguiente tenemos

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}; \quad \frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Integrando

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \text{ o bien } \int \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

La longitud del arco puede pues, hallarse si se sabe integrar el radical y esto, sólo en contados casos puede hacerse con facilidad; para los restantes casos, suele tomarse una aproximación. Por ejemplo, para hallar el perímetro de una elipse, este método nos llevará a un tipo de integral muy difícil, llamada integral elíptica, que se tratará más adelante.

Ejemplo 16. — Si $y = ax + b$, hallar la longitud de arco entre $x = m$ y $x = n$. En este caso, se trata de hallar la longitud de la recta AB (fig. 50) cuya pendiente es a.

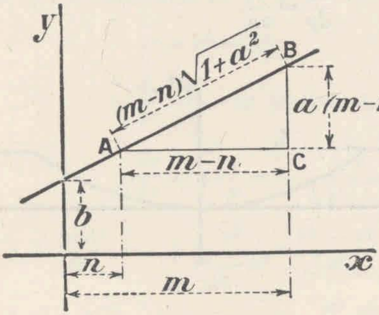


Fig. 50

Se tiene
$$\frac{dy}{dx} = a \qquad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + a^2$$

$$s = \int_n^m \sqrt{1 + a^2}\, dx = \sqrt{1 + a^2}\Big(x\Big)_n^m$$

$$= \underline{\sqrt{1 + a^2}\,(m - n).}$$

Se verificará el resultado deduciéndolo de la figura:

$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (CB)^2} = \sqrt{(m - n)^2 + a^2\,(m - n)^2}$$

$$= \sqrt{1 + a^2}\,(m - n).$$

Ejemplo 17. — Emplear el método anterior para determinar la longitud aproximada de un cable que cuelga en forma de parábola, con flecha $= F$ y luz $= 2L$ (fig. 51).

Se tendrá $L^2 = 4aF$, de donde $a = \dfrac{L^2}{4F}$, de modo que a tiene que ser muy grande.

La ecuación es en realidad $y^2 = 4ax$, (poniendo y en lugar de L y x en lugar de F)

$$\frac{dy^2}{dx} = 4a, \quad \frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy} \times \frac{dy}{dx}.$$

Luego:

$$\frac{dy}{dx} 2y = 4a$$

o sea
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y} = \frac{2a}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2a}$$

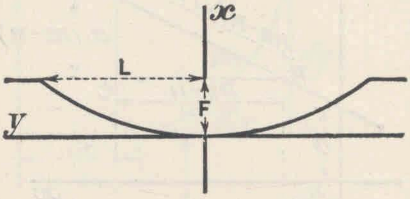


Fig. 51

Luego

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4a^2}} = \left(1 + \frac{y^2}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}\frac{y^2}{4a^2} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1.2}\left(\frac{y^2}{4a^2}\right)^2 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{y^2}{8a^2} \text{ aproximadamente,}$$

puesto que todos los términos siguientes contienen a^4 y potencias más elevadas de a en el denominador, luego son muy pequeños.

De modo que:

$$s = 2\int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= 2\int_0^L \left(1 + \frac{y^2}{8a^2}\right) dy$$

$$= 2\left(y + \frac{y^3}{24a^2}\right)_0^L$$

$$= 2\left(L + \frac{L^3}{24a^2}\right)$$

$$= 2\left(L + \frac{L^3 \times 16\,F^2}{24 \times L^4}\right) \qquad \text{pues } a = \frac{L^2}{4F}$$

$$= 2\,L + \frac{4F^2}{3L} = \text{luz} + \frac{8\,(\text{flecha})^2}{3 \times \text{luz}}.$$

Ejemplo 18. — Hallar la longitud de la circunferencia de radio r.

La ecuación de la circunferencia es $y^2 + x^2 = r^2$

de donde $$y^2 = r^2 - x^2$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x \text{ (derivando con relación a } x\text{)}$$

o sea $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Luego: $$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

Longitud de la circunferencia $= 4 \times$ longitud cuadrante

$$= 4\int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx.$$

Para calcular esta integral, hagamos $x = r \operatorname{sen} u$ (ejemplo 7, pág. 164)

resultará $$r^2 - x^2 = r^2(1 - \operatorname{sen}^2 u) = r^2 \cos^2 u$$

$$\frac{dx}{du} = r \cos u,$$

$$dx = r \cos u\, du$$

Límites de u, $$\operatorname{sen} u = \frac{x}{r}\begin{cases} \text{Si } x = 0, \ \operatorname{sen} u = 0, \ u = 0 \\ \text{»} \ x = r, \ \operatorname{sen} u = 1, \ u = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

De modo que

$$\text{Longitud circunferencia} = 4r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= 4r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\cos u\,du}{r\cos u}$$

$$= 4r\Big(u\Big)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \underline{2\pi r.}$$

Ejemplo 19. — Hallar la expresión de la longitud de una elipse de ejes $2a$ (mayor), $2b$ (menor).

Sea BPA (fig. 52) la elipse, CQA el cuadrante de círculo sobre su eje mayor como diámetro y BTD el cuadrante de círculo sobre su eje menor. Sea P un punto cualquiera de la elipse.

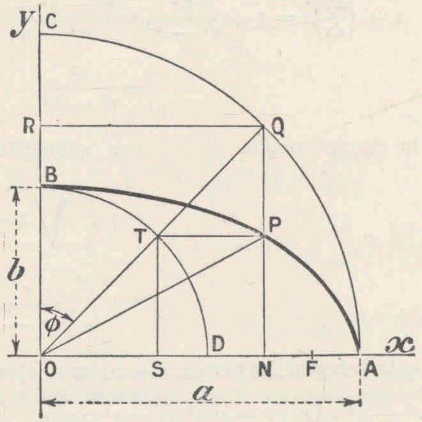


Fig. 52

Tracemos las rectas QPN, PT, TS, QR y OTQ.

El punto P tiene por coordenadas x, y, o sea ON y PN, respectivamente iguales a QR, TS.

Ahora bien QR = OQ sen ϕ o sea $x = a \operatorname{sen} \phi$

TS = OT cos ϕ » $y = b \cos \phi$

Luego $\dfrac{dx}{d\phi} = a \cos \phi$ $\dfrac{dy}{d\phi} = -b \operatorname{sen} \phi$

$$\frac{ds}{d\phi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2} = \sqrt{a^2 \cos^2\phi + b^2 \operatorname{sen}^2\phi}$$

Y por lo tanto, $s = \int\sqrt{a^2 \cos^2\phi + b^2 \operatorname{sen}^2\phi}\, d\phi.$

Ahora bien, la ecuación de la elipse es: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, y la excentricidad K es:

$$K = \frac{\text{distancia focal}}{\text{eje mayor}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{OF}{OA}.$$ Siendo F un foco.

Luego: $K^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$ ó $K^2a^2 - a^2 = -b^2$

ó $b^2 = a^2(1 - K^2)$

de modo que

$$a^2 \cos^2\phi\, p + b^2 \operatorname{sen}^2\phi = a^2 \cos^2\phi + a^2 \operatorname{sen}^2\phi - a^2 K^2 \operatorname{sen}^2\phi$$
$$= a^2 (1 - K^2 \operatorname{sen}^2\phi).$$

Así pues, nuestra integral se reduce a la forma

$$s = \int a \sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2\phi}\, d\phi$$

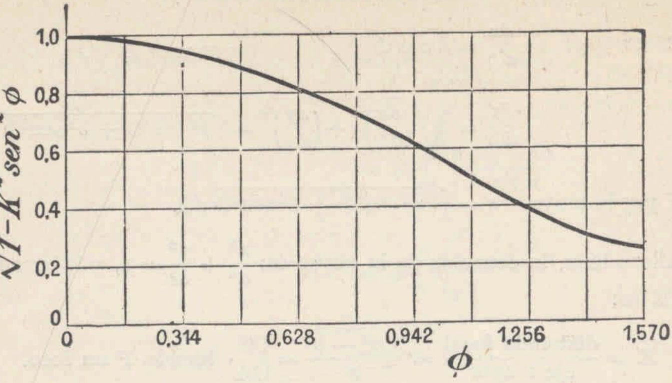
Y para el cuarto de elipse la longitud $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2\phi}\, d\phi$ puesto que los límites de ϕ son evidentemente o y $\dfrac{\pi}{2}$.

El perímetro completo será pues

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2\phi}\, d\phi.$$

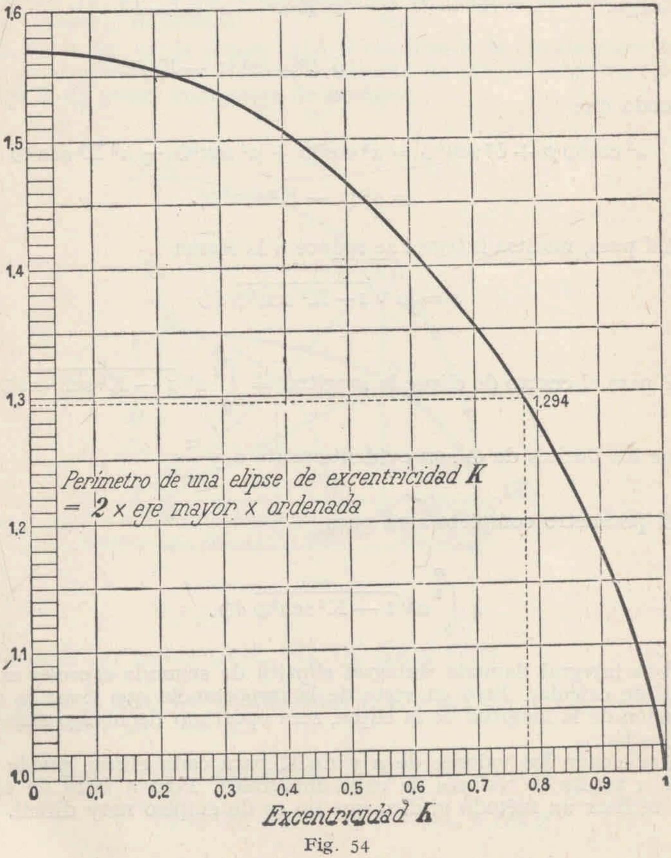
Esta integral llamada «integral elíptica de segunda especie» es muy difícil de calcular. Pero en vista de la importancia que tiene la determinación de la longitud de la elipse, será oportuno decir algo más sobre la cuestión.

Conociendo los valores de a y de K para cada elipse, puede recurrirse a tablas de valores de estas integrales. Pero a falta de tablas, cabe utilizar un método gráfico que no es de empleo muy difícil.



1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
$\sqrt{1-K^2 sen^2 \phi}$
0
0,314
0,628
0,942
1,256
1,570
ϕ

Fig. 53



1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
1,294
Perimetro de una elipse de excentricidad K
= 2 × eje mayor × ordenada
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
Excentricidad K

Fig. 54

Se escogen varios valores de ϕ entre o y $\frac{\pi}{2}$ y se calculan los de $\sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2 \phi}$ correspondientes, que se trazan en ordenadas sobre una base de valores de ϕ. El área de la curva resultante multiplicada por $4a$ da el perímetro de la elipse.

Ejemplo 20. — Una hoja metálica ha sido curvada de manera que presenta una sección elíptica de 21 cm. de eje mayor y 5 cm. de eje menor. Hallar el área total de metal sabiendo que la longitud es de 60 cm.

Tenemos $a = 10{,}5.$ $K = \dfrac{\sqrt{10{,}5^2 - 2{,}5^2}}{10{,}5} = 0{,}9714$

$$K^2 = 0{,}944.$$

La tabla siguiente nos da:

Φ	sen Φ	$\operatorname{sen}^2 \Phi$	$1 - K^2 \operatorname{sen}^2 \Phi$	$\sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}$
0	0	0	1	1
0,157	0,1564	0,0245	1 — 0,0232 = 0,977	0,99
0,314	0,309	0,0951	1 — 0,0898 = 0,91	0,955
0,471	0,454	0,206	1 — 0,195 = 0,805	0,897
0,628	0,5878	0,345	1 — 0,326 = 0,674	0,821
0,785	0,7071	0,5	1 — 0,472 = 0,528	0,726
0,942	0,809	0,652	1 — 0,616 = 0,384	0,62
1,099	0,891	0,793	1 — 0,749 = 0,251	0,501
1,256	0,9511	0,9	1 — 0,85 = 0,15	0,388
1,413	0,9877	0,976	1 — 0,922 = 0,078	0,279
1,570	1	1	1 — 0,944 = 0,056	0,235

y los valores de la última columna se hallan trazados en la figura 53.

El área de esta figura = 1,0663 unidades cuadradas
y el perímetro buscado será = $4a$ × área = 4 × 10,5 × 1,0663

$$= \underline{44{,}78 \text{ cm.}}$$

Luego el área de metal = 60 × 44,78

$$= \underline{2686{,}8 \text{ cm.}^2}.$$

Comparemos este resultado del perímetro con los que dan las reglas de aproximación de la página 128, parte I.

a) $P = \pi(a + b) = \pi(10{,}5 + 2{,}5) \qquad = 40{,}84$ cms.

b) $P = 4{,}443 \sqrt{a^2 + b^2} = 4{,}443 \times 10{,}8 \qquad = 47{,}96$ cms.

c) $P = \pi\left[1{,}5\,(a+b) - \sqrt{ab}\right] = \pi \times 14{,}38 \;= 45{,}16$ cms.
y el perímetro con dos decimales exactas obtenido mediante las tablas * de integrales elípticas es 44,79 cm.

Así pues, los errores son;

a) 8,82 % por defecto
b) 7,08 % por exceso
c) 0,83 % » »

lo que demuestra que la regla de Boussinesq dá un resultado excelente en este caso (elipse muy aplanada), mientras que los otros dos son aquí inservibles.

AREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN. — Cuando una figura engendra un sólido de revolución el contorno de la figura generadora engendra la superficie de dicho sólido. El volumen del sólido depende del área de la figura generadora, y su superficie, del perímetro de la misma.

Para hallar el área de la superficie engendrada por la revolución de una curva CD alrededor de un eje OX (fig. 55) tendremos que hallar la suma de las áreas descritas por elementos de curva, como $PQ = \delta s$. El área de la superficie engendrada por PQ girando en torno de OX será igual a $2\pi y \delta s$. Luego el área total será $\sum_{x=a}^{x=b} 2\pi y \delta s$, (aproximadamente).

(*) Las tablas de integrales elípticas completas dan los valores de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}\; d\Phi$ para varios valores de θ, siendo θ el ángulo cuyo seno es K, excentricidad de la elipse en cuestión. Así para utilizar las tablas en este caso hacemos $\operatorname{sen}\theta = K = 0{,}9714$, luego $\theta = 76^\circ\,16'$.

Leemos el valor de la integral correspondiente a 75°, 76° y 77° y por interpolación hallamos la integral que corresponde a $76^\circ\,16' = 1{,}0664$. Multiplicamos por $4a$, es decir, 42, y obtenemos 44,79.

Para aquellos lectores a quienes la cuestión interese y que deseen un resultado más exacto que el de las reglas aproximadas, se da aquí una curva (fig. 54) con valores de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}\; d\Phi$ trazadas sobre valores de K. Para hallar el perímetro total se multiplica la ordenada de la curva por el doble del eje mayor. Así, si el eje mayor es 16 y el menor 10, $K = \dfrac{\sqrt{8^2 - 5^2}}{8} = 0{,}7807$.

Se levanta una ordenada sobre $K = 0{,}7807$ hasta cortar a la curva y se lee el va lor 1,294 de esta ordenada en la escala vertical. Se multiplica por 32 y se obtiene el valor del perímetro = 41,41.

Al disminuir δs esta cantidad tenderá hacia

$$\textbf{Area} = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y ds.$$

Ahora bien:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \times dx.$$

De modo que

$$\text{Area} = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

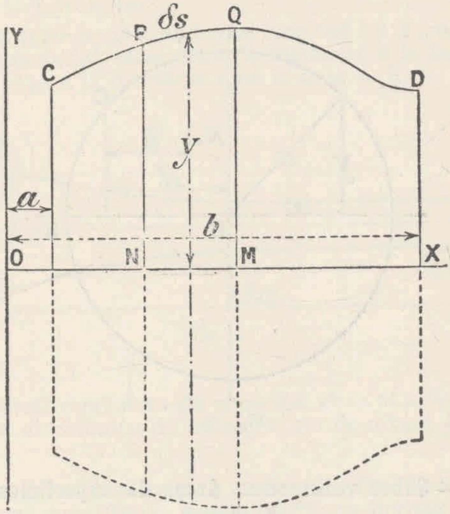


Fig. 55

Ejemplo 21. — Hallar el área de la superficie de una zona esférica de radio a y altura b.

La curva generadora es el arco de círculo CD, que gira en torno a su diámetro OX (fig. 56).

De la figura se deduce $y^2 = a^2 - x^2$

luego $2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

Luego:

$$\text{Area} = \int_c^d 2\pi\sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi a \int_c^d dx$$

$$= 2\pi a\,(d - c) = \underline{2\pi ab}$$

que es el área de la superficie lateral de un cilindro circunscrito a la esfera y con la misma altura que la zona en cuestión.

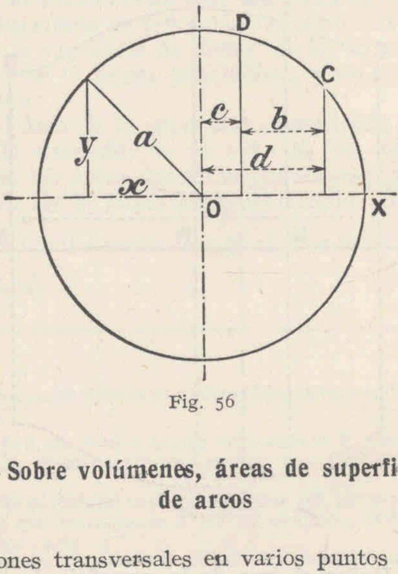


Fig. 56

Ejercicios 18. — Sobre volúmenes, áreas de superficies y longitudes de arcos

1. Las secciones transversales en varios puntos de una zanja son las siguientes:

Distancia desde un extremo (m.)	0	20	41	52	67	83	96	100
Area de la sección transversal (m.²)	0	21	29,6	29,5	24,4	15,4	5	0

Hallar el volumen de tierra removido en la construcción de esta zanja.

2. Hallar el peso de la columna de piedra de la figura 57. Los basamentos superior e inferior son cilíndricos, y el radio del fuste en cualquier sección viene determinado por $R = \frac{0,2}{\sqrt{10}\sqrt{x}}$ m., siendo x la distancia en m. de la sección al punto fijo O. (Densidad = 2240 kg. por m.³).

3. La curva $y = 2x^2 - 3x$ gira en torno a Ox. Hallar el volumen del sólido engendrado, entre los planos límites $x = -2$ y $x = +4$.

4. Hallar por integración, la superficie de un hemisferio de radio r.

5. La curva $y = ae^{bx}$ pasa por los puntos $x = 1$ e $y = 3,5$ y $x = 10$; $y = 12,6$. Hallar a y b. Esta curva gira en torno al eje Ox, describiendo una superficie de revolución. Hallar el volumen entre las secciones transversales $x = 1$, $x = 10$.

6. Hallar el peso de un cilindro de longitud l y diámetro D, cuando la densidad del material varía como la distancia a la base. (Hágase la densidad de la capa a la distancia x de la base = Kx).

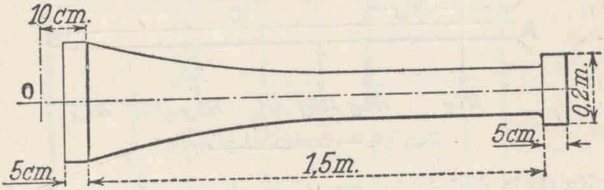


Fig. 57

7. La hipérbola equilátera de ecuación $x^2 - y^2 = 25$ gira en torno al eje Ox. Hallar el volumen de un segmento de altura 5 medida desde el vértice.

8. La recta $4y - 5x = 12$ gira en torno a Ox. Hallar la superficie del tronco de cono engendrado, siendo los planos límites $x = 1$ y $x = 5$.

9. Los radios de un peso en forma de husillo, en varios puntos son

Distancia desde un extremo (cm.).	0	0,94	1,25	2,5	3,25	4	4,6
Radio (cm).	4	4	1,95	1,05	1	1,25	1,25

Hallar su peso a razón de 7,85 gr. por cm.³ teniendo en cuenta que los extremos son cilíndricos.

10. Por el método del ejemplo 19, página 228, determinar el perímetro de una elipse cuyo eje mayor es 30 cm. y cuyo eje menor es 18 cm.

Comparar el resultado con los obtenidos por el uso de las reglas de aproximación (*a*), (*b*) y (*c*) de la página 231.

11. La forma que adopta un cable colgante que pesa p kg. por m. con una tensión horizontal de T kilos, es una curva que obedece a la ecuación

$$y = \frac{T}{p} \cosh \frac{px}{T}$$

Hallar la longitud total del cable cuando el vano es 60 m. (es decir, que x va de -30 a $+30$) y sabiendo que $p=3$ kg. por metro y $T=300$ kg.

12. Hallar el peso de la pieza de hierro colado representada en la figura 91 A, página 290.

CENTROS DE GRAVEDAD *. — El centro de gravedad (c. d. g.) de un cuerpo o superficie, es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan sobre dicho cuerpo o superficie.

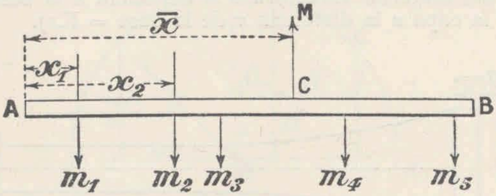


Fig. 58. — Centro de gravedad

Resulta de la definición, que se puede considerar todo el peso del cuerpo como si actuara en su centro de gravedad, propiedad muy útil en problemas de mecánica. Así, los movimientos de un sistema pesado más o menos complejo pueden reducirse a los del centro de gravedad del sistema. Otro ejemplo se presenta en la construcción. En el caso de vigas cargadas no simétricamente, es necesario hallar la posición del c. d. g. del diagrama del momento de flexión.

Es pues menester dar reglas que permitan determinar la posición del c. d. g. de toda figura dada; los métodos adoptados pueden dividirse en dos clases:

(*a*) Analíticos (incluyendo los puramente analíticos y los mixtos en parte analíticos y en parte gráficos).

(*b*) Gráficos.

Las reglas se comprenderán más fácilmente mediante un ejemplo de la teoría de los momentos. En lugar de áreas o sólidos, que consideramos más adelante, estudiemos el caso de una barra uniforme, cargada como indica la figura 58 (**).

(*) Los ingleses designan con la denominación especial de *centroide (centroid)* el centro de gravedad de una superficie. Parécenos innecesario adoptar esta denominación no usada en nuestro país. *(N. del T).*

(**) El método que aquí se sigue consiste en equilibrar el sistema de cargas mediante una reacción única, pues es evidente que conocida tal reacción, se conoce asimismo la resultante de las cargas (igual y opuesta) y por consiguiente el c. d. g. buscado. *(N. del T).*

Las dos condiciones de equilibrio serán:

(1) Las fuerzas hacia arriba deben equilibrar las fuerzas hacia abajo.

(2) Los momentos hacia la derecha deben equilibrar en todo punto los momentos hacia la izquierda, o, en otros términos, la suma algebraica de los momentos en todo punto es 0.

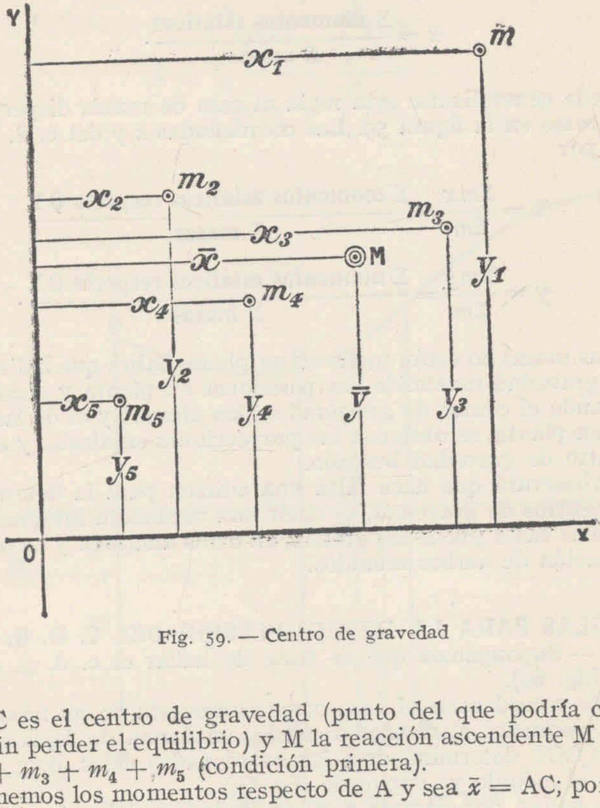


Fig. 59. — Centro de gravedad

Si C es el centro de gravedad (punto del que podría colgar la barra sin perder el equilibrio) y M la reacción ascendente $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$ (condición primera).

Tomemos los momentos respecto de A y sea $\bar{x} = AC$; por la condición (2)

$$M\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots$$

o sea
$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 \ldots}$$

$$= \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}.$$

El producto de una fuerza por su distancia a un punto fijo o eje se llama *primer momento*, o también, *momento estático*, o simplemente *momento* con relación a dicho punto o eje.

El producto de la fuerza por el cuadrado de su distancia a un punto o eje se llama *segundo momento*, o también, *momento de inercia* de la fuerza con relación al punto o eje.

Por lo tanto, podremos escribir

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \text{ momentos estáticos}}{\Sigma \text{ masas}}.$$

Puede generalizarse esta regla al caso de masas dispersas en un plano como en la figura 59. Las coordenadas $\bar{x}\ \bar{y}$ del c. d. g. vienen dadas por

$$\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} = \frac{\Sigma \text{ momentos estáticos respecto OY}}{\Sigma \text{ masas}}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma my}{\Sigma m} = \frac{\Sigma \text{ momentos estáticos respecto OX}}{\Sigma \text{ masas}}.$$

Si las masas no están todas en un plano, habrá que hallar su centro de gravedad marcando sus posiciones en planta y alzado, y determinando el centro de gravedad de los alzados y el de las proyecciones en planta, se obtienen las proyecciones en alzado y en planta del centro de gravedad buscado.

Se observará que hace falta una adición para la determinación de los centros de gravedad, es decir una verdadera integración, que en algunos casos puede ser gráfica, en otros analítica y en otros una combinación de ambos métodos.

REGLAS PARA LA DETERMINACIÓN DEL C. D. G. DE UN AREA. — Supongamos que se trate de hallar el c. d. g. del área ABCD (fig. 60).

Puede considerarse el área como compuesta de un número infinito de pequeños elementos o masas, en forma de fajas estrechas como PQMN, determinándose las coordenadas del c. d. g. de cada uno por el método ya explicado (fig. 60).

Para hallar, por ejemplo x, o sea, distancia del c. d. g. a OY, se tiene:

Masa de PQMN = área × densidad (considerando el elemento de un espesor = unidad)

$$= y\delta x \times \rho$$

Momento estático con relación a OY = masa por distancia

$$= \rho y\delta x \times x = \rho xy\delta x.$$

Luego $\bar{x} = \dfrac{\Sigma \text{ momentos estáticos con relación a OY}}{\Sigma \text{ masas}}$

$= \dfrac{\Sigma\, \rho xy\delta x}{\Sigma\, \rho y\delta x}$ siendo los límites a y b

y si las fajas son infinitesimales

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b \rho yxdx}{\int_a^b \rho ydx} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}$$

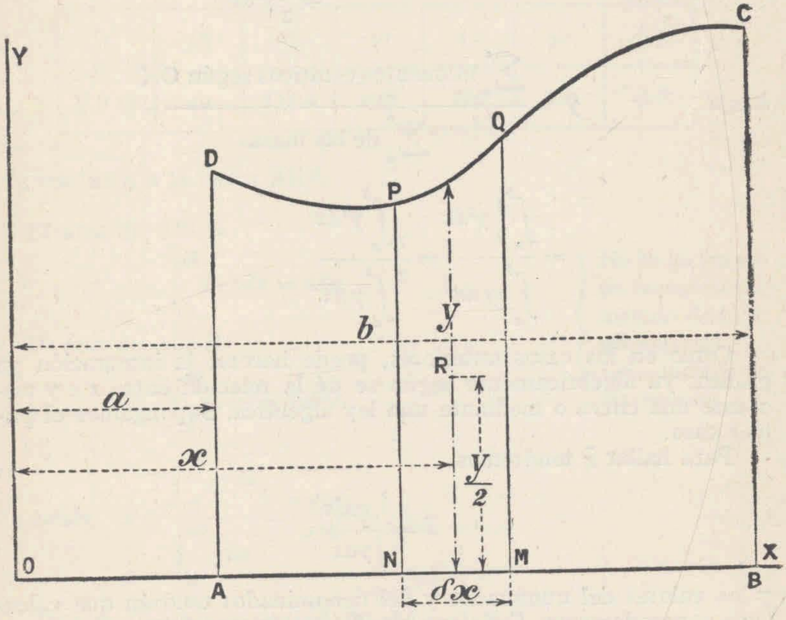


Fig. 60. — Centro de gravedad de un área

puesto que ρ desaparece como factor común al numerador y denominador (*).

(*) La supresión de ϱ como factor común al numerador y denominador exige previamente que pueda sacarse en ambos fuera del signo integral; es decir, que sea constante en toda la extensión del área. Así se ha supuesto tácitamente al materializar dicha área; de este modo resulta el c. d. g. dependiente únicamente de la configuración geométrica del área en cuestión. *(N. del T).*

De este modo se obtiene la vertical que contiene el c. d. g., llamada vertical del c. d. g.

Para acabar de determinarlo buscaremos la horizontal del c. d. g., que dará en la intersección con la vertical del mismo, la posición de éste. Hay que buscar por lo tanto la ordenada del c. d. g. que indicaremos por $\bar{y}$.

Cálculo de $\bar{y}$. — Puede suponerse que toda la masa del elemento PQMN actúa en R, su centro, puesto que el elemento es de densidad uniforme. Luego el momento con relación a OX de la faja PQMN

$$= \text{masa} \times \text{distancia} = \rho y\, \delta x \times \frac{y}{2}$$

$$= \frac{\rho}{2} y^2 \delta x$$

luego
$$\bar{y} = \frac{\sum_a^b \text{momentos estáticos según OX}}{\sum_a^b \text{de las masas}}$$

$$= \frac{\int_a^b \frac{\rho}{2} y^2 dx}{\int_a^b \rho y\, dx} = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y\, dx}$$

Como en los casos anteriores, puede hacerse la integración ya gráfica, ya algébricamente según se dé la relación entre x e y mediante una curva o mediante una ley algébrica. Supongamos el primer caso.

Para hallar $\bar{x}$ tendremos

$$\bar{x} = \frac{\int xydx}{\int ydx}$$

y los valores del numerador y del denominador tendrán que calcularse separadamente. Cada uno da el área de una figura, pues escribiendo Y en vez de xy, el numerador se transforma en $\int Ydx$ que es el tipo de integral representativo del área bajo la curva que tiene Y por ordenadas y x por abcisas.

De este modo hay que calcular una serie nueva de valores Y obtenidos por multiplicación de x y de y que a su vez se llevan como ordenadas para construir la curva del numerador. El área limitada por esta curva y el eje x da el valor de este numerador; el del denominador se obtiene calculando el área de la curva dada, y, finalmente, el cociente de ambas áreas da el valor de $\bar{x}$.

Ejemplo 22. — Hallar el c. d. g. del área limitada por la curva dada en la tabla adjunta, el eje de las x, y las ordenadas $x = 10$ y $x = 60$.

x	10	25	40	45	50	60
y	4	5,3	6,2	6,4	6,6	6,8

o sea el c. d. g. del área ABCD (fig. 61).

Los valores de Y serán:

x	10	25	40	45	50	60
Y o xy	40	132,4	248	288	330	408

que conducen a la curva AEF.

El área de ABCD

$$\int_{10}^{60} = ydx = 289$$

El área de AEFD

$$\int_{10}^{60} xydx = 10650$$

No se ha puesto de manifiesto el método de integración para evitar confusión en las figuras.

de donde $$\bar{x} = \frac{\int_{10}^{60} xydx}{\int_{10}^{60} ydx} = \frac{10650}{289} = \underline{36,9}$$

Poseemos ya así la vertical PG del c. d. g.

Para hallar la horizontal buscaremos $\bar{y}$.

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_{10}^{60} y^2dx}{\int_{10}^{60} ydx} = \frac{\frac{1}{2}\int_{10}^{60} \mathrm{Y}dx}{\text{Area de ABCD}} \quad \left\{\begin{matrix}\text{en que Y significa} \\ \text{en este caso } y^2\end{matrix}\right\}$$

de modo que hemos de calcular la tabla siguiente:

x	10	25	40	45	50	60
Y o y^2	16	28	38,4	41	43,5	46,1

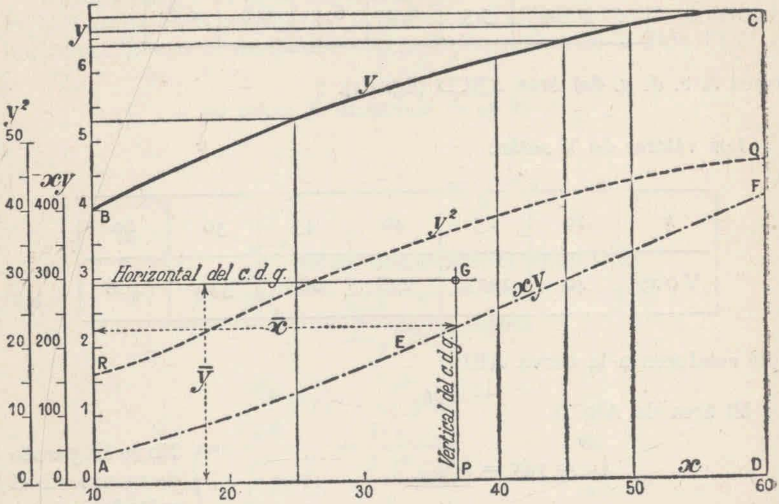


Fig. 61. — Centro de gravedad de un área

De esta tabla resulta la curva RQ y el área de la figura ARQD = 1689

de donde $$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\text{ área ARQD}}{\text{área ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \times 1689}{289} = \underline{2,92.}$$

La intersección de la horizontal y vertical del c. d. g. fijan la posición G del c. d. g. de ABCD.

Cuando en vez de una tabla de valores, se da la forma gráfica del área en cuestión, el procedimiento sufre una modificación que puntualizamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 23. — Hallar el centro de gravedad de una chapa delgada de la forma dada en la figura 62.

Se trazan dos ejes rectangulares convenientes y se divide el área en fajas estrechas paralelos a OY. Se trazan también las ordenadas medias de estas fajas. El área de cada elemento se admite sea el producto de la *altura media* por el *ancho*. Se miden pues las ordenadas medias, se multiplican por el ancho de los elementos y se suman los resultados.

Cálculo de $\bar{x}$. — OA_1 es igual a la distancia del centro del primer elemento o faja a OY. De modo que área del elemento $\times OA_1$ = momento estático del elemento con relación a OY.

Repitiendo la operación para cada faja y sumando, se obtiene el numerador de x. El denominador es el área ya calculada.

$$\bar{x} = \frac{\text{Suma de momentos estáticos}}{\text{Area}}$$

Cálculo de $\bar{y}$. — Se fija R, punto medio de MN y de igual modo los puntos medios de los demás elementos. Se multiplica el área de cada elemento por la distancia A_nR correspondiente y se suman los resultados, lo cual da el momento estático respecto a OX, o sea el numerador. El denominador es el área de la figura, ya calculada.

(Nótese que R es el punto medio de MN y no de NA_1, pues los ejes son arbitrarios).

Para este ejemplo el cálculo sería el siguiente: (en unidades marcadas sobre la figura).

Elemento	Longitud de ordenada media (como MN)	Ancho del elemento	Area del elemento	Distancia del centro a OY (como OA_1)	Distancia del centro a OX (Como RA_1)	Momento estático según OX	Momento estático según OY
1	1,55	0,5	0,775	0,25	2,0	1,55	0,19
2	2,79	0,5	1,395	0,75	2,0	2,79	1,05
3	3,44	0,5	1,720	1,25	2,18	3,75	2,05
4	3,85	0,5	1,925	1,75	2,27	4,37	3,36
5	4,01	0,5	2,005	2,25	2,32	4,64	4,50
6	3,92	0,5	1,960	2,75	2,3	4,51	5,40
7	3,60	0,5	1,800	3,25	2,18	3,92	5,85
8	3,26	0,5	1,630	3,75	2,04	3,31	6,11
9	2,66	0,5	1,330	4,25	2,02	2,68	5,65
10	1,47	0,5	0,735	4,75	1,95	1,43	3,49
Totales			15,275			32,96	37,65

Luego $$\bar{x} = \frac{37{,}65}{15{,}28} = 2{,}46$$

$$\bar{y} = \frac{32{,}96}{15{,}28} = 2{,}16$$

Y la posición de G queda determinada por la intersección de una horizontal a una altura de 2,16 con una vertical a 2,46 unidades de distancia de OY.

Si se desea el c. d. g. de un arco, se efectúa un cálculo idéntico, salvo que se opera sobre elementos de longitud de arco en lugar de elementos de área.

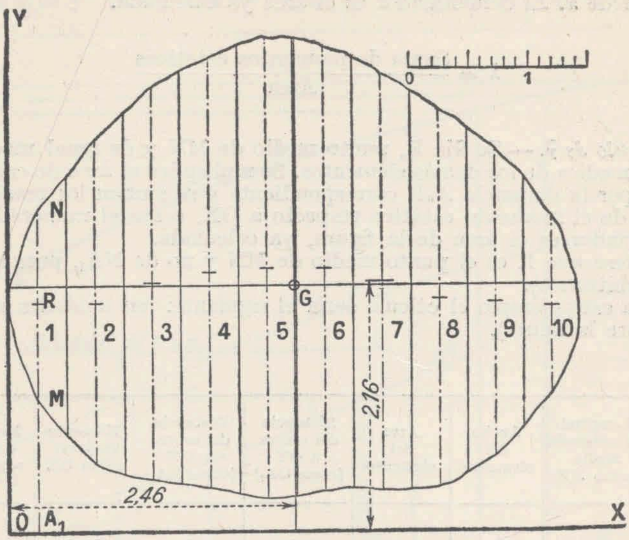


Fig. 62. — C. d. g. de una plancha delgada

METODO PARA HALLAR LA VERTICAL DEL C. D. G. POR MEDIO DE UNA DOBLE INTEGRACIÓN GRAFICA. — Es un método cómodo cuando sólo se necesita la vertical del c. d. g., pero aunque enteramente gráfico, un poco largo cuando se necesita la determinación completa del c. d. g. mismo.

Sea, hallar la vertical del c. d. g. del área APQH (fig. 63).

Se traza la curva de la suma o curva integral de PQ del modo corriente y se obtiene así la curva A*eg*E, con polo en O y distancia polar p.

Se toma en la prolongación de PA un nuevo polo O, con distancia polar p_1 = HE = última ordenada de la curva integral. Tomando AP como base y con este segundo polo O_1 se traza la curva integral de A*eg*E y la última ordenada CM de esta última curva será igual a $\bar{x}$, de modo que la vertical de C será la vertical del c. d. g. que se busca.

Demostración. — Sea el elemento *abcd*, porción del área original. O*r* y *eg* son paralelas por construcción. Luego

$$\frac{p}{Ar} = \frac{ef}{fg} = \frac{ab}{fg}$$

o sea $\quad Ar \times ab = p \times fg$

es decir $\quad hn \times ab = p \times fg$

de donde $\quad \Sigma hn \times ab = \Sigma p \times fg = p\Sigma\, fg = p.\,\mathrm{HE}.$

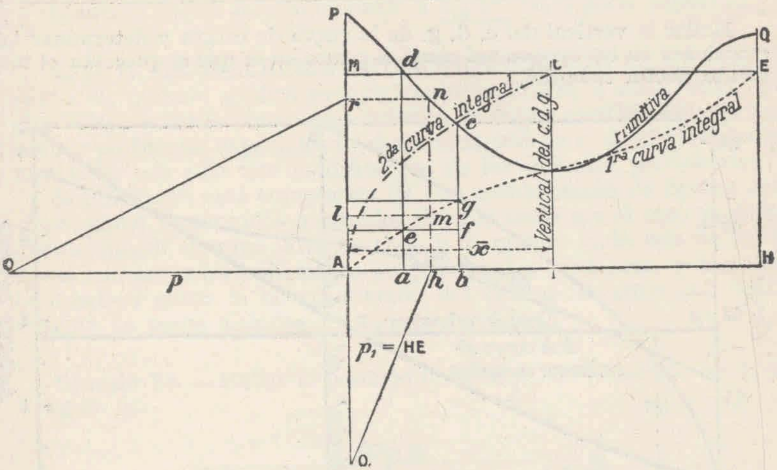


Fig. 63.—Vertical del c. d. g. de un área

El momento estático de este elemento con relación a AP será igual a área por distancia $= hn \times ab \times Ah = hn \times ab \times ml$

$$= p \times fg \times ml$$

Luego, momento de APQH respecto a AP

$$= \Sigma p \times fg \times ml = p\Sigma\, fg \times ml$$

$$= p \times p_1 \times \mathrm{CM}$$

pero también, momento del área APQH respecto a AP

$$= \text{área por distancia al c. d. g. desde A}$$

$$= p \times \mathrm{HE} \times \bar{x}$$

y por lo tanto $\quad p \times p_1 \times \mathrm{CM} = p \times \mathrm{HE} \times \bar{x} \quad$ [y como $p_1 = \mathrm{HE}$]

$$\mathrm{CM} = \bar{x}.$$

Ejemplo 24. — Una viga de 16 metros de longitud, apoyada en sus extremos, soporta una carga que varía uniformemente en la forma expresada en la tabla siguiente:

Distancia al soporte de la izquierda (metros)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Carga en toneladas por metro	0,12	0,17	0,21	0,25	0,28	0,29	0,31	0,34	0,38

Hallar la vertical del c. d. g. de la curva de cargas y determinar las reacciones en los apoyos así como el punto en el que se presenta el momento flector máximo.

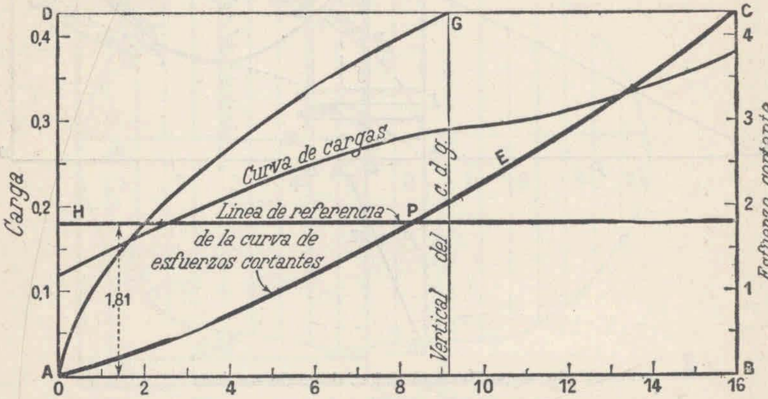


Fig. 64. — Problema sobre una viga cargada

Se traza primero la curva de cargas deduciéndola de las cifras dadas en la tabla (fig. 64) se traza después la curva integral de esta curva tomando como distancia polar 10 unidades horizontales. La última ordenada de esta curva es igual a 4,27 de modo que la carga total es igual a 4,27 toneladas. Se lleva sobre la vertical por O una longitud AD = BC y con esta longitud como distancia polar se traza la curva integral de AEC tomando por base dicha vertical. Obtenemos así el punto G sobre la horizontal de C.

La vertical de G será la vertical del c. d. g. distante 9,2 metros del extremo A.

Para los fines del cálculo puede considerarse que todo el peso que soporta la viga actúa sobre esta línea. Tomando momentos con relación a A tendremos para la reacción R_B del soporte.

$$4{,}27 \times 9{,}2 = R_B \times 16$$

Luego
$$R_B = 2{,}46 \text{ ton.}$$

y
$$R_A = 4{,}27 - 2{,}46 = 1{,}81 \text{ ton.}$$

Si llevamos sobre AH, el valor de R_A a la nueva escala vertical, entonces la horizontal de H será la verdadera línea de referencia de la curva de esfuerzos cortantes.

En P e te esfuerzo es nulo. Pero el esfuerzo cortante se mide por la derivada del momento flector; luego P nos da el máximo dicho de momento. Tenemos pues, para resumir

Reacción del apoyo izquierdo = 1,81 ton.

Reacción del apoyo derecho = 2,46 ton.

Momento flector máximo situado a 8,4 m. del soporte izquierdo.

C. D. G. DE SECCIONES DETERMINADOS POR EL CÁLCULO- (Para un método gráfico especialmente aplicable a esto, véase página 285). — En los casos de secciones de vigas, carriles, etc., se presentan problemas especiales de determinación de c. d. g. que pueden resolverse con sólo una modificación de los métodos precedentes.

Si la sección está compuesta de una combinación de figuras sencillas, como rectángulos o círculos (lo que suele ser el caso más frecuente) puede determinarse su c. d. g. cargando cada una de las figuras componentes con masas proporcionales a su área, y tratando la cuestión como la determinación del centro de gravedad de un sistema de pesos aislados.

Ejemplo 25. — Hallar la posición del c. d. g. de la sección en T, de la figura 65.

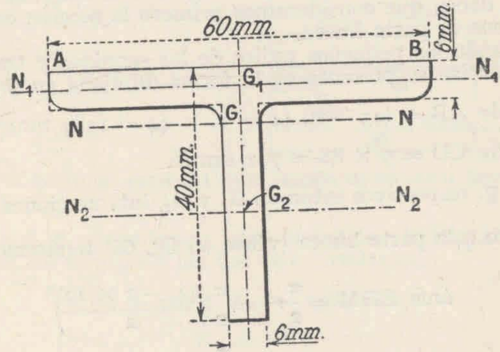


Fig. 65

Podemos considerar esta sección como formada sensiblemente por dos rectángulos. Tendremos

$$\text{Area de la cabeza} = 6 \times 0{,}6 = 3{,}6 \text{ cm.}^2$$

con su c. d. g. en G_1.

$$\text{Area del alma} = (4 - 0{,}6) \times 0{,}6 = 3{,}4 \times 0{,}6 = 2{,}04 \text{ cm.}^2$$

con su c. d. g. en G_2.

Por razón de simetría el c. d. g. de la sección total debe estar en la línea $G_1 G_2$, en un punto que llamaremos G.

$$\text{La distancia } G_1 G_2 = \frac{3,4}{2} + \frac{0,6}{2} = 2 \text{ cm.}$$

Podremos tratar G_1G_2 como una barra cargada en G_1 con 3,6 unidades de peso y en G_2 con 2,04. La reacción equilibrante en G será $= 3,6 + 2,04 = 5,64$.

Sea $G_1 G = \bar{x}$. Tomando momentos con relación a G_1

$$5,64 \times x = 2,04 \times 2$$

de donde
$$\bar{x} = \frac{2 \times 2,04}{5,64} = 0,72 \text{ cm.}$$

Luego la distancia del c d. g. al borde exterior de la cabeza

$$= 0,72 + \frac{0,6}{2} = \underline{1,02 \text{ cm.}}$$

Ejemplo 26. — Determinar la posición del c. d. g. de la sección del carril Brunell hueco, dibujada en la figura 66 (*a*).

Para casos como éste el método a seguir es el adoptado en el cálculo de pesos, es decir, que consideramos primero la sección como maciza y luego restamos la parte hueca.

Despreciando los pequeños radios de las esquinas y tratando la sección como maciza se presenta en la forma dibujada en (*b*) figura 66.

El área de $AB = (45 - 9)\, 44 = 36 \times 44 = 1584$ mm.²

El área de $CD = 9 \times 88 = 792$ mm.²

Los c. d. g. respectivos están en G_1 y G_2, intersecciones de las diagonales.

En cuanto a la parte hueca (véase (*c*) fig. 66) tendremos:

$$\text{área EHM} = \frac{\pi}{2} r^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{44 - 2 \times 12}{2}\right)^2$$
$$= \frac{\pi}{2} \times 100$$
$$= 157 \text{ mm.}^2$$

y sabemos (tomo I, pág. 160) que su c. d. g. G_3 dista $0,424\, r = 0,424 \times 10 = 4,24$ mm. del diámetro EM. Además

$$\text{área EF} = 16 \times 20 = 320 \text{ mm.}^2$$

con su c. d. g. en G_4.

Nuestro problema se reduce a determinar el c. d. g. de cuatro pesos aislados dos de los cuales actúan en sentido contrario al de los otros dos, y colocados según la figura (*d*). Las distancias a la base son:

$$OG_1 = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ mm.}$$

$$OG_2 = \frac{45 - 9}{2} + 9 = 27 \text{ mm}$$

$$OG_3 = 16 + 4{,}2 = 20{,}2 \text{ mm.}$$

$$OG_4 = \frac{16}{2} = 8 \text{ mm.}$$

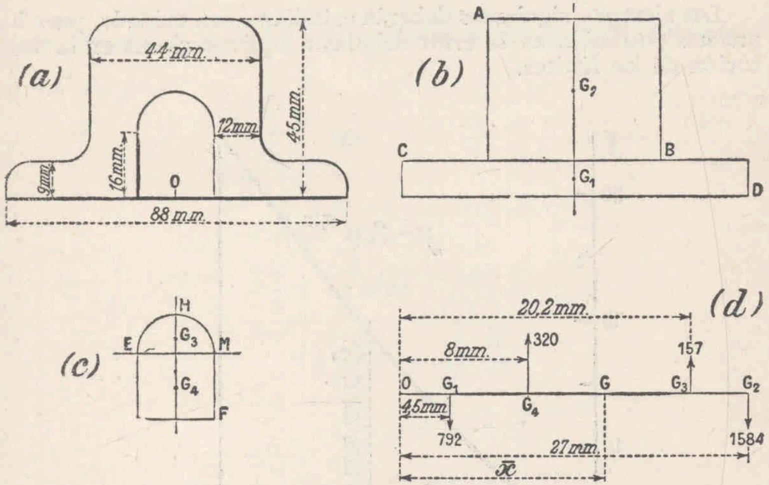


Fig. 66. — Centro de gravedad de la sección de un carril Brunell hueco

Sea G el c. d. g. que se busca, cuya distancia a la base es $\bar{x}$. Igualando las fuerzas en un sentido a las del otro, tendremos

$$R_G + 320 + 157 = 1584 + 792$$

de donde $$R_G = 1899$$

y, tomando momentos con relación a O

$$1899 \times \bar{x} + 320 \times 8 + 157 \times 20{,}2 = 1584 \times 27 + 792 \times 4{,}5$$

de donde $$\bar{x} = 21 \text{ mm.}$$

El c. d. g. se halla pues a 21 mm. del exterior de la base.

C. D. G. OBTENIDOS POR INTEGRACIÓN ALGÉBRICA. — Si se conoce la ecuación de la curva, el c. d. g. del área entre la curva, el eje y las ordenadas límites, puede determinarse por medio de una integración algébrica.

Ya hemos visto que

$$\bar{x} = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} \qquad y = \frac{\frac{1}{2}\int y^2 dx}{\int y dx}$$

de modo que si conocemos la relación funcional entre y y x podremos expresar en función de x, xy e y^2 y por lo tanto integrar los numeradores de x e $\bar{y}$.

Los ejemplos siguientes deberán estudiarse con cuidado, pues hay muchas posibilidades de error debidas a equivocaciones en la sustitución de los límites.

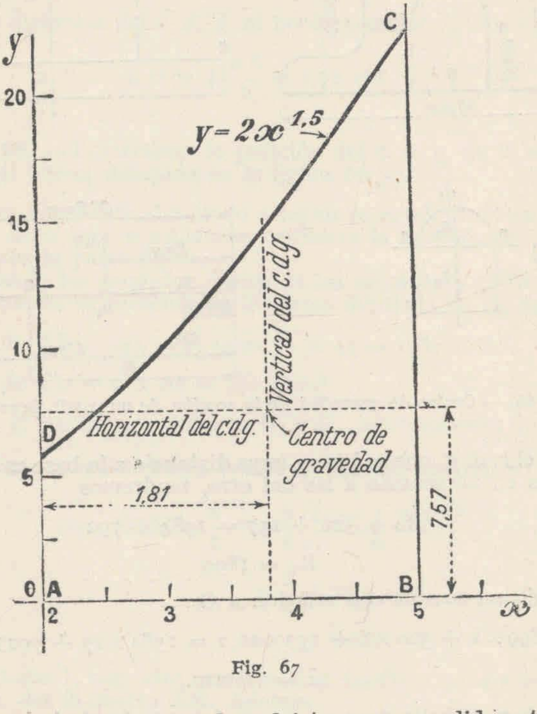


Fig. 67

Ejemplo 27. — Hallar el c. d. g. del área comprendida entre la curva $y = 2x^{1,5}$, el eje ox y las ordenadas $x = 2$, $x = 5$.

La curva está trazada en la figura 67 y se busca el c. d. g. del área ABCD.

Tenemos $\quad y = 2x^{1,5}; \; xy = 2x^{\frac{3}{2}} \times x = 2x^{\frac{5}{2}}$

$$y^2 = 4x^3$$

Cálculo de x

$$\bar{x} = \frac{\int_2^5 xy\,dx}{\int_2^5 y\,dx} = \frac{\int_2^5 2x^{\frac{5}{2}}dx}{\int_2^5 2x^{\frac{3}{2}}dx} = \frac{\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right)_2^5}{\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)_2^5} = \frac{\frac{2}{7}\times\frac{5}{2}\left[5^{\frac{7}{2}}-2^{\frac{7}{2}}\right]}{\left[5^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{5}{2}}\right]}$$

$$= \frac{5}{7}\times\frac{268}{50{,}25} = 3{,}81$$

o sea, que el c. d. g. está a 3,81 unidades del límite de la izquierda.

Cálculo de y

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_2^5 y^2 dx}{\int_2^5 y\,dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times 4\int_2^5 x^3 dx}{2\int_2^5 x^{\frac{3}{2}}dx} = \frac{\left(\frac{x^4}{4}\right)_2^5}{\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)_2^5}$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{5}{2}\,\frac{5^4-2^4}{\left(5^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{5}{2}}\right)}$$

$$= \frac{5}{8}\times\frac{609}{50{,}25} = 7{,}57$$

luego las coordenadas del c. d. g. serían 3,81 y 7,57.

Ejemplo 28. — La curva de momentos flectores de una viga empotrada en un extremo y cargada uniformemente es una parábola, representada en la figura 68. El vértice está en A y la ordenada en B $= \frac{pl^2}{2}$

p = peso por unidad de longitud, l = luz.

Determinar el c. d. g. de la figura ABC para poder hallar el momento del área ABC con relación a AD y finalmente la flecha en A.

La ecuación de la parábola $\quad y^2 = 4ax$

nos da $\quad l^2 = 4a\frac{pl^2}{2} \quad$ Luego $4a = \frac{2}{p}$ o sea $y^2 = \frac{2}{p}x$

es decir $\quad ND^2 = \frac{2}{p}AD.$

La distancia del c. d. g. a AD $= \bar{y}$

$$= \frac{\int_0^l xy\,dy}{\int_0^l x\,dy}$$

$$= \frac{\int_0^l \frac{p}{2} y^3 dy}{\int_0^l \frac{p}{2} y^2 dy} = \frac{\left(\frac{1}{4} y^4\right)_0^l}{\left(\frac{1}{3} y^3\right)_0^l}$$

$$= \underline{\frac{3}{4} l.}$$

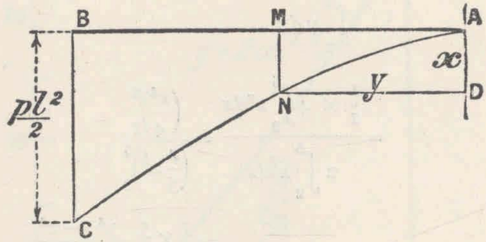


Fig. 68

Area ABC $= \frac{1}{3}$ rectángulo $= \frac{1}{3} \times l \times \frac{pl^2}{2} = \frac{pl^3}{6}$

Toda esta área puede suponerse concentrada en su c. d. g. Luego el momento de ABC respecto a AD $= \frac{pl^3}{6} \times \frac{3}{4} l = \frac{pl^4}{8}$.

La flecha en A $= \frac{1}{EI} \times$ momento de ABC respecto a AD

$$= \frac{pl^4}{8EI} = \frac{Pl^3}{8EI} \text{ (P} = pl = \text{peso total)}$$

Ejemplo 29. — Hallar la posición del c. d. g. de un cuadrante de radio r.

La ecuación del círculo es $x^2 + y^2 = r^2$

luego
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$xy = x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Luego

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx}{\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx}.$$

El denominador (integral que puede calcularse según se ve en la página 163) $= \frac{\pi r^2}{4}$, área del cuadrante. Para calcular el numerador, hagamos $u = r^2 - x^2$

$$du = -2x\,dx$$

$$xdx = -\frac{du}{2}.$$

Luego $\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int_{x=0}^{x=r} -\frac{du}{2}\,u$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=r}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^r$$

$$= -\frac{1}{3}[0 - (+r^2)^{\frac{3}{2}}]$$

$$= \frac{1}{3}r^3.$$

De donde

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\frac{1}{3}r^3}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}424\,r$$

CENTROS DE GRAVEDAD DE SÓLIDOS IRREGULARES.—Los métodos para la determinación de centros de gravedad de áreas irregulares se aplican igualmente a los sólidos. Porque si A es el área de la sección transversal de un sólido en cualquier punto de su longitud, a la distancia x de un extremo, y se aumenta esta distancia en δx (bastante pequeño para no alterar el valor de A de una manera sensible), el aumento de volumen será $= A\delta x$ y el de peso $= \rho A\delta x$ (ρ = densidad).

El momento de este elemento con relación al punto extremo $= \rho A\delta x \times x$, y por lo tanto

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \text{ momentos estáticos}}{\Sigma \text{ pesos}} = \frac{\int_0^l \rho Axdx}{\int_0^l \rho Adx}$$

$$= \frac{\int_0^l Axdx}{\int_0^l Adx}.$$

Como anteriormente, se presentan dos casos:

(*a*) Cuando se dan los valores de A y de x.

(*b*) Cuando se da la relación funcional entre A y x.

En el caso (*a*) se traza la curva que tiene A por ordenadas y x por abscisas, por puntos, y se busca el área, lo que da $\int_0^l Adx$. Se traza luego otra curva cuyas ordenadas son Ax y sus abscisas x, y se halla su área. Se divide ésta por la anterior y el cociente da $\bar{x}$, o sea, la vertical del c. d. g.

Si el sólido es simétrico respecto del eje de las x, no hace falta calcular nada más, puesto que la horizontal del c. d. g. será OX. Si no lo es, se aplica el mismo razonamienro para los otros ejes determinando así $\bar{y}$ y $\bar{z}$.

He aquí un ejemplo:

Ejemplo 30. — El perímetro de la sección circular de una columna de fundición de 1,6 m. de longitud, mide en 5 secciones equidistantes 94,3; 79,2; 61,5; 47,4 y 31,6 cm. respectivamente. Hallar su volumen y la distancia de su centro de gravedad a la base (sección mayor).

Deduzcamos primeramente las áreas de los valores de las circunferencias. Tenemos:

$$\text{Area del círculo} = \frac{(\text{circunferencia})^2}{4\pi}$$

De cuya fórmula deducimos la siguiente tabla:

x = distancia a la base en dm.	0	4	8	12	16
A = área de la sección en dm.^{2}	7,09	4,98	3,0	1,78	0,79

Representando estos valores se obtiene la curva EF (fig. 69).

Las escalas de esta figura son: 1 cm. = 2 dm.² para la escala vertical y 1 cm. = 2 dm. para la horizontal; de modo que 1 cm.² de área representa 4 dm.³ de volumen. El área limitada por la curva EF y el eje α, determinada mediante el planímetro, es de 13,66 cm.² y por consiguiente el volumen que representa = 13,66 × 4 = 54,64 dm.³

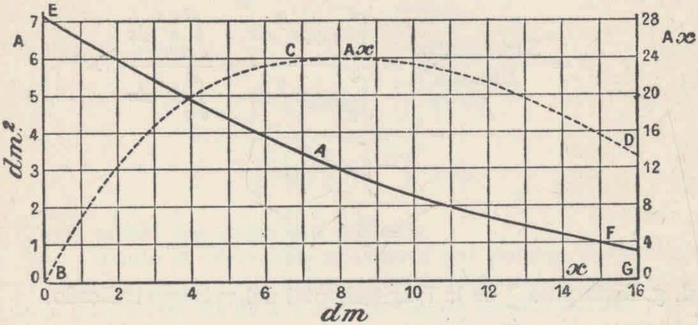


Fig. 69. — Problema sobre una columna de fundición

La curva BCD resulta de la representación de los valores Ax tomados como ordenadas y sacados de la siguiente tabla:

x	0	4	8	12	16
Ax	0	19,9	24	21,4	12,6

El área bajo esta curva es de 19,06 cm.², que representan 19,06 × 16 unidades de momento, puesto que en la representación de Ax se ha tomado la escala vertical: 1 cm. = 8 unidades y sabemos que la horizontal es 1 cm. = 2 unidades de x.

Tenemos pues

$$\bar{x} = \frac{\text{área BCDG}}{\text{área BEFG}} = \frac{16 \times 19{,}06}{54{,}64} = \underline{5{,}58 \text{ dm.}}$$

Para el caso (*b*) en el que se conoce A en función de x, la integración es enteramente algébrica. Así, si A es función de x, se integrará Ax y A con relación a x, y se dividirá la primera integral por la segunda para determinar el valor de $\bar{x}$.

Ejemplo 31. — El área de la sección transversal de una barra de densidad uniforme varía como la raíz cúbica de la distancia x de la sección a un extremo, según la ley: área $= 4{,}5 \sqrt[3]{x}$. Hallar la distancia del centro de gravedad a dicho extremo.

Sea un elemento a la distancia x del extremo y de espesor δx.

Por hipótesis, el área de la sección será $4{,}5 \sqrt[3]{x}$, y por consiguiente el volumen será $4{,}5 \sqrt[3]{x} \times \delta x$.

La masa $= 4{,}5 \times \sqrt[3]{x} \times \delta x \times \rho$ (ρ = densidad) y el momento con relación al extremo $= 4{,}5 \times \sqrt[3]{x} \times \rho \times \delta x \times x = 4{,}5\, \rho x^{\frac{4}{3}}\, \delta x$.

Luego

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \text{ momentos}}{\Sigma \text{ masas}} = \frac{\int_0^l 4{,}5\rho x^{\frac{4}{3}}\, dx}{\int_0^l 4{,}5\rho x^{\frac{1}{3}}\, dx} = \frac{\int_0^l x^{\frac{4}{3}}\, dx}{\int_0^l x^{\frac{1}{3}}\, dx}$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{4}{3} \left(\frac{l^{\frac{7}{3}}}{l^{\frac{4}{3}}}\right)$$

$$= \frac{4l}{7}$$

el c. d. g. dista pues $\frac{4}{7}$ de la longitud total del extremo indicado.

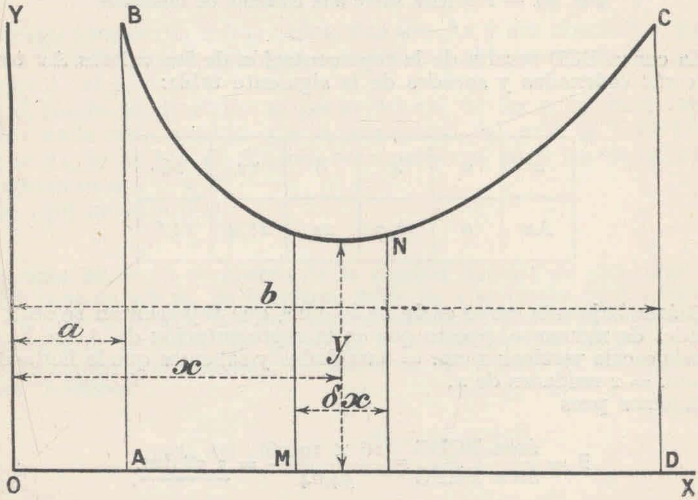


Fig. 70. — C. d. g. de un sólido de revolución

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.— Supongamos que la curva BC (fig. 70) gira en torno a OX como eje. Se pide la posición del centro de gravedad del sólido engendrado.

Sea un pequeño elemento de área MN, de altura media y y ancho δx. El volumen que engendra $= \pi y^2 \delta x$ y su masa $\rho \pi y^2 \delta x$. Su

momento con relación a OY = masa $\times$ distancia $= \rho\pi y^2\delta x \times x =$
$= \rho\pi x y^2 \delta x$.

Tenemos pues,

$$\text{Momento total respecto a OY} = \sum_a^b \rho\pi x y^2 \delta x.$$

$$\text{Masa total} = \sum_a^b \rho\pi y^2 \delta x.$$

Y por lo tanto

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b \rho\pi x y^2 dx}{\int_a^b \rho\pi y^2 dx} = \frac{\int_a^b x y^2 dx}{\int_a^b y^2 dx}$$

Como antes, dos casos son posibles.

(*a*) Cuando la curva sólo se conoce por puntos, es decir, por valores aislados de x e y. Se forma entonces una tabla con valores de x y de y^2 y otra con los de x y xy^2. Se trazan las dos curvas y se hallan las áreas. Se divide la segunda por la primera y el resultado da $\bar{x}$.

Por simetría sabemos que $\bar{y} = 0$, y por lo tanto queda definida la posición del centro de gravedad.

(*b*) Se conoce y en función de x. En este caso, se pueden pues expresar xy^2 e y^2 como funciones de x y se calculan las dos integrales algebraicamente; el resultado de su división da $\bar{x}$. Como anteriormente $\bar{y} = 0$.

Ejemplo 32. — La curva determinada por la tabla siguiente gira alrededor de Ox. Hallar el centro de gravedad del sólido engendrado.

x	0	1	2	3	4
y	8	10	21	26,4	25

Añadamos los valores de y^2 así como los de xy^2. Tendremos:

x	0	1	2	3	4
y^2	64	100	441	696	625
xy^2	0	100	882	2088	2500

La curva AB (fig. 71) se obtiene llevando los valores de xy^2 como ordenadas. El área bajo esta curva = 4323, de modo que

$$\int_0^4 xy^2dx = 4323.$$

La curva CD obtenida llevando y^2 en ordenada, limita un área

$$= \int_0^4 y^2dx = 1699.$$

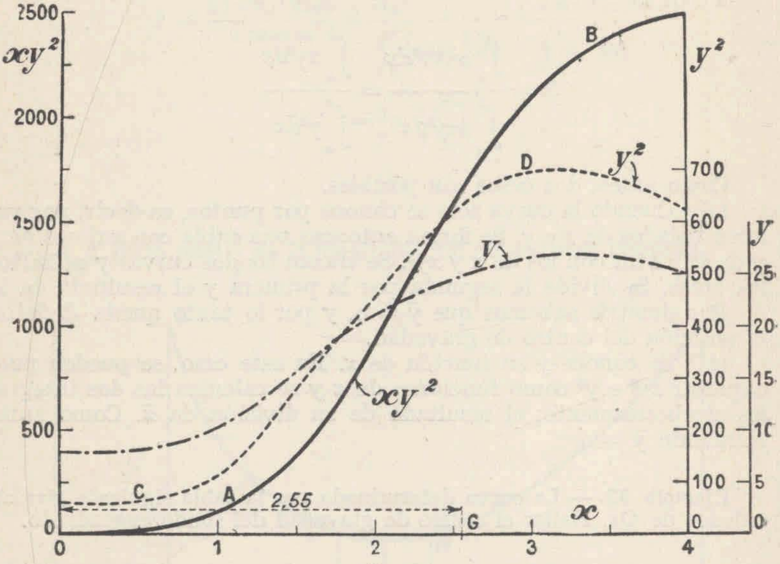


Fig. 71

De modo que

$$x = \frac{\int_0^4 xy^2dx}{\int_0^4 y^2dx} = \frac{4323}{1699} = 2{,}55 \text{ unidades}$$

y por lo tanto, el centro de gravedad tiene por coordenadas

$$\bar{x} = 2{,}55 \quad y = 0.$$

Ejemplo 33. — La curva $x = 5y - 2\sqrt{y}$ gira en torno al eje Oy. Hallar el centro de gravedad del sólido engendrado, limitado por los planos $y = 1$, $y = 5$.

Como que el giro se hace alrededor del eje Oy, y no de Ox como antes, deben permutarse las letras x e y en las fórmulas. Por esta misma arzón hemos dado los límites con respecto a y.

En la figura 72, AB es la curva $x = 5y - 2\sqrt{y}$ y tenemos que determinar la altura y del centro de gravedad del sólido engendrado sobre el eje Ox (*)

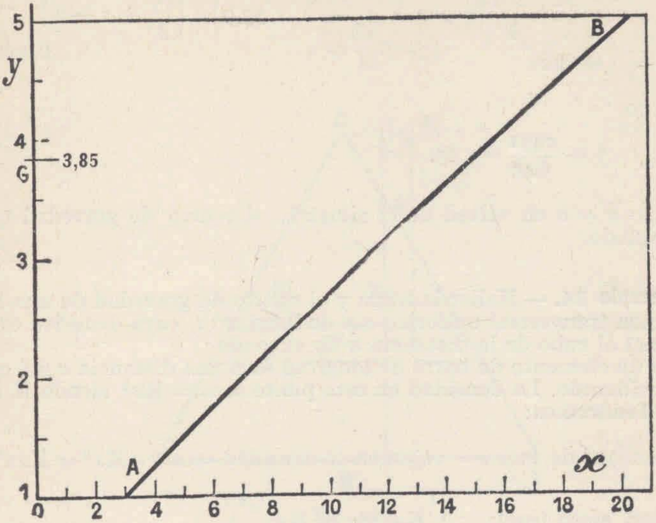


Fig. 72

Tendremos

$$\bar{y} = \frac{\int_1^5 yx^2\,dy}{\int_1^5 x^2\,dy}$$

Ahora bien

$$x = 5y - 2\sqrt{y} \quad \text{Luego } x^2 = 25y^2 + 4y - 20y^{\frac{3}{2}}$$

$$yx^2 = 25y^3 + 4y^2 - 20y^{\frac{5}{2}}$$

Luego

$$\int_1^5 yx^2dy = \int_1^5 [25y^3 + 4y^2 - 20y^{\frac{5}{2}}]\,dy = \left[\frac{25y^4}{4} + \frac{4y^3}{3} - \frac{20 \times 2}{7}\,y^{\frac{7}{2}}\right]_1^5$$

$$= \left(\frac{25 \times 625}{4} + \frac{4 \times 125}{3} - \frac{40}{7} \times 280\right) - \left(\frac{25}{4} + \frac{4}{3} - \frac{40}{7}\right)$$

$$= 2471$$

(*) Dicho eje no está marcado en la figura 72, pues lasabscisas está nseñaladas sobre la paralela a dicho eje $y = 1$. *(N. del T).*

$$\int_1^5 x^2 dy = \int_1^5 [25y^2 + 4y - 20y^{\frac{3}{2}}]\, dy = \left[\frac{25y^3}{3} + \frac{4y^2}{2} - \frac{20 \times 2}{5} y^{\frac{5}{2}}\right]_1^5$$

$$= \left(\frac{25 \times 125}{3} + 2 \times 25 - 8 \times 55{,}9\right) - \left(\frac{25}{3} + 2 - 8\right)$$

$$= 642$$

Luego

$$y = \frac{2471}{642} = 3{,}85.$$

Como $x = 0$ en virtud de la simetría, el centro de gravedad queda determinado.

Ejemplo 34. — Hallar la masa y el centro de gravedad de una barra de sección transversal uniforme a y de longitud l, cuya densidad es proporcional al cubo de la distancia a un extremo.

Sea un elemento de barra de longitud δx a una distancia x del extremo considerado. La densidad en este punto será $= Kx^3$, siendo K constante. Tendremos:

Elemento de masa = volumen $\times$ densidad $= a\delta x \times Kx^3 = Kax^3\delta x$.

Luego, masa total $\int_0^l Kax^3 dx = Ka\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^l$

Además, momento del elemento = masa $\times$ distancia $= Kax^3\delta x \times x$.

Luego, momento total $= \int_0^l Kax^4 dx = \frac{Kal^5}{5}$

De donde, la distancia del centro de gravedad al extremo considerado será:

$$\bar{x} = \frac{\frac{Kal^5}{5}}{\frac{Kal^4}{4}} = \frac{4}{5} l.$$

Ejemplo 35. — Hallar la situación del centro de gravedad de una lámina triangular cuya densidad varía como la distancia al vértice. El espesor de la lámina es constante $= e$.

Sea un elemento de ancho δx que dista x del vértice.

Area de dicho elemento $= y\delta x$.

Volumen $= ey\delta x$

Densidad $= Kx$ (K constante).

Por triángulos semejantes

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{H}$$

Luego

$$y = \frac{B}{H} x$$

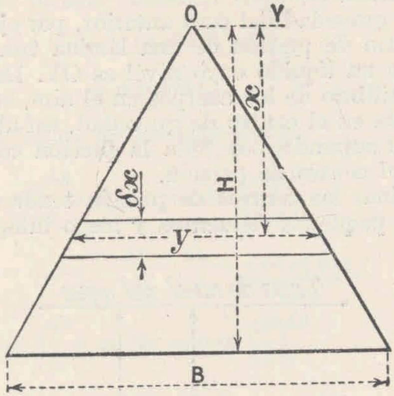


Fig. 73

Por consiguiente,

$$\text{Elemento de masa} = ey\delta x \times Kx = \frac{BKe}{H} x^2 \delta x$$

$$\text{Momento de la misma respecto OY} = \frac{BKe}{H} x^3 \delta x$$

Luego

$$x = \frac{\int_0^H \frac{BKe}{H} x^3 dx}{\int_0^H \frac{BKe}{H} x^2 dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^H}{\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^H} = \frac{H^4}{4} \times \frac{3}{H^3}$$

$$= \underline{\frac{3}{4} H.}$$

CENTRO DE PRESIÓN. — Cuando un sólido se halla sumergido en un líquido, la presión por centímetro cuadrado que soporta no es uniforme en todos los puntos de su superficie, puesto que es proporcional a la profundidad. El punto en el que se puede suponer actúa la presión resultante se llama *centro de presión.*

El cálculo de los centros de presión equivale al de los centros de gravedad de cuerpos cuya densidad es proporcional a la distancia a un eje o plano dado. (*)

El centro de gravedad del caso anterior, por ejemplo, no es otra cosa que el centro de presión de una lámina triangular sumergida verticalmente en un líquido cuyo nivel es OY. De igual modo que al tratar del equilibrio de los cuerpos en el aire, supusimos toda su masa concentrada en el centro de gravedad, así al tratar de los sólidos sumergidos supondremos toda la presión concentrada en un punto a saber, el centro de presión.

Para determinar los centros de presión tendremos que analizar la presión sobre pequeños elementos y luego integrar.

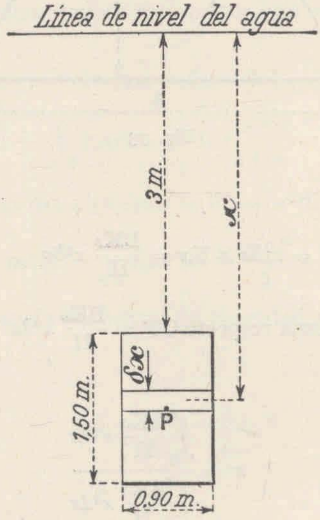


Fig. 74

Ejemplo 36. — Hallar la presión total sobre una cara de una compuerta rectangular de esclusa, de altura = 1,50 m., anchura = 0,90 m., cuando el borde superior se halla a 3 m. bajo el nivel del agua. Hallar la profundidad del centro de presión.

Sea un elemento de compuerta de ancho δx, a una profundidad x del nivel (fig. 74).

(*) Entiéndase lo dicho, para superficies planas. *(N. del T.).*

Area de dicho elemento = 0,90 × δx

A una profundidad de x m. la presión por m.² = peso de una columna de agua de x m. de altura y 1 m.² de sección = peso de x m.³ = x toneladas.

Tendremos pues:

$$\text{Presión sobre el elemento} = 0{,}90\,\delta x \times x$$

Momento de la presión elemental respecto del nivel

$$= 0{,}90 x\delta x \times x$$
$$= 0{,}90 x^2 \delta x.$$

Y, por integración de ambas expresiones,

$$\text{Presión total} = \int_3^{4,5} 0{,}90 x\delta x = 0{,}90 \left(\frac{x^2}{2}\right)_3^{4,5}$$

$$= 0{,}90 \left(\frac{20{,}25 - 9}{2}\right) = \underline{5{,}0625 \text{ ton.}}$$

$$\text{Momento total} = \int_3^{4,5} 0{,}90 x^2\delta x = 0{,}90 \left(\frac{x^3}{3}\right)_3^{4,5}$$

$$= 0{,}90 \left(\frac{91{,}125 - 27}{3}\right) = 19{,}2375 \text{ ton.} \times \text{m.}$$

Dividiendo resulta,

$$\bar{x} = \frac{19{,}2375}{5{,}0625} = \underline{3{,}80} \text{ m.}$$

El centro de presión se halla pues a 3,80 m. bajo el nivel del agua.

La investigación general de los centros de presión se verá en el capítulo X.

Ejercicios 19. — Sobre la determinación de centros de gravedad

1. La densidad del material de que está hecho un cono recto circular varía como el cuadrado de la distancia al vértice. Hallar su centro de gravedad.

2. Las semiordenadas equidistantes de la curva de flotación de un barco son las siguientes, empezando por la proa: 0,18 m., 0,87 m., 2,77 m., 4,74 m., 5,50 m., 5,70 m., 5,63 m., 5,37 m., 4,62 m. y 2,05 m.
Hallar el área del plano de flotación y la situación longitudinal de su c. d. g. sabiendo que la longitud del barco en este plano es = 82,5 m.

3. Una plancha triangular de base igual 0,5 m. y altura igual a 0,8 m. se sumerge en el agua de modo que la base se queda en el plano del nivel, hallar la presión total y el centro de presión sabiendo que la posición de la plancha es vertical (*).

4. Hallar la profundidad del centro de presión en un muro de contención de 2,40 m. de ancho por 4,5 m. de profundidad.

5. Trazar el cuadrante de un círculo de 10 cm. de radio y hallar su c. d. g. por el procedimiento de la doble integración gráfica.

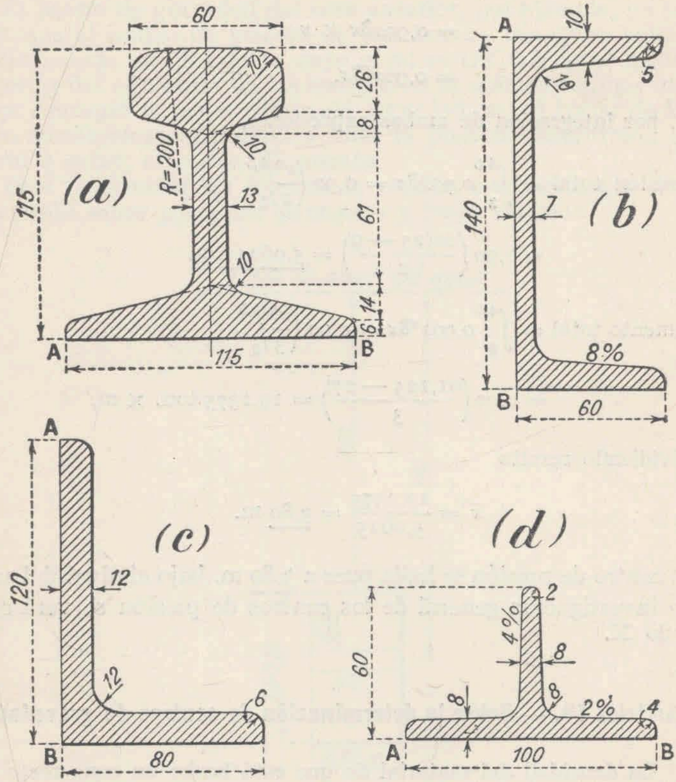


Fig. 75

6. La parte de la parábola $y = 2x^2 - 9x$ que se encuentra por bajo del eje OX, gira en torno a dicho eje. Hallar el volumen del paraboloide engendrado y la distancia de su centro de gravedad a OY.

(*) Tanto en este ejercicio como en los números 15 y 16 y siempre que se pide la presión total sobre una forma plana sumergida se sobreentiende naturalmente, sobre una cara. *(N. del T).*

7. Hallar el c. d. g. del área limitada por la curva $y = 1,7 - 0,2x^2$, el eje OX y las ordenadas por $x = -1$ y $x = +4$.

8. Reproducir a tamaño natural el perfil de un carril (fig. 75 (*a*)) y hallar la posición del c. d. g. por el método del ejemplo 23.

9. Trazar un segmento de círculo de diámetro = 150 mm. sobre una cuerda de 148 mm. y hallar por el método del ejemplo 23 la altura del c. d. g. sobre la cuerda. (Tómese el segmento menor que el semicírculo).

Hallar la distancia del c. d. g. a la línea AB en las secciones de los números 10, 11 y 12.

10. Perfil en ⊔ (*b*) figura 75.

11. Perfil angular de lados desiguales (*c*) figura 75.

12. Viga en T, (*d*) figura 75.

13. Dibujar cuidadosamente (*a*) de la figura 76, que representa la media sección de la forma tipo de un montante fuselado de aeroplano, tomando $t = 50$ mm. y por el método del ejemplo 23, determinar la distancia del c. d. g. al borde anterior.

14. Hallar el c. d. g. de la columna de la figura 57, página 235, teniendo en cuenta las explicaciones dadas en la cuestión núm. 2 de la página 235. (Tratar la base, capitel y fuste como tres porciones distintas).

15. Se cierra con una compuerta plana una tubería horizontal de 90 cm. de diámetro cuyo eje se halla a 10,50 m. de la superficie del agua. Hallar la presión total sobre la compuerta.

16. Se sumerge verticalmente en agua del mar una plancha semicircular, de modo que su diámetro se halle en el plano de la superficie del agua. Este diámetro es igual a 1,2 m. Hallar la presión total sobre la plancha y la profundidad del centro de presión si la densidad del agua del mar vale 1,027.

(*Nota.* — Las fórmulas de reducción de la página 196 simplificarán el cálculo de las integrales de este problema).

17. La parábola $y^2 = 6x$ gira en torno a OX. Hallar la distancia del vértice al centro de gravedad del paraboloide engendrado sabiendo que el diámetro extremo del paraboloide es igual a 18.

18. El diámetro de un huso varía de la manera siguiente:

Distancia a un extremo (dms.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Diámetro (dms.)...........	1,5	1,12	0,83	0,85	1,18	1,5	1,78	1,96	2

Hallar la distancia del centro de gravedad al primer extremo.

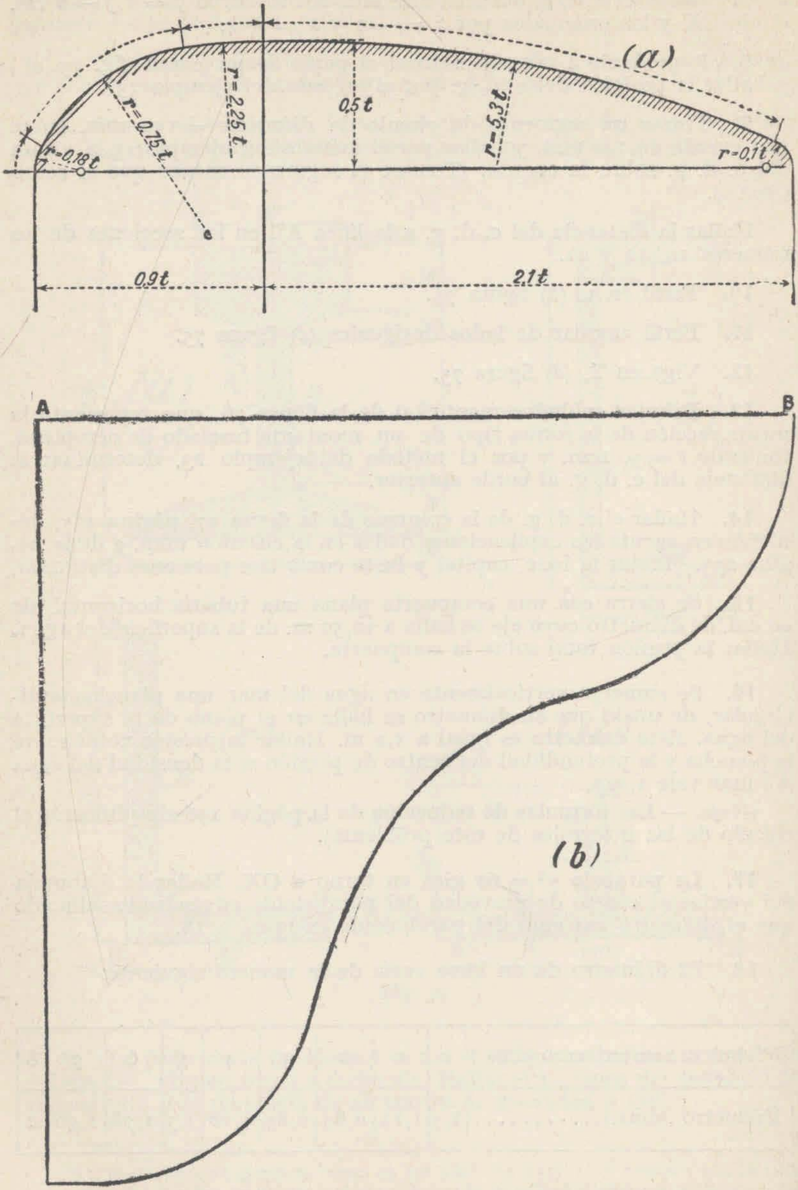


Fig. 76

19. Hallar por el procedimiento de la doble integración gráfica la distancia de AB al c. d. g. de la sección de carril representada en (*a*) figura 75.

20. Un cono recto de revolución de aluminio tiene una altura de 7 dm. y un diámetro de base de 10 dm. Hallar (*a*) su masa, sabiendo que la densidad del aluminio es 2,58, (*b*) la altura del c. d. g. sobre la base del cono.

21. Hallar por el procedimiento de la doble integración gráfica la distancia de AB al c. d. g. del área dibujada en (*b*) figura 76.

22. Un segmento de parábola de altura h descansa sobre una base b. Hallar la altura del c. d. g. sobre la base.

23. Se sumerge en el agua una placa triangular de altura h de modo que su vértice se halla en el plano de la superficie y su base horizontal. Hallar la profundidad del centro de presión.

MOMENTO DE INERCIA. — El producto de una masa por el cuadrado de la distancia a un punto o eje fijo recibe el nombre de momento segundo, cuadrático o de inercia, de la masa con relación a dicho punto o eje. Para un conjunto de masas la suma de dichos productos se llama asimismo momento segundo o *momento de inercia* del sistema. Si se aumenta este número indefinidamente, y las masas individuales se confunden hasta formar una sola masa total, la suma de estos productos se llamará también momento de inercia del cuerpo en cuestión.

Esta cantidad, momento de inercia, designada generalmente por la letra I, aplicada a secciones de ciertos cuerpos, determina en gran número de casos la resistencia de dichos cuerpos para ciertos esfuerzos mecánicos, y por lo tanto, figura en numerosas fórmulas de ingeniería. Asimismo, en casos de movimiento angular I figura en las fórmulas en vez de la masa. Por estas y otras razones es indispensable familiarizarse con el cálculo de momentos de inercia.

Consideremos algunos ejemplos. Sea el caso de una viga cargada de cualquier manera cuya sección se halla representada en la figura 77. Se acostumbra a dar por sentado que:

(*a*) No hay resultante de los esfuerzos normales sobre la sección, es decir, que suma de tensiones = suma de compresiones.

(*b*) Que el esfuerzo y la fuerza son proporcionales, y que el módulo de Young del material es igual para la tensión que para la compresión.

(*c*) Que el radio original de curvatura de la viga es muy grande comparado con las dimensiones de la sección transversal.

La superficie de la viga que no se halle ni distendida ni comprimida recibe el nombre de *superficie neutra*, y la intersección de esta superficie por una sección transversal cualquiera se llama *eje neutro* de la sección.

Sea NN (fig. 77) el eje neutro y σ = el esfuerzo unitario a una unidad de distancia de NN, o bien, σy = esfuerzo a la distancia y.

En una sección tomada a esta distancia con anchura = b, y altura = δy la fuerza = esfuerzo × área = $\sigma y \times b\delta y$.

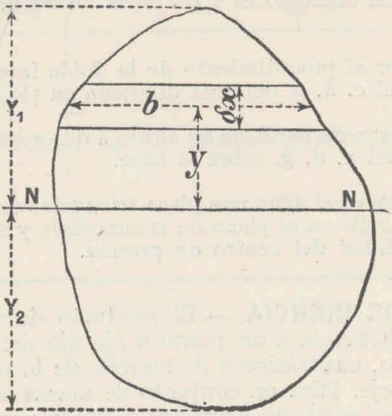


Fig. 77

Ahora bien, las fuerzas a ambos lados de NN tienen que equilibrarse. Luego

$$\int_{-Y_2}^{Y_1} b\delta y \times \sigma y = 0$$

pero, $\int_{-Y_2}^{Y_1} \sigma b dy \times y$ = momento estático total de las fuerzas

y el eje con relación al cual se anula esta cantidad pasa por el c. d. g. de la sección. Luego NN pasa por el c. d. g.

Las fuerzas de tensión y de compresión forman un par, cuyo momento es

$$\Sigma \text{ fuerzas} \times \text{distancias} = \sum_{-Y_2}^{Y_1} b\delta y \sigma y \times y$$

$$= \sigma \sum_{-Y_2}^{Y_1} b\delta y \times y^2$$

En el límite pues, el momento de resistencia de las fuerzas interiores

$$= \sigma \int_{-Y_2}^{Y_1} b dy \times y^2 = \sigma \int \text{área} \times (\text{distancia})^2$$
$$= \sigma \times \text{momento de inercia de la sección con relación a NN}$$
$$= \sigma I$$

Si M es el momento de flexión, es decir, el momento de las fuerzas exteriores, tiene que ser equilibrado por el de las fuerzas interiores. De modo que

$$M = \sigma I$$

Asimismo, si

$$f_1 = \text{máximo esfuerzo de tensión} = \sigma Y_1$$
$$f_2 = \text{máximo esfuerzo de compresión} = \sigma Y_2$$

Tendremos

$$\sigma = \frac{f_1}{Y_1} = \frac{f_2}{Y_2} = \frac{M}{I}$$

o, en general,

$$\frac{M}{I} = \frac{f}{y}$$

Por lo tanto, para conocer la resistencia de una viga a la flexión hay que calcular el momento de inercia de su sección. Conocido éste y el momento de flexión podremos calcular el esfuerzo máximo que sufre la sección.

Como segunda ilustración de la importancia de I en fórmulas de Ingeniería, veamos el caso siguiente: Si un imán oscila en un campo magnético uniforme, el tiempo T de una oscilación completa se obtiene por la fórmula

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}}$$

en la que

I = Momento de inercia del imán
M = Momento magnético del imán
H = Intensidad del campo uniforme en que oscila el imán.

Se observará que la masa no interviene en la fórmula. En realidad, sin embargo, figura implícitamente en I, no sólo como tal masa total sino en cuanto a su forma, consideración de gran importancia en todo movimiento angular. Así, una masa de 1 kg. que oscila en la extremidad de un brazo de 100 cms. desarrolla una energía cien veces mayor que si la misma masa, con igual velocidad angular, oscilase en el extremo de un brazo de 10 cms.

La razón que explica la presencia de I en las fórmulas concernientes a la energía de rotación aparece más clara si se estudia atentamente el ejemplo siguiente.

Ejemplo 37. — Un disco gira a razón de n revoluciones por segundo. Hallar la expresión de su energía de rotación o energía cinética.

Si la masa total es m, consideremos un elemento δm de dicha masa a una distancia r del eje de rotación (fig. 78).

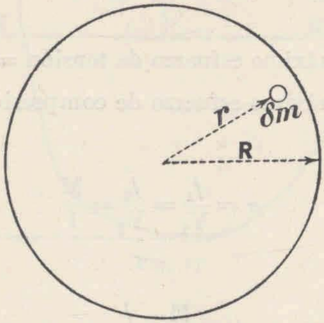


Fig. 78

La velocidad lineal al borde igual a $V = 2\pi n R$.

La velocidad angular $= \omega =$ número de radianes por segundo.

$$= 2\pi n.$$

Luego $$R\omega = 2\pi n R = V$$

o sea $$\omega = \frac{V}{R}.$$

Por lo tanto ω es la misma para todos los puntos del disco, mientras que V depende del radio.

Energía cinética de δm

$$= \frac{\text{masa} \times (\text{velocidad})^2}{2g} = \frac{\delta m \times v^2}{2g}$$

$$= \frac{1}{2g}\,\omega^2 r^2 \delta m$$

$$= \frac{\omega^2}{2g}\,r^2 \delta m$$

Luego,

Energía cinética total del disco

$$= \int_0^R \frac{\omega^2}{2g} r^2 dm$$

$$= \frac{\omega^2}{2g} \int_0^R \text{masa} \times (\text{distancia})^2$$

$$= \frac{\omega^2}{2g} \times \text{I (del disco)}$$

Si comparamos esta fórmula con la correspondiente al movimiento lineal, energía cinética $= \frac{1}{2g} mv^2$ observamos que al pasar del movimiento lineal al angular, I *reemplaza a m y ω a v.*

Supongamos que la velocidad media $= v_1 = r\omega$.

Entonces $\frac{1}{2g} mv_1^2 = \frac{1}{2g} I\omega^2$

es decir $mr_1^2\omega^2 = I\omega^2$

de donde $I = mr_1^2$

Si, por consiguiente, se concentrase toda la masa a la distancia r_1 del eje, la energía cinética del sistema no cambiaría. La distancia r_1 recibe el nombre de *radio de giro* es decir, es el radio efectivo en cuanto afecta a la rotación. (Obsérvese que r_1 no es la media aritmética de los distintos radios sino su media cuadrática

$$r_1 = \sqrt{\frac{\Sigma\ (\text{radios})^2}{\text{número de ellos}}}.$$

En general puede escribirse mr_1^2 en vez de I (o Ar_1^2 si se trata de áreas y no de masas).

DETERMINACIÓN DE I PARA UNA SECCIÓN CUALQUIERA. — Es conveniente fiar a la memoria los valores de I para cierto número de secciones sencillas, pero conviene también darse cuenta del sentido de las palabras «momento de inercia», para poder calcularlo para cualquier sección o sólido en caso de necesidad.

Así pues, sabiendo que para obtener el momento de inercia se suman los segundos momentos, dividiremos el área o masa cuyo momento de inercia se desea en cierto número de elementos cuya área o masa calcularemos; multiplicaremos cada una de dichas masas o áreas por el cuadrado de su distancia al eje o punto fijo con relación al cual se pide el momento de inercia, y sumaremos los productos así obtenidos cuya suma nos dará el momento de inercia deseado.

Si se desea la longitud del radio de giro se determinará por medio de la relación $I = Ak^2$ (para un área) o, $I = Mk^2$ (para un sólido); obteniendo A o M por suma de las áreas o masas de los elementos; así:

$$k = \sqrt{\frac{\Sigma \text{ momentos cuadráticos de los elementos}}{\Sigma \text{ áreas o masas de los elementos}}}.$$

En cuanto a las unidades con las que se mide I, observaremos que, como revelan las fórmulas $I = Ak^2$, $I = Mk^2$, I; en el caso de las áreas, tiene por dimensiones = área $\times$ (longitud)^2 = (longitud)^4; mientras que en el caso de las masas, I = masa $\times$ (longitud)^2.

El momento de inercia se expresa siempre con relación a un eje dado y es a veces necesario pasar de un eje a otro. Para facilitar este cambio son necesarias las siguientes reglas.

TEOREMA DEL EJE PARALELO. — Por medio de este teorema puede deducirse el momento de inercia con relación a cualquier eje, cuando se conoce el momento de inercia con relación a un eje paralelo que pasa por el centro de gravedad.

En la figura 79, NN es el eje neutro de la sección; se requiere el momento de inercia con relación a AB es decir I_{AB}.

Si consideramos el elemento indicado en la figura:

$$I_{AB} \text{ del elemento} = \rho b\delta y \times y^2$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } I_{AB} \text{ total} &= \rho\int by^2dy \\ &= \rho\int dyb\,(Y - d)^2 \\ &= \rho\int bdy\,(Y^2 + d^2 - 2Yd) \\ &= \rho\int bdy \times Y^2 + \rho\int bdy \times d^2 - 2\rho\int bdyYd. \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\int\rho bdy \times Y^2 = I_{NN} \text{ total}$$

$$\int\rho bdy \times d^2 = d^2\int\rho bdy = d^2 \times \text{masa total} = md^2$$

$$\begin{aligned} \text{y}\quad 2d\int\rho bdy \times Y^2 &= 2d \times \text{momento estático total respecto de NN} \\ &= 2d \times 0 \text{ (puesto que NN es un eje que, como sabemos, pasa por el c. d. g. de la sección)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Luego}\quad I_{AB} = I_{NN} + md^2$$

de modo que:

Para hallar el momento de inercia con relación a un eje cualquiera se calcula el momento de inercia con relación al eje paralelo que pasa por el centro de gravedad y se le añade el producto de la masa por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes.

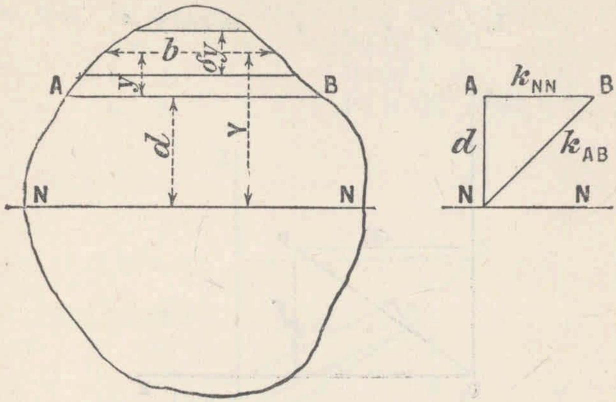


Fig. 79

Ejemplo. — Si $I_{NN} = 47$, Masa $= 12{,}4$ Distancia $= 2{,}3$

tendremos $I_{AB} = I_{NN} + md^2 = 47 + 12{,}4 \times (2{,}3)^2$

$= 47 + 65{,}7 = 112{,}7.$

Puesto que $I_{AB} = I_{NN} + md^2$

tendremos $mk_{AB}^2 = mk_{NN}^2 + md^2$ (k_{AB} y k_{NN} son los radios de giro respecto de los ejes en cuestión)

luego $k_{AB}^2 = k_{NN}^2 + d^2$

relación representada por la figura 79 y que proporciona un método gráfico para hallar K_{AB}, cuando se conoce K_{NN}

TEOREMA DE LOS EJES PERPENDICULARES. — Se desea el momento de inercia con relación a un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por O. Llámase tal momento, *momento de inercia polar* (*).

Para distinguir el momento con relación a un eje dentro del plano de la figura y el momento con relación a un eje perpendicular, llamaremos a este último I_O, mientras que los primeros serían I_{OX}, I_{OY}, según los casos.

(*) Obsérvese que dicho momento no es más que el momento de inercia con relación al punto O. Por esta razón se llama *polar*. *(N. del T).*

Para hallar I_O, considérese un elemento pequeño de masa, δm en P (fig. 80).

$$I_{OX} \text{ de este elemento} = \delta m \times y^2$$
$$I_{OY} \text{ » » »} = \delta m \times x^2$$
$$I_O \text{ » » »} = \delta m \times r^2$$

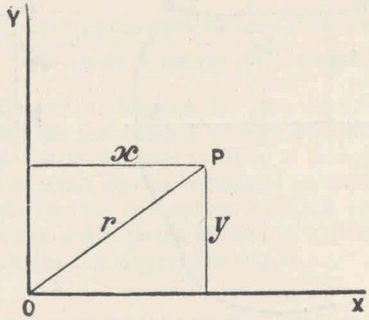


Fig. 80

Ahora bien, $r^2 = x^2 + y^2$

Luego $\delta m \cdot r^2 = m \cdot x^2 + \delta m \cdot y^2$

y $\int dm \cdot r^2 = \int dm \cdot x^2 + \int dm \cdot y^2$

Es decir I_O total $= I_{OY}$ total $+ I_{OX}$ total

o sea $I_O = I_{OY} + I_{OX}$

Así pues,

Si se conocen los momentos de inercia de una figura plana con relación a dos ejes perpendiculares situados en plano de la figura se obtendrá el momento de inercia respecto al eje perpendicular al plano, en la intersección de los dos primeros ejes, sumando los dos momentos de inercia respecto de éstos.

En los casos especiales para los cuales $I_{OX} = I_{OY}$

tendremos $I_O = 2I_{OX}$.

RELACIÓN ENTRE EL MOMENTO DE INERCIA DE UN SÓLIDO CON RELACIÓN A UN PUNTO Y LOS MOMENTOS DE INERCIA CON RELACIÓN A TRES EJES RECTANGULARES QUE PASAN POR DICHO PUNTO.

Es decir (fig. 81) relacion entre I_O, I_{OX}, I_{OY}, I_{OZ}.

Sea δm un elemento de masa en el punto P.

Si $PS = x$, $PT = y$, $PM = z$, $OP = r$, tendremos

$$(ON)^2 + (NM)^2 + (PM)^2 = (OP)^2 \qquad ON = PS,\ NM = PT$$

es decir

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Ahora bien I_{OX} del elemento $= \delta m \times PN^2 = \delta m\,(y^2 + z^2)$

I_{OY} » » $= \delta m\,(x^2 + z^2)$

I_{OZ} » » $= \delta m\,(y^2 + x^2)$

I_O » » $= \delta m \times OP^2 = \delta m \times r^2$

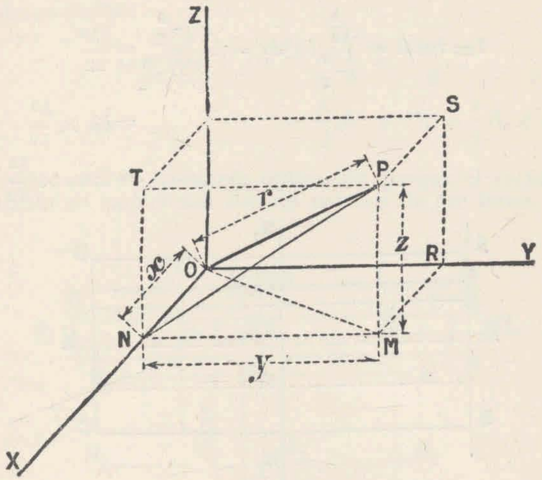


Fig. 81

Luego

$$I_O = \delta m \times r^2 = \delta m\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= \delta m\,\frac{x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 + x^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,(I_{OZ} + I_{OX} + I_{OY})$$

Y para la masa total

$$\int \delta m \times r^2 = \frac{1}{2}\int \delta m\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

o sea, del mismo modo que para las masas elementales

$$I_O \text{ total} = \frac{1}{2}\,(I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ}).$$

Apliquemos ahora estos principios a la determinación de los momentos de inercia de varias secciones y sólidos, comenzando por el caso de una sección rectangular.

Ejemplo 38. — Hallar los momentos de inercia de un rectángulo con relación a varios ejes.

(*a*) Hallar I_{NN} (fig. 82) (NN = eje neutro).

Consideremos el elemento de ancho δx.

I_{NN} del elemento $= b\delta x \times x^2 =$ área $\times$ (distancia)^2

$$I_{NN} \text{ total} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} bx^2dx = b\left(\frac{x^3}{3}\right)_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

$$= bh \times \frac{h^2}{12}$$

$$= \text{área} \times \frac{h^2}{12}.$$

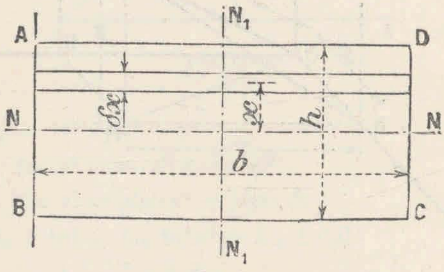


Fig. 82

Ahora bien,

$$I_{NN} = A\,(k_{NN})^2.$$

Siendo A el área de la sección

Luego, $$A\,\frac{h^2}{12} = A\,(k_{NN})^2$$

o sea $$(k_{NN})^2 = \frac{h^2}{12}.$$

Por analogía $$I_{N_1N_1} = \frac{Ab^2}{12}$$

(*b*) Hallar I_{AB}.

Sabemos que $$I_{N_1N_1} = \frac{Ab^2}{12}$$

y la distancia de AB a $N_1N_1 = \frac{b}{2}$.

Luego $$I_{AB} = I_{NN_1} + \left[A \times \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = A\frac{b^2}{12} + A\frac{b^2}{4} = \frac{Ab^2}{3}.$$

I_{AB} es mayor que $I_{N_1N_1}$, como era de suponer, puesto que el radio de giro tiene que ser mayor si la placa gira en torno a AB, que si gira en torno a N_1N_1.

De igual modo

$$I_{AD} = \frac{Ah^2}{3}$$

De lo que se deduce

$$I_A = I_{AB} + I_{AD} = A\frac{b^2}{3} + A\frac{h^2}{3}$$

$$= \frac{A}{3}(h^2 + b^2) = \frac{1}{3} A \times BD^2.$$

Estas reglas son de frecuente aplicación porque el rectángulo entra como elemento en numerosas formas usuales de secciones.

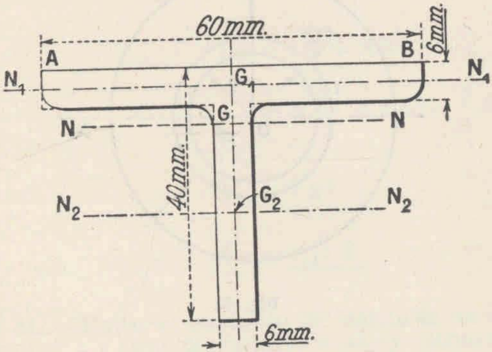


Fig. 83

Ejemplo 39. — Determinar I_{NN} de la sección T dada en la figura 83. El eje neutro dista 1,02 cm. de AB (véase ejemplo 25, pág. 247). Para la cabeza

$$I_{N_1N_1} = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12} \times 6 \times 0{,}6^3 = 0{,}108 \text{ cm.}^4$$

y como $G_1G = 0{,}72$ cm., se tendrá, por el teorema del eje paralelo.

I_{NN} de la cabeza $= I_{N_1N_1} + [A \times (G_1G)^2]$ (siendo A el área de la cabeza)

$$= 0{,}108 + (6 \times 0{,}6 \times 0{,}72^2) = 0{,}108 + 1{,}86$$

$$= 1{,}97 \text{ cm.}^4$$

Para el alma $I_{N_2N_2} = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} \times 0{,}6 \times (3{,}4)^3 = 1{,}96 \text{ cm.}^4$

y como $G_2G = 1{,}28$ cm.

$$I_{NN} \text{ del alma} = I_{N_2N_2} + [A \times (G_2G)^2]$$
$$= 1{,}96 + (3{,}4 \times 0{,}6 \times 1{,}28^2) = 1{,}96 + 3{,}35$$
$$= 5{,}31 \text{ cm.}$$

Luego I_{NN} de la sección completa $= 1{,}97 + 5{,}31 = \underline{7{,}28 \text{ cm.}^4}$

Ejemplo 40. — Hallar el momento de inercia polar de un disco circular de radio R, y el momento de inercia con relación a un diámetro.

Consideremos un anillo de anchura δr, a una distancia r del centro (figura 84).

$$I_O \text{ del anillo} = \text{área} \times (\text{distancia})^2 = 2\pi r \delta r \times r^2 = 2\pi r^3 \delta r.$$

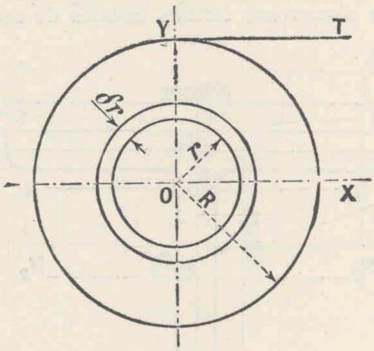


Fig. 84

Luego, $I_O \text{ total} = \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi R^4}{4} = \underline{\frac{\pi R^4}{2}}.$

Ahora bien $I_{OX} = I_{OY}$

$$I_O = I_{OX} + I_{OY} = 2I_{OX}$$

Luego $I_{OX} = \frac{1}{2} I_O = \underline{\frac{\pi R^4}{4}}.$

De donde, los radios de giro

$$Ak_O^2 = I_O = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$\pi R^2 k_O^2 = \frac{\pi R^4}{2}$$

luego $$k_O^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$k_O = \frac{R}{\sqrt{2}} = \underline{0,707R.}$$ Compárese con el valor medio cuadrático de una función sinusoidal de amplitud R.

Asimismo

$$Ak_{OX}^2 = I_{OX} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$k_{OX}^2 = \frac{\pi R^4}{4 \times \pi R^2} = \frac{R^2}{4}$$

$$k_{OX} = \frac{R}{2} = \underline{0,5\ R.}$$

Para hallar el radio de giro con relación a una tangente,

$$(\text{distancia})^2 \text{ de OX a YT} = R^2$$

luego

$$I_{YT} = I_{OX} + AR^2$$

$$= A\frac{R^2}{4} + AR^2 = \frac{5}{4}AR^2$$

luego

$$k_{YT}^2 = \frac{5}{4}R^2$$

$$k_{YT} = \underline{1,12\ R.}$$

Ejemplo 41. — Hallar el momento de inercia de un cilindro circular recto de longitud h y radio R, respecto a los ejes siguientes:

(*a*) Respecto al eje del cilindro.

(*b*) Respecto a un eje perpendicular al anterior pasando por el centro de gravedad.

(*c*) Respecto a un eje paralelo al (*b*) situado en una de las bases.

(*a*) Respecto al eje del cilindro.

El momento de inercia relativo al eje, del elemento cilíndrico de longitud δx (fig. 85)

$$= \text{masa} \times \frac{R^2}{2} \text{ (ejemplo 40)}$$

$$= \pi\rho R^2\delta x \times \frac{R^2}{2}$$ siendo ρ la densidad del material.

De donde, momento de inercia total

$$= \int_0^h \rho\pi R^2 \frac{R^2}{2}\, dx = \frac{\rho\pi R^4}{2} h$$

$$= \rho\pi R^2 h \times \frac{R^2}{2}$$

$$= m\frac{R^2}{2}$$

siendo m la masa total del cilindro.

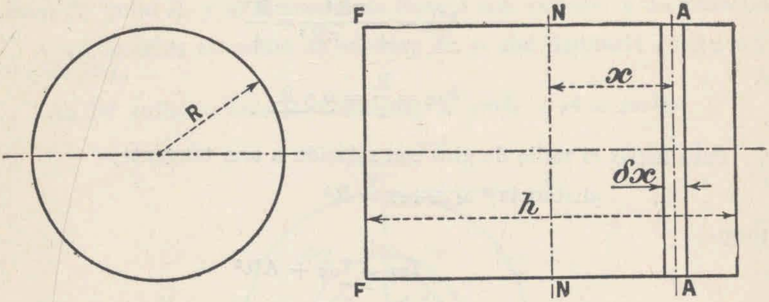


Fig. 85

(*b*) Respecto a un eje perpendicular al del cilindro, y que pasa por el centro de gravedad.

El momento de inercia del elemento con relación a AA (eje paralelo a NN)

$$= \text{masa} \times \frac{R^2}{4} \quad \text{(Ejemplo 40)}$$

$$= \rho\pi R^2 \delta x \times \frac{R^2}{4}.$$

Luego

$$I_{NN} \text{ de dicho elemento} = I_{AA} \text{ del mismo} + (\text{masa} \times x^2)$$

puesto que AA pasa por el c. d. g. del elemento

$$= \frac{\rho\pi R^4}{4} \delta x + \rho\pi R^2 x^2 \delta x$$

Integrando

$$I_{NN} \text{ total} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\rho\pi R^4}{4}\, dx + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho\pi R^2 x^2 dx$$

$$= \frac{\rho\pi R^4}{4}\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right) + \rho\pi R^2\left(\frac{h^3}{24}+\frac{h^3}{24}\right)$$

$$= \rho\pi R^2 h \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$$

$$= m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right).$$

(*c*) Con relación a un eje paralelo al anterior y situado en una de las bases.

Sea FF este eje. La distancia entre FF y NN $= \frac{h}{2}$.

Hemos visto que

$$I_{NN} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$$

Luego

$$I_{FF} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) + m \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$= m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right).$$

Ejemplo 42. — Hallar la expresión del momento de inercia de una polea de radio exterior R y de espesor de llanta $= a$. Desprécìense los brazos o rayos de la rueda.

Sea r = radio interior. Tenemos $r = R - a$.

Según los resultados del ejemplo 40 (pág. 278) sabemos que el I de la rueda sólida $= \frac{\pi R^4}{2} \times \rho b$. Tendremos pues que restar de aquí, el I de un disco de radio $r = \frac{\pi r^4}{2} \times \rho b$ (ρ = densidad del material. b = ancho de la llanta).

Luego

$$I_0 = \frac{\pi R^4}{2} \rho b - \frac{\pi r^4}{2} \rho b = \frac{\pi \rho b}{2} (R^4 - r^4)$$

$$= \frac{\pi \rho b}{2} (R^2 + r^2)(R^2 - r^2)$$

$$= \pi \rho b (R^2 - r^2) \times \frac{R^2 + r^2}{2}$$

$$= M \left(\frac{R^2 + r^2}{2}\right). \qquad (1)$$

Siendo M la masa de la polea.
Reemplazamos ahora r por su valor $R - a$

$$I_0 = \frac{M}{2} (R^2 + R^2 + a^2 - 2Ra) = \frac{M}{2} (2R^2 - 2Ra + a^2).$$

De (1) se deduce que para que I_0 sea lo más grande posible R y r tienen que ser casi iguales, es decir a debe ser muy pequeño comparado con R. Podremos pues despreciar a^2 en primera aproximación y hacer

$$I_0 = \frac{M}{2} \times 2R(R - a) = MR(R - a).$$

Volviendo a (1)

$$I_0 = M\frac{R^2 + r^2}{2}$$

luego

$$Mk_0^2 = M\frac{R^2 + r^2}{2}$$

o sea

$$k_0^2 = \frac{R^2 + r^2}{2}$$

$$k_0 = 0{,}707\sqrt{R^2 + r^2}.$$

Como aproximación, se utiliza la fórmula

$$k_0 = \frac{1}{2}(R + r)$$

de modo que se supone el radio de giro igual al radio medio.

MOMENTOS DE INERCIA DE VIBRADORES COMPUESTOS. — Para hallar el módulo de rigidez de una muestra de alambre por el método de las oscilaciones de torsión se emplean varias formas de vibradores. En el cálculo subsiguiente interviene el momento de inercia del vibrador. Es pues necesario saber obtenerlo. Ilustremos el caso con un ejemplo. Sea una forma de vibrador compuesto indicada en la figura 86 de la que se desea el I respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad.

Sea m_1 = masa de AB $\quad$ m_2 = masa de C = masa de D
r_1 = radio $\quad$ r_2 = radio
l_1 = longitud $\quad$ l_2 = longitud

$$I_{NN}(AB) = m_1\left(\frac{r_1^2}{4} + \frac{l_1^2}{12}\right) \quad \text{(ejemplo 41)}$$

$$I_{N_1N_1}(C) = m_2\left(\frac{r_2^2}{4} + \frac{l_2^2}{12}\right) - m_2\frac{r_1^2}{4} \quad \text{(puesto que radio interior de C} = r_1)$$

Luego

$$I_{NN}(C) = m_2\left(\frac{r_2^2}{4} + \frac{l_2^2}{12}\right) + m_2c^2 - m_2\frac{r_1^2}{4} \quad \text{(por el teorema del eje paralelo)}$$

igual al valor de I_{NN} (D).

Por lo tanto

$$I_{NN} \text{ total} = I_{NN}(AB) + I_{NN}(C) + I_{NN}D = I_{NN}(AB) + 2I_{NN}(C)$$

$$= m_1\left(\frac{r_1^2}{4} + \frac{l_1^2}{12}\right) + 2m_2\left(\frac{r^2}{4} - \frac{r_1^2}{4} + \frac{l_2^2}{12} + c^2\right).$$

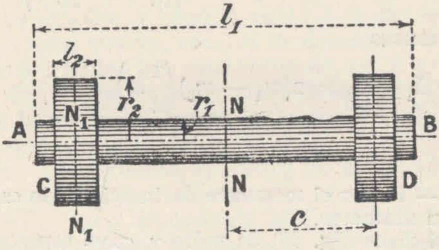


Fig. 86

La aguja de Maxwell, es una forma muy cómoda de vibrador compuesto y se emplea para determinar el módulo de rigidez de la muestra de alambre que la soporta. Consiste esencialmente en un tubo dentro del cual pueden moverse unas masas cilíndricas en un intervalo definido, sea (fig. 87)

m_1 = valor de cada masa móvil
m_2 = » » » » fija

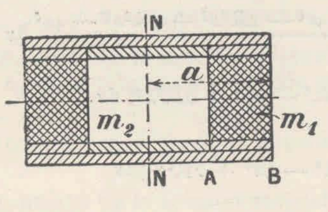


Fig. 87

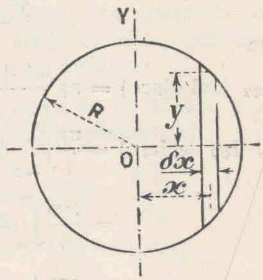


Fig. 88

Se medirá el período de las oscilaciones de torsión cuando los pesos móviles se hallan como en la figura y después cuando los pesos móviles se hallan en la posición central. Puede probarse que el módulo de rigidez depende de la diferencia entre los momentos de inercia en uno y otro caso.

Así pues, dado que la masa, m_1, pasa de la posición AB a la posición NA, la única diferencia en los momentos de inercia es la debida al cambio del centro de gravedad de la masa de una distancia $\frac{3}{4}a$ del eje de oscilación a una distancia $\frac{1}{4}a$, puesto que I_{NN} de m_2 sigue el mismo.

Por lo tanto (considerando sólo una de las dos masas)

$$I_1 - I_2 = (m_1 - m_2)\left(\frac{9}{16}a^2 - \frac{1}{16}a^2\right)$$

y para las dos masas

$$I_1 - I_2 = 2(m_1 - m_2)\left(\frac{1}{2}a^2\right)$$
$$= (m_1 - m_2)a^2.$$

Ejemplo 43. — Hallar el momento de inercia de la esfera de radio R con relación a su diámetro.

Considérese el disco (fig. 88) de radio y, cuyo espesor es δx. El I de este disco elemental sobre el diámetro paralelo a OY que pasa por su c. d. g. es

$$= \frac{\pi}{4} y^4 \rho \delta x \quad \text{(Ejemplo 40)}$$

Luego, por ser x la distancia al eje OY,

$$I_{OY} \text{ (del elemento)} = \frac{\pi\rho}{4} y^4 \delta x + (\pi\rho y^2 x \times x^2)$$

Ahora bien

$$y^2 = R^2 - x^2$$

Luego

$$I_{OY} \text{ (del disco)} = \pi\rho \frac{R^4 + x^4 - 2R^2x^2 + 4R^2x^2 - 4x^4}{4} \delta x$$

$$I_{OY} \text{ (esfera)} = \frac{\pi\rho}{4}\int_{-R}^{R} (R^4 - 3x^4 + 2R^2x^2)\, dx$$

$$= \frac{2\pi\rho}{4}\int_{0}^{R} (R^4 - 3x^4 + 2R^2x^2) dx$$

$$= \frac{2\pi\rho}{4}\left(R^4x - \frac{3x^5}{5} + \frac{2R^2x^3}{3}\right)_0^R$$

$$= \frac{2\pi\rho}{4} \times \frac{16R^5}{15} = \frac{8}{15}\rho\pi R^5$$

$$= \frac{4}{3}\rho\pi R^3 \times \frac{2}{5} R^2$$

$$= m \times \frac{2}{5} R^2 \quad (m = \text{masa de la esfera})$$

y por lo tanto $k^2_{OY} = \frac{2}{5} R^2.$

DETERMINACIÓN DE MOMENTOS ESTÁTICOS Y DE INERCIA DE SECCIONES POR MEDIO DE CONSTRUCCIONES GRÁFICAS Y DE UN PLANÍMETRO. — La construcción gráfica cuya descripción sigue es muy sencilla, y tiene la ventaja de dar también momentos de orden tercero, cuarto, etc., si se desean.

Propongámonos hallar los momentos de 1.° y 2.° orden, o sean los estáticos y de inercia respecto al eje MM de la sección de carril representada en la figura 89, así como la posición del eje neutro. El procedimiento será el siguiente:

Construcción. — Se dividirá la mitad de la sección en elementos por medio de rectas horizontales (media sección, puesto que es simétrica). A una distancia cómoda de MM, sea h, se traza M_1M_1, paralelo a MM. De P, extremo de una de las horizontales, se traza PR, perpendicular a MM y de P′ otro extremo de la misma horizontal, se traza P′R′, perpendicular a M_1M_1. Se unen R′ y R y se obtiene Q, punto de intersección con P′P. Se repite lo mismo para las demás horizontales (sólo se indican tres en la figura), y se unen todos los puntos Q, lo cual dibujará la curva CQLS, que se llama curva del momento primero.

Para hallar la curva del momento segundo, se trata el área CPKXSLQ de igual manera que el área primitiva. Es decir, se traza QR″, perpendicular a M_1M_1, se traza RR″ que corta a PP′ en Q′. Se unen los puntos Q′, y resulta una curva que es la del segundo momento.

Cálculo. — Se miden con el planímetro las áreas de la media sección original, de CPKXSLQ y de CPKXTWQ′, que denominaremos A_0, A_1, y A_2 respectivamente, y se tendrá:

1.er Momento de la sección original respecto de MM $= 2 \times h \times A_1$ (ya que A_1 hace referencia a media sección solamente).

$$\text{Distancia del c. d. g. de la sección a MM} = \frac{hA_1}{A_0}$$

2.° Momento de la sección respecto a MM $= 2h^2A_2$.

$$(\text{Radio de giro}_{MM})^2 = \frac{h^2A_2}{A_0}$$

Y por medio del teorema de los ejes paralelos, puede calcularse I_{NN}.

Nota. — Para distinguir qué área se ha de leer al planímetro no hay más que recordar la regla siguiente: Se leerá el área entre la curva del momento de que se trate (ya el primero, ya el segundo) y el lado del perfil primitivo por el cual se han trazado las perpendiculares al eje de los momentos.

Demostración. — Consideremos P'P como el eje de un elemento de área.

Area del elemento $= P'P \times \delta x$.

Primer momento de dicho elemento con relación a

$$MM = P'P \times \delta x \times RP.$$

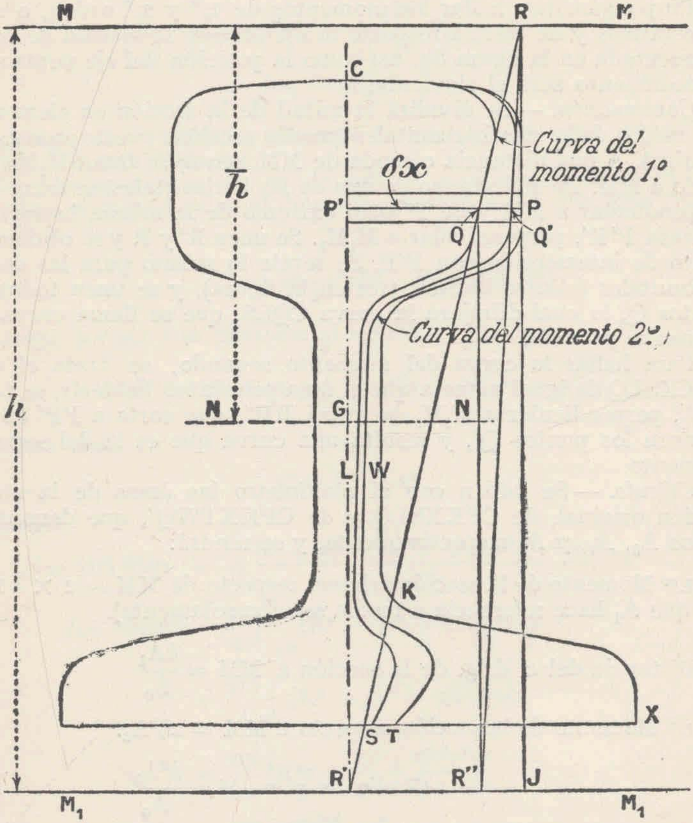


Fig. 89. — Momentos de secciones obtenidos por medio de construcciones gráficas

De los triángulos semejantes RPQ y RJR' deducimos

$$\frac{RP}{QP} = \frac{RJ}{JR'} = \frac{h}{PP'}$$

de donde $\quad RP \times PP' = h \times QP$

o sea $\quad RP \times PP' \times \delta x = h \times QP \times \delta x$

y por consiguiente, sumando,

momento estático total respecto a MM $= h \times$ área entre la curva del momento 1.° y el borde de la sección dada $= h\, A_1$

Asimismo,

momento segundo del elemento respecto a MM $=$ área $\times$ (distancia)^2 $= PP' \times \delta x \times \overline{RP}^2$

y como
$$\frac{RP}{RJ} = \frac{PQ'}{JR''} = \frac{PQ'}{PQ}$$

tenemos $\quad \dfrac{RP}{h} = \dfrac{PQ'}{PQ}$ es decir $RP = h \times \dfrac{PQ'}{PQ}$.

luego,

momento segundo elemental $= P'P \times RP \times RP \times \delta x$

$$= h \times QP \times h \times \frac{PQ'}{PQ} \delta x$$

$$= h^2 \times PQ' \times \delta x$$

$= h^2 \times$ área del elemento cuyo eje es PQ'.

Luego,

momento de inercia total de la media sección respecto a MM $=$

$= h^2 \times$ área entre la curva del momento 2.° y el borde de la sección

$= h^2 \times A_2$

Ejercicios 20. — Sobre momentos de inercia

1. Hallar el radio de giro, respecto al extremo más ligero, de una barra rectangular de sección uniforme y longitud l cuya densidad es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia a dicho extremo.

2. El radio de giro de una manivela respecto al eje de suspensión es de 35,8 cm. y su centro de gravedad dista 31,43 cm. de dicho eje. Hallar el radio de giro respecto al eje paralelo pasando por el centro de gravedad. Si la manivela pesa 8,65 kg. hallar su momento de inerci respecto a dicho eje.

3. Un disco de 70 cm. de diámetro tiene un agujero circular de 30 cm. de diámetro, cuyo centro dista 5 cm. del centro del disco. Hallar el radio de giro del disco respecto a un eje perpendicular a su plano y pasando por su centro de gravedad.

4. Hallar el momento de inercia del rectángulo 5 cm. × 3 cm. según una diagonal.

5. Hallar el radio de giro de una placa triangular de altura h.

(*a*) Cuando gira alrededor de su base.

(*b*) Cuando gira alrededor de un eje paralelo a la base por el vértice.

6. Dividiendo en fajas por líneas paralelas a AB, hallar el momento de inercia según AB y, el radio de giro de la sección que se señala en (*a*) figura 75, página 264.

7. Hallar el radio de giro según el eje de rotación, de la llanta de un volante, de diámetro exterior 1,55 m., siendo el espesor de la llanta de 10 cm.

Hallar el momento de inercia respecto al eje paralelo a AB pasando por el c. d. g. de las secciones siguientes (*).

8. Perfil en ⊔ (*b*) figura 75.

9. Angular de lados desiguales (*c*) figura 75.

10. Sección T (*d*) figura 75.

11. Hallar el radio de giro respecto a su eje, de un paraboloide cuyo diámetro en el plano límite perpendicular al eje es igual a d.

12. La rigidez de una viga se mide por el producto del módulo de Young E del material por el momento de inercia de la sección. Comparar la rigidez de una viga de sección cuadrada con una de igual materia y sección circular, a igualdad de peso y luz.

13. Un cilindro de 6 cm. de largo y 1,5 cm. de diámetro se halla suspendido horizontalmente por medio de un alambre largo, atado a un gancho. Se tuerce el alambre para dar al cilindro un movimiento oscilatorio. Hallar el momento de inercia del cilindro con relación al eje vertical que pasa por el gancho.

14. Determinar el momento de inercia y también el radio de giro según AB, de la sección rectangular dibujada en (*a*) figura 90.

15. Calcular el momento de inercia y el radio de giro de la sección dibujada en (*b*) figura 90 según NN y según AB.

16. Hallar la posición del eje neutro de la sección (*c*) figura 91 y esto hecho, calcular el momento de inercia y el radio de giro según este eje.

17. Hallar el radio de giro de la sección (*d*) figura 91, según el eje NN.

18. El momento de inercia del par de ruedas motoras de una locomotora que se hallan conectadas por medio de un eje libre, resultó ser

(*) El c. d. g. de cada una de estas secciones se conocerá después de haber resuelto los problemas números 10, 11 y 12 del grupo de ejercicios 19. *(N. del T.)*.

igual a 1439 kg. × m.² Si el peso total de ambas ruedas, mas el eje es de 3847 kg. y el diámetro de las ruedas es igual 1,855 m., hallar el radio de giro de las ruedas así como la razón $\frac{k^2}{r^2}$ en la que r = radio de la rueda.

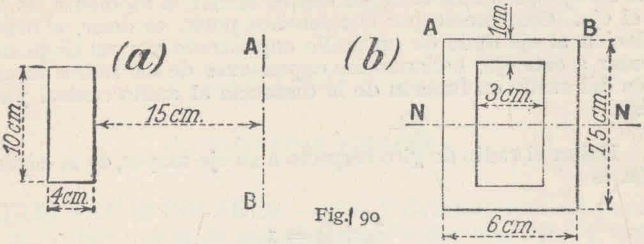


Fig. 90

19. Hallar el radio de giro respecto a su eje, de un cono circular recto de densidad uniforme cuyo radio de base = 5 cm.

20. Siguiendo el método explicado en la página 285, determinar: (*a*) el momento estático con relación a AB; (*b*) el momento de inercia

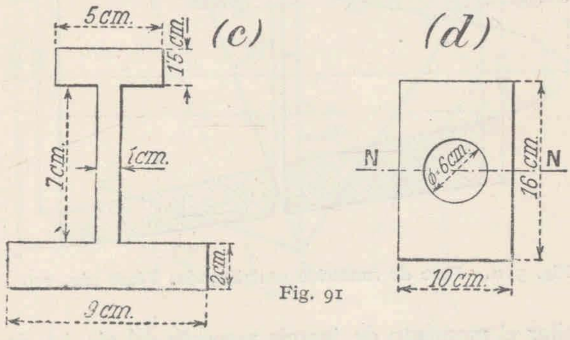


Fig. 91

con relación a AB; (*c*) la distancia del c. d. g. a AB; (*d*) el radio de giro con relación a AB; del área dibujada en la figura 76 (*b*) página 266.

21. Un alambre de acero de 4 mm. de diámetro cuelga verticalmente; el extremo superior se halla sujeto; el inferior sustenta un disco horizontal de acero que tiene 15 cm. de diámetro y 1 cm. de espesor. Si la longitud del alambre es 90 cm. y si C, módulo de elasticidad transversal del alambre = 885000 kg. por cm.², hallar el tiempo de la oscilación torsional del alambre por medio de la fórmula

$$t^2 = 1320 \frac{Il}{Cd^4} (*)$$

(*) Reducción al sistema métrico decimal de la fórmula del texto inglés $t^2 = 402{,}5 \frac{Il}{Cd^4}$ (I en libras × pulg.²; l en pies; C en libras por pulg.²; d en pulgadas). (*N. del T*).

en la que I = momento de inercia del disco con relación al eje de suspensión en kg. × cm.², l = longitud del alambre en m., d = diámetro en centímetros.

22. Un toro está engendrado por un círculo de radio r girando en torno a un eje que dista R de su centro Hallar el momento de inercia según el eje. (Comiéncese por el momento polar, es decir, el momento, con relación al eje dado de un anillo engendrado por un elemento perpendicular a este eje, hallando las expresiones de los radios internos y externos del anillo en función de la distancia al anillo central y súmese después).

23. Hallar el radio de giro respecto a su eje mayor, de la elipse cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

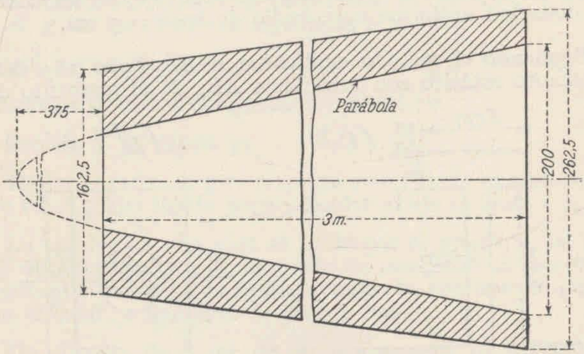


Fig. 91 a. Peso de fundición centrifugada. Véase pág. 236

24. Hallar el momento de inercia respecto del eje AA de la rueda y el árbol representados en la figura 91 b. Su masa total es 4,06 kg.

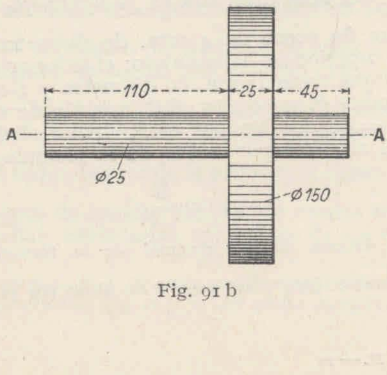


Fig. 91 b

CAPÍTULO VIII

COORDENADAS POLARES

COORDENADAS POLARES. — Puede determinarse un punto sobre un plano por medio de sus distancias a dos ejes fijos, y también por medio de su distancia a un punto fijo medida sobre una recta

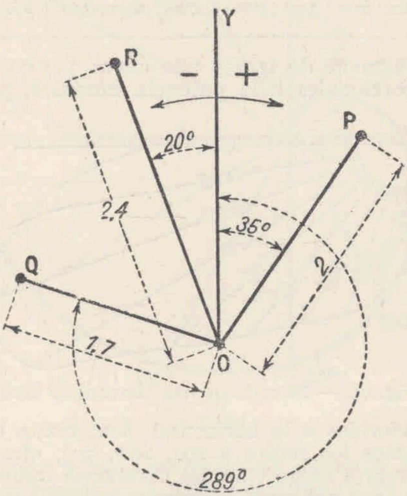


Fig. 92

que forma un ángulo dado con un eje fijo. En el primer caso, decimos que el punto está determinado por sus coordenadas rectangulares y lo designamos (x, y). En el segundo caso decimos que se trata de coordenadas *polares*, cuya notación corriente es (r, θ), r = distancia al polo o punto fijo, θ = ángulo que la recta que une el punto al polo forma con el eje fijo.

Poco importa qué línea se tome por eje fijo. Con frecuencia se escoge un eje horizontal. A fin de atenernos a la convención adoptada para la medida de los ángulos (Parte I, cap. VI), consideraremos aquí la línea NS, o vertical, como *eje polar* y llamaremos positivos los ángulos medidos hacia la derecha y negativos los medidos hacia la izquierda de este eje. Fijaremos un punto en dicho eje; este punto, origen de los radios vectores r de los diversos puntos del plano, recibe el nombre de *polo*.

Sea pues la figura 92. Tomando OY como eje polar y O como polo, el punto (2, 35°) se obtendrá trazando la línea OP a 35° de OY, y llevando sobre ella una distancia OP = 2 unidades de longitud. De igual modo se representarán los puntos Q (1,7; 289°); R (2,4 —20°).

Este método ofrece la ventaja de no requerir la división del plano en cuadrantes ni la consideración del orden de los signos algebraicos. Todas las distancias polares son positivas.

Ejemplo 1. — La tabla siguiente da la potencia lumínica de una lámpara de arco. Constrúyase el diagrama polar:

Ángulo bajo la horizontal	8°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Potencia lumínica bujías	1000	1470	1800	1720	1200	960	800	720	600	480

Se trata sencillameue de trazar una curva por coordenadas polares siendo las r proporcionales a la potencia lumínica, pero como se nos

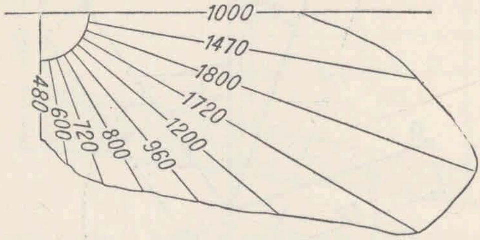


Fig. 93. — Potencia de una lámpara de arco

dan los ángulos referidos a la horizontal, tomaremos dicha recta como eje polar. Trazaremos los radios a 10°, 20.°, 30°, etc., (fig. 93) del eje horizontal y llevaremos sobre ellos las distancias indicadas en la tabla. Uniremos por una línea continua los puntos hallados y quedará así completo el diagrama polar.

Hay curvas que se trazan fácilmente en el sistema polar. Tales son, por ejemplo, la espiral de Arquímedes y la espiral logarítmica o equiangular, ambas importantes en el estudio de las levas y de los engranajes respectivamente.

La espiral de Arquímedes tiene por ecuación polar: $r = a\theta$.

La espiral logarítmica tiene por ecuación $r = ae^{b\theta}$.

En el primer caso a intervalos angulares iguales, los radios crecen en progresión aritmética, en el segundo en progresión geométrica. Tomemos ejemplos numéricos para ilustrar la forma de estas curvas.

Ejemplo 2. — Trazar la espiral de Arquímedes $r = 0{,}573\theta$ dibujando una espira.

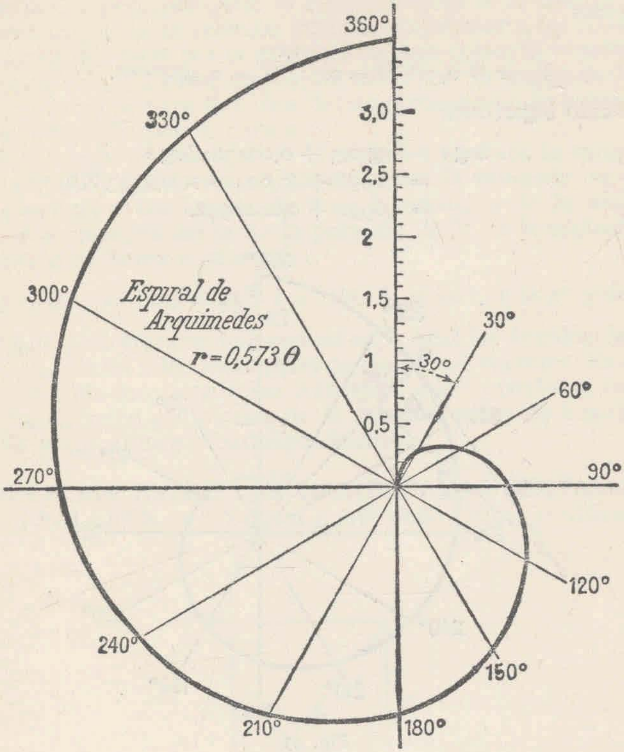


Fig. 94

En esta ecuación, θ está expresado en radianes pero podemos simplificar el trazado en forma que queden sustituídos los valores de θ (en radiantes) por valores de α (en grados).

Así $$r = 0{,}573\theta = \frac{0{,}573\alpha}{57{,}3} \text{ (grados)} = 0{,}01\alpha.$$

Resulta entonces la siguiente tabla de valores.

α	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
r	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6

de donde la figura 94.

Ejemplo 3. — Trazar una espira de la espiral logarítmica

$$r = 0{,}5e^{0{,}25\theta}$$

Tenemos

$$r = 0{,}5e^{0{,}25\theta} = 0{,}5e^{\frac{0{,}25\alpha}{57'3}} = 0{,}5e^{0{,}00436\alpha}.$$

Tomando logaritmos

$$\begin{aligned} \log r &= \log 0{,}5 + 0{,}00436\alpha \log e \\ &= \bar{1}{,}6990 + (0{,}00436 \times 0{,}4343 \times \alpha) \\ &= \bar{1}{,}6990 + 0{,}001894\alpha. \end{aligned}$$

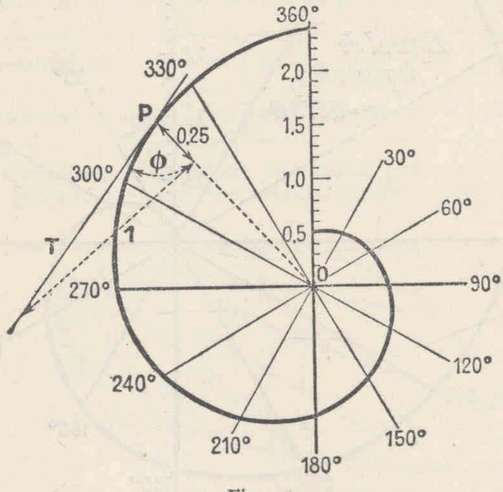


Fig. 95

De donde la tabla de valores:

α	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
$0{,}001894\alpha$	0	0,0568	0,1136	0,1705	0,2273	0,2841	0,3409	0,3977	0,4546	0,5114	0,5682	0,625	0,6818
$\log r$	$\bar{1}{,}6990$	$\bar{1}{,}7558$	$\bar{1}{,}8126$	$\bar{1}{,}8695$	$\bar{1}{,}9623$	$\bar{1}{,}9831$	0,0399	0,0967	0,1536	0,2104	0,2672	0.324	0,3808
r	0,5	0,5699	0,6495	0,7407	0,8439	0,9618	1,096	1,249	1,424	1,624	1,85	2.109	2,403

La curva está dibujada. (Fig. 95).

Se observará que la razón entre un radio de la tabla y el inmediato exterior es constante $= 1{,}14$, de modo que (conforme a lo dicho antes) forman una progresión geométrica cuya razón es 1,14 y cuyo primer término es 0,5.

De la comparación entre la ecuación general de esta espiral con la fórmula que da la relación entre las tensiones a los extremos de una correa que pasa por la garganta de una polea, $T = te^{u\theta}$, se verá que hay identidad entre ambas, de modo que la forma de la espiral logarítmica sirve para dar idea del crecimiento de la tensión con el ángulo abrazado por la correa.

Si se escoge un punto P de la espiral y se traza la tangente PT, y el radio OP, que forma un ángulo φ con la tangente, se verá que cot. $\varphi = 0{,}25$ = coeficiente de θ en la ecuación de la curva. Esta relación es independiente de la posición de P en la espiral que por esta razón se llama equiangular.

Si cotg $\varphi = 1$, $\varphi = 45°$, $r = ae^{\theta}$. Si $a = 1$, $r = e^{\theta}$ y $\log_e r = \theta$.

Puede pues trazarse una espiral en la cual los ángulos (en radianes) sean iguales a los logaritmos de los radios vectores. Es una espiral de trazado muy engorroso y su valor más importante consiste en la representación geométrica de la relación entre los logaritmos naturales y sus números correspondientes.

RELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS RECTANGULARES Y LAS POLARES. — Sea P un punto dado, cuyas coordenadas rec-

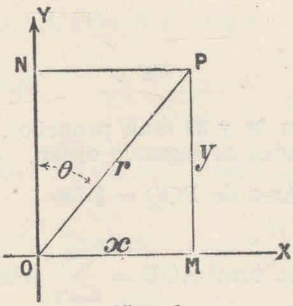


Fig. 96

tangulares son x, y, y cuyas coordenadas polares son r, θ. Tendremos (fig. 96)

$$\frac{ON}{OP} = \frac{y}{r} = \cos\theta$$

de modo que

$$y = r\cos\theta$$

$$\frac{OM}{OP} = \frac{x}{r} = \operatorname{sen}\theta$$

de modo que $x = r \operatorname{sen}\theta$

y también $\frac{x}{y} = \frac{r \operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$. (*)

DETERMINACIÓN DE AREAS POR MEDIO DE COORDENADAS POLARES. — Pueden emplearse las coordenadas polares para hallar las áreas de ciertas figuras.

Ya sabemos que

$$\text{Area del sector de circulo} = \tfrac{1}{2}r^2\theta$$

en la que θ = ángulo del sector en radianes.

Sean P, Q, (fig. 97) dos puntos de coordenadas (r, θ) y $(r + \delta r,$

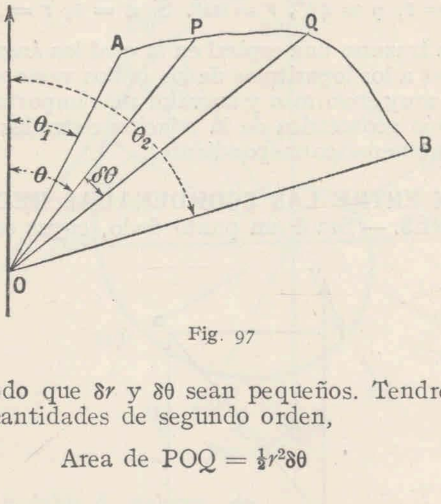


Fig. 97

$\theta + \delta\theta)$, de modo que δr y $\delta\theta$ sean pequeños. Tendremos entonces, despreciando cantidades de segundo orden,

$$\text{Area de POQ} = \tfrac{1}{2}r^2\delta\theta$$

Luego,

$$\text{el área total AOB} = \sum_{\theta_1}^{\theta_2}\tfrac{1}{2}r^2\delta\theta, \quad \text{aproximadamente}$$

$$\text{y} \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2}\tfrac{1}{2}r^2 d\theta \quad \text{exactamente.}$$

(*) Para evitar confusiones es preciso no olvidar que el autor toma como eje polar el eje OY, en lugar del OX, como es costumbre en las obras de geometría analítica, por esta razón, las fórmulas de transformación que normalmente se conocen son

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

siendo $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$. *(N. del T).*

Para calcular este integral se puede emplear el procedimiento gráfico o el algébrico según el modo como se conoce la relación entre r y θ.

Sea, por ejemplo, el círculo de radio a. Ya hemos calculado su área por evaluación de $\int y dx$ (pág. 253), es decir, expresando la integral en coordenadas rectangulares. Pero en el curso del cálculo recurrimos a la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, lo cual equivalía a un cambio a coordenadas polares.

Es evidente que el radio es siempre igual a a, radio del círculo, mientras que el ángulo varía de 0 a 2π. De modo que

$$\text{Area del círculo} = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}a^2 d\theta = \tfrac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{1}{2}a^2 \times 2\pi$$

$$= \pi a^2.$$

Ejemplo 4.—Hallar el área de la cardioide de ecuación $r = a\,(1 + \cos\theta)$, θ varía de 0 a 2π.

En este caso r varía, pero poseemos una relación entre r y θ, de modo que podemos integrar algébricamente. Elevemos al cuadrado

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2\,(1 + \cos\theta)^2 \\ &= a^2\,(1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta) \\ &= a^2\,(1 + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \tfrac{1}{2} + 2\cos\theta) \\ &= a^2\,(1{,}5 + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta + 2\cos\theta). \end{aligned}$$

$$\text{De aquí, área} = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1{,}5 + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta + 2\cos\theta)\, d\,\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(1{,}5\,\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\right)_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a^2}{2}\,(1{,}5 \times 2\pi) = \underline{\frac{3\pi a^2}{2}}.$$

DIAGRAMA DE ROUSSEAU. — El uso del diagrama de Rousseau simplifica la determinación de la potencia esférica media de una lámpara.

La potencia lumínica de una lámpara varía según la dirección del rayo luminoso que se considera (véase fig. 93), en cuyo caso considerábamos la iluminación en un plano vertical. Si imaginamos que la curva polar obtenida en un plano gira alrededor del eje vertical, obtenemos la superficie indicadora de la iluminación en todos sentidos. La media de *todas* estas potencias lumínicas se llama potencia esférica media de la lámpara.

Si se coloca el arco en el centro de una pantalla esférica de radio R y es I_M = potencia esférica media de la lámpara, la iluminación total será $4\pi R^2 I_M$, total que puede expresarse también por suma de los productos de la potencia en cada dirección por el área sobre la cual se distribuye y por lo tanto

$$4\pi R^2 I_M = \Sigma IA \quad (*).$$

I = intensidad de la zona de superficie A.

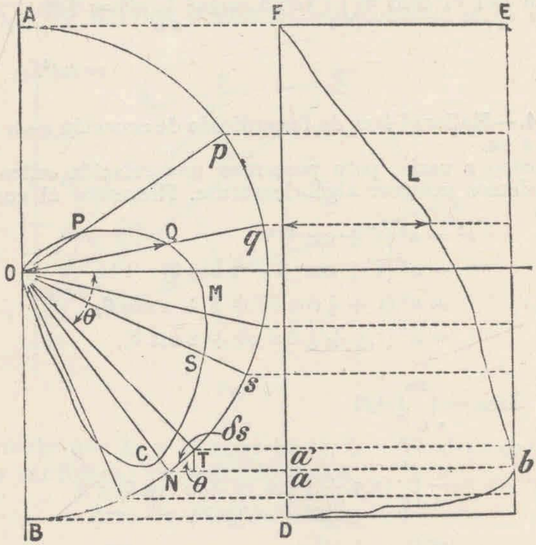


Fig. 98

Para hallar la potencia lumínica media se procede del modo siguiente: sea el foco O (fig. 98). Con O como centro y radio R (que puede ser arbitrario y por consiguiente se elegirá que sea cómodo para las construcciones que siguen) se traza el semicírculo ANB.

(*) La potencia esférica media de una lámpara puede pues definirse también, diciendo que es aquella potencia lumínica que partiendo del mismo foco y considerada constante en todas direcciones produciría la misma iluminación *total* que la lámpara en cuestión. Obsérvese además que siendo la potencia lumínica verdadera de la lámpara constante en todas las direcciones que tengan la misma inclinación, la intensidad de iluminación sobre la superficie esférica mencionada se distribuirá en zonas esféricas horizontales, siendo constante dicha intensidad a lo largo de cada zona. De aquí la forma de la ecuación. *(N. del T).*

Sea OPQMC el diagrama polar. El máximo de la potencia está en OC. Se traza la horizontal por N, punto en el que OC corta a la semicircunferencia y se toma $ab =$ OC. Por a y b, se trazan verticales, por A y B horizontales. Resulta así un rectángulo DE. Se trazan varios radios OP, OQ, OS, etc. y horizontales por los puntos p, q, s y se llevan sobre estas horizontales a partir de DF, las distancias OP, OQ, OS, etc. Se unen por una curva continua los puntos obtenidos, de donde resulta FLbD, que se llama la curva de Rousseau. La altura media de esta curva referida a la base DF (que se obtiene fácilmente por medio del planímetro) es la potencia lumínica media del foco.

Demostración. — Sea I_M = Potencia esférica media del foco.

Tendremos

$$I_M = \frac{\Sigma \text{ áreas de zonas} \times \text{potencia lumínica}}{4\pi R^2}.$$

Consideremos, por ejemplo, la zona engendrada por la revolución de TN($= \delta s$) girando en torno de AB. Su área será de la forma $2\pi y \delta s$ y la intensidad de iluminación es OC.

El segmento y es igual a la proyección, sobre el eje horizontal que pasa por O, del radio OT, del radio ON, o del radio medio entre estos dos (pues estos radios son muy próximos ya que δs es muy pequeño). Por lo tanto

$$y = \text{OT} \cos \theta = \text{R} \cos \theta.$$

Para esta zona, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Iluminación} &= \text{potencia lumínica} \times \text{área} \\ &= \text{OC} \times 2\pi \text{R} \cos \theta \delta s \\ &= ab \times 2\pi \text{R} \times aa' \left(\text{pues } \frac{aa'}{\delta s} = \cos \theta\right). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \text{Iluminación total} &= 2\pi \text{R}\, \Sigma\, ab \times aa' \\ &= 2\pi \text{R} \times \text{área bajo FL}b\text{D} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} I_M = \frac{\text{iluminación total}}{4\pi R^2} &= \frac{2\pi \text{R} \times \text{área bajo FL}b\text{D}}{4\pi R^2} \\ &= \frac{\text{área FL}b\text{D}}{2\text{R}} \\ &= \text{altura media de FL}b\text{D} \end{aligned}$$

por ser FD = 2R el intervalo o base.

MÉTODO GRÁFICO DEL DR. FLEMING PARA DETERMINAR MEDIAS CUADRÁTICAS. — Trataremos aquí, bajo un aspecto distinto, esta cuestión ya discutida en el capítulo VII y que tiene bastante importancia para los ingenieros electricistas. En lugar de elevar al cuadrado los valores dados de la corriente y extraer luego la raíz cuadrada del promedio de estos cuadrados, podemos llegar a la media cuadrática rápidamente por medio de una construcción gráfica bastante sencilla.

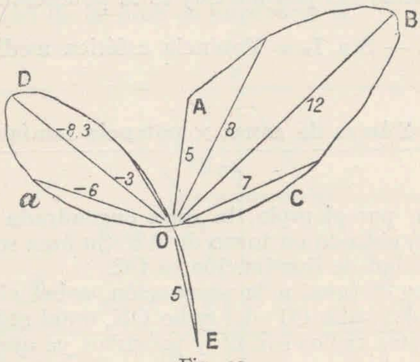


Fig. 99

Sea una corriente alterna dada por la tabla siguiente:

Tiempo t	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008
Corriente C	5	8	12	7	0	— 6	—8,3	— 3	5

Para hallar la media cuadrática de C procederemos del modo siguiente:

Se tratan los valores dados como coordenadas polares, tomando t para los ángulos y C para las distancias polares. Se escoge una escala cómoda para t, por ejemplo $20° = 0{,}001$ segundos y para C, por ejemplo 1 cm. por unidad y se traza el diagrama polar del cual la figura 99 es una reproducción reducida. Se unen los extremos de los radios y se obtiene una curva, que cierran los radios primero y último, formando una figura cerrada ABCDaE. Se mide esta área al planímetro. En este caso, el área del dibujo original resulta ser $= 67{,}7$ cm.^{2}

Ahora bien, el área $= \frac{1}{2}\int r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int C^2 dt$ luego

$$2A = \int C^2 dt \quad (t \text{ en radianes}).$$

Dividiendo pues el doble del área por la amplitud de t en radianes, hallaremos el promedio de los cuadrados de C.

En este caso t varía de 160° = 2,79 radianes y se tendrá

$$\int C^2 dt = 2 \times 67{,}7 = 135{,}4$$

Luego

$$\text{Media cuadrática} = \sqrt{\frac{135{,}4}{2{,}79}} = \sqrt{48{,}53} = 6{,}97.$$

La regla del área de una figura ($A = \frac{1}{2}\int r^2 d\theta$) es a veces útil para determinar la altura del c. d. g. de un área sobre una cierta base.

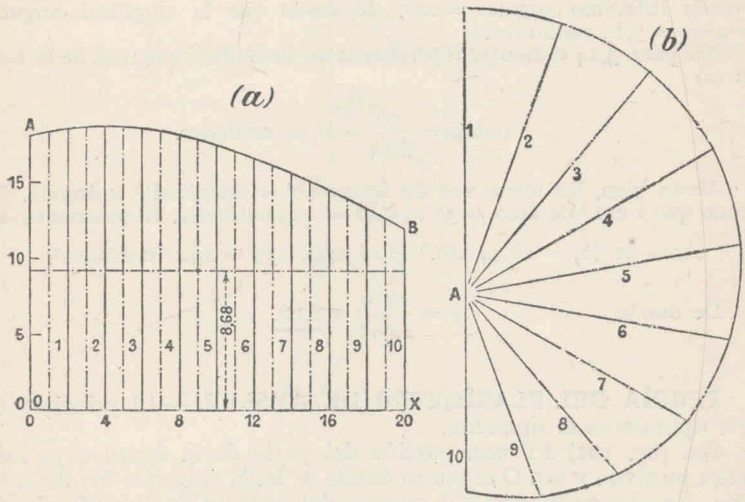


Fig. 100 — Determinación de un c. d. g. mediante un diagrama polar

Ejemplo 5. — Hallar la altura sobre OX (fig. 100 (*a*)) del c. d. g. del área irregular OABX.

Se divide la base en partes iguales y se trazan las ordenadas medias en la forma acostumbrada. Se miden estas ordenadas y se trazan sobre radios partiendo de un punto A (fig. 100 (*b*)) tomando por ángulos los valores del x correspondientes. Se unen los puntos con una curva continua y se mide el área al planímetro. Se divide esta área por la de la figura original y el cociente es la $\bar{y}$ que se desea.

En efecto, el área del diagrama polar $= \frac{1}{2}\int r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int y^2 dx$, mientras que el área de la figura original $= \int y dx$.

Por lo tanto,

$$\frac{\text{Area del diagrama polar}}{\text{Area de la figura primitiva}} = \frac{\frac{1}{2}\int y^2 dx}{\int y dx} = \bar{y} \quad \text{(véase pág. 240)}$$

En el caso que se estudia, tenemos:

En (a) fig. 100.

$$1 \text{ cm.} = 5 \text{ unidades verticalmente}$$
$$1 \text{ cm.} = 4 \text{ unidades horizontalmente}$$

de modo que 1 cm.^{2} = 20 unidades de área. El área al planímetro dió 16,82 cm.^{2} de modo que esta área representa = 336,4 unidades cuadradas. Es decir

$$\int y dx = 336{,}4.$$

En (b) figura 100

$$1 \text{ cm.} = 5 \text{ unidades radiales}$$

y cada intervalo angular = 20°, de modo que la amplitud angular = 180° = 3,14 radiantes.

Así pues 3,14 radiantes representan 20 unidades, longitud de la base en (a)

$$1 \text{ radián} = \frac{20}{3{,}14} = 6{,}36 \text{ unidades.}$$

Ahora bien, las áreas son de forma $r^2\theta$ = (longitud)^2 × ángulo. De modo que 1 cm.^{2} de área = $5^2 \times 6{,}36 = 159$ unidades. El planímetro da

$$\text{Area de } (b) = 18{,}34 \text{ cm.}^2 = 18{,}34 \times 159 = 2920 \text{ unidades}^2.$$

De donde $\qquad \bar{y} = \dfrac{2920}{336{,}4} = \underline{8{,}68.}$

TEORÍA DEL PLANÍMETRO DE AMSLER. — El principio de este aparato es el siguiente.

Sea (fig. 101) PP una porción del perfil de la figura cuya área desea medirse, y sea O el punto donde se halla el centro fijo del aparato. En el movimiento del punzón del aparato de P a P″ sobre la curva, el brazo que lo soporta pasa de la posición AP a la posición A′P″. Este movimiento se compone de dos partes: un movimiento de translación AP-A′P′, y un movimiento de rotación, sobre A′ como centro, de A′P′ a A′P″. En el primero, la rueda indicadora se mueve de W a W′, pero sólo registra la parte del movimiento que es perpendicular al eje de la rueda, es decir, la distancia p.

El área descrita por AP de AP a A′P″, es

$$APP'P'' = APP'A' + P'P''A' = AP \times p + \tfrac{1}{2} AP^2 \delta\theta.$$

Luego en total

$$\text{área descrita} = \Sigma\, AP \times p + \Sigma \tfrac{1}{2} AP^2 \delta\theta$$
$$= AP \Sigma p + \tfrac{1}{2} AP^2 \Sigma \delta\theta$$

Ahora bien, el movimiento angular total = o. Luego $\Sigma\delta\theta = 0$.

Luego Area = $AP\Sigma p$

Si l = longitud del brazo del punzón, tendremos pues,

Area = $l \times$ movimiento registrado por la rueda

Y por lo tanto

$$\text{Lectura de la rueda} = \frac{\text{Area}}{l}$$

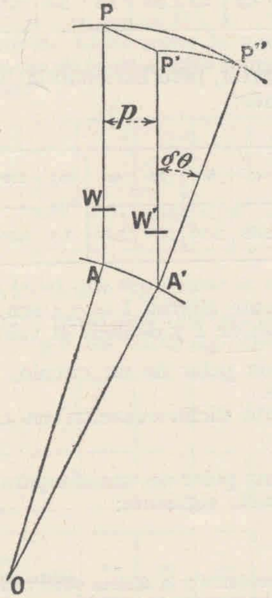


Fig. 101. — Teoría del planímetro de Amsler

Así, la longitud del brazo del punzón marca la escala a la que se mide el área. De aquí por un ajuste adecuado de este brazo, se podrá medir un área en centímetros o en pulgadas cuadradas, según se desee. Si lo que se busca es la altura media se hará la longitud del brazo igual a la base. Esto se hace por medio de los punzones LL (Parte I fig. 158, pág. 370), con lo que no hace falta preocuparse de A. La diferencia entre las lecturas final e inicial multiplicada o dividida por una constante, da directamente la altura media de la figura.

(Se observará que el área registrada por el aparato es en realidad la diferencia entre las áreas trazadas por los puntos A y P, pero como A vuelve a su posición primitiva después de haberse movido únicamente sobre un arco de círculo, el área que describe es nula) (*).

Ejercicios 21. — Sobre Coordenadas Polares

1. Trazar el diagrama polar del esfuerzo de una manivela en el caso siguiente, suponiendo la biela infinitamente larga.

θ^o	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
Esfuerzo en kgs...	0	1,2	1,9	2,5	3,2	3,5	3,6	3,5	3	2,5	1,6	0,7	0

2. Igual que la anterior, pero haciendo la biela = 5 veces la manivela con la tabla siguiente:

θ^o	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	172,5	180
Esfuerzo en kgs.	0	1,23	2,2	3,05	3,50	3,70	3,70	3,3	2,90	2,2	1,50	0,75	0,30	0

3. Se da una corriente alterna $I = 7{,}4$ sen $50\,\pi t$. Trazar la curva polar que da la variación de I y deducir el valor medio cuadrático.

4. Hallar la ecuación polar de un círculo, tomando como polo el extremo de un diámetro.

¿Qué curva representa dicha ecuación en coordenadas cartesianas rectangulares?

5. Trazar el diagrama polar de una lámpara de arco cuya potencia umínica obedece a la tabla siguiente:

(*) El razonamiento precedente y la última observación se apoyan en que al volver AP a su primitiva posición la suma de giros elementales $\delta\theta$ que experimenta dicha barra en un sentido, es igual a la de los que experimenta en sentido contrario (con lo cual, al integrar, desaparece el término en $\delta\theta$ de la ecuación diferencial del planímetro) y en que el punto A vuelve a su primitiva posición después de haber oscilado sobre un arco de círculo, sin limitar área alguna. Esto es, en efecto, lo que ocurre en la generalidad de los casos prácticos de medición de áreas mediante el planímetro en los que puede colocarse el punto fijo O fuera del área a medir. Pero es necesario hacer constar que puede darse también el caso de un área bastante grande para que sea preciso colocar el punto O dentro de la misma, y tal, que al volver el punzón P al punto de partida, el punto A haya recorrido la circunferencia entera (limitando por consiguiente un área) y que la barra AP haya dado un giro completo de 360° en el plano. Entonces es preciso añadir al área que señala la rueda una constante, que lleva marcada el aparato, procedente por una parte del círculo descrito por OA, y, por otra parte, de la integración del término en $\delta\theta$ que en este caso *no se anula*. Esta constante (que depende de l, de OA, y además de la posición de la rueda en el brazo AP) no es más que el área del *círculo cero*. (Recuérdese lo dicho en el primer tomo, pág. 370). *N. del T.*

Angulo (grados)....	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90 (vertical)
Potencia (bujías)....	800	1200	1600	2000	2200	2200	2300	2500	2300	1800

6. Trazar el diagrama de Rousseau de la lámpara anterior y deducir el valor de su potencia esférica media.

7. Una corriente alterna toma los valores siguientes a intervalos de tiempo iguales: 3, 4, 4,5, 5,5, 8, 10, 6, 0, — 3, — 4, — 4,5, — 5,5, — 8, — 10, — 6, 0.
Hallar por el método Fleming el valor medio cuadrático de esta corriente.

8. Los experimentos de Eiffel sobre la posición del centro de presión de un plano que se desplaza en el aire a inclinaciones varias, dieron los resultados siguientes:

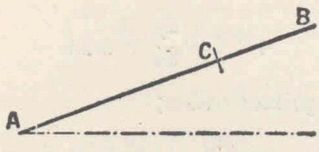
Inclinación sobre la horizontal.	0	5	10	15	30	45	60	75	90
$\frac{BC}{AB}$ (figura 102)	0,263	0,291	0,333	0,375	0,41	0,415	0,445	0,47	0,5

Trazar un diagrama polar que represente la variación de esta fracción.

9. Trazar el diagrama polar que represente la potencia lumínica de un reflector determinada por las cifras siguientes:

Angulo (grados)	0 (vertical)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Potencia (bujías)....	3000	10000	20500	33000	41500	41500	43000	43000	30000	24000

10 sobre la horizontal	20	30	40	50	60	70	80	90
9000	6000	5000	5000	2000	3000	1500	1500	1500



C centro de presión

Fig. 102

CAPÍTULO IX

Ecuaciones diferenciales simples

ECUACIONES DIFERENCIALES. — Toda ecuación que contiene una o más funciones derivadas se llama «ecuación diferencial».

Así, es ecuación diferencial, muy sencilla,

$$\frac{dy}{dx} = 5$$

y también

$$4\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} - 5 = 0$$

así como

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

aunque estas dos últimas son ya más complicadas.

Se clasifican las ecuaciones diferenciales atendiendo al «orden» y al «grado». El orden está determinado por el de la diferencial o derivada de orden más elevado que figura en ellas. Así, $\frac{dy}{dx}$ es una derivada de primer orden, $\frac{d^2y}{dx^2}$ de segundo, etc.

Por lo tanto

$$4.2 + y\frac{dy}{dx} = 5.34$$

es una ecuación de primer orden;

$$8\frac{d^4y}{dx^4} + y = 7{,}16$$

lo es de cuarto orden.

El «grado» de la ecuación es el de la derivada de orden más elevado, siempre y cuando la ecuación no contenga radicales ni fracciones.

Así $\frac{d^2y}{dx^2} = c$ es de segundo orden y de primer grado;

$$4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} = 7$$

es de segundo orden y de segundo grado.

Mucho se ha escrito sobre la solución de ecuaciones diferenciales; pero en este tratado, nos limitaremos a las formas que se suelen presentar en la demostración de fórmulas de ingeniería, y discutiremos las soluciones según los tipos de ecuación.

TIPO: $\frac{dy}{dx}$ = FUNCIÓN DE x. Ya conocemos la solución de estas ecuaciones que se presentan, por ejemplo, en el cálculo del momento de flexión y del esfuerzo cortante en las varias secciones de una viga en función de las distancias de las secciones a ciertos puntos fijos. Así, tomando el caso de una viga que soporte una carga W en el centro se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W}{EI}$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Wx}{EI} + C$$

que es una ecuación del tipo de que se trata.

Esta ecuación puede resolverse, evidentemente, integrando ambos miembros, sin olvidar las constantes de integración. Generalizando, si

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

integraremos con relación a x, poniendo

$$\int \frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)dx + C$$

o sea

$$y = \int f(x).dx + C.$$

Ejemplo 1. — Si $\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 7x - 2$, sabiendo que $y = 5$ cuando $x = 1$, hallar la expresión de y en función de x.

Tenemos $\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 7x - 2$

integremos $y = \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + C.$

Para hallar C, hagamos $y = 5$ cuando $x = 1$

$$5 = \frac{4}{3} + \frac{7}{2} - 2 + C$$

Luego $C = 2,17$

y por lo tanto $\underline{y = 1,33x^3 + 3,5x^2 - 2x + 2,17.}$

TIPO: $\frac{dy}{dx}$ = FUNCIÓN DE y. Es decir $\frac{dy}{dx} = f(y)$.

Difiere del tipo anterior en que hay que hacer ciertas transposiciones de términos para poder integrar.

Puede escribirse la ecuación

$$\frac{dy}{f(y)} = dx$$

lo que se llama *separar las variables.* De donde

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx + C = x + C.$$

Ejemplo 2. — Resolver $\frac{dy}{dx} = y^3$

Separemos las variables: $\frac{dy}{y^3} = dx$

integremos: $\int \frac{dy}{y^3} = \int dx + C$

$$-\tfrac{1}{2}y^{-2} = x + C$$

$$\underline{x + \tfrac{1}{2}y^{-2} + C = 0.}$$

Los dos ejemplos que siguen son en realidad casos particulares del tipo general discutido en la página 312, pero se incluyen aquí como ilustraciones de este método.

Ejemplo 3. — Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} + ay = b$

Tenemos $$\frac{dy}{dx} = b - ay$$

o sea $$\frac{dy}{b - ay} = dx$$

de modo que $$\int \frac{dy}{b - ay} = \int dx + C$$

es decir $$-\frac{1}{a} \text{l.n.} (b - ay) = x + C$$

o $$\text{l.n.} (b - ay) = -a (x + C)$$

de donde $$e^{-ax-aC} = b - ay$$

Ahora bien, sea $$A = e^{-aC}$$

Tendremos $$e^{-ax-aC} = e^{-ax} \times e^{-aC} = Ae^{-ax}$$

luego $$y = \frac{b}{a} - \frac{A}{a} e^{-ax}.$$

Ejemplo 4. — Resolver la ecuación $4\frac{dy}{dx} = 11 + 7y$

Separemos las variables

$$\int \frac{4dy}{11 + 7y} = \int dx + C$$

luego $$\frac{4}{7} \text{l.n.} (11 + 7y) = x + C$$

o sea $$\text{l.n.} (11 + 7y) = \frac{7}{4}x + \frac{7}{4} C$$

$$11 + 7y = e^{\frac{7}{4}x + \frac{7}{4}C}$$

o sustituyendo $e^{\frac{7}{4}C}$ por A

$$11 + 7y = Ae^{\frac{7}{4}x}$$

$$y = \frac{A}{7} e^{\frac{7}{4}x} - \frac{11}{7}.$$

Ejemplo 5. — La diferencia entre las tensiones final e inicial de una correa que subtiende un ángulo $d\theta$ de una polea es

$$dT = \mu T d\theta$$

siendo μ el coeficiente de fricción entre la correa y la polea. Si las tensiones máxima y mínima son respectivamente T y t, y el ángulo total es θ, hallar la expresión de $\frac{T}{t}$.

La ecuación $dT = T\mu . d\theta$ es del tipo que estamos estudiando. Separemos las variables

$$\frac{dT}{T} = \mu . d\theta .$$

Integremos, entre los límites t y T de la tensión, o y θ del ángulo.

Tendremos
$$\int_t^T \frac{dT}{T} = \int_0^\theta \mu . d\theta$$

sea
$$\left(\text{l.n. } T\right)_t^T = \mu\left(\theta\right)_0^\theta ,$$

$$\text{l.n. } T - \text{l.n.} = \mu\theta$$

pero
$$\text{l.n.} \frac{T}{t} = \text{l.n. } T - \text{l.n. } t.$$

Luego
$$\text{l.n.} \frac{T}{t} = \mu\theta$$

$$\frac{T}{t} = e^{\mu\theta}.$$

Añadamos dos palabras al Ejemplo 3, considerando una variante del mismo.

Sea
$$\frac{dy}{dx} = ay.$$

Si $a = 1$, $\frac{dy}{dx} = y$, es decir, que el incremento relativo de y con relación a x, para cada valor particular de x, es igual al valor de la función y misma. Ahora bien, ya hemos visto que esto sólo ocurre cuando $y = e^x$ (Tomo I, pág. 430).

Si a tiene un valor distinto de 1, y tiene que ser también una potencia de e porque su incremento relativo es proporcional a la función misma, es decir a y. En efecto, si $y = e^{ax}$, $\frac{dy}{dx} = ae^{ax} = ay$, de modo que $y = e^{ax}$ es una solución de $\frac{dy}{dx} = ay$. Pero para hacer más general la solución, escribiremos $y = e^{a(x+C)}$, o sea $(A = e^{aC})$ $y = Ae^{ax}$.

Siempre, pues, que se encuentra la ecuación diferencial del interés compuesto (incremento relativo proporcional a la variable función) puede escribirse la solución según el método aquí indicado.

Ejemplo 6. — Hallar la ecuación de la curva cuya subnormal es constante $= 2a$.

La ecuación será pues $y\dfrac{dy}{dx} = 2a$ (véase pág. 46)

o, separando las variables, $\int y dy = \int 2a dx.$

de donde $$\frac{y^2}{2} = 2ax + C$$

$$\underline{y^2 = 4ax + K}$$

ecuación de una parábola. Si $y = 0$ cuando $x = 0$, $K = 0$, y la parábola será entonces $y^2 = 4ax$ y tendrá su propio vértice por origen.

Ejemplo 7. — Hallar una relación entre la altura sobre el terreno y la presión atmosférica, suponiendo que la disminución media de temperatura es de 2° C cada 300 m. de altura, y que la temperatura a nivel del terreno es de 10° C.

Sea τ la temperatura absoluta a la altura h. Por hipótesis

$$\tau = 273 + 10 - \frac{2}{300}h$$

$$= 283 - \frac{2h}{300} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Sabemos que $$pv = C\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

y también que si se considera una pequeña diferencia de altura δh, la disminución de presión δp, se debe a una capa de aire de altura δh y base igual a un metro cuadrado, de modo que

$$\delta p = -\frac{\delta h}{v} \ (*) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

De las ecuaciones (1) y (2) resulta

$$pv = C\left(283 - \frac{2h}{300}\right)$$

y sustituyendo v por su valor deducido de (3)

$$-\frac{p\delta h}{\delta p} = C\left(283 - \frac{2h}{300}\right)$$

(*) Obsérvese que v de la fórmula (2) es el volumen específico, es decir, el volumen de 1 kg. de aire y su inversa $\frac{1}{v}$ será por consiguiente su peso específico, que multiplicado por δh dará el incremento de presión (en este caso de signo contrario al de δh) puesto que en una capa *elemental* puede admitirse este peso específico constante. *(N. del T).*

o sea, en el límite, $$-\frac{dp}{pdh} = \frac{1}{C\left(283 - \frac{h}{150}\right)}$$

Separando variables

$$-\frac{dp}{p} = \frac{dh}{C\left(283 - \frac{h}{150}\right)}$$

Integrando entre los límites p_0 y p de la presión, y los correspondientes o y h de la altura

$$\left(-\text{l.n.}\,p\right)_{p_0}^{p} = \frac{-150}{C}\left[\text{l.n.}\left(283 - \frac{h}{150}\right) - \text{l.n.}\,283\right]$$

de donde $$\text{l.n.}\,p - \text{l.n.}\,p_0 = \frac{150}{C}\left[\text{l.n.}\left(283 - \frac{h}{150}\right) - 5{,}647\right]$$

o sea $$\underline{\text{l.n.}\,p = \text{l.n.}\,p_0 + \frac{150}{C}\left[\text{l.n.}\left(283 - \frac{h}{150}\right) - 5{,}647\right]}$$

que puede simplificarse todavía sustituyendo los valores de p_0 y C.

ECUACIONES LINEALES GENERALES DE PRIMER ORDEN.— Es decir, ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx} + ay = b$$

en las que a y b pueden ser, ya constantes, ya funciones de x (*).

La solución de esta ecuación puede escribirse del modo siguiente:

$$y = e^{-\int a dx}\left[\int b e^{\int a dx} dx + C.\right]$$

lo que se demuestra mediante la regla de derivación del producto:

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

En efecto, consideremos el caso más sencillo:

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

en el que a = constante.

Multipliquemos por e^{ax}:

$$e^{ax}\frac{dy}{dx} + aye^{ax} = 0$$

(*) Véase ejercicio 4, página 481, para un procedimiento de resolución cuando b es función de y.

Hagamos $$v = e^{ax},\ \frac{dv}{dx} = ae^{ax}.$$

Tendremos, $$v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx} = 0$$

y como $$v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(yv)$$

se tendrá $$\frac{d(yv)}{dx} = 0.$$

Y por lo tanto $$yv = C$$

o, lo que es igual $$y = Cv^{-1} = Ce^{-ax}.$$

Consideremos ahora el caso

$$\frac{dy}{dx} + ay = b.$$

Multipliquemos por e^{ax}:

$$\frac{dy}{dx}e^{ax} + aye^{ax} = be^{ax}$$

o sea $$\frac{d}{dx}(ye^{ax}) = b.e^{ax}.$$

Integremos

$$ye^{ax} = \int be^{ax}dx + C$$

$$y = e^{ax}[\int be^{ax}dx + C.]$$

Cantidad que puede calcularse si se sabe efectuar la integración.

Para el caso general, en el que a y b son funciones de x, el *factor de integración* será $e^{\int adx}$, porque una vez multiplicada por este factor, la ecuación diferencial dada se escribirá

$$e^{\int adx}\frac{dy}{dx} + ae^{\int adx}y = be^{\int adx}$$

que puede escribirse $$\frac{d}{dx}[ye^{\int adx}] = be^{\int adx}$$

de donde por integración

$$ye^{-\int adx} = \int be^{\int adx}dx + C$$

y por lo tanto $$y = e^{-\int a dx}\left[\int b e^{\int a dx} dx + C\right]$$

Ejemplo 8. — Resolver la ecuación

$$7\frac{dy}{dx} + 12\,y = e^{5x}.$$

Puede escribirse la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + \frac{12}{7}\,y = \frac{1}{7}\,e^{5x}$$

de modo que, comparando con la forma tipo,

$$a = \frac{12}{7} \text{ y } b = \frac{1}{7}\,e^{5x}.$$

De donde
$$y = e^{-\int \frac{12}{7} dx}\left[\int \frac{1}{7} e^{5x}.\, e^{\int \frac{12}{7} dx}\, dx + C\right]$$
$$= e^{-\frac{12}{7}x}\left[\int \frac{1}{7}\, e^{5x}.\, e^{\frac{12}{7}x}\, dx + C\right]$$
$$= e^{-\frac{12}{7}x}\left[\frac{1}{7} \times \frac{7}{47}\, e^{\frac{47}{7}x} + C\right]$$
$$= \frac{1}{47}\, e^{5x} + Ce^{-\frac{12}{7}x}.$$

Ejemplo 9. — Si $\frac{dy}{dx} - y = 2x + 1$, hallar una expresión para y

$\frac{dy}{dx} - y = 2x + 1$ de modo que $a = -1,\ b = 2x + 1$

Luego
$$y = e^{\int dx}\left[\int (2x + 1)\, e^{-\int dx}\, dx + C\right]$$
$$= e^{x}\left[\int (2x + 1) e^{-x}\, dx + C\right]$$
$$= e^{x}\left[-2xe^{-x} - 3e^{-x} + C\right]$$
$$= -2x - 3 + Ce^{x}.$$

La integral $\int (2\,x + 1)e^{-x}\, dx$ se calcula integrando por partes.

Así, sea $$(2x + 1)e^{-x}\, dx = udv$$

o sea $$dv = e^{-x}\, dx \qquad v = -e^{-x}$$

$$u = 2x + 1 \qquad \frac{du}{dx} = 2$$

tendremos $$\int udv = uv - \int vdu$$

$$= (2x + 1)(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\,2dx$$

$$= -e^{-x}(2x + 1) - 2e^{-x}$$

$$= -2xe^{-x} - 3e^{-x}.$$

Ejemplo 10. — Resolver con relación T la ecuación

$$\frac{dT}{dx} + PT = P(t - cx)$$

(referente a la transmisión del calor en tubos cilíndricos). P, t y c son constantes.

Aquí tendremos $a = P$ y $b = P(t - cx)$

De donde, la solución será

$$T = e^{-\int Pdx} \times \left[\int P(t - cx)\, e^{\int Pdx} dx + K\right)$$

cuyo factor de integración es $e^{\int Pdx} = e^{Px}$.

De donde

$$T = e^{-Px}\left[\int P(t - cx)\, e^{Px}\, dx + K\right],$$

Evaluemos pues la integral. Sea

$$\int P(t - cx)\, e^{Px} dx = \int udv$$

$$u = P(t - cx) \qquad dv = e^{Px}\, dx \qquad v = \frac{1}{P} e^{Px} \qquad du = -Pcdx.$$

Tendremos $$\int udv = uv - \int vdu$$

$$= \left[P(t - cx) \times \frac{1}{P} e^{Px}\right] + \int \frac{1}{P} e^{Px}.\ Pcdx$$

$$= (t - cx)e^{Px} + \left(\frac{1}{P} ce^{Px}\right) + M.$$

$$T = e^{Px}\left[(t - cx)\, e^{Px} + \frac{c}{P} e^{Px} + M + K\right]$$

$$= t - cx + \frac{c}{P} + Le^{Px}$$

puesto que $e^{-Px} \times e^{Px} = 1$ y haciendo $L = M + K$.

Ejemplo 11. — Al calcular las corrientes x e y en los dos circuitos de un vatímetro, llegamos a la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dy}{dt}+\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}y=\frac{L_1pI}{L_1+L_2}\cos pt+\frac{R_1 I}{L_1+L_2}\operatorname{sen} pt$$

R_1 y L_1 son respectivamente la resistencia y la inductancia de un circuito; R_2 L_2 del otro, I = amplitud de la corriente principal. Resolver esta ecuación determinando y.

Vemos que aquí

$$a=\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}\qquad b=\frac{L_1pI}{L_1+L_2}\cos pt+\frac{R_2 I}{L_1+L_2}\operatorname{sen} pt.$$

De modo que

$$y=e^{-\int\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}dt}\left[\int\left(\frac{L_1pI}{L_1+L_2}\cos pt+\frac{R_1 I}{L_1+L_2}\operatorname{sen} pt\right)e^{\int\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}dt}+C\right]=$$

$$=e^{-\int\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}t}\left[\int\frac{L_1pI}{L_1+L_2}\cos pt.e^{\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}t}dt\right.$$

$$\left.+\int\frac{R_1 I}{L_1+L_2}\operatorname{sen} pt.e^{\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}t}dt+C\right]=$$

$$=e^{-At}[\int B\cos pt.e^{At}dt+\int D\operatorname{sen} pt.e^{At}dt+C.]$$

Ahora bien (pág. 173),

$$\int Be^{At}\cos pt\,dt=\frac{Be^{At}}{A^2+p^2}(p\operatorname{sen} pt+A\cos pt)+C_1$$

y

$$\int De^{At}\operatorname{sen} pt\,dt=\frac{De^{At}}{A^2+p^2}(A\operatorname{sen} pt-p\cos pt)+C_2.$$

Luego

$$y=\frac{e^{-At}\times e^{At}}{A^2+p^2}\left[pB\operatorname{sen} pt+AB\cos pt+DA\operatorname{sen} pt-Dp\cos pt+K\right]$$

o sea $y=\dfrac{1}{A^2+p^2}\left[Bp\operatorname{sen} pt+AB\cos pt+DA\operatorname{sen} pt-Dp\cos pt+K\right]$

en cuya expresión

$$A=\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}\qquad B=\frac{L_1pI}{L_1+L_2}\qquad D=\frac{R_1I}{L_1+L_2}.$$

ECUACIONES ENTRE DIFERENCIALES TOTALES. — Son las obtenidas igualando a 0 una diferencial total exacta. Por ejemplo,

$$Pdx+Qdy=0$$

si $Pdx+Qdy$ es diferencial exacta.

Expliquemos primero lo que significan los términos *diferencial total exacta.*

Se dice que $Pdx + Qdy$ es una diferencial total exacta cuando

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

o, en otra notación

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) \quad \text{(P y Q funciones de } x \text{ e } y).$$

Para justificar esta definición, sea

$$Pdx + Qdy = du$$

siendo u una cierta función de x e y. En este caso, du es la diferencial total, $\left(\frac{du}{dx}\right) dx$ y $\left(\frac{du}{dy}\right) dy$ serán las diferenciales parciales (véase página 92) y tendremos

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy$$

Entonces, si $du = 0$, $\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = 0$

que es la misma ecuación original si se verifica

$$P = \left(\frac{du}{dx}\right) \qquad Q = \left(\frac{du}{dy}\right)$$

de donde

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{d}{dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx \cdot dy}\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

que es la condición que nos ha servido de definición.

El procedimiento de integración consiste en la determinación de la función u (pues, evidentemente de $du = 0$ se deduce $u = C$), para lo cual se hace lo que sigue: **Se integra Pdx como si y fuese constante; se integran luego los términos de Qdy que no contengan x y se iguala la suma de los resultados a una constante.**

Ejemplo 12. — Integrar la ecuación

$$(x^2 - 4xy - 2y^2)\, dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\, dy = 0.$$

Se tiene

$$P = x^2 - 4xy - 2y^2 \qquad \left(\frac{dP}{dy}\right) = -4x - 4y$$

$$Q = y^2 - 4xy - 2x^2 \qquad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = -4y - 4x.$$

La diferencial es pues exacta.

$$\int P dx \ (y \text{ constante}) = \int (x^2 - 4xy - 2y^2)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2y}{2} - 2y^2x$$

$$\int Q dy \ (x \text{ constante}) = \int (y^2 - 4xy - 2x^2)\, dy = \frac{y^3}{3} - \frac{4xy^2}{2} - 2x^2y$$

pero de esta última integración sólo conservamos $\frac{y^3}{3}$ pues los demás proceden de términos que contenían x.

Luego $\qquad \frac{1}{3}x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + \frac{1}{3}y^3 = C$

o sea $\qquad \underline{x^3 - 6x^2y - 6xy^2 + y^3 = K.}$

Ejemplo 13. — Resolver la ecuación

$$v \cdot du - u \cdot dv = 0$$

Multipliquemos por $\frac{1}{v^2}$:

$$\frac{v\, du - u\, dv}{v^2} = 0$$

que es una diferencial de tipo conocido, en efecto,

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = 0$$

de donde $\qquad \frac{u}{v} = C$

o sea $\qquad u = Cv.$

[Lo que hemos hecho es convertir la diferencial dada en exacta, mediante la multiplicación por el factor integrante $\frac{1}{v^2}$.]

ECUACIONES HOMOGÉNEAS EN x é y. — Llevan este nombre las ecuaciones que encierran las variables con el mismo grado.

Regla. — Hacer la sustitución $y = vx$ y separar las variables.

Ejemplo 14. — Integrar la ecuación

$$(x^2 + y^2)\, dx = 2xy\, dy.$$

Se hace $\qquad y = vx,$

luego $\qquad \frac{dy}{dx} = v\frac{dx}{dx} + x\frac{dv}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$

pero, de la ecuación inicial se desprende

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{x^2 + v^2x^2}{2x^2v} = \frac{1 + v^2}{2v}.$$

Luego, de (I)

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v}$$

o sea

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2 - 2v^2}{2v} = \frac{1 - v^2}{2v}.$$

Separemos las variables

$$\int \frac{2v \cdot dv}{1 - v^2} = \int \frac{dx}{x}$$

es decir; (haciendo $u = 1 - v^2$, $du = -2v \cdot dv$, si se quiere facilitar la integración)

$$-\text{l.n.}\,(1 - v^2) = \text{l.n.}\,x + \text{l.n.}\,C$$

$$\text{l.n.}\,x(1 - v^2) = -\text{l.n.}\,C = \text{l.n.}\,K$$

$$x(1 - v^2) = K$$

o sea $$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = K$$

es decir $$\underline{x^2 - y^2 = Kx.}$$

ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

TIPO: $$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0.$$

Póngase

$$y = e^{\lambda x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

y sustituyendo

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0$$

que se reduce a $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

exceptuando el caso $y = 0$.

Esta ecuación de segundo grado tiene tres casos posibles.

La solución general es

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Llamaremos $$\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

y $$\lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Discutamos ahora los tres casos.

Caso 1.° — Si $a^2 > 4b$, λ_1 y λ_2 son reales y desiguales.

Ahora bien, la función $y = A_1 e^{\lambda_1 x}$
satisface la ecuación dada

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

así como $y = A_2 e^{\lambda_2 x}$, también. La solución general de la ecuación diferencial será pues

$$y = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x}$$

siendo las constantes A_1 y A_2 función de las condiciones dadas.

Caso 2.° — Si $a^2 = 4b$, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Sin embargo la solución completa no es $y = Ae^{\lambda x}$,

sino $$y = (A + Bx)\, e^{\lambda x}.$$

Caso 3.° — Si $a^2 < 4b$, las raíces de la ecuación en λ son *imaginarias.*

Sea $$c = \sqrt{4b - a^2}.$$

Tendremos

$$\lambda_1 = \frac{-a + j\sqrt{4b - a^2}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{-a - j\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

haciendo a $j = \sqrt{-1}$.

Podremos escribir estas soluciones del modo siguiente:

$$\lambda_1 = \frac{-a + jc}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{-a - jc}{2}.$$

Tendremos entonces

$$y = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$= A_1 e^{\frac{-a+jc}{2}x} + A_2 e^{\frac{-a-jc}{2}x}.$$

Pero no es esta la forma conveniente en que se presenta la integral general, sino que se transforma como sigue:

$$e^{\frac{-ax+jcx}{2}} = e^{\frac{-ax}{2}} \times e^{\frac{jcx}{2}}.$$

Pero sabemos que $e^{jx} = \cos x + j \operatorname{sen} x$ (véase pág. 123).

Luego poniendo $\frac{cx}{2}$ en vez de x

$$e^{\frac{jcx}{2}} = \cos\frac{cx}{2} + j \operatorname{sen}\frac{cx}{2}.$$

Por lo tanto

$$y = A_1 e^{-\frac{ax}{2}}\left(\cos\frac{cx}{2} + j \operatorname{sen}\frac{cx}{2}\right) + A_2 e^{-\frac{ax}{2}}\left(\cos\frac{cx}{2} - j \operatorname{sen}\frac{cx}{2}\right)$$

$$= e^{-\frac{ax}{2}}\left[(A_1 + A_2)\cos\frac{cx}{2} + j(A_1 - A_2)\operatorname{sen}\frac{cx}{2}\right]$$

$$= e^{-\frac{ax}{2}} A \operatorname{sen}\left(\frac{cx}{2} + p\right)$$

$$= Ae^{-\frac{ax}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{cx}{2} + p\right)$$

en el que

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2)^2 + j^2(A_1 - A_2)^2} = 2\sqrt{A_1A_2}$$

y $\operatorname{tg} p = \frac{A_1 + A_2}{j(A_1 - A_2)}$ (Véase Tomo I, pág. 342).

Tomando pues la ecuación modelo

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

podremos agrupar los resultados del modo siguiente:

1.° $a^2 - 4b > 0$ la solución es

$$y = A_1 e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}x} + A_2 e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}x}.$$

2.° $a^2 - 4b = 0$ la solución es

$$y = (A + Bx)e^{-\frac{ax}{2}}.$$

3.° $a^2 - 4b < 0$ la solución es

$$y = \mathrm{A}e^{-\frac{ax}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}x + p\right).$$

La última forma es muy frecuente en las aplicaciones. Deberá pues, estudiarse con atención.

Ejemplo 15. — Resolver la ecuación

$$5\frac{d^2y}{dx^2} + 12\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

Podemos dividir por 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{12}{5}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{5}y = 0.$$

De modo que, comparando con la ecuación tipo

$$a = 2{,}4 \quad b = -0{,}4$$

por lo tanto

$$y = \mathrm{A}_1e^{\frac{-2{,}4+\sqrt{5{,}76+1{,}6}}{2}x} + \mathrm{A}_2e^{\frac{-2{,}4-\sqrt{5{,}76+1{,}6}}{2}x}$$

$$= \mathrm{A}_1e^{0{,}16x} + \mathrm{A}_2e^{-2{,}56x}.$$

Es en realidad más fácil recordar el modo de resolver la ecuación desde el principio que recordar la fórmula final. En efecto, se forma fácilmente la ecuación característica

$$5\lambda^2 + 12\lambda - 2 = 0$$

cuyas raíces son λ_1 y λ_2 y podemos escribir enseguida la solución general

$$y = \mathrm{A}_1e^{\lambda_1x} + \mathrm{A}_2e^{\lambda_2x}.$$

Si se necesitan A_1 y A_2 habrá que dar dos valores de y con sus correspondientes valores de x como datos del problema.

Ejemplo 16. — Un móvil se aleja de un punto fijo de modo que su aceleración está dirigida hacia dicho punto y es: igual a 64 veces la distancia del móvil al punto. Hallar la ecuación del movimiento y decir de qué movimiento se trata.

Se trata de un movimiento armónico simple (véase pág. 66).

Sea s el espacio recorrido en el tiempo t

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \text{aceleración} = -64s$$

puesto que es de sentido contrario al movimiento).

Luego $$\frac{d^2s}{dt^2} + 64\,s = 0.$$

Poniendo $s = e^{\lambda t}$ $\lambda^2 + 64 = 0$

de donde $\lambda = \pm 8j$

y la solución correspondiente al caso 3.º será

$$y = Ae^{-\frac{ax}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{cx}{2} + p\right) = A \operatorname{sen}(8t + p) \quad (\text{pues } a = 0;\ c = \sqrt{4b - a^2} = 16).$$

La ecuación general del movimiento armónico simple es

$$s = A \operatorname{sen}(\omega t + p)$$

siendo ω la velocidad angular y A la amplitud.
En este caso la velocidad angular es 8.

Ejemplo 17. — Integrar la ecuación,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0.$$

Poniendo $y = e^{\lambda x}$

quedará $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$

o sea $(\lambda + 4)^2 = 0$

de donde $\lambda = -4$ (raíz doble).

La integral general será pues (caso 2.º)

$$y = (A + Bx)e^{\lambda x}$$
$$= (A + Bx)e^{-4x}.$$

Ejemplo 18. — Integrar la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 10y = 5.$$

Difiere de las anteriores en que se pone una constante en lugar de o.
Podremos escribirla del modo siguiente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 10(y - 0{,}5) = 0.$$

Hagamos $y - 0{,}5 = e^{\lambda x}$

con lo cual $\dfrac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Luego $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$

de donde $\lambda_1 = -5 \quad \lambda_2 = -2.$

La integral general será pues

$$y - 0{,}5 = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} = A_1 e^{-5x} + A_2 e^{-2x}$$

o sea
$$y = A_1 e^{-5x} + A_2 e^{-2x} + 0{,}5.$$

De modo que, la solución general de la ecuación lineal de segundo orden con segundo miembro constante K, es igual a la solución general de la misma ecuación con segundo miembro nulo, mas la constante dividida por el coeficiente de y, y esto se debe a que una solución particular es

$$y = \frac{\text{constante del 2.º miembro}}{\text{coeficiente de } y}$$

puesto que anula los tres términos de la ecuación dada puesta en la forma,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + b\left(y - \frac{K}{b}\right) = 0.$$

EL OPERADOR D. — La derivada de y con relación a x puede expresarse de varias maneras: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $f'(x)$. Puede también expresarse con el símbolo Dy, cuando no cabe ambigüedad sobre la variable independiente. Este símbolo es muy útil para la solución de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. En efecto, D posee importantes propiedades algebraicas que se prestan a su empleo como «operador».

La derivada primera de y con relación a x = Dy. La derivada segunda es $= \frac{d^2y}{dx^2}$ que se escribe D^2y, con lo que se quiere expresar que la operación indicada por D ha de hacerse dos veces. Según este convenio, puede tratarse a D mediante las reglas algebraicas ordinarias relativas a índices, sin transformar ni falsear su significación. Así, D^3 significa lo mismo que D.D.D. y por lo tanto pueden sustituirse mútuamente ambas expresiones que quieren decir indistintamente, una derivación repetida tres veces. En efecto,

$$D^3y = \frac{d^3y}{d^3x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} = \text{D.D.D}y.$$

La regla sirve pues, por lo menos mientras el índice es positivo y por lo tanto la operación directa. Veamos lo que sucede en el caso de un índice negativo.

Si
$$Dy = \frac{dy}{dx}, \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Sea
$$\frac{dy}{dx} = m, \quad \text{tendremos } Dy = m.$$

Integremos: $y = \int m dx.$

Pero si $Dy = m$, y si podemos aplicar a D las reglas del álgebra, tendremos

$$y = \frac{m}{D} = \frac{1}{D} \cdot m.$$

Luego $$\frac{1}{D} m = \int m dx.$$

Por lo tanto $\frac{1}{D}$ es símbolo de integración.

Además, si las reglas algebraicas relativas al índice han de poder aplicarse al operador D, tendremos

$$DD^{-1}y = D^{\circ}y = y.$$

Luego D^{-1} debe representar también la integración. De donde

$$D^{-1} = \frac{1}{D}.$$

Quedando así satisfechas para el símbolo D las reglas ordinarias relativas a los índices, veamos si también le son aplicables las reglas de descomposición en factores.

Sea $$D^2 - 12D + 32.$$

Si D representa una cantidad puede descomponerse fácilmente este trinomio en

$$(D - 4)(D - 8).$$

Se trata de averiguar si esta igualdad algébrica subsiste en cuanto al valor simbólico de D. Veámoslo en un ejemplo. Supongamos

$$y = 7x^2 - 5x \quad Dy = 14x - 5 \quad D^2y = 14$$
$$\begin{aligned}(D^2 - 12D + 32)y &= D^2y - 12Dy + 32y \\ &= 14 - 168x + 60 + 224x^2 - 160x \\ &= 224x^2 - 328.x + 74.\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}(D-4)(D-8)y &= (D-4)(Dy-8y) \\ &= (D-4)(14x-5-56x^2+40x) \\ &= D(14x-5-56x^2+40x)-4(14x-5-56x^2+40x \\ &= 14-112x+40-56x+20+224x^2-160x \\ &= 224x^2-328x+74.\end{aligned}$$

De modo que

$(D^2 - 12D + 32) = (D-4)(D-8)$.

Estas propiedades hacen a D muy útil en la solución de ciertos tipos de ecuaciones.

Así, sea

$$5\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dy} + 10y = M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

que puede escribirse

$$5D^2y + 7Dy + 10y = M$$

ó

$$y(5D^2 + 7D + 10) = M.$$

Deduciremos de aquí

$$y = \frac{M}{5D^2 + 7D + 10}$$

y la solución de la ecuación (1) se puede deducir de este artificio.

Hay muchas ecuaciones de las que se presentan en la teoría de la electricidad que pueden resolverse así, tratando a D como una cantidad *cuasi-algébrica.* Antes de tratar de ellas, tendremos que enunciar los teoremas siguientes:

TEOREMAS ÚTILES SOBRE EL OPERADOR D:

1.° $(p+qD)$ actuando sobre la función $a \operatorname{sen}(bt+c)$ da por resultado

$$a\sqrt{p^2 + b^2q^2}\, \operatorname{sen}\left(bt + c + \operatorname{arc\,tg}\frac{qb}{p}\right).$$

2.° $$\frac{1}{p + qD}\, a \operatorname{sen}(bt + c) = \frac{a}{\sqrt{p^2 + b^2q^2}} \operatorname{sen}\left(bt + c - \operatorname{arc\,tg}\frac{qb}{p}\right).$$

Demostración del 1.er Teorema.

$$(p + qD)a \operatorname{sen}(bt + c)$$

$$= ap \operatorname{sen}(bt + C) + aqb \cos(bt + c)$$

$$= a\sqrt{p^2 + q^2 b^2}\, \operatorname{sen}\left(bt + c + \operatorname{arc\,tg}\frac{qb}{p}\right) \quad \text{(V. tomo I, pág. 342)}$$

Demostración del 2.° Teorema.

$$\frac{1}{p+q\mathrm{D}}\, a \operatorname{sen}(bp+c) = \frac{a(p-q\mathrm{D})}{p^2-q^2\mathrm{D}^2} \operatorname{sen}(bt+c)$$

$$= a\left[\frac{p \operatorname{sen}(bt+c) - bq\cos(bt+c)}{p^2+q^2b^2}\right]^*$$

$$= \frac{a\sqrt{p^2+q^2b^2}}{p^2+q^2b^2} \operatorname{sen}\left(bt+c-\operatorname{arc\,tg}\frac{bq}{p}\right)$$

$$= \frac{a \operatorname{sen}\left(bt+c-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{bq}{p}\right)}{\sqrt{p^2+q^2b^2}}.$$

Como contraprueba, la combinación de ambas operaciones debe dar la función original.

Así

$$\frac{p+qD}{p+q\mathrm{D}}\, a \operatorname{sen}(bt+c)$$

$$= \frac{a\sqrt{p^2+q^2b^2}}{\sqrt{p^2+q^2b^2}} \operatorname{sen}\left(bt+c+\operatorname{arc\,tg}\frac{qb}{p}-\operatorname{arc\,tg}\frac{qb}{p}\right)$$

$$= a \operatorname{sen}(bt+c).$$

Pero de aquí, un 3.$^{\text{er}}$ Teorema:

$$\frac{p_1+q_1\mathrm{D}}{p_2+q_2\mathrm{D}}\, a \operatorname{sen}(bt+c)$$

$$= \frac{a\sqrt{p_1^2+q_1^2b^2}}{\sqrt{p_2^2+q_2^2b^2}} \operatorname{sen}\left(bt+c+\operatorname{arc\,tg}\frac{q_1b}{p_1}-\operatorname{arc\,tg}\frac{q_2b}{p_2}\right).$$

APLICACIÓN DE ESTAS REGLAS A LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ejemplo 19. — Integrar

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 12y = e^{5x}.$$

(*) $\mathrm{D}.\operatorname{sen}(bt+c) = b\cos(bt+c)$ o sea, $\mathrm{D}^2 = -b^2$
$\mathrm{D}^2 \operatorname{sen}(bt+c) = -b^2 \operatorname{sen}(bt+c)$ de donde, $p^2 - q^2\mathrm{D}^2 = p^2 + q^2b^2$.

Puede escribirse esta ecuación

$$(D^2 + 7D + 12)\,y = e^{5x}$$

$$y = \frac{e^{5x}}{D^2 + 7D + 12}$$

La solución de esta ecuación da la integral particular. La *función complementaria* resulta de la solución de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0.$$

que ya sabemos es

$$y = A_1e^{-3x} + A_2e^{-4x}$$

Ahora bien

$$De^{5x} = 5e^{x} \qquad D^2e^{5x} = 25\,e^{5x}$$

Luego la integral particular es

$$y = \frac{e^{5x}}{25 + 35 + 12}$$

$$= \frac{e^{5x}}{72}$$

La solución general será pues

$$\underline{y = A_1e^{-3x} + A_2e^{-4x} + \frac{e^{5x}}{72}}$$

Hagamos la prueba por derivación

$$\frac{dy}{dx} = -3A_1e^{-3x} - 4A_2e^{-4x} + \frac{5}{72}e^{5x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9A_1e^{-3x} + 16A_2e^{-4x} + \frac{25}{72}e^{5x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 12y = 9A_1e^{-3x} + 16A_2e^{-4x} + \frac{25}{72}e^{5x}$$

$$- 21A_1e^{-3x} - 28A_2e^{-4x} + \frac{35}{72}e^{5x}$$

$$+ 12A_1e^{-3x} + 12A_2e^{-4x} + \frac{12}{72}e^{5x}$$

$$= e^{5x}.$$

Ejemplo 20. — Integrar

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 4s = 5 \text{ sen } 7t$$

(tipo que se presenta con frecuencia en problemas de electricidad y en problemas de vibraciones de un sistema).

La solución de la ecuación sin segundo miembro

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 4s = 0$$

es $$s = (A + Bt)\, e^{-2t}$$ (véase pág. 321).

Para hallar la integral particular escribiremos:

$$(D^2 + 4D + 4)\, s = 5 \text{ sen } 7t$$

Luego $$s = \frac{5 \text{ sen } 7t}{D^2 + 4D + 4}$$

$$D \text{ sen } 7t = 7 \cos 7t \qquad D^2 \text{ sen } 7t = -49 \text{ sen } 7t$$

(obsérvese que $D^2 = -49$ pero D no es igual a 7).

Para eliminar D del denominador, multiplicaremos numerador y denominador por $D^2 + 4 - 4D$

$$s = \frac{5(D^2 + 4 - 4D) \text{ sen } 7t}{(D^2 + 4)^2 - 16D^2}$$

$$= \frac{5(-49 \text{ sen } 7t + 4 \text{ sen } 7t - 28 \cos 7t)}{(-49 + 4)^2 - 16 \times (-49)}$$

$$= \frac{-5(45 \text{ sen } 7t + 28 \cos 7t)}{2809}$$

$$= \frac{-5 \times 53 \text{ sen}\left(7t + \text{arc tg } \frac{28}{45}\right)}{2809}$$

$$= -\frac{5}{53} \text{ sen}\left(7t + \text{arc tg } \frac{28}{45}\right).$$

La solución completa será pues:

$$\underline{s = (A + Bt)\, e^{-2t} - \frac{5}{53} \text{ sen}\left(7t + \text{arc tg } \frac{28}{45}\right)}$$

Podría haberse llegado más directamente a la integral particular por medio del teorema 2.º antes expuesto. En efecto:

$$\frac{\text{sen } 7t}{(D + 2)^2} = \frac{1}{D + 2} \cdot \frac{1}{D + 2} \text{ sen } 7t \quad (p = 2,\ q = 1,\ c = 0,\ b = 7)$$

Por lo tanto

$$=\frac{\operatorname{sen} 7t}{(D+2)^2}=\frac{1}{D+2}\;\frac{\operatorname{sen}\left(7t-\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{2}\right)}{\sqrt{4+49}} \qquad \text{(Teorema 2.º)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{53}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(7t-\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{2}\right)}{D+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{53}}\times\frac{1}{\sqrt{53}}\operatorname{sen}\left(7t-\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{53}\operatorname{sen}\left(7t-2\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{2}\right).$$

Los resultados no parecen iguales a primera vista. Pero se ponen de acuerdo fácilmente

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{28}{45}=\operatorname{arc\,tg} 0{,}6223=31^{\circ}54'$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{2}=74^{\circ}\,3'$$

$$-\operatorname{sen}\left(7t+\operatorname{arc\,tg}\frac{28}{45}\right)=-\operatorname{sen}\,(7t+31^{\circ}\,54')$$

$$\operatorname{sen}\left(7t-2\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{2}\right)=\operatorname{sen}\,(7t-2\times 74^{\circ}\,3')=\operatorname{sen}\,(7t-148^{\circ}6')$$

$$=-\operatorname{sen}\,(180^{\circ}+7t-148^{\circ}\,6')$$

$$=-\operatorname{sen}\,(7t+31^{\circ}\,54')$$

$$=-\operatorname{sen}\left(7t+\operatorname{arc\,tg}\frac{28}{45}\right).$$

Ejemplo 21. — Integrar la ecuación

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}+Fy+\frac{Bl}{8}\cos\frac{\pi x}{l}=0$$

que se presenta al calcular la flecha y de una barra de longitud l bajo la fuerza F en su extremo.

Podemos escribirla del siguiente modo:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{F}{EI}\,y=-\frac{Bl}{8EI}\cos\frac{\pi x}{l}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

La solución de

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{F}{EI}\,y=0$$

es
$$y = \mathrm{A}\ \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}\, x + p\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en cuanto a (1) tenemos

$$\mathrm{D}^2 y + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}} y = -\frac{\mathrm{B}l}{8\mathrm{EI}} \cos\frac{\pi x}{l}$$

ó
$$y = \frac{-\dfrac{\mathrm{B}l}{8\mathrm{EI}}\cos\dfrac{\pi x}{l}}{\mathrm{D}^2 + \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}$$

$$= -\frac{\mathrm{B}l}{8\mathrm{EI}}\cos\frac{\pi x}{l} \times \frac{1}{-\dfrac{\pi^2}{l^2} + \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}$$

puesto que

$$\mathrm{D}^2 = -\frac{\pi^2}{l^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{B}l}{8}\cos\dfrac{\pi x}{l}}{\dfrac{\mathrm{EI}\pi^2}{l^2} - \mathrm{F}}.$$

La solución completa es pues

$$y = \mathrm{A}\ \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}\, x + p\right) + \frac{\dfrac{\mathrm{B}l}{8}\cos\dfrac{\pi x}{l}}{\dfrac{\pi^2\mathrm{EI}}{l^2} - \mathrm{F}}.$$

Ejemplo 22. — Una columna, inicialmente doblada en forma de curva de coseno, soporta un peso P, vertical. Hallar la flecha en un punto cualquiera.

Sea la forma inicial una curva dada por la ecuación siguiente:

$$y = \mathrm{A}\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

y = flecha a la distancia x del centro de la columna, cuya longitud es l.

Tendremos

$$-\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}\left(y + \mathrm{A}\cos\frac{\pi x}{l}\right).$$

ecuación obtenida de la consideración del momento de flexión a una distancia x del centro.

$$-\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}\left(y + \mathrm{A}\cos\frac{\pi x}{l}\right)$$

luego
$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{EI}\left(y + A\cos\frac{\pi x}{l}\right) = 0$$
o sea
$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{EI}y = -\frac{AP}{EI}\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Ahora bien, ya sabemos que la solución de la ecuación
$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{EI}y = 0$$
es
$$y = B\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x + p\right).$$

Para hallar la integral particular, escribiremos
$$\left(D^2 + \frac{P}{EI}\right)y = -\frac{AP}{EI}\cos\frac{\pi x}{l}$$
de modo que
$$y = \frac{-\frac{AP}{EI}\cos\frac{\pi x}{l}}{D^2 + \frac{P}{EI}} = \frac{-\frac{AP}{EI}\cos\frac{\pi x}{l}}{\frac{P}{EI} - \frac{\pi^2}{l^2}}$$

De donde se deduce, la solución general
$$\underline{y = B\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x+p\right) + \frac{l^2 AP\cos\frac{\pi x}{l}}{\pi^2 EI - Pl^2}}$$

El ejemplo siguiente se resuelve por una combinación de los métodos empleados en los ejemplos 17, 18, 19 y 20.

Ejemplo 23. — Integrar la ecuación
$$\frac{d^2s}{dt^2} - 12\frac{ds}{dt} + 20s = e^{-5t} + \operatorname{sen} 60\pi t + 5.$$

(*a*) La solución de
$$\frac{d^2s}{dt^2} - 12\frac{ds}{dt} + 20s = 0 \quad \text{es} \quad s = A_1e^{10t} + A_2e^{2t}$$

(*b*) La integral particular de
$$\frac{d^2s}{dt^2} - 12\frac{ds}{dt} + 20s = e^{-5t}$$

se deduce del cálculo siguiente:

$$s = \frac{1}{D^2 - 12D + 20} e^{-5t} \qquad \begin{array}{l} De^{-5t} = -5e^{-5t} \\ D^2e^{-5t} = 25e^{-5t} \end{array}$$

$$= \frac{1}{25 + 60 + 20} e^{-5t}$$

$$= \frac{e^{-5t}}{105}$$

(*c*) La integral particular de

$$\frac{d^2s}{dt} - 12\frac{ds}{dt} + 20s = \text{sen } 60\pi$$

se deduce del siguiente cálculo

$$s = \frac{1}{D^2 - 12D + 20} \text{sen } 60\pi t$$

$$= \frac{1}{D - 10} \cdot \frac{\text{sen } 60\pi t}{D - 2}$$

$$= \frac{1}{D - 10} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + 3600\pi^2}} \text{sen } [60\pi t - \text{arc tg } (-30\pi)] \quad \left\{ \begin{array}{l} p = -2 \\ q = 1 \\ b = 60\pi \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4 + 3600\pi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{100 + 3600\pi^2}} \text{sen } [60\pi t - \text{arc tg } (-30\pi) - \text{arc tg } (-6\pi)]$$

$$= \frac{\text{sen } [60\pi t - \text{arc tg } (-30\pi) - \text{arc tg } (-6\pi)]}{20\sqrt{(1 + 900\pi^2)(1 + 36\pi^2)}}$$

(*d*) La integral particular de

$$\frac{d^2s}{dt^2} - 12\frac{ds}{dt} + 20\,s = 5$$

es

$$s = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

La solución completa es la suma de todas estas integrales (*a*) + (*b*) + + (*c*) + (*d*):

$$s = A_1e^{10t} + A_2e^{2t} + \frac{e^{-5t}}{105} + \frac{\text{sen } [60\pi t - \text{arc tg } (-30\pi) + \text{arc tg } (-6)]}{20\sqrt{(1 + 900\pi^2)(1 + 36\pi^2)}} + \frac{1}{4}$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. — El tratamiento de estas ecuaciones se parece, hasta cierto punto, al empleado en la resolución de las ecuaciones ordinarias de segundo grado, particularmente en lo que se refiere al empleo de la descomposición en factores.

Ejemplo 24. — Integrar la ecuación

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 8\frac{dy}{dx} - 33 = 0.$$

Sea

$$Y = \frac{dy}{dx} \qquad Y^2 - 8Y - 33 = 0 \qquad (Y - 11)(Y + 3) = 0 \qquad \begin{cases} Y = 11 \\ Y = -3 \end{cases}$$

Y por lo tanto, la ecuación dada equivale a las dos siguientes:

$$\frac{dy}{dx} = 11 \qquad \frac{dy}{dx} = -3$$

de donde $\quad y = 11x + C_1 \qquad y = -3x + C_2$

o sea $\quad y - 11x - C_1 = 0 \qquad y + 3x - C_2 = 0$

y la solución completa será el producto

$$\underline{(y - 11x - C_1)(y + 3x - C_2) = 0.}$$

Ejemplo 25. — Integrar la ecuación

$$5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 8y^3 = 0.$$

Dividamos por 5

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{8}{5}y^3 = 0$$

o sea, descomponiendo en factores,

$$\left(\frac{dy}{dx} + 1{,}265y^{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{dy}{dx} - 1{,}265y^{\frac{3}{2}}\right) = 0.$$

De donde, dos ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} + 1{,}265y^{\frac{3}{2}} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} - 1{,}265y^{\frac{3}{2}} = 0$$

que se resuelven separando las variables

$$\int\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} + 1{,}265\int dx = 0 \qquad \int\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} - 1{,}265\int dx = 0$$

$$-\frac{2}{y^{\frac{1}{2}}} + 1{,}265x = C_1 \qquad -\frac{2}{y^{\frac{1}{2}}} - 1{,}265\,x = C_2.$$

La solución es pues

$$\underline{\left(1{,}265\,x - C_1 - \frac{2}{y^{\frac{1}{2}}}\right)\left(-1{,}265x - C_2 - \frac{2}{y^{\frac{1}{2}}}\right) = 0.}$$

Añadiremos finalmente otros dos ejemplos que, sin corresponder al encabezamiento precedente, ilustran métodos de integración distintos, a los hasta aquí indicados.

Ejemplo 26. — Integrar la ecuación

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 14\frac{dy}{dx} + 24\, y = 0.$$

Puede escribirse $(D^3 - D^2 - 14D + 24)\, y = 0$

o sea $(D - 2)(D - 3)(D + 4)\, y = 0.$

De donde $\underline{y = Ae^{2x} + Be^{3x} + Ce^{-4x}.}$

Ejemplo 27. — Integrar la ecuación, que se presenta en el estudio de la rotación de ejes,

$$\frac{d^4y}{dx^4} = m^4y$$

puede escribirse $D^4 = m^4$

o sea $(D^2 - m^2)(D^2 + m^2) = 0$

de donde $D = \pm m \quad D = \pm mi$

Luego $y = a_1e^{mx} + a_2e^{-mx} + a_3e^{mjx} + a_4e^{-mjx}$

Pero $e^{jx} = \cos x + j \operatorname{sen} x \qquad e^{mjx} = \cos mx + j \operatorname{sen} mx$

$e^{x} = \cosh x + \operatorname{senh} x \qquad e^{mx} = \cosh mx + \operatorname{senh} mx.$

Luego

$$\begin{aligned} y &= a_1(\cosh mx + \operatorname{senh} mx) + a_2(\cosh mx - \operatorname{senh} mx) \\ &\quad + a_3(\cos mx + j \operatorname{sen} mx) + a_4(\cos mx - j \operatorname{sen} mx) \\ &= (a_3 + a_4)\cos mx + (a_3 - a_4)\, j \operatorname{sen} mx + (a_1 + a_2)\cosh mx \\ &\quad + (a_1 - a_2)\operatorname{senh} mx \\ &= \underline{A\cos mx + B\operatorname{sen} mx + C\cosh mx + D\operatorname{senh} mx.} \end{aligned}$$

Las constantes A, B, C y D se hallarán por las condiciones del problema. Hacen falta cuatro ecuaciones que se formarán por derivación sucesiva, sustituyendo $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ por sus valores, dados para varios valores de x.

Ejercicios 22. — Sobre integración de ecuaciones diferenciales

1. Si $\frac{dy}{dx} = 5x^2 - 2{,}4$ e $y = 1{,}68$ cuando $x = 2{,}29$ hallar y en función de x.

2. Sabiendo que $\frac{d^2s}{dt^2} = 16{,}1$, $\frac{ds}{dt} = 4{,}3$, cuando $t = 1{,}7$ y $s = 9{,}8$ cuando $t = 0{,}2$, hallar s en función de t.

3. Si $\frac{dy}{dx} = 8y + 5$, hallar una expresión para y.

4. Sabiendo que $8{,}76\frac{dy}{dx} + 9{,}15y = 76{,}4$ y que $y = 2{,}17$ para $x = 0$, hallar y en función de x.

5. Una viga apoyada en sus extremos lleva un peso W concentrado en el centro. El momento de flexión M de una sección distante x del centro viene dado por

$$M = \frac{W}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Si $\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$ hallar la ecuación de la viga deformada, es decir, y en función de x.

6. Una viga fija uniformemente cargada, tiene un momento de flexión $M = \left[\frac{w}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) - K\right]$. Si $\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$; $\frac{dy}{dx} = 0$ cuando $x = \frac{l}{2}$ y cuando $x = 0$; $y = 0$ cuando $x = \frac{l}{2}$, hallar y en función de x.

7. Integrar

$$\frac{\pi r D}{as\,(1 + r)}\,\frac{dx}{dT} = \frac{1}{T - t},$$

siendo T_1 y T_2 los límites de T, 0 y l los de x. Las demás letras expresan constantes.

8. Si $\frac{dv}{dx} = -\frac{px}{4l\mu}$ y $v = 0$ para $x = s$, hallar v en función de x.

9. Si τ_1 = temperatura abso.uta de los gases que entran en un tubo de longitud l y diámetro D.

τ_2 = temperatura absoluta de los gases que salen,

θ = temperatura del agua,

Q = cantidad de calor transmitida a través del tubo por cm.^{2} por segundo, por grado de diferencia de temperatura en ambos lados,

w = peso de los gases que pasan por el tubo en un segundo. s = calor específico de los gases.

Se tiene la expresión

$$\frac{d\tau}{\tau - \theta} + \frac{Q\pi D dx}{ws} = 0.$$

Hallar la expresión de Q, siendo x la distancia a un extremo del tubo

10. Hallar Q sabiendo que $Q\tau^2\pi D dx + ws d\tau = 0$ (las letras significan lo mismo que el núm. 9 y los límites son los mismos).

11. Si τ_1 y τ_2 son la temperatura interna y externa de un tubo grueso de metal de radio interior r_1 y exterior r_2

$$\frac{d\tau}{dx} = -\frac{H}{2\pi K (r_1 + x) l}.$$

l = longitud del tubo, H = cantidad de calor. Límites: de r_1 a r_2. Hallar una expresión de H siendo K constante.

12. Un péndulo compuesto oscila en arcos pequeños. Si I = momento de inercia respecto al punto de suspensión, h = distancia del centro de gravedad al punto de suspensión tendremos

$$\text{I} \times \text{aceleración angular} \left(\text{es decir, } I\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = -mh\theta.$$

Hallar la expresión de θ.

Si μ = (par resultante para $\theta = 1$) = mh, probar que t, tiempo de una oscilación completa, es igual a $2\pi\sqrt{\frac{I}{\mu g}}$ (en unidades prácticas).

13. Para hallar expresiones para las cantidades p y q, esfuerzos en cilindros gruesos, hay que integrar la ecuación

$$\frac{rdp}{dr} + 2p = 2A$$

Integrarla con relación a p.

14. Para una granada esférica si p = presión radial

$$3a + 3p = -x\frac{dp}{dx}.$$

Hallar p para a = constante.

15. Si $-K_v v dp = K_p p dv$ probar que pv^γ = constante, siendo γ la razón: $\frac{\text{calor específico a presión constante}}{\text{calor específico a volumen constante}}$ de un gas $= \frac{K_p}{K_v}$.

16. Integrar con relación a z la ecuación

$$\frac{dz}{dx}+\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{f}\,zx = 0.$$

17. Integrar la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 17\frac{dy}{dx} + 70\,y = 0$$

y después
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 17\frac{dy}{dx} + 70\,y = 70.$$

18. Integrar

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 87\,s.$$

19. Integrar

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 87s = 0.$$

20. Hallar el tiempo necesario para la descarga de un condensador eléctrico de capacidad K a través de una resistencia R, siendo v_1 y v_2 los potenciales inicial y final, y sabiendo que

$$-\mathrm{K} \times (\text{derivada respecto al tiempo de } v) = \frac{v}{\mathrm{R}}.$$

21. Si $\mathrm{V} = \mathrm{RC} + \mathrm{L}\dfrac{d\mathrm{C}}{dt}$ y $\mathrm{V} = 0$, hallar C, siendo C_0 la corriente inicial, es decir, el valor de C cuando $t = 0$.

22. Si $\mathrm{V} = \mathrm{RC} + \mathrm{L}\dfrac{d\mathrm{C}}{dt}$ y $\mathrm{V} = \mathrm{V}_0$ sen qt, hallar C.

23. Si $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{a}\sqrt{y^2 + 2ay}$, hallar x en función de y sabiendo que a = constante.

24. La ecuación siguiente se presenta en el estudio del movimiento del émbolo de un indicador

$$\mathrm{M}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{\mathrm{MS}}\,x = \frac{pa}{\mathrm{M}}.$$

Integrarla con relación a x; M, a, S, p = constantes.

25. Si
$$-\mathrm{P}y = \mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

(ecuación referente a la flexión de riostras) hallar y, sabiendo que $x = 0$ cuando $y = 0$ y $y = \mathrm{Y}$ cuando $x = \dfrac{\mathrm{L}}{2}$.

26. Para hallar el tiempo t del retroceso de un cañón es necesario integrar la ecuación $$\frac{dx}{dt} = n\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Si $a = 47{,}5$, $n = 3{,}275$, y los límites de x son o y $57{,}5$ hallar t.

27. Integrar $\frac{d^2x}{dt^2} + 2f\frac{dx}{dt} + n^2x = 0$.

$n^2 = 200$ $f = 7{,}485$; $x = 0$ y $\frac{dx}{dt} = 10$ cuando $t = 0$.

28. Hallar la expresión de x en la ecuación siguiente que expresa la vibración forzada de un sistema

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2f\frac{dx}{dt} + n^2x = a \operatorname{sen} qt \qquad n^2 = 49,\ f = 3,\ q = 5.$$

29. Integrar $$\frac{d^2V}{dx^2} - V\frac{r_1}{r_2} = 0.$$

30. Si H = total del calor dado a un gas, p su presión y v su volumen (por kg.)

$$\frac{dH}{dv} = \frac{1}{n - 1}\left(v\frac{dp}{dv} + np\right).$$

Suponiendo una expresión adiabática $\left(\frac{dH}{dv} = 0\right)$, hallar una ecuación sencilla que exprese la relación entre la presión y el volumen durante la expansión.

31. La Ley de Newton sobre el enfriamiento puede expresarse por la ecuación

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_a)$$

k = constante, θ_a = temperatura del aire.

Si $\theta = \theta_0$ para $t = 0$, hallar una expresión de θ.

32. En el estudio de los ángulos de incidencia de los planos de un aeroplano se presenta la ecuación

$$1{,}04\frac{d^2\theta}{dt^2} + 12{,}3\frac{d\theta}{dt} + 13\theta - 634 = 0$$

Si $t = 0$ cuando $\theta = 1$ y $\frac{d\theta}{dt} = 0$ cuando $t = 0$, hallar la expresión de θ.

33. Integrar la ecuación en y:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{F}{EI}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\rho}{g}\frac{\omega^2 y}{EI} - \frac{\rho}{EI} = 0.$$

siendo constantes F, E, I, ρ, g y ω.

Esta ecuación da la flecha correspondiente a la deformación de un eje, de material de peso específico ρ, girando con velocidad angular ω sometido a una compresión longitudinal F.

34. La ecuación siguiente se refiere a la teoría de la estabilidad de los aeroplanos

$$\frac{dv}{dt} = g \cos \alpha - kv$$

v = velocidad, g, α, k = constantes.

Hallar v sabiendo que $v = 0$ para $t = 0$.

35. Siendo $\frac{dv}{dt} = \frac{a}{25}(25 - v^2)$ hállese la expresión del valor de t.

36. Resolver la ecuación $2\frac{d^2y}{dx^2} - 60\frac{dy}{dx} + 400\,y = 0$ sabiendo que $y = 5$ para $x = 0$ y que $y = 27{,}6$ para $x = 0{,}1$.

37. Resolver las ecuaciones $\frac{dy}{dx} - 5y = e^{5x}$ y $\frac{dy}{dx} - 5y = e^{4x}$, y obsérvese la diferencia esencial de la forma de las soluciones.

CAPÍTULO X

APLICACIONES DEL CÁLCULO

En este capítulo nos proponemos mostrar las aplicaciones del cálculo a los problemas de la Ingeniería. Supondremos pues el lector al corriente de la parte técnica de los problemas tratados. Presentaremos estos problemas en forma de ejemplos.

EJEMPLOS DE TERMODINÁMICA

Ejemplo 1. — Probar que $V - w = \frac{L}{\tau}\frac{d\tau}{dP}$

sabiendo que L = calor latente a la temperatura absoluta τ (*)
V = volumen de 1 kg. de vapor de agua a la temperatura absoluta τ
w = volumen de 1 kg. de agua = 0,001 m.³
P = presión.

Según el ciclo de Carnot, una cantidad de calor q tomada a temperatura $\tau + \delta\tau$ y cedida a la temperatura τ, da un trabajo $= q\,\frac{\tau + \delta\tau - \tau}{\tau + \delta\tau}$, o sea aproximadamente $q\,\frac{\delta\tau}{\tau}\cdot$ El trabajo, pues, para un kilo de vapor a la temperatura de ebullición $= L\,\frac{\delta\tau}{\tau}\cdot$

Ahora bien,

Trabajo = volumen vapor × incremento de presión = $(V - w)\delta p$.

Luego
$$(V - w)\delta P = L\frac{\delta\tau}{\tau},$$

o sea
$$V - w = \frac{L}{\tau}\frac{\delta\tau}{\delta P},$$

(*) Debiera decirse mejor: *trabajo* equivalente a dicho calor. *(N. del T).*

que, en el límite, resulta ser $V - w = \frac{L}{\tau} \frac{d\tau}{dP}$. (*)

Pero sabemos que $\frac{d\tau}{dP}$ es el coeficiente angular de la tangente de la curva presión-temperatura (que puede trazarse a base de las tablas) y puede fácilmente conocerse para todo valor de τ. De donde resulta V.

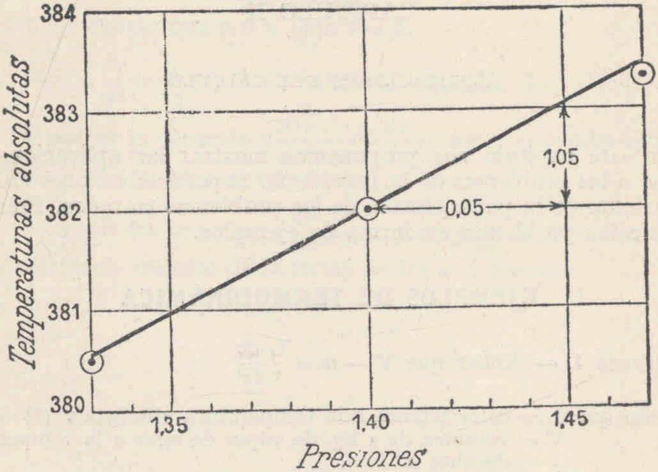


Fig. 103. — Problema de termodinámica

Ejemplo numérico.

Se pide el volumen de 1 kg. de vapor seco a la temperatura de 109° C. es decir a 1,4 kg. por cm.² de presión,

$$\text{sabiendo que} \begin{cases} \text{cuando } P = 1{,}33 & t = 107{,}5 \quad \tau = 273 + 107{,}5 = 380{,}5 \\ \quad » \quad P = 1{,}4 & t = 109 \quad \tau = 382 \\ \quad » \quad P = 1{,}47 & t = 110{,}3 \quad \tau = 383{,}3. \end{cases}$$

Representando estos valores tomando las presiones como abscisas y las temperaturas como ordenadas, se observa que en este intervalo puede tomarse la curva representativa confundida prácticamente con una recta.

La pendiente de la misma es $\frac{1{,}05}{0{,}05} = 21$ siendo éste el valor de $\frac{d\tau}{dP}$.

(*) Siendo L un trabajo se ve fácilmente que esta fórmula es homogénea. Por consiguiente si el volumen se expresa, por ejemplo, en m.³ la presión deberá expresarse en kg. por m.² *(N. del T).*

Como que hemos expresado P en kg. por cm.² y además, daremos L en calorías, la fórmula encontrada deberá modificarse, de acuerdo con dichas unidades, en esta forma:

$$V = w + \frac{427L}{10.000\tau}\frac{d\tau}{dP}. \qquad (*)$$

Y como para $t = 109^{\circ}$ C. es $L = 529$

se tendrá, en definitiva

$$V = 0{,}001 + \frac{427 \times 529 \times 21}{10{,}000 \times 382}$$

$$= \underline{\underline{1{,}243 \text{ m.}^3}}.$$

Ejemplo 2. — Probar que el calor específico del vapor saturado (en expansión seca) es negativo.

Sea $\quad Q =$ cantidad de calor añadida.

$H =$ calor total desde 0°.

$I =$ energía interna del vapor.

Tendremos $\quad H =$ energía interna + energía externa.

$$= I + PV, \text{ o sea, } I = H - PV.$$

$$\delta I = \delta H - \delta(PV) = \delta H - (P\delta V + V\delta P).$$

Ahora bien

$$\delta Q = \delta I + P\delta V$$

$$= \delta H - P\delta V - V\delta P + P\delta V$$

$$= \delta H - V\delta P$$

$$= \delta H - \frac{L}{\tau}\delta\tau \quad \left\{\begin{array}{l}\text{según el ejemplo anterior y despre-}\\ \text{ciando } w \text{ que es muy pequeño.}\end{array}\right\}.$$

(*) En efecto: el factor 427 no es más que el equivalente mecánico del calor, y que multiplicando al número L de calorías da el trabajo correspondiente en kilográmetros. En cuanto al factor 10.000 del denominador sirve para transformar la presión dada en kg. por cm.² a kg. por m.², según lo dicho antes.

La fórmula inglesa correspondiente es $V = w + \frac{778L}{144\tau}\frac{d\tau}{dP}$ (V, w, en pies³; L en calorías inglesas, τ en grados absolutos Farenheit; P en libras inglesas por pulgada²). *(N. del T).*

De modo que

$$\frac{\delta Q}{\delta\tau}=\frac{\delta H}{\delta\tau}-\frac{L}{\tau}$$

o sea en el límite

$$\frac{dQ}{d\tau}=\frac{\delta H}{d\tau}-\frac{L}{\tau} \qquad \left\{ \begin{array}{l} H = 601 + 0{,}305\tau \\ \dfrac{dH}{d\tau}=0{,}305 \end{array} \right\}$$

$$=0{,}305-\frac{L}{\tau}$$

Ahora, como que el calor específico s = calor necesario para elevar la temperatura 1°

$$=\frac{dQ}{d\tau}$$

será $s = 0{,}305 - \frac{L}{\tau}$ y como $\frac{L}{\tau}$ es mayor que $0{,}305$, s es negativa.

Ejemplo $\quad t = 149°$ C., o sea $\tau = 422°$ absolutos

$$L = 607 - 0{,}7t$$
$$= 607 - 104 = 503$$
$$s = 0{,}305 - \frac{503}{422}$$
$$= -0{,}886.$$

Trabajo efectuado en la expansión de los gases

Ejemplo 3. — Hallar el trabajo efectuado en la expansión de un gas del volumen V_1 al V_2.

Hay dos casos distintos que es preciso tratar separadamente, pero en ambos casos, el trabajo efectuado se mide por el área

$$\mathrm{ABCD}=\sum_{v_1}^{v_2}\text{áreas elementos MN (fig. 104)}=\sum_{v_1}^{v_2}p\,\delta v=\int_{v_1}^{v_2}p\,dv.$$

Caso (*a*). La ley de expansión es pv = constante

El trabajo será

$$\int_{v_1}^{v_2}p\,dv=\int_{v_1}^{v_2}Cv^{-1}dv=C\Big(\mathrm{l.n.}\,v\Big)_{v_1}^{v_2}$$

$$=C\,\mathrm{l.n.}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)=C\,\mathrm{l.n.}\,r$$

siendo r la razón de expansión $=\frac{v_2}{v_1}$.

De modo que

$$\text{Trabajo} = pv \text{ l.n. } r.$$

Caso (*b*). Ley de expansión $pv^n = C$

Siendo n un valor distinto de 1.

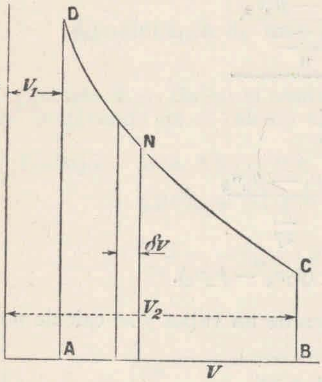


Fig. 104

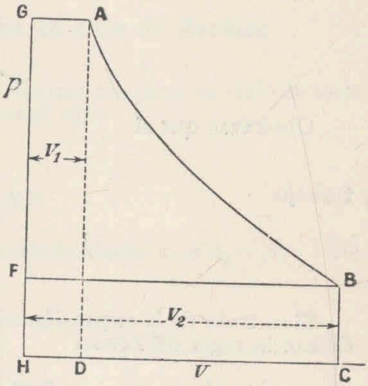


Fig. 105

$$\text{Trabajo} = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv = \int_{v_1}^{v_2} Cv^{-n}\, dv$$

$$= \frac{C}{1 - n}\,(v_2^{1-n} - v_1^{1-n})$$

$$= \frac{1}{1 - n}\,(Cv_2^{1-n} - Cv_1^{1-n})$$

$$= \frac{1}{1 - n}\,(p_2 v_2^n v_2^{1-n} - p_1 v_1^n v_1^{1-n})$$

$$= \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1 - n}.$$

Trabajo efectuado en un ciclo teórico completo

Ejemplo 4. — Hallar el trabajo efectuado en el ciclo FGAB (fig. 105).

Este trabajo = Area GABF = ABCD + GADH — FBCH

$$= \frac{p_2v_2 - p_1v_1}{1 - n} + p_1v_1 - p_2v_2$$

$$= (p_1v_1 - p_2v_2)\left(1 - \frac{1}{1-n}\right)$$

$$= (p_1v_1 - p_2v_2)\frac{(-n)}{1-n}$$

$$= \frac{p_1v_1 - p_2v_2}{\frac{n-1}{n}}.$$

Obsérvese que si $n = \frac{17}{16}$

trabajo $= \frac{p_1v_1 - p_2v_2}{\frac{1}{17}}$

$$= 17\,(p_1v_1 - p_2v_2).$$

Si se trata de la expansión adiabática de un vapor y se calcula n mediante la regla de Zeuner

$$n = 1{,}035 + 0{,}1q$$

en la que q es el grado de sequedad inicial o título inicial del vapor, y si $q = 1$, $n = 1{,}035 + 0{,}1 = 1{,}135$, entonces:

$$\text{Trabajo} = \frac{1{,}135}{0{,}135}(p_1v_1 - p_2v_2) = 8{,}41\,(p_1v_1 - p_2v_2).$$

Determinación de la entropía del agua a la temperatura absoluta τ

Ejemplo 5. — Cuando un cuerpo absorbe o cede calor a la temperatura τ, el cambio de entropía es $\delta\phi = \frac{\delta q}{\tau}$ (δq = calor absorbido).

Sea σ el calor específico $\sigma\delta\tau = \delta q$

cambio de entropía entre τ_0 y $\tau = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dq}{\tau}$

$$= \sigma \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau}$$

$$= \sigma \,\text{l.n.}\, \frac{\tau}{\tau_0}.$$

[Para el caso del vapor al pasar de líquido a gas

Calor absorbido a la temperatura $\tau = L$.

Luego

cambio de entropía $= \frac{L}{\tau}$].

Rendimiento de una máquina en ciclo de Rankine

Ejemplo 6. — Hallar el rendimiento de una máquina en ciclo de Rankine empleando en el cálculo el diagrama $\tau\phi$.

Trabajo = área ABCD (fig. 106)

$= ABCK + ADMN - DKMN$

$= \frac{q_1 L_1}{\tau_1}(\tau_1 - \tau_2) +$ Calor absorbido desde τ_2 a $\tau_1 - (\tau_2 \times DK)$.

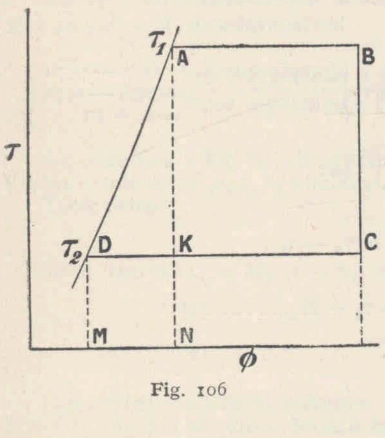


Fig. 106

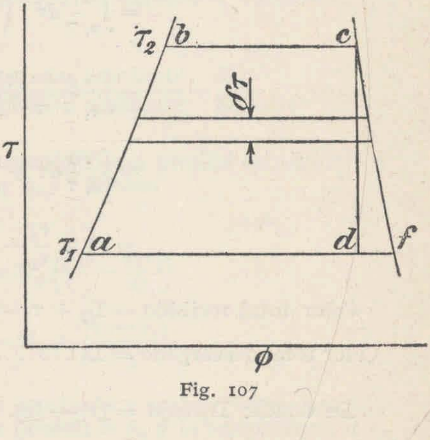


Fig. 107

Pero DK = cambio de entropía del agua a τ_2, al agua a τ_1

$= \text{l.n.}\,\frac{\tau_1}{\tau_2}$.

Por lo tanto

$$\text{Trabajo efectuado} = \frac{q_1 L_1}{\tau_1}(\tau_1 - \tau_2) + (\tau_1 - \tau_2) - \tau_2\,\text{l.n.}\,\frac{\tau_1}{\tau_2}$$

$$= (\tau_1 - \tau_2)\left(1 + \frac{q_1 L_1}{\tau_1}\right) - \tau_2\,\text{l.n.}\,\frac{\tau_1}{\tau_2}.$$

El calor absorbido $= \tau_1 - \tau_2 + q_1 L_1$ (q_1 = grado de sequedad a la temperatura τ_1)

Luego

$$\text{Rendimiento} \quad \eta = \frac{(\tau_1 - \tau_2)\left(1 + \dfrac{q_1 L_1}{\tau_1}\right) - \tau_2 \log_e \dfrac{\tau_1}{\tau_2}}{\tau_1 - \tau_2 + q_1 L_1}.$$

Rendimiento de una máquina trabajando en ciclo de Rankine, conservándose el vapor saturado por medio de camisa de vapor

Ejemplo 7. — Hallar el rendimiento de una máquina cuyo ciclo resulta de *abcf* (fig. 107).

Trabajo = área *abcf*

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{L}{\tau} d\tau \quad \left(\begin{array}{c}\text{suma de elementos}\\ \text{horizontales}\end{array}\right)$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{a + b\tau}{\tau} d\tau \quad \left\{\begin{array}{r}\text{puesto que } L = 607 - 0{,}7\,t\\ = 798 - 0{,}7\tau\\ = a + b\tau\end{array}\right\}$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{a}{\tau} d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} b d\tau$$

$$= a \,\text{l.n.} \frac{\tau_2}{\tau_1} + b\,(\tau_2 - \tau_1).$$

Calor total recibido $= L_2 + \tau_2 - \tau_1 + H_j$...... (1)

Calor total descargado $= L_1$ .... (2)

De donde: Trabajo = (1) — (2).

y de aquí

$$H_j = a \,\text{l.n.} \frac{\tau_2}{\tau_1} + b\,(\tau_2 - \tau_1) - (L_2 - L_1) - (\tau_2 - \tau_1) =$$

$$= a \,\text{l.n.} \frac{\tau_2}{\tau_1} + b(\tau_2 - \tau_1) - (a + b\tau_2 - a - b\tau_1)$$

$$- (\tau_2 - \tau_1) =$$

$$= a \,\text{l.n.} \frac{\tau_2}{\tau_1} - (\tau_2 - \tau_1)$$

Ahora bien,

Calor total recibido

$$= L_2 + \tau_2 - \tau_1 + H_j$$

$$= L_2 + \tau_2 - \tau_1 + a \text{ l.n. } \frac{\tau_2}{\tau_1} - (\tau_2 - \tau_1)$$

$$= a \text{ l.n. } \frac{\tau_2}{\tau_1} + L_2.$$

Por consiguiente

$$\text{Rendimiento} = \frac{a \text{ l.n. } \frac{\tau_2}{\tau_1} + b\,(\tau_2 - \tau_1)}{a \text{ l.n. } \frac{\tau_2}{\tau_1} + a + b\tau_2}$$

en donde $a = 798$ y $b = -0{,}7$.

Ejemplo 8. — Probar que la ecuación de expansión adiabática del aire es $pv^{\gamma} = C$, siendo

$$\gamma = \frac{\text{calor específico a presión constante}}{\text{calor específico a volumen constante}} = \frac{K_p}{K_v}.$$

Supongamos 1 kg. de aire expansionándose a presión constante, entre las condiciones $p_1\ v_1\ \tau_1$ iniciales y $p_1\ v\ \tau$ finales.
Tendremos:

$$\text{Calor recibido} = K_p\,(\tau - \tau_1) = K_p\left(\frac{p_1 v}{C_1} - \frac{p_1 v_1}{C_1}\right)$$

$$= K_p\, p_1\left(\frac{v - v_1}{C_1}\right).$$

Conservemos ahora el volumen v constante y sustraigamos tanto calor como hemos añadido. Bajará la presión a p_2 y la temperatura a τ_2.

$$\text{Calor sustraído} = K_v\,(\tau_1 - \tau_2) = K_v\left(\frac{p_1 v}{C_1} - \frac{p_2 v}{C_1}\right)$$

$$= \frac{K_v v}{C_1}\,(p_1 - p_2).$$

Si estos cambios son muy pequeños podemos escribir δv en vez de $v - v_1$ y δp en vez de $p_1 - p_2$ y por lo tanto

$$-K_v v\,\delta p = K_p p\,\delta v$$

de donde

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{K_p}{K_v} \int \frac{dv}{v}$$

$$\text{l.n.}\, p = -\gamma\, \text{l.n.}\, v + \text{l.n.}\ (\text{constante})$$

$$p = Cv^{-\gamma}$$

o sea

$$pv^{\gamma} = C.$$

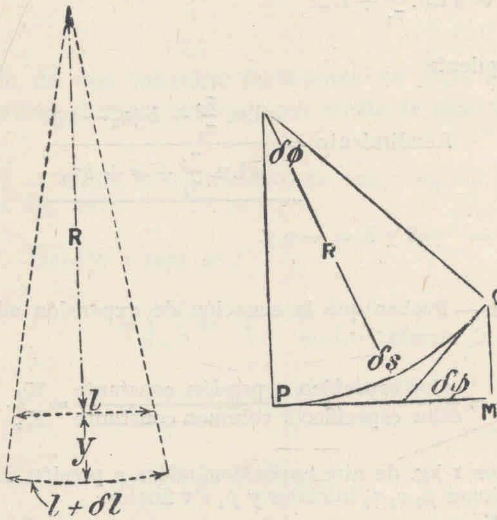


Fig. 108. — Sobre una demostración relativa a vigas cargadas

Ejemplos relativos a vigas cargadas

Ejemplo 9. — Demostrar la importantísima fórmula siguiente:

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} = E\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

aplicada a una viga cargada; M, I, E. tienen sus significados usuales, R es el radio de curvatura de la viga cargada.

Suponiendo que la viga empieza por estar recta, se toma una porción de viga de longitud l sobre la fibra neutra. Sea $l + \delta l$ la longitud de una porción de fibra bajo el esfuerzo y a una distancia y (fig. 108). Tendremos, siendo R el radio de curvatura de la línea neutra

$$\frac{l + \delta l}{l} = \frac{R + y}{R}$$

de donde $$\frac{l+\delta l}{l}-1=\frac{R+y}{R}-1$$

o sea $$\frac{\delta l}{l}=\frac{y}{R}$$

pero $$E=\frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}}=\frac{f}{\frac{\delta l}{l}}=\frac{f}{\frac{y}{R}}=\frac{fR}{y}$$

luego $$\frac{E}{R}=\frac{f}{y}.$$

Pero ya sabemos (pág. 269) que

$$\frac{M}{I}=\frac{y}{f}.$$

Luego $$\frac{M}{I}=\frac{E}{R}.$$

La curvatura total de un arco de curva es el ángulo total que describe la tangente cuando su punto de contacto pasa de un extremo a otro; la curvatura media es la curvatura total dividida por la longitud del arco.

En la figura 108, $\delta\phi$ = curvatura total del arco ds; curvatura media $=\frac{\delta\phi}{\delta s}$.

El coeficiente angular de la tangente $=\frac{dy}{dx}$

es decir, $$\operatorname{tg}\phi=\frac{dy}{dx}.$$

Ahora bien

$$\frac{d}{d\phi}\operatorname{tg}\phi=\sec^2\phi \qquad \frac{d\,(\operatorname{tg}\phi)}{ds}=\frac{d\,(\operatorname{tg}\phi)}{d\phi}\times\frac{d\phi}{ds}.$$

Luego

$$\sec^2\phi\cdot\frac{d\phi}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\sec^2\phi\cdot\frac{d\phi}{ds}=\sec^2\phi\cdot\frac{1}{R}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\times\frac{dx}{ds}=\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{ds}.$$

De donde

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{ds} \times \cos^2\phi = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\left(\operatorname{tg}\phi = \frac{dy}{dx} \qquad \operatorname{tg}^2\phi = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \qquad \sec^2\phi = 1 + \operatorname{tg}^2\phi = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right).$$

Cuando, como sucede con las vigas, $\frac{dy}{dx}$ es muy pequeño, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ puede despreciarse al lado de 1 y entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Puede alcanzarse este resultado más brevemente aunque de un modo aproximado, por el método que a continuación se expone.

$\delta\phi = \delta(\operatorname{tg}\phi)$ aproximadamente, puesto que ϕ es pequeño.

Luego

$$\frac{\delta\phi}{\delta s} = \frac{\delta(\operatorname{tg}\phi)}{\delta s} = \frac{\delta}{\delta x}\operatorname{tg}\phi \qquad \text{(pues PM y PQ son aproximadamente iguales)}$$

de donde
$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

y
$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Luego
$$\frac{M}{I} = \frac{f}{y} = \frac{E}{R} = E\frac{d^2y}{dx^2}.$$

En las aplicaciones de esta regla pueden hallarse fácilmente expresiones de y en función de x, en los casos de viga sencillamente apoyada. En efecto, puede hallarse la expresión del momento de flexión a la distancia x del extremo o del centro, según convenga, y luego la relación

$$\frac{M}{I} = E\frac{d^2y}{dx^2}$$

dará por doble integración una ecuación de la línea neutra curvada, llamada línea o curva elástica.

A continuación se tratan algunos casos de los más difíciles.

Ejemplo 10. — Una viga empotrada en un extremo y apoyada en el otro, está cargada uniformemente, con un peso w por unidad de longitud. Hallar la ecuación de la línea elástica resultante.

Tenemos que hallar la fuerza P (del par que mantiene fijo el extremo empotrado de la viga) y combinarla con la reacción en B, calculada suponiendo que la viga está sencillamente apoyada; el momento de flexión a la distancia x de B (fig. 109), suponiendo la viga simplemente apoyada,

sería $$= \frac{wl}{2} x - \frac{wx^2}{2}$$

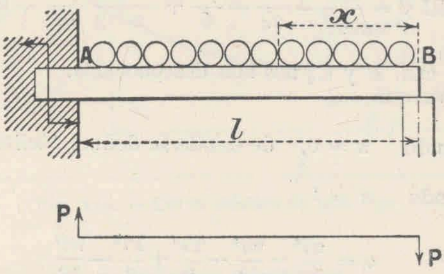


Fig. 109. — Viga uniformemente cargada

De donde, el momento de flexión verdadero

$$M = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2} - Px$$

por consiguiente

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2} - Px$$

y por integración

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} - \frac{Px^2}{2} + C_1.$$

Pero $$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ cuando } x = l$$

puesto que en este punto la curva elástica es horizontal.

Luego $$0 = \frac{wl^3}{4} - \frac{wl^3}{6} - \frac{Pl^2}{2} + C_1$$

y por lo tanto $$C_1 = \frac{Pl^2}{2} - \frac{wl^3}{12}$$

y finalmente

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} - \frac{Px^2}{2} + \frac{Pl^2}{2} - \frac{wl^3}{12}.$$

Integremos

$$EI\,y = \frac{wlx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} - \frac{Px^3}{6} + \frac{Pl^2x}{2} - \frac{wl^3x}{12} + C_2$$

ecuación en la cual P y C_2 nos son desconocidos.

Pero sabemos que

$y = 0$ cuando $x = 0$, de donde se deduce fácilmente $C_2 = 0$

$y = 0$ cuando $x = l$

de donde $$0 = \frac{wl^4}{12} - \frac{wl^4}{24} - \frac{Pl^3}{6} + \frac{Pl^3}{2} - \frac{wl^4}{12}$$

que nos da $$P = \frac{wl}{8}.$$

Si la viga estuviese sencillamente apoyada la reacción hacia arriba sería $\frac{wl}{2}$ y por lo tanto la reacción resultante es $\frac{wl}{2} - \frac{wl}{8} = \frac{3}{8}\,wl.$

Sustituyamos $\frac{wl}{8}$ en la expresión de y y llegaremos así a la ecuación de la elástica de la viga:

$$\underline{y = \frac{w}{48EI}\,(3lx^3 - 2x^4 - l^3x)}$$

cuya curva está figurada en la figura 110.

El punto de máxima flecha se deducirá de la ecuación $\frac{dy}{dx} = 0$,

o sea $$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{48EI}\,(9lx^2 - 8x^3 - l^3) = 0$$

que da $$9lx^2 - 8x^3 - l^3 = 0$$

de donde $$x = 0{,}423\,l$$

que es la única solución aplicable a este caso.

La flecha máxima es, pues,

$$y_{max} = \frac{wl^4}{48EI}(0{,}228 - 0{,}064 - 0{,}423)$$

$$= -\frac{0{,}0054\, wl^4}{EI}.$$

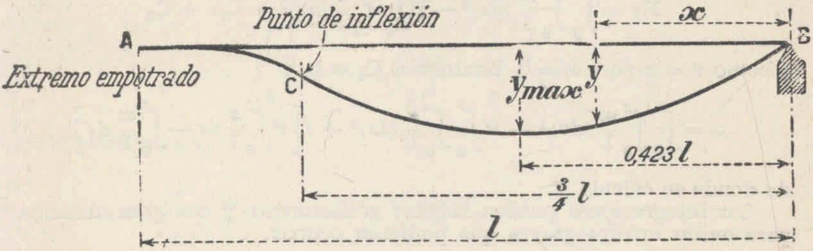


Fig. 110. — Curva elástica de una viga

Para hallar C, punto de inflexión tendremos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{48EI}(18lx - 24x^2)$$

y haremos $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad$ que da $\quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{4}l \end{cases}$

Ejemplo 11. — Una viga empotrada en un extremo y apoyada en el otro, tiene carga y sección variables. Hallar la ecuación de la línea elástica.

Sea m = momento de flexión en el punto que dista x de B, si la viga estuviera sencillamente apoyada, y sea P la fuerza del par que fija el extremo empotrado (par de empotramiento) (fig. 109).

Tendremos $\quad M = m - Px$

o sea $\quad EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = m - Px$

$$E\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m}{I} - \frac{P}{I}x$$

poniendo I en el segundo miembro, puesto que en este caso es variable.

Integremos: $\quad E\dfrac{dy}{dx} = \displaystyle\int_0^x \frac{m}{I}\,dx - P\int_0^x \frac{x}{I} + C_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$

Ahora bien $\frac{dy}{dx} = 0$ para $x = l$

luego $C_1 = P \int_0^l \frac{x}{I} dx - \int_0^l \frac{m}{I} dx$

de modo que C_1 puede deducirse de estas dos integrales.

Integremos ahora (1)

$$Ey = \int_0^x \int_0^x \frac{m}{I} (dx)^2 - P \int_0^x \int_0^x \frac{x}{I} (dx)^2 + C_1 x + C_2$$

y como $y = 0$ para $x = 0$, tendremos $C_2 = 0$, y

$$0 = \int_0^l \int_0^x \frac{m}{I} (dx)^2 - P \int_0^l \int_0^x \frac{x}{I} (dx)^2 + l \left[P \int_0^l \frac{x}{I} dx - \int_0^l \frac{m}{I} dx \right]$$

de donde se calcula P.

Las integraciones pueden hacerse gráficamente y con gran atención para evitar errores graves que pudieran ocurrir.

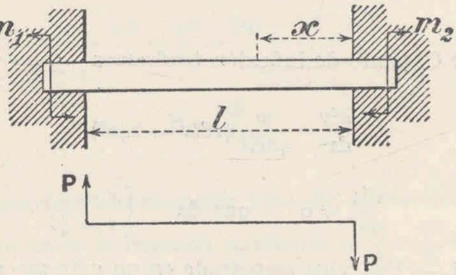


Fig. 111

Ejemplo 12. — Una viga empotrada en sus dos extremos lleva carga y sección variables. Hallar la ecuación de su línea elástica.

Sean m_1 y m_2 los momentos de empotramiento. Para que el sistema esté en equilibrio serán menester fuerzas iguales y contrarias P (fig. 111) de suerte que $Pl + m_2 = m_1$.

Si es m el momento en x, en la hipótesis de la viga sencillamente apoyada, el momento efectivo será

$$M = m - m_2 - Px$$

por consiguiente

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = m - m_2 - Px$$

o sea

$$E \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m}{I} - \frac{m_2}{I} - \frac{P}{I} x.$$

Integremos

$$E\frac{dy}{dx} = \int^{x}\frac{m}{I}\,dx - m_2\int_0^x \frac{dx}{I} - P\int_0^x \frac{x}{I}\,dx + C_1.$$

Ahora bien $\frac{dy}{dx} = 0$ cuando $x = 0$ y $x = l$

luego $C_1 = 0$

y $$0 = \int_0^l \frac{m}{I}\,dx - m_2\int_0^l \frac{dx}{I} - P\int_0^l \frac{x}{I}\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

integremos otra vez,

$$Ey = \int_0^x\int_0^x \frac{m}{I}(dx)^2 - m_2\int_0^x\int_0^x \frac{(dx)^2}{I} - P\int_0^x\int_0^x \frac{x}{I}(dx)^2 + C_2.$$

Pero $y = 0$ cuando $x = 0$ y $x = l$.

Luego $C_2 = 0$

$$0 = \int_0^l\int_0^x \frac{m}{I}(dx)^2 - m_2\int_0^l\int_0^x \frac{(dx)^2}{I} - P\int_0^l\int_0^x \frac{x}{I}(dx)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deducirán los valores de m_2 y P (y por lo tanto de m_1); las integrales pueden calcularse generalmente por integración gráfica. Se recomienda nuevamente gran cuidado en la operación.

Ejemplo 13. — Una viga rectangular uniforme, empotrada en sus extremos, tiene 6 metros de largo y soporta una carga de 10 toneladas en su centro y una de 7 toneladas a 1,50 metros de un extremo. Hallar los momentos de empotramiento y el diagrama del momento de flexión. Es un caso especial del anterior, en el que I es constante.

El diagrama del momento de flexión si la viga estuviera sencillamente apoyada sería ABCD, diágrama de la figura 112.

El diagrama de momento de flexión debido a los pares solos, tendría la forma de un trapezoide APQD.

A fin de evitar posibles errores y toda vez que sólo hay dos cargas a considerar, es preferible seguir el método siguiente de Goodman. (Véase *Mecánica aplicada a la ingeniería* de Goodman):

(1) Las áreas correspondientes a los diagramas de momentos *libres* y *fijos* (es decir, momentos debidos a las fuerzas aplicadas sobre viga libre y momentos debidos a las condición de empotramiento) deben ser iguales.

(2) Los centros de gravedad de dichas áreas deben de hallarse en la misma vertical.

Según (1):

$$\text{Area (ABCD)} = \frac{1}{2} \times 1,50 \times 15,375 + \frac{15,375 + 20,250}{2} \times 1,50 + \frac{1}{2} \times 3 \times 20,250$$

$$= 68,625.$$

$$\text{Area (APQD)} = \frac{1}{2} \times 6\,(m_1 + m_2) = 3\,(m_1 + m_2) \quad m_1 = AP \quad m_2 = DQ.$$

Igualdad de áreas $3\,(m_1 + m_2) = 68,625$

$$m_1 + m_2 = 22,875 \qquad (1)$$

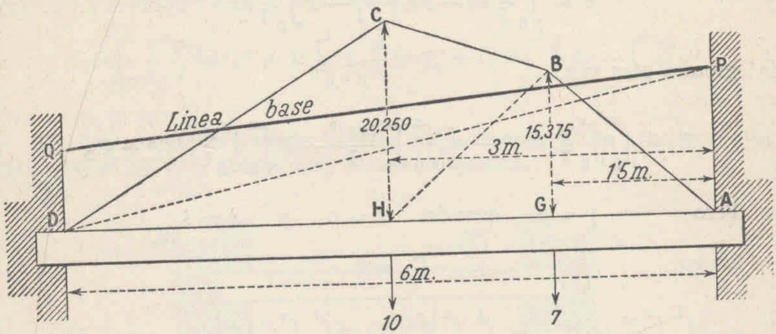


Fig. 112. — Momentos flectores y de empotramiento de una viga cargada

Para satisfacer la condición (2) se tiene, tomando momentos con relación a AP:

$$\text{Momento de ABG} = \frac{1}{2} \times 1,5 \times 15,375 \times \frac{2}{3} \times 1,50 = 11,53$$

$$\text{Momento de BGH} = \frac{1}{2} \times 1,5 \times 15,375 \times \left(1,50 + \frac{1}{3} \times 1,50\right) = 23,06$$

$$\text{Momento de BHC} = \frac{1}{2} \times 1,5 \times 20,250 \times \left(1,50 + \frac{2}{3} \times 1,50\right) = 37,97$$

$$\text{Momento de DCH} = \frac{1}{2} \times 3 \times 20,250 \times \left(3 + \frac{1}{3} \times 3\right) = 121,500$$

$$\text{Momento total de ABCD con relación a AP} = 194,06$$

$$\text{Momento de APD} = \frac{1}{2} \times 6 \times m \times \frac{1}{3} 6 = 6\,m_1$$

$$\text{Momento de DPQ} = \frac{1}{2} \times 6 \times m_2 \times \frac{2}{3} 6 = 12\,m_2$$

$$6\,m_1 + 12\,m_2 = 194,06 \ldots (2)$$

De la resolución de las ecuaciones (1) y (2) resulta

$$m_1 = 13{,}4 \qquad m_2 = 9{,}47$$

La recta PQ es pues la línea de referencia o base del diagrama de momentos flectores verdaderos siendo AP = 13,4 y DQ = 9,47.

Esfuerzos cortantes en las vigas

Ejemplo 14. — Hallar una expresión para el máximo de intensidad del esfuerzo cortante en la sección de una viga, o sea el máximo esfuerzo tangencial unitario.

El esfuerzo cortante en un punto de una sección vertical va siempre acompañado de un esfuerzo cortante de igual intensidad en un plano horizontal que pasa por dicho punto. De modo que el esfuerzo cortante o tangencial unitario f en E, plano CEC′ (fig. 113) será igual al esfuerzo tangencial unitario en la dirección EF, del plano EF, perpendicular al de la figura. Supongamos que el momento de flexión en CC′ = M y el momento en DD′ = M + δM. El total de las fuerzas normales en DF es mayor que el de las fuerzas normales en CE, y la diferencia será el total de las fuerzas tangenciales en EFE′.

Sea P = total de fuerzas normales en ECE′

$$P = \int_{\mathrm{RE}}^{\mathrm{RC}} \text{esfuerzo} \times \text{área} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\text{esfuerzo}}{y} = \dfrac{M}{I} \\ \text{área} = b\,dy \end{array} \right\}$$

$$= \int_{\mathrm{RE}}^{\mathrm{RC}} \frac{yM}{I}\, b\,dy$$

$$= \frac{M}{I}\int_{\mathrm{RE}}^{\mathrm{RC}} by\,dy = \frac{M}{I} \times \text{momento estático de la porción ECE}'.$$

Pero la fuerza tangencial sobre EFE′ = esfuerzo × área

$$= f \times EE' \times \delta x$$

cantidad que debe igualar la diferencia entre las fuerzas normales en DF y CE, es decir, δP.

Luego $\qquad \delta P = f \times EE' \times \delta x$

es decir $\qquad \dfrac{\delta M}{I} \times (\text{momento área ECE}') = f \times EE' \times \delta x.$

Pero $\dfrac{\delta M}{\delta x}$ = incremento relativo del momento de flexión = esfuerzo cortante = F

Luego el máximo de intensidad de f

$$= (\text{momento área ECE}') \times \frac{F}{I} \times \frac{I}{EE'}$$

o, como se escribe comúnmente

$$f = \frac{FS\bar{y}}{bI}$$

siendo S el área CEE' $\bar{y}$ = la distancia de su centro de gravedad al eje neutro.

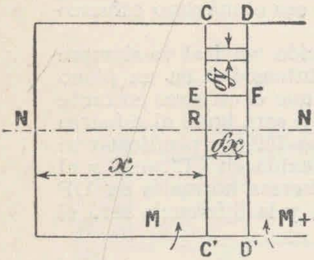
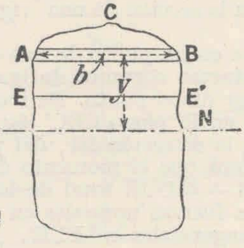


Fig. 113. — Esfuerzos cortantes en las vigas



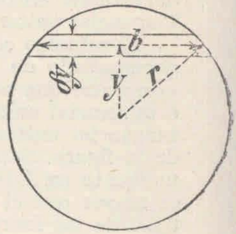


Fig. 114

Ejemplo 15. — Hallar la intensidad máxima del esfuerzo cortante en una sección circular de radio r (fig. 114).

Tenemos

$$I = \frac{\pi}{4} r^4.$$

Apliquemos la regla anterior:

$$\text{Máximo de intensidad} = \frac{F}{2rI}\int_0^r by\,dy$$

(puesto que $2r$ corresponde a EE' del ejemplo anterior).

$$= \frac{F}{2rI}\int_0^r 2(r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} y\,dy$$

$$= \frac{F}{rI}\int_0^r u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{-2} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{(haciendo } u = r^2 - y^2 \\ \dfrac{du}{dy} = -2y) \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{F}{2rI}\left(\frac{2}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\right)_0^r$$

$$= \frac{F \times 4}{2r\pi r^4} \times \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{\pi r^2}$$

$$= \frac{4}{3} \times \text{Intensidad media.}$$

Ejemplo 16. — Un brazo horizontal de grúa, de sección circular que va estrechándose uniformemente, está empotrado en un extremo y cargado en el otro. El diámetro en el extremo cargado es D cms. y la disminución t cms. por cm. de longitud. Hallar la expresión de la distancia de la sección más forzada al extremo libre, despreciando el peso del brazo.

Sea l la longitud en cms. y W el peso o carga en el extremo libre. Consideremos una sección a la distancia x de este extremo. El diámetro de la misma será $D - tx$ y el momento de flexión $W.x$. El I de la sección será

$$\frac{\pi}{64}(\text{Diámetro})^4 = \frac{\pi}{64}(D - tx)^4.$$

Luego el esfuerzo en la superficie

$$f = \frac{My}{I} = Wx\left(\frac{D - tx}{2}\right) \times \frac{64}{\pi(D - tx)^4}$$

$$= \frac{32Wx}{\pi(D - tx)^3}$$

$$= \frac{K}{\dfrac{D^3 - 3D^2tx + 3Dt^2x^2 - t^3x^3}{x}}$$

en el que $\quad K = \frac{32W}{\pi} = \text{constante}$

y por tanto f será máximo cuando el denominador sea mínimo. Llamemos N al denominador.

$$N = D^3x^{-1} - 3D^2t + 3Dt^2x - t^3x^2$$

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{D^3}{x^2} + 3Dt^2 - 2t^3x$$

que se anula cuando

$$2t^3x^3 - 3Dt^2.x^2 + D^3 = 0$$

o sea $\quad 2x^2t^2(xt - D) - D(t^2x^2 - D^2) = 0$

$$(tx - D)[2tx^2 - D(tx + D)] = 0$$

$$(tx - D)(2tx + D)(tx - D) = 0 \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{D}{t} \\ x &= -\frac{D}{2t} \end{aligned}\right\}.$$

Así pues el esfuerzo es máximo en la sección distante $\frac{D}{t}$ cms. del extremo libre.

Ejemplo 17. — Hallar la flecha de una boca de cañón.

Es un ejemplo instructivo de determinación de la flecha de un brazo de palanca cuya sección varía.

Divídase el cuerpo del cañón en cierto número de discos elementales, cuyos volúmenes y pesos se calcularán de modo que pueda trazarse la curva de carga. Intégrese gráficamente, lo que dará la curva del esfuerzo cortante y por integración de ésta, el diagrama del momento de flexión. Se calculan luego los valores de I de cada disco, y se traza la curva de ordenadas $\dfrac{\text{Momento flector}}{\text{I}}$, cuya doble integración dará la elástica y por consiguiente la flecha pedida.

Es necesaria la utilización de esta curva para determinar primeramente el tiempo de la oscilación fundamental y luego la velocidad ascendente debida a la flecha.

Sea y la flecha en una sección cualquiera y w el peso del disco elemental correspondiente. Súmense los productos wy^2 así como los productos wy (lo que se facilita por medio de tablas de los datos). Tendremos entonces T (tiempo de la oscilación)

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\Sigma wy^2}{g\Sigma wy}}.$$

Si Y = flecha máxima; suponiendo el movimiento armónico simple, la velocidad ascendente se deducirá de

$$\mathrm{VT} = 2\pi \mathrm{Y}$$

$$\mathrm{V} = \frac{2\pi\mathrm{Y}}{\mathrm{T}}$$

Ejemplos de electricidad aplicada

Ejemplo 18. — Ordenar n acumuladores eléctricos, parte en serie, parte en paralelo, de modo que den el máximo de corriente a través de una resistencia exterior R.

Sean r y v respectivamente la resistencia interna y la F. E. M. de cada acumulador.

Sea el circuito mixto en cuestión el de la figura 115, con x acumuladores por hilera y por lo tanto $\frac{n}{x}$ hileras.

F. E. M. total de una hilera $= xv$.

Resistencia interior total de una hilera $= xr$.

Como que hay $\frac{n}{x}$ hileras, la resistencia interior total será $\dfrac{1}{\frac{n}{x}} \times$ la resistencia de una hilera. Es decir,

Resistencia total de circuito $= xr \times \dfrac{1}{\frac{n}{x}} = \dfrac{rx^2}{n}$.

En cuanto a la F. E. M. total será la misma de una hilera, equivaliendo en realidad el conjunto a un acumulador de mayores dimensiones y resistencia menor.

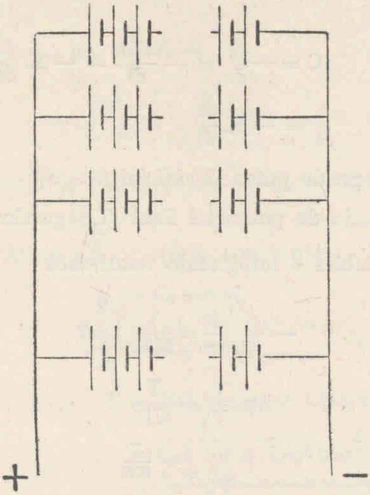


Fig. 115. — Batería de acumuladores

De donde la corriente C

$$C = \frac{\text{F.E.M. total}}{\text{resistencia total}} = \frac{xv}{\frac{rx^2}{n} + R} = \frac{v}{\frac{rx}{n} + \frac{R}{x}} = \frac{v}{D}$$ (designando por D el denominador)

C será pues máximo cuando D sea mínimo.

$$\frac{dD}{dx} = \frac{r}{n} - \frac{R}{x^2}$$

que se anula para

$$\frac{r}{n} = \frac{R}{x^2} \qquad R = \frac{rx^2}{n}$$

a saber, cuando la resistencia externa es igual a la interna.

Ejemplo 19. — Hallar la expresión del tiempo de descarga de un condensador eléctrico de capacidad K, que se descarga a través de una resistencia R, constante.

Sea v = diferencia de potencial entre las dos caras, en el tiempo t. Apliquemos la ley de Ohm. $C = \frac{v}{R}$.

Pero C resulta también de la velocidad de disminución de la cantidad $q = Kv$.

Luego $$C = -\frac{dq}{dt} = -\frac{dKv}{dt} = -K\frac{dv}{dt}$$

y por lo tanto $$\frac{v}{R} = -K\frac{dv}{dt}$$

Si V_1 = diferencia de potencial inicial ($t = 0$)

V_2 = diferencia de potencial final (T segundos)

separando las variables e integrando tendremos

$$-\int_{V_1}^{V_2} \frac{dv}{v} = \frac{1}{KR}\int_0^T dt$$

$$\text{l.n.}\frac{V_1}{V_2} = \frac{T}{KR}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = e^{\frac{T}{KR}}$$

o sea $$\frac{V_2}{V_1} = e^{-\frac{T}{KR}}$$

y tiempo de descarga de V_1 a $V_2 = KR\ \text{l.n.}\frac{V_1}{V_2}$.

Ejemplo 20. — Si R = resistencia eléctrica de un circuito, C = corriente, V = voltage, L = autoinducción

$$V = RC + L\frac{dC}{dt}.$$

Resolver esta ecuación para los casos siguientes:

$$V = 0,\ C = C_0 \operatorname{sen} qt,\ \text{y}\ V = V_0 \operatorname{sen} qt.$$

Si la corriente es constante $V = RC$ puesto que $\frac{dC}{dt} = 0$ y en este caso corresponde a la ecuación del movimiento uniforme en mecánica, mientras que $V = RC + L\frac{dC}{dt}$ puede compararse con la del movimiento acelerado, en la que F (fuerza) hace la función que aquí V. Así pues el segundo término de esta ecuación puede ser considerado como expresión de «inercia» u «oposición al cambio», y puesto que la corriente puede variar según leyes distintas, $\frac{dC}{dt}$ puede tener varios valores.

(1) $V = 0$, tendremos $$0 = RC + L\frac{dC}{dt}$$

$$RC = -L\frac{dC}{dt}$$

que se integra separando las variables

$$\int\frac{dC}{C} = -\frac{R}{L}\int dt$$

$$-\frac{Rt}{L} = \text{l.n. } C + \text{l.n. } A = \text{l.n. } AC$$

$$AC = e^{-\frac{Rt}{L}} \qquad (A = \text{constante}).$$

(2) $$C = C_0 \operatorname{sen} qt.$$

Entonces $$\frac{dC}{dt} = qC_0 \cos qt.$$

Luego $$V = RC_0 \operatorname{sen} qt + LqC_0 \cos qt$$

$$= C_0\sqrt{R^2 + L^2q^2}\operatorname{sen}\left[qt + \operatorname{arc\,tg}\frac{Lq}{R}\right].$$

(3) $$V = V_0 \operatorname{sen} qt.$$

Tenemos entonces

$$V_0 \operatorname{sen} qt = RC + L\frac{dC}{dt}$$

$$V_0 \operatorname{sen} qt = (R + LD)\, C$$

utilizando el operador $$D = \frac{d}{dt}$$

$$C = \frac{V_0 \operatorname{sen} qt}{R + LD}$$

y (teorema 2.º, página 326)

$$C = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2q^2}}\operatorname{sen}\left(qt - \operatorname{arc\,tg}\frac{Lq}{R}\right)$$

a lo que hay que añadir la solución de

$$0 = RC + L\frac{dC}{dt}$$

a saber $$C = Ke^{-\frac{Rt}{L}}.$$

De modo que la solución completa es

$$C = Ke^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2q^2}} \operatorname{sen}\left(qt - \operatorname{arc\,tg}\frac{Lq}{R}\right).$$

Ejemplo 21. — Hallar expresiones para el potencial y la corriente en puntos cualesquiera de un conductor largo y uniforme.

A una distancia x del extremo inicial del conductor sean E e i respectivamente el potencial a tierra y la corriente. Sea r la resistencia por unidad de longitud de conductor y sea p la pérdida por aislamiento también en una unidad de longitud.

Consideremos una longitud pequeña δx.

Su resistencia $= r\delta x.$

Su pérdida $= E \times p\delta x.$

Luego

Disminución del potencial $= ir\delta x$ .... (1)

Disminución de la corriente $= E \times p\delta x$ .... (2)

o sea de (1) $\delta E = -ir\delta x$

equivalente a $\dfrac{\delta E}{\delta x} = -ir$ .... (3)

y de (2) $\delta i = -Ep\delta x$

o sea $\dfrac{\delta i}{\delta x} = -Ep$ .... (4)

Pasando al límite en (3) y (4)

$$\frac{dE}{dx} = -ir$$

$$\frac{\delta i}{\delta x} = -Ep.$$

Derivemos $\dfrac{d^2E}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(-ir) = -r\dfrac{di}{dx} = rEp$ ...... (5)

$$\frac{d^2i}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-Ep) = -p\frac{dE}{dx} = rip \text{ ...... } (6)$$

Resolvamos con ayuda del operador $D = \dfrac{d}{dx}$

$$D^2E = rpE$$

$$D^2 = rp$$

$$D = \pm\sqrt{pr}$$

$$\frac{dE}{dx} = +\sqrt{rp}\,E \qquad \frac{dE}{dx} = -\sqrt{rp}\,E.$$

Separemos variables

$$\frac{dE}{E} = \sqrt{rp}\, dx \quad \text{o bien} \quad \frac{dE}{E} = -\sqrt{rp}\, dx.$$

Integremos

$$\text{l.n. } E = \sqrt{rp}\, x + C_1; \quad \text{l.n. } E = -\sqrt{rp}\, x + C_2$$

es decir $\qquad E = A_1 e^{\sqrt{rp}x} + A_2 e^{-\sqrt{rp}x}$

o sea, escogiendo constantes apropiadas,

$$E = A \cosh \sqrt{rp}\, x + B \operatorname{senh} \sqrt{rp} x.$$

De igual modo,

$$i = C \cosh \sqrt{rp}\, x + D \operatorname{senh} \sqrt{rp}\, x.$$

Cuando $\qquad x = L$

$$E = A \cosh \sqrt{rp} \times L + B \operatorname{senh} \sqrt{rp} \times L.$$

Cuando $\qquad x = 0$

$$E = A$$

de cuyas ecuaciones pueden determinarse las constantes.

Ejemplos de resistencia de materiales

Ejemplo 22. — Hallar la forma que toma una cadena cargada sola mente por su propio peso, igual a w, por unidad de longitud. Hallar también expresiones para la longitud del arco y la tensión en un punto cualquiera.

Sea s = longitud del arco AB (fig. 116). El peso de esta porción $= ws$. Si trazamos el triángulo de las fuerzas T, T_0 y ws (fig. 117) y suponemos que T_0 = tensión horizontal $= wc$, siendo c una constante, tendremos (fig. 116 y 117)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta = \frac{ws}{T_0} = \frac{ws}{wc} = \frac{s}{c}.$$

Pero ya hemos visto, pág. 224, que

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{c^2}{s^2}} = \frac{\sqrt{s^2 + c^2}}{s}$$

o sea $\qquad \dfrac{sds}{\sqrt{c^2 + s^2}} = dy \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$

Hagamos $u = c^2 + s^2$

$$\frac{du}{ds} = 2s$$

luego $$\int \frac{sds}{\sqrt{c^2 + s^2}} = \int \frac{sdu}{2\,su^{\frac{1}{2}}} = u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{c^2 + s^2}.$$

De modo, que la integración de (1) nos dará

$$\sqrt{c^2 + s^2} = y + C_1.$$

Ahora bien, en el punto A (fig. 116) $s = 0 \quad y = c$.

Luego: $$\sqrt{c^2} = C_1 \qquad c = C_1.$$

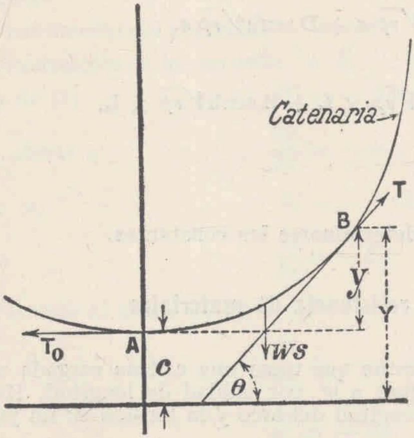


Fig. 116

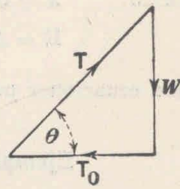


Fig. 117

De modo que $$\sqrt{c^2 + s^2} = y + c$$

Elevemos al cuadrado $c^2 + s^2 = y^2 + c^2 + 2yc$

o sea $$s^2 = y^2 + 2yc \qquad s = \sqrt{y^2 + 2yc}.$$

Pero ya hemos visto que $\frac{s}{c} = \frac{dy}{dx} \qquad s = c\frac{dy}{dx}.$

Luego $$c\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 + 2yc}.$$

Separemos las variables

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 + 2yc}} = \frac{dx}{c}.$$

Luego:

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 + 2yc + c^2 - c^2}} = \frac{dx}{c} \quad \text{o sea} \quad \frac{dy}{\sqrt{(y + c)^2 - c^2}} = \frac{dx}{c}.$$

Integrando $\qquad \displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{(y + c)^2 - c^2}} = \int \frac{dx}{c}$

que da por resultado (pág. 166)

$$\text{l.n.} \frac{y + c + \sqrt{y^2 + 2yc}}{c} = \frac{x}{c} + C_2.$$

Cuando $y = 0$, $x = 0$ puesto que medimos x desde el eje vertical que pasa por A.

Luego: $\qquad \text{l.n.} \frac{c}{c} = C_2 \quad \text{o sea} \quad C_2 = 0.$

Por consiguiente

$$\frac{x}{c} = \text{l.n.} \frac{y + c + \sqrt{y^2 + 2cx}}{c}$$

o sea, en forma exponencial

$$ce^{\frac{x}{c}} = v + c + \sqrt{y^2 + 2yc}.$$

Aislando el radical

$$ce^{\frac{x}{c}} - (y + c) = \sqrt{y^2 + 2yc}.$$

Elevando al cuadrado

$$c^2c^{\frac{2x}{c}} - 2ce^{\frac{x}{c}}(y + c) + y^2 + c^2 + 2cy = y^2 + 2yc$$

o sea $\qquad c^2e^{\frac{2x}{c}} - 2ce^{\frac{x}{c}}(y + c) + c^2 = 0.$

Dividamos por $ce^{\frac{x}{c}}$

$$ce^{\frac{x}{c}} + ce^{-\frac{x}{c}} = 2(y + c)$$

o sea $\qquad y + c = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{e}}\right)$

Si trasladamos hacia abajo el eje de las x una longitud c, la nueva ordenada será $Y = y + c$ y, la ecuación de la curva

$$Y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) = c \cosh \frac{x}{c}.$$

Además, como $Y = y + C$ $\qquad \dfrac{dY}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$

así como $\qquad \dfrac{d}{dx} c \cosh \dfrac{x}{c} = \dfrac{c}{c} \operatorname{senh} \dfrac{x}{c} = \operatorname{senh} \dfrac{x}{c}.$

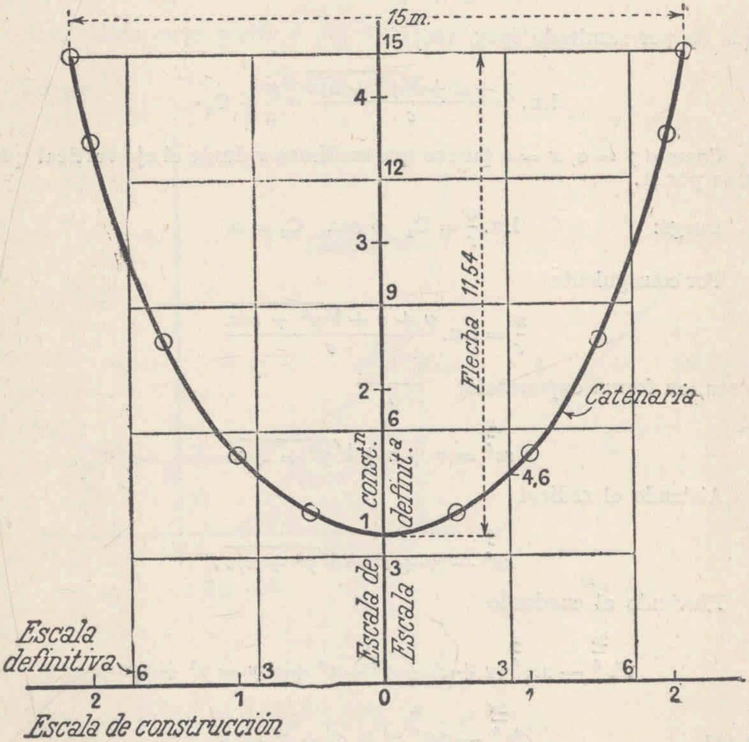


Fig. 118. — Catenaria

Luego: $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{senh} \dfrac{x}{c}$

pero ya sabemos que $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{s}{c}.$

Luego: $\qquad \dfrac{s}{c} = \operatorname{senh} \dfrac{x}{c} \qquad s = c \operatorname{senh} \dfrac{x}{c}.$

Para hallar la tensión T en un punto cualquiera

$$T^2 = w^2 s^2 + w^2 c^2 \quad \text{(fig. 117)}$$

$$= w^2 (s^2 + c^2)$$

$$= w^2 (c + y)^2 = w^2 Y^2,$$

Luego: $$T = wY.$$

La forma tomada por la cadena es pues, la de la curva $Y = c \cosh \frac{x}{c}$, que recibe el nombre de catenaria. La longitud de arco de esta curva es $s = c \operatorname{senh} \frac{x}{c}$, y la tensión en un punto cualquiera se mide por el producto de la ordenada en dicho punto por el peso lineal de la cadena.

La figura 118 representa la catenaria de un cable que pesa 5 kilos por metro lineal con una tensión de 18 kg. y el método de cálculo para la construcción de esta curva puede verse en el tomo I, página 436.

La tensión a 3 metros del centro es $= 5 \times 4{,}6 = 23$ kg., puesto que la ordenada en dicho punto es 4,6.

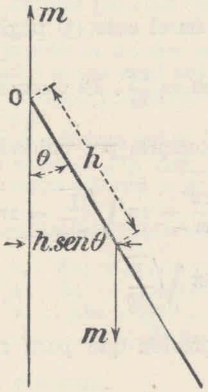


Fig. 119

Ejemplo 23. — Hallar el tiempo de oscilación de un péndulo compuesto que oscila en arcos pequeños.

Sea I el momento de inercia del péndulo con relación a su eje de suspensión (fig. 119) y h la distancia del centro de gravedad al de suspensión.

El momento que produce la aceleración angular es = momento de inercia $\times$ aceleración angular. (Compárese con la regla de la aceleración lineal, fuerza = masa $\times$ aceleración).

Ahora bien, velocidad angular $= \frac{d\theta}{dt}$.

Luego aceleración angular $= \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

y Momento en cuestión $= \mathrm{I} \times \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

cuyo opuesto es un momento de brazo $= h$ sen θ según se ve en la figura.

Así pues $\mathrm{I}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -mh \operatorname{sen}\theta = -mh\theta$

puesto que los arcos son pequeños.

De modo que $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{mh}{\mathrm{I}}\theta = -\omega^2\theta$ haciendo $\omega^2 = \dfrac{mh}{\mathrm{I}}$

Nuestra ecuación es pues

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

ecuación del tipo tratado en el caso (3) página 320 y cuya solución es $\theta = \mathrm{A} \operatorname{sen}(\omega t + \mathrm{B})$.

El período de la función es $\dfrac{2\pi}{\omega}$. El momento del par motor para un ángulo $\theta = mh\theta$.

Por consiguiente, el momento por unidad de ángulo $= mh = \mu$.

Luego: $t = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mathrm{I}}{mh}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mathrm{I}}{\mu}}$

o sea $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mathrm{I}}{\mu g}}$

en unidades prácticas, expresión que para recordarla mejor puede escribirse

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{\text{momento motor por unidad de ángulo}}}$$

Si se utiliza esta fórmula para medir el módulo de rigidez de un alambre por medio de oscilaciones de torsión, hay que sustituir h por l, longitud del alambre.

En este caso siendo f el esfuerzo superficial, T la torsión, C el módulo de rigidez, d el diámetro del alambre

$$\theta = \frac{2fl}{\mathrm{C}d} \quad \text{y} \quad \mathrm{T} = \frac{\pi}{16} fd^3$$

de donde $\theta = \dfrac{32\mathrm{T}l}{\pi d^4 \mathrm{C}}$.

Pero $$\mu = \frac{T}{\theta} = \frac{\pi d^4 C}{32l}$$

y $$t = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mu g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{32lI}{\pi d^4 Cg}}$$

De donde $$C = \frac{128\pi lI}{gd^4t^2}$$ obteniéndose C.

Si l viene dado en cm., I en gr. $\times$ cm.^{2}, t en segundos, d en cms.

$$C = \frac{\text{cm.} \times \text{gr.} \times \text{cm.}^2 \times \text{seg.}^2}{\text{cm.} \times \text{cm.}^4 \times \text{seg.}^2}$$

$$= \frac{\text{gr.}}{\text{cm.}^2}$$ o sea C está en gr. por cm.^{2} cuadrado.

Ejemplo 24. — Hallar fórmulas para los esfuerzos radial y tangencial en cilindros de paredes gruesas, sujetos a una presión exterior o interior.

Podemos abordar este problema de dos maneras:

Método 1. — En (a) figura 120 sea r_1 el radio exterior y r_0 el interior. Sea p la presión o esfuerzo interno, y la presión o esfuerzo perpendicular a los radios, o tangencial $= q$.

Es más fácil considerar el esfuerzo sobre la superficie exterior como mayor al esfuerzo sobre la interior (*). Así, para un anillo de radio r y espesor δr haremos la presión interna $= p$ y la externa $= p + \delta p$.

Sea el elemento RS de anillo que subtiende un ángulo $= \delta\theta$.

$$\begin{aligned} \text{Fuerza radial total} &= (p + \delta p) \times \text{arco exterior} - p \times \text{arco interior} \\ &= (p + \delta p)(r + \delta r)\,\delta\theta - pr\,\delta\theta \\ &= (pr + p\delta r + r\delta p + \delta p\delta r - pr)\delta\theta \\ &= (p\delta r + r\delta p + \delta p\,\delta r)\,\delta\theta \end{aligned}$$

por unidad de longitud del cilindro.

Esta fuerza está equlilibrada por dos fuerzas que según se ve en la figura 120 (b) equivalen a una fuerza radial única igual a $q\delta r.\delta\theta$.

En efecto

$$\frac{\frac{x}{2}}{q\delta r} = \operatorname{sen}\frac{\delta\theta}{2} = \frac{\delta\theta}{2} \text{ (puesto que } \delta\theta \text{ es muy pequeño)}$$

o sea $$x = q\delta r.\delta\theta$$

siendo x la fuerza radial.

(*) Por eso se supone el cilindro sometido a presión exterior. Si la presión es interior puede conservarse en esta forma el cálculo, solo que δp debe considerarse como un incremento negativo y las fuerzas q cambian de sentido. Así se supone en la figura 120 (c). (*N. del T*).

Tendremos pues $(p\delta r + r\delta p + \delta p\delta r)\,\delta\theta = q\delta r\delta\theta.$

Y para δr infinitamente pequeño

$$pdr + rdp = qdr.$$

Supongamos que cada fibra longitudinal se alarga en igual cantidad a causa de los esfuerzos secundarios.

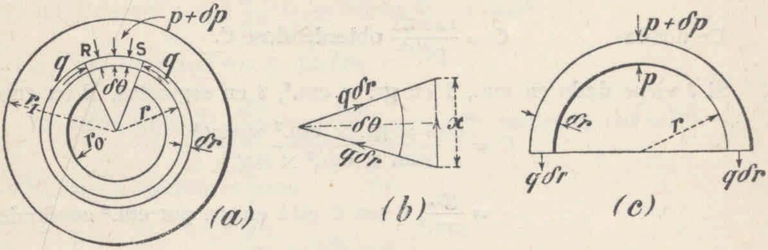


Fig. 120. — Esfuerzos en cilindros de paredes gruesas

Luego, si σ = índice de Poisson y E = módulo de Young del material,

$$\text{alargamiento longitudinal debido a } p = \frac{P}{E} \times \frac{1}{\sigma}$$

$$\text{» » » a } q = \frac{q}{E} \times \frac{1}{\sigma}$$

y como el alargamiento total es constante

$$(p + q) \times \frac{1}{\sigma E} = \text{Constante}$$

más como σ y E son constantes $\quad p + q = 2A$

llamando 2A a una constante.

Por lo tanto
$$rdp + pdr = qdr$$
$$= (2A - p)\,dr$$

o sea
$$rdp = 2\,(A - p)\,dr.$$

Separemos las variables e integremos

$$\int \frac{dp}{2(A - p)} = \int \frac{dr}{r}$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\text{l.n.}\,(A - p) + \text{l.n.}\,C = \text{l.n.}\,r$$

$$r = \frac{C}{(A - p)^{\frac{1}{2}}}$$

$$A - p = \frac{C^2}{r^2}$$

o sea $$\left.\begin{aligned} p &= A + \frac{B}{r^2} \\ p + q &= 2A \\ q &= A - \frac{B}{r^2} \end{aligned}\right\}$$ de donde

Los constantes A y B se pueden calcular con los datos de cada ejemplo particular.

Método 2. — Se puede considerar q como un esfuerzo de tensión. Consideremos un cilindro delgado (fig. 120) (c) y tomemos en él un elemento semicircular en equilibrio.

Tendremos $(p \times 2r) - (p + \delta p) \times 2\,(r + \delta r) = 2q\delta r$

o sea, pasando al límite,

$$qdr = -pdr - rdp.$$

De aquí en adelante se continúa como en el método anterior. Para la comodidad del cálculo se hará $p - q = 2A$ en vez de $p + q = 2A$.

Ejemplo 25. — Hallar expresiones para los esfuerzos en granadas esféricas de paredes gruesas.

Sea p el esfuerzo o presión radial y q el tangencial.

Sea un elemento esférico de radio r y espesor δr (fig. 121)

$$\pi r^2 p - \pi\,(r + \delta r)^2\,(p + \delta p) = 2\pi r\, q\delta r$$

o sea

$$\pi r^2 p - \pi r^2 p - \pi p\,(\delta r)^2 - 2\pi r \delta r p - \pi r^2 \delta p - \pi\,\delta p\,(\delta r)^2 - 2\pi r\,\delta r \delta p = 2\pi r\,\delta r q$$

y al límite, reduciendo, $\quad -2pdr - rdp = 2qdr$

luego $$2q = -2p - r\,\frac{dp}{dr}.$$

Si la distensión volumétrica es la misma en todas partes

$$2\,l_y + l_x = C$$

siendo l_y = distensión según la circunferencia, luego $2l_y$ = distensión superficial y l_x = distensión radial.

Tendremos, pues

$$\frac{2q}{\sigma E} - \frac{p}{\sigma E} = C$$

a saber $\quad 2q - p =$ const. que designaremos por $3A$.

Ahora bien $$2q = -2p - r\frac{dp}{dr}$$

luego $$3A + p = -2p - r\frac{dp}{dr}$$

o sea $$3(A + p) = -\frac{rdp}{dr}.$$

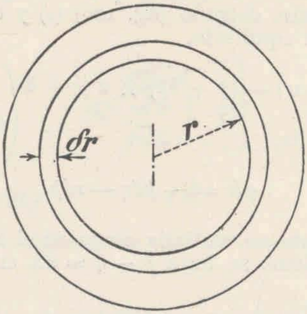


Fig. 121

Separemos variables e integremos

$$-\int\frac{dr}{r} = \int\frac{dp}{3(A + p)}$$

$$-\text{l.n.}\, r = \frac{1}{3}\,\text{l.n.}\,(A + p) + \text{l.n.}\, C_1$$

$$(A + p)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{C_1 r}$$

o $$A + p = \frac{1}{C_1{}^3 r^3}$$

o sea $$p = \frac{1}{C_1{}^3 r^3} - A = \frac{2B}{r^3} - A \quad \left(2B = \frac{1}{C_1{}^3}\right)$$

y como $$2q = 3A + p$$

$$= 3A + \frac{2B}{r^3} - A = 2A + \frac{2B}{r^3}$$

se tendrá $$q = \frac{B}{r^3} + A.$$

Fórmulas de Euler para postes cargados (*)

Ejemplo 26. — Hallar una fórmula que dé la carga de pandeo para un poste de momento de inercia = I y de longitud L.

Según la fórmula conocida

$$\frac{M}{I} = E\frac{d^2y}{dx^2}.$$

El momento flector en Q = M = Py (fig. 122) (a)

$$IE\frac{d^2y}{dx^2} = -Py$$

es decir
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{IE}y$$

sea
$$\frac{P}{IE} = \omega^2$$

luego:
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$$

cuya solución (caso 3, pág. 320) es

$$y = A\,\text{sen}\,(\omega x + B).$$

Las condiciones distintas de apoyo dan las siguientes soluciones:

Caso de extremos redondeados. — Cuando $x = 0$, $y = 0$

luego
$$0 = A\,\text{sen}\,(0 + B)$$

y como A no es nulo, B tiene que serlo $\quad B = 0$

Cuando $\quad x = \frac{L}{2} \quad y = Y \quad$ (fig. 122) (a)

$$Y = A\,\text{sen}\,\frac{\omega L}{2}.$$

Evidentemente, Y es la amplitud es decir A = Y, luego

$$1 = \text{sen}\,\frac{\omega L}{2}.$$

De modo que podemos escribir

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \text{sen}\,\frac{\omega L}{2} \qquad \left(\text{siendo } \frac{\pi}{2} \text{ el ángulo menor cuyo seno} = 1\right)$$

(*) Más generalmente, para prismas comprimidos de gran longitud. *(N. del T).*

$$\pi = \omega L$$

$$L \times \sqrt{\frac{P}{EI}} = \pi$$

de donde
$$P = \frac{\pi^2 IE}{L^2}.$$

Caso de los dos extremos empotrados.— La forma que toma la columna es la de la figura 122 (*b*). El semiperíodo de la curva es $\frac{L}{2}$. Pero el período es $\frac{2\pi}{\omega}$.

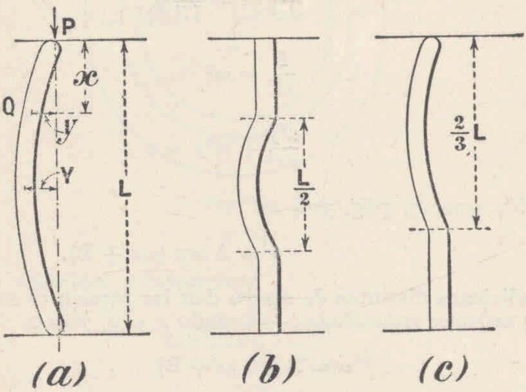


Fig. 122

Luego:
$$L = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{P}{EI}}}$$

de modo que
$$P = \frac{4\pi^2 IE}{L^2}.$$

Caso de un extremo empotrado. — La forma es la de la figura 122 (*c*). El semiperíodo es $\frac{2}{3}$ L y el período $\frac{2\pi}{\omega}$.

Luego:
$$\frac{4}{3} L = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$L = \frac{3\pi}{2\omega}$$

y como $$\omega = \sqrt{\frac{P}{IE}}$$

$$L^2 = \frac{9\pi^2 IE}{4P}$$

de donde $$P = \frac{9\pi^2 IE}{4L^2}.$$

Tensión de una correa en una polea

Ejemplo 27. — Comparar las tensiones extremas T_1 y T_2 en una correa que pasa por una polea sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre la polea y la correa es μ y el ángulo de contacto $= \theta$ radianes.

Consideremos un pequeño elemento de correa que subtiende al ángulo $\delta\theta$ (fig. 123). Las tensiones son $T + \delta t$ y T.

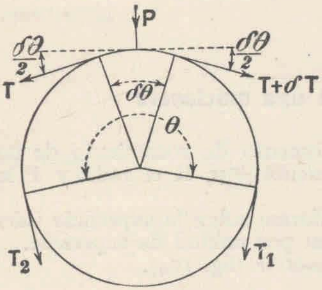


Fig. 123

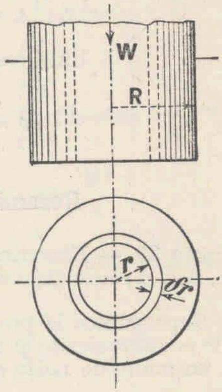


Fig. 124

Proyectando horizontalmente las fuerzas tendremos

$$(T + \delta t) \cos \frac{\delta\theta}{2} - T \cos \frac{\delta\theta}{2} = \mu P$$

o sea $$\delta T \cos \frac{\delta\theta}{2} = \mu P$$

y en el límite $$dT = \mu P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

puesto que $$\cos \frac{\delta\theta}{2} \to \cos 0 = 1.$$

Proyectando verticalmente,

$$P = (T + \delta T + T) \operatorname{sen} \frac{\delta\theta}{2}$$

$$= 2\, T \operatorname{sen} \frac{\delta\theta}{2} + \delta T \operatorname{sen} \frac{\delta\theta}{2}$$

$$= 2\, T \frac{\delta\theta}{2} + \delta\, T \frac{\delta\theta}{2} \qquad \left(\text{puesto que } \frac{\delta\theta}{2} \text{ es muy pequeño}\right).$$

En el límite, $P = T d\theta$ .... (2)

Combinemos (1) y (2)

$$dT = \mu\, T\, \delta\theta.$$

Separemos e integremos

$$\int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\theta} d\theta$$

$$\text{l.n.} \frac{T_1}{T_2} = \mu\theta$$

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta}.$$

Rozamiento en una quicionera

Ejemplo 28. — Encontrar el momento de rozamiento de una quicionera. Sea el coeficiente de rozamiento $= \mu$, R el radio y P la carga total.

(*a*) Supongamos la presión uniforme sobre la superficie inferior, es decir, $P = \pi R^2 p$ siendo p la presión por unidad de superficie.

Sea un anillo de radio r, y espesor δr (fig. 124).

Area del anillo $= 2\, \pi r \delta r$

Presión sobre el anillo $= 2\, \pi r \delta r p$

Rozamiento sobre el anillo $= 2\, \pi r \delta r p \mu$

Momento del anterior respecto al centro $= 2\, \pi r \delta r p \mu r$

Momento total de rozamiento $= \int_0^R \mu p 2 \pi r^2 dr$

$$= 2\, \pi \mu p \frac{R^3}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \mu \pi\, R^3 \frac{P}{\pi R^2}$$

$$= \frac{2}{3} R \mu P.$$

es decir, que el momento es el mismo que si toda la carga estuviese concentrada a una distancia del centro $= \frac{2}{3}$ R.

(*b*) Supongamos que p varía en razón inversa de la velocidad, es decir
$$p = \frac{K}{v}.$$

Velocidad en el radio $r = v_r = 2\,\pi n r$ (n, número de vueltas por segundo)

De modo que
$$p = \frac{K}{2\pi n r} = \frac{m}{r}$$
$$\left(m = \text{constante} = \frac{K}{2\pi n}\right).$$

Presión total sobre el anillo de radio $r = 2\pi r \delta r \dfrac{m}{r}$
$$= 2\pi m \delta r$$

Fuerza de rozamiento sobre el anillo $= \mu \times 2\pi m \delta r.$

Momento de la anterior $= 2\pi\mu m \delta r \times r.$

Momento total
$$= \int_0^R 2\pi\mu m r dr$$
$$= 2\pi\mu m \frac{R^2}{2}.$$

Ahora bien. carga $= \int_0^R$ presión unitaria $\times$ área.

Luego:
$$P = \int_0^R p \times 2\pi r dr$$
$$= \int_0^R \frac{2\pi r dr}{r} \times m$$
$$= 2\pi m R.$$

Momento total de rozamiento
$$= 2\pi m R \times \frac{\mu R}{2}$$
$$= \mu P \times \frac{R}{2}.$$

Es decir que el radio, efectivo es ahora $\frac{1}{2}$ y no $\frac{2}{3}$ como en el caso anterior.

Ejemplo 29. — Hallar la expresión del momento de rozamiento de un pivote de Schiele.

Supongamos la presión uniforme sobre toda la superficie de rozamiento y que el desgaste normal es proporcional a la presión p y a la velocidad v.

Refiriéndose a la figura 125, δn (desgaste normal) varía como $p \times v$ es decir, como $2\pi nrp$. Luego δn (proporcional pv) $= Kpr$.

Sea un punto P en el cual la tangente hace un ángulo θ con el eje. Si $t =$ longitud de la tangente, $t \operatorname{sen} \theta = r$.

Ahora bien

$$\delta h \text{ (desgaste vertical)} = \frac{\delta n}{\operatorname{sen} \theta}$$

o sea $$\delta n = \delta h \operatorname{sen} \theta$$

y $$\delta n = Kpr = Kpt \operatorname{sen} \theta.$$

Luego: $$\delta h = Kpt.$$

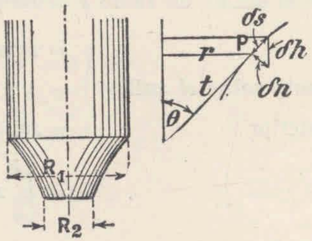


Fig. 125

Pero δh es constante, p y K son constantes, luego t debe ser constante, y la curva es la llamada tractriz, que se define precisamente por esta propiedad, que la longitud de la tangente desde el punto al eje es constante.

Para hallar el momento de rozamiento, tendremos,

Rozamiento sobre un elemento $= 2\pi r \delta s \times p \times \mu$.

Momento del anterior $= 2\pi r \delta s \times p \times \mu \times r$.

Pero $\delta r = \delta s \times \operatorname{sen} \theta$.

Luego:

Momento total $$= \int_{R_2}^{R_1} 2\pi\mu pr \frac{\delta r}{\operatorname{sen}\theta} t \operatorname{sen} \theta$$

$$= 2\pi\mu pt \times \tfrac{1}{2} (R_1^2 - R_2^2).$$

Ahora bien $$p = \frac{P}{\pi (R_1^2 - R_2^2)}.$$

Luego:

Momento total de rozamiento $= \mu Pt$.

Ejemplos de Hidráulica

Ejemplo 30. — Hallar el tiempo necesario para vaciar un depósito de área A dcms². cuadrados a través de un orificio de área a dcms.², siendo C_d el coeficiente de descarga (*).

Si la altura del agua sobre el orificio en un instante dado es h, la velocidad de descarga es $v_2 = \sqrt{2gh}$.

De aquí, el gasto por segundo $= C_d av$

y en el tiempo $\delta t = C_d av\delta t$

lo que produce un descenso de nivel $= \delta h$, y una disminución en el volumen $= A\delta h$.

De modo que $$A\delta h = C_d a \sqrt{2gh} \times \delta t$$

que, en el límite, se escribe,

$$Adh = C_d a \sqrt{2gh}\, dt.$$

Separemos las variables e integremos

$$\int_0^t dt = \int_{h_1}^{h_2} \frac{Adh}{C_d a \sqrt{2g}\, h^{\frac{1}{2}}} \qquad h_2 = \text{altura inicial} \quad h_1 = \text{altura final.}$$

o sea $$t = \frac{A}{a} \times \frac{1}{C_d \sqrt{2g}} \times 2\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}\right)$$

$$= \frac{2A}{C_d a \sqrt{2g}} \left[h_2^{\frac{1}{2}} - h_1^{\frac{1}{2}}\right] \text{ (**)}.$$

Si $h_1 = 0$ el tiempo necesario para vaciar el depósito, será

$$\frac{2A\sqrt{h}}{C_d a \sqrt{2g}}.$$

Ejemplo 31. — Medir el gasto de una corriente por medio de un vertedero triangular.

Sea H la altura del vertedero, y consideremos un pequeño elemento de anchura b, espesor δh y altura sobre el vértice $= H - h$.

(De la figura 126), $$\frac{b}{2} = (H - h) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}; \quad \theta \text{ ángulo del vertedero,}$$

$$b = 2(H - h) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

(*) Más bien llamado coeficiente de contracción, por ser debido a la contracción de la vena líquida a la salida. *(N. del T).*

(**) Esto en el supuesto de ser A constante; por ejemplo, un depósito cilíndrico vertical. Si A no es constante se expresa en función de h y se sustituye en la integral. *(N. del T).*

Area del elemento $= b\delta h.$

Velocidad del agua $= \sqrt{2g \times \text{altura}} = \sqrt{2gh}.$

Gasto elemental $= C_d \times 2\,(H - h)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} \times \sqrt{2g}\,h^{\frac{1}{2}}\,\delta h.$

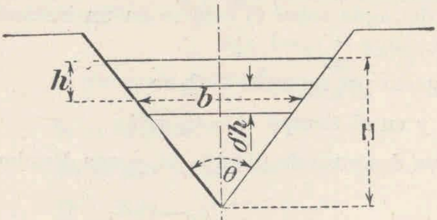


Fig. 126. — Vertedero triangular

Gasto total para la altura H

$$= \int_0^H 2\sqrt{2g}\,C_d\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,(H - h)\,h^{\frac{1}{2}}\,dh$$

$$= 2\sqrt{2g}\,C_d\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\int_0^H (Hh^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}})\,dh$$

$$= 2\sqrt{2g}\,C_d\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\left(\frac{2}{3}\,H^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}\,H^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= \frac{8}{15}\sqrt{2g}\,C_d\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,H^{\frac{5}{2}}.$$

Si $\theta = 90^{\circ}$ (lo que es frecuente) $\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} = 1$ y entonces

$$\text{gasto} = \frac{8}{15}\sqrt{2g}\,C_d\,H^{\frac{5}{2}} = 1{,}47\,H^{\frac{5}{2}}\ (*) \quad \text{si} \quad C_d = 0{,}62.$$

Ejemplo 32. — Calcular el rozamiento sobre un disco circular que gira en un fluido.

Sea fv^x el rozamiento por unidad de superficie y supongamos el disco (de radios R_1 exterior, R_2 interior) girando a n revoluciones por segundo

Velocidad de un anillo de radio r

$$= 2\pi nr$$

rozamiento por unidad de superficie sobre este anillo

$$= (2\pi nr)^x f.$$

(*) El coeficiente se ha calculado expresando g en m. por seg.^{2} (= 9,81). Por lo tanto H deberá expresarse asimismo en m. para obtener el gasto en m.^{3} por seg. *(N. del T).*

Luego, momento del rozamiento sobre un anillo elemental

$$= f\,(2\pi n r)^x \times 2\pi r \delta r \times r$$
$$= f \times (2\pi)^{x+1}\, n^x\, r^{x+2}\, \delta r$$

y, por consiguiente,

momento de rozamiento sobre una cara del disco = M

$$= \int_{R_2}^{R_1} f \times (2\pi)^{x+1}\, n^x\, r^{x+2}\, dr$$
$$= \frac{f \times (2\pi)^{x+1} \times n^x}{x+3}\,(R_1^{\,x+3} - R_2^{\,x+3}).$$

Momento total (en ambas caras) = 2M

Energía perdida en rozamiento $= \dfrac{4\pi n M}{75}$ (en H. P.)

Si $x = 2$

$$M = \frac{f\,(2\pi)^3 \times n^2}{5}\,(R_1^5 - R_2^5)$$
$$= 49{,}6\, f\, n^2\, (R_1^5 - R_2^5).$$

Ejemplo 33. — Establecer **una regla general para determinar la profundidad del centro de presión de una figura plana sumergida en un líquido.**

Supongamos una plancha colocada como en la figura 127, y sea un pequeño elemento de área δa que dista x de OY, y a una distancia vertical $= h$ del nivel del líquido.

Sea $\overline{X}$ = distancia del centro de gravedad a OY

$\overline{\overline{X}}$ = » » » » presión a »

y $\overline{H}$, y $\overline{\overline{H}}$ las distancias verticales correspondientes. Sea P la presión total, A el área total, k el radio de giro respecto a OY de la figura plana, y sea ρ la densidad del líquido.

Presión sobre el elemento = presión por unidad × área $= \rho h \times \delta a$
$= \rho x \operatorname{sen} \alpha\, \delta a.$

Presión total sobre la figura plana

$= \Sigma \rho x \operatorname{sen} \alpha \delta a$ aproximadamente

$= \int \rho x \operatorname{sen} \alpha\, da$ exactamente.

Luego: $P = \rho \operatorname{sen} \alpha \times \int x\, da$

$= \rho \operatorname{sen} \alpha \times$ momento estático del área respecto a OY

$= \rho \operatorname{sen} \alpha \times A\overline{X}.$

Pero $\overline{X} \operatorname{sen} \alpha = \overline{H}.$

Luego: $P = \rho \overline{H} A.$

Para hallar la posición del centro de presión, tomemos los momentos con relación a OY

$$P \times \bar{\bar{X}} = \Sigma \text{ momentos de las presiones sobre los elementos}$$
$$= \Sigma\, \rho \operatorname{sen} \alpha \times x \times \delta a \times x$$
$$= \rho \operatorname{sen} \alpha\, \Sigma\, x^2\, \delta a.$$

En el límite $P \times \bar{\bar{X}} = \rho \operatorname{sen} \alpha \int x^2\, da$

$$= \rho \operatorname{sen} \alpha \times \text{momento de inercia respecto a OY}$$
$$= \rho \operatorname{sen} \alpha \times Ak^2.$$

Ahora bien $P = \rho\, \bar{H}\, A.$

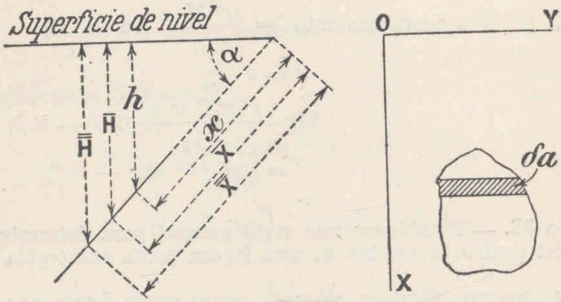


Fig. 127. — Centro de presión

De modo que

$$\rho\, \bar{H}\, A\, \bar{\bar{X}} = \rho \operatorname{sen} \alpha\, Ak^2$$

es decir, $\bar{H}\, \bar{\bar{X}} = \operatorname{sen} \alpha \times k^2$

pero $\bar{\bar{H}} = \bar{X} \operatorname{sen} \alpha.$

Luego: $\bar{X}\, \bar{\bar{X}} = k^2.$

De modo que si $\bar{X}$ es conocido, puede deducirse $\bar{\bar{X}}$.

Si la figura plana en cuestión no es simétrica, $\bar{\bar{Y}}$ (distancia del centro de presión a OX) se calculará de modo análogo, tomando los momentos con relación a OX.

En gran número de casos $\alpha = 90^\circ$ de modo que $\operatorname{sen} \alpha = 1$.

Entonces $\bar{H} \times \bar{\bar{H}} = k^2.$

Ejemplo 34. — Se coloca una placa triangular de modo que la base se halle en el plano de la superficie de nivel, y que la placa quede vertical. Hallar la distancia del centro de presión a dicho plano.

Tendremos

Momento de inercia de la placa respecto al plano de la superficie

$$= \frac{1}{12} bh^3$$

por consiguiente $$k^2 = \frac{\frac{1}{12} bh^3}{\frac{1}{2} bh} = \frac{h^2}{6}.$$

Asimismo $$\overline{\mathrm{H}} = \frac{1}{3} h.$$

Luego: $$\overline{\overline{\mathrm{H}}} = \frac{k^2}{\overline{\mathrm{H}}} = \frac{h^2 \times 3}{6 \times h} = \underline{\frac{h}{2}}.$$

Ejemplo 35. — Una placa circular vertical sumergida es tangente a la superficie de nivel. Hallar la distancia del centro de presión a dicha superficie

$$\mathrm{I}_{\text{diam.}} = \frac{\pi}{64} d^4.$$

De donde $$k^2 \text{ diam.} = \frac{\frac{\pi}{64} d^4}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{d^2}{16}.$$

Luego (teorema del eje paralelo)

$$k^2 \text{ superficie} = \frac{d^2}{16} + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{5d^2}{16}.$$

Asi mismo $$\overline{\mathrm{H}} = \frac{d}{2}.$$

De modo que $$\overline{\overline{\mathrm{H}}} = \frac{k^2}{\overline{\mathrm{H}}} = \frac{\frac{5d^2}{16}}{\frac{d}{2}} = \underline{\frac{5d}{8}}.$$

Ejemplo 36. — **Torbellino forzado.** (Agua que se hace girar en un tubo en torno a un eje vertical). Determinar la forma de la superficie libre del agua.

Sea n el número vueltas por segundo. Sea P (fig. 128) un elemento líquido.

$$\operatorname{tg} \theta = \text{pendiente de la curva} = \frac{dr}{dh}$$

y también

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{fuerza vertical}}{\text{fuerza horizontal}} = \frac{\text{peso del elemento}}{\text{fuerza centrífuga del elemento}}$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \text{peso} \\ \dfrac{mv^2}{gr} = \text{fuerza centrífuga} \end{array}\right\} = \frac{m \times gr}{mv^2}$$

$$= \frac{gr}{v^2} = \frac{gr}{(2\pi nr)^2} = \frac{g}{4\pi^2 n^2 r}.$$

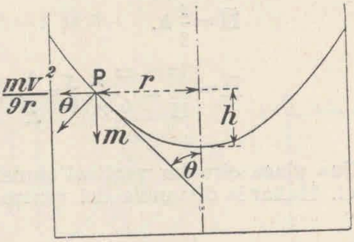


Fig. 128

De modo que $\qquad \dfrac{dr}{dh} = \dfrac{g}{4\pi^2 n^2 r}.$

Separemos las variables:

$$4\pi^2 n^2 r dr = gdh.$$

Integremos $\qquad \dfrac{4\pi^2 n^2 r^2}{2} = gh$

$$h = \frac{2\pi^2 n^2}{g} r^2.$$

ecuación de una parábola, por ser constante $\dfrac{2\pi^2 n^2}{g}$.

La superficie libre del líquido será pues un paraboloide de revolución.

Ejemplo tomado de la Topografía

Ejemplo 37. — Demostrar que una parábola cúbica puede servir de curva de *enlace* o *transición*.

A fin de abordar gradualmente las curvas de una línea férrea, se interpone entre la recta y la curva una curva llamada de enlace, que debe calcularse de modo que el radio de curvatura varíe en razón inversa a la distancia del punto de partida desde la recta, punto en el que este radio es infinito.

Ya sabemos que si R es el radio de una curva cuya ecuación es $y = f(x)$

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \left(\text{si } \frac{dy}{dx} \text{ es pequeña}\right)$$

o, más exactamente $$\frac{1}{R} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

La ecuación de la parábola cúbica puede darse bajo la forma

$$y = px^3$$

x es la distancia al eje, medida sobre la tangente inicial, y es la distancia a esta tangente, (evidentemente p es muy pequeño en la práctica).

Si $$y = px^3 \quad \frac{dy}{dx} = 3px^2 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6px.$$

Luego $$\frac{1}{R} = \frac{6px}{(1 + 9p^2x^4)^{\frac{3}{2}}} = 6px\,[1 + 9p^2x^4]^{-\frac{3}{2}}.$$

$$= 6px\,[1 - 13{,}5p^3x^6]$$

como primera aproximación. Y como p es muy pequeño y p^3 mucho más, podremos escribir

$$\frac{1}{R} = 6px$$

o sea $$R = \frac{1}{6p} \times \frac{1}{x} = \frac{K}{x}$$

que es la definición de la curva de enlace.

Ejercicios 23

1. Un depósito cilíndrico se mantiene constantemente lleno por medio de un aporte de agua. Probar que el tiempo que se necesita para descargar una cantidad de agua igual a la capacidad del depósito, a través de un orificio en el fondo, es igual a la mitad del tiempo necesario para vaciar el depósito cuando se corta la llegada de agua.

Un depósito cilíndrico de 3 metros de alto y 1,8 metros de diámetro está lleno de agua. Hallar el tiempo teórico de descarga por un orificio de 20 cm. de diámetro situado en el fondo.

2. Vacíase un depósito por medio de un tubo que se descarga en el aire. Si la pérdida de carga en el tubo es $h_l = \dfrac{Kv^2}{2g}$ probar que K obedece a la ley siguiente:

$$t_1 - t_2 = 2\,\frac{A}{a}\sqrt{\frac{1 + K}{2g}}\,(h^{\frac{1}{2}} - h_2^{\frac{1}{2}})$$

en el que h_1 = nivel del depósito en el momento t_1
h_2 = » » » » » » t_2

medidos desde el centro del extremo libre del tubo,

A = área de la sección transversal del depósito
a = » » » » » » tubo

Un experimento hecho con un depósito de 1,45 m.² de sección y un tubo de 10,16 cm. (4 pulgadas) de diámetro dió los resultados siguientes:

Tiempo t minutos	Altura de agua h ms.
0	11,70
1	10,02
2	8,50
3	7,07
4	5,80

Hallar el valor de K.

3. Usese la tabla siguiente para obtener $\frac{dP}{dT}$ y hallar el volumen de un kilogramo de vapor a la presión absoluta de 11,2 kg. por cm.².

Presión absoluta (kg. por cm.²) ..	11,13	11,20	11,27
Temperaturas (C°)	183,9	184,2	184,5

El calor latente de 1 kg. de vapor a la presión de 11,2 kg. por cm.² es de 477,1 calorías.

4. Hallar los momentos de empotramiento de una viga empotrada por ambos extremos, que tiene 12 metros de largo y soporta cargas de 8 y 12 toneladas respectivamente a 4,5 metros y 9 metros de un extremo.

5. Un depósito vertical de sección transversal constante tiene dos orificios circulares, cada uno de 5 cm. de diámetro y situados en una de sus caras verticales, uno a 6 metros del fondo, otro a 2,4 metros. Hallar el tiempo necesario para que baje el nivel de 9 metros a 4,5 metros.

Sección transversal = 1,12 m.²
Coeficiente de contracción = 0,62

6. Un depósito hemisférico de 3 metros de diámetro se vacía por un orificio de 20 cm. de diámetro situado en el fondo. Suponiendo que el coeficiente de contracción sea 0,6, hallar el tiempo necesario para que baje el nivel de 1,5 metros a 1 metro.

7. Un árbol vertical con pivote cónico tiene 23 cm. de diámetro y una carga de 3,25 toneladas. El ángulo del cono es 120° y el coeficiente de rozamiento 0,025. Hallar la potencia perdida en el rozamiento cuando el árbol gira a 140 revoluciones por minuto. Se supondrá uniforme la presión por unidad de superficie.

8. Una placa circular de 5 cms. de diámetro está sumergida en agua, sus profundidades máxima y mínima son 6 cms. y 3 cms. respectivamente. Hallar
(*a*) La presión total sobre una cara de la placa.
(*b*) La posición del centro de presión.

9. Una placa anular se sumerge en el agua de modo que la profundidad mínima de inmersión es 40 cms. y la máxima 80 cms. Si los diámetros interno y externo son 80 cms. y 40 cms. respectivamente, determinar la presión total sobre una cara y la posición del centro de presión.

10. Un kilo de vapor a 7 kilos por cm.^{2} de presión (volumen = 0,277 metros cúbicos) entra en un cilindro y se dilata 5 veces según la ley $pv^{1,06} = C$, luego se vacía a presión constante. Hallar el trabajo total sobre el pistón.

11. Hallar la pérdida de carga h en una longitud l de una tubería cuyo diámetro varía uniformemente, sabiendo que

$$H = \frac{4fLv^2}{2gd} \quad y \quad v = \frac{4Q}{\pi d^2}.$$

Se supondrá que el diámetro de la sección distante x de la entrada $= d_e + Kx$ siendo el diámetro de entrada $= d_e$.

12. Tomando el rozamiento de una placa de latón en un fluido, proporcional a $v^{1,9}$ y con un valor de 1,08 kg. por m.^{2} para el valor de v, velocidad, igual a 3,05 metros por segundo, hallar la potencia perdida por rozamiento en las dos caras de un disco de latón de 76 cms. y 38 cms. de diámetro exterior e interior, girando a 500 revoluciones por minuto.

13. Una placa rectangular de 20 cms. de anchura y 50 cms. de altura se sumerge en el agua con una inclinación de 40° respecto de la vertical. Hallar la profundidad del centro de presión sabiendo que la arista superior se halla a 60 cms. de profundidad.

CAPITULO XI

Análisis armónico

EL TEOREMA DE FOURIER se refiere a las funciones periódicas de las cuales se encuentra numerosos ejemplos en la ingeniería eléctrica y mecánica, teórica y práctica: establece que, toda función periódica puede ser expresada como la suma de un número de funciones sinusoidales de diferentes amplitudes, fases y períodos. Por lo tanto, por muy irregular que sea la curva que representa una función, en tanto que las ordenadas se repitan desde algún intervalo de tiempo o espacio, es posible resolverla en un cierto número de sinusoides, cuyas ordenadas adicionadas darán la ordenada primitiva. La descomposición de una curva en las sinusoides componentes se denomina *análisis armónico,* y teniendo en cuenta su importancia trataremos con detalle los métodos más sencillos y más directos.

Expresado en símbolos matemáticos, el teorema de Fourier dice:

$$y = f(t) = A_0 + B \operatorname{sen} (qt + c_1) + C \operatorname{sen} (2qt + c_2) + ..$$

o bien $y = A_0 + A_1 \operatorname{sen} qt + A_2 \operatorname{sen} 2qt + A_3 \operatorname{sen} 3qt + ..$

$$+ B_1 \cos qt + B_2 \cos 2qt + B_3 \cos 3qt + ..$$

siendo la última forma equivalente a la primera, puesto que,

$$A_1 \operatorname{sen} qt + B_1 \cos qt = B \operatorname{sen} (qt + c_1)$$

con tal de que B y c_1 sean escogidos convenientemente.

Para el análisis, la expresión puede simplificarse escribiendo θ en vez de qt.

Así,

$$y = A_0 + A_1 \operatorname{sen} \theta + A_2 \operatorname{sen} 2\theta + A_3 \operatorname{sen} 3\theta + ..$$
$$+ B_1 \cos \theta + B_2 \cos 2\theta + B_3 \cos 3\theta + ..$$

De los varios métodos dados, escogeremos tres que son fáciles de comprender y aplicar. Son: *a*) por el cálculo, *b*) por cálculo gráfico y *c*) por superposición.

METODO (a). ANÁLISIS POR EL CÁLCULO. — Antes de proceder a detallar el método a seguir, es conveniente comprobar los siguientes asertos.

$\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0$, esto es evidente por sí mismo, puesto que el área de una cosinusoide es cero, siempre que se considere un período entero.

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

puesto que

$$\cos m\theta \cos n\theta = \tfrac{1}{2} (\cos (m + n) \theta - \cos (m - n) \theta)$$

y por tanto

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos (m+n) \theta \, d\theta - \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos (m-n)\theta \, d\theta$$

$$= 0 - 0$$

(puesto que ambas son cosinusoides en un período entero o un múltiplo del período entero)

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \operatorname{sen} n\theta \, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} (m+n) \theta \, d\theta - \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} (m-n)\theta \, d\theta$$

$$= 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta + \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 0 + \tfrac{1}{2} (2\pi - 0) = \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} m\theta \operatorname{sen} n\theta \, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos (m-n)\theta \, d\theta - \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos (m+n)\theta \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2} [0 - 0] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta - \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2} [2\pi - 0] - 0$$

$$= \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Procediendo ahora al análisis, tenemos que

$$y = A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + A_3 \cos 3\theta + \ldots$$
$$+ B_1 \operatorname{sen}\theta + B_2 \operatorname{sen} 2\theta + B_3 \operatorname{sen} 3\theta + \ldots$$

y deseamos encontrar los valores de los coeficientes A_0, $A_1 \ldots B_1$, $B_2 \ldots$ etc.

Si integramos totalmente (entre los límites o y 2π) todos los términos de la derecha desaparecen excepto el primero

esto es: $$\int_0^{2\pi} y\,d\theta = A_0 \int_0^{2\pi} d\theta + 0 + 0 + \ldots$$

ó $$\int_0^{2\pi} y\,d\theta = A_0 \times (2\pi - 0)$$

de donde $$A_0 = \frac{1}{2\pi - 0}\int_0^{2\pi} y\,d\theta$$

$$= \text{valor medio de } y \quad \text{(véase pág. 200)}$$

Así que A_0 se encuentra tomando el promedio de las ordenadas; en la mayoría de los casos resulta = o.

Para hallar A_1: se multiplica toda la igualdad por su coeficiente, o sea por $\cos\theta$ y se integra; se tendrá

$$\int_0^{2\pi} y\cos\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} A_0 \cos\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} A_1\cos^2\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} A_2\cos\theta\cos 2\theta\,d\theta + \ldots$$
$$+ \int_0^{2\pi} B_1 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} B_2 \cos\theta \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta + \ldots$$

o bien $$\int_0^{2\pi} y\cos\theta\,d\theta = 0 + \pi A_1 + 0 + 0 + \ldots$$
$$+ 0 + 0 + \ldots \quad \text{[según (3) (2) y (1)]}$$

de donde $$A_1 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\cos\theta\,d\theta$$
$$= \text{dos veces el valor medio de } (y\cos\theta)$$

esto es, debe tomarse un cierto número de valores de y, multiplicando cada uno por el coseno del ángulo del cual y es la ordenada, hallar el promedio y multiplicar el resultado por 2.

Los valores A_2, A_3 etc. pueden hallarse de modo análogo, multiplicando por $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$, etc. respectivamente y realizando la integración como más arriba.

Para encontrar B_1: — multiplíquense los dos miembros por su coeficiente, esto es, $\operatorname{sen}\theta$, e intégrense, tenemos:

$$\int_0^{2\pi} y\,\text{sen}\theta d\theta=\int_0^{2\pi} A_0\text{sen}\theta d\theta+\int_0^{2\pi} A_1\text{sen}\theta\cos\theta d\theta+\int_0^{2\pi} A_2\text{sen}\theta\cos 2\theta d\theta+..$$

$$+\int_0^{2\pi} B_1\,\text{sen}^2\theta\,d\theta+\int_0^{2\pi} B_2\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,2\theta\,d\theta+..$$

$$=0+\pi B_1\ [\text{según (2), (4) y (5)}]$$

esto es: $B_1=\dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = 2\times$ valor medio de $(y\times\text{sen}\,\theta)$.

Así que, los valores de los coeficientes A_1, A_2, B_1, B_2, etc. se hallan dividiendo la base en ocho o diez partes y tomando el promedio de las ordenadas de la curva y así como de las curvas $y\cos\theta$, $y\,\text{sen}\,\theta$ etcétera. Para determinar los valores *exactos* debería tomarse un número infinito de ordenadas, pero desde luego para cálculos corrientes sólo se hace como hemos dicho.

Este trabajo se facilita por una tabulación adecuada como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. — Resolver la curva ABCD (fig. 129) en las curvas componentes, entendiéndose que no se presenta armónica más alta que la de primer grado.

(El término que contiene θ se considera como el fundamental y el que contiene 2θ como primera armónica).

Así que $\quad y = A_0 + B\,\text{sen}\,(\theta + c_1) + C\,\text{sen}\,(2\,\theta + c_2)$

o bien $\quad y = A_0 + A_1\cos\theta + A_2\cos 2\theta + B_1\,\text{sen}\,\theta + B_2\,\text{sen}\,2\theta$

representarán la función en este caso.

Una ojeada sobre la figura, muestra que la curva es simétrica con relación al punto de intersección de la curva con el eje de las θ, así observemos que el promedio de las ordenadas = o, o bien A_0 = o.

Dividiremos la base en 10 partes iguales, elevaremos las ordenadas medias y tabularemos los valores como sigue:

(a) N° de la ordenada	(b) y	(c) θ	(d) sen θ	(e) cos θ	(f) sen 2θ	(g) cos 2θ
1	1,56	18°	0,309	0,951	0,588	0,809
2	3,75	54°	0,809	0,588	0,951	— 0,309
3	4	90°	1	0	0	— 1
4	2,91	126°	0,809	— 0,588	— 0,951	— 0,309
5	1,13	162°	0,309	— 0,951	— 0,588	0,809
6	— 1,13	198°	— 0,309	— 0,951	0,588	0,809
7	— 2,91	234°	— 0,809	— 0,588	0,951	— 0,309
8	— 4	270°	— 1	0	0	— 1
9	— 3,75	306°	— 0,809	0,588	— 0,951	— 0,309
10	— 1,56	342°	— 0,309	0,951	— 0,588	0,809

Luego $\quad A_0 = \text{valor medio de } y = 0$

$$A_1 = 2 \times \text{valor medio de } (y \cos \theta).$$

Para obtener los valores de $y \cos \theta$, deben multiplicarse los números correspondientes en las columnas (*b*) y (*e*).

Así

$$A_1 = \frac{2}{10}\left[\begin{matrix}0{,}951\,(1{,}56 - 1{,}13 + 1{,}13 - 1{,}56) + 0{,}588\,(3{,}75 - 2{,}91 \\ + 2{,}91 - 3{,}75)\end{matrix}\right]$$
$$= 0.$$

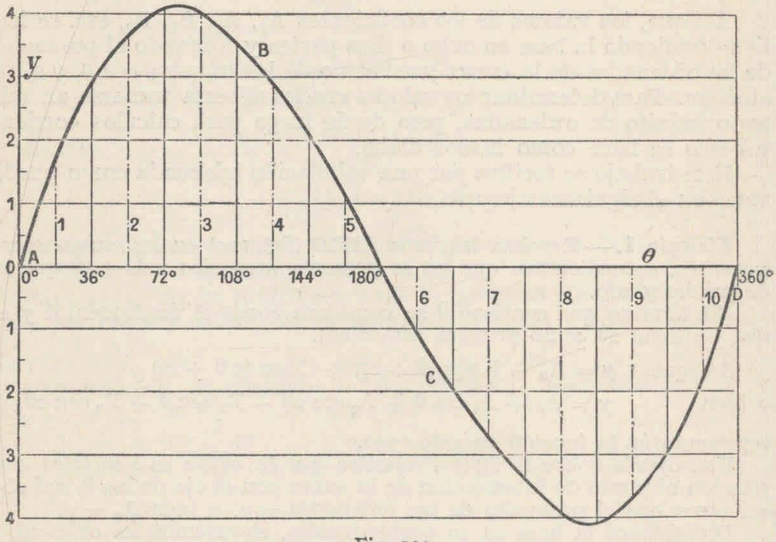


Fig 129

Del mismo modo

$$B_1 = \frac{2}{10} \times \text{suma de los productos de las columnas } (b) \text{ y } (d)$$

$$= \frac{2}{10}\left[\begin{matrix}0{,}309\,(1{,}56 + 1{,}13 + 1{,}13 + 1{,}56) + 1\,(4 + 4) \\ + 0{,}809\,(3{,}75 + 2{,}91 + 2{,}91 + 3{,}75)\end{matrix}\right]$$

$$= 0{,}2 \times 20{,}43 = 4{,}086$$

$$A_2 = \frac{2}{10} \times \text{suma de productos de las columnas } (b) \text{ y } (g)$$

$$= \frac{2}{10}\left[\begin{matrix}0{,}809\,(1{,}56 + 1{,}13 - 1{,}13 - 1{,}56) + 1\,(-4 + 4) \\ + 0{,}309\,(-3{,}75 - 2{,}91 + 2{,}91 + 3{,}75)\end{matrix}\right]$$

$$= 0$$

$$B_2 = \frac{2}{10} \times \text{suma de productos de las columnas } (b) \text{ y } (f)$$

$$= \frac{2}{10}\left[\begin{array}{l} 0{,}588\,(1{,}56 - 1{,}13 - 1{,}13 + 1{,}56) + 0{,}951\,(3{,}75 - 2{,}91 \\ \quad - 2{,}91 + 3{,}75) \end{array}\right]$$

$$= 0{,}2 \times 2{,}104 = 0{,}421.$$

Por lo tanto

$$y = (0 \times \cos\theta) + (0 \times \cos 2\theta) + (4{,}09 \operatorname{sen}\theta) + (0{,}42 \operatorname{sen} 2\theta)$$

$\underline{y = 4{,}09 \operatorname{sen}\theta + 0{,}42 \operatorname{sen} 2\theta}$ (anulándose los términos del coseno).

ANÁLISIS POR EL MÉTODO (b). INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE (a) (debida al profesor Harrison). Para emplear este método debemos tomar al menos dos veces tantas ordenadas como el mayor múltiplo de θ; es decir, si suponemos que la segunda armónica es la más alta que se presenta, debemos tomar 6 ordenadas como mínimum y aún sería mejor si se tomasen 8 ó 10.

El método quedará mejor comprendido aplicándole a un ejemplo.

Ejemplo 2. — Resolver la curva ABC (*a*) fig. 130) en sus componentes (siendo la segunda, la armónica más elevada), esto es, hallar los valores de las constantes en la ecuación

$$y = A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + A_3 \cos 3\theta + B_1 \operatorname{sen}\theta + B_2 \operatorname{sen} 2\theta + B_3 \operatorname{sen} 3\theta.$$

Para hacer que todas las ordenadas sean positivas, tomemos como base una recta DE enteramente por debajo de la curva. Dividamos la base en 8 divisiones iguales y numeremos las ordenadas y_0, y_1, y_2, etc.

Los intervalos angulares son pues 45°, puesto que a un período entero le corresponden 360°.

Tracemos una nueva figura (*b*) (fig. 130) en que las rectas OM y ON formen un ángulo de 45° con los ejes principales; numeremos estas líneas: 0, 1..... 8, como se ve en la figura. Sobre la recta 0 tomemos una distancia igual a y_0, sobre la 1 una distancia igual a y_1, y así sucesivamente. Tracemos perpendiculares desde los puntos 0, 1, etc., a los ejes principales llamando a las proyecciones sobre estos ejes h_0 (esta proyección particular es cero) h_1 ..... h_8, y v_0, v_1, ... v_8 respectivamente.

Cálculo de A_1 y B_1:

Como se ha probado ya

$$A_1 = \tfrac{2}{8}\,(\Sigma y \cos\theta) = \tfrac{1}{4}\{\, y_0 - y_4 + (y_1 - y_3 - y_5 + y_7)\cos 45^\circ + (y_2 - y_6)\cos 90^\circ \,\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\{\, v_0 - v_4 + v_1 - v_3 - v_5 + v_7 \,\}$$

y análogamente

$$B_1 = \tfrac{1}{4}\{\, h_1 + h_3 - h_5 - h_7 + h_2 - h_6 \,\}$$

de este modo, las longitudes v_0..... v_7 y h_1..... h_7 pueden ser leídas directamente en la figura y los valores de A_1 y B_1 calculados según la fórmula.

En este ejemplo

$$\begin{array}{ll} v_0 = 13{,}7 & h_0 = 0 \\ v_1 = 14 & h_1 = 14 \\ v_2 = 0 & h_2 = 20{,}4 \\ v_3 = 11 & h_3 = 11 \\ v_4 = 7{,}3 & h_4 = 0 \\ v_5 = 0{,}5 & h_5 = 0{,}5 \\ v_6 = 0 & h_6 = 1{,}5 \\ v_7 = 5{,}4 & h_7 = 5{,}4 \end{array}$$

de donde $\quad A_1 = \frac{1}{4} \times 14{,}3 = 3{,}58$

y $\quad B_1 = \frac{1}{4} \times 38 = 9{,}5$

Con la ayuda de una tira de papel, puede abreviarse el trabajo procediendo como sigue:

Márquense sobre el borde del papel longitudes que representen las distintas ordenadas de la curva original, en este caso y_0, y_1..... etc., y numérese los puntos así obtenidos, 0, 1, 2..... 8 como se ve en (*c*) (fig. 130).

Así Po $= y_0$, P4 $= y_4$ y así sucesivamente.

Hemos visto que para hallar el valor de A_1 es necesario evaluar $y \cos \theta$ para los diversos ángulos; en este caso debemos trazar los valores de $y_1 \cos 45°$, $y_2 \cos 90°$, $y_3 \cos 135°$ y así sucesivamente.

Ahora bien, $y_3 \cos 135° = y_3 \times - \cos 45° = - y_3 \cos 45°$, de modo que la recta empleada para 45° sirve también para 135° con tal que la ordenada se tome en una dirección negativa. Así por ejemplo,

$$y_1 \cos \theta + y_3 \cos 3\theta = y_1 \cos 45° - y_3 \cos 45° = \cos 45° \, (y_1 - y_3)$$

y el valor de esta expresión depende de la diferencia de longitudes de P1 y P3 en la tira de papel, o sea de la distancia de 3 a 1.

Evidentemente, pues, se simplifica el trabajo agrupando las ordenadas en pares para dar diferencias; así

$$y_1 - y_3 = \text{P1} - \text{P3} = 1 \text{ a } 3 \text{ en la tira de papel}$$

$$y_7 - y_5 = \text{P7} - \text{P5} = 5 \text{ a } 7 \text{ en la tira de papel}$$

y lo mismo para otros pares de ordenadas.

Habiendo hallado estas diferencias, multiplicaremos por cos 45°, tomando estas longitudes sobre la recta O*f* en (*d*) (fig. 130) y después proyectando sobre el eje horizontal OX; la resultante de estas proyecciones será el valor de $4A_1$.

Así en (*d*) (fig. 130: — Tomemos O*a* = 1 a 3 (sobre la tira) y *ab* = 5 a 7.

Bajemos *bc* perpendicular a OX. Tenemos O*c* $= (y_1 - y_3 - y_5 + y_7) \cos 45°$.

Tomemos *cd* = 0 a 4 (es decir $y_0 - y_4$) y luego midamos O*d*; este será el valor de $4A_1$ puesto que O*d* = O*c* + *cd* $= (y_1 - y_3 - y_5 + y_7) \cos 45° + (y_0 - y_4)$

$$\text{O}d = 13{,}7$$

$$A_1 = 3{,}43$$

Para el valor de B_1 la tira de papel debe usarse del modo siguiente. Se traza una recta a 45° [(*d*) fig. 130] y se marcan sobre ella distancias como sigue

$$Oe = 1 \text{ a } 7 \text{ en la tira}, \quad ef = 3 \text{ a } 5 \text{ en la tira}$$

$$\{ 4B_1 = (y_0 + y_4) \operatorname{sen} 0^\circ + (y_1 + y_3 - y_5 - y_7) \operatorname{sen} 45^\circ + (y_2 - y_6) \operatorname{sen} 90^\circ \}$$

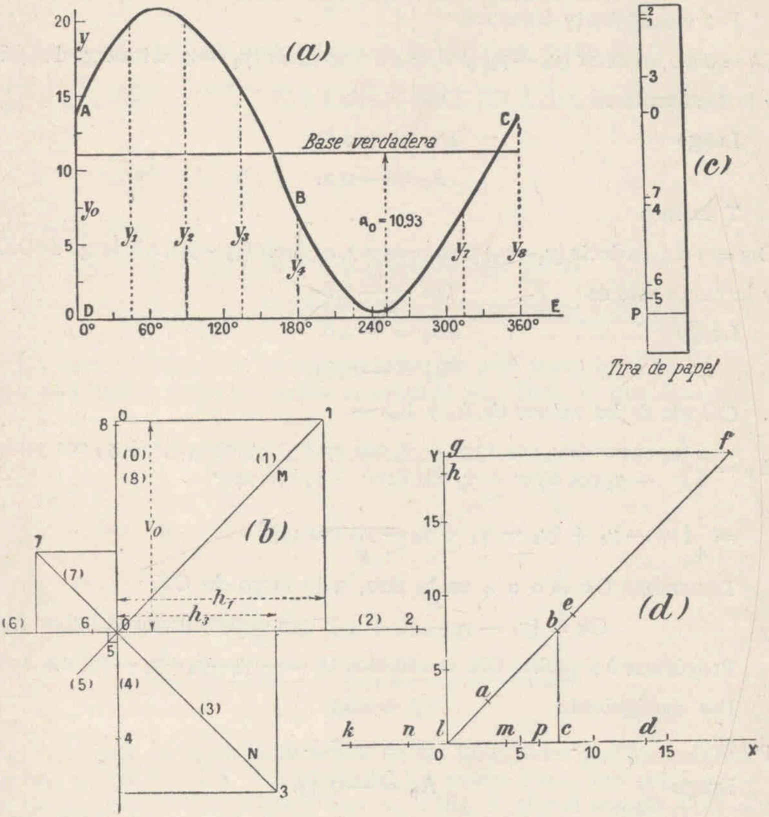


Fig. 130

Una perpendicular a OY da el punto g. A Og debe añadirse una distancia = 2 a 6 sobre la tira, pero para evitar extender el diagrama, esta distancia se toma desde O dando la longitud Oh.

Así Og = 19,5, Oh = 18,2; la suma = 37,7

Luego $4B_1 = 37{,}7$

y $B_1 = 9{,}43$.

Cálculo de los valores de A_2 *y* B_2: — Se presentan ahora los términos que contienen 2θ, es decir 90°, de modo que no habrá líneas a 45°

$$A_2 = \tfrac{2}{8}\{ y_0 \cos 0^\circ + y_1 \cos 90^\circ + y_2 \cos 180^\circ + \ldots y_7 \cos 630^\circ \}$$
$$= \tfrac{1}{4}\{ y_0 - y_2 + y_4 - y_6 \}.$$

Del mismo modo $B_2 = \tfrac{1}{4}\{ y_1 - y_3 + y_5 - y_7 \}$.

Por consiguiente tomemos

$Ok = 0$ a 2, es decir $(y_0 - y_2)$ y $kl = 4$ a 6, es decir $(y_4 - y_6)$ a lo largo de OX

y la resultante es $Ol = -0{,}8$

Luego $4A_2 = -0{,}8$

y $A_2 = -0{,}2.$

Tomemos

$Om = 1$ a 3, es decir $(y_1 - y_3)$ y $mn = 5$ a 7, es decir $(y_5 - y_7)$, a lo largo de OX

y la resultante es $On = -2{,}6$

Luego $4B_2 = -2{,}6.$

$B_2 = -0{,}65.$

Cálculo de los valores de A_3 *y* B_3: —

$$A_3 = \frac{2}{8}\left\{ \begin{array}{l} y_0 \cos 0 + y_1 \cos 135^\circ + y_2 \cos 270^\circ + y_3 \cos 405^\circ + y_4 \cos 540^\circ \\ + y_5 \cos 675^\circ + y_6 \cos 810^\circ + y_7 \cos 945^\circ \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\{ y_0 - y_4 + (y_3 - y_1 + y_5 - y_7) \cos 45^\circ \}.$$

Tomemos $Op = 0$ a 4 en la tira, a lo largo de OX

y $Ob = (y_1 - y_3 - y_5 + y_7)$ (ya determinada al hallar A_1)

Proyéctese b a c sobre OX; tendremos $Oc = -(y_3 - y_1 + y_5 - y_7) \cos 45^\circ$.

Por consiguiente $cp = 4A_3$

pero $cp = -1{,}3.$

Luego $A_3 = -0{,}33.$

$$B_3 = \frac{1}{4}\left\{ \begin{array}{l} y_0 \operatorname{sen} 0^\circ + y_1 \operatorname{sen} 135^\circ + y_2 \operatorname{sen} 270^\circ + y_3 \operatorname{sen} 405^\circ + y_4 \operatorname{sen} 540^\circ \\ + y_5 \operatorname{sen} 675^\circ + y_6 \operatorname{sen} 810^\circ + y_7 \operatorname{sen} 945^\circ \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\{ y_6 - y_2 + (y_1 + y_3 - y_5 - y_7) \operatorname{sen} 45^\circ \}.$$

Tomemos $Oh = 6$ a 2 a lo largo de OY

$Of = (y_1 + y_3 - y_5 - y_7)$ (determinada al hallar B_1).

Proyectamos f a g sobre OY

Tendremos $gh = 4B_3$

pero $gh = 1{,}2$

De donde $B_3 = 0,3$.

También

$$\frac{\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + \frac{1}{2}y_8}{8} = A_0$$

(usando el método trapezoidal dado en la pág. 377, tomo I)

$$\text{o sea}\quad A_0 = \frac{6,75 + 19,8 + 20,4 + 16 + 7,3 + 0,9 + 1,9 + 7,6 + 6,75}{8}$$

$$= \frac{87,4}{8} = 10,93$$

Por consiguiente

$$y = 10,93 + 3,43 \cos\theta + 9.43 \operatorname{sen}\theta - 0,2\cos 2\theta$$
$$- 0,65 \operatorname{sen} 2\theta - 0,33 \cos 3\theta + 0,3 \operatorname{sen} 3\theta.$$

No hay dificultad en la comprensión de este método si se ha estudiado primero detenidamente el método (*a*). Todo lo que este mé-

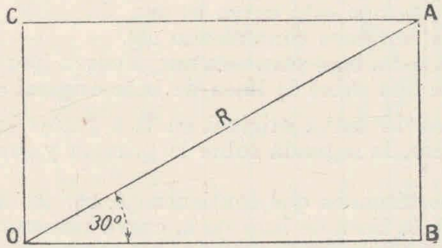


Fig. 131

todo (*b*) añade es la multiplicación de las longitudes por los cosenos o senos de los ángulos, considerando los productos como proyecciones sobre ejes fijos (decir que si OA = R (fig. 131) y el ángulo AOB = = 30° se tiene OB = OA cos 30° = R cos 30° y OC = OA sen 30° = R sen 30°).

La elegancia y la ventaja del método consiste en el uso de la tira de papel para agrupar las ordenadas en pares que han de ser multiplicados por la misma cantidad.

En el ejemplo que acabamos de discutir, los intervalos angulares se tomaron de 45° haciéndose esta elección por resultar muy ventajosa puesto que cos 45° = sen 45° y las proyecciones pueden ser hechas sobre un eje vertical u horizontal indistintamente.

Para mayor precisión deben tomarse más ordenadas y debe tenerse cuidado sobre el eje que se elije para hacer las proyecciones. Así si los intervalos angulares fuesen tomados de 18°, por ejemplo, las rectas correspondientes a OM, ON y O*f* en (*b*) y (*d*) figura 130 deberían dibujarse haciendo ángulos de 18° con el eje horizontal; así, para obtener los valores de A_1, A_2, etc., deberán medirse las proyecciones sobre OX, mientras que los valores de B_1, B_2, etc., se determinarán por las proyecciones sobre OY.

MÉTODO (c). ANÁLISIS POR SUPERPOSICIÓN. — Este método es muy usado en estudios sobre corriente alterna, para cuyos problemas se adapta especialmente. No es difícil de emplear ni de entender, aunque la justificación del método es larga y por consiguiente no será tratada por nosotros.

Para presentar el método en una forma tan clara como sea posible, se darán las reglas para proceder, en vez de dar una explicación detallada.

El método es el siguiente: (nos referiremos al caso de una curva conteniendo una armónica de segundo orden como más elevado, aunque el procedimiento puede extenderse cuando sea necesario).

(1) Divídase la curva en dos partes iguales y superpóngase la segunda parte sobre la primera, usando divisores y teniendo cuidado con los signos. Si la curva resultante se aproxima a una sinusoide no se necesita posterior subdivisión (esto da términos que contienen 2θ, 4θ, 6θ, etc., pero si esta curva es una sinusoide, probablemente aparecerán sólo términos conteniendo 2θ).

Trácese una recta base para esta nueva curva (por aproximación); así la altura de ella sobre la línea de base original $= 2A_0$.

(2) Divídase la curva original en tres partes iguales y superpóngase (primero, la segunda sobre la primera y sobre el resultado la tercera).

(Esto da los términos que contienen 3θ, 6θ, 9θ, etc.)

La altura de la línea de base de la curva resultante sobre la original $= 3A_0$ (los dos valores de A_0 al ser comparados deben ser naturalmente iguales; si no lo fueran tómese el promedio y trácese una nueva línea de base distante A_0 de la original; en lo sucesivo nos referiremos a esta línea como a la verdadera línea de base).

(3) Sustráiganse las ordenadas correspondientes de la curva 2θ (divididas por 2) y las de la curva 3θ (divididas por 3), teniendo cuidado con los signos de las ordenadas de la curva original; la curva resultaute es aproximadamente una sinusoide simétrica alrededor de la verdadera línea de base.

Vamos a calcular los valores de las constantes, si

$$y = A_0 + A_1 \operatorname{sen}(\theta + c_1) + A_2 \operatorname{sen}(2\theta + c_2)$$

habiéndose hallado ya A_0.

Elíjanse dos valores convenientes de θ y opérese sobre las ordenadas de la curva θ para encontrar A_1 y c_1; y lo mismo usando la curva 2θ para encontrar A_2 y c_2.

Nótese que en los estudios de corrientes alternas sólo aparecen términos del orden θ, 3θ, 5θ, etc., así que la curva debe dividirse en 3, 5, etc., partes iguales y estas partes deben ser superpuestas. No hay pues que dividir en 2, 4, etc. partes iguales; también es evidente que el valor de A_0 debe de ser cero.

Ejemplo 3. — Las ordenadas de la curva ABCD, figura 132, representan el movimiento alternativo de una válvula accionada por correderas Gooch.

Se necesita encontrar las constantes en la ecuación

$$y = A_0 + A_1 \operatorname{sen} (\theta + c_1) + A_2 \operatorname{sen} (2\theta + c_2), \text{ etc.}$$

La curva original se divide en dos partes iguales, la segunda se coloca sobre la primera y se obtiene la curva 2.

La recta base precisa para ésta es B_2; la altura de B_2 sobre la base es 0,29 es decir, la altura de la verdadera base es $\frac{0{,}29}{2}$ ó 0,145 unidades. Esta base puede trazarse y queda indicada como *verdadera*.

Dividiendo en 3 y 4 partes iguales y superponiendo, se obtiene las curvas 3 y 4.

B_3, base para 3, está a una altura de 0,43; este número dividido por 3 da 0,143, lo que da una aproximación satisfactoria al anterior resultado.

La curva 2 representa realmente la primera armónica con doble amplitud; por consiguiente sustraeremos las ordenadas de la curva 2

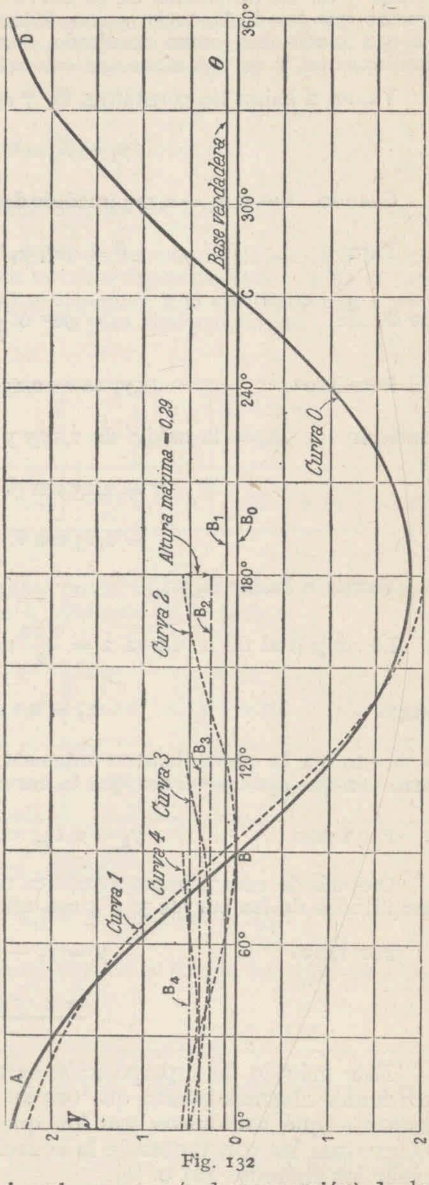


Fig. 132

(a mitad de escala, usando, por ejemplo un compás de proporción) de las ordenadas correspondientes de la curva original. Análogamente sustraeremos $\frac{1}{3}$ de las ordenadas de la curva 3, de las de la curva original y puesto que las de la curva 4 son demasiado pequeñas para tenerlas en cuenta tendremos como resultado final la curva 1 que representa la fundamental y es una sinosoide con relación a la base verdadera.

Vamos a hallar las constantes A_1 y c_1 en la ecuación

$$y_1 = A_1 \operatorname{sen} (\theta + c_1).$$

Cuando $\theta = 0$, $y_1 = 2{,}175$ (medido desde la verdadera base a la curva I)

Para $\theta = 90^o$, $y_1 = 0$

de donde $c_1 = 90^o$ ó $\frac{\pi}{2}$.

Para 180^o $y_1 = -2{,}135$

es decir $A_1 =$ la media de 2,175 y 2,135, o sea, 2,15

$$y = 2{,}15 \operatorname{sen} (\theta + 90^o)$$

$$= 2{,}15 \cos \theta.$$

Vamos a hallar A_2 y c_2

La amplitud de la curva $2 = \frac{0{,}29}{2}$ es decir 0,145.

luego $A_2 = 0{,}145$

y puesto que la curva tiene su ordenada máxima cuando $\theta = 0$ tenemos otra vez que $c_2 = 90^o$ ó sea que la curva es una cosinusoide.

Por tanto $y_2 = 0{,}145 \cos 2\theta.$

Después de esta primera armónica no nos interesan más, porque las amplitudes de las curvas 3 y 4 son muy pequeñas.

Por tanto $y = y_1 + y_2$

$$= 2{,}15 \cos \theta + 0{,}145 \cos 2\theta.$$

Este método de superposición es recomendable para estudios de corrientes alternas puesto que con su ayuda puede saberse inmediatamente qué armónicos son los que se presentan. Si se necesita determinar las constantes de la ecuación puede ser más sencillo emplear los métodos (*a*) o (*b*).

Ejercicios 24. — Sobre Análisis Armónico

1. Analizar aproximadamente el movimiento x de un punto en un mecanismo, en la hipótesis de que pueda ser representado por una serie finita de términos senos y cosenos, y obtener la expresión general para los valores del coeficiente en las series

$$x = \sum_1^n (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta) + A_0$$

siendo $n = 3$ y θ el desplazamiento angular de una manivela que gira uniformemente.

Aplicar los resultados a la obtención de los valores de los coeficientes, para los valores de x y θ dados en la tabla siguiente, donde se da el movimiento lineal de un punto en el mecanismo, y el correspondiente movimiento angular de una manivela que gira uniformemente.

Desplazamiento angular de la manivela en grados ..	0	60	90	120	180	240	300
x movimiento lineal	1,11	0,43	0,83	1,65	3,67	4,15	2,93

2. Una parte de una máquina posee un movimiento oscilatorio. Los espacios y, para los tiempos t, aparecen en la tabla.

t	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14	0,16	0,18	0,2
y	0,64	1,13	1,34	0,95	0	—0,92	—1,33	—1,16	—0,66	0

Encontrar las constantes en la ecuación

$$y = A \operatorname{sen} (10\,\pi t + \alpha_1) + B \operatorname{sen} (20\,\pi t + \alpha_2).$$

3. Analizar la curva que resulta cuando se toman los siguientes valores como ordenadas y abscisas.

x^0	0	45	90	135	180	225	270	315	360
y	0	21,5	31,25	11,25	0	9	30	26,5	0

4. Los valores de la fuerza electromotriz del primario de un transformador en diferentes puntos del ciclo son como sigue (para simplificar la escritura ponemos θ en vez de pt).

θ	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
E	70	886	1293	1400	1307	814	—70	—886	—1293	—1400	—1307	—814	70

Si θ y E están relacionadas por la ecuación

$$E = A \operatorname{sen} \theta + B \operatorname{sen} 3\theta + C \cos \theta + D \cos 3\theta$$

hallar los valores de las constantes A, B, C y D.

CAPÍTULO XII

Resolución de triángulos esféricos

La curvatura de la superficie terrestre no es un factor apreciable en los cálculos que siguen a un pequeño levantamiento topográfico y por consiguiente, no se tiene en cuenta, pero cuando la extensión del levantamiento es grande como en el caso de una triangulación de «primer orden» el efecto de la curvatura debe tenerse en cuenta si se desea precisión. Por consiguiente es necesario el empleo de la *Trigonometría esférica* en vez de la *Trigonometría plana* corriente, y de acuerdo con esto insertamos aquí un breve capítulo que trata principalmente de la resolución de triángulos esféricos.

DEFINICIONES DE LOS TÉRMINOS USADOS. — La tierra puede ser considerada como una esfera de un radio de unos 6.366 kms., siendo éste el radio medio.

Un *círculo máximo* en una esfera es un círculo determinado por la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro; si el plano no pasa por el centro de la esfera, su intersección se llama un *círculo menor*. Así todos los meridianos son círculos máximos, mientras que todos los paralelos de latitud, excepto el Ecuador, son círculos menores.

Una línea recta en la superficie de la tierra es en realidad una porción de círculo máximo; por lo tanto, un paralelo de latitud no es una línea recta, o en otras palabras: un movimiento de Este a Oeste no es un movimiento a lo largo de una línea recta.

Un triángulo trazado en la superficie terrestre con lados rectos es lo que se llama un triángulo esférico y sus lados son arcos de círculo máximo. Las longitudes de estos lados pueden ser medidos según las reglas corrientes en kilómetros, millas, etc., pero es más usual medirlos por los ángulos subtendidos por ellos desde el centro de la esfera. Teniendo esto en cuenta, es conveniente recordar que un arco de una milla marina (6076 pies ó 1852 metros) subtiende un ángulo de 1′ en el centro de la tierra: por consiguiente una longitud de 80 millas marinas significan lo mismo que un lado de 80′ es decir 1°, 20′.

En la figura 133 se muestra la diferencia entre un círculo máximo y un círculo menor; y AB, BC y CA que son prociones de círculos máximos forman un triángulo esférico (rayado en la figura). La longitud BA puede ser expresada por la magnitud del ángulo BOA.

La figura 134 representa un triángulo esférico ABC en el que O es el centro de la esfera. El arco AB es proporcional al ángulo AOB y por tanto en vez de considerar AB como una longitud le podemos con razón designar por ∠ AOB.

Así el lado *c* es lo mismo que ∠ AOB, *b* que ∠ COA y *a* que ∠ COB. En lo que concierne a los ángulos del triángulo, el ángulo entre CA

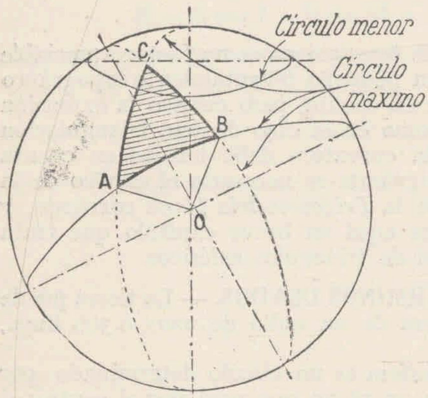


Fig. 133

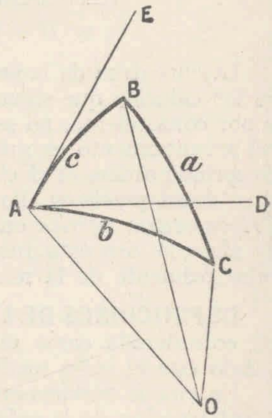


Fig. 134

Triángulos esféricos

y AB es el mismo que forman los planos AOC y AOB y es por consiguiente el ángulo de las tangentes AD y AE.

Los triángulos esféricos deben considerarse como una forma más general de los triángulos planos, pues si el radio de la esfera se hace infinito el triángulo esférico se convierte en plano.

Muchas reglas con las cuales estamos familiarizados tratándose de triángulos planos son ciertas para triángulos esféricos, por ejemplo: «La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado» o «si dos triángulos tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido por el otro, los triángulos son iguales». «El lado mayor de un triángulo es subtendido por el ángulo mayor».

Hay una diferencia importante entre las reglas para un triángulo plano y las correspondientes para un esférico y es que mientras los tres ángulos de un triángulo plano suman 180° la suma de los de un triángulo esférico exceden siempre de 180° y no llega a 540°. La diferencia entre la suma de los tres ángulos y 180° se conoce con el nombre de *exceso esférico*.

Su magnitud puede deducirse de la fórmula

$$\text{exceso esférico} = \frac{360^\circ \times \text{área del triángulo}}{2\pi r^2}$$

(siendo $2\pi r^2$ el área de un hemisferio)

El exceso esférico es una cantidad muy pequeña en los casos que pueden presentarse en relación con levantamientos topográficos.

Ejemplo. — Considérese el caso de un triángulo equilátero de 68 millas de lado

$r = 6{,}366$ km. = 3960 millas aproximadamente.

El área del triángulo es aproximadamente 2000 millas cuadradas. El exceso esférico será

$$\frac{360 \times 60 \times 2000}{2\pi \times 3960 \times 3960} \text{ minutos} = \underline{0{,}437 \text{ minutos.}}$$

Una buena aproximación para el exceso esférico de un triángulo en la superficie terrestre es

$$\text{exceso esférico (en segundos)} = \frac{\text{área del triángulo esférico en millas cuadradas}}{78}.$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS. — La regla más usada para resoluciones de triángulos planos es la del seno en la cual se manifiesta que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. En el caso de triángulos esféricos ésta se modifica así: **«Los senos de los ángulos son proporcionales a los senos de los lados opuestos».**

Por tanto adoptando la notación de la figura 134,

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen A}} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen B}} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen C}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

debiendo recordarse que sen a es realmente sen $\angle$ BOC, etc.

Otras fórmulas son

$$\text{sen}\frac{\text{A}}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen }(s-b)\text{ sen }(s-c)}{\text{sen } b \text{ sen } c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\cos\frac{\text{A}}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen } s.\text{ sen }(s-a)}{\text{sen } b \text{ sen } c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\text{tg}\frac{\text{A}}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen }(s-b)\text{ sen }(s-c)}{\text{sen } s \text{ sen }(s-a)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

y las correspondientes para $\frac{B}{2}$ y $\frac{C}{2}$ que se obtienen escribiendo en la fórmula anterior, en lugar de cada letra, la que le sigue en el orden $a\ b\ c\ a$.

s en estas fórmulas es $\dfrac{a+b+c}{2}$ y es, por consiguiente, un ángulo

(en trigonometría plana $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ es una longitud).

Es interesante comparar las fórmulas anteriores con las correspondientes en trigonometría plana que son:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

Puede observarse que, como en el caso anterior, los lados de las fórmulas de trigonometría plana son sustituídos por los senos, en las fórmulas correspondientes de trigonometría esférica.

Otras fórmulas son:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\operatorname{cotg} A \operatorname{sen} B = \operatorname{cotg} a \operatorname{sen} c - \cos B \cos c \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\dfrac{(a-b)}{2}}{\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)} \operatorname{cotg}\frac{C}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{(a-b)}{2}}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)} \operatorname{cotg}\frac{C}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS. — En el caso de triángulos rectángulos estas reglas pueden simplificarse algo.

Supongamos que el triángulo es rectángulo en C.

$$C = 90^\circ, \quad \cos C = 0 \text{ y } \operatorname{sen} C = 1.$$

Según (6), $$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

pero, $$\cos C = 0$$

luego $$\cos c - \cos a \cos b = 0$$

es decir, $$\cos c = \cos a \cos b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

También tenemos

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \quad \text{según (6)}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos c}{\cos b} - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \quad \text{según (10)}$$

$$= \frac{\cos c}{\operatorname{sen} c} \times \frac{1}{\operatorname{sen} b \cos b} - \frac{\cos b}{\operatorname{sen} b} \times \frac{\cos c}{\operatorname{sen} c}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} c} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen} b \cos b} - \frac{\cos b}{\operatorname{sen} b} \right\}$$

$$= \operatorname{cotg} c \left\{ \frac{1 - \cos^2 b}{\operatorname{sen} b \cos b} \right\} = \frac{\operatorname{cotg} c \times \operatorname{sen}^2 b}{\operatorname{sen} b \cos b}$$

$$= \operatorname{cotg} c \times \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}$$

$$= \operatorname{cotg} c \times \operatorname{tg} b$$

o sea, $$\operatorname{tg} b \times \operatorname{tg} (90 - c)$$

es decir, $\cos A = \operatorname{tg} b \operatorname{tg} (90 - c)$
y, del mismo modo $\cos B = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} (90 - c)$ $\Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$

Por otra parte tenemos

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$= \frac{\cos a - \dfrac{\cos^2 c}{\cos a}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \quad \text{según (10)}$$

$$= \frac{\cos^2 a - \cos^2 c}{\cos a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \quad \text{o} \quad \frac{\operatorname{sen}^2 c - \operatorname{sen}^2 a}{\cos a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \quad \ldots\ldots(12)$$

y según (1) $$\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$\left[\text{En trigonometría plana} \quad \operatorname{sen} A = \frac{a}{c}\right].$$

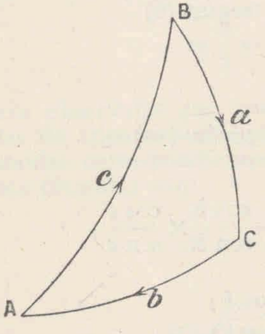


Fig. 135

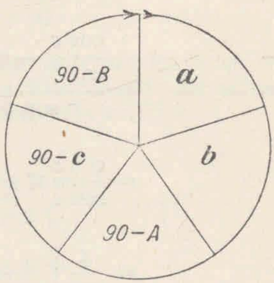


Fig. 136

REGLAS DE NEPER. — Las fórmulas (10), (11) y (13) y sus modificaciones pueden recordarse fácilmente por las dos reglas de Neper que pueden ser consideradas casi como mnemónicas.

Para la aplicación de estas dos reglas, los cinco elementos del triángulo esférico distintos del ángulo recto C se consideran así: a, b, (90 — A), (90 — c), (90 — B) respectivamente; tomando los complementos de A, c y B en vez de los valores de A, c y B para que las dos reglas comprendan todos los casos.

Estos cinco elementos se escriben en los cinco sectores de un círculo en el orden en que se presentan en el triángulo: así en la figura 135 comenzando por el lado a y recorriendo el perímetro del triángulo en la dirección indicada, los elementos que encontramos son a, b, A (en vez de lo cual escribimos $90 - A$), c (por el cual escribimos $90 - c$) y B (por el cual escribimos $90 - B$) (fig. 136).

Las reglas de Neper se enuncian así:

Seno de un elemento = producto de tangentes de los elementos adyacentes.

Seno de un elemento = producto de cosenos de los opuestos. (*)

Los términos adyacente y opuesto se refieren a las posiciones mutuas de las partes en la figura 136. Así para b se consideran como adyacentes a y $(90 - A)$ mientras que $(90 - c)$ y $(90 - B)$ son los elementos opuestos.

Por tanto

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{tg} a \times \operatorname{tg}(90 - A) = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} A$$

$$\operatorname{sen} b = \cos(90 - B)\cos(90 - c) = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c$$

o

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} c}\cdot \qquad (13)$$

Si tomamos el elemento $(90 - B)$, las adyacentes son $(90 - c)$ y a y los opuestos son $(90 - A)$ y b.

Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}(90 - B) = \operatorname{tg}(90 - c) \operatorname{tg} a$$

o

$$\cos B = \operatorname{tg}(90 - c) \operatorname{tg} a \qquad (11)$$

y

$$\operatorname{sen}(90 - B) = \cos(90 - A)\cos b$$

o

$$\cos B = \operatorname{sen} A \cos b.$$

Estas fórmulas compuestas solamente de productos y cocientes se prestan muy bien al cálculo logarítmico.

CASO DUDOSO EN LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS. — En la solución de un triángulo plano si se dan dos lados y el ángulo opuesto al más corto son posibles dos soluciones para el problema y es la mejor prueba, para elejir la conveniente, hacer un dibujo a escala como se dijo en el capítulo VI, parte I.

Análoga dificultad aparece en la resolución de triángulos esféricos cuando se dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Sean a, b y B los datos.

(*) A su vez puede facilitarse el recordar estas reglas en nuestro idioma observando la analogía de las terminaciones de tang*entes* y adyac*entes*, y la de las vocales de cos*e*n*o* y op*ue*st*o*s. (*N. del T.*)

Según la ecuación (1), página 409.

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen B}}{\text{sen } b}$$

$$\text{sen A} = \frac{\text{sen } a \text{ sen B}}{\text{sen } b}$$

Ahora bien, sen A = sen (180 — A), por consiguiente el segundo miembro de esta ecuación puede ser el valor del seno de un cierto ángulo o el de su suplemento.

Sin que entremos en la demostración, daremos por contado que habrá una solución solamente si el lado opuesto al ángulo dado tiene un valor comprendido entre el del otro lado y su suplemento. Es decir, que en el caso en que se den a, b y B habrá una solución si b tiene un valor intermedio entre a y $(180 - a)$.

Si b no está comprendido entre a y $(180 - a)$ debe tenerse presente que el mayor ángulo debe oponerse al mayor lado: Así por ejemplo, si se dan a, b y B si $a > b$, A tendrá que ser $>$ B. Vamos a exponer los casos posibles en ejemplos numéricos, siendo en todos ellos los datos a, b y B.

(a) Dados $a = 144°40'$, $b = 87° 37'$, $B = 11° 9'$, hallar A

$$\text{sen A} = \frac{\text{sen } a \text{ sen B}}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } 144° 40' \times \text{sen } 11° 9'}{\text{sen } 87° 37'}$$

y
$$\begin{aligned}\log \text{sen A} &= \log \text{sen } 144° 40' + \log \text{sen } 11° 9' - \log \text{sen } 87° 37' \\ &= \bar{1},7622 + \bar{1},2864 + \bar{1},9996 \\ &= \bar{1},0490\end{aligned}$$

A puede tener los valores 6° 26′ ó 173° 34′.

Ahora bien, $a > b$, luego A debe ser $>$ B y esta condición sólo se satisface si A = 173° 34′ puesto que 6° 26 no es $>$ 11° 9′.

Nótese que en el caso elegido $b = 87° 37'$ está comprendido entre $= 144° 40'$ y $(180 - a) = 35° 20'$, y por consiguiente sólo debe esperarse una solución.

(b) $b = 44° 35'$ $a = 55° 10'$ y $B = 38° 46'$.

Aquí b no está comprendido entre a y $(180 - a)$ así que son posibles dos soluciones.

Como antes

$$\begin{aligned}\log \text{sen A} &= \log \text{sen } a + \log \text{sen B} - \log \text{sen } b \\ &= \log \text{sen } 55° 10' + \log \text{sen } 38° 46' - \log \text{sen } 44° 35' \\ &= \bar{1},9142 + \bar{1},7966 - \bar{1},8463 = \bar{1},8645 \\ &= \log \text{sen } 47° 3'.\end{aligned}$$

Así que los valores posibles de A son $47° 3'$ y $132° 57'$ y debemos ensayar cada uno de ellos.

Ahora $a > b$, luego $A > B$; pero $47° 3'$ y $132° 57'$ son ambos $> 38°$ 46, así que tenemos dos triángulos que satisfacen las condiciones y para hallar las soluciones completas deben buscarse los dos valores de A, C y c.

Ejemplo 1. — En un triángulo esférico ABC, se tienen $a = 30°$, $b = 40°$, $C = 70°$, hallar A y B.

También se dan

$$\begin{array}{ll} L\,\mathrm{sen}\ 5° = 8{,}9402960 & L\,\mathrm{tg}\ 12°\ 14'\ 38'' = 9{,}3364779 \\ L\,\mathrm{sen}\ 35° = 9{,}7585913 & L\,\mathrm{tg}\ 60°\ 4'\ 3' = 10{,}2397529 \\ L\cos 5° = 9{,}9983442 & \\ L\cos 35° = 9{,}9133645 & \end{array}$$

En este caso conocemos dos lados y el ángulo comprendido; debemos usar las ecuaciones (8) y (9)

$$\mathrm{tg}\,\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}\,\mathrm{cotg}\,\frac{C}{2} \quad \ldots\ \text{de (8)}$$

$$= \frac{\cos 5°}{\cos 35°}\,\mathrm{cotg}\,35° \quad \left\{\begin{array}{l}\text{pues } \cos(-5°) \\ \quad = \cos(+5°)\end{array}\right\}$$

$$\frac{\cos 5°}{\cos 35°} \times \frac{\cos 35°}{\mathrm{sen}\ 35°} = \frac{\cos 5°}{\mathrm{sen}\ 35°}.$$

Tomando logaritmos de los dos miembros

$$L\,\mathrm{tg}\,\frac{A+B}{2} = L\cos 5° - L\,\mathrm{sen}\ 35° + 10\ (*)$$

$$\text{(o también} \qquad \lg\mathrm{tg}\,\frac{A+B}{2} = \lg\cos 5° - \lg\mathrm{sen}\ 35°)$$

$$L\,\mathrm{tg}\,\frac{A+B}{2} = \begin{array}{r} 19{,}9983442 \\ \underline{9{,}7585913} \\ 10{,}2397522 \end{array}$$

$$= L\,\mathrm{tg}\ 60°\ 4'\ 3''$$

$$\frac{A+B}{2} = 60°\ 4'\ 3''$$

$$A + B = 120°\ 8'\ 6'' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

(*) L significa log + 10, es decir el logaritmo de un número diez mil millones de veces mayor. Antiguamente se consideraban los logaritmos de las líneas trigonométricas en esta forma, para evitar características negativas. (*N. del. T*)

Según la ecuación (9)

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=-\frac{\operatorname{sen}5^{\circ}}{\operatorname{sen}35^{\circ}}\frac{\cos 35^{\circ}}{\operatorname{sen}35^{\circ}}$$

ó

$$\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}=\frac{\operatorname{sen}5^{\circ}\times\cos 35^{\circ}}{\operatorname{sen}^{2}35^{\circ}}$$

Tomando logaritmos de los dos miembros

$$L\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}=L\operatorname{sen}5^{\circ}+L\cos 35^{\circ}-2L\operatorname{sen}35^{\circ}+10$$

$$\begin{array}{r} 18{,}9402960 \\ 9{,}9133645 \\ \hline =28{,}8536605 \\ 19{,}5171826 \\ \hline 9{,}3364779 \end{array}$$

$$=L\operatorname{tg}12^{\circ}\,14'\,38''$$

$$B-A=24^{\circ}\,29'\,16'' \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Sumando (a) y (b) $\qquad 2B=144^{\circ}\,37'\,22''$

$$B=\underline{72^{\circ}\,18'\,41''}$$

y $\qquad A=120^{\circ}\,8'\,6''-72^{\circ}\,18'\,41''=\underline{47^{\circ}\,49'\,25''}.$

(Obsérvese que $A+B+C=47^{\circ}\,49'\,25''+72^{\circ}\,18'\,41''+70^{\circ}$

$$=190^{\circ}\,8'\,6''$$

así que el exceso esférico es $\quad =10^{\circ}\,8'\,6''$.)

Ejemplo 2. — Resolver el triángulo esférico ABC dados

$$c=91^{\circ}\,18''\ a=72^{\circ}\,27'\ \text{y}\ C=90^{\circ}.$$

En este caso el triángulo es rectangular y por tanto deben aplicarse las fórmulas (10) a (13).

Para hallar A tenemos la fórmula (13) $\operatorname{sen} A = \dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c}$

$$\text{L} \operatorname{sen} A = \text{L} \operatorname{sen} a - \text{L} \operatorname{sen} c + 10$$

$$= \text{L} \operatorname{sen} 72^{\circ}\, 27' - \text{L} \operatorname{sen} 91^{\circ}\, 18' + 10$$

$$= \begin{array}{r} 19{,}97930 \\ \underline{9{,}99989} \\ 9{,}97941 \end{array}$$

$$= \text{L} \operatorname{sen} 72^{\circ}\, 29'\, 45''$$

$$A = 72^{\circ}\, 29'\, 45''.$$

Para hallar b:

De la ecuación (10) tendremos

$$\cos c = \cos a \cos b$$

de donde
$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$$

$$\cos b = \frac{\cos 91^{\circ}\, 18'}{\cos 72^{\circ}\, 27'} = \frac{-\cos 88^{\circ}\, 42'}{\cos 72^{\circ}\, 27}$$

o
$$\cos (180 - b) = -\cos b = \frac{\cos 88^{\circ}\, 42'}{\cos 72^{\circ}\, 27'}.$$

Por consiguiente vamos a hallar el suplemento de b.

Tomando logaritmos *

$$\log \cos (180 - b) = \log \cos 88^{\circ}\, 42' - \log \cos 72^{\circ}\, 27'$$

$$= \begin{array}{r} \bar{2},35578 \\ \underline{\bar{1},47934} \\ \bar{2},87644 \end{array}$$

$$= \log \cos 85^{\circ}\, 41'\, 7''$$

$$180 - b = 85^{\circ}\, 41'\, 7''$$

$$b = 94^{\circ}\, 18'\, 5''.$$

---

* Es preferible usar logaritmos de los términos, en vez de emplear dichos logaritmos añadidos de 10.

Debe recordarse en todo caso que L sen A = log sen A + 10, de modo que si se lee L sen A = 9,97941, la lectura para log sen A deberá ser $\bar{1}$,97941. Si se usan los símbolos L no se debe olvidar la adición de 10.

Para hallar B

Según la ecuación (11)

$$\cos B = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} (90^\circ - c)$$

es decir,

$$\cos (180^\circ - B) = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} (c - 90^\circ) = \operatorname{tg} 72^\circ 27' \times \operatorname{tg} 1^\circ 18'$$

$$\log \cos (180 - B) = \log \operatorname{tg} 72^\circ 27' + \log \operatorname{tg} 1^\circ 18'$$

$$\begin{aligned} &\ 0{,}49996 \\ &= \bar{2}{,}35590 \\ &\overline{\ \bar{2}{,}85586} \\ &= \log \cos 85^\circ 53' 6'' \end{aligned}$$

$$180 - B = 85^\circ 53' 6''$$

$$B = 94^\circ 6' 54''$$

Por tanto, agrupando los resultados

$a = 72^\circ 27'$	$A = 72^\circ 29' 45''$
$b = 94^\circ 18' 53''$	$B = 94^\circ 6' 54''$
$c = 91^\circ 18'$	$C = 90^\circ$

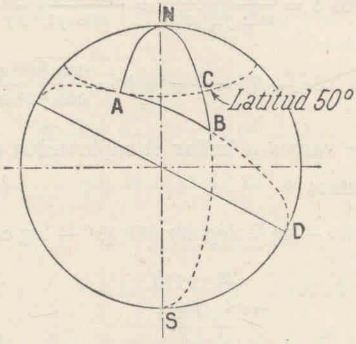


Fig. 137

Ejemplo 3. — Desde un punto A a los 50° latitud Norte se traza una línea recta hacia el E que se prolonga 60 millas marinas hasta B. Encontrar la latitud de B y si se desea viajar hacia el Norte desde B hasta encontrar el paralelo 50° nuevamente en C, encontrar el ángulo ABC y la distancia BC.

Sea A el punto de latitud 50° N (fig. 137) y ABD el círculo máximo que pasa por A tangente al paralelo.

Así AB será una línea recta dirigida hacia el Este de A.

Sea NB el meridiano que pasa por B y NA el que pasa por A.

Los lados NA, AB y BN son partes de círculos máximos y forman juntos un triángulo esférico.

En este triángulo conocemos el lado AB (su valor es 60′ puesto que 1 milla marina subtiende un arco de 1′ en el centro); el ángulo en A qeu vale 90° y el lado NA (90° — la latitud; es decir 40°).

Así es que conocemos dos lados y ángulo comprendido y vamos a resolver el triángulo usando la fórmula (10)

según la cual $\cos NB = \cos NA \cos AB$

$$= \cos 40^\circ \cos 60'$$

o $\log \cos NB = \log \cos 40^\circ + \log \cos 1^\circ$

$$= \bar{1},88425 + \bar{1},99993$$

$$= \bar{1},88418$$

es decir $NB = 40^\circ\ 0'\ 38''$

o sea que la latitud de B es

$$90^\circ - 40^\circ\ 0' 38'' = \underline{49^\circ\ 59'\ 22''}.$$

Ahora bien, C está a la misma latitud que A; de modo que BC = 38″ que corresponden a $\frac{38}{60}$ millas marinas; es decir BC = 0,633 millas marinas.

Para hallar el ángulo ABC usaremos la fórmula (13)

$$\operatorname{sen} \angle ABC = \frac{\operatorname{sen} NA}{\operatorname{sen} NB} = \frac{\operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ\ 0'\ 38''}$$

$$\log \operatorname{sen} \angle ABC = \log \operatorname{sen} 40^\circ - \log \operatorname{sen} 40^\circ\ 0'\ 38''$$

$$= \bar{1},90807 = \bar{1},90817$$

$$= \bar{1},99990$$

De donde $\angle ABC = \underline{88^\circ\ 45'}.$

Para el Topógrafo, la Trigonometría esférica tiene una aplicación importante en cuestiones concernientes a la astronomía esférica. Así para determinar la latitud de un lugar por observación de una estrella, es preciso resolver un triángulo esférico. Este triángulo está indicado en la figura 139, los lados AB, BC, CA, son en este caso la colatitud del lugar: (es decir, 90° — latitud), (90° — declinación) y (90° — altura) respectivamente; mientras que los ángulos A, B y C miden respectivamente el azimut, el ángulo horario y el ángulo paraláctico.

Las definiciones de los términos que acabamos de nombrar son como sigue:

La figura 138 representa una sección de la esfera celeste según el meridiano que pasa por el punto de observación O. RDT es el ecuador celeste, CEX es el horizonte, Z es el zenit del punto de observación, es decir, el punto de la esfera celeste en la vertical encima de O, y S marca la proyección sobre la esfera celeste de la posición de un astro sobre el que se hacen las observaciones. Así pues PSD, ZSC, RDT y CEX son porciones de círculos máximos.

La *altura* de un astro es el arco de círculo máximo que pasando por el zenit del punto de observación y el astro queda comprendido entre el astro y el horizonte.

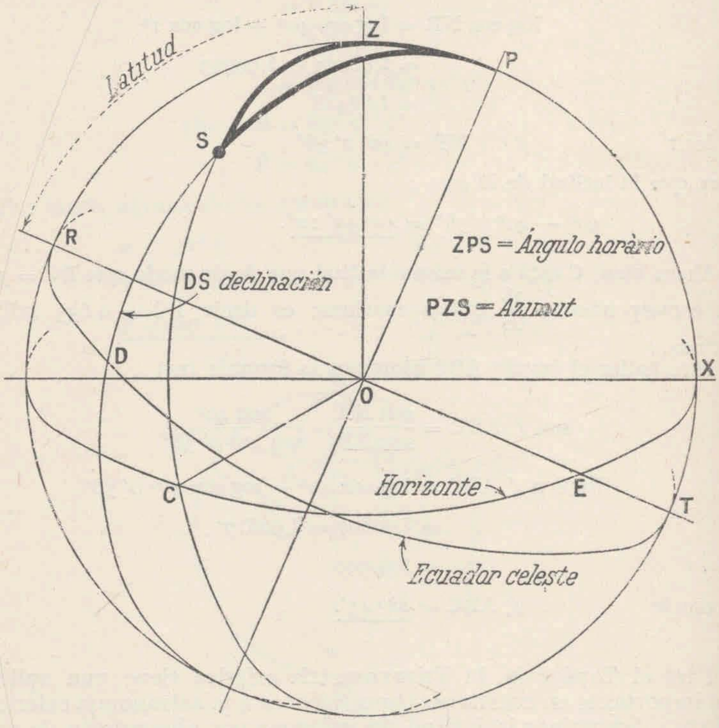


Fig. 138

Podemos comparar la altura en Astronomía al ángulo de elevación en Topografía.

Refiriéndonos a la figura 138, ZSC es el círculo máximo que pasa por Z y S, y SC es la altura, ZS complemento de SC es lo que se llama *distancia cenital*.

El *azimut* de un astro es el ángulo entre el plano meridiano que pasa por el punto de observación y el plano vertical que pasa por el astro. Puede compararse con los azimutes de Topografía. En la figura 138, el ángulo PZS es el azimut de S.

El *ángulo horario* de un astro es el ángulo en el polo entre el meridiano que pasa por el punto de observación y el círculo máximo que pasa por el polo y el astro.

Así, en la figura, P es el polo y PSD es el círculo de declinación. El ángulo horario de S = ∠ ZPS suele expresarse en tiempo en vez de grados, etc.

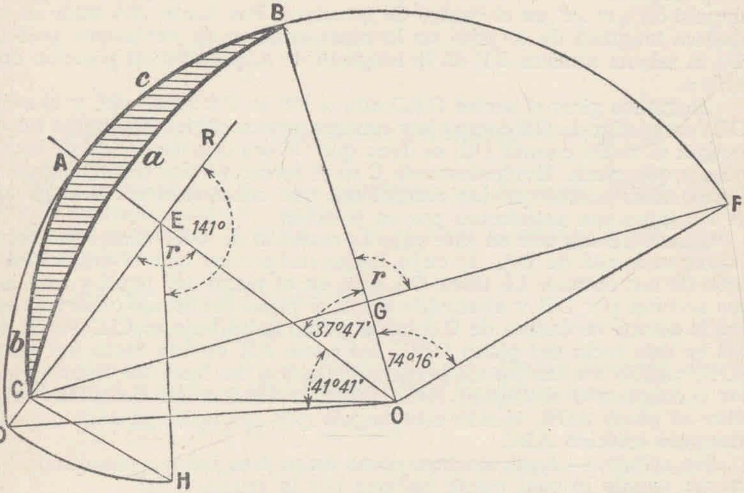


Fig. 139

La *declinación* de un astro es el arco de declinación comprendido entre el astro y el ecuador celeste, así DS es la declinación de S.

El procedimiento de cálculo se comprenderá mejor resolviendo un ejemplo numérico, y con objeto de asegurar una clara concepción y comprensión se resolverá, analítica y gráficamente.

Ejemplo 4. — En un cierto instante y en un lugar cuya latitud es 52° 13′ N, la altura del sol se vió era 48° 19′ y su declinación 15° 44′ N. Determinar el azimut.

Como se ha explicado antes puede construirse un triángulo esférico con los siguientes lados: a = 90 — declinación = 74° 16′, b = 90 — altura = 41° 41′ y c = colatitud = 37° 47. El ángulo A será el azimut que se pide (fig. 139).

Construcción gráfica. — Con cualquier radio conveniente OD trácese un arco de circulo DABF. Trácese OA, OB y OF haciendo DOA = b = 41° 41′, AOB = c = 37° 47′, y BOF = a = 74° 16′.

Trácese DCE perpendicular a OA y FGC perpendicular a OB cortándose en el punto C.

Obsérvese que el punto C cae fuera del triángulo AOB. Tomando E como centro y con un radio ED construyamos el arco de círculo DH: tracemos CH perpendicular a DE que encuentra a este arco en H y tracemos EH. El ángulo REH es el valor del ángulo buscado que medido tiene un valor próximo a 141° (si C hubiese caído al otro lado de OA, deberíamos haber medido el ángulo CEH).

El triángulo esférico ABC en la figura está representado por el arco de círculo BA y los arcos de elipse AC y BC.

Justificación de la construcción. — El lado b es tal que subtiende un ángulo de 41° 41′ en el centro de la esfera. Por tanto DA mide la verdadera longitud de b, pero no la representa en su verdadera posición. De la misma manera BF da la longitud de a, pero no su posición en la esfera.

Hagamos girar el sector OAD alrededor de OA como eje, y el sector OBF alrededor de OB como eje y continuaremos el giro hasta que los dos tengan el radio común OC, es decir que OC sea la intersección de los dos planos que giran. Evidentemente C es el tercer vértice del triángulo esférico ABC, puesto que las condiciones que conciernen a las longitudes de los lados son satisfechas por su posición.

Observaremos que en este caso la rotación de OBF tiene que continuarse más allá de OA, de cuyo hecho deducimos que el ángulo en A debe de ser obtuso. La línea OA está en el plano del papel y tomando una sección por DE y abatiendo sobre el plano del dibujo observaremos que la altura verdadera de C sobre el plano del dibujo es CH. Por tanto EH es una recta del plano OAC. Así como ER es una recta del plano AOB, siendo ambas líneas perpendiculares a la línea de intersección; por consiguiente el ángulo REH mide la inclinación del plano AOC sobre el plano AOB, siendo este ángulo por definición el ángulo A del triángulo esférico ABC.

Por cálculo. — Aquí tenemos como datos tres lados y deseamos hallar un ángulo lo cual puede hacerse por la ecuación (4)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-b)\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-a)}}$$

ahora bien,

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{74^\circ\,16' + 41^\circ\,41' + 37^\circ\,47'}{2} = \frac{153^\circ\,44'}{2} = 76^\circ\,52'$$

de modo que
$$s-a = 76^\circ\,52' - 74^\circ\,16' = 2^\circ\,36'$$
$$s-b = 76^\circ\,52' - 41^\circ\,41' - 35^\circ\,11'$$
$$s-c = 76^\circ\,52' - 37^\circ\,47' = 39^\circ\,5'.$$

Luego
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} 35^\circ\,11' \times \operatorname{sen} 39^\circ\,5'}{\operatorname{sen} 76^\circ\,52' \times \operatorname{sen} 2^\circ\,36'}}$$

y
$$\log\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\Big[\log\operatorname{sen} 35^\circ\,11' + \log\operatorname{sen} 39^\circ\,5' - (\log\operatorname{sen} 76^\circ\,52' + \log\operatorname{sen} 2^\circ\,36')\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \bar{1},76057 \\ \underline{\bar{1},79965} \\ \bar{1},56022 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{1},98849 \\ \underline{\bar{2},65670} \\ \bar{2},64519 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \times 0,91503 = 0,45752.$$

De modo que

$$\frac{A}{2} = 70^\circ\,46'\,30''$$

y
$$A = \underline{141^\circ\,33'}.$$

Ejercicio 25. — Resolución de triángulos esféricos

(Para la resolución de estos problemas se han usado tablas de logaritmos con sólo cuatro decimales).

En los problemas Nos. de 1 a 6, resolver el triángulo ABC, con los datos siguientes:

1. $a = 50^\circ$ $C = 90^\circ$ $b = 32^\circ\,17'$.

2. $C = 90^\circ$ $a = 45^\circ\,43'$ $A = 61^\circ\,15'$.

3. $a = 72^\circ\,14'$ $b = 43^\circ\,47'$ $c = 29^\circ\,33'$. Hallar también el valor de B por el método gráfico explicado en la página 421.

4. $b = 52^\circ\,5'$ $a = 58^\circ\,25'$ $C = 64^\circ$.

5. $b = 27^\circ\,13'$ $c = 51^\circ\,18'$ $C = 85^\circ\,9'$ y el exceso esférico es $2^\circ\,14'$.

6. $c = 79^\circ\,49'$ $b = 28^\circ\,5'$ $B = 15^\circ\,18'$.

7. Si la altura del sol es $17^\circ\,58'$, su declinación es $18^\circ\,16'$ N y el azimut es N $79^\circ\,56'$ O, hallar la latitud del lugar de la observación.

8. El exceso esférico de un triángulo en la superficie de la tierra es de $1^\circ\,15'$. Tomando la tierra como una esfera de radio 3960 millas hallar el área del triángulo en millas cuadradas.

9. Dado el azimut del sol 10° y su distancia cenital $24^\circ\,50'$ cuando su declinación es $22^\circ\,15'$, hallar la latitud del lugar y también el ángulo horario.

CAPÍTULO XIII

PROBABILIDADES MATEMÁTICAS Y TEOREMA DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Cuando se desean resultados extremadamente precisos y estos resultados se derivan de una serie de observaciones, debe tenerse en cuenta la posibilidad de error de cada una de estas observaciones. El resultado correcto o lo que se denomina «el resultado más probable» se halla frecuentemente combinando la media de las observaciones con el «error probable de la media». El estudio que va a seguir trata principalmente de establecer una regla para encontrar este error probable y como investigaciones preliminares discutiremos unas pocas reglas sencillas de probabilidades.

Supongamos que tratándose de un suceso es verosímil que ocurra cinco veces y que falle siete, la probabilidad de que ocurra en una ocasión determinada es $\frac{5}{12}$, mientras que la probabilidad de que falle es $\frac{7}{12}$, porque considerando una gran serie de casos, ocurre cinco veces en cada doce. Es necesario apercibirse de la importancia de la frase «considerando una gran serie de casos», nosotros no podríamos decir verdad diciendo que el suceso ocurrirá cinco veces en las primeras doce ni que ocurrirá diez veces en las primeras veinticuatro y así sucesivamente; aún sería dudoso decir que ocurriría cincuenta veces en ciento veinte. Si decimos sin embargo que de 12,000 oportunidades que se ofrezcan aparecerá en 5,000 y no en 7,000, nuestro aserto será bastante correcto, pues con el gran número de casos que consideramos todos los caprichos de la suerte serían eliminados.

Tomemos otro ejemplo: supongamos un hombre tirando al blanco y que la probabilidad de que haga el 90 % o más de los blancos de una tirada es $\frac{6}{11}$, esto quiere decir que es más fácil que haga el 90 % de blancos que no (en la proporción de 6 a 5) si dispara un gran número de tiros.

En términos generales, si un suceso puede ocurrir de *a* maneras y fallar de *b* maneras y todas esas son igualmente capaces de ocurrir, la probabilidad de su ocurrencia es $\frac{a}{a + b}$, y la de su no ocurrencia es $\frac{b}{a + b}$; y si $a = b$, entonces tan fácil es que ocurra como que no, es decir que la probabilidad de ocurrencia como la de falta es $\frac{1}{2}$.

Nota. $$\frac{\text{Probabilidad de ocurrencia}}{\text{Probabilidad de fracaso}} = \frac{a + b}{a} \times \frac{b}{a + b} = \frac{a}{b}$$

es decir, las probabilidades son a contra b a favor de la ocurrencia o b contra a a favor del fracaso. La primera forma es la que suele usarse si $a > b$ o viceversa.

Ejemplo. — Si las probabilidades contra un suceso son 10 a 1, la probabilidad de que ocurra $= \frac{1}{10 + 1} = \frac{1}{11}$, es decir, que ocurrirá probablemente una vez de cada once que se intente.

SUCESOS QUE SE EXCLUYEN. — Consideremos ahora el caso de dos sucesos que se excluyen mutuamente, esto es, que no concurren en su aparición.

Supongamos que la probabilidad de ocurrencia del primer suceso $= \frac{a}{a + b}$ y la probabilidad de ocurrencia del segundo $= \frac{A}{A+B}$.

Para poder comparar estas fracciones, reduzcámoslas a un común denominador, llamémosle c y escribamos las fracciones así $\frac{a_1}{c}$ y $\frac{a_2}{c}$ respectivamente.

Ahora bien, de c ocasiones el primer suceso puede ocurrir a_1 veces y el segundo a_2, y puesto que los dos sucesos se excluyen, es decir, que las ocurrencias de uno no coinciden con las ocurrencias del otro, los dos sucesos juntamente considerados pueden ocurrir $a_1 + a_2$ ocasiones.

Por tanto, la probabilidad de que ocurra uno de los dos (el uno o el otro indistintamente) es $\frac{a_1 + a_2}{c}$, lo cual puede escribirse en la forma $\frac{a_1}{c} + \frac{a_2}{c}$, es decir, la suma de las probabilidades separadas.

Ejemplo. — Supongamos que un suceso ocurre una vez cada 8 y que otro segundo suceso ocurre 3 veces cada 17 y que no hay posibilidad de que concurran los dos sucesos. Siendo 136 el denominador común de 8 y 17, el primer suceso ocurre 17 veces cada 136 y el segundo ocurre 24 cada 136, mientras que uno u otro indistintamente ocurren 41 veces cada 136.

PROBABILIDAD DE LA OCURRENCIA SIMULTÁNEA DE DOS SUCESOS INDEPENDIENTES. — Supongamos que un suceso es capaz de ocurrir una vez cada 6, mientras otro es capaz de ocurrir dos veces cada 17; la probabilidad de que los dos ocurran al mismo tiempo debe de ser menor que la probabilidad de la ocurrencia de cada uno. De hecho, debe ser el producto de las probabilidades separadas; es decir, la probabilidad de que los dos sucesos concurran es $\frac{1}{6} \times \frac{2}{17} = \frac{2}{102} = \frac{1}{51}$; o lo que es lo mismo, que de cada 10200 veces el primero puede ocurrir probablemente 1700, el segundo puede ocurrir probablemente 1200 veces, mientras que los dos aparecen *simultáneamente* sólo 200 veces.

PROBABILIDAD DE ERROR. — Teniendo en cuenta estos teoremas fundamentales vamos a proceder a un estudio sobre la probabilidad de error refiriéndonos en particular a su aplicación en levantamientos de precisión.

Se puede admitir que para una serie de observaciones bien hechas son aceptables las siguientes hipótesis o *postulados.*

(1) Que pequeños errores es más fácil que ocurran con más frecuencia que errores grandes, y por tanto, que errores extremadamente grandes no ocurran nunca.

(2) Que los errores positivos y negativos se dan igualmente, es decir, tan corriente es dar un resultado que sea 0,001 mayor que el real como que sea 0,001 menor.

Por tanto, la probabilidad de ocurrencia de un error de determinada magnitud, que viene dada por

$$\frac{\text{Número de errores de esta magnitud}}{\text{Número total de errores}}$$

depende en cierta manera de la magnitud de tal error. Nuestra primera idea por tanto debe ser que la probabilidad de ocurrencia de un error de magnitud x puede ser expresada por $f(x)$, es decir, como una función simple de x.

Si queremos ahora ponernos de acuerdo con nuestro postulado (2), el cual exige que si se traza una curva cuyas ordenadas sean probabilidades y cuyas abcisas sean errores, esta curva sea simétrica con relación al eje de las y, veremos que la función debe, por consiguiente, ser de una potencia par de x y tomando la más sencilla diremos que la probabilidad de ocurrencia de un error de magnitud x es $y = f(x^2)$.

Ahora bien, del postulado (1) deducimos que el coeficiente de x^2 debe de ser negativo, porque y debe decrecer a medida que x aumenta.

La probabilidad de un error de magnitud comprendida entre los valores x y $x + \delta x$ debe pues depender de x^2 y también de la diferencia δx, por tanto es razonable decir que es $= f(x^2) . \delta x$ puesto que cuanto más grande sea la diferencia de valores, mayor es la probabilidad de error.

Por tanto, la probabilidad de un error de magnitud x entre límites determinados $-a$ y $+a$, debe de ser la suma de probabilidades elementales $f(x^2) . \delta x$ extendida entre los límites $-a$ y $+a$

es decir $$P = \int_{-a}^{+a} f(x^2)\,\delta x$$

fórmula que indica la probabilidad de que el error no exceda de a.

Luego la probabilidad de que el error pueda tener un valor cualquiera (es decir, la probabilidad es 1) (*) debe ser expresada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2)\,\delta x$$

siendo el orden del error ilimitado, así que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2)\,\delta x = 1.$$

Ha sido probado por Lord Kelvin (véase su «Natural Philosophy») que $f(x^2)$ debe ser tal, que

$$f(x^2) \times f(y^2) = f(x^2 + y^2)$$

y puesto que $$e^{x^2} \times e^{y^2} = e^{x^2+y^2}$$

y $$e^{kx^2} \times e^{ky^2} = e^{k(x^2+y^2)}$$

esta condición puede ser satisfecha si

$$f(x^2) = Ae^{kx^2} = Ae^{-\frac{x^2}{h^2}}$$

el signo menos responde al postulado (1), página 426 y el coeficiente k se escribe $\frac{1}{h^2}$ por la razón que se explicará más tarde.

Vamos a hallar el valor de la constante A.

Se sabe que $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2)\delta x = 1$$

(*) Esto equivale a decir que tenemos siempre la certeza de cometer un error de magnitud descoocida. *(N. del T).*

Luego $$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx = 1.$$

Ahora bien, ha sido ya demostrado (véase pág. 193) que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

y por consiguiente $$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx = \frac{h\sqrt{\pi}}{2}$$

de donde $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx = 2 \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx = h\sqrt{\pi},$$

Luego $$A.h.\sqrt{\pi} = 1$$

o sea $$A = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

Por consiguiente $$y = f(x^2) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{h^2}}$$

cuya ley se denomina Ley normal del error.

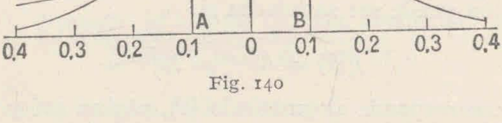


Fig. 140

La curva que representa esta ecuación se llama curva de las probabilidades y también la curva de errores de Gauss. Dos de estas curvas aparecen dibujadas en la figura 140 y muestran el efecto de la variación del parametro h.

En un caso $h = 0{,}2$ y para la segunda curva $h = 0{,}5$; se observará comparando ambas curvas que para el menor valor de h, la probabilidad de ocurrencia de pequeños errores es más grande, es decir, la serie de observaciones para las cuales $h = 0{,}2$ está más cerca de lo correcto que aquellos para los cuales $h = 0{,}5$.

Se verá que la curva está de acuerdo con los postulados expuestos en la página 426; puesto que la probabilidad de error es más grande cuando el error es más pequeño, la probabilidad de un error grande es muy pequeña, y que hay tanta probabilidad para un error de 0,2, por ejemplo, como para — 0,2.

La probabilidad de que el error no exceda de 0,1 está dada por el área ABCD en un caso y ABEF en otro.

TEOREMA DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS. — Si se hace un número de observaciones sobre una magnitud y se anotan los errores de cada una, lo más aproximadamente que puedan estimarse, del conocimiento de estos errores es posible encontrar el valor más probable de la cantidad.

Supongamos que hacemos n observaciones y sean x_1, $x_2 \ldots . x_n$, los errores: supongamos también que todas las medidas son igualmente buenas, es decir, que la precisión, la «finura» de lectura es la misma siempre; siendo h en la fórmula anterior una medida de esta precisión.

La probabilidad de que el error x_1 esté dentro de un cierto intervalo δx, será la probabilidad de un error de magnitud x_1 multiplicado por el intervalo δx, es decir,

$$\begin{aligned} P_1 &= \delta x \times y_1 \\ &= \delta x \times \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{h^2}} \end{aligned}$$

y para el error x_2: $$P_2 = \delta x \times \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{h^2}} \cdot$$

Ahora bien, x_1 x_2, etc., son completamente independientes, así que la probabilidad de todos los errores dentro del orden δx será el producto de las probabilidades separadas, es decir,

$$\begin{aligned} P &= P_1 \times P_2 \times \ldots . P_n \\ &= \frac{\delta x}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{h^2}} \times \frac{\delta x}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{h^2}} \times \ldots . \\ &= \frac{(\delta x)^n}{h^n \sqrt{\pi}^n} \left\{ e^{-\left(\frac{x_1^2}{h^2} + \frac{x_2^2}{h^2} + \frac{x_3^2}{h^2} + \ldots .\right)} \right\} \\ &= K e^{-\frac{1}{h^2}(\Sigma x^2)}. \end{aligned}$$

Hemos pues obtenido una expresión que nos da la probabilidad de que todos los errores estén comprendidos en un cierto orden. Este orden puede ser 0,1, ó 0,05, por ejemplo.

Evidentemente si todos los errores estuvieran comprendidos dentro del orden — 0,05 a + 0,05 el resultado calculado sería de una aproximación más cercana a la verdad que si el orden fuese doble del antedicho.

Nuestro objeto es pues encontrar cuando la probabilidad de un error pequeño (δx puede reducirse tanto como queramos) es la más grande; es decir, encontrar cuando P es un máximo.

Ahora bien $$P = Ke^{-\frac{1}{h^2}(\Sigma x^2)} = \frac{K}{e^{\frac{1}{h^2}(\Sigma x^2)}}$$

y cuando menor sea el denominador, mayor será P. Pero la única variable en el denominador es Σx^2, luego para que P pueda alcanzar un valor máximo, Σx^2 debe ser lo menor posible. Luego el valor más probable de la cantidad a determinar es aquel que hace mínima la suma de los cuadrados de los errores.

Puede ahora sentarse que la media aritmética de los valores observados es el valor más probable de la cantidad.

Así, si se han hecho n observaciones cuyos valores son $a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ a_n$ y es a la media aritmética de estos valores, sea $\bar{a}$ el valor más probablemente correcto $(a_1 - \bar{a})$, $(a_2 - \bar{a})$, son lo que se llaman *errores residuales.*

Ahora bien, la probabilidad de incurrir en este conjunto de errores es:

$$= P$$

$$= Ae^{-\frac{1}{h^2}(\Sigma[a_1 - \bar{a})^2]}$$

$$= Ae^{-\frac{1}{h^2}(a_1^2 + \bar{a}^2 - 2a_1\bar{a} + a_2^2 + \bar{a}^2 - 2a_2\bar{a} + \ldots}$$

$$= Ae^{-\frac{1}{h^2}[\Sigma a_1^2 + n\bar{a}^2 - 2\bar{a}(\Sigma a_1)]}.$$

Derivando P respecto a $\bar{a}$ y haciendo $u = \Sigma a_1^2 + n\bar{a}^2 - 2\bar{a}\,\Sigma a_1$,

se tiene: $$\frac{du}{d\bar{a}} = 0 + 2\bar{a}n - 2\Sigma a_1$$

$$P = Ae^{-\frac{u}{h^2}}$$

$$\frac{dP}{d\bar{a}} = \frac{dP}{du} \times \frac{du}{d\bar{a}}$$

$$= -\frac{A}{h^2}e^{-\frac{u}{h^2}} \times (2\bar{a}n - 2\Sigma a_1)$$

y
$$\frac{dP}{d\bar{a}} = 0 \text{ si } 2\bar{a}n - 2\Sigma a_1 = 0$$

$$\text{o si } \bar{a} = \frac{1}{n}\Sigma a_1$$

pero $\frac{1}{n}\Sigma a_1 = a =$ media aritmética de las observaciones

y por tanto $\bar{a} = a$

es decir, que **el valor más probable es la media aritmética de las observaciones.**

Tenemos ahora que si x es el error de la media aritmética y x_1, x_2, x_n, etc., son los errores respectivos de las observaciones,

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Elevando al cuadrado los dos miembros

$$x^2 = \frac{1}{n^2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + \ldots)$$

$$= \frac{1}{n^2}\Sigma x_1^2 + \frac{2}{n^2}\Sigma x_1\,x_2$$

y puesto que hemos dicho que todas las observaciones son igualmente buenas y que los errores positivos y negativos ocurren con la misma facilidad, podremos escribir

$$x_1^2 = x_2^2 = \ldots = \mu^2 \qquad \Sigma x_1\,x_2 = 0$$

puesto que todos los errores son pequeños y sus productos, de dos factores, son aún menores (*).

Tendremos pues, $x^2 = \frac{1}{n^2}n\mu^2 = \frac{\mu^2}{n}$

o sea $x = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$

es decir que el

$$\textbf{error probable de la media} = \frac{\textbf{error probable de una simple observación}}{\sqrt{n}}$$

(*) No sólo por esta razón puede despreciarse el término $\Sigma x_1\,x_2$, sino porque además hay entre sus sumandos reducciones o compensaciones evidentes si se admite como lo hemos hecho, la existencia de errores positivos y negativos de la misma magnitud. *(N. del T).*

y por consiguiente, siendo iguales las demás circunstancias, la posibilidad de un gran error en el resultado final se reduce grandemente tomando un gran número de observaciones. También en una serie de observaciones bien hechas, puede ocurrir que la media aritmética no difiera de cualquiera de las observaciones notablemente, y que asimismo los errores residuales y los errores actuales sean muy parecidos.

Con estos conocimientos nos encontramos en condiciones de hacer un sumario de las investigaciones anteriores; tendremos:

(*a*) La media aritmética de las series de observaciones, que se suponen hechas con igual cuidado, es el valor más probable de la cantidad.

(*b*) La suma de los cuadrados de los errores residuales debe de ser la mínima.

(*c*) El error probable de la media aritmética es igual al error probable de una observación dividido por la raíz cuadrada del número de observaciones.

Ejemplo 1. — Siete observaciones de una cierta magnitud, hechas todas con igual cuidado, son 12, 11, 14, 12, 11,2, 11,7 y 12,1.

Hallar el valor más probable de la cantidad.

$$\text{El valor más probable es media aritmética} = \frac{84}{7} = \underline{12,}$$

y puede verse inmediatamente que este valor hace mínima la suma de los cuadrados de los errores residuales.

Los errores residuales son

$$(12 - 12),\ (11 - 12),\ (14 - 12),\ (12 - 12),\ (11,2 - 12),\ (11,7 - 12)$$

$$\text{y}\ (12,1 - 12)\quad \text{o sea}\quad 0,\ -1,\ 2,\ 0,\ -0,8,\ -0,3,\ 0,1$$

$$\text{y } \Sigma \text{ de cuadrados de errores residuales} = 0 + 1 + 4 + 0 + 0,64 + 0,09 + 0,01 = 5,74.$$

Para comprobar que es el mínimo, supongamos que el valor más probable sea 11,5; entonces los errores residuales son: 0,5, — 0,5, 2,5, 0,5, — 0,3, 0,2 y 0,6 respectivamente

$$\Sigma \text{ de cuadrados} = 0,25 + 0,25 + 6,25 + 0,25 + 0,09 + 0,04 + 0,36 = 7,49.$$

Del mismo modo si suponemos que 12,2 es el valor más probable

$$\Sigma\,(\text{errores residuales})^2 = 0,2^2 + 1,2^2 + 1,8^2 + 0,2^2 + 1^2 + 0,5^2 + 0,5^2 + 0,1^2 = 6,02$$

Ambos valores exceden a 5,74.

DETERMINACIÓN DEL ERROR PROBABLE DE LA MEDIA ARITMÉTICA. — Sea r el error probable de cualquiera de las observaciones; si éste es un error «promedio», es decir, si se presentan errores mayores que él en la misma proporción que errores menores, la probabilidad de que el error sea menor que r es $\frac{1}{2}$.

Ahora bien, la probabilidad de que un error esté comprendido en el intervalo $-r$ a $+r$, es:

$$\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_{-r}^{+r} e^{-\frac{r^2}{h^2}} dr = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-\frac{r^2}{h^2}} dr$$

$$= \frac{2h}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{r}{h}} e^{-\frac{r^2}{h^2}} d\left(\frac{r}{h}\right)$$

(pues $dr = hd\left(\frac{r}{h}\right)$ y siendo ahora los límites para $\frac{r}{h}$ y no para r).

Hay cierta relación entre la magnitud del error y la precisión de la medida, es decir, entre r y h, vamos a buscar esta relación.

Si $X = \frac{r}{h}$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{r}{h}} e^{-\frac{r^2}{h^2}} d\left(\frac{r}{h}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{r}{h}} e^{-X^2} dX$$

y según el aserto de más arriba, el valor de esta integral va a ser $\frac{1}{2}$.

Ahora bien $\qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots.$

y por tanto $\qquad e^{-X^2} = 1 - X^2 + \frac{X^4}{2} - \frac{X^6}{6} + \ldots.$

y si X^2 es pequeño, podemos hacer la integración por medio de un desarrollo en serie: si X^2 no es pequeño, el valor integral puede leerse en las tablas de probabilidades que dan los valores de la integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^X e^{-X^2} dX$, tablas que pueden encontrarse en las «Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XXXIX». En el caso presente X es una cantidad pequeña y obtendremos un resultado suficientemente correcto desarrollando en serie y calculando unos pocos términos de esta serie.

Tendremos así

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{r}{h}} e^{-X^2}dX = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{r}{h}}\left(1 - X^2 + \frac{X^4}{2} - \frac{X^6}{6} + \ldots\right) dX$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(X - \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{10} - \frac{X^7}{42} + \right)_0^{\frac{r}{h}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{h} - \frac{r^3}{3h^3} + \frac{r^5}{10h^5} - \frac{r^7}{42h^7} + \ldots\right).$$

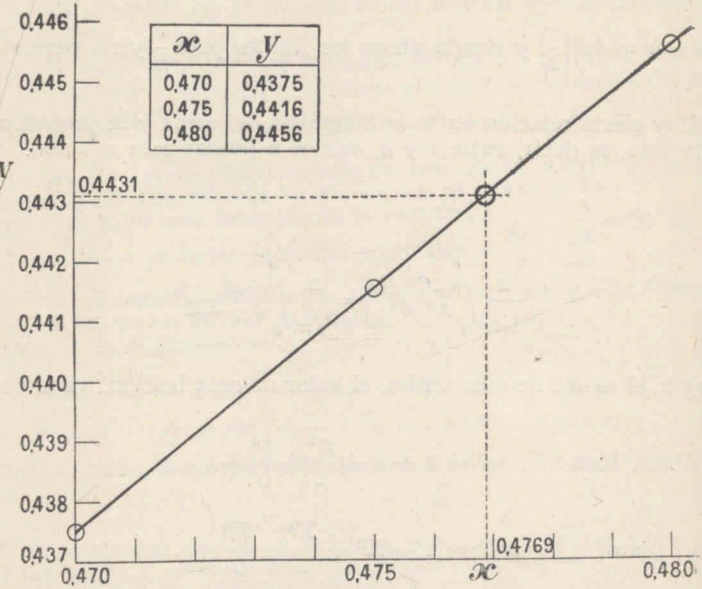


Fig. 141

Luego $$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{h} - \frac{r^3}{3h^3} + \frac{r^5}{10h^5} - \frac{r^7}{42h^7} + \ldots\right)$$

y esta ecuación puede escribirse así:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{r}{h} - \frac{r^3}{3h^3} + \frac{r^5}{10h^5} - \frac{r^7}{42h^7} + \ldots$$

y escribiendo de nuevo X en vez de $\frac{r}{h}$.

$$0{,}4431 = X - \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{10} - \frac{X^7}{42} + \text{términos que son muy pequeños.}$$

Eligiendo valores de X y tomando puntos, se representa gráficamente esta ecuación y en la figura 141 está representada la solución final en la que se ve que es, X = 0,4769.

Luego $\frac{r}{h} = 0{,}4769$ y $r = 0{,}4769\,h$.

(Si se resuelve con un grado mayor de precisión se halla el valor de $\frac{r}{h} = 0{,}47694$, cuyo número se empleará en el trabajo que sigue).

Supongamos de nuevo que se han hecho n mediciones igualmente buenas, atribuiremos a cada una lo que se llama un *peso* unidad, es decir, ninguna debe considerarse mejor o peor que otra y cuando buscamos el resultado de la operación para la cual fueron hechas estas mediciones deben tomarse todas con la misma consideración; además, se dice que la media aritmética de n observaciones de peso unidad tiene un peso de n.

Sabiendo que $$r_m = \frac{r}{\sqrt{n}}$$

en la que r_m = error probable de la media aritmética

y r = error probable de cualquier observación

y también $$\frac{\text{peso de la media aritmética}}{\text{peso de una observación}} = \frac{n}{1}$$

lo cual puede escribirse en esta forma

$$\frac{w_m}{w} = \frac{n}{1}$$

podemos relacionar w_m y w con r_m y r

así $$\frac{r_m^2}{r^2} = \frac{1}{n} = \frac{w}{w_m}$$

es decir, que **el peso varía inversamente al cuadrado del error probable.**

Así es que la determinación del error probable, que es una guía muy útil para juzgar de la precisión de una serie de observaciones, es aún más útil para fijar los pesos que deben darse a diferentes series de observaciones.

Así si tres series de observaciones han sido hechas sobre una cierta longitud y ha resultado que los errores probables de la media aritmética son 1,423, 0,917 y 1,614 respectivamente, los pesos que se deben dar a estas series son

$$\frac{1}{(1{,}423)^2}\ \frac{1}{(0{,}917)^2}\ \frac{1}{(1{,}614)^2}\ \text{respectivamente}$$

o sea, $\quad 0{,}494,\ 1{,}19,\ 0{,}384.$

Así que para obtener el resultado final debe concederse más crédito a la segunda serie de observaciones, tener menos confianza en

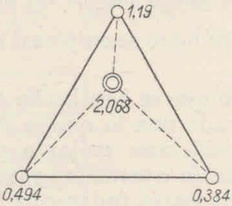


Fig. 142

la primera y menor en la tercera; cuyo hecho puede ilustrarse y recordarse mediante el símil de la figura 142, en la que se ve que el peso resultante cae más cerca del peso 1,19 que cualquiera de los otros pesos.

Volviendo al objeto de este párrafo:

Si x_1, x_2, x_3.... son los errores verdaderos o actuales de observación, la probabilidad de que cada uno esté comprendido dentro del pequeño orden δx es

$$P_1 = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x_1}{h}\right)^2} \delta x \qquad P_2 = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x_2}{h}\right)^2} (\delta x) \text{ etc.,}$$

y la probabilidad de que estén comprendidos todos en el mismo orden simultáneamente será menor que cada unas de las probabilidades separadas, siendo igual al producto de estas

Así $\quad P = P_1 \times P_2 \times \ldots\ldots$

$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x_1}{h}\right)^2} \delta x \times \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x_2}{h}\right)^2} \delta x \times \ldots\ldots$$

$$= \frac{(\delta x)^n}{h^n \pi^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{h^2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots)}$$

Deseamos hallar para qué valor de h, P es máximo; para ello derivemos P con respecto a h.

$$P = \frac{K}{h^n} \times e^{-\frac{1}{h^2}(\Sigma x_1^2)} \qquad \text{donde } K = \frac{(\delta x)^n}{\pi^{\frac{n}{2}}}$$

$$= u \times v$$

$$u = \frac{K}{h^n} \quad \text{y} \quad \frac{du}{dh} = K \times -nh^{-n-1} = -nKh^{-(n+1)}$$

$$v = e^{-\frac{1}{h^2}(\Sigma x_1^2)} \quad \text{o si} \quad w = \frac{1}{h^2}(\Sigma x_1^2) \qquad v = e^{-w}$$

y por consiguiente $\frac{dw}{dh} = (\Sigma x_1^2) \times -2h^{-3}$

También $\frac{dv}{dh} = \frac{dv}{dw} \times \frac{dw}{dh}$

$$= \frac{de^{-w}}{dw} \times \frac{dw}{dh} = -e^{-\frac{1}{h^2}(\Sigma x_1^2)} \times -\frac{2(\Sigma x_1^2)}{h^3}$$

Entonces

$$\frac{dP}{dh} = v\frac{du}{dh} + u\frac{dv}{dh}$$

$$= \left(e^{-\frac{1}{h_2}(\Sigma x_1^2)} \times -nKh^{-(n+1)}\right) \times \left(\frac{K}{h^n} \times 2c^{-\frac{1}{h^2}(\Sigma x_1^2)} \times \frac{(\Sigma x_1)^2}{h^3}\right)$$

$$= Ke^{-\frac{1}{h^2}(\Sigma x_1^2)}\left[-nh^{-(n+1)} + 2h^{-(n+3)}(\Sigma x_1^2)\right]$$

y $\frac{dP}{dh} = 0$, si $nh^{-(n+1)} = 2h^{-(n+3)}(\Sigma x_1^2)$

es decir, si $h^2 = \frac{2\Sigma x_1^2}{n}$

ó $h = 1{,}414\sqrt{\frac{\Sigma x_1^2}{n}}$

Ahora bien, ya se ha visto que $r = 0{,}47694\,h$

Así que $r = 0{,}47694\sqrt{2}\sqrt{\frac{(\Sigma x_1^2)}{n}}$

$$= 0{,}6745\sqrt{\frac{(\Sigma x_1^2)}{n}}.$$

Hemos dicho antes que la suma de los cuadrados de los errores verdaderos difiere poco de la suma de los cuadrados de los errores residuales siempre que se trate de un gran número de observaciones. cia diferencia entre estas dos sumas puede expresarse con mayor preLsión por la relación.

$$\Sigma x_1^2 = \frac{n}{n - 1} \Sigma \text{ (errores residuales)}^2.$$

Poniendo $\Sigma(r_e^2)$ para representar Σ (errores residuales)²

$$r = 0{,}6745 \sqrt{\frac{(\Sigma r_e^2)}{n - 1}}$$

y
$$r_m = \frac{r}{\sqrt{n}} = 0{,}6745 \sqrt{\frac{(\Sigma r_e^2)}{n(n - 1)}}.$$

Aplicando estos resultados al *Ejemplo* 1, página 432,

$$\Sigma r_e^2 = 5{,}74$$
$$n = 7$$

entonces
$$r = 0{,}6745 \sqrt{\frac{5{,}74}{6}} = 0{,}656$$

$$r_m = 0{,}6745 \sqrt{\frac{5{,}74}{7 \times 6}} = 0{,}2475$$

así como
$$h = \sqrt{\frac{2n\Sigma r_e^2}{(n - 1) \times n}} = \sqrt{\frac{2 \times 5{,}74}{6}} = 1{,}38$$

es decir, h tiene un valor muy alto; lo cual debería esperarse, pues la precisión de lectura a juzgar por los resultados, no es muy grande (uno de los errores es de 2 respecto de 12).

Ejemplo 2. — En una medida con cadena para medir una base topográfica se obtienen con cuatro mediciones los siguientes resultados 867,35, 867,51, 867,28 y 867,62 metros respectivamente. Hallar la longitud más cercana a la verdad y el error probable de esta longitud.

El mejor resultado es la media aritmética de estas medidas es decir,

$$\frac{867{,}35 + 867{,}51 + 867{,}28 + 867{,}62}{4}$$
$$= 867{,}44 \text{ metros}$$

y aunque este es el mejor resultado contiene un error probable.

Error probable de la media,

$$= r_m = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma r_e^2}{n(n-1)}}$$

$$= 0{,}6745 \sqrt{\frac{(-0{,}09)^2 + (0{,}07)^2 + (-0{,}16)^2 + (0{,}18)^2}{4 \times 3}}$$

$$= 0{,}6745 \sqrt{\frac{0{,}071}{12}}$$

$$= 0{,}0517$$

es decir que la medida de la base (867,44) está sujeta a un error de 0,0517 de metro y como este resultado no puede mejorarse sería necesario repetir esta parte del trabajo.

El error probable de cualquier observación será

$$r = 0{,}6745 \sqrt{\frac{0{,}071}{3}} = 0{,}103.$$

Así, que se gana decididamente en precisión aumentando el número de observaciones. (Esto es lo que se hace empleando el método de «repetición» cuando se trabaja en el teodolito).

Es de interés hallar h en este ejemplo

$$h = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}071}{3}} = 0{,}2176$$

y como esta cantidad es pequeña nos afirmamos en nuestra conclusión de que las observaciones estaban bien hechas.

Ejemplo 3. — Los valores medios de los tres ángulos de un triángulo esférico fueron calculados de observaciones, y resultan 75° 40′ 21,6″, 39° 11′ 47,3″ y 65° 7′ 56,2″, estando estos valores sujetos a errores probables de 2,9″, 3,6″ y 4,3″ respectivamente.

Del conocimiento del área del triángulo resulta un exceso esférico de 3,3″. Hacer las compensaciones necesarias en los ángulos para satisfacer esta condición.

El exceso esférico deducido de los valores, de los ángulos resulta

$$= (75^\circ\, 40'\, 21{,}6'' + 39^\circ\, 11'\, 47{,}3'' + 65^\circ\, 7'\, 56{,}2'') - 180^\circ$$

$$= 5{,}1''.$$

Hay una diferencia, pues (5,1 — 3,3), que debe repartirse entre los ángulos en relación con los pesos respectivos; y estos pesos están en la proporción

	$2{,}9^2$	$3{,}6^2$	$4{,}3^2$
o sea	8,41	12,96	18,49

siendo 39,86 la suma de los pesos.

Por tanto, las correcciones que hay que aplicar son $\frac{8{,}41}{39{,}86} \times 1{,}8$, $\frac{12{,}96}{39{,}86} \times 1{,}8$ y $\frac{18{,}49}{39{,}86} \times 1{,}8$ a los respectivos ángulos, debiendo ser todos sustractivos, puesto que los ángulos observados dan un exceso esférico más grande que el que debe ser.

Las correcciones son : 0,380, 0,585 y 0,835; por tanto, los verdaderos ángulos son $(75° 40' 21,6'' — 0,38'')$ $(39° 11' 47,3'' — 0,59'')$ y $(65° 7' 56,2'' — 0,84'')$,

o sea $\underline{75° 40' 21,22'', 39° 11' 46,71'' \text{ y } 65° 7' 55,36''}$.

Ejemplo 4. — Las mediciones de un ángulo en un levantamiento por itinerario fueron hechas por dos observadores con los siguientes resultados:

Lecturas por A	Lecturas por B
76° 50′ 20″	76° 50′ 55″
76° 50′ 50″	76° 50′ 35″
76° 50′ 30″	76° 51′ 15″
76° 51′ 10″	76° 51′ 20″
76° 50′ 30″	76° 51′ 0″
76° 51′ 0″	76° 50′ 45″
76° 50′ 40″	76° 50′ 25″
76° 50′ 30″	76° 50′ 40″

Comparar los dos resultados desde el punto de vista de la precisión y hallar el valor más probable del ángulo.

Debemos hallar primero la media aritmética de cada grupo de observaciones y después sustrayéndola de cada lectura determinaremos los errores residuales.

Media aritmética del grupo A = 76° 50′ 41,25″
» » » » B = 76° 50′ 51,88″.

Puesto que las diferencias son de segundos solamente, prescindiremos de grados y minutos para construir la tabla de errores residuales y sus cuadrados.

A		B	
Error residual	(Error residual)²	Error residual	(Error residual)²
— 21,25	451,4	+ 3,12	9,7
+ 8,75	76,6	— 16,88	284,9
— 11,25	126,6	+ 23,12	534,6
+ 28,75	826,8	+ 28,12	790,7
— 11,25	126,6	+ 8,12	66,0
+ 18,75	351,6	— 6,88	47,3
— 1,25	1,6	— 26,88	722,4
— 11,25	126,6	— 11,88	141,2
Suma 0	2087,8	0	2596,8

En el caso A $\quad r_m = 0{,}6745\sqrt{\frac{2087{,}8}{8\times 7}} = 4{,}119.$

En el caso B $\quad r_m = 0{,}6745\sqrt{\frac{2596{,}8}{8\times 7}} = 4{,}594.$

$$\text{Luego}\ \frac{\text{peso de las observaciones de A}}{\text{peso de las observaciones de B}} = \frac{(4{,}594)^2}{(4{,}119)^2} = \frac{1.244}{1}.$$

Luego las lecturas de A deben de merecer más crédito que las de B; siendo las del primero $1\frac{1}{4}$ veces aproximadamente mejores que las del último.

El valor más probable del ángulo teniendo en cuenta los dos grupos con observaciones se obtendrá calculando la media compensada, es decir la media de las dos medias aritméticas ya halladas, teniendo en cuenta los pesos que acreditan a las lecturas de A, B.

Calculando solamente con los segundos, el valor más probable

$$= \frac{(41{,}25 \times 1{,}244) + (51{,}88 \times 1)}{1 + 1{,}244}$$

$$= \frac{51{,}31 + 51{,}88}{2{,}244} = \frac{103{,}19}{2{,}244} = 46 \text{ segundos.}$$

Luego el valor más probable del ángulo $= \underline{76^\circ\ 50'\ 46''}.$

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS A LA DETERMINACIÓN DE LEYES. — Si se dan valores correspondientes de dos variables x e y y se sabe o se presume que la relación entre ambas es de la forma $y = a + bx$, pueden determinarse los valores de a y b por una representación gráfica (véase tomo I, página 205). Este método requiere la elección cuidadosa de la recta que pasa del mejor modo posible por los puntos representados, y en el caso en que los valores correspondientes se hayan obtenido por experimentación es frecuentemente difícil decidir cual es en realidad la recta más conveniente. La ley más probable puede, sin embargo, hallarse mediante una representación, y con mayor exactitud, mediante un procedimiento fundado en el teorema de los mínimos cuadrados.

La relación o ley más probable es aquella que hace mínima la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores dados y los calculados de y. Así, si $y = a + bx$, es la forma de la ecuación que se desea, los valores más probables de a y b serán aquellos que hagan mínima la suma $\Sigma(y - y_c)^2$, siendo y_c los valores calculados e y los dados.

Pero $y_c = a + bx$, de modo que $\Sigma(y - a - bx)^2$ debe ser mínima. Dependiendo la $\Sigma(y - a - bx)^2$ de a y b, será mínima cuando

$$\frac{\partial}{\partial a}\Sigma(y - a - bx)^2 = 0 \quad \text{(derivada considerando } b \text{ constante)}$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial}{\partial b}\Sigma(y - a - bx)^2 = 0 \quad \text{(derivada considerando } a \text{ constante)}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\Sigma(y - a - bx)^2 = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial\Sigma(y - a - bx)^2}{\partial(y - a - bx)} \times \frac{\partial(y - a - bx)}{\partial a} = 0$$

equivalente a $$2\Sigma(y - a - bx) \times -1 = 0$$

si $$\Sigma y - na - b\Sigma x = 0$$

o sea, por fin, si $$\Sigma y = na + b\Sigma x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en la que n representa el número de pares de valores correspondientes dados, y por consiguiente el número de veces que interviene a en el cálculo de las diferencias.

De modo análogo $$\frac{\partial}{\partial b}\Sigma(y - a - bx)^2 = 0$$

equivale a $$2\Sigma(y - a - bx) \times -x = 0$$

$$\Sigma xy - a\Sigma x - b\Sigma x^2 = 0$$

o sea $$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Los valores de a y b se deducen del sistema de ecuaciones (1) y (2) que pueden escribirse en virtud de los valores dados de x e y.

Ejemplo 5. — En una prueba sobre dos lámparas de filamento metálico conectadas en paralelo, se obtuvieron los siguientes valores correspondientes del voltaje V y de la resistencia R.

V	54	60	65	70	75	80	85	90	105
R	108	109	114	118	123	127	131	134	146

Hallar la ley más probable, de la forma R = $a + b$ V, que relaciona R y V.

En la figura 143 se ha representado R en función de V y se ha trazado una línea recta que se ajusta aparentemente a los puntos obtenidos. Eligiendo dos puntos convenientes de la recta y substituyendo valores en la ecuación, tenemos

$$142 = 100\,b + a$$

$$111 = 60\,b + a$$

de donde $31 = 40\,b \quad \text{y} \quad b = 0{,}775$

así como $a = 142 - 77{,}5 = 64{,}5$

La ecuación obtenida por el gráfico es pues $R = 64{,}5 + 0{,}775\,V$.

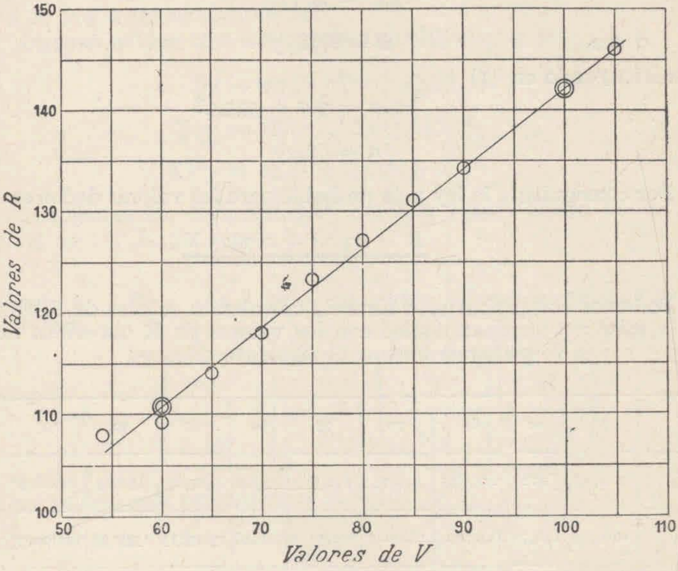


Fig. 143

No tenemos la certeza de que esta sea la ecuación que más se aproxima a los valores dados; procedamos, pues, para obtenerla, como hemos indicado antes. Tabulando valores :

V	54	60	65	70	75	80	85	90	105	$\Sigma V = 684$
R	108	109	114	118	123	127	131	134	146	$\Sigma R = 1110$
VR	5832	6540	7410	8260	9225	10160	11135	12060	15330	$\Sigma VR = 85952$
V^2	2916	3600	4225	4900	5625	6400	7225	8100	11025	$\Sigma V^2 = 54016$

y como $n = 9$, tendremos

$$1110 = 9\,a + 684\,b \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$85952 = 684\,a + 54016\,b \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Multiplicando (1) por 76 y substrayendo

$$85952 = 684\,a + 54016\,b$$

$$84360 = 684\,a + 51984\,b$$

$$1592 = 2032\,b$$

o sea $$b = 0{,}7835$$

y sustituyendo en (1)

$$1110 = 9\,a + 535{,}98$$

$$a = 63{,}78$$

Por consiguiente la ley más probable para los valores dados es

$$\underline{R = 63{,}78 + 0{,}7835\ V}$$

Podemos comprobar esta fórmula calculando valores de R obtenidos de la misma y comparándolos con los valores de R obtenidos de $R = 64{,}5 + 0{,}775\ V$; podemos formar el siguiente cuadro :

V	54	60	65	70	75	80	85	90	105	—
R_g	106,35	111	114,875	118,75	122,625	126,5	130,375	134,25	145,875	—
R_c	106,089	110,79	114,7075	118,625	122,5425	126,46	130,3775	134,295	146,0475	—
$R - R_g$	1,65	—2	—0,875	—0,75	0,375	0,5	0,625	—0,25	0,125	$\Sigma = -0{,}6$
$R - R_c$	1,911	—1,79	—0,7075	—0,625	0,4575	0,54	0,6225	—0,295	—0,0475	$\Sigma = 0{,}066$
$(R - R_g)^2$	2,7225	4	0,7656	0,5625	0,1406	0,25	0,3906	0,0625	0,0156	$\Sigma = 8{,}9099$
$(R - R_c)^2$	3,6519	3,2041	0,5006	0,3906	0,2093	0,2916	0,3875	0,0870	0,0023	$\Sigma = 8{,}7249$

en el que $R_g = 64{,}5 + 0{,}775\ V$ y $R_c = 63{,}78 + 0{,}7835\ V$.

Se vé que $\Sigma\,(R - R_c)$ es menor en valor absoluto que $\Sigma\,(R - R_g)$ y $\Sigma\,(R - R_c)^2$ es menor que $\Sigma\,(R - R_g)^2$; esto indica que la elección de la línea recta más probable se hace con mucha mayor perfección por cálculo, incluso en el caso en que los puntos representados gráficamente resulten bastante alineados.

Cuando y y x están relacionados por una ecuación de la forma $y = a + bx + cx^2$ los puntos representativos han de caer sobre una curva (*) y el ajuste de una curva de este tipo a la serie de puntos representados se hace más difícil que para el caso de una recta (**). Si se desea mayor aproximación es preferible utilizar el método que nos ocupa. El cálculo es parecido.

Para hallar los valores más probables de a, b y c es necesario igualar a cero las derivadas parciales de $\Sigma(y - a - bx - cx^2)^2$ con respecto a a, b y c respectivamente.

Se obtienen así las tres ecuaciones lineales en a b y c

$$\Sigma y = na + b\Sigma x + c\Sigma x^2$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3$$

$$\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$$

cuyos coeficientes Σx, Σx^2, Σx^3, Σx^4, Σy, Σxy y $\Sigma x^2 y$ deben calcularse en virtud de los datos.

Ejemplo 6. — Si $y = a + bx + cx^2$ y los valores correspondientes de x e y son

x	0	2	5	10
y	4	7	6,4	—6

hallar los valores más probables de a, b y c.

Formaremos la tabla

x	0	2	5	10	$\Sigma = 17$
y	4	7	6,4	—6	$\Sigma = 11{,}4$
xy	0	14	32	—60	$\Sigma = -14$
x^2	0	4	25	100	$\Sigma = 129$
x^2y	0	28	160	—600	$\Sigma = -412$
x^3	0	8	125	1000	$\Sigma = 1133$
x^4	0	16	625	10000	$\Sigma = 10641$

de la cual resultan las ecuaciones

(*) Parábola. *(N. del T.)* (**) Véase lo dicho en tomo I, pág. 493. *(N. del T.)*

$$11{,}4 = 4\,a + 17\,b + 129\,c$$

$$-14 = 17\,a + 129\,b + 1133\,c$$

$$-412 = 129\,a + 1133\,b + 10641\,c$$

cuyas soluciones son

$$a = 4{,}0771 \qquad b = 1{,}9794 \qquad c = -0{,}2989$$

la ley más probable para los valores dados es, pues,

$$\underline{y = 4{,}0771 + 1{,}9794\,x - 0{,}2989\,x^2}$$

Ejercicios 26. — Sobre cálculo de errores

1. Un equipo de topografía mide cierta base y halla los resultados siguientes: 604,27 m., 605,35 m., 604,64 m., 604,19 m. Otro equipo mide la misma base y halla: 603,84 m., 603,97 m., 604,69 m., 604,30 m.

Determinar qué serie de medidas es mejor y hallar la longitud más probable de la base.

2. Trazar la curva de probabilidades $y = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{h^2}}$ siendo el valor de $h = 0{,}1414$ y hallar la probabilidad de un error que se halla entre los límites $-0{,}6$ y $+0{,}6$.

3. Los valores siguientes son los resultados de observaciones de la U. S. «Coast and Geodetic Survey» para hallar el azimut de Allen respecto Sears, Texas. Después de la primera lectura sólo aparecen los segundos de las siguientes que es lo que varía: $98^\circ\, 6'\, 41{,}5''$; $42{,}8''$; 43,4; 43,1; 39,7; 42,7; 41,6; 43,3, 40,0; 45,0; 43,3 y 40,7. Hallar la media, el error probable de una observación y el error probable de la media.

4. Hallar la media compensada de las siguientes observaciones: 95,8, 96,9, 97,2, 95,4, 95,7, 97,1, 96,5, 96,7, 97; siendo los errores probables de las mediciones 0,2; 0,4; 0,1; 0,9; 0,7; 1,2; 0,8; 0,3 y 1,5 respectivamente.

5. Hallar la relación más probable entre el momento de torsión T y el ángulo de torsión α en virtud de la siguiente tabla :

α	0	0,34	0,67	1	1,35	1,7	2,05
T	0	1200	2400	3600	4800	6000	7200

6. Calcular el error probable de una simple observación, tomando los valores del ejemplo 1 pág. 432, y empleando la fórmula de Peters

$$r = \frac{0{,}8453}{\sqrt{n(n-1)}}\,\Sigma \text{ (errores residuales con sus signos).}$$

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

EJERCICIOS 1

3. $E = \text{constante} \times \frac{dZ}{dt}$ 4. $V = RI + L\frac{dI}{dt}$

5. $-11{,}03$ cm. por segundo; 1,07 seg a partir del instante inicial

6. 0,336 toneladas **11.** 5,65 **12.** Mitad de Mayo; mitad de Octubre

15. Carga de 0,2 ton. por metro lineal 16. 0,966; $\frac{d \operatorname{sen} \theta}{d\theta} = \cos \theta$

17. 0,42 ton por m. 21. 0,81

EJERCICIOS 2

1. $4x^3$ 2. -128 3. $-2h$ 4. $27x^8$ 5. $-\frac{75}{x^6}$

6. $-\frac{18{,}75}{x^{1{,}23}}$ 7. $32{,}6x^{0{,}72}$ 8. $\frac{0{,}0086}{x^{0{,}84}}$ 9. $31{,}8x^{10{,}68}$ 10. $-\frac{1{,}11}{x^{\frac{11}{9}}}$

11. $-\frac{0{,}982}{x^{2{,}3}}$ 12. $0{,}62x^{8{,}3}$ 13. $45x^2 - 44{,}8x^{1{,}8} + \frac{21}{x^4}$

14. 0 15. $-\frac{0{,}19a^2b^{1{,}75}}{x^{1.5}}$ 16. $-0{,}347$

17. $0{,}71v^{3{,}84} + \frac{0{,}84}{v^{4{,}36}} + \frac{1{,}29}{v^{4{,}44}} - \frac{0{,}525}{v^{5{,}2}} - \frac{12{,}48}{v^{5{,}16}}$ 18. 10,74 19. $0{,}25p$

20. $-4{,}6 \times 10^{-6}$ (*) 21. $1 - a - \frac{2}{3}bP^{-\frac{1}{3}}$ 22. $w\left(\frac{xy}{l} + \frac{xy^2}{l^2} - \frac{y^2}{l} - x\right)$

23. $0{,}289l$ 24. $\frac{w}{yl}(xy + ny^2 - xl)$ 25. $h = \frac{d}{2}\sqrt{1 + \frac{l}{d}}$

26. $-2(p+q)$ 27. 0,49 28. $w\left(\frac{ry}{l} - x\right)$ 29. 9,6

30. -7333.

EJERCICIOS 3

1. Subnormal = 466; subtangente = 1 2. 7,45

3. $y = 0{,}0256x$; (x es la distancia al punto medio); 0,64

(*) El primer miembro de la fórmula $pV = mRT$, con los datos indicados, debe en realidad multiplicarse por 10.000, en cuyo caso el resultado es $-0{,}046$. *(N. del T).*

4. $p = -15{,}65v + 143{,}5$ 5. $M = \frac{W}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)$; $S = -\frac{W}{2}$; $L = 0$

6. $M = \frac{w}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$; $S = -wx$; $L = -w$

7. $M = W(l - x)$; $S = -W$; $L = 0$

8. Subtangente $= \frac{81a^2}{5b^2}$; subnormal $= 5b^2$

9. 3 10. $\frac{x}{2EI}(wl - wx - 2P)$

EJERCICIOS 4

1. $-5e^{-5x}$ 2. $6{,}15e^{4,1x}$ 3. $-\frac{189}{e^{7x}}$ 4. $1{,}423\,(4{,}15)^x$

5. $4{,}33\,(8{,}72)^{2x}$ 6. $9e^{9x} - 35e^{-7x}$ 7. $5{\cdot}44x^{1{,}718}$ 8. $9{,}7\,(2)^x$

9. $10{,}25e^{0{,}25x} - \frac{3{,}04}{e^{0{,}16x}}$ 10. $16e^{5{,}1x} - 47{,}25x^{8{,}45} + 3{,}39\,(3{,}1)^{3x}$

11. $12{,}6e^{4{,}2x}$ 12. $\frac{1}{x}$ 13. $\frac{15}{5x-4}$ 14. $\frac{4{,}343}{x}$

15. $\frac{4ac}{4ax+5b}$ 16. $-1{,}8e^{-0{,}2x} - \frac{1}{x} - \frac{2{,}46}{x^{1{,}43}}$

17. $\frac{1}{x} + \frac{3}{3x - 4{,}7}$ or $\frac{6x - 4{,}7}{x(3x - 4{,}7)}$ [Empléese la regla l.n. AB = l.n. A + l.n. B]

18. $\frac{5}{5x+4} + \frac{3}{3x-2} + \frac{4}{7-4x}$ 19. $3e^{3x} + 8\ \mathrm{senh}\ 2x - \frac{0{,}738}{x}$

20. $\frac{2}{x} - \frac{3{,}5}{x^{1{,}7}} - 1{,}057\,(1{,}8)^x$ 21. 0 22. 1,052 23. $\frac{2{,}84}{0{,}04u - 18}$

24. $\frac{0{,}4343}{t}$ 25. $0{,}2T$ 26. $\frac{C_0R}{L}\,e^{-\frac{Rt}{L}}$ 27. $\frac{1{,}587}{1{,}8u - 7}$

28. $\frac{5}{4}\ \mathrm{senh}\ \frac{x}{4}$; $\frac{p}{q}\cosh\frac{y}{q}$ 29. lrE 30. $\frac{p_1}{p_b}$ 31. b

32. 0 33. 0 34. $\frac{B}{\tau} + C - \frac{D}{\tau^2}$.

EJERCICIOS 5

1. $-5{,}3\cos(4 - 5{,}3x)$ 2. $-16{,}32\ \mathrm{sen}\ 5{,}x$ 3. $0{,}48\sec^2(3x + 9)$

4. $0{,}914\cos(0{,}425x - 1{,}25)$ 5. $-40\ \mathrm{cosec}^2\,x$ 6. $-\frac{5{,}05\ \mathrm{sen}\,(0{,}05 - 0{,}117x)}{\cos^2(0{,}05 - 0{,}117x)}$

7. $gbc\ \mathrm{sen}\,(d - gx)$ 8. $-20\ \mathrm{sen}\ 5x - 14\cos(2x - 5)$

9. $4{,}4 \cos 8{,}8x + 0{,}8 \cos 1{,}6x$ {Empléese la regla: $2 \operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)$} **10.** $-6{,}74 \operatorname{sen} 6.2x - 3{,}04 \operatorname{sen} 2{,}8x$

11. $4{,}52 \{(q-p) \operatorname{sen}(px - qx + 2c) + (p+q) \operatorname{sen}(px + qx)\}$

12. $5 \operatorname{sen} 2x$. {Empléese la regla: $\cos 2A = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A$} **13.** $-0{,}195 \operatorname{sen} 6x$

14. 0 **15.** $5{,}16x^{0{,}72} - \dfrac{15{,}42}{3x - 4{,}1} - 0{,}0273 \cos(4{,}31 - 0{,}195x) + 24{,}93$

16. $0{,}1056 \cos 0{,}015x - 0{,}0529 \operatorname{sen}(6{,}1 - 0{,}23x) + 7{,}4 \sec^2(4x - 0{,}07)$

17. Velocidad $= 37{,}7 \operatorname{sen} 31{,}4t - 56{,}56 \cos 31{,}4t$:
aceleración $= 1184 \cos 31{,}4t + 1777 \operatorname{sen} 31{,}4t$

18. Aceleración $= -0{,}0289s$: mov. armónico simple **19.** -1162

20. Sinusoide (es decir; curva de la derivada segunda)

21. 0 $\left\{ \text{Considérese como una constante la porción } \dfrac{Bl}{8\left(\dfrac{EI\pi^2}{l^2} - F\right)} \right\}$

22. $\dfrac{dE}{dt} = 1500p \cos pt + 300p \cos 3pt + 42p \operatorname{sen} pt - 84p \operatorname{sen} 3pt.$

EJERCICIOS 6

1. $2 \cos 2x.\ e^{\operatorname{sen} 2x}$ **2.** $\dfrac{2}{v}$ **3.** $-2 \operatorname{sen} 2t$ **4.** $24x^2 \cos x^3$

5. $3{,}14(10x + 7) \sec^2(5x^2 + 7x - 2)$ **6.** $3 \text{ l.n. } a \times \cos 3x \times a^{\operatorname{sen} 3x}$

7. $1{,}85x^{0{,}85}.\ e^{x^{1{,}85}}$ **8.** $\dfrac{0{,}4343(7 - 27x^2)}{3 + 7x - 9x^3}$ **9.** $-\dfrac{5 \operatorname{sen}(\text{l.n. } s^5)}{s}$

10. $\operatorname{cosec} x$ **11.** $\dfrac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \phi \cos \alpha}$ **12.** $\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta}$ $\left\{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dx}\right\}$

13. $\left\{\dfrac{d \text{ l.n. } h}{d \text{ l.n. } V} = \text{pendiente de la curva} = \dfrac{d \text{ l.n. h}}{dh} \times \dfrac{dh}{dV} \times \dfrac{dV}{d \text{ l.n. } V}\right\}$

15. 1,08 m. por minuto ; 0,377 m. por minuto **18.** 11,3 gr. ; $1{,}13d$

19. $7 \operatorname{cosec} 7t + 45t^2$ **20.** $\dfrac{Ful}{EA}$ **21.** $56^0\ 19'$ **22.** $53^0\ 7'$ **24.** $\dfrac{144t^2}{6t^3 - 37}$

EJERCICIOS 7

1. $x(2 \operatorname{sen} 3x + 3x \cos 3x)$ **2.** $2x^{2{,}4}(1 + 3{,}4 \text{ l.n. } 5x)$

3. $e^{9x}\left((9 \log 9x + \dfrac{0{,}4343}{x}\right)$

4. $-\dfrac{4}{x^5 \cos(3{,}1 - 2{,}07x)}\left\{\dfrac{2{,}07}{\cos(3{,}1 - 2{,}07x)} + \dfrac{5 \operatorname{sen}(3{,}1 - 2{,}07x)}{x}\right\}$

5. $-\{2{,}575 \text{ sen } (5{,}15x+4)+0{,}625 \text{ sen } (1{,}25x-4)\}$ o bien
$-\{3{,}2 \text{ sen } 3{,}2x \cos (1{,}95x+4)+1{,}95 \cos 3{,}2x \text{ sen } (1{,}95x+4)\}$

6. $\sec^2 2x\{2 \cos (5-3x)+1{,}5 \text{ sen } (5-3x) \text{ sen } 4x\}$ o bien
$3 \text{ tg } 2x \text{ sen } (5-3x)+2 \sec^2 2x \cos (5-3x)$

7. $12{,}8x^{0{,}6}\{\cos (3+8x)+2-5x \text{ sen } (3+8x)\}$

8. $27\,(5)^{3x}\left\{4{,}83 \text{ l.n. } x+\frac{1}{x}\right\}$ **9.** $(1+\text{l.n. } x)\, e^{x \text{ l.n. } x}$ **10.** $5x^2e^{4x}$

11. $30e^{5x+2}\,(5x+4)\,(5x+2)$ **12.** $50{,}4\left(\frac{\text{tg } 0{,}125x}{x}+\frac{\text{l.n. } x}{8 \cos^2 0{,}125x}\right)$

13. 0 **14.** $-5e^{-10t}$ **15.** 0 **16.** $12600 \text{ sen } (14t-0{,}116)$

17. $6t\{5 \text{ sen } (4-0{,}8t)-2t \cos (4-0{,}8t)\}$ **18.** $4t^{2{,}7}\,(3{,}7 \cos 3t-3t \text{ sen } 3t)$.

EJERCICIOS 8

1. $\frac{5x^2\,(3-7x)}{e^{7x-5}}$ **2.** $\frac{7}{\cos (2-7x)}\left\{\frac{1}{7x-2}-\text{l.n. } (2-7x) \text{ tg } (2-7x)\right\}$

3. $\frac{20}{\sqrt{49-16x^2}}$ **4.** $-\frac{b}{\sqrt{d^4-b^2x^2}}$ **5.** $-\frac{5{,}46\,(5)^{2{,}2x}}{e^{9x-4}}$

6. $\frac{1{,}8}{4^{1{,}8x}}(\text{senh } 1{,}8x-1{,}386 \cosh 1{,}8x)$ ó $-\frac{0{,}9}{4^{1{,}8x}}(2{,}386e^{-1{,}8x}+0{,}386e^{1{,}8x})$

7. $\frac{1}{x^2+6x+15}$ **8.** $\frac{63x \text{ arc cos } 3x-21\sqrt{1-9x^2}}{(1-9x^2)}$

9. $\frac{wb\,(ab-2bx+x^2 \cot B)}{2\,(b-x \cot B)^2}$ **10.** $\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

11. $\frac{56x^3-111lx^2+72l^2x-14l^3}{(3l-4x)^2}$

12. $\frac{e^{\text{sen}(1{,}2x+1{,}7)}}{\{\text{l.n. } (8x^2-7x+3)\}^2}\times$
$\left\{1{,}2 \cos (1{,}2x+1{,}7) \text{ l.n. } (8x^2-7x+3)+\frac{7-16x}{8x^2-7x+3}\right\}$

13. $\text{sech}^2 x$ **14.** $\frac{2\,(\text{sen } \theta-\theta \cos \theta)}{\theta^{\frac{3}{2}}\,(\theta-\text{sen } \theta)^{\frac{1}{2}}}$

15. $\frac{1{,}875\,(\theta-\text{sen } \theta)^{\frac{1}{2}}\,(2\,\theta-3\,\theta \cos \theta+\text{sen } \theta)}{\theta^{\frac{3}{2}}}$ **16** $\frac{y^2}{1-y^4}$

17. $r\omega^2\left[\cos \theta+\frac{\text{sen}^4 \theta-2m^2 \text{ sen}^2 \theta+m^2}{(m^2-\text{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}\right]$; $r\omega^2\left(1+\frac{1}{m}\right)$

18. $\frac{d\phi}{dt}=\frac{\omega \cos \theta}{\sqrt{m^2-\text{sen}^2 \theta}}$; $\frac{d^2\phi}{dt^2}=\frac{\omega^2 \text{ sen } \theta\,(1-m^2)}{(m^2-\text{sen}^2)\,\theta^{\frac{3}{2}}}$

19. $\dfrac{w \operatorname{tg}^2 \theta - q}{(p-q) \operatorname{sen}^2 \theta}$; $\pm\sqrt{\dfrac{q}{w}}$ 20. $\dfrac{w}{2(3l-2x)^2}(3l^3+24x^2l-18xl^2-8x^3)$

21. $\dfrac{5}{t^4}\left\{\dfrac{5t}{5t-8}-3 \text{ l.n.} (5t-8)\right\}$.

EJERCICIOS 9

1. $\sqrt{r_1{}^2b^2+r_2{}^2a^2}$ 2. $7{,}52x^5e^{2y}$; $75{,}2e^{2y}x^8$

3. $\dfrac{5e^{4t}}{5p-3}-t^2$; $5{,}2t^{4,2}-2pt+4e^{4t}\text{l.n.} (5p-3)$

4. $10(4-u)(9-4u)(3+8u)^2$ 6. $8(1{,}7+x)(1{,}7+0{,}2x)^3$

7. $-\dfrac{3x^2+18x+31}{(x^2+6x+5)^3}$ 8. $\dfrac{v}{c\tau}\left(\dfrac{dp}{dt}-\dfrac{p}{\tau}\cdot\dfrac{d\tau}{dt}\right)$.

EJERCICIOS 10

1. 750 2. 17,1 3. $\dfrac{l}{2}$; $\dfrac{wl^2}{8}$ 4. $0{,}577l$; $0{,}128\,Wl$

5. 0,5 6. $-2{,}25$; mínimo 7. 0,278 ; máximo

8. máximo para $x=-5$; punto de inflexión para $x=-2$
mínimo para $x=1$ 9. 2 filas de 8

10. lado de la base = 3,652 m. ; altura = 1,826 m. 11. 2,1 ; mínimo

12. $\dfrac{l-y}{2}$ 13. 3,2 cm² ; 9800 pts. por Km. 14. anchura = altura = 2,8m

15. 15,2 nudos ; 956, 948, 957, libras esterlinas 16. $x=0{,}289l$

17. diámetro = 2 × altura = 2,94 m. 18. base = 40 cm. ; altura = 50 cm

19. altura = 3 × anchura 20. $\dfrac{ry}{l}$ 21. 6 22. $0{,}866r$.

23. v ; $\dfrac{v}{3}$; $\dfrac{8}{27}$ 24. $u=0{,}5v$ 25. 135° y 315°

26. $d=l$ 27. $l=2{,}065r$ 28. 20,15 ; $-0{,}45$ 29. 20° 56′

30. altura = 0,81 m. ; base = 0,672 m. 31. $x=0{,}4l$

32. $\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{-2\mu+\sqrt{2(\mu^2+1)}}{1-\mu^2}\right)$ 33. $l=\sqrt{\dfrac{0{,}6f}{K\rho n^2}}$

34. máximo para $x=0$; puntos de inflexión para $x=\pm\dfrac{h}{\sqrt{2}}$

35. $\sqrt{P_1P_3}$ 36. $\sqrt{\dfrac{d}{4}(4l+d)}$ 37. $1+\sqrt{\dfrac{K}{1+K}}$

38. 0,58 $\left(\text{Poner } r = \frac{P_2}{P_1} \text{ y hallar } \frac{dW^2}{dr}\right)$ **39.** 3 unidades **40.** $x = \frac{l-y}{2}$

41. $T_f = \frac{1}{3} T_m$ **42.** máximo para $x = -2$
mínimo para $x = 4$ y para $x = -2,5$
puntos de inflexión para $x = -2,26$ y $1,92$

43. $x = \sqrt{R_1 R_2}$; p_x (máximo) $= \frac{w\omega^2}{8gm}(3m+1)(R_1 - R_2)^2$

44. $d = \sqrt[4]{\frac{D^5}{8fl}}$ **46.** $83^0\ 1'$ y $276^0\ 59'$.

EJERCICIOS 11

1. 0,006 **2.** 2,5% por defecto **3.** 0.0264 **4.** −2,45

5. 2,66 **6.** 0,000412 m. **7.** 0,03 m.; 0,237 m.

8. $1 + x\,\text{l.n.}\,a + \frac{(x\,\text{l.n.}\,a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x\,\text{l.n.}\,a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$

9. 154,9976 **10.** 0,5344 **11.** 3,4936

12. 7,8762 **13.** 1,0358 **14.** 1,3481.

EJERCICIOS 12

2. 152 **5.** 24; 20,5; 6,4

6. 621,000 Kg. × m.; energía potencial = 240,000;
energía cinética = 381,000; 987,000 Kg. × m.

7. 480 **9.** 238,000 **10.** 917 m. **12.** $1,526x^{2,62} + C$

13. $70,15x + C$ **14.** $-\frac{1,5}{x^2} + C$ **15.** $\frac{x^{2-n}}{2-n} + C$ **16.** $1,43e^{0,7x} + C$

17. $0,1x^{10} - 10\,\text{l.n.}\,x + 14x + C$ **18.** $3,32x^{1,04} - 2,5x^2 + C$

19. $1,074x^{3,718} + \frac{1}{4}e^x + C$ **20.** $1,33e^{9x-5} + C$

21. $6,54e^{2,4x-1,2} + C$ **22.** $0,689x + C$ **23.** $\frac{0,71bx^{1,41}}{c} + C$

24. $3,025x^{0,84} - 8,2\,\text{l.n.}\,x - 2,71e^{-2,6x} + 1,13x + C$

25. $-0,0234e^{-10,2x} + C$ **26.** $1,96e^{0,51x} - 1,297x^{0,77} + 0,674x^{3,04} + C$

27. $0,797 \cos\theta\, x^{1,18} - 2,2e^{0,8x-14} + C$ **28.** $\frac{1}{6}v^6 + C$ **29.** $-\frac{1}{3u^3} + C$

30. $35t + C$ **31.** $\frac{1}{5}e^{5s-4} + C$ **32.** $-5,88pv + C$

33. $20,2\,(2)^s + C$ **34.** $-\frac{4}{x} + 2,5x^2 + 4,25x^4 - 8x + C$

35. $0,885\,(3,1)^t + C$ **36.** $-\frac{5,67}{e^{3p}} + C$

37. $\frac{e^{4t}}{4}-\frac{e^{-5t}}{5}-2{,}718t+C$ 38. $16{,}1t^2+C$ 39. $\frac{0{,}175}{x^3}+C$

40. Se escribe la ecuación en la forma $\frac{dp}{p}=-n\frac{dv}{v}$ y luego se integra, resultando $pv^n=C$.

EJERCICIOS 13

1. $-\frac{3}{4}\cos 4x+C$ 2. $1{,}73\operatorname{sen}(3-3x)+C$

3. $-49\operatorname{tg}(3-\frac{1}{7}x)+C$ 4. $1{,}01x^{0{,}988}+1{,}195\operatorname{sen}(0{,}05-0{,}117x)+C$

5. $0{,}1854e^{5{,}4x}-\frac{5}{a}\cos(b+ax)+C$ 6. $9{,}45x\cdot\operatorname{sen}8t+C$

7. $0{,}713\cos 2(2{,}16x-4{,}5)+C$

8. $12{,}85e^{0{,}7x}-\frac{0{,}868}{x^4}+1{,}83\,\text{l.n.}\cos x+C$

9. $-9{,}95\cos\left(\frac{3x-2{,}8}{7}\right)+0{,}022\operatorname{sen}9x-1{,}46x^{2{,}74}+0{,}455\,(3)^{2x+5}+C$

10. $2x-0{,}787\cos\left(\frac{\pi}{4}-3{,}7x\right)+7{,}55\cot\frac{3\pi x}{5}+C$

11. $v=7\cos(7t-0{,}26)+C$; $s=-\frac{a}{49}$

12. $\frac{dx}{d\theta}=4\pi^2n^2r\left(\operatorname{sen}\theta+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2m}\right)+C$; $x=-4\pi^2n^2r\left(\cos\theta+\frac{\cos 2\theta}{4m}\right)+C$

13. $0{,}311\,(5^{2p})-0{,}139\operatorname{sen}(3{,}7-7{,}2p)+C$

14. $-19{,}5\cos 6t-4{,}9\operatorname{sen}6t+C$.

EJERCICIOS 14

1. $0{,}1825$ 2. $0{,}345$ 3. $1{,}7$ 4. $0{,}5585$ 5. $0{,}0626$

6. $1{,}218\times 10^7$ 7. $2{,}62$ 8. $0{,}1589$ 9. $\frac{2I}{p}$

10. $0{,}616\,B_{max}$ 11. $-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(a+b)t}{a+b}+\frac{\cos(a-b)t}{a-b}\right\}$; 0

12. $\frac{v_1r_1^2}{2g}\left\{\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right\}$ 13. $P=\frac{wl}{8}$; $y=\frac{w}{8EI}\left\{\frac{lx^3}{2}-\frac{x^4}{3}-\frac{l^3x}{6}\right\}$

14. $\frac{w}{24EI}\{x^4-4l^3x+3l^4\}$ 15. $\frac{w}{24EI}\left\{\frac{l^2x^2}{2}-x^4-\frac{l^4}{16}\right\}$

16. $\frac{l^5}{30}$ 17. $0{,}2046l^4$ 18. $\frac{1-\operatorname{sen}\phi}{1+\operatorname{sen}\phi}\cdot\frac{wh^2}{2}$

19. 26,24 (Hay que hallar primero los límites); $\frac{2}{3}$ 20. 334 (*)

21. $y=0{,}736x^{3,4}+5$ l.n. $x+3x-3{,}25$ 22. 1,087

23. $\frac{N}{al}(e^{al}-1)$ 24. $\frac{2\pi w V_1^2 (R_1^3-R_2^3)}{3R_1^2}$ 25. $-\frac{l^3}{8}$

26. $H=\frac{wl^2}{96r}$ 27. 133 28. 2,906 29. $\frac{8{,}92}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{w}}$

30. 49,82 31. $\frac{\pi d t \varrho s^3}{12 l \mu}$ 32. 0,8596 $CA_1 lh$ 33. $\frac{\pi f a^4}{8\mu}$

34. $\frac{l}{5}\left[\text{l. n.}\left(\frac{x_1}{x}\right)^2+\frac{\pi y}{x}\right]$ 35. 283,3 unidades cuadradas 36. 1,487

37. 635,8 38. 1,2 segundos 39. $\frac{r_1}{5\pi}$.

EJERCICIOS 15

1. 0,158 l.n. $\frac{C(x-1{,}583)}{(x+1{,}583)}$ 2. $\frac{1}{3\sqrt{6}}$ arc tg $\frac{x+1}{\sqrt{6}}+C$

3. l.n. $(9x^2-18x+17)\frac{1}{18}+C$ 4. 0,1919

5. 605 (Hágase $u=6-h$) 6. $y\sqrt{0{,}75-y^2}+0{,}75$ arc sen $1{,}154\,y+C$

7. 0,106 8. $\frac{1}{3}$ sen $12t+4t+C$ 9. $-\frac{1}{5}\cot 5x+C$

10. $\frac{WR^3}{EI}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}\right)$ ó sea $\frac{0{,}0683\,WR^3}{EI}$

11. $-0{,}8$ l.n. $\cos 5t+C$ (Hágase $u=\cos 5t$) 12. x arc sen $x+\sqrt{1-x^2}+C$

13. $-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C$ 14. $\frac{5e^{3x}}{13}\{3\,\text{sen}\,2x-2\cos 2x\}$

15. arc tg $x+\frac{x}{1+x^2}+C$ (Hágase $u=$ arc tg x) 16. 0,0795

17. $\frac{1}{3}\,\text{sen}^3\,\theta$ 18. $\frac{0{,}0253fQ^2}{h}\left(\frac{1}{d^4}-\frac{1}{(d+kl)^4}\right)$

19. 183 segundos; (Racionalícese el denominador multiplicando ambos términos de la fracción por $\sqrt{h+12}-\sqrt{h}$; intégrese luego haciendo la sustitución $u=h+12$)

20. $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{10}-\frac{t^7}{42}+\ldots\right)$ 21. $\frac{4F}{3\pi r^2}$ (Póngase $u=r^2-y^2$)

22. $\frac{t^3}{8}+\frac{t\sqrt{t^2-4}}{8}-\frac{1}{2}$ arg cosh $\frac{t}{2}+C$ 23. $\frac{35\pi}{256}$ 24. 1,749

25. $\frac{16}{3\ 15}$ 26. 0,01R³

(*) Este es el resultado numérico de la integración indicada, pero para interpretarlo como *trabajo* efectuado durante una expansión, es preciso tener en cuenta que en los datos del problema p viene dada en Kg. cm². y v en m³. Kg. Expresando el resultado en m. se convierte en 334.000 Kilográmetros por Kilo de gas. *(N. del T.)*

27. $(0{,}5x+1{,}25)\sqrt{21-5x-x^2}+13{,}63 \text{ arc sen}\left(\frac{x+2{,}5}{5{,}22}\right)+C$

28. $F=2\pi k\sigma\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}-1\right)$ 29. $t=\frac{L}{2gcz}\left\{\text{l. n.}\frac{(z+V_2)(z-V_1)}{(z-V_2)(z+V_1)}\right\}$

EJERCICIOS 16

1. 0,416 2. 1,718 3. 10,85 4. 0,688 5. 4,5
6. 1,61 7. 15 bujías-metro 8. 0 9. 0,1294
10. 273 11. 93 Kg.

EJERCICIOS 17

1. 14,14 2. 0,6215 3. 2,4 4. 0,1165 5. 0,833 6. 1,194

7. media cuadrática = 0,509 ; $\frac{\text{media cuadrática}}{\text{valor medio}}=1{,}11$

8. $\frac{3{,}32\sqrt{E_1^2+E_3^2}}{3E_1+E^3}$ 9. $\frac{\text{simusoidad}}{\text{triangular}}=0{,}816$ 10. 5,01

11. 9,86 cm. 12. $\frac{3}{256}$ 13. 0,14.

EJERCICIOS 18

1. 1960 m.^{3} aproximadamente 2. 96 Kg. 3. 1070 4. $4\pi r^2$

5. $a=3{,}036$, $b=0{,}1423$; 1617 6. $\frac{K\pi D^2 l^2}{8}$ ó Volúmen $\times \frac{Kl}{2}$

7. 524 (los límites son 5 y 10) 8. 271,6 9. 0,52 Kg.

10. verdadero valor 76,62 ; (*a*) 75,41 ; 1,58 % por defecto ; (*b*) 77,73 ; 1,45 % por exceso ; (*c*) 76,60 ; bastante correcto

11. 60,9 m. 12. 438 Kg.

EJERCICIOS 19

1. El *c.d.g.* está situado a una distancia del vértice igual a $\frac{5}{6}$ de la altura.

2. área = 670 m.^{2} ; *c.d.g.* a 48,2 m. de la proa

3. 53 Kg. ; 0,4 m. 4. 3. m. por debajo de la superficie

5. $\bar{x}=\bar{y}=4{,}25$ cm. (tomando el centro como origen) 6. 771 ; 2,25

7. (0 ; 0,95) 8. *c.d.g.* á 54 mm. de AB 9. 26 mm. 10. 1,75 cm.

11. 2,02 cm. 12. 1,29 cm. 13. 67 mm. es decir $1{,}34t$

14. 51,2 cm. de O 15. 6,68 tons. 16. 148 Kg.; 35,3 cm.
17. 9 unidades 18. 51 cm. 19. 54 mm.
20. (*a*) 473 Kg. (*b*) 175 mm. 21. 37,5 mm. 22. $\frac{2}{5}h$ 23. $\frac{3}{4}h$.

EJERCICIOS 20

1. $0{,}655l$ 2. 17,11 cm.; 0,253 Kg. $\times$ m² (*)

3. El *c.d.g.* dista 1,125 cm. del centro del círculo mayor; radio de giro $=26{,}8$ cm.

4. 16,6 cm.^{4} 5. (*a*) $0{,}408\,h$; (*b*) $0{,}707\,h$

6. $I_{AB}=1930$ cm.^{4}; $k_{AB}=6{,}8$ cm. 7. 72,7 cm. 8. 62,7 cm.^{4}

9. 115 cm.^{4} 10. 38,8 cm.^{4}

11. $0{,}2887d$. (Divídase en fajas elementales por planos perpendiculares al eje y súmense los momentos polares de éstas)

12. $\dfrac{E\times I \text{ de la circular}}{E\times I \text{ de la cuadrada}}=\dfrac{3}{\pi}=0{,}956$ 13. 33,3 cm.^{5}

14. 11613 cm.^{4}; 17,04 cm.

15. $I_{NN}=169{,}4$ cm.^{4}; $k_{NN}=2{,}44$ cm.; $I_{AB}=570$ cm.^{4}; $k_{AB}=4{,}47$ cm.

16. NN dista 3,99 cm. del borde inferior del perfil; $I_{NN}=461$ cm.^{4}; $k_{NN}=3{,}77$ cm.

17. 5,04 cm. 18. 0,617 m.; 0,444; 19. 2,74 cm.

20. (*a*) 228 cm.^{3} (*b*) 1295 cm.^{4} (*c*) 3,75 cm. (*d*) 4,6 cm.

21. 1,43 (**) 22. masa $\times\left(R^2+\dfrac{3r^2}{4}\right)$ 23. $0{,}5b$ 24. 97,78 Kg. $\times$ cm².

EJERCICIOS 21

3. 5,23 4. $p=2r\operatorname{sen}\theta$; la sinusoide 6. 892 7. 5,01.

EJERCICIOS 22

1. $y=1{,}67x^3-2{,}4x-12{,}82$ 2. $s=8{,}05t^2-23{,}1t+14{,}09$

3. $y=Ae^{8x}-\frac{5}{8}$ 4. $y=8{,}35-0{,}149e^{-1{,}044x}$

5. $y=\dfrac{W}{48IE}(6lx^2-4x^3-l^3)$ $\left(\dfrac{dy}{dx}=0 \text{ cuando } x=0;\ y=0 \text{ cuando } x=\dfrac{l}{2}\right)$

(*) Este resultado se refiere a la unidad de masa de 1 Kg. ó dm³. de agua. Pero en el sistema técnico usual en que se toma como unidad de *fuerza* la de un Kg., la unidad de masa es la masa de 9,81 Kg. y el resultado se convierte entonces en 0,0258 unidades masa $\times$ metro². (*N. del T.*)

(**) Tómese como densidad del acero 7,85. (*N. del T.*)

6. $K = \frac{wl^2}{12}$: $y = \frac{w}{24EI}\left(\frac{l^2x^2}{2} - x^4 - \frac{l^4}{16}\right)$

7. $\text{l.n.}\left(\frac{T_2 - t}{T_1 - t}\right) = \frac{\pi r l D}{as(1 + r)}$ 8. $v = \frac{p}{8l\mu}(s^2 - x^2)$

9. $\text{l.n.}\left(\frac{\tau_1 - \theta}{\tau_2 - \theta}\right) = \frac{\pi Q D l}{ws}$ 10. $\frac{\pi Q D l}{ws} = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$

11. $H = \frac{2\pi K l(\tau_1 - \tau_2)}{\text{l.n.}\frac{r_2}{r_1}}$ 12. $\theta = A \text{ sen}\left(\sqrt{\frac{mh}{I}}\, t + c\right)$

13. $p = A + \frac{B}{r^2}$ 14. $p = \frac{b}{x^3} - a$ 16. $\text{l.n.}\frac{z}{C} + \frac{w\omega^2x^2}{2gf} = 0$

17. $y = A_1e^{10x} + A_2e^{7x}$; $y = A_1e^{10x} + A_2e^{7x} + 1$

18. $s = A_1e^{9,33t} + A_2e^{-9,33t}$ 19. $s = A \text{ sen } (9{,}33t + B)$

20. $KR \text{ l.n.}\frac{v_1}{v_2}$ 21. $C = C_0Ae^{-\frac{Rt}{L}}$ 22. $C = \frac{V_0 \text{ sen}\left(qt - \text{arc tg}\frac{Lq}{R}\right)}{\sqrt{R^2 + L^2q^2}}$

23. $x = a \text{ l.n.}\frac{y + a + \sqrt{y^2 + 2ay}}{a}$ o sea $ae^{\frac{x}{a}} = y + a + \sqrt{y^2 + 2ay}$

(Sepárense variables y acúdase a la integral tipo $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$)

24. $x = A \text{ sen}\left(\sqrt{\frac{a}{SM^2}}\, t + c\right) + pS$ 25. $y = \frac{Y \text{ sen}\sqrt{\frac{P}{IE}}\,x}{\text{sen}\sqrt{\frac{P}{IE}}\,\frac{L}{2}}$

26. $nt = \text{l.n.}\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$; 0,1945 27. $x = 0{,}833e^{-7,485t} \text{ sen } 12t$

28. $x = Ae^{-3t} \text{ sen } (6{,}32t + c) + 0{,}026a \text{ sen } (5t - \text{arc tg } 1{,}25)$

29. $V = A_1e^{\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\,x} + A_2e^{-\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\,x}$ 30. $pv^n = C$

31. $\theta = \theta_a + e^{-kt}(\theta_0 - \theta_a)$ 32. $\theta = -53{,}63e^{-1,16t} + 5{,}83e^{-10,66t} + 48{,}8$

33. $y = A_1e^{jax} + A_2e^{-jax} + A_3e^{jbx} + A_4e^{-jbx} - \frac{g}{\omega^2}$

en donde $$a = \sqrt{\frac{F + \sqrt{F^2 + \frac{4\rho}{g}\omega^2 EI}}{2EI}}$$

y $$b = \sqrt{\frac{F - \sqrt{F^2 + \frac{4\rho}{g}\omega^2 EI}}{2EI}}$$

,ó también $y = B_1 e^{cx} + B_2 e^{-cx} + B_3 \operatorname{sen} \phi x + B_4 \cos \phi x - \frac{g}{\omega^2}$

34. $v = \frac{g \cos \alpha}{k}(1 - e^{-kt})$ **35.** $t = \frac{2,5}{a}$ l. n. $\frac{C(5 + v)}{5 - v}$

36. $y = 2e^{10x} + 3e^{20x}$ **37.** $y = (c + x)e^{5x}$

$y = (c - e^{-x})e^{5x}$

EJERCICIOS 23

1. 102 segundos, tomando como coeficiente de contracción 0,62

2. 7,37 **3.** 0,176 m³. **4.** 20,85; 28,65 (Trácese el diagrama de momentos correspondiente a la viga simplemente apoyada y utilícese el método Goodman, v. pág. 357).

5. Determínese primero el tiempo necesario para que el nivel descienda hasta el orificio superior (189 seg.) permaneciendo ambos orificios abiertos; y luego el tiempo complementario (187 seg.) para llevar el agua al nivel inferior asignado, durante el cual solo se vierte por el orificio inferior. Tiempo total = 376 seg. Obsérvese que

$$\frac{1}{\sqrt{h+3,6}+\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{h+3,6}-\sqrt{h}}{3,6}$$

6. 36 seg. **7.** 1,4 **8.** 88 gr.; 4,71 cm. bajo el nivel del agua

9. 226 kg.; 66,5 cm. bajo el nivel **10.** 31800 kgmts.

11. $\frac{0,0253 fQ^2}{K}\left(\frac{1}{d_e^4} - \frac{1}{(d_e + Kl)^4}\right)$ (Hágase $u = d_e + Kx$) **12.** 1,23

13. 80,7 cm.

EJERCICIOS 24

1. $x = 2,31 - 1,231 \cos \theta - 1,55 \operatorname{sen} \theta - 0,16 \cos 2\theta$
$- 0,022 \operatorname{sen} 2\theta - 0,004 \cos 3\theta - 0,04 \operatorname{sen} 3\theta$

2. $A = 1,29$, $\alpha_1 = 0$, $B = 0,14$, $\alpha_2 = \pi$

3. $y = 16,97 + 6,49 \cos x + 0,002 \operatorname{sen} x - 12,66 \cos 2x$
$- 1,46 \operatorname{sen} 2x - 1,75 \cos 3x - 0,7 \operatorname{sen} 3x$

4. $E = 1500 \operatorname{sen} \theta + 100 \operatorname{sen} 3\theta + 42 \cos \theta + 28 \cos 3\theta$

EJERCICIOS 25

1. $B = 39^\circ\, 31'$; $A = 65^\circ\, 51'$; $c = 57^\circ\, 5'$

2. $c = 54^\circ\, 44\frac{1}{2}'$; $b = 34^\circ\, 14'$; $B = 43^\circ\, 32\frac{1}{2}'$

3. $A = 161^\circ\, 8'$; $B = 13^\circ\, 35'$; $C = 9^\circ\, 38'$

4. $A = 76^\circ\ 36'$; $B = 64^\circ\ 8'$; $c = 52^\circ$

5. $B = 35^\circ\ 43'40''$; $A = 61^\circ\ 21'20''$; $a = 43^\circ\ 25'\ 23''$

6. $C = 33^\circ\ 29'$ ó $146^\circ\ 31'$

$a = 103^\circ\ 28'$ ó $55^\circ\ 28'$

$A = 146^\circ\ 58'$ ó $27^\circ\ 30'$ 7. $34^\circ\ 52'$ 8. 342,200

9. Latitud $= 43^\circ\ 54'$; ángulo horario $= 4^\circ\ 31{,}3'$

EJERCICIOS 26

1. La segunda serie es más aproximada que la primera, en la proporción 1,943 á 1; 604,34 m.

2. Muy próxima a 1 3. $98^\circ\ 6'\ 42{,}26''$; $r_m = 0{,}307''$, $r = 1{,}062''$

4. 96,93. 5. $T = 26{,}71 + 3518\alpha$ 6. 0,5479.

TABLAS MATEMÁTICAS

Tabla I. — Tablas trigonométricas

Angulo									
Grados	Radianes	Cuerda	Seno	Tangente	Cotangente	Coseno			
0°	0	000	0	0	∞	1	1.414	1.5708	90°
1	.0175	.017	.0175	.0175	57 2900	.9998	1.402	1.5533	89
2	.0349	.035	.0349	.0349	28.6363	.9994	1.389	1.5359	88
3	.0524	.052	.0523	.0524	19.0811	.9986	1.377	1.5184	87
4	.0698	.070	.0698	.0699	14.3007	.9976	1.364	1.5010	86
5	.0873	.087	.0872	.0875	11.4301	.9962	1.351	1.4835	85
6	.1047	.105	.1045	.1051	9.5144	.9945	1.338	1.4661	84
7	.1222	.122	.1219	.1228	8.1443	.9925	1.325	1.4486	83
8	.1396	.140	.1392	.1405	7.1154	.9903	1.312	1.4312	82
9	.1571	.157	.1564	.1584	6.3138	.9877	1.299	1.4137	81
10	.1745	.174	.1736	.1763	5.6713	.9848	1.286	1 .3963	80
11	.1920	.192	.1908	.1944	5.1446	.9816	1.272	1.3788	79
12	.2094	.209	.2079	.2126	4.7046	.9781	1.259	1.3614	78
13	.2269	.226	.2250	.2309	4.3315	.9744	1.245	1.3439	77
14	.2443	.244	.2419	.2493	4.0108	.9703	1.231	1.3265	76
15	.2618	.261	.2588	.2679	3.7321	.9659	1.218	1.3090	75
16	.2793	.278	.2756	.2867	3.4874	.9613	1.204	1.2915	74
17	.2967	.296	.2924	.3057	3.2709	.9563	1.190	1.2741	73
18	.3142	.313	.3090	.3249	3.0777	.9511	1.176	1.2566	72
19	.3316	.330	.3256	.3443	2.9042	.9455	1.161	1.2392	71
20	.3491	.347	.3420	.3640	2.7475	.9397	1.147	1.2217	70
21	.3665	.364	.3584	.3839	2.6051	.9336	1.133	1.2043	69
22	.3840	.382	.3746	.4040	2.4751	.9272	1.118	1.1868	68
23	.4014	.399	.3907	.4245	2.3559	.9205	1.104	1.1694	67
24	.4189	.416	.4067	.4452	2.2460	.9135	1.089	1.1519	66
25	.4363	.433	.4226	.4663	2.1445	.9063	1.075	1.1345	65
26	.4538	.450	.4384	.4877	2.0503	.8988	1.060	1.1170	64
27	.4712	.467	.4540	.5095	1.9626	.8910	1.045	1.0996	63
28	.4887	.484	.4695	.5317	1.8807	.8829	1.030	1.0821	62
29	.5061	.501	.4848	.5543	1.8040	.8746	1.015	1.0647	61
30	.5236	.518	.5000	.5774	1.7321	.8660	1.000	1.0472	60
31	.5411	.534	.5150	.6009	1.6643	.8572	.985	1.0297	59
32	.5585	.551	.5299	.6249	1.6003	.8480	.970	1.0123	58
33	.5760	.568	.5446	.6494	1.5399	.8387	.954	.9948	57
34	.5934	.585	.5592	.6745	1.4826	.8290	.939	.9774	56
35	.6109	.601	.5736	.7002	1.4281	.8192	.923	9599	55
36	.6283	.618	.5878	.7265	1.3764	.8090	.908	.9425	54
37	.6458	.635	.6018	.7536	1.3270	.7986	.892	.9250	53
38	.6632	.651	.6157	.7813	1.2799	.7880	.877	.9076	52
39	.6807	.668	.6293	.8098	1.2349	.7771	.861	.8901	51
40	.6981	.684	.6428	.8391	1.1918	.7660	.845	.8727	50
41	.7156	.700	.6561	.8693	1.1504	.7547	.829	.8552	49
42	.7330	.717	.6691	.9004	1.1106	.7431	.813	.8378	48
43	.7505	.733	.6820	.9325	1.0724	.7314	.797	.8203	47
44	.7679	.749	.6947	.9657	1.0355	.7193	.781	.8029	46
45°	.7854	.765	.7071	1.0000	1.0000	.7071	.765	.7854	45°
			Coseno	Cotangente	Tangente	Seno	Cuerda	Radianes	Grados
								Angulo	

Tabla II. — Logaritmos

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						4	9	13	17	21	25	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	37
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	15	19	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969					3	7	11	14	18	21	25	28	32
							1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	7	10	13	16	20	23	26	30
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	12	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553							3	6	9	12	15	18	21	24	28
					1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903					3	6	9	11	14	17	20	23	26
							1931	1959	1987	2014	3	5	8	11	14	16	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	5	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	15	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430					3	5	8	10	13	15	18	20	23
							2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	19	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	16	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3882	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4316	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4524	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8

Tabla II. — *Continuación*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	96 0	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

Tabla III. — Antilogaritmos

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1420	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

Tabla III. — *Continuación*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4240	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

Tabla IV. — Logaritmos neperianos, naturales o hiperbólicos

Número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diferencias tabulares								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·1	$\bar{3}$·6974	7927	8797	9598	$\bar{0}339$	$\bar{1}029$	$\bar{1}674$	$\bar{2}280$	$\bar{2}852$	$\bar{3}393$									
0·2	$\bar{2}$·3906	4393	4859	5303	5729	6137	6529	6907	7270	7621									
0·3	·7960	8288	8606	8913	9212	9502	9783	$\bar{0}057$	$\bar{0}324$	$\bar{0}584$									
0·4	$\bar{1}$·0837	1084	1325	1560	1790	2015	2235	2450	2660	2866									
0·5	3068	3267	3461	3651	3838	4022	4202	4379	4553	4724									
0·6	4892	5057	5220	5380	5537	5692	5845	5995	6143	6289									
0·7	6433	6575	6715	6853	6989	7123	7256	7386	7515	7643									
0·8	7769	7893	8015	8137	8256	8375	8492	8607	8722	8835									
0·9	8946	9057	9166	9274	9381	9487	9592	9695	9798	9899									
1·0	0·0000	0100	0198	0296	0392	0488	0583	0677	0770	0862									
1·1	0953	1044	1133	1222	1310	1398	1484	1570	1655	1740	9	17	26	35	44	52	61	70	78
1·2	1823	1906	1989	2070	2151	2231	2311	2390	2469	2546	8	16	24	32	40	48	56	64	72
1·3	2624	2700	2776	2852	2927	3001	3075	3148	3221	3293	7	15	22	30	37	45	52	59	67
1·4	3365	3436	3507	3577	3646	3716	3784	3853	3920	3988	7	14	21	28	35	41	48	55	62
1·5	4055	4121	4187	4253	4318	4383	4447	4511	4574	4637	6	13	19	26	32	39	45	52	58
1·6	4700	4762	4824	4886	4947	5008	5068	5128	5188	5247	6	12	18	24	30	36	42	48	55
1·7	5306	5365	5423	5481	5539	5596	5653	5710	5766	5822	6	11	17	24	29	34	40	46	52
1·8	5878	5933	5988	6043	6098	6152	6206	6259	6313	6366	5	11	16	22	27	32	38	43	49
1·9	6419	6471	6523	6575	6627	6678	6729	6780	6831	6881	5	10	15	20	26	31	36	41	46
2·0	6931	6981	7031	7080	7129	7178	7227	7275	7324	7372	5	10	15	20	24	29	34	39	44
2·1	7419	7467	7514	7561	7608	7655	7701	7747	7793	7839	5	9	14	19	23	28	33	37	42
2·2	7885	7930	7975	8020	8065	8109	8154	8198	8242	8286	4	9	13	18	22	27	31	36	40
2·3	8329	8372	8416	8459	8502	8544	8587	8629	8671	8713	4	9	13	17	21	26	30	34	38
2·4	8755	8796	8838	8879	8920	8961	9002	9042	9083	9123	4	8	12	16	20	24	29	33	37
2·5	9163	9203	9243	9282	9322	9361	9400	9439	9478	9517	4	8	12	16	20	24	27	31	35
2·6	9555	9594	9632	9670	9708	9746	9783	9821	9858	9895	4	8	11	15	19	23	26	30	34
2·7	9933	9969	$\bar{0}006$	$\bar{0}043$	$\bar{0}080$	$\bar{0}116$	$\bar{0}152$	$\bar{0}188$	$\bar{0}225$	$\bar{0}260$	4	7	11	15	18	22	26	29	33
2·8	1·0296	0332	0367	0403	0438	0473	0508	0543	0578	0613	4	7	11	14	18	21	25	28	32
2·9	0647	0682	0716	0750	0784	0818	0852	0886	0919	0953	3	7	10	14	17	20	24	27	31
3·0	0986	1019	1053	1086	1119	1151	1184	1217	1249	1282	3	7	10	13	16	20	23	26	30
3·1	1314	1346	1378	1410	1442	1474	1506	1537	1569	1600	3	6	10	13	16	19	22	25	29
3·2	1632	1663	1694	1725	1756	1787	1817	1848	1878	1909	3	6	9	12	15	18	21	25	28
3·3	1939	1969	2000	2030	2060	2090	2119	2149	2179	2208	3	6	9	12	15	18	21	24	27
3·4	2238	2267	2296	2326	2355	2384	2413	2442	2470	2499	3	6	9	12	14	17	20	23	26
3·5	2528	2556	2585	2613	2641	2669	2698	2726	2754	2782	3	6	8	11	14	17	20	22	25
3·6	2809	2837	2865	2892	2920	2947	2975	3002	3029	3056	3	5	8	11	14	16	19	22	25
3·7	3083	3110	3137	3164	3191	3218	3244	3271	3297	3324	3	5	8	11	13	16	19	21	24
3·8	3350	3376	3403	3429	3455	3481	3507	3533	3558	3584	3	5	8	10	13	16	18	21	23
3·9	3610	3635	3661	3686	3712	3737	3762	3788	3813	3838	3	5	8	10	13	15	18	20	23
4·0	3863	3888	3913	3938	3962	3987	4012	4036	4061	4085	2	5	7	10	12	15	17	20	22
4·1	4110	4134	4159	4183	4207	4231	4255	4279	4303	4327	2	5	7	10	12	14	17	19	22
4·2	4351	4375	4398	4422	4446	4469	4493	4516	4540	4563	2	5	7	9	12	14	16	19	21
4·3	4586	4609	4633	4656	4679	4702	4725	4748	4770	4793	2	5	7	9	11	14	16	18	21
4·4	4816	4839	4861	4884	4907	4929	4951	4974	4996	5019	2	4	7	9	11	13	16	18	20
4·5	5041	5063	5085	5107	5129	5151	5173	5195	5217	5239	2	4	7	9	11	13	15	18	20
4·6	5261	5282	5304	5326	5347	5369	5390	5412	5433	5454	2	4	6	9	11	13	15	17	19
4·7	5476	5497	5518	5539	5560	5581	5602	5623	5644	5665	2	4	6	8	11	13	15	17	19
4·8	5686	5707	5728	5748	5769	5790	5810	5831	5851	5872	2	4	6	8	10	12	14	16	19
4·9	5892	5913	5933	5953	5974	5994	6014	6034	6054	6074	2	4	6	8	10	12	14	16	18
5·0	6094	6114	6134	6154	6174	6194	6214	6233	6253	6273	2	4	6	8	10	12	14	16	18

Tabla IV. — *Continuación*

Número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diferencias tabulares 1	2	3	4	5	6	7	8	9
5·1	1·6292	6312	6332	6351	6371	6390	6409	6429	6448	6467	2	4	6	8	10	12	14	16	18
5·2	6487	6506	6525	6544	6563	6582	6601	6620	6639	6658	2	4	6	8	10	12	13	15	17
5·3	6677	6696	6715	6734	6752	6771	6790	6808	6827	6846	2	4	6	8	9	11	13	15	17
5·4	6840	6883	6901	6919	6938	6956	6975	6993	7011	7029	2	4	6	7	9	11	13	15	17
5·5	7048	7066	7084	7102	7120	7138	7156	7174	7192	7210	2	4	5	7	9	11	13	14	16
5·6	7228	7246	7263	7281	7299	7317	7334	7352	7370	7387	2	4	5	7	9	11	12	14	16
5·7	7405	7422	7440	7457	7475	7492	7509	7527	7544	7561	2	4	5	7	9	10	12	14	16
5·8	7579	7596	7613	7630	7647	7664	7682	7699	7716	7733	2	3	5	7	9	10	12	14	15
5·9	7750	7767	7783	7800	7817	7834	7851	7868	7884	7901	2	3	5	7	8	10	12	13	15
6·0	7918	7934	7951	7968	7984	8001	8017	8034	8050	8067	2	3	5	7	8	10	12	13	15
6·1	8083	8099	8116	8132	8148	8165	8181	8197	8213	8229	2	3	5	7	8	10	11	13	15
6·2	8246	8262	8278	8294	8310	8326	8342	8358	8374	8390	2	3	5	6	8	10	11	13	14
6·3	8406	8421	8437	8453	8469	8485	8500	8516	8532	8547	2	3	5	6	8	10	11	13	14
6·4	8563	8579	8594	8610	8625	8641	8656	8672	8687	8703	2	3	5	6	8	9	11	12	14
6·5	8718	8733	8749	8764	8779	8795	8810	8825	8840	8856	2	3	5	6	8	9	11	12	14
6·6	8871	8886	8901	8916	8931	8946	8961	8976	8991	9006	2	3	5	6	8	9	11	12	14
6·7	9021	9036	9051	9066	9081	9095	9110	9125	9140	9155	2	3	4	6	7	9	10	12	13
6·8	9169	9184	9199	9213	9228	9243	9257	9272	9286	9301	2	3	4	6	7	9	10	12	13
6·9	9315	9330	9344	9359	9373	9387	9402	9416	9431	9445	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7·0	9459	9473	9488	9502	9516	9530	9545	9559	9573	9587	1	3	4	6	7	9	10	11	13
7·1	9601	9615	9629	9643	9657	9671	9685	9699	9713	9727	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7·2	9741	9755	9769	9782	9796	9810	9824	9838	9851	9865	1	3	4	6	7	8	10	11	12
7·3	9879	9892	9906	9920	9933	9947	9961	9974	9988	0001	1	3	4	5	7	8	10	11	12
7·4	2·0015	0028	0042	0055	0069	0082	0096	0109	0122	0136	1	3	4	5	7	8	9	11	12
7·5	0149	0162	0176	0189	0202	0216	0229	0242	0255	0268	1	3	4	5	7	8	9	11	12
7·6	0281	0295	0308	0321	0334	0347	0360	0373	0386	0399	1	3	4	5	7	8	9	11	12
7·7	0412	0425	0438	0451	0464	0477	0490	0503	0516	0528	1	3	4	5	7	8	9	10	12
7·8	0541	0554	0567	0580	0592	0605	0618	0631	0643	0656	1	3	4	5	6	8	9	10	11
7·9	0669	0681	0694	0707	0719	0732	0744	0757	0769	0782	1	3	4	5	6	8	9	10	11
8·0	0794	0807	0819	0832	0844	0857	0869	0882	0894	0906	1	3	4	5	6	7	9	10	11
8·1	0919	0931	0943	0956	0968	0980	0992	1005	1017	1029	1	3	4	5	6	7	9	10	11
8·2	1041	1054	1066	1078	1090	1102	1114	1126	1138	1151	1	2	4	5	6	7	9	10	11
8·3	1163	1175	1187	1199	1211	1223	1235	1247	1259	1270	1	2	4	5	6	7	8	10	11
8·4	1282	1294	1306	1318	1330	1342	1354	1365	1377	1389	1	2	4	5	6	7	8	9	11
8·5	1401	1412	1424	1436	1448	1459	1471	1483	1494	1506	1	2	4	5	6	7	8	9	11
8·6	1518	1529	1541	1552	1564	1576	1587	1599	1610	1622	1	2	4	5	6	7	8	9	10
8·7	1633	1645	1656	1668	1679	1691	1702	1713	1725	1736	1	2	3	5	6	7	8	9	10
8·8	1748	1759	1770	1782	1793	1804	1816	1827	1838	1849	1	2	3	5	6	7	8	9	10
8·9	1861	1872	1883	1894	1905	1917	1928	1939	1950	1961	1	2	3	5	6	7	8	9	10
9·0	1972	1983	1994	2006	2017	2028	2039	2050	2061	2072	1	2	3	4	6	7	8	9	10
9·1	2083	2094	2105	2116	2127	2138	2149	2159	2170	2181	1	2	3	4	6	7	8	9	10
9·2	2192	2203	2214	2225	2235	2246	2257	2268	2279	2289	1	2	3	4	5	7	8	9	10
9·3	2300	2311	2322	2332	2343	2354	2365	2375	2386	2397	1	2	3	4	5	6	8	9	10
9·4	2407	2418	2428	2439	2450	2460	2471	2481	2492	2502	1	2	3	4	5	6	7	9	10
9·5	2513	2523	2534	2544	2555	2565	2576	2586	2597	2607	1	2	3	4	5	6	7	8	10
9·6	2618	2628	2638	2649	2659	2670	2680	2690	2701	2711	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9·7	2721	2732	2742	2752	2762	2773	2783	2793	2803	2814	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9·8	2824	2834	2844	2854	2865	2875	2885	2895	2905	2915	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9·9	2925	2935	2946	2956	2966	2976	2986	2996	3006	3016	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	2·3026																		

Tabla V. — Senos naturales

Grados	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Diferencias tabulares 1′	2′	3′	4′	5′
0	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	·0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	·0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	·0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	14
5	·0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	·1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	·1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	·1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	·1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14
10	·1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	11	14
11	·1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	·2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	·2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	·2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	·2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	·2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	·2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	·3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	·3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	·3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	·3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	·3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14
23	·3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14
24	·4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	·4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	·4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	·4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	·4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	·4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	·5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	·5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	·5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	·5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	·5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	·5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	9	12
36	·5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	·6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	·6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	·6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	·6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	·6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	·6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	·6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	·6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10
45	·7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10

Tabla V. — *Continuación*

Grados	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Diferencias tabulares 1′	2′	3′	4′	5′
45	·7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	·7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	·7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	·7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	·7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	·7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	·7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	·7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	·7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	·8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	·8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	·8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	·8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	·8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	·8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	·8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	·8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	·8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	·8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	·8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	·9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	·9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	·9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	·9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	·9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	·9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	·9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	·9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	3	4
73	·9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	·9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	·9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	·9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	·9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	·9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	·9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	·9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	·9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	·9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	·9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	·9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2
85	·9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	·9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	·9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	·9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	·9998	9999	9999	9999	9999	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	0	0	0	0	0
90	1·000														

Tabla VI. — Cosenos naturales

Grados	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Diferencias tabulares				
	0°·0	0°·1	0°·2	0°·3	0°·4	0°·5	0°·6	0°·7	0°·8	0°·9	1′	2′	3′	4′	5′
0	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	·9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
1	·9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996	9996	9995	9995	0	0	0	0	0
2	·9994	9993	9993	9992	9991	9990	9990	9989	9988	9987	0	0	0	1	1
3	·9986	9985	9984	9983	9982	9981	9980	9979	9978	9977	0	0	1	1	1
4	·9976	9974	9973	9972	9971	9969	9968	9966	9965	9963	0	0	1	1	1
5	·9962	9960	9959	9957	9956	9954	9952	9951	9949	9947	0	1	1	1	2
6	·9945	9943	9942	9940	9938	9936	9934	9932	9930	9928	0	1	1	1	2
7	·9925	9923	9921	9919	9917	9914	9912	9910	9907	9905	0	1	1	2	2
8	·9903	9900	9898	9895	9893	9890	9888	9885	9882	9880	0	1	1	2	2
9	·9877	9874	9871	9869	9866	9863	9860	9857	9854	9851	0	1	1	2	2
10	·9848	9845	9842	9839	9836	9833	9829	9826	9823	9820	1	1	2	2	3
11	·9816	9813	9810	9806	9803	9799	9796	9792	9789	9785	1	1	2	2	3
12	·9781	9778	9774	9770	9767	9763	9759	9755	9751	9748	1	1	2	3	3
13	·9744	9740	9736	9732	9728	9724	9720	9715	9711	9707	1	1	2	3	3
14	·9703	9699	9694	9690	9686	9681	9677	9673	9668	9664	1	1	2	3	4
15	·9659	9655	9650	9646	9641	9636	9632	9627	9622	9617	1	2	2	3	4
16	·9613	9608	9603	9598	9593	9588	9583	9578	9573	9568	1	2	2	3	4
17	·9563	9558	9553	9548	9542	9537	9532	9527	9521	9516	1	2	3	3	4
18	·9511	9505	9500	9494	9489	9483	9478	9472	9466	9461	1	2	3	4	5
19	·9455	9449	9444	9438	9432	9426	9421	9415	9409	9403	1	2	3	4	5
20	·9397	9391	9385	9379	9373	9367	9361	9354	9348	9342	1	2	3	4	5
21	·9336	9330	9323	9317	9311	9304	9298	9291	9285	9278	1	2	3	4	5
22	·9272	9265	9259	9252	9245	9239	9232	9225	9219	9212	1	2	3	4	6
23	·9205	9198	9191	9184	9178	9171	9164	9157	9150	9143	1	2	3	5	6
24	·9135	·9128	9121	9114	9107	9100	9092	9085	9078	9070	1	2	4	5	6
25	·9063	9056	9048	9041	9033	9026	9018	9011	9003	8996	1	3	4	5	6
26	·8988	8980	8973	8965	8957	8949	8942	8934	8926	8918	1	3	4	5	6
27	·8910	8902	8894	8886	8878	8870	8862	8854	9846	8838	1	3	4	5	7
28	·8829	8821	8813	8805	8796	8788	8780	8771	8763	8755	1	3	4	6	7
29	·8746	8738	8729	8721	8712	8704	8695	8686	8678	8669	1	3	4	6	7
30	·8660	8652	8643	8634	8625	8616	8607	8599	8590	8581	1	3	4	6	7
31	·8572	8563	8554	8545	8536	8526	8517	8508	8499	8490	2	3	5	6	8
32	·8480	8471	8462	8453	8443	8434	8425	8415	8406	8396	2	3	5	6	8
33	·8387	8377	8368	8358	8348	8339	8329	8320	8310	8300	2	3	5	6	8
34	·8290	8281	8271	8261	8251	8241	8231	8221	8211	8202	2	3	5	7	8
35	·8192	8181	8171	8161	8151	8141	8131	8121	8111	8100	2	3	5	7	8
36	·8090	8080	8070	8059	8049	8039	8028	8018	8007	7997	2	3	5	7	9
37	·7986	7976	7965	7955	7944	7934	7923	7912	7902	7891	2	4	5	7	9
38	·7880	7869	7859	7848	7837	7826	7815	7804	7793	7782	2	4	5	7	9
39	·7771	7760	7749	7738	7727	7716	7705	7694	7683	7672	2	4	6	7	9
40	·7660	7649	7638	7627	7615	7604	7593	7581	7570	7559	2	4	6	8	9
41	·7547	7536	7524	7513	7501	7490	7478	7466	7455	7443	2	4	6	8	10
42	·7431	7420	7408	7396	7385	7373	7361	7349	7337	7325	2	4	6	8	10
43	·7314	7302	7290	7278	7266	7254	7242	7230	7218	7206	2	4	6	8	10
44	·7193	7181	7169	7157	7145	7133	7120	7108	7096	7083	2	4	6	8	10
45	·7071	7059	7046	7034	7022	7009	6997	6984	6972	6959	2	4	6	8	10

Tabla VI. — *Continuación*

Grados	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Diferencias tabulares				
	0°·0	0°·1	0°·2	0°·3	0°·4	0°·5	0°·6	0°·7	0°·8	0°·9	1′	2′	3′	4′	5′
45	·7071	7059	7046	7034	7022	7009	6997	6984	6972	6959	2	4	6	8	10
46	·6947	6934	6921	6909	6896	6884	6871	6858	6845	6833	2	4	6	8	11
47	·6820	6807	6794	6782	6769	6756	6743	6730	6717	6704	2	4	6	9	11
48	·6691	6678	6665	6652	6639	6626	6613	6600	6587	6574	2	4	7	9	11
49	·6561	6547	6534	6521	6508	6494	6481	6468	6455	6441	2	4	7	9	11
50	·6428	6414	6401	6388	6374	6361	6347	6334	6320	6307	2	4	7	9	11
51	·6293	6280	6266	6252	6239	6225	6211	6198	6184	6170	2	5	7	9	11
52	·6157	6143	6129	6115	6101	6088	6074	6060	6046	6032	2	5	7	9	12
53	·6018	6004	5990	5976	5962	5948	5934	5920	5906	5892	2	5	7	9	12
54	·5878	5864	5850	5835	5821	5807	5793	5779	5764	5750	2	5	7	9	12
55	·5736	5721	5707	5693	5678	5664	5650	5635	5621	5606	2	5	7	10	12
56	·5592	5577	5563	5548	5534	5519	5505	5490	5476	5461	2	5	7	10	12
57	·5446	5432	5417	5402	5388	5373	5358	5344	5329	5314	2	5	7	10	12
58	·5299	5284	5270	5255	5240	5225	5210	5195	5180	5165	2	5	7	10	12
59	·5150	5135	5120	5105	5090	5075	5060	5045	5030	5015	3	5	8	10	13
60	·5000	4985	4970	4955	4939	4924	4909	4894	4879	4863	3	5	8	10	13
61	·4848	4833	4818	4802	4787	4772	4756	4741	4726	4710	3	5	8	10	13
62	·4695	4679	4664	4648	4633	4617	4602	4586	4571	4555	3	5	8	10	13
63	·4540	4524	4509	4493	4478	4462	4446	4431	4415	4399	3	5	8	10	13
64	·4384	4368	4352	4337	4321	4305	4289	4274	4258	4242	3	5	8	11	13
65	·4226	4210	4195	4179	4163	4147	4131	4115	4099	4083	3	5	8	11	13
66	·4067	4051	4035	4019	4003	3987	3971	3955	3939	3923	3	5	8	11	14
67	·3907	3891	3875	3859	3843	3827	3811	3795	3778	3762	3	5	8	11	14
68	·3746	3730	3714	3697	3681	3665	3649	3633	3616	3600	3	5	8	11	14
69	·3584	3567	3551	3535	3518	3502	3486	3469	3453	3437	3	5	8	11	14
70	·3420	3404	3387	3371	3355	3338	3322	3305	3289	3272	3	5	8	11	14
71	·3256	3239	3223	3206	3190	3173	3156	3140	3123	3107	3	6	8	11	14
72	·3090	3074	3057	3040	3024	3007	2990	2974	2957	2940	3	6	8	11	14
73	·2924	2907	2890	2874	2857	2840	2823	2807	2790	2773	3	6	8	11	14
74	·2756	2740	2723	2706	2689	2672	2656	2639	2622	2605	3	6	8	11	14
75	·2588	2571	2554	2538	2521	2504	2487	2470	2453	2436	3	6	8	11	14
76	·2419	2402	2385	2368	2351	2334	2317	2300	2284	2267	3	6	8	11	14
77	·2250	2233	2215	2198	2181	2164	2147	2130	2113	2096	3	6	9	11	14
78	·2079	2062	2045	2028	2011	1994	1977	1959	1942	1925	3	6	9	11	14
79	·1908	1891	1874	1857	1840	1822	1805	1788	1771	1754	3	6	9	11	14
80	·1736	1719	1702	1685	1668	1650	1633	1616	1599	1582	3	6	9	12	14
81	·1564	1547	1530	1513	1495	1478	1461	1444	1426	1409	3	6	9	12	14
82	·1392	1374	1357	1340	1323	1305	1288	1271	1253	1236	3	6	9	12	14
83	·1219	1201	1184	1167	1149	1132	1115	1097	1080	1063	3	6	9	12	14
84	·1045	1028	1011	0993	0976	0958	0941	0924	0906	0889	3	6	9	12	14
85	·0872	0854	0837	0819	0802	0785	0767	0750	0732	0715	3	6	9	12	14
86	·0698	0680	0663	0645	0628	0610	0593	0576	0558	0541	3	6	9	12	15
87	·0523	0506	0488	0471	0454	0436	0419	0401	0384	0366	3	6	9	12	15
88	·0349	0332	0314	0297	0279	0262	0244	0227	0209	0192	3	6	9	12	15
89	·0175	0157	0140	0122	0105	0087	0070	0052	0035	0017	3	6	9	12	15
90	·0000														

Tabla VII. — Tangentes naturales

Grados	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Diferencias tabulares 1	2′	3′	4′	5′
0	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	·0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	·0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	·0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	·0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	·1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	·1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	·1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	·1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	·1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	·1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	·2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	·2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	·2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	·2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	·2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	·3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	·3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	·3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20	·3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	·3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	·4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	·4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	·4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	·4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	·4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	·5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	·5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	·5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	·5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	·6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	·6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	·6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	·6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	·7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	·7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	·7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	·7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	·8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	·8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	·8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	·9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	·9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	·9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29
45	1·0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30

Tabla VII. — *Continuación*

Grados	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Diferencias tabulares				
	0°·0	0°·1	0°·2	0°·3	0°·4	0°·5	0°·6	0°·7	0°·8	0°·9	1′	2′	3′	4′	5′
45	1·0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1·0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1·0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1·1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1·1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1·1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1·2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1·2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1·3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1·3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1·4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1·4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1·5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1·6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1·6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60	1·7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1·8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1·8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
63	1·9626	9711	9797	9883	9970	$\bar{0}057$	$\bar{0}145$	$\bar{0}233$	$\bar{0}323$	$\bar{0}413$	15	29	44	58	73
64	2·0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
65	2·1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
66	2·2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18	37	55	73	92
67	2·3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20	40	60	79	99
68	2·4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22	43	65	87	108
69	2·6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24	47	71	95	119
70	2·7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26	52	78	104	131
71	2·9042	9208	9375	9544	9714	9887	$\bar{0}061$	$\bar{0}237$	$\bar{0}415$	$\bar{0}595$	29	58	87	116	145
72	3·0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32	64	96	129	161
73	3·2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36	72	108	144	180
74	3·4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41	81	122	163	204
75	3·7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	46	93	139	186	232
76	4·0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972					
77	4·3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646					
78	4·7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	$\bar{0}045$	$\bar{0}504$	$\bar{0}970$					
79	5·1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140					
80	5·6713	7297	7894	8502	9124	9758	$\bar{0}405$	$\bar{1}066$	$\bar{1}742$	$\bar{2}432$					
81	6·3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	$\bar{0}264$					
82	7·1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	$\bar{0}285$					
83	8·1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	$\bar{0}579$	$\bar{2}052$	$\bar{3}572$					
84	9·514	9·677	9·845	10·02	10·20	10·39	10·58	10·78	10·99	11·20					
85	11·43	11·66	11·91	12·16	12·43	12·71	13·00	13·30	13·62	13·95					
86	14·30	14·67	15·06	15·46	15·89	16·35	16·83	17·34	17·89	18·46					
87	19·08	19·74	20·45	21·20	22·02	22·90	23·86	24·90	26·03	27·27					
88	28·64	30·14	31·82	33·69	35·80	38·19	40·92	44·07	47·74	52·08					
89	57·29	63·66	71·62	81·85	95·49	114·6	143·2	191·0	286·5	573·0					
90	∞														

No se ponen las diferencias tabulares por su poca aproximación puesto que las diferencias reales varían muy deprisa.

Tabla VIII. — Logaritmos de senos

Grados	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Diferencias tabulares 1′	2′	3′	4′	5′
0	− ∞	$\bar{3}$·2419	5429	7190	8439	9408	$\bar{0}$200	$\bar{0}$870	$\bar{1}$450	$\bar{1}$961					
1	$\bar{2}$·2419	2832	3210	3558	3880	4179	4459	4723	4971	5206					
2	·5428	5640	5842	6035	6220	6397	6567	6731	6889	7041					
3	·7188	7330	7468	7602	7731	7857	7979	8098	8213	8326					
4	·8436	8543	8647	8749	8849	8946	9042	9135	9226	9315	16	32	48	64	80
5	·9403	9489	9573	9655	9736	9816	9894	9970	$\bar{0}$046	$\bar{0}$120	13	26	39	52	65
6	$\bar{1}$·0192	0264	0334	0403	0472	0539	0605	0670	0734	0797	11	22	33	44	55
7	·0859	0920	0981	1040	1099	1157	1214	1271	1326	1381	10	19	29	38	48
8	·1436	1489	1542	1594	1646	1697	1747	1797	1847	1895	8	17	25	34	42
9	·1943	1991	2038	2085	2131	2176	2221	2266	2310	2353	8	15	23	30	38
10	·2397	2439	2482	2524	2565	2606	2647	2687	2727	2767	7	14	20	27	34
11	·2806	2845	2883	2921	2959	2997	3034	3070	3107	3143	6	12	19	25	31
12	·3179	3214	3250	3284	3319	3353	3387	3421	3455	3488	6	11	17	23	28
13	·3521	3554	3586	3618	3650	3682	3713	3745	3775	3806	5	11	16	21	26
14	·3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015	4044	4073	4102	5	10	15	20	24
15	·4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	4350	4377	5	9	14	18	23
16	·4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634	4	9	13	17	21
17	·4659	4684	4709	4733	4757	4781	4805	4829	4853	4876	4	8	12	16	20
18	·4900	4923	4946	4969	4992	5015	5037	5060	5082	5104	4	8	11	15	19
19	·5126	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320	4	7	11	14	18
20	·5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	5523	3	7	10	14	17
21	·5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717	3	6	10	13	16
22	·5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865	5883	5901	3	6	9	12	15
23	·5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6076	3	6	9	12	15
24	·6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243	3	6	8	11	14
25	·6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6371	6387	6403	3	5	8	11	13
26	·6418	6434	6449	6465	6480	6495	6510	6526	6541	6556	3	5	8	10	13
27	·6570	6585	6600	6615	6629	6644	6659	6673	6687	6702	2	5	7	10	12
28	·6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842	2	5	7	9	12
29	·6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	6950	6963	6977	2	4	7	9	11
30	·6990	7003	7016	7029	7042	7055	7068	7080	7093	7106	2	4	6	9	11
31	·7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205	7218	7230	2	4	6	8	10
32	·7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349	2	4	6	8	10
33	·7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464	2	4	6	8	10
34	·7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575	2	4	6	7	9
35	·7586	7597	7607	7618	7629	7640	7650	7661	7671	7682	2	4	5	7	9
36	·7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785	2	3	5	7	9
37	·7795	7805	7815	7825	7835	7844	7854	7864	7874	7884	2	3	5	7	8
38	·7893	7903	7913	7922	7932	7941	7951	7960	7970	7979	2	3	5	6	8
39	·7989	7998	8007	8017	8026	8035	8044	8053	8063	8072	2	3	5	6	8
40	·8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	1	3	4	6	7
41	·8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	1	3	4	6	7
42	·8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	1	3	4	6	7
43	·8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	1	3	4	5	7
44	·8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	1	3	4	5	6
45	·8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	1	2	4	5	6

Tabla VIII. — *Continuación*

Grados.	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Diferencias tabulares				
	0°·0	0°·1	0°·2	0°·3	0°·4	0°·5	0°·6	0°·7	0°·8	0°·9	1′	2′	3′	4′	5′
45	$\bar{1}$·8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	1	2	4	5	6
46	·8569	8577	8584	8591	8598	8606	9613	8620	8627	8634	1	2	4	5	6
47	·8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	1	2	3	5	6
48	·8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	1	2	3	4	6
49	·8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	1	2	3	4	5
50	·8843	8849	8855	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899	1	2	3	4	5
51	·8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959	1	2	3	4	5
52	·8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018	1	2	3	4	5
53	·9023	9029	9035	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074	1	2	3	4	5
54	·9080	9085	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128	1	2	3	4	5
55	·9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181	1	2	3	3	4
56	·9186	9191	9196	9201	9206	·9211	9216	9221	9226	9231	1	2	3	3	4
57	·9236	9241	9246	9251	9255	9260	9265	9270	9275	9279	1	2	2	3	4
58	·9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326	1	2	2	3	4
59	·9331	9335	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371	1	1	2	3	4
60	·9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	1	1	2	3	4
61	·9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455	1	1	2	3	3
62	·9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495	1	1	2	3	3
63	·9499	9503	9507	9510	9514	9518	9522	9525	9529	9533	1	1	2	3	3
64	·9537	9540	9544	9548	9551	9555	9558	9562	9566	9569	1	1	2	2	3
65	·9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	1	1	2	2	3
66	·9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	1	1	2	2	3
67	·9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9662	9666	9669	1	1	2	2	3
68	·9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699	0	1	1	2	2
69	·9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	0	1	1	2	2
70	·9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	0	1	1	2	2
71	·9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9780	0	1	1	2	2
72	·9782	9785	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804	0	1	1	2	2
73	·9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826	0	1	1	2	2
74	·9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847	0	1	1	1	2
75	·9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867	0	1	1	1	2
76	·9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885	0	1	1	1	2
77	·9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902	0	1	1	1	1
78	·9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918	0	1	1	1	1
79	·9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932	0	0	1	1	1
80	·9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945	0	0	1	1	1
81	·9946	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	0	0	1	1	1
82	·9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967	0	0	1	1	1
83	·9968	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975	0	0	0	1	1
84	·9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983	0	0	0	0	1
85	·9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989	0	0	0	0	0
86	·9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994	0	0	0	0	0
87	·9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9997	9997	0	0	0	0	0
88	·9997	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
89	·9999	9999	$\bar{0}000$	$\bar{0}000$	$\bar{0}000$	$\bar{0}000$	$\bar{0}000$	$\bar{0}000$	$\bar{0}000$	$\bar{0}000$	0	0	0	0	0
90	0·0000														

Tabla IX. — Logaritmos de cosenos

Grados	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Diferencias tabulares				
	0°·0	0°·1	0°·2	0°·3	0°·4	0°·5	0°·6	0°·7	0°·8	0°·9	1′	2′	3′	4′	5′
0	0·0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	$\bar{9}$999	0	0	0	0	0
1	$\bar{1}$·9999	9999	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9998	9998	0	0	0	0	0
2	·9997	9997	9997	9996	9996	9996	9996	9995	9995	9994	0	0	0	0	0
3	·9994	9994	9993	9993	9992	9992	9991	9991	9990	9990	0	0	0	0	0
4	·9989	9989	9988	9988	9987	9987	9986	9985	9985	9984	0	0	0	0	0
5	·9983	9983	9982	9981	9981	9980	9979	9978	9978	9977	0	0	0	0	1
6	·9976	9975	9975	9974	9973	9972	9971	9970	9969	9968	0	0	0	1	1
7	·9968	9967	9966	9965	9964	9963	9962	9961	9960	9959	0	0	1	1	1
8	·9958	9956	9955	9954	9953	9952	9951	9950	9949	9947	0	0	1	1	1
9	·9946	9945	9944	9943	9941	9940	9939	9937	9936	9935	0	0	1	1	1
10	·9934	9932	9931	9929	9928	9927	9925	9924	9922	9921	0	0	1	1	1
11	·9919	9918	9916	9915	9913	9912	9910	9909	9907	9906	0	1	1	1	1
12	·9904	9902	9901	9899	9897	9896	9894	9892	9891	9889	0	1	1	1	1
13	·9887	9885	9884	9882	9880	9878	9876	9875	9873	9871	0	1	1	1	2
14	·9869	9867	9865	9863	9861	9859	9857	9855	9853	9851	0	1	1	1	2
15	·9849	9847	9845	9843	9841	9839	9837	9835	9833	9831	0	1	1	1	2
16	·9828	9826	9824	9822	9820	9817	9815	9813	9811	9808	0	1	1	2	2
17	·9806	9804	9801	9799	9797	9794	9792	9789	9787	9785	0	1	1	2	2
18	·9782	9780	9777	9775	9772	9770	9767	9764	9762	9759	0	1	1	2	2
19	·9757	9754	9751	9749	9746	9743	9741	9738	9735	9733	0	1	1	2	2
20	·9730	9727	9724	9722	9719	9716	9713	9710	9707	9704	0	1	1	2	2
21	·9702	9699	9696	9693	9690	9687	9684	9681	9678	9675	0	1	1	2	2
22	·9672	9669	9666	9662	9659	9656	9653	9650	9647	9643	1	1	2	2	3
23	·9640	9637	9634	9631	9627	9624	9621	9617	9614	9611	1	1	2	2	3
24	·9607	9604	9601	9597	9594	9590	9587	9583	9580	9576	1	1	2	2	3
25	·9573	9569	9566	9562	9558	9555	9551	9548	9544	9540	1	1	2	2	3
26	·9537	9533	9529	9525	9522	9518	9514	9510	9507	9503	1	1	2	3	3
27	·9499	9495	9491	9487	9483	9479	9475	9471	9467	9463	1	1	2	3	3
28	·9459	9455	9451	9447	9443	9439	9435	9431	9427	9422	1	1	2	3	3
29	·9418	9414	9410	9406	9401	9397	9393	9388	9384	9380	1	1	2	3	4
30	·9375	9371	9367	9362	9358	9353	9349	9344	9340	9335	1	1	2	3	4
31	·9331	9326	9322	9317	9312	9308	9303	9298	9294	9289	1	2	2	3	4
32	·9284	9279	9275	9270	9265	9260	9255	9251	9246	9241	1	2	2	3	4
33	·9236	9231	9226	9221	9216	9211	9206	9201	9196	9191	1	2	3	3	4
34	·9186	9181	9175	9170	9165	9160	9155	9149	9144	9139	1	2	3	3	4
35	·9134	9128	9123	9118	9112	9107	9101	9096	9091	9085	1	2	3	4	5
36	·9080	9074	9069	9063	9057	9052	9046	9041	9035	9029	1	2	3	4	5
37	·9023	9018	9012	9006	9000	8995	8989	8983	8977	8971	1	2	3	4	5
38	·8965	8959	8953	8947	8941	8935	8929	8923	8917	8911	1	2	3	4	5
39	·8905	8899	8893	8887	8880	8874	8868	8862	8855	8849	1	2	3	4	5
40	·8843	8836	8830	8823	8817	8810	8804	8797	8791	8784	1	2	3	4	5
41	·8778	8771	8765	8758	8751	8745	8738	8731	8724	8718	1	2	3	5	6
42	·8711	8704	8697	8690	8683	8676	8669	8662	8655	8648	1	2	3	5	6
43	·8641	8634	8627	8620	8613	8606	8598	8591	8584	8577	1	2	4	5	6
44	·8569	8562	8555	8547	8540	8532	8525	8517	8510	8502	1	2	4	5	6
45	·8495	8487	8480	8472	8464	8457	8449	8441	8433	8426	1	3	4	5	6

Tabla IX. — *Continuación*

Grados	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Diferencias tabulares				
	0°·0	0°·1	0°·2	0°·3	0°·4	0°·5	0°·6	0°·7	0°·8	0°·9	1′	2′	3′	4′	5′
45	$\bar{1}$·8495	8487	8480	8472	8464	8457	8449	8441	8433	8426	1	3	4	5	6
46	·8418	8410	8402	8394	9386	8378	8370	8362	8354	·8346	1	3	4	5	7
47	·8338	8330	8322	8313	8305	8297	8289	8280	8272	8264	1	3	4	6	7
48	·8255	8247	8238	8230	8221	8213	8204	8195	8187	8178	1	3	4	6	7
49	·8169	8161	8152	8143	8134	8125	8117	8108	8099	8090	1	3	4	6	7
50	·8081	8072	8063	8053	8044	8035	8026	8017	8007	7998	2	3	5	6	8
51	·7989	7979	7970	7960	7951	7941	7932	7922	7913	7903	2	3	5	6	8
52	·7893	7884	7874	7864	7854	7844	7835	7825	7815	7805	2	3	5	7	8
53	·7795	7785	7774	7764	7754	7744	7734	7723	7713	7703	2	3	5	7	9
54	·7692	7682	7671	7661	7650	7640	7629	7618	7607	7597	2	4	5	7	9
55	·7586	7575	7564	7553	7542	7531	7520	7509	7498	7487	2	4	6	7	9
56	·7476	7464	7453	7442	7430	7419	7407	7396	7384	7373	2	4	6	8	10
57	·7361	7349	7338	7326	7314	7302	7290	7278	7266	7254	2	4	6	8	10
58	·7242	7230	7218	7205	7193	7181	7168	7156	7144	7131	2	4	6	8	10
59	·7118	7106	7093	7080	7068	7055	7042	7029	7016	7003	2	4	6	9	11
60	·6990	6977	6963	6950	6937	6923	6910	6896	6883	6869	2	4	7	9	11
61	·6856	6842	6828	6814	6801	6787	6773	6759	6744	6730	2	5	7	9	12
62	·6716	6702	6687	6673	6659	6644	6629	6615	6600	6585	2	5	7	10	21
63	·6570	6556	6541	6526	6510	6495	6480	6465	6449	6434	3	5	8	10	13
64	·6418	6403	6387	6371	6356	6340	6324	6308	6292	6276	3	5	8	11	13
65	·6259	6243	6227	6210	6194	6177	6161	6144	6127	6110	3	6	8	11	14
66	·6093	6076	6059	6042	6024	6007	5990	5972	5954	5937	3	6	9	12	15
67	·5919	5901	5883	5865	5847	5828	5810	5792	5773	5754	3	6	9	12	15
68	·5736	5717	5698	5679	5660	5641	5621	5602	5583	5563	3	6	10	13	16
69	·5543	5523	5504	5484	5463	5443	5423	5402	5382	5361	3	7	10	14	17
70	·5341	5320	5299	5278	5256	5235	5213	5192	5170	5148	4	7	11	14	18
71	·5162	5104	5082	5060	5037	5015	4992	4969	4946	4923	4	8	11	15	19
72	·4900	4876	4853	4829	4805	4781	4757	4733	4709	4684	4	8	12	16	20
73	·4659	4634	4609	4584	4559	4533	4508	4482	4456	4430	4	9	13	17	21
74	·4403	4377	4350	4323	4296	4269	4242	4214	4186	4158	5	9	14	18	23
75	·4130	4102	4073	4044	4015	3986	3957	3927	3897	3867	5	10	15	20	24
76	·3837	3806	3775	3745	3713	3682	3650	3618	3586	3554	5	11	16	21	26
77	·3521	3488	3455	3421	3387	3353	3319	3284	3250	3214	6	11	17	23	28
78	·3179	3143	3107	3070	3034	2997	2959	2921	2883	2845	6	12	19	25	31
79	·2806	2767	2727	2687	2647	2606	2565	2524	2482	2439	7	14	20	27	34
80	·2397	2353	2310	2266	2221	2176	2131	2085	2038	1991	8	15	23	30	38
81	·1943	1895	1847	1797	1747	1697	1646	1594	1542	1489	8	17	25	34	42
82	·1436	1381	1326	1271	1214	1157	1099	1040	0981	0920	10	19	29	38	48
83	·0859	0797	0734	0670	0605	0539	0472	0403	0334	0264	11	22	33	44	55
84	·0192	0120	0046	$\bar{9}$970	$\bar{9}$894	$\bar{9}$816	$\bar{9}$736	$\bar{9}$655	$\bar{9}$573	$\bar{9}$489	13	26	39	52	65
85	$\bar{2}$·9403	9315	9226	9135	9042	8946	8849	8749	8647	8543	16	32	48	64	80
86	·8436	8326	8213	8098	7979	7857	7731	7602	7468	7330					
87	·7188	7041	6889	6731	6567	6397	6220	6035	5842	5640					
88	·5428	5206	4971	4723	4459	4179	$\bar{3}$880	$\bar{3}$558	$\bar{3}$210	2832					
89	·2419	1961	1450	0870	0200	$\bar{9}$408	$\bar{8}$439	$\bar{7}$190	$\bar{5}$429	$\bar{2}$419					
90	$-\infty$														

Tabla X. — Logaritmos de tangentes

Grados	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Diferencias tabulares 1′	2′	3′	4′	5′
0	$-\infty$	$\bar{3}$·2419	5429	7190	8439	9409	$\bar{0}$200	$\bar{0}$870	$\bar{1}$450	$\bar{1}$962					
1	$\bar{2}$·2419	2833	3211	3559	3881	4181	4461	4725	4973	5208					
2	·5431	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6736	6894	7046					
3	·7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336					
4	·8446	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	16	32	48	64	81
5	·9420	9506	9591	9674	9756	9836	9915	9992	$\bar{0}$068	$\bar{0}$143	13	26	40	53	66
6	$\bar{1}$·0216	0289	0360	0430	0499	0567	0633	0699	0764	0828	11	22	34	45	56
7	·0891	0954	1015	1076	1135	1194	1252	1310	1367	1423	10	20	29	39	49
8	·1478	1533	1587	1640	1693	1745	1797	1848	1898	1948	9	17	26	35	43
9	·1997	2046	2094	2142	2189	2236	2282	2328	2374	2419	8	16	23	31	39
10	·2463	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	7	14	21	28	35
11	·2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	6	13	19	26	32
12	·3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	6	12	18	24	30
13	·3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	6	11	17	22	28
14	·3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	5	10	16	21	26
15	·4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4546	5	10	15	20	25
16	·4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	5	9	14	19	23
17	·4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	4	9	13	18	22
18	·5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	4	8	13	17	21
19	·5370	5394	5419	5443	5467	5491	5516	5539	5563	5587	4	8	12	16	20
20	·5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	4	8	12	15	19
21	·5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	4	7	11	15	19
22	·6064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	4	7	11	14	18
23	·6279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	3	7	10	14	17
24	·6486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	3	7	10	13	17
25	·6687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	3	7	10	13	16
26	·6882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	3	6	9	13	16
27	·7072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	3	6	9	12	15
28	·7257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	3	6	9	12	15
29	·7438	7455	7473	7491	7509	7526	7544	7562	7579	7597	3	6	9	12	15
30	·7614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7736	7753	7771	3	6	9	12	14
31	·7788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	3	6	9	11	14
32	·7958	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	3	6	8	11	14
33	·8125	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	3	5	8	11	14
34	·8290	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	3	5	8	11	14
35	·8452	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	3	5	8	11	13
36	·8613	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	3	5	8	11	13
37	·8771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	3	5	8	10	13
38	·8928	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	3	5	8	10	13
39	·9084	9099	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	3	5	8	10	13
40	·9238	9254	9269	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	3	5	8	10	13
41	·9392	9407	9422	9438	9453	9468	9483	9499	9514	9529	3	5	8	10	13
42	·9544	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	3	5	8	10	13
43	·9697	9712	9727	9742	9757	9773	9788	9803	9818	9833	3	5	8	10	13
44	·9848	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	3	5	8	10	13
45	0·0000	0015	0030	0045	0061	0076	0091	0106	0121	0136	3	5	8	10	13

Tabla X. — *Continuación*

Grados	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Diferencias tabulares 1′	2′	3′	4′	5′
45	·0000	0015	0030	0045	0061	0076	0091	0106	0121	0136	3	5	8	10	13
46	·0152	0167	0182	0197	0212	0228	0243	0258	0273	0288	3	5	8	10	13
47	·0303	0319	0334	0349	0364	0379	0395	0410	0425	0440	3	5	8	10	13
48	·0456	0471	0486	0501	0517	0532	0547	0562	0578	0593	3	5	8	10	13
49	·0608	0624	0639	0654	0670	0685	0700	0716	0731	0746	3	5	8	10	13
50	·0762	0777	0793	0808	0824	0839	0854	0870	0885	0901	3	5	8	10	13
51	·0916	0932	0947	0963	0978	0994	1010	1025	1041	1056	3	5	8	10	13
52	·1072	1088	1103	1119	1135	1150	1166	1182	1197	1213	3	5	8	10	13
53	·1229	1245	1260	1276	1292	1308	1324	1340	1356	1371	3	5	8	11	13
54	·1387	1403	1419	1435	1451	1467	1483	1490	1516	1532	3	5	8	11	13
55	·1548	1564	1580	1596	1612	1629	1645	1661	1677	1694	3	5	8	11	14
56	·1710	1726	1743	1759	1776	1792	1809	1825	1842	1858	3	5	8	11	14
57	·1875	1891	1908	1925	1941	1958	1975	1992	2008	2025	3	6	8	11	14
58	·2042	2059	2076	2093	2110	2127	2144	2161	2178	2195	3	6	9	11	14
59	·2212	2229	2247	2264	2281	2299	2316	2333	2351	2368	3	6	9	12	14
60	·2386	2403	2421	2438	2456	2474	2491	2509	2527	2545	3	6	9	12	15
61	·2562	2580	2598	2616	2634	2652	2670	2689	2707	2725	3	6	9	12	15
62	·2743	2762	2780	2798	2817	2835	2854	2872	2891	2910	3	6	9	12	15
63	·2928	2947	2966	2985	3004	3023	3042	3061	3080	3099	3	6	9	13	16
64	·3118	3137	3157	3176	3196	3215	3235	3254	3274	3294	3	6	10	13	16
65	·3313	3333	3353	3373	3393	3413	3433	3453	3473	3494	3	7	10	13	17
66	·3514	3535	3555	3576	3596	3617	3638	3659	3679	3700	3	7	10	14	17
67	·3721	3743	3764	3785	3806	3828	3849	3871	3892	3914	4	7	11	14	18
68	·3936	3958	3980	4002	4024	4046	4068	4091	4113	4136	4	7	11	15	19
69	·4158	4181	4204	4227	4250	4273	4296	4319	4342	4366	4	8	12	15	19
70	·4389	4413	4437	4461	4484	4509	4533	4557	4581	4606	4	8	12	16	20
71	·4630	4655	4680	4705	4730	4755	4780	4805	4831	4857	4	8	13	17	21
72	·4882	4908	4934	4960	4986	5013	5039	5066	5093	5120	4	9	13	18	22
73	·5147	5174	5201	5229	5256	5284	5312	5340	5368	5397	5	9	14	19	23
74	·5425	5454	5483	5512	5541	5570	5600	5629	5659	5689	5	10	15	20	25
75	·5719	5750	5780	5811	5842	5873	5905	5936	5968	6000	5	10	16	21	26
76	·6032	6065	6097	6130	6163	6196	6230	6264	6298	6332	6	11	17	22	28
77	·6366	6401	6436	6471	6507	6542	6578	6615	6651	6688	6	12	18	24	30
78	·6725	6763	6800	6838	6877	6915	6954	6994	7033	7073	6	13	19	26	32
79	·7113	.7154	7195	7236	7278	7320	7363	7406	7449	7493	7	14	21	28	35
80	·7537	·7581	7626	7672	7718	7764	7811	7858	7906	7954	8	16	23	31	39
81	·8003	8052	8102	8152	8203	8255	8307	8360	8413	8467	9	17	26	35	43
82	·8522	8577	8633	8690	8748	8806	8865	8924	8985	9046	10	20	29	39	49
83	·9109	9172	9236	9301	9367	9433	9501	9570	9640	9711	11	22	34	45	56
84	·9784	9857	9932	$\bar{0}008$	$\bar{0}085$	$\bar{0}164$	$\bar{0}244$	$\bar{0}326$	$\bar{0}409$	$\bar{0}494$	13	26	40	53	66
85	1·0580	0669	0759	0850	0944	1040	1138	1238	1341	1446	16	32	48	64	81
86	1·1554	1664	1777	1893	2012	2135	2261	2391	2525	2663					
87	1·2806	2954	3106	3264	3429	3599	3777	3962	4155	4357					
88	1·4569	4792	5027	5275	5539	5819	6119	6441	6789	7167					
89	1·7581	8038	8550	9130	9800	$\bar{0}591$	$\bar{1}561$	$\bar{2}810$	$\bar{4}571$	$\bar{7}581$					
90	∞														

Tablas XI. — Funciones exponenciales e hiperbólicas

x	e^x	e^{-x}	cosh x $=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	senh x $=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	tangh x $=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
·1	1·1052	·9048	1·0050	·1002	·0997
·2	1·2214	·8187	1·0201	·2013	·1974
·3	1·3499	·7408	1·0453	·3045	·2913
·4	1·4918	·6703	1·0811	·4108	·3799
·5	1·6487	·6065	1·1276	·5211	·4621
·6	1·8221	·5488	1·1855	·6367	·5370
·7	2·0138	·4966	1·2552	·7586	·6044
·8	2·2255	·4493	1·3374	·8881	·6640
·9	2·4596	·4066	1·4331	1·0265	·7163
1·0	2·7183	·3679	1·5431	1·1752	·7616
1·1	3·0042	·3329	1·6685	1·3357	·8005
1·2	3·3201	·3012	1·8107	1·5095	·8337
1·3	3·6693	·2725	1·9709	1·6984	·8617
1·4	4·0552	·2466	2·1509	1·9043	·8854
1·5	4·4817	·2231	2·3524	2·1293	·9051
1·6	4·9530	·2019	2·5775	2·3756	·9217
1·7	5·4739	·1827	2·8283	2·6456	·9354
1·8	6·0496	·1653	3·1075	2·9422	·9468
1·9	6·6859	·1496	3·4177	3·2682	·9563
2·0	7·3891	·1353	3·7622	3·6269	·9640
2·1	8·1662	·1225	4·1443	4·0219	·9704
2·2	9·0251	·1108	4·5679	4·4571	·9758
2·3	9·9742	·1003	5·0372	4·9370	·9801
2·4	11·0232	·0907	5·5570	5·4662	·9837
2·5	12·1825	·0821	6·1323	6·0502	·9866
2·6	13·4638	·0743	6·7690	6·6947	·9890
2·7	14·8797	·0672	7·4735	7·4063	·9910
2·8	16·4446	·0608	8·2527	8·1919	·9926
2·9	18·1741	·0550	9·1146	9·0596	·9940
3·0	20·0855	·0498	10·068	10·018	·9951
3·1	22·1980	·0450	11·122	11·076	·9959
3·2	24·5325	·0408	12·287	12·246	·9967
3·3	27·1126	·0369	13·575	13·538	·9973
3·4	29·9641	·0334	14·999	14·965	·9978
3·5	33·1155	·0302	16·573	16·543	·9982
3·6	36·5982	·0273	18·313	18·285	·9985
3·7	40·4473	·0247	20·236	20·211	·9988
3·8	44·7012	·0224	22·362	22·339	·9990
3·9	49·4024	·0202	24·711	24·691	·9992
4·0	54·5982	·0183	27·308	27·290	·9993
4·1	60·3403	·0166	30·178	30·162	·9995
4·2	66·6863	·0150	33·351	33·336	·9996
4·3	73·6998	·0136	36·857	36·843	·9996
4·4	81·4509	·0123	40·732	40·719	·9997
4·5	90·0171	·0111	45·014	45·003	·9997
4·6	99·4843	·0101	49·747	49·737	·9998
4·7	109·9472	·0091	54·978	54·969	·9998
4·8	121·5104	·0082	60·759	60·751	·9999
4·9	134·2898	·0074	67·149	67·141	·9999
5·0	148·4132	·0067	74·210	74·203	·9999

Ejercicios varios

1. Resolver la integral indefinida $\int \frac{dx}{x^2 - 12x}$. $\left[\text{l. n. C} \left(\frac{x - 12}{x} \right)^{\frac{1}{12}} \right]$

2. El flujo por centímetro de longitud entre dos conductores paralelos, cada uno de los cuales conduce la misma corriente I, viene dado por $\int_r^d \left(\frac{2\mathrm{I}}{x} + \frac{2\mathrm{I}}{d - x} \right) dx$, siendo r el radio de los hilos y d la distancia entre sus centros. Hallar el valor del flujo para $d = 30$, $r = 0{,}6$ e $\mathrm{I} = 0{,}25$. [3,91]

3. Calcular la integral definida $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1440 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta$, que da la potencia absorbida por un rectificador de válvula termoiónica. [720]

4. Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = 4y^2$.

[*Advertencia.* La ecuación $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}y^n$ (ecuación de Bernouilli) se convierte en una forma típica sustituyendo $z = y^{-(n-1)}$. En este caso, $n = 2$ y $z = y^{-1}$, y por lo tanto $\frac{dy}{dx} = \frac{dz^{-1}}{dz} \times \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z^2} \times \frac{dz}{dx}$, con lo cual la ecuación se transforma en $-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} + \frac{3}{zx} = \frac{4}{z^2}$, la cual debe resolverse para z]. $\left[y = \frac{1}{2x + \mathrm{C}x^3} \right]$

5. Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{8e^x}{y}$.

$\left[y^2 = 16e^x - \frac{16e^x}{x} + \frac{\mathrm{C}}{x} \right]$

6. Un desplazamiento s viene dado en función del tiempo por la ecuación

$$s = 10 \operatorname{sen} 8t + 4 \cos 8t$$

Hallar un valor de t para el cual la velocidad es cero y hallar también la aceleración cuando $t = 0{,}05$. [0,1488 ; — 484,9]

7. La fuerza magnética H de una aguja debida a la corriente que pasa por una bobina que dista r de la aguja es dada por la expresión

$$\mathrm{H} = \frac{2\pi ni \cos^3 \theta}{\mathrm{R}}, \text{ siendo } \theta = \text{arc. tg. } \frac{r}{\mathrm{R}}.$$

Siendo $l = 2\pi n\mathrm{R}$, exprésese H en función de l, i, r y θ, y hallar luego el valor de θ para el cual H es máximo. Hallar además el valor de este máximo. $\left[54^\circ 44' ; \frac{2li}{3\sqrt{3}r^2} \right]$

8. Siendo $i = \mathrm{I} \operatorname{sen} \omega t + \mathrm{A}e^{-\frac{t}{\mathrm{RK}}}$, hallar el valor de $\mathrm{RK}\frac{di}{dt} + i$.

$[\mathrm{I}\sqrt{1 + \mathrm{R}^2\mathrm{K}^2\omega^2} \operatorname{sen} (\omega t + \text{arc. tg. } \mathrm{RK}\omega)]$

ÍNDICE ALFABÉTICO

PUBLICACIONES TÉCNICAS LABOR

Matemáticas para químicos, por el Prof. José M.ª Iñíguez Almech, Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. 501 páginas y 96 grabados. *(2.ª edición).*

Preparación matemática para la Química física, por el Prof. F. Daniels, de la Universidad de Wisconsin. Traducción de la 1.ª edición norteamericana. 328 páginas, 65 figuras, numerosas tablas y 555 problemas y ejercicios numéricos.

Cálculo de probabilidades, por el Dr. Otto Knopf, Profesor de la Universidad de Jena. Traducción de la 1.ª edición alemana. 230 páginas y 10 figuras.

Geometría analítica, por el Dr. Robert Fricke, Profesor de la Escuela Técnica Superior de Brunsviga. Traducción de la 1.ª edición alemana. 200 páginas y 96 grabados. *(2.ª edición).*

Cristalografía, por el Prof. A. K. Boldyrev, Profesor de la Escuela de Minas y Director del Instituto Fedorov de Leningrado. Traducción de la 1.ª edición rusa. 432 páginas, 354 figuras y 2 láminas en color.

Mecánica para ingenieros, por Arthur Morley, Ex Profesor de Mecánica aplicada en el « University College » de Nottingham. Traducción de la 2.ª edición inglesa. 311 páginas, 199 figuras y numerosos ejemplos resueltos.

Manual del constructor de máquinas. Publicado bajo la dirección del Ing. Prof. H. Dubbel. Traducción de la 3.ª edición alemana. Dos tomos con un total de 1968 páginas, 2620 figuras y numerosas tablas. *(2.ª reimpresión).*

Motores de combustión interna y gasógenos. Su cálculo y construcción. Por H. Güldner, Dr. Ing. e. h., Constructor de Máquinas, Director de la Güldner-Motoren Gesellschaft de Aschaffenburg. Traducción de la 3.ª edición alemana. 868 páginas, 1282 figuras, 35 láminas y 200 tablas numéricas intercaladas en el texto. *(2.ª reimpresión).*

Resistencia de materiales, por Arthur Morley, Ex Profesor de Mecánica aplicada en el « University College » de Nottingham. Traducción de la 7.ª edición inglesa. 688 páginas, 250 figuras y numerosos ejemplos resueltos. *(2.ª edición).*

Teoría de las estructuras, por Arthur Morley, Ex Profesor de Mecánica aplicada en el « University College » de Nottingham. Traducción de la 3.ª edición inglesa. 732 páginas, 328 figuras, 4 láminas y numerosos ejemplos resueltos. *(2.ª edición).*

Centrales generadoras de energía eléctrica, por el Ingeniero Herbert Kyser. Traducción de la 2.ª edición alemana. 870 páginas, 665 figuras, 87 tablas y 2 láminas.

Tratado de Hidráulica, por el Prof. Philipp Forchheimer. Traducción de la 3.ª edición alemana. 630 páginas, 393 figuras y numerosos gráficos.

Problemas de Hidráulica aplicada, por el Dr. Ing. Otto Streck. Traducción de la 2.ª edición alemana. 368 páginas, 133 figuras y 11 tablas.

Estática aplicada, por Rudolf Saliger, Dr. Ing., Profesor numerario de la Escuela Técnica Superior de Viena. Traducción de la 2.ª edición alemana. 795 páginas y 650 figuras.

Dibujo de máquinas, por Ricardo Schiffner, antiguo Ingeniero Jefe en Warmbrunn. 298 páginas, 486 figuras y 128 láminas, algunas en color.