

TEXTOS DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES
AJUSTADOS A LOS PROGRAMAS EN VIGOR

ARITMETICA

1^{er}. AÑO DE ESTUDIOS SECUNDARIOS

Texto aprobado por el Ministerio de J. e Instrucción Pública

POR

FELIPE ANGUIA

JOSÉ N. BOLLO

LORENZO DAGNINO PASTORE

TOMO I

QUINTA EDICIÓN

CORREGIDA Y SIMPLIFICADA



F. CRESPILO, EDITOR
SOLIVAR, 369
BUENOS AIRES

ARITMÉTICA

1.^a PARTE

OBRAS DE LOS MISMOS AUTORES

ARITMÉTICA (5ª Edición)	1ra Parte, (1er Año)	\$ 3.50
ARITMÉTICA (2ª Edición)	2da Parte, (2do Año)	„ 3.50
ALGEBRA (2ª Edición)	1ra Parte, (3er Año)	„ 3.50
ALGEBRA (3ª Edición)	2da Parte, (4to Año)	„ 3.50
GEOMETRIA PLANA (3ª Ed.)	1ra Parte, (1er Año)	„ 3.—
GEOMETRIA PLANA (2ª Ed.)	2da Parte, (2do Año)	„ 2.50
GEOMETRIA PLANA	3ra Parte, (3er Año)	„ 2.50
GEOMETRIA DEL ESPACIO	4ta Parte, (4to Año)	„ 3.50

Duplicado

TEXTOS DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES
AJUSTADOS A LOS PROGRAMAS EN VIGOR

244-
ARITMETICA

Texto aprobado por el Ministerio de J. e Instrucción Pública
1^{er.} AÑO DE ESTUDIOS SECUNDARIOS

POR

FELIPE ANGUITA

Profesor diplomado de Matemáticas y Cosmografía — Catedrático de los Colegios Nacionales «Mariano Moreno», «Bartolomé Mitre», de la Escuela de Mecánica de la Armada y de las Escuelas de Educación Industrial.

L. DAGNINO PASTORE

Profesor diplomado de Matemáticas y Cosmografía — Ingeniero Civil — Consejero de la Facultad de Filosofía y Letras — Catedrático del Instituto Nacional del Profesorado Secundario y de los Colegios Nacionales «Mariano Moreno» y «Juan M. de Pueyrredón».

JOSÉ N. BOLLO

Profesor diplomado de Matemáticas y Física — Vicerrector y Profesor del Colegio Nacional «Mariano Moreno» — Catedrático y Consejero del Instituto Nacional del Profesorado Secundario.

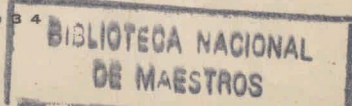
TOMO I

QUINTA EDICION



F. CRESPILO, EDITOR
BOLIVAR, 369
BUENOS AIRES

1934



HECHO EL DEPÓSITO DE LEY
ES PROPIEDAD DE LOS AUTORES



ADVERTENCIA

Agotada rápidamente la primera edición de nuestra *Aritmética*, a pesar de haber aparecido cuando las clases estaban en pleno funcionamiento, lanzamos la segunda edición no sin antes agradecer a profesores y estudiantes el apoyo que nos han dispensado.

Esta nueva edición aparece corregida en cuantas fallas hemos y nos han advertido nuestros colegas, y ha sido una preocupación constante la de simplificar el estudio de todos los temas, pues pensamos que a los alumnos de Primer Año, mientras más breve y claramente se expongan los asuntos de la *Aritmética* racional, mejor es.

El número de ejercicios ha sido aumentado, pues no se concibe la enseñanza de la *Aritmética* sin una abundante y continua ejercitación.

Esperamos de nuestros colegas la misma favorable acogida que nos han dispensado hasta ahora, así como las observaciones que juzgaran pertinentes.

F. A.

Abril de 1928.

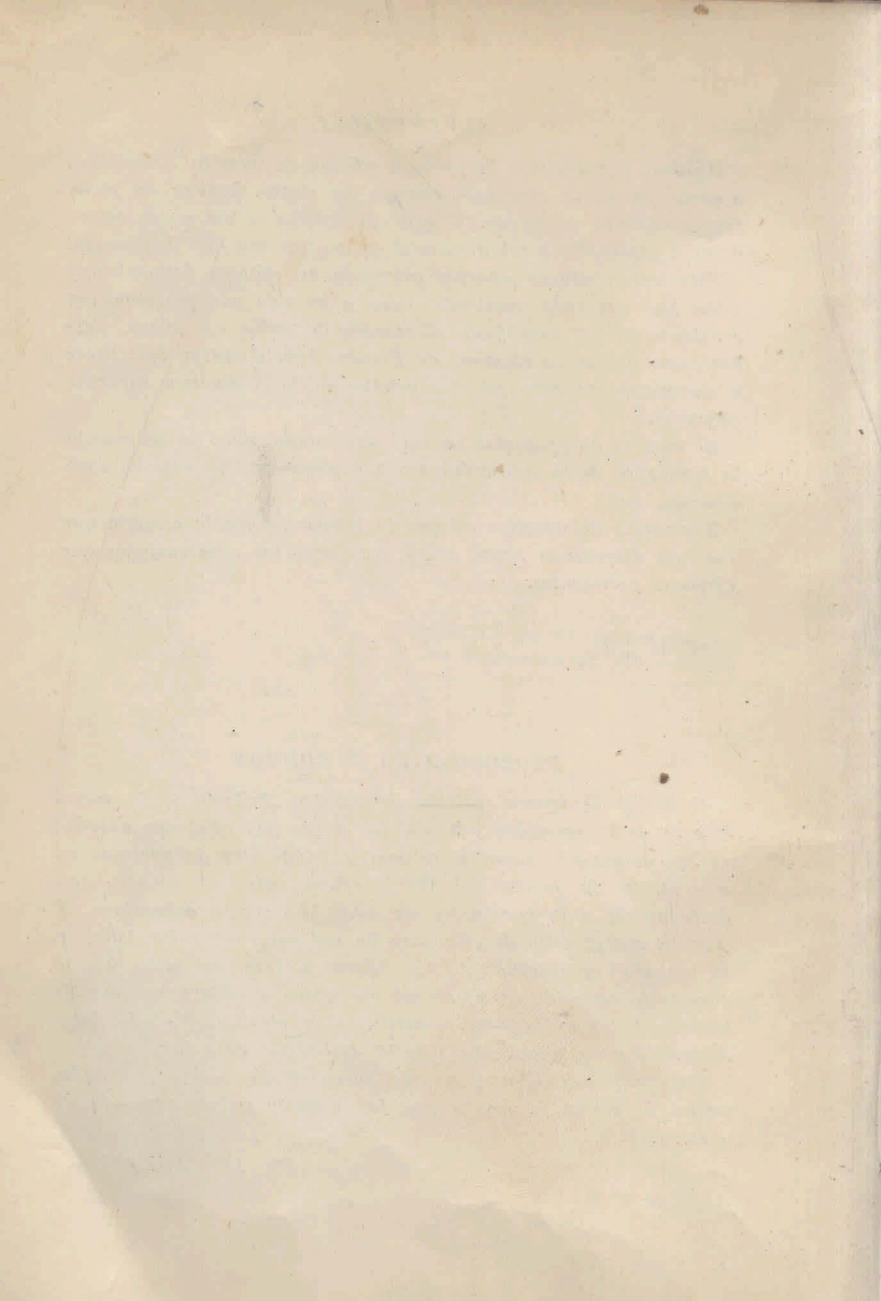
PROLOGO A LA 3ª EDICION

Al lanzar la tercera edición de nuestra *Aritmética*, 1ª parte, después de la excelente acogida que a las dos ediciones anteriores han dispensado nuestros colegas y estudiantes, lo hacemos en la creencia de haber contribuído eficazmente con nuestro modesto aporte a la enseñanza de esta importante asignatura. Y creemos que el éxito de esta obra ha radicado, por sobre todo, en la brevedad y sencillez de las demostraciones, así como en la abundante colección de ejercicios adecuados a cada tema que, de hacerlos todos en la clase, constituyen la plena prueba del buen desarrollo y aprovechamiento de la *Aritmética* de primer año.

Sin modificaciones aparece esta nueva edición, la que, sin duda, tendrá la misma favorable acogida de parte de nuestros colegas y estudiantes.

LOS AUTORES.

Abril de 1929.



CAPITULO I

PROGRAMA I. — Números naturales. Unidad y pluralidad. Concepto de **conjunto** y **elemento**. Notación. Definición de conjuntos iguales y conjunto parte de otro. Conjuntos finitos e infinitos. Ejemplos.

Conjuntos coordinables y no coordinables. Postulado: Si un conjunto finito es coordinable con otro de un cierto modo, lo es de cualquier otro modo que se ensaye la coordinación. Consecuencia: Si un conjunto finito no es coordinable con otro de un cierto modo, no lo es de ningún otro modo que se ensaye la coordinación.

Caracteres fundamentales de la coordinabilidad de conjuntos: 1º) Todo conjunto es coordinable consigo mismo (carácter idéntico); 2º) si un conjunto es coordinable con otro, éste lo es, también, con el primero (carácter recíproco); 3º) si un conjunto es coordinable con otro y éste, a su vez, lo es con un tercero, el primero es coordinable con el tercero, (carácter transitivo).

Concepto de número natural. Sucesión fundamental de conjuntos. Sucesión fundamental de números naturales: nombre y representación de los primeros cien números. Significado de la representación literal. Objeto de la Aritmética.

Representación gráfica e interpretación geométrica de los números naturales.

Numeros naturales

1. Unidad y pluralidad. — De la observación de las cosas surgen las ideas conocidas de unidad y pluralidad, conceptos primitivos que no definiremos. (*).

2. Concepto de conjunto y elementos. — Un *conjunto* es una reunión de cosas consideradas simultáneamente.

Ejemplos: un ejército, una biblioteca, etc.

(*) Las palabras cuyo significado no puede expresarse por medio de otras, se llaman **conceptos**, o ideas, primitivos. Las otras se llaman **derivadas**.

Cada una de las cosas que componen un conjunto se llama *elemento* o *unidad*. En los ejemplos anteriores, los elementos son un soldado y un libro.

unidades
3. **Notación.** — Representaremos los conjuntos por medio de letras mayúsculas redondillas: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$, y los elementos por medio de letras mayúsculas de imprenta: A, B, C...

Si el conjunto $\mathcal{C}$ está formado por los elementos A, B, C y D escribiremos: $\mathcal{C} \equiv A, B, C, D$

El signo $\equiv$ significa, por el momento, *está compuesto por*.

4. **Conjuntos iguales.** — Dos conjuntos son *iguales*, cuando están compuestos por los mismos elementos

$$\begin{array}{l} \text{Si } \mathcal{A} \equiv A, B, C \\ \text{y } \mathcal{B} \equiv A, B, C \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{es } \mathcal{A} = \mathcal{B} \end{array} \right.$$

5. **Conjunto parte de otro.** — Un conjunto es *parte de otro*, cuando todos los elementos del uno figuran en el otro, el cual contiene elementos que no figuran en aquel.

$$\begin{array}{l} \text{Si se tiene que: } \mathcal{A} \equiv A, B, C \\ \text{y también: } \mathcal{B} \equiv A, B, C, D, E \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \end{array} \right.$$

El signo $\subset$ significa: *es parte de*.

6. **Conjunto finito.** — Un conjunto es *finito*, cuando el hecho de nombrar todos sus elementos tiene fin.

Ejemplo: Es finito un rebaño de ovejas.

7. **Conjunto infinito.** — Un conjunto *infinito*, cuando no es finito.

Ejemplo: El conjunto de los números, 1, 2, 3, 4... es infinito.

8. - Conjuntos coordinables. — Un conjunto es *coordinable* con otro, cuando a cada elemento del uno le corresponde uno y sólo uno en el otro, y recíprocamente.

Ejemplo: El conjunto de las letras mayúsculas del abecedario es coordinable con el de las letras minúsculas, puesto que a cada mayúscula le corresponde una minúscula, y no hay mayúscula sin su correspondiente minúscula, y viceversa.

Para indicar la coordinabilidad entre conjuntos, se emplea el signo $\overline{\wedge}$, llamado de *coordinación*.

Dados los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv \bigcirc, \square, \triangle, \triangle \\ \mathcal{B} &\equiv \triangle, \bigcirc, \triangle, \square \end{aligned} \quad \text{diremos que es } \mathcal{A} \overline{\wedge} \mathcal{B}$$

Si al establecer la coordinación sobran elementos en uno u otro conjunto, éstos son *no coordinables*.

Si los conjuntos son:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\equiv \bigcirc, \triangle, \square \\ \mathcal{N} &\equiv \square, \square, \bigcirc, \triangle \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{es } \mathcal{M} \text{ no } \overline{\wedge} \mathcal{N} \end{array} \right.$$

9. Postulado. — Si un conjunto es coordinable con otro de un cierto modo, lo es de cualquier otro modo que se ensaye la coordinación.

$$\text{Dados los conjuntos : } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \equiv \text{F, L, O, R,} \\ \mathcal{B} \equiv \text{N, A, V, E} \end{array} \right\} \text{ es: } \mathcal{A} \overline{\wedge} \mathcal{B}$$

Sé comprueba que, de cualquier modo que se ensaye la coordinación, siempre son coordinables:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv R, L, O, F, \\ \mathcal{B} &\equiv V, A, N, E \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \overline{\wedge} \mathcal{B}; \\ \mathcal{B} \equiv A, N, E, V, \end{array} \right\} \mathcal{A} \overline{\wedge} \mathcal{B}.$$

10. Consecuencia. — *Si un conjunto finito no es coordinable con otro de un cierto modo, no lo es de ningún otro modo que se ensaye la coordinación.*

Caracteres fundamentales de la coordinación de conjuntos

11. Carácter idéntico. — TEOREMA. — *Todo conjunto es coordinable consigo mismo.*

Hipótesis: $\mathcal{A} \equiv \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc$; Tesis: $\mathcal{A} \overline{\wedge} \mathcal{A}$.

Se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv \bigcirc, \triangle, \square, \square, \triangle \\ \mathcal{A} &\equiv \bigcirc, \triangle, \square, \square, \triangle \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{por def. de conj.} \\ \text{coord.: } \mathcal{A} \overline{\wedge} \mathcal{A} \end{array} \right.$$

12. Carácter recíproco. — TEOREMA. — *Si un conjunto es coordinable con otro, éste es coordinable con el primero.*

$$\text{H)} \quad \mathcal{A} \overline{\wedge} \mathcal{B};$$

$$\text{T)} \quad \mathcal{B} \overline{\wedge} \mathcal{A}$$

Si los conjuntos son:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv \bigcirc, \square, \bigcirc, \triangle \\ \mathcal{B} &\equiv \square, \bigcirc, \triangle, \triangle \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{es, por hipótesis: } \mathcal{A} \overline{\wedge} \mathcal{B} \end{array} \right.$$

y también podemos escribir:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &\equiv \square, \bigcirc, \triangle, \triangle \\ \mathcal{A} &\equiv \bigcirc, \square, \bigcirc, \triangle \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{de donde: } \mathcal{B} \overline{\wedge} \mathcal{A} \end{array} \right.$$

13. Carácter transitivo. — TEOREMA. — *Si un conjunto es coordinable con otro, y éste, a su vez, es coordi-*

nable con un tercero, el primero es coordinable con el tercero.

$$\text{H. } \left\{ \begin{array}{l} A \bar{\cap} B \\ B \bar{\cap} C; \end{array} \right. \quad \text{T. } \left\{ \begin{array}{l} A \bar{\cap} C \end{array} \right.$$

Siendo $A \bar{\cap} B$, se tiene: $\left\{ \begin{array}{l} A \equiv \bigcirc, \bigcirc, \dots \bigcirc \\ B \equiv \square, \square, \dots \square \end{array} \right.$

y, también, si $B \bar{\cap} C$: $\left\{ \begin{array}{l} B \equiv \square, \square, \dots \square \\ C \equiv \triangle, \triangle, \dots \triangle \end{array} \right.$

y escribiendo los conjuntos A y C :

$$\left. \begin{array}{l} A \equiv \bigcirc, \bigcirc, \dots \bigcirc \\ C \equiv \triangle, \triangle, \dots \triangle \end{array} \right\} \text{ de donde: } A \bar{\cap} C$$

14. Concepto de número natural. — Cuando en un sistema de cosas o *entes* se verifican los tres caracteres idéntico, recíproco y transitivo, esos *entes* son *iguales* en un cierto orden de ideas. Ahora bien, la coordinación de conjuntos goza de dichos caracteres lógicos, luego son iguales en algún sentido. ¿Y qué tienen de igual dos conjuntos coordinables?: el mismo número de elementos, de donde deducimos la siguiente:

15. Definición. — Se llama *número natural*, a lo que tienen de común los conjuntos coordinables.

Si el conjunto de los alumnos de una clase es coordinable con el de los bancos respectivos, los alumnos y los bancos tienen algo común, que no es la forma, ni el peso, etc.; ese algo común es el mismo *número natural*.

16. Convenciones. — Si imaginamos un conjunto cualquiera y le quitamos un elemento, y al conjunto obtenido le quitamos otro elemento, y así sucesivamente,

llegará un momento en que quedará un solo elemento, y aunque la idea de conjunto expresa pluralidad, *convendremos* en llamar conjunto a ese solo elemento.

Si al conjunto de un elemento le quitamos un elemento, el conjunto, como tal, desaparece, pero también *convendremos* en llamar *conjunto nulo* al conjunto que carece de elementos.

17. Sucesión fundamental de conjuntos. — Consideremos un conjunto de un solo elemento A; luego consideremos otro conjunto A, B formado por el elemento A y otro elemento B; luego otro conjunto formado por el conjunto anterior A, B y otro elemento C, etc. De esa manera obtendremos una serie de conjuntos:

(A), (A, B), (A, B, C), (A, B, C, D).....

que es lo que se llama *sucesión o serie fundamental de conjuntos*.

Teniendo en cuenta la formación de los conjuntos de la serie fundamental, se deduce:

1º *La serie fundamental es infinita.*

2º *Cada conjunto es parte de todos los que le siguen.*

18. Nombre y representación de los cien primeros números. — Consideremos la sucesión fundamental:

(A), (A, B), (A, B, C), (A, B, C, D), (A, B, C, D, E)...

Por la definición (15), todos los conjuntos coordinables con el conjunto (A) tendrán el mismo número natural, que llamaremos *uno*; todos los conjuntos coordinables con el conjunto (A, B) tienen el mismo número natural, que llamaremos *dos*; todos los conjuntos coordi-

nables con el conjunto (A, B, C) tienen el mismo número natural, que llamaremos *tres*, etc.

Todos los conjuntos nulos (16), tienen el mismo número de elementos, como que no tienen ninguno, al que llamaremos *cero*, resultando así, los números:

cero, uno, dos, tres, cuatro.....

que constituyen la *serie de los números naturales*, que en símbolos se representan así:

0, 1, 2, 3, 4,.....

Como la serie fundamental de conjuntos es infinita, también lo es la serie natural de los números.

Los alumnos conocen, en realidad, los números y su formación, así que daremos por conocidos los cien primeros números, ya que ello nos facilitará el estudio de numerosas propiedades.

19. Significado de la representación literal. — Los caracteres:

0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8.....

llamados *caracteres arábigos*, que sirven para representar los números, tienen valores fijos, pero conviene emplear otros símbolos cuyos valores no sean invariables, empleándose al efecto las letras minúsculas del abecedario latino:

a, b, c, d, e.....

pudiendo representar cada letra números de distintos valores.

Esta representación es muy ventajosa para estudiar las propiedades de los números, que se verifican cualesquiera que sean los símbolos con que se les represente (*).

20. Objeto de la Aritmética. — La *Aritmética* es la ciencia que estudia los números y sus propiedades.

21. Representación gráfica de los números naturales. — Si consideramos los segmentos consecutivos e iguales:

$$OA = AB = BC = CD = \dots$$

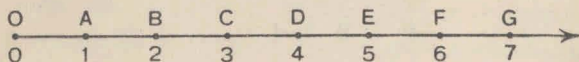


Figura 1

en una semirrecta de origen O, Figura 1, *se conviene* en que el punto O represente al número *cero*; el A represente al número 1; el B al número 2; el C al número 3; etcétera.

22. Interpretación geométrica de los números naturales. — Geométricamente, los números se representan, convencionalmente, por segmentos de recta.

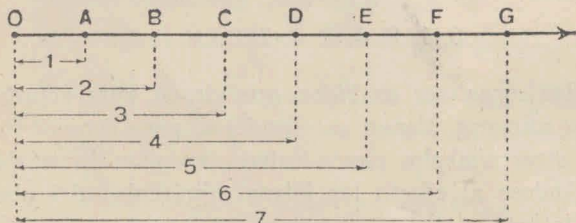


Figura 2

(*) Las formas de las cifras ha variado mucho en las diversas épocas, habiéndose fijado a partir de la invención de la imprenta.

El matemático Viète, (1540 - 1602), con el objeto de obtener la mayor generalidad en el razonamiento, fué el primero en emplear las letras para representar los números.

Así, en la Fig. 2, si:

$$OA = AB = BC = CD = \dots$$

el segmento OA representa al número 1; el segmento OB al número 2; el segmento OC al número 3, etc.

EJERCICIOS

1. Coordinar de todas las maneras posibles las letras de las palabras SAL y DOS.
 2. Dadas las palabras ARITMETICA, GEOMETRIA, ESTUDIANTE, CORDOBA, COLEGIO e HIPOTESIS, decir cuáles son coordinables, atendiendo a sus letras.
 3. ¿Son coordinables el conjunto de los habitantes de la República y el de los habitantes de América? ¿Cómo es el primer conjunto respecto al segundo?
 4. Representar geométricamente los números 5 y 8.
 5. Representar geométrica y gráficamente los números 3 y 7.
-

CAPITULO II

PROGRAMA II. — Relaciones de igualdad y desigualdad entre números naturales. Comparación de conjuntos. Significado de las relaciones de igualdad, mayor y menor entre números naturales. Notación. Si un número es mayor que otro, éste es menor que el primero y recíprocamente. Postulado: Dados dos números debe verificarse, necesariamente, una y sólo una de las siguientes posibilidades: el primero es igual al segundo, el primero es mayor que el segundo o el primero es menor que el segundo. Interpretación geométrica de las relaciones de igualdad, mayor y menor.

Caracteres formales de la igualdad: 1º Todo número es igual a sí mismo (carácter idéntico); 2º si un número es igual a otro, éste lo es al primero (carácter recíproco); 3º si un número es igual a otro y éste, a su vez, es igual a un tercero, el primero es igual al tercero (carácter transitivo). Dos números iguales a un tercero son iguales entre sí.

Carácter transitivo de las relaciones de mayor y menor. Ordenación de los números naturales.

Relaciones de igualdad y desigualdad entre números naturales

23. Comparación de conjuntos. — Dados los conjuntos A y B , comprobamos experimentalmente que se verifica una de las relaciones siguientes:

1ª El conjunto A es coordinable con el conjunto B :

$$\left. \begin{array}{l} A \equiv \bigcirc, \bigcirc, \dots\dots\dots \bigcirc \\ B \equiv \square, \square, \dots\dots\dots \square \end{array} \right\} A \bar{\sim} B$$

2ª El conjunto A es coordinable con parte del conjunto B :

$$\left. \begin{array}{l} A \equiv \bigcirc, \bigcirc, \dots\dots\dots \bigcirc \\ B \equiv \square, \square, \dots\dots\dots \square, \square, \square \end{array} \right\} A \bar{\sim} \subset B$$

3ª El conjunto $\mathcal{B}$ es coordinable con parte del conjunto $\mathcal{A}$:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{A} \equiv \bigcirc, \bigcirc, \dots\dots\dots \bigcirc, \bigcirc \\ \mathcal{B} \equiv \square, \square, \dots\dots\dots \square \end{array} \right\} \mathcal{B} \overline{\wedge} \subset \mathcal{A}$$

24. Significado de las relaciones de igualdad, mayor y menor. — Dos números naturales son *iguales*, cuando los conjuntos que les corresponden son coordinables.*

Para indicar que dos números son iguales, emplearemos el signo $=$, *igual*. (*).

Si un conjunto $\mathcal{A}$ tiene a elementos, y otro conjunto $\mathcal{B}$ tiene b elementos, diremos que:

$$a = b, \text{ siempre que sea: } \mathcal{A} \overline{\wedge} \mathcal{B}$$

Para indicar que dos números *no son iguales*, se emplea el signo $\neq$, *no es igual*.

25. Un número natural es *mayor* que otro, cuando una parte del conjunto que corresponde a este número es coordinable con el conjunto que corresponde al otro número.

Se expresa que un número es mayor que otro, por medio del signo $>$, *mayor que*.

Si los conjuntos son $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ y a y b los números naturales respectivos, diremos que:

$$a > b, \text{ siempre que sea: } \subset \mathcal{A} \overline{\wedge} \mathcal{B}$$

Si un número *no es mayor* que otro, se indica con el signo $\nless$, *no es mayor*.

(*) El signo $=$ fué introducido por R. Recorde, (1510 - 1558).

26. Un número natural es *menor* que otro, cuando el conjunto que corresponde al primero es coordinable con parte del conjunto que corresponde al segundo número.

Para indicar que un número es menor que otro, emplearemos el signo $<$, *menor que*. (*)

Si los conjuntos son A y B , y los números respectivos son a y b , diremos que:

$$a < b, \text{ siempre que sea: } A \cap \subset B.$$

Se indica que un número *no es menor* que otro con el signo $\nless$, *no es menor*.

27. El número que está a la izquierda de los signos $=$, $>$ o $<$, se llama *primer miembro*, y *segundo miembro* el que está a la derecha.

28. COROLARIO. — Si un número es mayor que otro, éste es menor que el primero, y recíprocamente.

Es decir, que si es: $a > b$, también: $b < a$

$$a < b, \text{ también: } b > a.$$

29. **Postulado.** — Dados dos números, debe verificarse, necesariamente, una y sólo una de las siguientes posibilidades:

- 1ª El primero es igual al segundo;
- 2ª El primero es mayor que el segundo;
- 3ª El primero es menor que el segundo.

(*) Los signos $>$ y $<$ fueron usados por vez primera por T. Harriot, (1560 - 1621).

Es decir, que dados los números a y b deberá ser:

1º $a = b$, siendo : $a \not> b$; $a \not< b$.

2º $a > b$, siendo : $a \neq b$; $a \not< b$.

3º $a < b$, siendo : $a \neq b$; $a \not> b$.

Estas tres relaciones se *excluyen* y *completan*, pues de las tres se cumple una sola, y porque, lógicamente, no se presentan otras relaciones.

30. Interpretación geométrica de las relaciones de igualdad, mayor y menor. — Sabemos, (22), que los números se representan geométricamente por segmentos; así, pues, si el segmento AB representa al número a , y el CD al número b , resulta que:

A $\xrightarrow{a}$ B

C $\xrightarrow{b}$ D

Fig 3

A $\xrightarrow{a}$ B

C $\xrightarrow{b}$ D

Fig 4

A $\xrightarrow{a}$ B

C $\xrightarrow{b}$ D

Fig. 5

1º si $AB = CD$, también $a = b$, Fig 3,

2º si $AB > CD$, también $a > b$, Fig 4;

3º si $AB < CD$, también $a < b$, Fig. 5

Caracteres formales de la igualdad

31 Dos o más entes (cosas, números, ángulos, etc.), son iguales, cuando cumplen los caracteres lógicos fundamentales idéntico, recíproco y transitivo

32. **Carácter idéntico** — TEOREMA — *Todo número es igual a sí mismo.*

H) a , núm. nat.

T) $a = a$.

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de a elementos; por (11) sabemos que $\mathcal{A} \bar{\cap} \mathcal{A}$, y por (15) deberá ser: $a = a$.

33. Carácter recíproco. — TEOREMA. — *Si un número es igual a otro, éste es igual al primero.*

H) $a = b$;

T) $b = a$.

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de a elementos, y $\mathcal{B}$ otro conjunto de b elementos. Siendo $a = b$, deberá ser, (24), $\mathcal{A} \bar{\cap} \mathcal{B}$. y por (12) resultará $\mathcal{B} \bar{\cap} \mathcal{A}$, luego:

$$b = a.$$

34. Carácter transitivo. — TEOREMA. — *Si un número es igual a otro, y éste es igual a un tercero, el primero es igual al tercero.*

$$\text{H) } \left\{ \begin{array}{l} a = b \\ b = c; \end{array} \right. \quad \text{T) } a = c$$

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ los conjuntos correspondientes a los números a , b y c , respectivamente.

Siendo $a = b$, es por (24): $\mathcal{A} \bar{\cap} \mathcal{B}$ } $\therefore \mathcal{A} \bar{\cap} \mathcal{C}$
y si $b = c$, es por (24): $\mathcal{B} \bar{\cap} \mathcal{C}$ }

y por definición de números naturales iguales:

$$a = c.$$

35. COROLARIO. — *Dos números iguales a un tercero, son iguales entre sí.*

Es decir que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } a = b \\ \text{y } c = b \end{array} \right\} \text{ es } a = c$$

36. Carácter transitivo de las relaciones de mayor y menor. — POSTULADO. — *Si un número es mayor que otro, y éste es mayor que un tercero, el primero es mayor que el tercero, y recíprocamente.*

$$\begin{array}{l} \text{Si es } a > b \\ \text{y} \quad \quad b > c \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{también: } a > c \end{array} \right.$$

Análogamente:

$$\begin{array}{l} \text{si es } a < b \\ \text{y} \quad \quad b < c \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{también: } a < c. \end{array} \right.$$

37. Ordenación de los números naturales. — Vimos que, en la serie fundamental:

(A), (A,B), (A,B,C), (A,B,C,D), (A,B,C,D,E),...
es (A) parte de (A, B); (A, B) parte de (A, B, C),
(A, E, C) parte de (A, B, C, D), etc., y por definición
de número menor que otro, (26):

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots\dots\dots$$

y completando con el número cero, (16):

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots\dots\dots$$

y ordenados así los números naturales.

CAPITULO III

PROGRAMA III. — Suma de números naturales. Operaciones aritméticas. Operaciones directas e inversas. Suma de conjuntos: definición y ejemplos. Suma de números naturales: definición y ejemplos. Consecuencias: Si a un número se le suma uno, se obtiene el que le sigue en la sucesión fundamental; el número natural n es igual a la suma de n sumandos iguales a uno; la suma de dos números naturales es igual o mayor que cada uno de los sumandos. Tablas de sumar. Interpretación geométrica de la suma de números naturales.

Propiedades uniforme, conmutativa y asociativa de la suma. Leyes de monotonía: Si se suman miembro a miembro una desigualdad y una igualdad, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que el de la dada; si se suman miembro a miembro dos o más desigualdades del mismo sentido, se obtiene una desigualdad de ese mismo sentido.

Suma de numeros naturales

38. Operaciones aritméticas. — Una *operación aritmética* es el procedimiento que nos permite, dados dos números, llamados *datos*, obtener otro número, llamado *resultado*.

39. Operaciones directas e inversas. — Una operación aritmética es *directa*, cuando, conociendo dos *datos*, se averigua el *resultado*.

La operación es *inversa*, cuando, conociendo el *resultado* y uno de los *datos*, se busca el otro *dato*.

Si a y b son los datos y c es el resultado, tendremos:

Operación directa: conociendo a y b , calcular c .

Operaciones inversas: $\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ conociendo } c \text{ y } a, \text{ calcular } b. \\ 2^{\text{a}} \text{ conociendo } c \text{ y } b, \text{ calcular } a. \end{array} \right.$

Como vemos, una operación aritmética directa da origen a dos operaciones inversas, las que son una misma cuando los datos desempeñan el mismo papel.

Operación directa

Operación inversa

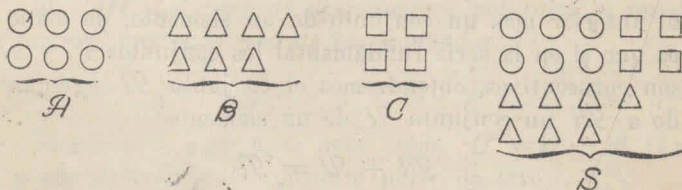
suma *resta*

multiplicación *división*

potenciación $\left\{ \begin{array}{l} \text{radicación} \\ \text{logaritmación.} \end{array} \right.$

40. Suma de conjuntos. — Se llama *suma* de varios conjuntos que no tienen ningún elemento común, al conjunto formado con todos los elementos de estos conjuntos.

Si los conjuntos A , B y C no tienen ningún elemento común, el conjunto S formado con todos los elementos de los conjuntos dados, es la suma de ellos.



41. Notación. — La suma de varios conjuntos se indica con el signo $+$, *más*.

En el ejemplo anterior, escribiremos:

$$S = A + B + C$$

42. Suma de números naturales. — Se llama *suma* de varios números naturales, llamados *sumandos*, al nú-

mero que corresponde al conjunto que es suma de los conjuntos que corresponden a los varios números dados

La *adición* o *suma* tiene por objeto hallar la suma de varios números

43. Notación. — La suma de varios números se indica con el signo $+$, *más*

Si los números $a, b, c, \dots, m$, corresponden a los conjuntos $A, B, C, \dots, M$, y se tiene que:

$$S = A + B + C + \dots + M$$

y el número s corresponde al conjunto S , resulta

$$s = a + b + c + \dots + m.$$

s , es la *suma*, $a, b, c, \dots, m$, los *sumandos*.

44. Consecuencias. — I Si a un número se le suma uno, se obtiene el que le sigue en la serie natural

Vimos, (18), que un conjunto cualquiera era igual al anterior más un conjunto de un elemento, de manera que si en la serie fundamental los conjuntos M y N son consecutivos, obtendremos el conjunto N agregando a M un conjunto U de un elemento.

$$M + U = N$$

Si $m, 1$ y n son los números que corresponden a los conjuntos dados, tendremos:

$$m + 1 = n = \text{siguiente de } m.$$

Los números m y $m + 1$ se llaman *consecutivos*.

45. II El número natural n es igual a la suma de n sumandos iguales a uno

Es decir, que:

$$n = 1 + 1 + \overbrace{\dots\dots\dots}^{n \text{ sumandos}} + 1$$

Sea el conjunto $\mathcal{N}$ de n elementos:

$$\mathcal{N} \equiv \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc \overbrace{\dots\dots\dots}^{n \text{ elementos}} \bigcirc$$

por definición de suma de conjuntos:

$$\mathcal{N} = \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc \overbrace{\dots\dots\dots}^n + \bigcirc$$

y por definición de suma de números naturales:

$$n = 1 + 1 + 1 + \overbrace{\dots\dots\dots}^n + 1.$$

46. III. La suma de dos números naturales es igual o mayor que cada uno de los sumandos.

Es decir, que: si $c = a + b$, es $c \geq a$ y $c \geq b$.

Siendo $c = a + b$, se debe tener: $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ (1), y por definición de conjunto parte de otro:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\subset \mathcal{C} && \text{y por (25): } c > a \\ \text{o } \mathcal{B} &\subset \mathcal{C} && \text{y por (25): } c > b \end{aligned}$$

En la expresión (1), si $\mathcal{B}$ es nulo:

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \text{ y por (11) } \mathcal{C} \nsubseteq \mathcal{A}$$

y por (24):

$$c = a$$

Análogamente se demostraría que si $\mathcal{A}$ fuese nulo, sería $c = b$.

47. Definiciones. — La suma de cero con cero, es cero.

$$0 + 0 = 0$$

La suma de cero y un número es el mismo número:

$$0 + a = a$$

El número *cero* se llama *módulo* de la suma.

48. Tabla de sumar. — La suma de dos números de una sola cifra se halla con la *Tabla de sumar*, que se forma así:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla de sumar

Se prepara un cuadrado con cien casillas. En la primer línea horizontal se escriben de izquierda a derecha los números de 0 a 9

Las siguientes se llenan, horizontalmente, comenzando por 1, luego por 2, luego por 3, etc.

Omitimos el uso de la *Tabla* por ser conocido

49. Interpretación geométrica de la suma de números naturales. — Si los segmentos a , b , c , representan,

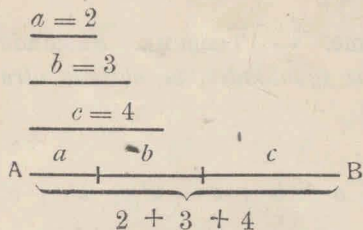


Fig 6

senta, geométicamente, la suma $2 + 3 + 4$ de los números dados.

respectivamente, a los números 2, 3, 4, el segmento AB que es la suma de varios segmentos consecutivos e iguales a los dados, repre-

Propiedades de la suma de números naturales

50. Definición. — Sumar *miembro a miembro*, u *ordenadamente*, igualdades o desigualdades, significa sumar los primeros miembros entre sí, y los segundos miembros entre sí.

51. TEOREMA. — Si varios conjuntos A , B y C son coordinables, respectivamente, con los conjuntos A' , B' y C' , la suma de los primeros es coordinable con la suma de los segundos conjuntos.

$$H) \quad A \cap A'; \quad B \cap B'; \quad C \cap C'$$

$$T) \quad A + B + C \cap A' + B' + C'$$

En efecto, el conjunto suma de A , B y C es coordinable con el conjunto suma de A' , B' y C' , pues a cada elemento de A se le puede hacer corresponder otro elemento de A' , a cada elemento de B se le puede hacer corresponder otro de B' ; etc., luego:

$$A + B + C \cap A' + B' + C'$$

52. Propiedad uniforme. — TEOREMA. *Sumando miembro a miembro varias igualdades, se obtiene otra igualdad.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{array} \right. \quad T) \quad a + b + c = a' + b' + c'$$

Sean: $\mathcal{A}$ el conjunto correspondiente a a ; $\mathcal{B}$ el de b ; $\mathcal{A}'$ el de a' ; $\mathcal{B}'$ el de b' ; $\mathcal{C}$ el de c y $\mathcal{C}'$ el de c' .

Sabemos, por hipótesis, que:

$$a = a' \text{ y por definición, (24): } \mathcal{A} \overline{\cap} \mathcal{A}'$$

$$b = b', \text{ y por definición, (24): } \mathcal{B} \overline{\cap} \mathcal{B}'$$

$$c = c', \text{ y por definición, (24): } \mathcal{C} \overline{\cap} \mathcal{C}'$$

y por el teorema anterior, resulta:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} \overline{\cap} \mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \mathcal{C}'$$

pero, por (42), al conjunto $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}$ le corresponde el número $a + b + c$, y al conjunto $\mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \mathcal{C}'$ le corresponde el número $a' + b' + c'$, y siendo coordinables estos conjuntos, por (24) resulta:

$$a + b + c = a' + b' + c'$$

53. Propiedad conmutativa. — TEOREMA. *En toda suma de varios números, el orden de los sumandos no altera la suma.*

$$H) \quad a + b + c; \quad T) \quad a + b + c = b + a + c = \text{etc.}$$

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ los conjuntos correspondientes a los números a , b y c :

$$\mathcal{A} \equiv \bigcirc, \bigcirc, \dots \overset{a}{\bigcirc} \dots \bigcirc$$

$$\mathcal{B} \equiv \triangle, \triangle, \dots \overset{b}{\triangle} \dots \triangle$$

$$\mathcal{C} \equiv \square, \square, \dots \overset{c}{\square} \dots \square$$

Por definición de suma de conjuntos:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} \equiv \overset{a}{\bigcirc}, \bigcirc, \dots \bigcirc, \overset{b}{\triangle}, \triangle, \dots \triangle, \overset{c}{\square}, \square, \dots \square \quad (1)$$

y también:

$$\mathcal{B} + \mathcal{A} + \mathcal{C} \equiv \overset{b}{\triangle}, \triangle, \dots \triangle, \overset{a}{\bigcirc}, \bigcirc, \dots \bigcirc, \overset{c}{\square}, \square, \dots \square \quad (2)$$

como los conjuntos (1) y (2) están compuestos por los mismos elementos, son iguales, y por (11) :

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} \bar{\wedge} \mathcal{B} + \mathcal{A} + \mathcal{C}$$

y por definición de suma y de igualdad de números naturales:

$$\boxed{a + b + c = b + a + c}$$

54. Paréntesis. — El *paréntesis*, (), sirve para indicar que lo que está en él encerrado se considera como un solo número. (*)

(*) Los paréntesis fueron empleados por primera vez por Girard en 1629.

Si a la suma de a y b hay que sumar el número c , escribiremos:

$$(a + b) + c \quad (1)$$

Para el mismo uso que el paréntesis se emplean los corchetes $[]$, las llaves $\{ \}$, etc.

Si a la suma (1) hay que sumar el número m , y al resultado el número 3, escribiremos.

$$\{ [(a + b) + c] + m \} + 3$$

55 Propiedad asociativa — **TEOREMA.** *En toda suma de varios números, puede reemplazarse dos o más de ellos por su suma efectuada.*

$$H) \ a + b + c; \quad T) \ a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

Si los conjuntos correspondientes a los números a , b y c son $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ al sumar éstos, podemos reunir en uno solo los conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{M} \quad (1)$$

$$\text{resultando:} \quad \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} \overline{=} \mathcal{M} + \mathcal{C}$$

y por definición de suma de conjuntos y de números iguales, siendo m el número que corresponde a $\mathcal{M}$:

$$a + b + c = m + c \quad (2)$$

De (1) se deduce, por (42):

$$a + b = m$$

y reemplazando este valor en (2), resulta

$$a + b + c = (a + b) + c$$

Análogamente demostraríamos la otra forma de la tesis, luego

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

56. Definición. — Varias desigualdades son del *mismo sentido*, cuando tienen el mismo signo; y son de *distinto sentido*, en caso contrario.

Ejemplos:

$$\begin{array}{l} a > b \\ 5 > 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{tienen el mismo sentido;} \\ \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 7 > 4 \\ m < n \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{tienen distinto sentido} \end{array} \right.$$

57. Propiedad monótona. — **TEOREMA I.** *Sumando miembro a miembro una desigualdad y una igualdad, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la desigualdad dada.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} a > b \\ c = d \end{array} \right. \quad T) \quad a + c > b + d.$$

Siendo $a > b$, por (46) habrá un número $m \neq 0$, tal que:

$$a = b + m$$

y como

$$c = d$$

$$\text{por (52): } a + c = (b + m) + d$$

$$\text{por (53) y (55) } a + c = (b + d) + m,$$

y como la suma es mayor que cada sumando, (46):

$$a + c > b + d$$

58. TEOREMA II. — *Si se suman miembro a miembro dos o más desigualdades del mismo sentido, se obtiene una desigualdad de ese mismo sentido.*

$$H \quad \begin{cases} a > a' \\ b > b' \\ c > c' \end{cases}$$

$$T) \quad a + b + c > a' + b' + c'$$

Siendo: $a > a'$, por (46) se tiene: $a = a' + m$ (1)

$b > b'$ por (46) se tiene: $b = b' + n$ (2)

$c > c'$ por (46) se tiene: $c = c' + p$. (3)

Sumando ordenadamente las igualdades (1), (2) y (3):

$$a + b + c = (a' + m) + (b' + n) + (c' + p).$$

y por las propiedades conmutativa y asociativa:

$$a + b + c = (a' + b' + c') + (m + n + p)$$

y por (46), resulta:

$$a + b + c > a' + b' + c'$$

EJERCICIOS

6. Dados los números a y b , hallar los que le siguen en la serie natural. R: $a + 1$; $b + 1$.
7. Dados a y b , ¿cuándo b es el siguiente de a ? R: $b = a + 1$.
8. Si c es el siguiente de b , y b es el siguiente de a ¿a qué es igual c respecto de a ? R: $c = a + 2$.
9. Interpretar geométricamente la suma $5 + 2$.
10. Idem, idem $2 + 4 + 5$.
11. La serie de los números a, b, c, d, e, f, g, h , es tal, que cada uno es igual al anterior más el número 2. Demostrar que: $a + h = b + g = c + f = d + e$.
12. Aplicando la propiedad conmutativa, escribir de todas las maneras posibles la suma $2 + 3 + 7$.
13. Aplicando la propiedad asociativa, escribir de todas las maneras posibles la suma $3 + 5 + 2 + 4$.
14. Sumar ordenadamente.
 $4 < 7$; $5 > 2$; $3 < a$; $b > 6$. R: $15 < 12 + a + b$.
15. Sumar ordenadamente:
 $a = 3$; $4 > 2$; $b < 2$. R: $a + 6 > b + 5$.
16. Si $2 + m < 2 + n$, ¿cómo son m y n ? R: $m < n$.
17. Si $a + b = a + c$, ¿cómo son b y c ? R: $b = c$.
18. Si $3 + a \geq 5$, ¿cuánto vale a ? R: $a \geq 2$.
19. Si $5 + a > 3 + b$, ¿cómo son a y b ? R: $a > b$.

Arce

CAPITULO IV

PROGRAMA IV. — Resta de números naturales. Definición. Notación. Nombre de los datos y del resultado. Condición de posibilidad. Un número no altera si se le suma otro y al resultado se le resta este último o viceversa (supresión de términos consecutivos iguales pero precedidos de signo contrario). Interpretación geométrica de la resta de números naturales.

Propiedades uniformes y no conmutativa de la sustracción. Ley de monotonía: Si de los dos miembros de una desigualdad se restan ordenadamente los de una igualdad, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que el de la dada.

Si de los miembros de una igualdad se restan ordenadamente los de una desigualdad, se obtiene una desigualdad de sentido contrario al de la dada. Si los miembros de una desigualdad se restan ordenadamente los de otra desigualdad de sentido contrario, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que el de la primera.

Si al minuendo y sustraendo se les suma o resta un mismo número, la diferencia no varía.

Resta de números naturales

59. Definición. — Se llama *diferencia* entre dos números naturales, al número natural que, sumando al menor de ellos, da una suma igual al otro.

El número mayor se llama *minuendo*, y el menor, *sustraendo*; el minuendo y el sustraendo son los *términos de la diferencia*.

La *resta* o *sustracción* tiene por objeto hallar la diferencia entre dos números.

60. Notación. — La resta de dos números se indica con el signo $-$, *menos*. (*)

Para expresar que la diferencia entre a y b es c , escribimos:

$$a - b = c, \text{ siempre que: } c + b = a.$$

61. Condición de posibilidad. — Por definición

$$\text{minuendo} = \text{sustraendo} + \text{diferencia}$$

luego, por (46), se tendrá:

$$\text{minuendo} \geq \text{sustraendo}$$

de manera que, para que la sustracción sea posible, el minuendo deberá ser mayor o igual que el sustraendo.

62. Corolario de la definición. — Sabemos que:

$$(1) \quad a - b = c, \text{ siempre que: } c + b = a \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1), resulta:

$$(c + b) - b = c \quad (3)$$

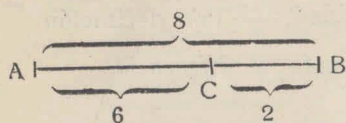
y reemplazando (1) en (2):

$$(a - b) + b = a \quad (4)$$

(*) Los signos $+$ y $-$ aparecieron hacia el año 1500, sustituyendo las antiguas iniciales de **plus** y de **minus**. Sin embargo, eran conocidos por los antiguos egipcios; en el papiro de **Ahmés** titulado "Instrucciones para conocer las cosas secretas", que es la obra de Matemáticas más antigua que se conoce, escrita hace 4.000 años, los signos $+$ y $-$ tienen la forma de las piernas de un hombre que va adelante y hacia atrás.

Las expresiones (3) y (4), en símbolos, nos dicen que: *Un número no cambia si se le suma otro y al resultado se le resta este último, o viceversa.*

63. Interpretación geométrica de la resta de números naturales.



Si el segmento AB (Fig. 7), representa al número 8 y AC al número 6, el segmento CB = 2

representa geométricamente a la diferencia $8 - 6$.

Propiedades de la resta de números naturales

64 Propiedad uniforme. — TEOREMA *Restando miembro a miembro dos igualdades, se obtiene otra igualdad*

$$H \quad \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \quad T) \quad a - b = a' - b'$$

Si $a - b$ no fuese igual que $a' - b'$, sería

$$\begin{aligned} a - b &\geq a' - b' \\ b &= b' \end{aligned}$$

pero.

$$\text{y por (57): } (a - b) + b \geq (a' - b') + b'$$

$$\text{y por (62): } a \geq a'$$

lo que es absurdo, pues es contrario a la hipótesis, luego es

$$a - b = a' - b'$$

65. Propiedad no conmutativa. — *La sustracción no es conmutativa.*

En efecto: $\left\{ \begin{array}{l} 6 - 4 = 2 \\ 4 - 6 \neq 2 \end{array} \right\} \therefore 6 - 4 \neq 4 - 6$

En general:

$$\boxed{a - b \neq b - a} \quad \text{si } a \neq b.$$

66. Propiedad monótona. — TEOREMA. — *Si de los dos miembros de una desigualdad se restan ordenadamente los de una igualdad, siempre que sea posible, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que el de la dada.*

$$\text{H} \quad \left\{ \begin{array}{l} a > b \\ c = c; c < b \end{array} \right. \quad \text{T) } a - c > b - c$$

Si $a - c$ no fuese mayor que $b - c$, sería por (29) .

$$a - c \leq b - c$$

pero

$$c = c$$

y por (57): $(a - c) + c \leq (b - c) + c$

y por (62), resulta:

$$a \leq b$$

lo que es absurdo, pues es contrario a la hipótesis, luego es:

$$\boxed{a - c > b - c}$$

67. TEOREMA. — *Si de los miembros de una igualdad se restan ordenadamente los de una desigualdad, siempre que sea posible, se obtiene una desigualdad de sentido contrario al de la dada.*

$$\text{H} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = a \\ b > c; b < a \end{array} \right. \quad \text{T) } a - b < a - c$$

Si $a - b$ no fuese menor que $a - c$, sería, (29), igual o mayor:

$$\begin{array}{r} a - b \geq a - c \\ b > c \end{array}$$

pero:

$$\text{y por (57):} \quad (a - b) + b > (a - c) + c$$

y por (62), queda:

$$a > a$$

lo que es absurdo, pues se opone a la hipótesis, luego es:

$$\boxed{a - b < a - c}$$

68. TEOREMA. — Si de los miembros de una desigualdad se restan ordenadamente los de otra desigualdad de sentido contrario, siempre que sea posible, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que el de la primera.

$$H \quad \left\{ \begin{array}{l} a > b \\ c < d; d \leq b \end{array} \right. \quad a - c > b - d$$

Si $a - c$ no fuera mayor que $b - d$, sería (29):

$$\begin{array}{r} a - c \leq b - d \\ c < d \end{array}$$

pero:

$$\text{y por (57):} \quad (a - c) + c < (b - d) + d$$

$$\text{y por (62), queda:} \quad a < b$$

lo que es absurdo, pues es contrario a la hipótesis, luego es:

$$\boxed{a - c > b - d}$$

69. Observación. — Si se tuviera que restar dos desigualdades del mismo sentido, no podría adelantarse el signo del resultado, pues puede ser $>$, $=$ o $<$.

$$\text{Así, si es: } \left. \begin{array}{l} a > b \\ y \ c > d \end{array} \right\} a - c ? b - d$$

Ejemplos:

$$\left. \begin{array}{l} 6 > 4 \\ 2 > 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 4 > 3; \\ 5 > 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 7 > 4 \\ 2 = 2; \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 10 > 7 \\ 6 > 2 \end{array} \right\} 4 < 5$$

70. TEOREMA. — Si al minuendo y sustraendo se les suma un mismo número, la diferencia no varía.

H) $a - b = c$; m núm. dado;

T) $(a + m) - (b + m) = c$

Por hipótesis:

$$a - b = c \quad \therefore \quad c + b = a$$

pero:

$$m = m$$

y por (52)

$$(c + b) + m = a + m$$

y por (56):

$$c + (b + m) = a + m$$

y por definición de diferencia:

$$(a + m) - (b + m) = c$$

71. COROLARIO. — Por lo demostrado:

$$(a + m) - (b + m) = c$$

y por hipótesis:

$$a - b = c$$

y como los segundos miembros son iguales, se deduce

$$(a + m) - (b + m) = a - b$$

pero para obtener el segundo miembro, al minuendo y al sustraendo del primero hubo que restar m , luego:

Si al minuendo y sustraendo se le resta un mismo número la diferencia no varía.

EJERCICIOS

20. Interpretar geométricamente la resta $8 - 5$.
21. Idem, ídem $12 - 7$.
22. Si $8 - a = 8 - b$, ¿cómo son a y b ? R: $a = b$.
23. Si $5 - a = m - a$, ¿cuánto vale m ? „ $m = 5$.
24. Si $7 - a < 9 - b$, ¿cómo son a y b ? „ $a > b$.
25. Si $6 - a > 6 - b$, ¿cómo son a y b ? „ $a < b$.
26. Si $a - 2 > b - 2$, ¿cómo son a y b ? „ $a > b$.
27. Si $a - b < c - 2$, ¿qué relaciones puede haber entre a , b , c y 2 ? R: $\left\{ \begin{array}{l} a = c \\ b > 2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} a < c \\ b = 2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} a > c \\ b < 2 \end{array} \right.$
28. Si $8 - 5 = 3$, ¿cuál será la diferencia si al minuendo y sustraendo se suman 7? R: 3
29. Si $a - 8 = d$, ¿cuál será la diferencia si al minuendo y sustraendo se le resta 5? „ d

CAPITULO V

PROGRAMA V. — Suma algebraica de números naturales. (Sucesión de sumas y restas indicadas). Restar un número de una suma. Sumar un número a una diferencia. Restar un número a una diferencia. Restar una suma de un número. Restar una diferencia de un número. Reglas prácticas para la supresión e intercalación de paréntesis.

Toda suma algebraica de números naturales es igual a la suma de los términos positivos menos la suma de los términos negativos. La suma de dos o más diferencias es igual a la suma de los minuendos menos la suma de los sustraendos.

Suma algebraica de números naturales

72. Definiciones. — La sucesión de sumas y restas indicadas entre varios números, se llama *suma algebraica* de ellos.

Ejemplos:

$$a + b - c; \quad 7 - 3 + 6 + a - b$$

Cada uno de los números de una suma algebraica se llama *término* de la suma; un término es *positivo*, si le precede el signo $+$, y *negativo*, si le precede el signo $-$.

En la suma algebraica $4 + 2 - a - 7 + b$, los términos positivos son: 4, 2 y b , y los negativos: a y 7.

Si el primer término no tiene signo, se conviene en llamarlo *positivo*, como hemos hecho en el ejemplo anterior.

73. Restar un número de una suma. — TEOREMA.
— *Para restar un número de una suma, se resta de uno de los sumandos, siempre que sea posible, y al resultado se suman los demás sumandos.*

$$H) a + b; c \leq a \quad T) (a + b) - c = (a - c) + b$$

Supongamos que sea:

$$(a + b) - c = (a - c) + b$$

pero:

$$c = c$$

$$\text{y por (52): } [(a + b) - c] + c = [(a - c) + b] + c$$

y por las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, en el segundo miembro, se tiene:

$$[(a + b) - c] + c = (a - c) + c + b$$

y por un corolario anterior, (62), queda:

$$a + b = a + b$$

Y siendo cierta esta expresión, también lo es la supuesta, luego:

$$(a + b) - c = (a - c) + b$$

Ejemplo:

$$(8 + 3) - 6 = (8 - 6) + 3 = 2 + 3 = 5$$

74. Sumar un número a una diferencia. — COROLARIO. — *Para sumar un número a una diferencia, se suma al minuendo, y al resultado se le resta el sustraendo.*

Se tiene:

$$(a + b) - c = (a - c) + b$$

y por (33):

$$(a - c) + b = (a + b) - c$$

Ejemplo:

$$(10 - 7) + 5 = (10 + 5) - 7 = 15 - 7 = 8$$

75. Restar un número a una diferencia. — TEOREMA.

— *Para restar un número de una diferencia, se resta ese número del minuendo, siempre que sea posible, y del resultado se resta el sustraendo.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} a - b; \\ c \leq a - b \end{array} \right. \quad T) \quad (a - b) - c = (a - c) - b$$

Supongamos que sea:

$$(a - b) - c = (a - c) - b$$

pero: $b + c = b + c$

por (52):

$$[(a - b) - c] + b + c = [(a - c) - b] + b + c$$

y por (62), queda: $a = a$

Y siendo cierta esta expresión, también lo es la supuesta, luego:

$$(a - b) - c = (a - c) - b$$

Ejemplo:

$$(7 - 2) - 3 = (7 - 3) - 2 = 4 - 2 = 2$$

76. Restar una suma de un número. — TEOREMA.

Para restar una suma de un número, si ello es posible, se resta uno de los sumandos del número dado, y del resultado se resta el otro sumando.

$$H \left\{ \begin{array}{l} a; \\ b + c \leq a. \end{array} \right. \quad T) \quad a - (b + c) = (a - b) - c$$

Supongamos que sea.

$$a - (b + c) = (a - b) - c$$

pero: $b + c = b + c$

y por (52):

$$[a - (b + c)] + (b + c) = [(a - b) - c] + (b + c)$$

por la propiedad asociativa de la suma, en el segundo miembro:

$$[a - (b + c)] + (b + c) = [(a - b) - c] + b + c$$

y por (62), queda: $a = a$

Y siendo cierta esta expresión, también lo es la supuesta, luego:

$$a - (b + c) = (a - b) - c$$

Ejemplo:

$$12 - (3 + 4) = (12 - 3) - 4 = 9 - 4 = 5$$

77. COROLARIO. — *Para restar un número a una diferencia, se suma dicho número al sustraendo.*

$$\text{Se tiene: } a - (b + c) = (a - b) - c$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$(a - b) - c = a - (b + c)$$

Ejemplo:

$$(15 - 6) - 5 = (15 - 5) - 6 = 10 - 6 = 4$$

78. Observación. — Por el teorema (75), sabemos que:

$$(a - b) - c = (a - c) - b$$

$$\text{y por (77): } (a - b) - c = a - (b + c)$$

y como los primeros miembros son iguales, resulta:

$$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c)$$

79. Restar una diferencia de un número. — **TEOREMA.**
— *Para restar una diferencia de un número, si ello es*

posible, se resta el minuendo a dicho número, y al resultado se suma el sustraendo.

$$H \begin{cases} a; \\ b - c \leq a \end{cases} T) \quad a - (b - c) = (a - b) + c$$

Supongamos que sea:

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

pero

$$b - c = b - c$$

y por (52):

$$[a - (b - c)] + (b - c) = [(a - b) + c] + (b - c)$$

y por (55), en el segundo miembro:

$$[a - (b - c)] + (b - c) = (a - b) + c + (b - c)$$

y por (62), queda:

$$a = a$$

Y siendo cierta esta expresión, también lo es la supuesta, luego:

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

Ejemplo:

$$18 - (7 - 3) = (18 - 7) + 3 = 11 + 3 = 14$$

80. Nota. — Hay que tener en cuenta, en las aplicaciones de los teoremas precedentes, que las sustracciones dadas sean posibles, pues sino se obtendrían resultados sin sentido.

Reglas prácticas para la supresión e intercalación de paréntesis

81. TEOREMA. — Para suprimir un paréntesis precedido del signo más, se escriben los términos que están dentro del paréntesis con sus respectivos signos.

Los términos del paréntesis o son todos positivos, o positivos y negativos.

1º Tesis: $a + (b + c) = a + b + c.$

En efecto, por la propiedad asociativa de la suma:

$$a + (b + c) = a + b + c$$

2º Tesis: $a + (b - c) = a + b - c.$

Por el corolario (74), sabemos que

$$a + (b - c) = (a + b) - c$$

y por el caso anterior:

$$a + (b - c) = a + b - c$$

En general:

$$a + (b - c + d - e) = a + b - c + d - e$$

Ejemplo: Suprimir paréntesis en la siguiente expresión:

$$8 + (7 - 4 + 2) = 8 + 7 - 4 + 2 = 13$$

82. COROLARIO. — *Dos o más números pueden encerrarse en un paréntesis precedido del signo más, siempre que conserven sus signos.*

En efecto, por el teorema anterior, se tiene:

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$a + (b - c) = a + b - c$$

y por el carácter recíproco de la igualdad

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + (b + c) \\ a + b - c &= a + (b - c) \end{aligned}$$

83. TEOREMA. — *Para suprimir un paréntesis precedido del signo menos, se escriben los términos en él encerrados con signos contrarios a los que tuvieran.*

Los términos del paréntesis, o son todos positivos, o positivos y negativos.

1º) Tesis: $a - (b + c) = a - b - c.$

Por el teorema (76), se tiene:

$$a - (b + c) = (a - b) - c$$

y por (81):

$$a - (b + c) = a - b - c$$

2º) Tesis: $a - (b - c) = a - b + c$

Por el teorema (79), se tiene:

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

y por (81):

$$a - (b - c) = a - b + c$$

En general:

$$a - (b - c + d) = a - b + c - d$$

Ejemplo: Suprimir paréntesis en la siguiente expresión:

$$18 - (5 + 3 - 6) + (4 - 1) = 18 - 5 - 3 + 6 + 4 - 1 = 21$$

84. COROLARIO. — *Dos o más números pueden encerrarse en un paréntesis precedido del signo menos, siempre que se escriban con signos contrarios a los que tuvieron.*

En efecto, por el teorema anterior, se tiene:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

y también: $a - (b - c) = a - b + c$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$a - b - c = a - (b + c)$$

$$a - b + c = a - (b - c)$$

85. TEOREMA. — *Toda suma algebraica de números naturales es igual a la suma de los términos positivos menos la suma de los términos negativos.*

H) $a - b + c - d + e$

T) $a - b + c - d + e = (a + c + e) - (b + d)$

Sabemos, (32), que:

$$a - b + c = a - b + c$$

y por (82):

$$a - b + c = (a - b) + c$$

y sumando c a la diferencia $a - b$, en el segundo miembro, (74):

$$a - b + c = (a + c) - b$$

escribamos:

$$d = d$$

restando, (64):

$$(a - b + c) - d = [(a + c) - b] - d$$

por (81) y (77):

$$a - b + c - d = (a + c) - (b + d)$$

Escribamos:

$$c = c$$

sumando, (52) :

$(a - b + c - d) + e = [(a + c) - (b + d)] + e$
por (81) y (74), resulta, finalmente :

$$a - b + c - d + e = (a + c + b) - (b + d)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 7 - 3 + 2 - 5 + 4 &= (7 + 2 + 4) - (3 + 5) \\ &= 13 - 8 = 5 \end{aligned}$$

86. TEOREMA. — *La suma de dos o más diferencias es igual a la suma de los minuendos menos la suma de los sustraendos.*

$$\text{H) } (a - b) + (c - d)$$

$$\text{T) } (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$$

Suprimiendo paréntesis de la expresión dada, resulta

$$(a - b) + (c - d) = a - b + c - d$$

y por el teorema anterior:

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (4 - 2) + (5 - 3) &= (4 + 5) - (2 + 3) \\ &= 9 - 5 = 4 \end{aligned}$$

EJERCICIOS

30. Efectuar $(7 + a) - 3$ R: $4 - a$
31. „ $(m + 4) - 2$ „ $m + 2$
32. „ $(12 - m) - 5$ „ $7 - m$
33. „ $(x + 7) + 3$ „ $x + 10$
34. „ $12 - (10 + x)$ „ $2 - x$
35. „ $a - (a - 2)$ „ 2
36. „ $(c + 4) - 2$ „ $c + 2$
37. „ $(8 - b) - 5$ „ $3 - b$
38. „ $3 - (3 - a)$ „ a
39. „ $9 - (7 - m)$ „ $2 + m$
40. Suprimir paréntesis y efectuar las operaciones:
 $2 + (3 + a - b) + (7 + b)$ R: $12 + a$
41. Idem, ídem:
 $6 + a - (2 + a - b + 4)$ „ b
42. Idem, ídem:
 $2 + (8 - a + b) - (6 - a + b)$ „ 4
43. Introducir $3 - b + a$ en paréntesis precedido del signo $+$, y sumarlo luego a 5. R: $5 + (3 - b + a)$
44. Escribir de otro modo la expresión:
 $3 - a + 5 - 2 + b$ R: $(8 + b) - (a + 2)$
45. Sumar estas diferencias:
 $8 - 2; 6 - a; a - b; b - 5$ R: $7.$

CAPITULO VI

PROGRAMA VI. — Multiplicación de números naturales. Definiciones: Producto de un número por cero, por uno y por un número mayor que uno. Tablas. Interpretación geométrica de la multiplicación de números naturales.

Propiedades de la multiplicación de números naturales: uniforme, conmutativa y distributiva con respecto a la suma y a la resta. Producto de una suma algebraica por un número. Factor común.

Producto de una suma por otra. Producto de una suma por una diferencia. Producto de una diferencia por otra.

Leyes de monotonía: Si los miembros de una desigualdad se multiplican ordenadamente por los de una igualdad, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que el de la dada. Si dos o más desigualdades de un mismo sentido, se multiplican miembro a miembro, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.

Multiplicación de números naturales

87. Definiciones. — I. El *producto* de un número natural por *cero*, es *cero*.

El producto de dos números se indica con el signo $\times$, *multiplicado por*. Así, el producto de a y *cero*, se indica:

$$a \times 0 = 0$$

88. II. El *producto* de un número natural por *uno*, es el mismo número natural:

$$3 \times 1 = 3 \quad ; \quad a \times 1 = a$$

89. III. El *producto* de un número natural por otro, *mayor que uno*, es la suma de tantos números iguales al primero como unidades tiene el segundo.

Es decir: $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{b \text{ sumandos}}$

$$a \times b = a + a + \dots + a$$

La *multiplicación* tiene por objeto hallar el producto de dos números; el primero se llama *multiplicando* y el segundo *multiplicador*. El multiplicando y el multiplicador son los *factores del producto*. Cuando uno de los factores, o los dos, son literales, el signo $\times$ se reemplaza por un punto, o se omite completamente. (*)

Ejemplos: $2 \times a = 2.a = 2a$
 $a \times b = a.b = ab$

90 Múltiplo. — *Múltiplo* de un número es el producto de él por otro. Para indicar que a es múltiplo de b , se escribe:

$$a = \dot{b}$$

91 Tabla de multiplicar. — El producto de dos números naturales de una cifra se obtiene con la *Tabla de multiplicar*, que se forma así:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Tabla de multiplicar

Se prepara un cuadrado con 81 casillas. En la primer fila horizontal se escriben los números de 1 a 9; en la segunda se escriben dos en dos, comenzando por 2; en la tercera

(*) El signo $\times$ fué introducido por G. Oughtred. (1575 - 1660); y el uso del punto como signo de multiplicar se debe a H. Harriot

ra de tres en tres, co menzando por 3, etc. Omitimos el uso de la *Tabla* por ser conocido.

92. Interpretación geométrica de la multiplicación de números naturales.

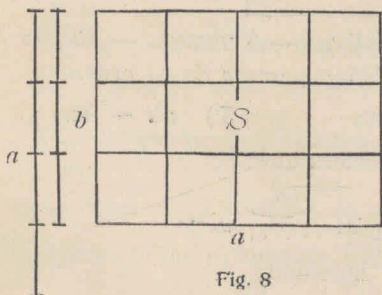


Fig. 8

— Si los segmentos a y b , Fig. 8, representan a los números 4 y 3, respectivamente, el área del rectángulo cuya base es a y cuya altura es b , es el producto de los números representados por a y por b :

$$\text{área rect. } S = a \times b = 4 \times 3 = 12$$

Propiedades de la multiplicación de números naturales

93. Propiedad uniforme. — TEOREMA. — *Multipli- cando miembro a miembro dos igualdades, se obtiene otra igualdad.*

$$H \quad \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \end{array} \right.$$

$$T \quad ab = a'b'$$

Por definición:

$$ab = a + a + \overbrace{\dots\dots\dots}^b + a$$

y también:

$$a'b' = a' + a' + \overbrace{\dots\dots\dots}^{b'} + a'$$

(1560-1621). En 1637, Renato Descartes, (1596-1653), suprimió to- do signo para indicar el producto.

Péro los segundos miembros son iguales por estar constituídos por sumandos iguales; luego (35):

$$ab = a'b'$$

94. Propiedad conmutativa. — TEOREMA. — *El producto de dos factores es independiente de su orden.*

H) a y b , fact. dados

T) $ab = ba$.

Por lo visto en (45), sabemos que:

$$a = 1 + 1 + \overbrace{\dots\dots\dots}^a + 1$$

y escribiendo b veces esa igualdad:

$$a = 1 + 1 + \overbrace{\dots\dots\dots}^a + 1$$

$$a = 1 + 1 + \overbrace{\dots\dots\dots}^a + 1$$

$$b \left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}$$

$$a = 1 + 1 + \overbrace{\dots\dots\dots}^a + 1$$

sumando ordenadamente, (52):

$$a + a + \dots + a = (1 + 1 + \dots + 1) + \overbrace{\dots\dots\dots}^a + (1 + 1 + \dots + 1) + \overbrace{\dots\dots\dots}^a + \dots + (1 + 1 + \dots + 1) + \overbrace{\dots\dots\dots}^a + 1$$

por (45), en el segundo miembro se tiene:

$$a + a + \overbrace{\dots\dots\dots}^b + a = b + b + \overbrace{\dots\dots\dots}^a + b$$

y por definición de producto (89):

$$ab = ba$$

95. Propiedad distributiva. — TEOREMA. — *El producto de una suma por un número, es igual a la suma de los productos que se obtienen multiplicando cada sumando por el número dado.*

H) $a + b$; m núm. dado;

T) $(a + b) m = am + bm$

Por definición de producto, (89), sabemos que:

$(a + b) m = (a + b) + (a + b) + \overbrace{\dots}^m + (a + b)$
suprimiendo los paréntesis, (81):

$(a + b) m = a + b + a + b + \overbrace{\dots}^m + a + b$
por la propiedad conmutativa de la suma, (53):

$(a + b) m = a + a + \overbrace{\dots}^m + a + b + b + \overbrace{\dots}^m + b$

y por definición de producto:

$$(a + b) m = am + am$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (4 + 2 + 5) 3 &= 4.3 + 2.3 + 5.3 \\ &= 12 + 6 + 15 = 33 \end{aligned}$$

96. TEOREMA II. — *El producto de una diferencia por un número, es igual a la diferencia de los productos del minuendo y el sustraendo por el número dado.*

H) $a - b$; m núm. dado; T) $(a - b) m = am - bm$.

Por definición de producto:

$$(a-b) m = (a-b) + (a-b) + \overbrace{\dots\dots}^m + (a-b)$$

por el teorema (86), en el segundo miembro se tiene:

$$(a-b) m = (a + \overbrace{a + \dots\dots}^m + a) - (b + \overbrace{b + \dots\dots}^m + b)$$

y por definición de producto:

$$(a - b) m = am - bm$$

97. Producto de una suma algebraica por un número — TEOREMA. — *El producto de una suma algebraica por un número, es igual a la suma algebraica de los productos que se obtienen multiplicando cada término por el número dado, efectuando las operaciones en el orden dado.*

H) $a - b + c$; m núm. dado.

T) $(a - b + c) m = am - bm + cm$

Sea $a - b = x$, entonces:

$$(a - b + c) m = (x + c) m$$

y por la propiedad distributiva, (95):

$$(a - b + c) m = xm + cm$$

reemplazando x por su valor $a - b$:

$$(a - b + c) m = (a - b) m + cm$$

y por (96):

$$(a - b + c) m = am - bm + cm$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(5-2+4)3 &= 5.3 - 2.3 + 4.3 \\ &= 15 - 6 + 12 = 21\end{aligned}$$

98. Factor común. — COROLARIO. — Siendo:

$$(a - b + c) m = am - bm + cm$$

por el carácter recíproco de la igualdad:

$$am - bm + cm = (a - b + c) m$$

Reemplazar el primer miembro por el segundo, es sacar el factor común m .

Ejemplo:

$$3a + 2a - a = (3 + 2 - 1)a = 4a$$

99. Producto de una suma por otra. — TEOREMA. —
El producto de una suma por otra es igual a la suma de los productos que se obtienen al multiplicar cada término de la primera por cada término de la segunda suma.

$$H \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b \\ m + n \end{array} \right\} \text{ sumas dadas;}$$

$$T) \quad (a + b) (m + n) = am + bm + an + bn$$

Sea $m + a = s$, entonces:

$$(a + b) (m + n) = (a + b) s$$

$$\text{y por (95):} \quad = as + bs$$

reemplazando s por su valor:

$$= a (m+n) + b (m+n)$$

$$\text{y por (95):} \quad = am + an + bm + bn$$

y por (53):

$$(a+b) (m+n) = am + bm + an + bn$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (4+3) (2+6) &= 4.2+3.2+4.6+ 3.6 \\ &= 8 + 6 + 24 + 18 = 56 \end{aligned}$$

100. Producto de una suma por una diferencia. —

TEOREMA. — *El producto de una suma por una diferencia, es igual a la suma de los productos del minuendo por los términos de la suma, menos el sustraendo por los términos de la suma.*

$$H \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b \\ m - n \end{array} \right.$$

$$T) (a + b) (m - n) = am + bm - an - bn$$

Sea $m - n = d$, entonces:

$$(a + b) (m - n) = (a + b) d$$

y por (95):

$$= ad + bd$$

reemplazando d por su valor $= a (m-n) + b (m-n)$

y por (96), resulta

$$= am - an + bm - bn$$

y por un corolario anterior, (82):

$$= (am-an) + (bm-bn)$$

sumando las diferencias del segundo miembro, (86):

$$(a + b) (m - n) = (am + bm) - (an + bn)$$

y suprimiendo paréntesis:

$$(a + b) (m-n) = am + bm - an - bn$$

Ejemplo:

$$(5+3) (6-2) = 5.6 + 3.6 - 5.2 - 3.2 \\ = 30 + 18 - 10 - 6 = 32$$

101. Producto de una diferencia por otra. — TEOREMA. — *El producto de una diferencia por otra, es igual al producto de los minuendos, más el producto de los sustraendos, menos los productos de minuendos y sustraendos.*

$$H \quad \left\{ \begin{array}{l} a - b \\ m - n \end{array} \right\} \text{ dif. dadas.}$$

$$T) (a - b) (m - n) = am + bn - an - bm$$

Sea $m - n = d$, entonces:

$$(a - b) (m - n) = (a - b) d$$

$$\text{y por (96):} \quad = ad - bd$$

$$\text{reemplazando } d \text{ por su valor} = a(m - n) - b(m - n)$$

$$\text{y por (96):} \quad = am - an - (bm - bn)$$

$$\text{suprimiendo paréntesis} \quad = am - an - bm + bn$$

por un teorema anterior, (85):

$$= (am + bn) - (an + bm)$$

suprimiendo paréntesis, resulta:

$$(a - b) (m - n) = am + bn - an - bm$$

Ejemplo:

$$(4 - 2) (7 - 4) = 4.7 + 2.4 - 4.4 - 2.7 \\ = 28 + 8 - 16 - 14 = 6$$

102. Propiedad monótona. — **TEOREMA.** — *Si los miembros de una desigualdad se multiplican ordenadamente por los de una igualdad, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que el de la dada.*

$$\text{H} \quad \left\{ \begin{array}{l} a > b \\ m = m \end{array} \right. \quad \text{T) } am > bm$$

Siendo:

$$a > b \quad \therefore a = b + c$$

pero:

$$m = m$$

$$\text{y por (52):} \quad am = (b + c) m$$

$$\text{y por (95):} \quad am = bm + cm$$

luego, (46):

$$\boxed{am > bm}$$

103. TEOREMA. — *Si dos desigualdades de un mismo sentido se multiplican miembro a miembro, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.*

$$\text{H} \quad \left\{ \begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array} \right. \quad \text{T) } ac > bd$$

$$\text{Al ser } a > b, \text{ por (102), es: } ac > bc \quad (1)$$

$$\text{y } c > d, \text{ por (102), es: } bc > bd \quad (2)$$

De (1) y (2), por (36):

$$\boxed{ac > bd}$$

$$- 61(a - 2b + 3c)$$

EJERCICIOS

46. Señalar, entre los números 12, $3m$, 21, $8a$, $6b$ y 24, los múltiplos de 3 y de 4.
47. Interpretar geométricamente el producto 2×3 .
48. Si $4a = 4b$, ¿cómo son a y b ? R: $a = b$
49. Si $7m = am$, ¿cuánto vale a ? „ $a = 7$
50. Efectuar: $(3 + a + b)4$ R: $12 + 4a + 4b$
51. „ $(8 - a)b$ „ $8b - ab$
52. „ $(a - 2 + b - 5)5$ „ $5a - 10 + 5b - 25$
53. Si $(a + 1)(b + 1) = 1$ ¿cuánto valen a y b ? R: $a = b = 0$
54. ¿En qué caso es $a(b + 1) = 2$? „ $a = b = 1$
55. „ „ $a(c + 2) = 2$? R: $a = 1; c = 0$
56. Sacar factor común: $2a - 4b + 6c$. R: $2(a - 2b + 3c)$
57. „ „ „ $5m + 3m - 2m$. „ $m(5 + 3 - 2)$
58. „ „ „ $6a - 3a + 9a$. „ $3a(2 - 1 + 3)$
59. Si $3a > 3b$, ¿cómo son a y b ? R: $a > b$
60. Si $ac < bd$, ¿qué relaciones puede haber entre a, b, c y d ?
61. Multiplicar: $3 < a; b > 4$. R: $12 < ab$
62. Demostrar que la suma de dos números más la diferencia de los mismos es igual al duplo del mayor.
63. Dados cuatro números consecutivos, demostrar que el 1º por el 4º, menos el 2º por el 3º es igual a 2.
64. Demostrar que si es $a > b > c$, también:

$$a(b - c) + c(a - b) = b(a - c)$$

CAPITULO VII

PROGRAMA VII. — Producto de varios números naturales. Definición. Propiedad uniforme. Propiedad conmutativa: Si se invierte el orden de dos factores consecutivos, no altera el producto; el orden de los factores no altera el producto. Propiedad asociativa.

Producto de varios números naturales

104. Definición. — Se llama *producto de varios factores*, dados en un cierto orden, al número que se obtiene multiplicando los dos primeros factores, el resultado por el tercero, el resultado por el cuarto, y así hasta terminar con todos los factores.

El producto de los factores a, b, c, d , es:

$$abcd = [(ab) c] d$$

105. COROLARIO. — Si en un producto de varios factores, uno de ellos es cero, el producto es cero.

106. Factorial. — Se llama *factorial* de un número al producto de los números consecutivos desde 1 hasta el número considerado inclusive.

El factorial de un número se representa colocando el signo ! después del número.

Ejemplos:

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

Propiedades del producto de varios factores

107. Propiedad uniforme. — TEOREMA. — *Multipli-
cando miembro a miembro varias igualdades, se obtiene
otra igualdad.*

$$\text{H} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{array} \right. \quad \text{T) } abc = a'b'c'$$

Por la propiedad uniforme del producto de dos fac-
tores:

$$\text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \end{array} \right. \quad \therefore \quad ab = a'b'$$

por la misma razón:

$$\text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} ab = a'b' \\ c = c' \end{array} \right. \quad \therefore \quad (ab)c = (a'b')c'$$

y por definición de producto:

$$abc = a'b'c'$$

108. Propiedad conmutativa. — TEOREMA. — *Si se
invierte el orden de dos factores consecutivos, el produc-
to no altera.*

$$\text{H) } abcd$$

$$\text{T) } abcd = acbd$$

Por un teorema anterior, (94):

$$bc = cb$$

pero:

$$a = a$$

$$\text{multiplicando, (93):} \quad a(bc) = a(cb)$$

y por definición de producto

$$abc = acb$$

pero:

$$d = d$$

multiplicando, (93):

$$(abc)d = (acb)d$$

y por definición de producto de varios factores:

$$abcd = acbd$$

109. COROLARIO. — *El orden de los factores no altera el producto.*

Es decir, que:

$$abcd = abdc = bdca = \text{etc}$$

110., Propiedad asociativa. — **TEOREMA.** — *En todo producto de varios factores, se pueden reemplazar dos o más de ellos por su producto efectuado.*

$$H) \quad abcd \quad T) \quad abcd = (ab)cd = a(bcd) = \text{etc}$$

Por definición de producto, (104)

$$abcd = (ab)cd \quad (1)$$

Por el corolario anterior:

$$abcd = bcda$$

$$\text{o bien, (104)} \quad = (bcd)a$$

$$\text{y por (108)} \quad = a(bcd) \quad (2)$$

Comparando (1) y (2), resulta:

$$abcd = (ab)cd = a(bcd) = \text{etc.}$$

111. Propiedad monótona. — TEOREMA. — *Multipli-
cando miembro a miembro varias desigualdades del mis-
mo sentido, se obtiene otra desigualdad de igual sentido.*

$$H \quad \left\{ \begin{array}{l} a > a' \\ b > b' \\ c > c' \end{array} \right\} \quad T) \quad abc > a'b'c'$$

Por hipótesis: $\left\{ \begin{array}{l} a > a' \\ b > b' \end{array} \right\}$ y: por (103): $ab > a'b'$

Se tiene: $\left\{ \begin{array}{l} c > c' \\ ab > a'b' \end{array} \right\}$ y: por (103): $(ab)c > (a'b')c'$

y por definición de producto, (104):

$a b c > a' b' c'$

EJERCICIOS

65. Calcular $3!$ R: 6
 66. „ $4!$ „ 24
 67. „ $6!$ „ 720
 68. Aplicando la propiedad conmutativa, escribir de todas
maneras posibles $2 \times 3 \times 4$.
 69. Aplicando la propiedad asociativa, escribir de todas las
maneras posibles $a b c d$.
 70. ¿En qué caso es $a(b + 1)(c + 2) = 4$? R: $\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{array} \right.$

CAPITULO VII

PROGRAMA VIII. — División de números naturales. Definición.

Notación. Nombre de los datos y del resultado. Condiciones de posibilidad. Un número no altera cuando se lo multiplica por otro y al resultado se lo divide por este último, o viceversa (simplificación). Interpretación geométrica de la división de números naturales.

Propiedades: uniforme, no conmutativa; distributiva con respecto a la suma y a la resta de múltiples del divisor. Ley de monotonía.

Cociente del producto de varios factores por uno de ellos o por un divisor de uno de ellos. Si se divide un número por otro y el cociente se divide por un tercer número, se obtiene el mismo resultado que dividiendo el primero por el producto de los dos últimos.

Si el dividendo y el divisor se multiplican o dividen por un mismo número, el cociente no altera.

División de números naturales

112. Definición. — Se llama *cociente* de dos números naturales, llamados *dividendo* y *divisor*, a otro número natural, tal, que multiplicado por el divisor, dé un producto igual al dividendo.

Dividir dos números es hallar su cociente.

La *división* tiene por objeto hallar el cociente de dos números.

113. Notación y signo. — La división se indica por medio de dos puntos, $:$, o bien poniendo una rayita horizontal entre el dividendo y el divisor, que se leen *dividido por*. (*).

(*) El signo $:$ se debe a Oughtred.

la notación $\frac{a}{b}$ remonta a los árabes y a los hindúes.

Si a es el dividendo, b el divisor y c el cociente, escribiremos:

$$a : b = c, \text{ siempre que } c \cdot b = a$$

114. Corolarios de la definición. — I *El cociente de un número por uno, es el mismo número.*

En efecto. $a : 1 = a$, porque $a \times 1 = a$.

115. II — *El cociente de un número por sí mismo, es el número uno*

En efecto. $a : a = 1$, porque $1 \times a = a$.

116. III. *El cociente de cero por un número, es cero*

En efecto: $0 : a = 0$, porque $0 \times a = 0$.

117 Condiciones de posibilidad. — Para que la división sea posible, se requiere:

1º Que el divisor sea distinto de cero, pues si el divisor fuese cero, ningún cociente por cero nos dará un producto igual al dividendo, luego:

$$a : b = c, \text{ siempre que sea } b \neq 0$$

2º Que el dividendo sea el producto del divisor por otro número, pues por la definición se debe tener:

$$a : b = c, \text{ siempre que sea } b \cdot c = a$$

118. TEOREMA — *Un número no altera cuando se lo multiplica por otro y al resultado se lo divide por ese otro o viceversa.*

H) a y b , núm. dados.

$$T \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \quad \frac{a}{b} = a \\ 2^\circ \quad \left(\frac{a}{b} \right) b = a \end{array} \right.$$

1º En efecto: $\frac{a}{b} = a \quad (1),$

pues, por definición de cociente, se obtiene una expresión cierta:

$$ab = ab.$$

2º Sea:

$$\frac{a}{b} = c \quad \therefore \quad cb = a \quad (2)$$

y reemplazando en (2) c por su valor $\frac{a}{b}$:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b} \right) b = a}$$

119. OBSERVACIÓN. — Reemplazar el primer miembro de las expresiones (1) y (2) por el segundo, es *simplificar* el factor y divisor b , iguales.

120. Interpretación geométrica de la división de números naturales.

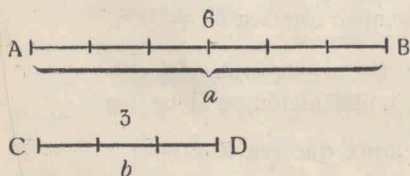


Fig. 9

Si el segmento a representa al número 6, y el segmento b al número 2, el número de veces que el segmento

b cabe en el segmento a , es el cociente de los números representados por a y b (Fig. 9):

$$a : b = 2.$$

Propiedades de la división de números naturales

121. Propiedad uniforme. — TEOREMA. — *Dividiendo miembro a miembro dos igualdades, siempre que sea posible, se obtiene otra igualdad.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \end{array} \right. ; \frac{a}{b} = c ; \frac{a'}{b'} = c' \quad T) \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Si $a : b$ no fuese igual a $a' : b'$, sería:

$$\frac{a}{b} \geq \frac{a'}{b'} \\ b = b'$$

pero

y por (102)

$$\frac{a}{b} \cdot b \geq \frac{a'}{b'} \cdot b'$$

y por (118), queda:

$$a \geq a'$$

lo que es absurdo, pues se opone a la hipótesis, luego:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}}$$

122. Propiedad no conmutativa. — *La division no es conmutativa.*

En efecto:

$$\frac{6}{3} \neq \frac{3}{6}$$

y en general:

$$\boxed{\frac{a}{b} \neq \frac{a}{b}} \quad a \neq b$$

123. Propiedad distributiva. — TEOREMA I. — *El cociente de una suma por un número, es igual a la suma de los cocientes de cada sumando, siempre que sea posible, por el número dado.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} a + b; m \neq 0 \\ a \text{ y } b, \text{ múlt. de } m. \end{array} \right. \quad T \left\{ \frac{a + b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} \right.$$

Si fuese

$$\frac{a + b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$$

por definición de cociente, sería:

$$a + b = \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \right) m$$

y por la propiedad distributiva del producto:

$$a + b = \left(\frac{a}{m} \right) m + \left(\frac{b}{m} \right) m$$

y simplificando, (119), queda

$$a + b = a + b$$

y siendo cierta esta expresión, también lo es la supuesta, luego:

$$\boxed{\frac{a + b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}}$$

Ejemplo:

$$\frac{4 + 6}{2} = \frac{4}{2} + \frac{6}{2} = 2 + 3 = 5$$

124. TEOREMA II. — *El cociente de una diferencia por un número es igual al cociente del minuendo y el número, menos el cociente del sustraendo y el número, siempre que sean posibles estos cocientes.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} a - b; \\ m \neq 0; a \text{ y } b \text{ múlt. de } m; \end{array} \right. \quad T \left\{ \frac{a - b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} \right.$$

Si fuese:

$$\frac{a - b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$$

por definición de cociente, sería:

$$a - b = \left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m} \right) m$$

y por un teorema anterior, (96) .

$$a - b = \left(\frac{a}{m} \right) m - \left(\frac{b}{m} \right) m$$

simplificando, queda

$$a - b = a - b$$

y como esta expresión es cierta, también lo es la su-
puesta, luego:

$$\boxed{\frac{a - b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}}$$

Ejemplo:

$$\frac{12 - 9}{3} = \frac{12}{3} - \frac{9}{3} = 4 - 3 = 1$$

125. Propiedad monótona. — TEOREMA. — *Dividien-
do ambos miembros de una desigualdad por un mismo
número, siempre que sea posible, se obtiene otra des-
igualdad del mismo sentido que el de la dada.*

$$\cdot \text{ H } \left\{ \begin{array}{l} a > b \\ m = m; \text{ a y b, múlt. de m.} \end{array} \right.$$

$$\text{ T } \left\{ \frac{a}{m} > \frac{b}{m} \right.$$

Si $a : m$ no fuese mayor que $b : m$, sería:

$$\frac{a}{m} \leq \frac{b}{m}$$

$$m = m$$

pero:

y por (93) y (102): $\frac{a}{m} \cdot m \leq \frac{b}{m} \cdot m$

y simplificando: $a \leq b$

lo que es absurdo, pues se opone a la hipótesis, luego.

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$$

126. TEOREMA. — *Para dividir un producto de varios factores por uno de ellos, basta suprimir dicho factor.*

H) $a \cdot b \cdot c$

T $\left\{ \frac{a b c}{b} = ac \right.$

Por las propiedades conmutativa y asociativa del producto, se tiene:

$$\frac{a b c}{b} = \frac{a c b}{b} = \frac{(ac) b}{b}$$

y simplificando:

$$\frac{a b c}{b} = ac$$

127. TEOREMA. — *Para dividir un producto de varios factores por un divisor de uno de ellos, basta dividir a dicho factor.*

$$H) \quad a \, b \, c ; \quad b = m \quad T \left\{ \frac{a \, b \, c}{m} = a \left(\frac{b}{m} \right) c \right.$$

$$\text{Sea } \frac{b}{m} = x \quad \therefore \quad xm = b$$

Entonces, resulta, reemplazando b por su valor:

$$\frac{a \, b \, c}{m} = \frac{a \, (xm) \, c}{m}$$

$$\text{o bien, (110):} \quad = \frac{a \, x \, m \, c}{m}$$

$$\text{y por el teorema anterior:} \quad = a \, x \, c$$

reemplazando x por su valor:

$$\boxed{\frac{a \, b \, c}{m} = a \left(\frac{b}{m} \right) c}$$

Ejemplo:

$$\frac{2 \times 15}{5} = 2 \times \frac{15}{5} = 2 \times 3 = 6$$

128. TEOREMA. — Si se divide un número por otro y el cociente se divide por un tercer número, se obtiene el mismo resultado que dividiendo el primero por el producto de los dos últimos.

$$H \left\{ \frac{a}{b} = c; \quad \frac{c}{d} = m \quad T \left\{ \frac{a}{bd} = m \right.$$

Se tiene, por hipótesis:

$$\frac{a}{b} = c \quad \therefore \quad a = bc \quad (1)$$

$$\frac{c}{d} = m \quad \therefore \quad c = dm \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$a = b d m$$

y por (110):

$$a = (bd)m$$

y por definición de cociente:

$$\boxed{\frac{a}{bd} = m}$$

129. TEOREMA. — *Si el dividendo y el divisor se multiplican por un mismo número, distinto de cero, el cociente no altera.*

$$H \left\{ \frac{a}{b} = c; m \neq 0 \right.$$

$$T \left\{ \frac{am}{bm} = c \right.$$

Siendo:

$$\frac{a}{b} = c \quad \therefore a = bc$$

pero:

$$m = m$$

multiplicando ordenadamente:

$$am = (bc)m$$

y por (109) y (110):

$$am = (bm)c$$

y por definición de cociente:

$$\boxed{\frac{am}{bm} = c}$$

130. COROLARIO. — *Si el dividendo y divisor se dividen por un mismo número, el cociente no altera.*

En efecto, sabemos que:

$$y \text{ como: } \left. \begin{array}{l} \frac{am}{bm} = c \\ \frac{a}{b} = c \end{array} \right\} \text{ por (35): } \therefore \boxed{\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}}$$

EJERCICIOS

71. Dar el resultado sin calcular: $(2 \times 3) : 2$ R: 3
72. „ „ „ $(a \times 4) : a$ „ 4
73. Interpretar geométricamente $6 : 2$.
74. „ „ $12 : 4$.
75. Si $10 : a = 10 : b$, ¿cómo son a y b ? R: $a = b$
76. Efectuar: $(15 - 5a) : 5$. „ $3 - a$
77. „ $(24ab - 18b) : 6b$. „ $4a - 3$
78. Si $a : b = 1$, ¿cómo son a y b ? „ $a = b$
79. Si $m : n = m$, ¿cuánto vale n ? „ $n = 1$
80. Si $m : n = 0$, ¿cuánto vale m ? „ $m = 0$
81. Si $6 : a > 6 : b$, ¿cómo son a y b ? „ $a < b$
82. Si $a : 8 < b : 8$, ¿cómo son a y b ? „ $a < b$
83. Efectuar: $(5 \times 6m \times 4ab) : 2b$. R: $5 \cdot 6m \cdot 2a$
84. Si $6 : 3 = 2$, ¿cuál es el cociente si el dividendo y divisor se multiplican por 5? R: 2
85. Si $a : c = 7$, ¿cuál será el cociente si el dividendo y divisor se multiplican por cero? R: no hay cociente

CAPITULO IX

PROGRAMA IX. — División entera. Definición de cociente entero.

La división entera contiene como caso particular a la división exacta. Resto. Interpretación geométrica de la división entera.

Cociente y resto por exceso. La suma es igual al divisor por el cociente más el resto y éste es menor que el divisor. Si cuatro números D , d , c y r son tales que D es igual a dc más r , y r es menor que d , los números c y r son el cociente y el resto, respectivamente, de la división entera de D por d .

En toda división, si el dividendo y el divisor se multiplican o dividen exactamente por un mismo número, el cociente no altera pero el resto queda multiplicado o dividido por dicho número.

División entera

131. Como anteriormente vimos (117), para que una división sea posible, es necesario que el dividendo sea múltiplo del divisor, no pudiéndose efectuar cuando la condición no se cumple. A pesar de eso, podemos calcular el cociente con cierta aproximación.

Sea dividir 17 y 5. Comprobamos que ningún número multiplicado por 5, da un producto 17, puesto que:

$$3 \times 5 < 17 \quad \text{y} \quad 4 \times 5 > 17$$

Por extensión, a los números 3 y 4 los llamaremos también cocientes.

132. Cociente entero. — El *cociente entero* de dos números, es el mayor número que, multiplicado por el divisor, da un producto menor o igual que el dividendo.

Si D es el dividendo y d el divisor, y c el cociente entero, es:

$$c \cdot d \leq D$$

133. Resto. — La diferencia entre el dividendo y el producto del cociente entero por el divisor, se llama *resto*.

$$\text{Si} \quad cd \leq D, \quad D - cd = r$$

en donde r es el resto.

134. División entera. — La *división entera* tiene por objeto hallar el cociente entero de dos números.

- **135. COROLARIO.** — *La división entera contiene como caso particular a la división exacta.*

En efecto, si en la expresión $cd = D$ suponemos que sea $cd = D$, resulta (112):

$$\frac{D}{d} = c$$

en donde c es el cociente exacto.

136. Interpretación geométrica de la división en-

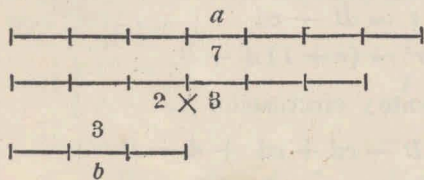


Fig. 10

tera. — Si el segmento a representa al número 7 y b al número 3, el mayor número de veces que el segmento b cabe en el segmento

a , es el cociente entero entre los números representados por a y b .

137. Cociente entero por exceso. — Se llama *cociente entero por exceso*, al cociente entero más uno.

Dados los números 17 y 5, sabemos que:

$3 \times 5 < 17$, siendo 3 el cociente entero;

$4 \times 5 > 17$, siendo 4 el cociente entero por exceso, y se constata que 4 es $3 + 1$.

138. Resto por exceso — La diferencia entre el producto del cociente por exceso y el divisor, y el dividendo, se llama *resto por exceso*.

Si D es el dividendo, d el divisor y $c + 1$ el cociente por exceso, se tiene:

$$(c + 1) d - D = r'$$

en donde r' es el resto por exceso.

139. TEOREMA. — *La suma del resto y del resto por exceso, es igual al divisor.*

$$\text{H} \begin{cases} D = \text{dividendo}; & r' = \text{resto por exceso}; \\ d = \text{divisor}, & r = \text{resto}; \\ c = \text{cociente entero.} \end{cases} \quad \text{T) } r + r' = d$$

Por (133) y (138).

$$r = D - cd$$

$$r' = (c + 1) d - D$$

sumando ordenadamente y efectuando:

$$r + r' = D - cd + cd + d - D$$

y por un corolario anterior (62), queda:

$$r + r' = d$$

140. TEOREMA. — *En toda división, el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto, y éste es menor que el divisor.*

$$H) \quad D; d; c; r. \quad T \begin{cases} 1^{\circ} & D = cd + r \\ 2^{\circ} & r < d \end{cases}$$

1º) Por definición de resto, (133):

$$D - cd = r$$

sumando a ambos miembros cd , por (52):

$$(D - cd) + cd = cd + r$$

y por un corolario anterior, (62):

$$\boxed{D = cd + r} \quad (1)$$

2º) Por el teorema anterior se tiene:

$$r + r' = d$$

y por (46):

$$\boxed{r < d}$$

141. TEOREMA. — *Si cuatro números D , d , c y r son tales que $D = cd + r$ y $r < d$, los números c y r son el cociente y el resto, respectivamente, de la división entera de D por d .*

$$H \begin{cases} D = cd + r \\ r < d \end{cases} \quad T \begin{cases} c = \text{cociente} \\ r = \text{resto} \end{cases}$$

Siendo

$$D = cd + r \quad \therefore \quad cd \leq D \quad (1)$$

como $r < d$, se tendrá, poniendo d en lugar de r :

$$D < cd + d$$

factoreando d : $D < (c + 1) d$ (2)

Comparando (1) y (2), resulta:

$$cd < D < (c + 1) d$$

expresión que indica que c es el cociente entero de la división D por d , y r es el resto de la división.

142. TEOREMA. — *En toda división, si el dividendo y el divisor se multiplican o dividen exactamente por un mismo número, distinto de cero, el cociente no altera, pero el resto queda multiplicado o dividido por dicho número.*

$$H \quad \left\{ \begin{array}{l} D \doteq cd + r; r < d; \\ m \neq 0. \end{array} \right.$$

$$T \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) \quad Dm = c(dm) + rm; rm < dm \\ 2) \quad \frac{D}{m} = c \left(\frac{d}{m} \right) + \frac{r}{m}; \frac{r}{m} < \frac{d}{m} \end{array} \right.$$

1º) Sabemos que: $D = cd + r$

y multiplicando ambos miembros por m .

$$Dm = (cd + r) m$$

y por (95): $Dm = (cd)m + rm$

y por (110): $Dm = c(dm) + rm$

Además sabemos que: $r < d$, y por la propiedad monótona del producto (102)

$$rm < dm$$

La segunda parte de la tesis se demuestra con un razonamiento análogo al de la demostración de la primera.

EJERCICIOS

86. Hallar el cociente entero y el resto de la división de 37 y 12. R. 3 y 1
87. Hallar c y r de la división de 38 y 7. „ 5 y 3
88. Hallar el cociente y el resto por exceso de la división 42 y 9. „ 5 y 3
89. Hallar el cociente y el resto por exceso de la división de 16 y 3. „ 6 y 2
90. Hallar el dividendo de una división entera, sabiendo que $d = 5$; $c = 8$; $r = 3$. „ 43
91. Hallar D , sabiendo que $d = 8$; $c = 3$; $r = 1$. „ 25
92. Si $d = 10$; $c' = 7$; $r' = 8$, calcular D . „ 62
93. Si $d = 6$; $c = 3$; $r = 2$, calcular D , c' y r' . „ 20; 4; 4
94. Si $d = 12$; $c = 2$; $r = 9$, calcular D , c' y r' . „ 33; 3; 3
95. Interpretar gráficamente las divisiones de los ejercicios 86, 88 y 91.
-

CAPITULO X

PROGRAMA X. — Potenciación. Definiciones: Potencia cero, primera potencia enésima de un número, para mayor que n, potencia enésima de un número, para n mayor que uno. Notación. Nombre de los datos y del resultado. Interpretación geométrica del cuadrado y cubo de un número natural.

Propiedades de la potenciación: uniforme, no conmutativa, no distributiva con respecto a la suma ni a la resta, distributiva con respecto a la multiplicación y a la división exacta. Leyes de monotonía: Si ambos miembros de una desigualdad se elevan a una misma potencia distinta de la cero, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que el de la dada. Las sucesivas potencias de un número mayor que uno, crecen a medida que aumenta el exponente. Corolario: De dos potencias de igual base y distinto grado, es mayor la de mayor exponente, siempre que la base sea mayor por uno.

Producto de potencias de igual base. Cociente de potencias de igual base. Condición de posibilidad. Potencia de una potencia.

Cuadrado de la suma y de la diferencia de dos números. Producto de la suma por la diferencia de dos números.

Potenciación de números naturales

143. Definiciones. — I. Se llama *potencia cero* de un número natural, al número uno.

La potencia cero se indica así:

$$3^0 = 1 \quad ; \quad a^0 = 1$$

144. II. Se llama *potencia uno* de un número natural, al mismo número natural.

La potencia uno se indica así:

$$2^1 = 2 \quad ; \quad a^1 = a$$

145. III. Se llama *potencia emésima* de un número natural, siendo $m > 1$, al producto de m factores iguales al número dado.

La potencia emésima se indica así:

$$5^m = 5 \times 5 \times \overbrace{\dots\dots\dots}^{m \text{ fact.}} \times 5$$

$$a^m = a \times a \times \overbrace{\dots\dots\dots}^{m \text{ fact.}} \times a (*)$$

expresión que se lee así: *a* elevado a la emésima potencia.

El número cuya potencia se halla se llama *base* de la potencia; y el número 0, 1, o m , se llama *exponente*.

La *potenciación* o *elevación a potencias*, tiene por objeto hallar la potencia de un número.

146. COROLARIOS. — I. La potencia emésima de cero, es cero:

$$0^m = 0 \times 0 \times \overbrace{\dots\dots\dots}^m \times 0 = 0$$

147. II. — La potencia emésima de uno, es uno:

$$1^m = 1 \times 1 \times \overbrace{\dots\dots\dots}^m \times 1 = 1$$

148. Cuadrado de un número. — Si el exponente es dos, la potencia se llama *cuadrado*:

$$5^2 = 5 \times 5 = 25; 25 \text{ es el cuadrado de } 5.$$

$$a^2 = a \times a \quad ; \quad a^2 \text{ es el cuadrado de } a.$$

(*) La notación a^m se debe a Descartes.

149. Cubo de un número. — Si el exponente es tres, la potencia se llama *cubo*.

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8; 8 \text{ es el cubo de } 2$$

$$a^3 = a \times a \times a \quad ; \quad a^3 \text{ es el cubo de } a.$$

150. Interpretación geométrica del cuadrado y cubo de un número natural.

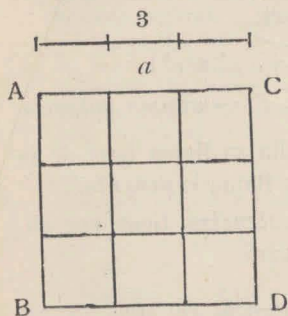


Fig. 11

Si el segmento a representa al número 3, Fig. 11, el área del cuadrado de lado a , es el cuadrado del número 3

Si el segmento b , Fig. 12, representa al número 2, el volumen del cubo de lado b es el cubo del número 2.

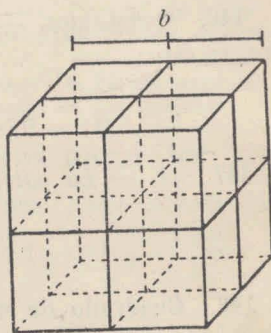


Fig. 12

Propiedades de la potenciación

151. Propiedad uniforme. — TEOREMA. — Si los dos miembros de una igualdad se elevan a una misma potencia, resulta otra igualdad.

H) $a = b; m$

T) $a^m = b^m$

Hay que demostrar que la tesis es cierta para cualquier valor de m .

1º) Si $m = 0$, por definición de potencia cero

$$a^m = a^0 = 1 \quad (1)$$

$$b^m = b^0 = 1 \quad (2)$$

comparando (1) y (2), se deduce:

$$a^m = b^m$$

2º) Si $m = 1$, por definición de potencia uno

$$a^m = a^1 = a$$

$$b^m = b^1 = b$$

como $a = b$ por hipótesis, se deduce

$$a^m = b^m$$

3º) Si $m > 1$, por definición se tiene

$$a^m = a \cdot a \cdot \overbrace{\dots\dots\dots}^m a$$

$$b^m = b \cdot b \cdot \overbrace{\dots\dots\dots}^m b$$

pero los segundos miembros son iguales por estar constituidos por igual número de factores iguales, luego:

$$a^m = b^m$$

152. Propiedad no conmutativa. — La potenciación no es conmutativa.

Ejemplo:

$$3^3 \neq 2^3$$

En efecto:

$$\left. \begin{array}{l} 3^2 = 3 \times 3 = 9 \\ 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \end{array} \right\} \text{ como } 9 \neq 8 \therefore 3^2 \neq 2^3$$

En general:

$$\boxed{a^m \neq m^a} \quad \text{siempre que sea } a \neq m$$

153 Propiedad distributiva. — I. *La potenciación no es distributiva respecto a la suma.*

Ejemplo:

$$(4 + 3)^2 \neq 4^2 + 3^2$$

En efecto:

$$\left. \begin{array}{l} 4^2 + 3^2 = 4 \times 4 + 3 \times 3 = 16 + 9 = 25 \\ (4+3)^2 = 7^2 = 7 \times 7 = 49 \end{array} \right\} \text{ como } 49 \neq 25 \therefore (4+3)^2 \neq 4^2 + 3^2$$

En general:

$$\boxed{(a + b)^m \neq a^m + b^m} \quad m > 1$$

154. II. *La potenciación no es distributiva respecto a la resta.*

Ejemplo:

$$(7 - 3)^2 \neq 7^2 - 3^2$$

En efecto:

$$\left. \begin{array}{l} (7 - 3)^2 = 4^2 = 4 \times 4 = 16 \\ 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40 \end{array} \right\} \text{ como } 16 \neq 40 \therefore (7 - 3)^2 \neq 7^2 - 3^2$$

En general:

$$\boxed{(a - b)^m \neq a^m - b^m}$$

155. III.—TEOREMA. — *La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de igual grado de los factores.*

$$H \quad \left\{ \begin{array}{c} a.b.c \\ m \end{array} \right.$$

$$T) \quad (a.b.c)^m = a^m.b^m.c^m$$

Hay que demostrar que el teorema es cierto para cualquier valor de m .

1º) Si $m = 0$, por definición de potencia cero.

$$\left. \begin{array}{l} (a.b.c)^m = (a.b.c)^0 = 1 \\ a^m.b^m.c^m = a^0.b^0.c^0 = 1 \end{array} \right\} \therefore (abc)^m = a^m b^m c^m$$

2º) Si $m = 1$, por definición de potencia uno.

$$\left. \begin{array}{l} (a.b.c)^m = (a.b.c)^1 = a.b.c. \\ a^m.b^m.c^m = a^1.b^1.c^1 = a.b.c. \end{array} \right\} \therefore (abc)^m = a^m b^m c^m$$

3º) Si $m > 1$, por definición de potencia emésima

$$(a.b.c.)^m = (a.b.c.) \times (a.b.c.) \times \overbrace{\dots}^m \times (a.b.c.)$$

por la propiedad asociativa del producto, (110)

$$(abc)^m = abc \overbrace{abc \dots abc}^m$$

por (108):

$$(abc)^m = a \overbrace{a \dots a}^m b \overbrace{b \dots b}^m c \overbrace{c \dots c}^m$$

y por definición de potencia emésima:

$$(abc)^m = a^m b^m c^m$$

Ejemplo:

$$(2 \times 5 \times 4)^3 = 2^3 \times 5^3 \times 4^3 = 8 \times 125 \times 64 = 64.000$$

156. COROLARIO. — *El producto de varias potencias de igual exponente es otra potencia del mismo exponen.*



te, cuya base es el producto de las bases de los factores dados.

Sabemos que: $(abc)^m = a^m b^m c^m$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$a^m b^m c^m = (abc)^m$$

Ejemplo:

$$4^2 \times 2^2 \times 5^2 \times 3^2 = (4 \times 2 \times 5 \times 3)^2 = 120^2 = 14.400$$

157. IV. — TEOREMA. — La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias de igual grado del dividendo y divisor.

$$H \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} \\ m \end{array} \right. \quad T \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^m = \frac{a^m}{b^m} \right.$$

Demostraremos que la tesis es cierta para cualquier valor de m .

1º) Si $m = 0$, por definición de potencia cero:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{a}{b} \right)^m = \left(\frac{a}{b} \right)^0 = 1 \\ \frac{a^m}{b^m} = \frac{a^0}{b^0} = 1 \end{array} \right\} \therefore \left(\frac{a}{b} \right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

2º) Si $m = 1$, por definición de potencia uno:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{a}{b} \right)^m = \left(\frac{a}{b} \right)^1 = \frac{a}{b} \\ \frac{a^m}{b^m} = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b} \end{array} \right\} \therefore \left(\frac{a}{b} \right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

además:

3º) Sea $m > 1$.

Supongamos que sea :

$$\frac{a}{b} = c \quad (1) \quad \therefore \quad a = b.c \quad (2)$$

Por la propiedad uniforme de la potenciación, (151) en ambas igualdades se tiene.

$$\text{de la (1):} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = c^m \quad (3)$$

$$\text{de la (2):} \quad a^m = (bc)^m$$

por el teorema anterior:

$$a^m = b^m c^m$$

y por definición de cociente, (112), debe ser:

$$\frac{a^m}{b^m} = c^m \quad (4)$$

Comparando la (3) y la (4), por (34), resulta :

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}$$

Ejemplo :

$$\left(\frac{12}{3}\right)^2 = \frac{12^2}{3^2} = \frac{144}{9} = 16$$

158. COROLARIO. — *Siendo*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

por el carácter recíproco de la igualdad:

$$\boxed{\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

Ejemplo:

$$\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27$$

159. Propiedad monótona. — TEOREMA. I. — *Si ambos miembros de una desigualdad se elevan a una misma potencia distinta de la cero, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que el de la dada.*

$$H \quad \begin{cases} a > b \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$T) \quad a^m > b^m$$

1º Si $m = 1$, por definición de potencia uno:

$$a^m = a^1 = a$$

además:

$$b^m = b^1 = b$$

y como, por hipótesis, $a > b$, reemplazando a y b por sus iguales a^m y b^m , resulta:

$$a^m > b^m$$

2º) Si $m > 1$, consideremos m desigualdades, iguales a la dada:

$$\begin{array}{c} a > b \\ a > b \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \left(m \right. \\ \dots\dots\dots \\ a > b \end{array}$$

multiplicando, (111):

$$a \times a \times \overbrace{\dots\dots\dots}^m \times a > b \times b \times \overbrace{\dots\dots\dots}^m \times b$$

y por definición de potencia m -ésima:

$$\boxed{a^m > b^m}$$

160. TEOREMA. — *Las sucesivas potencias de un número mayor que uno, crecen a medida que aumenta el exponente.*

$$H \quad \{ \quad a > 1$$

$$T \quad \{ \quad a^0 < a^1 < a^2 < \dots$$

Por definición de potencia cero y uno:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

como, por hipótesis, $a > 1$, reemplazando por sus iguales, resulta:

$$\boxed{a^0 < a^1} \quad (1)$$

Por la propiedad monótona del producto, (102):

$$a^0 \times a < a^1 \times a$$

o bien:

$$1 \times a^1 < a \times a$$

y por último

$$\boxed{a^1 < a^2} \quad (2)$$

Multiplicando ambos miembros por a :

$$a^1 \times a < a^2 \times a$$

o bien:

$$a \times a < a \times a \times a$$

y por último:

$$\boxed{a^2 < a^3} \quad (3)$$

Análogamente tendríamos:

$$a^3 < a^4 \quad (4)$$

$$a^4 < a^5 \quad (5)$$

.....

.....

Comparando las expresiones (1), (2), (3) ..., por el carácter transitivo de la desigualdad, (36):

$$a^0 < a^1 < a^2 < a^3 < \dots$$

161. COROLARIO. -- De dos potencias de igual base y distinto exponente, es mayor la de mayor exponente, siempre que la base sea mayor que uno.

En efecto, de la expresión:

$$a^0 < a^1 < a^2 < \dots$$

se deduce que:

$$a^2 < a^5 \quad \text{etcétera; siempre que } a > 1.$$

162. Producto de potencias de igual base. — **TEOREMA.** El producto de varias potencias de igual base es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores dados.

$$H \{ a^m \cdot a^n \cdot a^p \quad T \{ a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$

Por definición de potencia enésima:

$$a^m = a \overbrace{a \dots a}^m$$

$$a^n = a \overbrace{a \dots a}^n$$

$$a^p = a \overbrace{a \dots a}^p$$

Multiplicando, (107):

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a \overbrace{a \dots a}^m \cdot a \overbrace{a \dots a}^n \cdot a \overbrace{a \dots a}^p$$

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a \overbrace{a \dots a}^{m+n+p}$$

y por definición de potencia:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$

Ejemplo:

$$2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$$

163. COROLARIO. Si un número está elevado a una potencia cuyo exponente es la suma de varios números, esa potencia es igual al producto de varias potencias del mismo número, y cuyos exponentes son los sumandos dados.

En efecto; sabemos que:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$a^{m+n+p} = a^m \cdot a^n \cdot a^p$$

Ejemplo:

$$3^5 = 3^3 + 2 = 3^3 \times 3^2$$

$$3^5 = 3^4 + 1 = 3^4 \times 3^1$$

164. Cociente de dos potencias de igual base. — TEOREMA. El cociente de dos potencias de igual base, siendo el exponente del dividendo mayor o igual que el exponente del divisor, es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es el exponente del dividendo menos el exponente del divisor.

$$H \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^m}{a^n} \\ m \geq n \end{array} \right.$$

$$T \left\{ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \right.$$

Supongamos que sea:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

por definición de cociente, (112):

$$a^m = a^n \cdot a^{m-n}$$

y por el teorema anterior:

$$a^m = a^n + (m-n)$$

y como n que suma y resta se anula, (62), queda

$$a^m = a^m$$

y siendo esta expresión cierta, también lo es la supuesta, luego:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo:

$$\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3 = 8$$

165. OBSERVACIÓN. Si $m = n$, resulta:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0 \quad (1)$$

pero también $a^m = a^n$, luego su cociente es uno:

$$\frac{a^m}{a^n} = 1 \quad (2)$$

Comparando (1) y (2), por el carácter transitivo de la igualdad:

$$a^0 = 1$$

expresión que justifica la definición dada anteriormente, (143), de potencia cero.

166. COROLARIO. Si un número está elevado a una potencia cuyo exponente es la diferencia de dos números, esa potencia es igual al cociente de dos potencias del mismo número, siendo el minuendo el exponente del diviendo, y el sustraendo el exponente del divisor.

En efecto; sabemos que:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ siendo } m \geq n$$

y por el carácter recíproco de la igualdad, (33):

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3^4 &= 3^5 - 1 = \frac{3^5}{3^1} \\ &= 3^6 - 2 = \frac{3^6}{3^2} \end{aligned}$$

167. Potencia de una potencia. — TEOREMA. *La potencia de la potencia de un número, es otra potencia del mismo número, cuyo exponente es el producto de los exponentes.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} a^m \\ n \end{array} \right.$$

$$T \left\{ (a^m)^n = a^{mn} \right.$$

El teorema es cierto para cualquier valor de n .

1º Si $n = 0$, por definición de potencia cero:

$$(a^m)^n = (a^m)^0 = 1 \left\{ \begin{array}{l} \therefore (a^m)^n = a^{mn} \\ y \text{ además: } a^m n = a^{m0} = a^0 = 1 \end{array} \right.$$

2º Si $n = 1$, por definición de potencia uno:

$$(a^m)^n = (a^m)^1 = a^m \left\{ \begin{array}{l} \therefore (a^m)^n = a^{mn} \\ y \text{ además: } a^m n = a^m \times 1 = a^m \end{array} \right.$$

3º Si $n > 1$, por definición de potencia enésima:

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times \overbrace{\dots\dots\dots}^n \times a^m$$

y por un teorema anterior, (161):

$$(a^m)^n = a^m + m + \overbrace{\dots\dots\dots}^n + n$$

y por definición de producto, (89):

$$(a^m)^n = a^{m n}$$

Ejemplo: $(3^3)^2 = 3^{3 \times 2} = 3^6 = 729$

168. COROLARIO. *Si un número está elevado a una potencia cuyo exponente es el producto de dos números, esa potencia es la potencia de potencia del mismo número, siendo los exponentes cada uno de los factores dados.*

En efecto, sabemos que:

$$(a^m)^n = a^{m n}$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$a^{m n} = (a^m)^n$$

Ejemplo:

$$5^3 \times 4 = (5^3)^4 = (5^4)^3$$

169. Cuadrado de la suma y de la diferencia de dos números. — TEOREMA. *El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer número, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo número.*

H) $(a + b)^2$ T) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Sabemos, por definición de potencia, que:

$$(a + b)^2 = (a + b) (a + b)$$

efectuando el producto, (99):

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

o bien :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo :

$$\begin{aligned}(4 + 3)^2 &= 4^2 + 2.4.3 + 3^2 \\ &= 16 + 24 + 9 = 49.\end{aligned}$$

170. TEOREMA. *El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero, menos el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo número.*

H) $(a - b)^2$

T) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Por definición de potencia :

$$(a - b)^2 = (a - b) (a - b)$$

y efectuando el producto, (101) :

$$(a - b)^2 = a^2 - (ab + ab) + b^2$$

o bien :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo :

$$\begin{aligned}(5-2)^2 &= 5^2 - 2.5.2 + 2^2 \\ &= 25 - 20 + 4 = 9\end{aligned}$$

171. NOTA. Los dos teoremas últimos lo podemos escribir en una sola expresión, de esta manera :

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

172. Producto de la suma por la diferencia de dos números. — TEOREMA. *El producto de la suma por la*

Diferencia de dos números, es igual al cuadrado del primer número menos el cuadrado del segundo.

H) a y b , núm. dados T) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

En efecto:

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2$$

o bien:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo:

$$(4 + 3)(4 - 3) = 4^2 - 3^2 = 7$$

173. COROLARIO. *La diferencia de los cuadrados de dos números es igual a la suma por la diferencia de los números.*

Sabemos que:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo:

$$8^2 - 5^2 = (8 + 5)(8 - 5) = 13 \times 3 = 39$$

EJERCICIOS

96.	Efectuar:	$2^3 \times 3^3 \times 4^3$	R:	13.824
97.	"	$5^2 \times 4^2 \times 6^2$	"	14.400
98.	"	$12^4 : 6^4$	"	16
99.	"	$24^3 : 8^3$	"	27
100.	"	$2^2 \times 2^3 \times 2$	"	64
101.	"	$5^3 \times 5 \times 5^2$	"	15.625
102.	"	$4^5 : 4^3$	"	16
103.	"	$a^7 : a^3$	"	a^4
104.	"	$(4^5 \times 2^5) : 8^3$	"	64
105.	"	$2^2 \times 5^3 \times 2 \times 5^2$	"	25.000
106.	"	$a^3 \times a^5 \times a \times a^2$	"	a^{11}
107.	"	$[(2^2)^3]^0$	"	1
108.	"	$[(3^2)^3 \times 3^4] : 3^8$	"	9
109.	"	$(3 + a)^2$	"	$9 + 6a + a^2$
110.	"	$(5 - 4)^2$	"	1
111.	"	$(a + 3)^6 : (a + 3)^4$	"	$a^2 + 6a + 9$
112.	"	$(5ab + 2)^2$	"	$25a^2b^2 + 20ab + 4$
113.	"	$(a^2 - b^3)^2$	"	$a^4 - 2a^2b^3 + b^6$
114.	"	$8^2 - 7^2$	"	15
115.	"	$31^2 - 28^2$	"	177
116.	Transformar en producto	$a^2 - 9$	"	$(a+3)(a-3)$

CAPITULO XI

PROGRAMA IX. — Radicación y logaritmación. Operaciones inversas de la potenciación: Raíz enésima de un número y logaritmo de un número en una base dada. Notación. Nombre de los datos y del resultado. Ejemplos.

Condiciones de posibilidad de la radicación. Un número no altera si se lo eleva a una potencia y al resultado se le extrae la raíz del mismo grado, o viceversa (simplificación de índice y exponente iguales).

Propiedades de la radicación: uniforme, no conmutativa, no distributiva con respecto a la suma, ni a la resta, distributiva con respecto a la multiplicación y a la división exacta.

Raíz cuadrada. Raíz cuadrada de los cuadrados perfectos menores que cien.

Raíz cuadrada entera. La raíz cuadrada entera contiene como caso particular a la raíz cuadrada exacta. Raíz cuadrada y resto por exceso. La suma del resto y del resto por exceso de la raíz cuadrada de un número, es igual al duplo de la raíz más uno. Todo número es igual al cuadrado de su raíz cuadrada entera más el resto y éste, es menor que el duplo de la raíz más uno. Si tres números N , a y r son tales que N es igual al cuadrado de a más r , y r es menor que $2a$ más uno, a y r son respectivamente, la raíz y el resto de la raíz cuadrada entera de N .

Radicación y Logaritmación

174. Operaciones inversas de la potenciación. —

Sea hallar el cubo de 2. Por definición de potencia, (145), tendremos:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

Ahora, conociendo la potencia 8, se nos presentan estos problemas como operaciones inversas (39):

1° *¿Cuál es el número que elevado al cubo da 8?*

Es decir, calcular x , que debe ser tal, que:

$$x^3 = 8$$

La resolución de este problema de origen a la *radicación*, o *primera operación inversa de la potenciación*.

¿A qué grado de potencia hay que elevar el número 2 para que dé 8?

Es decir, calcular y , que debe ser tal que:

$$2^y = 8$$

La resolución de este problema da origen a la *logaritmicación*, o *segunda operación inversa de la potenciación*.

175 Raíz enésima de un número. — Se llama *raíz enésima* de un número, llamado *radicando*, a otro número, tal, que elevado a la potencia enésima, dé una potencia igual al número dado

La raíz enésima de a es b , siempre que sea:

$$b^n = a$$

La *radicación*, o *extracción de raíces*, tiene por objeto hallar la raíz enésima de un número.

176. NOTACIÓN. La raíz enésima se indica con el signo $\sqrt[n]{\quad}$ llamado *radical*. (*)

Para expresar que b es la raíz enésima de a , escribiremos:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ siempre que } b^n = a$$

El número n se llama *índice* y expresa el grado de la raíz.

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{8} = 2, \text{ porque } 2^5 = 8$$

(*) El signo $\sqrt{\quad}$ para indicar la raíz cuadrada fué introducido por Rudolff en 1526. El célebre matemático indú Baskhara, (n 1114) usó una notación análoga

177. Logaritmo de un número. — Se llama *logaritmo* de un número, llamado *logaritmando*, al exponente de la potencia a que hay que elevar otro número, llamado *base*, para obtener el número dado.

El logaritmo de b , en base a , es c , siempre que sea:

$$b = a^c$$

La *logaritmación* tiene por objeto hallar el logaritmo de un número.

178. NOTACIÓN. Si c es el logaritmo de b en base a , escribiremos:

$$\log_a b = c, \text{ siempre que } a^c = b$$

Ejemplo:

$$\log_5 125 = 3, \text{ porque } 5^3 = 125.$$

179. Condiciones de posibilidad de la radicación. — Para que la radicación sea posible, se requiere:

1º *Que el radicando sea una potencia de exponente igual al índice de la raíz.*

Ejemplos:

$$\sqrt[2]{16} = 4, \text{ porque } 4^2 = 16$$

$$\sqrt[3]{27} = 3, \text{ porque } 3^3 = 27$$

Si se tuviera $\sqrt{7}$, en el campo de los números naturales no hay solución, pues ningún número natural elevado al cuadrado nos da 7.

2º *Que el índice sea mayor que cero*, porque todo número con exponente cero, (143), es igual a uno.

180. Corolario de la definición de raíz enésima. — Por definición de raíz enésima (175), se tiene.

$$\sqrt[n]{b} = a \quad (1), \text{ siempre que: } a^n = b. \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a} \quad (3)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b} \quad (4)$$

Las expresiones (3) y (4) en símbolos nos dicen que:
Un número no altera si se lo eleva a una potencia y al resultado se le extrae la raíz del mismo grado, o vice-versa.

181. OBSERVACIÓN. Reemplazar el primer miembro de las expresiones (3) y (4) por el segundo, es *simplificar* el índice y el exponente iguales.

Propiedades de la radicación

182. Propiedad uniforme. — TEOREMA. *Extrayendo raíces de igual grado de una igualdad, se obtiene otra igualdad.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} a = b \\ n > 0 \end{array} \right. \quad T \left\{ \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \right.$$

Si no fuese $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$, sería:

$$\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$$

elevando ambos miembros a la potencia enésima:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \geq \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$

y por el corolario (180):

$$a \geq b$$

lo que es absurdo, pues se opone a la hipótesis, luego:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}}$$

183. Propiedad no conmutativa. — *La radicación no es conmutativa.*

Ejemplo:
$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[2]{9} = 3 \\ \sqrt[9]{2} \neq 3 \end{array} \right\} \therefore \sqrt[2]{9} \neq \sqrt[9]{2}$$

y en general:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \neq \sqrt[a]{n}} \quad a \neq n.$$

184. Propiedad distributiva. — I. *La radicación no es distributiva respecto a la suma.*

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[2]{16+9} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt[2]{16} + \sqrt[2]{9} = 4 + 3 = 7 \end{array} \right\} \therefore \sqrt[2]{16+9} \neq \sqrt[2]{16} + \sqrt[2]{9}$$

y en general:

$$\boxed{\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}$$

185. II. *La radicación no es distributiva respecto a la resta.*

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[2]{25-16} = \sqrt{9} = 3 \\ \sqrt[2]{25} - \sqrt[2]{16} = 5 - 4 = 1 \end{array} \right\} \therefore \sqrt[2]{25-16} \neq \sqrt[2]{25} - \sqrt[2]{16}$$

y en general:

$$\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

186. III. TEOREMA. *La raíz enésima de un producto es igual al producto de las raíces enésimas de cada uno de los factores.*

$$H \left\{ \sqrt[n]{abc}; n > 0 \right. \quad T \left\{ \sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \right.$$

Si no fuese $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$, sería:

$$\sqrt[n]{abc} \geq \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

elevando ambos miembros a la potencia enésima.

$$\left(\sqrt[n]{abc} \right)^n \geq \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \right)^n$$

o bien, (155):

$$\left(\sqrt[n]{abc} \right)^n \geq \left(\sqrt[n]{a} \right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b} \right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{c} \right)^n$$

y simplificando:

$$abc \geq abc$$

lo que es absurdo, luego:

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

187. COROLARIO. — Siendo

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

por el carácter recíproco de la igualdad:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$$

188. IV. TEOREMA. — *La raíz enésima de un cociente es igual al cociente de las raíces enésimas del dividendo y divisor.*

$$H \left\{ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} ; n > 0 \right. \quad T \left\{ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right.$$

Si no fuese:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

sería:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \geq \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

y elevando a la potencia enésima:

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \right)^n \geq \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n$$

o bien, (157):

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \right)^n \geq \frac{\left(\sqrt[n]{a} \right)^n}{\left(\sqrt[n]{b} \right)^n}$$

y simplificando:

$$\frac{a}{b} \geq \frac{a}{b}$$

lo que es absurdo, luego:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \geq \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

189. COROLARIO. — Siendo:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

por el carácter recíproco de la igualdad:

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

190. Propiedad monótona. — TEOREMA. — *Extra-
yendo las raíces de igual grado de ambos miembros de
una desigualdad, se obtiene otra desigualdad del mismo
sentido que el de la dada.*

$$H \quad \left\{ \begin{array}{l} a > b \\ n > 0 \end{array} \right.$$

$$T \quad \left\{ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \right.$$

Si no fuese $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, sería:

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$$

y elevando a la potencia enésima:

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^n \leq \left(\sqrt[n]{b} \right)^n$$

y simplificando:

$$a \leq b$$

lo que es absurdo, pues se opone a la hipótesis, luego:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}}$$

Raíz cuadrada

191. Definición. — La *raíz cuadrada* de un número natural, es otro número natural, tal, que elevado al cuadrado dé el número dado.

Ejemplos: $\begin{cases} \sqrt[2]{25} = 5, & \text{porque } 5^2 = 25 \\ \sqrt[2]{a} = b, & \text{siempre que } b^2 = a \end{cases}$

La raíz cuadrada se indica con el signo $\sqrt{\quad}$

192. Raíz cuadrada de los cuadrados perfectos menores que cien. — Las raíces cuadradas de los números cuadrados perfectos menores que cien, son:

Números: $1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100.$
 Raíces cuadradas: $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.$

Raíz cuadrada entera

193 Sea hallar la raíz cuadrada de $\sqrt{18}$. Comprobamos que no existe ningún número natural que, elevado al cuadrado, dé 18, puesto que:

$$18 > 4^2 \quad \text{y} \quad 18 < 5^2$$

Por extensión, a los números 4 y 5 también los llamaremos raíces cuadradas de 18

194. Raíz cuadrada entera. — La *raíz cuadrada entera* de un número, es el mayor número que elevado al cuadrado, da un número menor o igual que el número dado.

Si N es el radicando, la raíz cuadrada entera a es tal, que:

$$a^2 \leq N$$

195. Resto. — La diferencia entre el radicando y el cuadrado de la raíz cuadrada entera, se llama *resto*.

Si

$$a^2 \leq N \quad ; \quad N - a^2 = r$$

en donde r es el resto.

196. COROLARIO. — *La raíz cuadrada entera contiene como caso particular a la raíz cuadrada exacta.*

En efecto, si en la expresión $a^2 \leq N$ suponemos que sea $a^2 = N$, resulta, (191), que a es la raíz cuadrada exacta de N .

197. Raíz cuadrada por exceso. — Se llama *raíz cuadrada por exceso*, a la raíz cuadrada entera más uno.

Si a es la raíz cuadrada entera, es $a + 1 = a'$, donde a' es la raíz cuadrada por exceso.

198. Resto por exceso. — Se llama *resto por exceso*, a la diferencia entre el cuadrado de la raíz cuadrada por exceso y el radicando.

Si N es el radicando y a la raíz cuadrada entera, se tiene:

$$(a + 1)^2 - N = r'$$

en donde r' es el resto por exceso.

199. TEOREMA. — *La suma del resto y del resto por exceso es igual al duplo de la raíz más uno.*

$$H \begin{cases} N = \text{radicando} \\ a = \text{raíz cuad.} \\ r \text{ y } r' = \text{restos.} \end{cases} \quad T) \quad r + r' = 2a + 1$$

Por definición:

$$\begin{aligned} r &= N - a^2 \\ r' &= (a + 1)^2 - N \end{aligned}$$

sumando ordenadamente:

$$r + r' = N - a^2 + (a + 1)^2 - N$$

desarrollando el cuadrado de la suma:

$$r + r' = N - a^2 + a^2 + 2a + 1 - N$$

simplificando, queda:

$$r + r' = 2a + 1$$

200. TEOREMA. — *Todo número es igual al cuadrado de su raíz cuadrada entera más el resto, y éste es menor que el duplo de la raíz más uno.*

$$H) \quad N, a, r. \quad T \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) \quad N = a^2 + r \\ 2^\circ) \quad r < 2a + 1 \end{array} \right.$$

1º) Por definición de resto:

$$N - a^2 = r$$

y por (59)

$$N = a^2 + r$$

2º) Por el teorema anterior:

$$r + r' = 2a + 1$$

y por (46):

$$r < 2a + 1$$

201. TEOREMA. — *Si tres números N, a y r son tales que $N = a^2 + r$, y $r < 2a + 1$, a, y r son, respectivamente, la raíz y el resto de la raíz cuadrada entera de N.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} N = a^2 + r \\ r < 2a + 1 \end{array} \right. T \left\{ \begin{array}{l} a = \text{raíz} \\ r = \text{resto} \end{array} \right\} \text{ de la raíz cuad. de N.}$$

Se tiene: $N = a^2 + r$ (1)

y por (46) $N \geq a^2$ (2)

Además: $r < 2a + 1$

escribamos: $a^2 = a^2$

sumando, (57) $a^2 + r < a^2 + 2a + 1$

o bien: $a^2 + r < (a + 1)^2$

pero el primer miembro es N luego:

$$N < (a + 1)^2 \quad (3)$$

De (2) y (3) se deduce que:

$a^2 \leq N < (a + 1)^2$

en donde a es la raíz cuadrada entera de N

Como a es la raíz cuadrada, de (1) se deduce que r es el resto.

EJERCICIOS

117.	Si la base es 2, hallar el log. 4.	R. 2
118.	" " " " 2, " " log. 8.	" 3
119.	" " " " 3, " " log. 81	" 4
120.	" " " " 3, " " log. 9,	" 2
121.	" " " " 10, " " log. 10,	" 1
122.	Si $\sqrt{x} = 5$, calcular x .	R: $x = 25$
123.	" $\sqrt[5]{a} = 4$, " a .	" $a = 64$
124.	" $\sqrt[4]{b} = 8$, " b .	" $b = 4096$
125.	" $\sqrt{c} = 12$, " c .	" $c = 144$
126.	" $\sqrt[3]{36} = a$, " a .	" $a = 6$

127. „ $\sqrt[3]{216} = b$, „ b . „ $b = 6$
128. „ $\sqrt{81} = c$, „ c . „ $c = 9$
129. „ $\sqrt[3]{27} = d$, „ d . „ $d = 3$
130. „ $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, ¿cómo son a y b ? „ $a = b$
131. „ $\sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{a}$, ¿cómo son m y n ? „ $m = n$
132. Calcular: $\sqrt{4} \times \sqrt{9} \times \sqrt{16}$ „ 24
133. „ $\sqrt[n]{3} \times \sqrt[n]{4} \times \sqrt[n]{5} \times \sqrt[n]{a}$ R: $\sqrt[n]{60a}$
134. „ $\sqrt{36} : \sqrt{9}$ „ 2
135. „ $\sqrt{81} : \sqrt{9}$ „ 3
136. Si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, ¿cómo son a y b ? „ $a < b$
137. Hallar la raíz cuadrada entera y el resto de 72.
R: $a = 8$; $r = 8$
138. Hallar la raíz cuadrada entera y el resto de 38.
R: $a = 6$; $r = 2$
139. Hallar la raíz cuadrada entera y el resto de 94.
R: $a = 9$; $r = 13$
140. Hallar la raíz cuadrada entera por exceso y el resto de 45
R: $a' = 7$; $r' = 4$
141. Hallar la raíz cuadrada entera por exceso y el resto de 20
R: $a' = 5$; $r' = 5$
142. Hallar la raíz cuadrada entera por exceso y el resto de 52.
R: $a' = 8$; $r' = 12$
143. Si $r = 7$ y $r' = 4$, calcular N y a R: $N = 32$; $a = 5$
144. „ $r = 4$ y $r' = 5$, „ N y a „ $N = 20$; $a = 4$
145. „ $a = 6$ y $r = 5$, „ N , a' y r' .
R: $N = 41$; $a' = 7$; $r' = 8$
146. Si $a = 8$ y $r = 2$, calcular N , a' y r' .
R: $N = 66$; $a' = 9$; $r' = 15$

CAPITULO XII

PROGRAMA XII. — Expresiones algebraicas. Definición. Valor numérico. Monomios: coeficiente, monomios semejantes. Polinomios, grado, ordenación de términos.

Suma de monomios y polinomios.

Resta de monomios y polinomios.

Multiplicación de monomios, de monomios por polinomios, y de polinomios entre sí.

División de monomios y de polinomios, por monomios.

Expresiones Algebraicas

202. Definición. — Se llama *expresión algebraica* a todo conjunto de números entre los cuales se indican operaciones aritméticas,

$$a - 2a^2 ; \frac{3a + 2 - b^3}{4} ; m + \sqrt{a} - \log. c$$

203. Valor numérico. — Se llama *valor numérico* de una expresión algebraica, al número que se obtiene al dar valores particulares a cada una de las letras que la componen, y efectuar luego las operaciones indicadas

Ejemplo: El valor numérico de: $4a^2b - 5ab + b^2$, siendo $a = 2$; $b = 3$, es:

$$\begin{aligned} V. N. &= 4.2^2.3 - 5.2.3 + 3^2 \\ &= 48 - 30 + 9 = 27 \end{aligned}$$

204. Monomio. — Se llama *monomio*, a todo conjunto de números entre los cuales se indiquen la multiplicación, división, potenciación, radicación o logaritmación.

Ejemplos:

$$3ab^4; \quad \frac{5a}{2}; \quad 3\sqrt{a}; \quad 4 \log. m.$$

205. Coeficiente. — Se llama *coeficiente* de un monomio, al factor numérico que entra en su composición.

$$\text{Ejemplos: } \begin{cases} 3a^2b, & \text{el coeficiente es } 3. \\ 2\sqrt{a}, & \text{,, ,, ,, } 2. \end{cases}$$

Cuando un monomio no tiene visible el coeficiente, queda sobreentendido que es *uno*.

Ejemplo: $a^2b = 1a^2b$, el coeficiente es 1.

206. Grado de un monomio. — El *grado* de un monomio es el número de factores literales que lo componen.

$$\text{Ejemplos: } \begin{cases} 3a^2b = 3.aab & \text{es de 3er. grado} \\ a^3b^2 = aaabbb & \text{,, ,, 5º ,,} \\ 5a & \text{,, ,, 1er. ,,} \\ 4mx & \text{,, ,, 2º ,,} \end{cases}$$

207. Monomios semejantes. — Varios monomios son *semejantes*, cuando la parte literal es la misma y cada letra tiene los mismos exponentes.

$$\text{Ejemplos: } \begin{cases} 3a^2b; \quad a^2b; \quad 5a^2b. \\ 2c\sqrt{m}; \quad 4c\sqrt{m}; \quad c\sqrt{m} \end{cases}$$

208. Polinomio. — Un *polinomio* es un conjunto de monomios entre los cuales se indican operaciones de sumar o restar.

$$\text{Ejemplo: } 2a - 4a^2b + a^3bc - 5.$$

Cada uno de los monomios que forman un polinomio, se llama *término*.

El polinomio que tiene *très* términos, se llama *trinomio*:

$$a - b + c$$

El polinomio que tiene *dos* términos, se llama *binomio*:

$$a + b; a - b; 5m - 3.$$

209. Grado de un polinomio. — El *grado de un polinomio* es el mayor grado de sus diversos términos.

Ejemplo: $2a - 4a^2b + a^3bc$, es de 5º grado.

Un polinomio es *homogéneo*, cuando todos sus términos son del mismo grado.

Ejemplo: $2ab - 3a^2 + mx$, es homog. de 2º grado.

210. Polinomio ordenado. — Un polinomio está *ordenado*, cuando sus términos están colocados según las potencias *crecientes* o *decrecientes* de una misma letra, llamada *ordenatriz*.

Ejemplo 1º): $a^3 - 2a^2b + 5ab^3 - 3b$
está ordenado según las potencias decrecientes de a .

Ejemplo 2º): $5 - 3a + a^2 - 4a^3b + 7a^4b^2$
está ordenado según las potencias crecientes de a .

Operaciones con expresiones algebraicas

Suma de expresiones algebraicas

CASOS: $\left\{ \begin{array}{l} \text{I. Suma de monomios} \left\{ \begin{array}{l} a) \text{ semejantes;} \\ b) \text{ no semejantes.} \end{array} \right. \\ \text{II. Suma de monomio y polinomio;} \\ \text{III. Suma de polinomios.} \end{array} \right.$

211. Suma de monomios semejantes. — Sea:

$$4a^2b + 3a^2b + a^2b$$

Sacando el factor común a^2b , (98), se tiene:

$$\begin{aligned} 4a^2b + 3a^2b + a^2b &= (4+3+1) a^2b \\ &= 8 a^2b \end{aligned}$$

luego: *Para sumar monomios semejantes se suman los coeficientes, y el resultado es el coeficiente de la parte literal común.*

212. Suma de monomios no semejantes. — Sea:

$$2a + 3b + 5a^2$$

Como no hay factor común, la suma queda indicada, luego: *Para sumar monomios no semejantes, se forma un polinomio con ellos, indicando su suma.*

213. Suma de monomio y polinomio. — Sea:

$$3a^2 + (2a + a^2 - b)$$

Suprimiendo paréntesis, (81), resulta:

$$\begin{aligned} 3a^2 + (2a + a^2 - b) &= 3a^2 + 2a + a^2 - b \\ \text{o bien:} \quad &= (3a^2 + a^2) + 2a - b \\ &= 4a^2 + 2a - b. \end{aligned}$$

luego: *Para sumar un monomio y un polinomio, se forma un solo polinomio con los diversos términos, y luego se suman los monomios semejantes que haya.*

214. Suma de polinomios. — Sea:

$$(2a + b) + (3a + 2b + 4c)$$

Suprimiendo paréntesis, se tiene:

$$(2a + b) + (3a + 2b + 4c) = 2a + b + 3a + 2b + 4c$$

$$\begin{aligned} \text{y por (53) y (55):} \quad &= (2a + 3a) + (b + 2b) + 4c \\ \text{o bien:} \quad &= 5a + 3b + 4c \end{aligned}$$

luego: *Para polinomios, se forma con los diversos términos un polinomio único, y luego se suman los monomios semejantes que hubiera.*

Resta de expresiones algebraicas

$$\text{CASOS: } \left\{ \begin{array}{l} \text{I. Resta de monomios } \begin{cases} a) \text{ semejantes;} \\ b) \text{ no semejantes;} \end{cases} \\ \text{II. Resta de monomios y polinomio, o} \\ \quad \text{viceversa;} \\ \text{III. Resta de polinomios.} \end{array} \right.$$

215. Resta de monomios semejantes. — Sea:

$$5ab^2c - 2ab^2c$$

Sacando factor común, resulta:

$$\begin{aligned} 5ab^2c - 2ab^2c &= (5-2) ab^2c \\ &= 3ab^2c \end{aligned}$$

luego: *Para restar monomios semejantes, se restan los coeficientes, y el resultado es el coeficiente de la parte literal común.*

216. Resta de monomios no semejantes. — Sea.

$$3a - 2b$$

como no hay factor común, la resta queda indicada, luego: *Para restar monomios no semejantes, basta dejar indicada la operación.*

217. Resta de monomio y polinomio. — Sea:

$$5a - (3-2a+c)$$

Suprimiendo paréntesis, (83), resulta

$$\begin{aligned} 5a - (3 - 2a + c) &= 5a - 3 + 2a - c \\ &= (5a + 2a) - 3 - c \\ &= 7a - 3 - c \end{aligned}$$

luego: *Para restar un monomio y un polinomio, se suprime el paréntesis, y luego se efectúan las operaciones indicadas con los monomios semejantes que hubiera.*

218. OBSERVACIÓN. — Si fuese restar un polinomio y un monomio, procederíamos de igual manera, y la regla práctica sería la misma.

219. Resta de polinomios. — Sea.

$$(7 + 4b + 3c) - (5 - 3b)$$

Suprimiendo paréntesis:

$$\begin{aligned} (7 + 4b + 3c) - (5 - 3b) &= 7 + 4b + 3c - 5 + 3b \\ &= (7-5) + (4b+3b) + 3c \\ &= 2 + 7b + 3c \end{aligned}$$

luego: *Para restar dos polinomios, se suprimen los paréntesis, y luego se efectúan las operaciones indicadas con los monomios semejantes.*

Multiplicación de expresiones algebraicas

CASOS: $\left\{ \begin{array}{ll} \text{I.} & \text{Multiplicar monomios;} \\ \text{II.} & \text{,, polinomio y monomio;} \\ \text{III.} & \text{,, polinomios.} \end{array} \right.$

220. Multiplicación de monomios. — Sea:

$$3ab \times 2a^3b^2 \times 4a^2c$$

Por definición de monomio:

$$\begin{aligned} 3ab \times 2a^3b^2 \times 4a^2c &= 3.a.b.2.a^3.b^2.4.a^2.c \\ \text{y por (109):} &= 3.2.4.a.a^3.a^2.b.b^2.c \\ \text{y por (162):} &= 24.a^{1+3+2}.b^{1+2}.c \\ &= 24 a^6 b^3 c \end{aligned}$$

luego: *Para multiplicar monomios se multiplican los coeficientes, y el resultado es el coeficiente de una parte literal compuesta por los distintos factores literales, y cada letra elevada a la potencia dada por la suma de los respectivos exponentes.*

221. Multiplicación de polinomio y monomio.—Sea.

$$(5a^2 + 3ab - 2b^2) \times 4ab.$$

por un teorema anterior, (97):

$$\begin{aligned} (5a^2 + 3ab - 2b^2) \times 4ab &= 5a^2.4ab + 3ab.4ab - 2b^2.4ab \\ \text{y por el caso anterior:} &= 20a^3b + 12a^2b^2 - 8ab^3 \end{aligned}$$

luego: *Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica cada término del polinomio por el monomio dado.*

222. Multiplicación de polinomios. — Sea.

$$(3a^2 + 5ab + 2b^2) (5a + 2b)$$

Hagamos $5a + 2b = m$, entonces:

$$\begin{aligned} (3a^2 + 5ab + 2b^2) (5a + 2b) &= (3a^2 + 5ab + 2b^2) m \\ \text{y por (95):} &= 3a^2m + 5abm + 2b^2m \end{aligned}$$

reemplazando m por su valor:

$$\begin{aligned} &= 3a^2 (5a + 2b) + 5ab (5a + 2b) + 2b^2 (5a + 2b) \\ &= 15a^3 + 6a^2b + 25a^2b + 10ab^2 + 10ab^2 + 4b^3 \end{aligned}$$

sumando los monomios semejantes:

$$= 15a^3 + 31a^2b + 20ab^2 + 4b^3$$

luego: Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada término del primero por cada término del segundo, y luego se suman los monomios semejantes que hubiera.

222. Disposición práctica. — En la práctica se escribe un polinomio debajo del otro, y luego se multiplica el primer polinomio por cada término del segundo, cuidando de escribir los términos semejantes en columna para hacer más fácil su suma. De esta manera, el producto anterior se efectúa así:

$$\begin{array}{r} \times \quad 3a^2 + 5ab + 2b^2 \\ \quad 5a + 2b \\ \hline 15a^3 + 25a^2b + 10ab^2 \\ \quad 6a^2b + 10ab^2 + 4b^4 \\ \hline 15a^3 + 31a^2b + 20ab^2 + 4b^4 \end{array}$$

División de expresiones algebraicas

CASOS

- | | | | |
|--|--------------------------------------|----|--|
| <div style="font-size: 4em; line-height: 1;">{</div> | I. Dividir monomios | { | a) Que todas las letras del divisor estén en el dividendo, y con un exponente igual o menor; |
| | | b) | Que haya letras en el divisor que no figuren en el dividendo, o que figuren con exponente mayor; |
| | II. Polinomio dividido por monomio; | | |
| | III. Monomio dividido por polinomio; | | |
| IV. Dividir dos polinomios. | | | |

223. División de monomios.

a) *Que todas las letras del divisor estén en el divi-
dendo, y con un exponente igual o menor.*

Sea: $14a^3b^2c : 7ab^2$

Aplicando sucesivamente el teorema (127), resulta:

$$\frac{14a^3b^2c}{7ab^2} = \frac{14}{7} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^2c}{b^2}$$

o bien, (164):

$$= 2 \cdot a^{3-1} \cdot b^{2-2} \cdot c$$

$$= 2 \cdot a^2 \cdot b^0 \cdot c$$

como $b^0 = 1$: $= 2a^2c$

*luego: Para dividir dos monomios, en el caso en que
todas las letras del divisor figuran en el dividendo, y
con exponentes iguales o menores, se dividen los coefi-
cientes y el resultado es el coeficiente de una parte li-
teral compuesta por todas las letras que haya en el di-
videndo, y cada letra elevada a una potencia dada por
la diferencia de los respectivos exponentes.*

b) *Que haya letras en el divisor que no figuren en
el dividendo, o que figuren con exponente mayor.*

Este caso se estudia en el tercer año.

224. Polinomio dividido por monomio. — Sea:

$$(12a^3b + 4ab^2 + 8a^2b^2) : 4ab$$

Por la propiedad distributiva del cociente, (123)

$$\frac{12a^3b + 4ab^2 + 8a^2b^2}{4ab} = \frac{12a^3b}{4ab} + \frac{4ab^2}{4ab} + \frac{8a^2b^2}{4ab}$$

o bien: $= 3a^2 + b + 2ab$

luego: Para dividir un polinomio por un monomio se divide cada término del polinomio por el monomio dado.

225. Monomio dividido por polinomio. — No ofrece ningún interés este caso, ni es de nuestro curso.

226. División de polinomios. — El estudio de este caso se hace en tercer año. (Véase nuestra *Algebra* 1ª parte, Capítulo V).

EJERCICIOS

147. Hallar el valor numérico de: $a^2b + 2ab^2 + 3a^2b^2$
siendo: $a = 5$; $b = 2$. R: 390
148. Idem, de: $abc - 2a^2 + 5b^2 - 2a^2b + c^2$
siendo: $a = 3$; $b = 4$; $c = 2$. „ 18
149. Idem, de: $\frac{4x + 3y - xy}{x + 3}$
siendo: $x = 5$; $y = 6$ „ 1
150. Idem, de: $\frac{(a + b)^2 - 3a^2 + 5ab - b^2}{a + b}$
siendo: $a = 1$; $b = 2$. „ 4
151. Sumar los monomios: $3a$; $2a$; $6a$; a . R: $12a$
152. „ „ „ $2ab^2$; $3ab^2$; $5ab^2$. „ $10ab^2$
153. „ „ „ $2a$; $3b$; $2b$; $4a$; b ; $7a$; $5b$.
R: $13a + 11b$
154. „ „ „ $3a^2$; $10a$; $2b$; $5a$; $3ab$; $2a^2$; b ;
R: $5a^2 + 15a + 3b + 3ab$
155. „ „ polinomios:
 $3a^2b + 2ab^2 + a^2b^2 + ab$; $6a^2b^2 + 2ab$; $5ab^2 + a^2b + 2 + 3ab$
R: $4a^2b + 7ab^2 + 7a^2b^2 + 6ab + 2$

156. Restar los monomios: $8a$ y $5a$. R: $3a$
157. " " " $6a^2b$ y $2a^2b$. R: $4a^2b$
158. " " polinomios: $(3+5a+9a^2) - (5a+4a^2-2)$
R: $5 + 5a^2$
159. Restar: $(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$
R: $4ab$
160. Multiplicar: $4a \times 6b$ R: $24ab$
161. " $2ab \times 3a^2b \times 5a^3b^2$ R: $30a^6b^4$
162. " $(4a^3b - 2a^2b^2 + 5ab^3) 3ab$
R: $12a^4b - 6a^3b^3 + 15a^2b^4$
163. " $(2a^3 - 3a^2b + 5ab^2 - 6b^3) 4a^2b^3$
R: $8a^5b^3 - 12a^4b^4 + 20a^3b^5 - 24a^2b^6$
164. " $(2 + 3a + 4a^2) (3 + 2a)$
R: $6 + 13a + 8a^2 + 8a^3$
165. " $(5a^3 + 3a^2b + 7ab^2 + 4b^3) (a^2 + 3ab + 5b^2)$
R: $5a^5 + 18a^4b + 41a^3b^2 + 40ab^3 + 47ab^4 + 20b^5$
166. Dividir: $18a^5b^2c^4 : 6a^4b^2c$ R: $3ac^3$
167. " $39ab^2c^3d : 3abc^2$ R: $13bcd$
168. " $(14a^3b^2 - 21a^2b^2 + 7a^2b) : 7a^2b$
R: $2ab - 3b + 1$
169. " $(18a^4bc^2 - 12a^2bc^4d - 6a^3bc^4 + 24a^2bc^3) : 6a^2bc^2$
R: $3a^2 - 2c^2d - ac^2 + 4c$

CAPITULO XIII

PROGRAMA XIII. — Numeración decimal. Objeto de la numeración. Numeración decimal.

Numeración oral. Numeración escrita.

Descomposición polinómica de un número cualquiera de dos o más cifras.

Numeración decimal

227. Objeto de la numeración. — Se llama *numeración*, al conjunto de reglas y convenios que permite expresar gráfica y oralmente los números.

En todo sistema de numeración hay que distinguir la *numeración oral*, que da las reglas para nombrar los números, y la *numeración escrita*, que da las reglas para escribirlos.

228. Numeración decimal. — Se llama *sistema de numeración decimal* a aquel cuya *base* es diez.

La *base* de un sistema de numeración es el número de palabras y signos distintos empleados en él, así, en el sistema de numeración decimal estas palabras y signos son:

CIFRAS: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
NOMBRES: *cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve*

La base de un sistema debe ser mayor que uno.

229. Numeración oral. — La *numeración oral* da las reglas para nombrar los números. En el sistema decimal:

diez unidades simples ...	forman una decena
diez decenas	„ una centena,
diez centenas	„ un millar o mil,
diez millares	„ una decena de mil,
diez decenas de mil	„ una centena de mil,
diez centenas de mil	„ un millón,
... ..	
... ..	

Las palabras *diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro y diez y cinco* se reemplazan por *once, doce, trece, catorce y quince*; *dos decenas, tres decenas*, etc. por *veinte treinta*, etc.; *cinco cientos, siete cientos y nueve cientos* por *quinientos, setecientos y novecientos*.

230. En el cuadro siguiente tenemos los nombres de las unidades de distinto orden hasta los *trillones*.

Unidades principales	Unidades secundarias	Ordenes
Unidades	unidades simples	1 ^{er.} orden
	decenas	2 ^a „
	centenas	3 ^a „
	unidades de millar	4 ^a „
	decenas de millar	5 ^a „
	centenas de millar	6 ^a „
Millones	unidades de millón	7 ^a „
	decenas de millón	8 ^a „
	centenas de millón	9 ^a „
	unidades de millar de millón	10 ^a „
	decenas de millar de millón	11 ^a „
	centenas de millar de millón	12 ^a „
Billones	unidades de billón	13 ^a „
	decenas de billón	14 ^a „
	centenas de billón	15 ^a „
	unidades de millar de billón	16 ^a „
	decenas de millar de billón	17 ^a „
	centenas de millar de billón	18 ^a „

231. TEOREMA. — *Todo número mayor que uno, puede escribirse en forma de polinomio ordenado res-*

pecto a las potencias de 10, siendo los coeficientes de sus términos menores que 10.

$$H \left\{ \begin{array}{l} N \text{ núm. dado} \\ N > 1; h, \dots\dots\dots d, c, b, a, \text{ menores que } 10. \end{array} \right.$$

$$T) \quad N = h.10^m + \dots\dots\dots + d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a$$

Dividamos el número N por 10; al cociente obtenido dividámoslo por 10, etc.;

$$\begin{array}{r|l} N & 10 \\ a & A \end{array} \quad \therefore \text{ por (140),} \quad N = A.10 + a$$

$$\begin{array}{r|l} A & 10 \\ b & B \end{array} \quad \therefore \text{ por (140),} \quad A = B.10 + b$$

$$\begin{array}{r|l} B & 10 \\ c & C \end{array} \quad \therefore \text{ por (140),} \quad B = C.10 + c$$

$$\begin{array}{r|l} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

Como cada nuevo cociente es menor que su dividendo respectivo, resulta que $A, B, C, \dots\dots\dots$ son cada vez menores, y llegaremos, por último, a una división en que sea $h < 10$:

$$\begin{array}{r|l} H & 10 \\ g & h \end{array} \quad \therefore \quad H = h.10 + g$$

Reemplazando el valor H en la igualdad anterior, y el obtenido en la anterior, etc., resulta esta igualdad:

$$R = (h.10^{m-3} + g.10^{m-4}).10 + c$$

$$\text{o bien: } B = h.10^{m-2} + \dots\dots\dots + c$$

reemplazando este valor en A :

$$A = (h.10^{m-2} + \dots\dots\dots + c).10 + b$$

$$\text{o bien: } A = h.10^{m-1} + \dots\dots\dots + c.10 + b$$

reemplazando este valor en N :

$N = (h.10^{m-1} + \dots + c.10 + b) 10 + a$
y efectuando.

$N = h.10^m + \dots + c.10^2 + b.10 + a$
--

232. Numeración escrita. — La *numeración escrita* da las reglas para *escribir* los números.

Las unidades simples se representan con los signos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

llamados *signos*, *cifras* o *caracteres arábigos*.

Los números compuestos por una sola cifra se llaman *digitos*, y *políditos* los demás.

233. Convención Fundamental. — *Toda cifra colocada a la izquierda de otra representa unidades del orden inmediato superior.*

Comenzando por la derecha, la *primer cifra* son las unidades, la segunda las decenas, la tercera las *centenas*, la cuarta los millares, etc., así el número *dos mil cuatrocientos cincuenta y seis*, o sea:

2 millares, 4 centenas, 5 decenas, 6 unidades,
por la convención resulta. 2456

OBSERVACIONES I — *Cuando falten unidades de un orden dado, su lugar se ocupa con un cero.*

Así en 407 se tienen 4 centenas, 0 decenas y 7 unidades.

II. *Las cifras tienen dos valores, uno absoluto, según su forma, y otro relativo, según el lugar que ocupe en el número dado.*

Ejemplo: en 35, el 3 tiene un valor absoluto de 3 unidades, y un valor relativo de 3 decenas.

234. Escribir un número dictado. — De la *conven-*
ción anterior resulta que: *Para escribir un número dic-*
tado se escriben de izquierda a derecha las unidades de
cada orden a medida que se van nombrando, colocando
un cero cuando falten unidades de algún orden.

Ejemplos:

1º) Escribir *setecientos treinta y cinco*: 735.

2º) Escribir *dos mil ocho*: 2008.

235. Lectura de un número escrito. — *Para leer*
un número escrito, se lo divide en grupos de tres cifras,
por medio de un punto y se lee, comenzando por la iz-
quierda, el número de unidades de cada período, con la
terminación del orden correspondiente.

Ejemplo: El número 5.032 se lee: *cinco mil treinta*
y dos.

236. Descomposición polinómica de un número cual-
quiera de dos o más cifras. — Sea el número 71.060.

Por el teorema (231):

$$71.060 = 7.10^4 + 1.10^3 + 0.10^2 + 6.10 + 0$$

luego: *Todo número de dos o más cifras se puede des-*
componer en un polinomio cuyos términos son los pro-
ductos de cada una de sus cifras, comenzando por la
izquierda, por las potencias decrecientes de 10, siendo
el primer exponente igual al número de cifras menos
uno.

EJERCICIOS

Escribir los siguientes números en forma polinómica:

170	3875	R: $3.10^3 + 8.10^2 + 7.10 + 5$
171	2042	„ $2.10^3 + 4.10 + 2$
172	10.403	„ $1.10^4 + 4.10^2 + 6$
173	575	„ $5.10^2 + 7.10 + 5$
174	1230	„ $1.10^3 + 2.10^2 + 3.10$

¿Qué números representan los siguientes polinomios?:

175	$8.10^3 + 6.10^2 + 3.10 + 7$	R: 8.637
176	$6.10^4 + 5.10^3 + 2.10 + 3$	„ 65.023
177	$3.10^5 + 1.10^3 + 1.10$	„ 301.010
178	$4.10^4 + 2$	„ 40.002
179	$2.10^5 + 7.10^3 + 4.10^2 + 8$	„ 207.408

CAPITULO XIV

PROGRAMA XIV. — Mecanismo de las operaciones aritméticas, fundamentales. Suma de números dígitos; de un polidígito y de un dígito; de dos o más polidígitos.

Resta de números dígitos; de un polidígito y un dígito; de dos polidígitos.

Multiplicación de dos números dígitos; de un polidígito por un dígito. Multiplicación de polidígitos; multiplicación por la unidad seguida de ceros, por una cifra significativa seguida de ceros y caso general.

División de un número dígito o polidígito por un dígito, siendo dígito el cociente. División de polidígitos, siendo dígito el cociente. Lema: Si se suprimen de la derecha del dividendo y divisor tantas cifras como tiene el divisor menos una, y se dividen los números que resultan, el cociente que se obtiene es igual o mayor que el de los números dados. Regla. División de polidígitos (caso general): Lema 1º El cociente de dividir el número de decenas del cociente. Lema 2º Si se resta del dividendo el producto de número de decenas del cociente por el divisor seguido de un cero, y se divide el resto por el divisor, el cociente y el resto que se obtienen, son respectivamente, la cifra de las unidades del cociente de los números dados y el resto de la división de los mismos. Regla.

Raíz cuadrada entera de números mayores que cien: Lema 1º La raíz cuadrada entera del número de decenas de un número dado, es igual al número de decenas de la raíz cuadrada entera de dicho número dado. Lema 2: Si del radicando se resta el cuadrado del número de decenas de la raíz, seguido de dos ceros, y se divide el número de decenas del resto por el duplo del número de decenas de la raíz, el cociente es igual o mayor que la cifra de las unidades de la raíz. Regla. Ejercicios.

Mecanismo de las operaciones aritméticas fundamentales

Mecanismo de la suma

Casos de la suma: {
I. Sumar dígitos;
II. Suma de polidígito y dígito;
III. Sumar polidígitos.

237. Suma de números dígitos. — Sea sumar 4 y 2.

$$\begin{aligned}\text{Se tiene: } 4 + 2 &= 4 + (1 + 1) \\ &= (4 + 1) + 1 = 5 + 1 = 6\end{aligned}$$

Estas sumas se hacen de memoria sabiendo la *Tabla de sumar*

238. Suma de polidígito y dígito. — Puede suceder que la suma de las unidades sea un dígito o un polidígito.

I.—Sea $214 + 3$.

$$\begin{aligned}\text{Se tiene: } 214 + 3 &= (2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 4) + 3 \\ \text{y por (55):} &= 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + (4 + 3) \\ &= 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 7 \\ &= 217\end{aligned}$$

II.—Sea $156 + 9$.

$$\begin{aligned}\text{Se tiene: } 156 + 9 &= (1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6) + 9 \\ &= 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + (6 + 9)\end{aligned}$$

pero $6 + 9 = 15 = 1 \cdot 10 + 5$, luego

$$= 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 5$$

factoreando el 10: $= 1 \cdot 10^2 + (5 + 1)10 + 5$

$$= 1 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 5$$

$$= 165$$

luego: *Para sumar un polidígito y un dígito se suma el dígito a las unidades de aquél:*

a) *si la suma es un dígito se coloca ésta en el lugar de las unidades del polidígito, dejando las demás;*

b) *si la suma es un polidígito, se coloca la de sus unidades en el primer lugar a la derecha, y se suma 1 a las decenas.*

239. Sumar polidígitos. — Sea $345 + 78$.

Se tiene: $245 + 78 = (2.10^2 + 4.10 + 5) + (7.10 + 8)$
 por (55): $= 2.10^2 + 4.10 + 7.10 + (5 + 8)$

$$= 2.10^2 + 4.10 + 7.10 + 1.10 + 3$$

$$= 2.10^2 + (4 + 7 + 1)10 + 3$$

$$= 2.10^2 + (10 + 2)10 + 3$$

$$= 2.10^2 + 10^2 + 2.10 + 3$$

$$= (2 + 1)10^2 + 2.10 + 3$$

$$= 3.10^2 + 2.10 + 3$$

y por último: $= 323$

luego: *Para sumar polidígitos, se suman las unidades, las decenas, las centenas, etc., de los sumandos. Si alguna de estas sumas tiene más de una cifra se escribe sólo la de la derecha, sumando las restantes con las del orden siguiente.*

240. Disposición práctica. — En la práctica, todas las razones anteriores quedan sobreentendidas y para facilitar el cálculo, los sumandos se escriben en columna, como se hace en el ejemplo:

$$\begin{array}{r} 453 \\ 18 \\ 1570 \\ 146 \\ \hline 2.187 \end{array}$$

241. Prueba de la suma. — Para probar si una suma está bien hecha, se repite la operación invirtiendo el orden de los sumandos; por la propiedad conmutativa, el resultado debe ser el mismo.

Mecanismo de la resta

Casos de la resta: $\left\{ \begin{array}{l} \text{I. Restar dígitos;} \\ \text{II. Restar polidígito y dígito;} \\ \text{III. Restar polidígitos.} \end{array} \right.$

242. Resta de números dígitos. — Sea $7 - 3$.

Basta hallar de memoria el número que sumado con 3 da 7. Sabiendo la *Tabla de suma* se halla 4, puesto que $3 + 4 = 7$.

243. Restar un polidígito y un dígito. — Puede suceder que el dígito se pueda restar de las unidades o no.

I. — Sea $48 - 6$.

Se tiene: $48 - 6 = (4.10 + 8) - 6$
y por (73): $= 4.10 + (8 - 6)$
 $= 4.10 + 2$
 $= 42$

II. — Sea $52 - 7$

Se tiene: $52 - 7 = (40 + 12) - 7$
y por (73): $= 40 + (12 - 7)$
 $= 40 + 5 = 45$

luego: *Para restar un dígito a un polidígito se resta el dígito a las unidades de aquél:*

a) *si la resta es posible, se coloca ésta en el lugar de las unidades del polidígito, dejando las demás.*

b) *si la resta no es posible, una de las decenas se suma a las unidades y se resta el dígito de esta suma, dejando las demás cifras.*

244. Restar dos polidígitos. — Sea $456 - 72$.

Se tiene: $456 - 72 = (300 + 156) - 72$

$$= (3 \cdot 10^2 + 15 \cdot 10 + 6) - (7 \cdot 10 + 2)$$

por (83): $= (3 \cdot 10^2 + 15 \cdot 10 + 6) - 7 \cdot 10 - 2$

por (73): $= 3 \cdot 10^2 + (15 \cdot 10 - 7 \cdot 10) + (6 - 2)$

$$= 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4$$

$$= 384$$

luego: *Para restar dos polidígitos, se restan las unidades de cada orden, empezando por la derecha. En el caso en que una de estas restas parciales fuese imposible, se le suma 10 y se resta 1 a la cifra del orden siguiente.*

245. Disposición práctica. — Para facilitar las res-

5328	tas, se escribe el sustraendo debajo del mi-
— 4914	nuendo, de manera que se correspondan las
414	unidades de cada orden, como puede verse en
	el ejemplo.

246. Prueba de la resta. — Para probar si una resta está bien hecha, el minuendo debe ser igual al sustraendo más la diferencia.

Mecanismo de la multiplicación

Casos de la multiplicación:	}	I. Multiplicar dígitos;
	}	II. Multiplicar polidígito y dígito;
	}	III. Multiplicar polidígitos.

247. Multiplicar dos dígitos. — Sea 2×4 .

Se debe conocer de memoria el resultado, para lo cual basta saber la *Tabla de multiplicar*.

248. Multiplicar un polidígito y un dígito —
Sea: 412×3 .

Se tiene: $412 \times 3 = (4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2) \cdot 3$
 y por (95): $= 3 \cdot 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 1 \cdot 10 + 3 \cdot 2$
 $= 12 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6$
 $= (10 + 2) 10^2 + 3 \cdot 10 + 6$
 $= 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6$
 $= 1236$

luego: Para multiplicar un polidígito por un dígito, se multiplica cada cifra de aquél por éste, empezando por la derecha. Cuando un producto no pasa de 9, se lo escribe; si pasa de 9, se escribe sólo la cifra de las unidades y se retienen las decenas para sumarlas al producto siguiente.

249. Multiplicar dos polidígitos. — Veamos primero dos casos particulares:

I. MULTIPLICACIÓN POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS.

Sea 134×100 .

Se tiene: $134 \times 100 = (1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4) 10^2$
 y por (95): $= 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0$
 $= 13400$

luego: Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, basta agregar al número dado tantos ceros como acompañen a la unidad.

II. MULTIPLICACIÓN POR UNA CIFRA SIGNIFICATIVA SEGUIDA DE CEROS.

Sea: 245×3000 .

Se tiene: $245 \times 3.000 = 245 \times (3 \times 1.000)$
 $= (245 \times 3) \times 1.000$
 $= 735 \times 1.000$
 $= 735.000$

luego: Para multiplicar un número por un dígito seguido

de ceros, se multiplica el número dado por el dígito, y luego se agregan al producto tantos ceros como acompañen al dígito dado.

III. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS CUALESQUIERA.

Sea 473×62 .

$$\begin{aligned} \text{Se tiene } 473 \times 62 &= 473 (60 + 2) \\ &= 473.60 + 473.2 \\ &= 28.380 + 946 \\ &= 29.326 \end{aligned}$$

luego: Para multiplicar dos números cualesquiera, se multiplica sucesivamente el multiplicando por cada cifra del multiplicador, empezando por la derecha, sumando luego los productos parciales.

250. Disposición práctica. — Prácticamente, la operación se dispone como figura en el ejemplo.

$$\begin{array}{r} 473 \\ \times 62 \\ \hline 946 \\ 2838 \\ \hline 29.326 \end{array}$$

251. Prueba de la multiplicación. — Por la propiedad conmutativa, se invierte el orden de los factores, debiendo dar el mismo resultado.

Mecanismo de la división

- | | | |
|-----------------------|---|---|
| Casos de la división: | { | I. Dividir un dígito o polidígito por un dígito, siendo dígito el cociente; |
| | | II. División de polidígitos siendo dígito el cociente; |
| | | III. División de polidígitos siendo polidígito el cociente. |

252. División de un dígito o polidígito por un dígito, siendo dígito el cociente. — Se reconoce que el cociente tiene una sola cifra cuando al agregar un cero al divisor, resulta un número mayor que el dividendo.

En este caso, el conocimiento de la *Tabla de multiplicar* da de inmediato el cociente.

Ejemplo: $36 : 4 = 9$, porque: $9 \times 4 = 36$

Si el dividendo no es múltiplo del divisor, el cociente es el mayor número que multiplicado por el divisor dé un producto menor que el dividendo.

Ejemplo: Sea $42 : 5$.

Se tiene: $8 \times 5 < 42 < 9 \times 5$

luego: $42 : 5 = 8$, resto 2.

253. División de polidígitos, siendo dígito el cociente. — Sea dividir 124 y 26.

El cociente es dígito, pues $124 < 26 \times 10$.

Se podría, como en el caso anterior, formar los múltiplos sucesivos del divisor y buscar entre qué múltiplos está comprendido el dividendo, pero el procedimiento sería largo, siendo preferible hallar el límite superior del cociente.

Separando las decenas del dividendo y divisor, tendremos 12 y 2 y su cociente será *igual* o *mayor* que el de 124 y 26.

Sea c el cociente y r el resto. Por definición de cociente entero, (132):

$$124 = 26.c + r$$

o bien: $12 \text{ dec.} + 4 = (2 \text{ dec.} + 6)c + r$

Las 12 decenas del dividendo están formadas por el producto de las decenas del divisor por c , y por las de-

cenas *que pueden* estar comprendidas en el producto de 6 y 6, más el resto, de manera que:

$$12 \geq 2 \cdot 6$$

$$c = \frac{12}{2}$$

y el cociente de 12 y 2 será 6.

Pero el cociente de 12 y 2 es 6, quedando sólo probar si 6 es también el cociente de 124 y 26.

En efecto: $124 < 26 \cdot 6$

luego 6 no es el cociente de 124 y 6.

Ensayemos el 5: $124 < 26 \times 5$

luego 5 no es el cociente de 124 y 6.

Ensayemos el 4: $124 > 26 \times 4$

luego 4 es el cociente entero de 124 y 26; y el resto es:

$$124 - 26 \times 4 = 20$$

En la práctica la operación se dispone así:

$$\begin{array}{r} 12'4 \quad | \quad 2'6 \\ 20 \quad | \quad 4 \end{array}$$

luego: *Para dividir dos polidígitos, siendo dígito el cociente, se separan a la izquierda del dividendo una o dos cifras y que contengan por lo menos una vez y menos de 10 veces a la primera del divisor. Se dividen las cifras así separadas y el número obtenido será el cociente buscado.*

Si el producto del cociente hallado por el divisor es mayor que el dividendo, al cociente se le rebaja una unidad, y así hasta que el producto del cociente y el divisor sea igual o menor que el dividendo. La diferencia entre el dividendo y el producto del cociente por el divisor, es el resto.

254. División de polidígitos, siendo polidígito el cociente. — Sea dividir 2678 y 76.

Para hallar el cociente de esos dos números nos basaremos en los dos lemas siguientes:

LEMA 1º — *El cociente que resulta de dividir el número de decenas del dividendo por el divisor, es igual al número de decenas del cociente.*

$$H \left\{ \begin{array}{r} 2678 \text{ y } 76 \\ 267 \quad | \quad 76 \\ r \quad \quad | \quad d \end{array} \right. \quad T \left\{ \begin{array}{r} 2678 \quad | \quad 76 \\ r' \quad \quad | \quad d. 10 + u \end{array} \right.$$

Se tiene que $267 < 76 \times 10$, luego, por el caso anterior, el cociente entero de 267 y 76 es 3, puesto que:

$$76 \times 3 < 267 < 76 \times 4$$

Multiplicando, (102), por 10:

$$76 \times 30 < 2670 < 76 \times 40$$

sumando 8 a 2670 resulta $2678 < 76 \times 40$, pues hay entre ellos una diferencia de 10 por lo menos y sólo se ha sumado 8, luego:

$$76 \times 30 < 2678 < 76 \times 40$$

expresión que nos dice, (141), que el cociente entero de 2678 y 76 está comprendido entre 30 y 40, es decir, que el cociente es de $30 + u$ unidades.

LEMA 2º — *Si se resta del dividendo el producto del número de decenas del cociente por el divisor, seguido de un cero, y se divide el resto por el divisor, el cociente y el resto que se obtienen son, respectivamente, la cifra de las unidades del cociente de los números dados y el resto de la división de los mismos.*

$$H \left\{ \begin{array}{r} 2678 \quad | \quad 76 \\ r \quad \quad | \quad d. 10 + u; r < 76 \end{array} \right. \quad T) (2678 - d. 760) : 76 = u$$

De la hipótesis y por definición de cociente:

$$\begin{aligned} 2678 &= (d.10 + u) 76 + r \\ &= d.10.76 + 76.u + r \\ &= d.760 + 76.u + r \end{aligned}$$

restando $d.760$ a ambos miembros, (64):

$$2678 - d.760 = 76.u + r; \text{ y por hipótesis } r < 76$$

Por un teorema anterior, (141), u es el cociente y r el resto de la división de $2678 - d.760$ y 76 , quedando demostrado el lema.

Entonces, por el lema último, como $d = 3$, resulta:

$$\begin{aligned} 2678 - 3.760 &= 76.u + r \\ 2678 - 2280 &= 76.u + r \\ 398 &= 76.u + r \end{aligned}$$

y por el caso anterior, (253), resulta que $u = 5$, de donde se deduce que:

$$398 - 76.5 + 18 = r$$

De manera que el cociente de la división de 1678 v 76 es $d.10 + u$, es decir: $3.10 + 5 = 35$, y el resto es 18 .

De todo esto se deduce que:

Para dividir dos números, siendo polidígito el cociente, se separan a la izquierda del dividendo las cifras necesarias para formar un número mayor que el divisor y menor que el producto de éste por 10, y se efectúa la división, resultando así la primer cifra del cociente. A la derecha del resto se coloca la cifra siguiente del dividendo, y so divide el número obtenido por el divisor, resultando la segunda cifra del cociente. Se continúa de esta manera hasta que se hayan bajado todas las cifras del dividendo. El último resto obtenido es el resto de la división.

Si algún dividendo parcial fuese menor que el divisor, se pone cero en el cociente y se baja la siguiente cifra del dividendo.

255. Disposición práctica. — Se escribe el dividendo, y a su derecha, en la misma línea horizontal, el divisor, separados por una raya vertical; debajo del divisor se escribe el cociente, separados por una raya horizontal.

$$\begin{array}{r|l} 573'29 & 68 \\ 292 & 843 \\ 209 & \\ \hline & 5 \end{array}$$

256. Prueba de la división. — Una división está bien hecha cuando, por definición, el dividendo es igual al divisor por el cociente, más el resto.

Mecanismo de la raíz cuadrada

Casos de la raíz cuadrada

{	I. Raíz de un número menor que cien;
	II. Raíz de un número mayor que cien.

257. Raíz cuadrada de un número menor que cien. — Se debe saber de memoria los cuadrados de los 10 primeros números.

Ejemplos:

1º) $\sqrt{36} = 6$, porque $6^2 = 36$.

2º) $\sqrt{20} = 4$, porque: $4^2 < 20 < 5^2$.

258. Raíz cuadrada de un número mayor que cien. — Sea hallar la raíz cuadrada de 2073.

Para calcularla, nos basaremos en los dos lemas siguientes:

LEMA. 1º — *La raíz cuadrada entera de las centenas de un número, es igual a las decenas de su raíz cuadrada.*

$$\text{H)} \quad \sqrt{N} = d.10 + u; r = \text{resto.} \quad \text{T)} \quad \sqrt{c} = d$$

Por definición de raíz:

$$\begin{aligned} N &= (d.10 + u)^2 + r \\ &= d^2.100 + 2.d.10.u + u^2 + r \end{aligned}$$

y por (46): $d^2.100 \leq N < (d+1)^2.100$

dividiendo por 100, quedan las centenas:

$$d^2 \leq c < (d+1)^2$$

extrayendo la raíz cuadrada:

$$d \leq \sqrt{c} < d+1$$

expresión que nos dice que las decenas d son la raíz cuadrada de las centenas c .

LEMA 2º — *Si de un número se resta el cuadrado de las decenas de su raíz cuadrada y las decenas del resto se dividen por el duplo de las decenas de la raíz, el cociente es igual o mayor que la cifra de las unidades de la raíz.*

$$\text{H)} \quad N = d.10 + u; r = \text{resto.}$$

$$\text{T)} \quad \text{decenas de } \frac{N - d^2.100}{2d} \geq u$$

Por definición de raíz:

$$\begin{aligned} N &= (d.10 + u)^2 + r \\ &= d^2.100 + 2.d.10.u + u^2 + r \end{aligned}$$

restando $d^2.100$ a ambos miembros:

$$N - d^2.100 = 2d.10.u + u^2 + r$$

y por (46):

$$N - d^2.100 \geq 2d.10.u$$

dividiendo por 10, quedan las decenas:

$$\text{decenas de } (N - d^2 \cdot 100) \geq 2 d \cdot u$$

dividiendo por $2d$:

$$\text{decenas de } \frac{N - d^2 \cdot 100}{2d} \geq u$$

La aplicación de estos dos teoremas nos conduce a la siguiente regla:

Para hallar la raíz cuadrada de un número se lo divide, de derecha a izquierda, en grupos de dos cifras, y se halla la raíz cuadrada del último grupo, quien será la primera cifra de la raíz. Se eleva al cuadrado esta primer cifra y se resta del primer grupo y a la derecha del resto se escribe el segundo grupo, separando la primera cifra a la derecha del número así formado; la parte que queda a la izquierda se divide por el duplo de la raíz y el cociente podrá ser la segunda cifra de la raíz.

Para comprobar esta cifra, se la escribe a la derecha del duplo de la raíz y se multiplica el número así formado por la misma cifra. Si el producto se puede restar de todo el resto, el número hallado es la segunda cifra de la raíz, y si no, se rebaja una unidad, procede de divide del mismo modo.

A la derecha del nuevo resto se escribe el siguiente grupo del radicando, separando la primer cifra a la derecha, y la parte que queda a la izquierda se divide por el duplo de la raíz hallada, y el cociente podrá ser la tercer cifra de la raíz, continuando como más arriba se ha dicho.

259. Disposición práctica. — En la práctica la operación se dispone como en el ejemplo que sigue:

$\sqrt{20.5\ 2.4\ 5}$ $4^2 = 16$ $\underline{4\ 5,2}$ $ - 4\ 2\ 5$ $ 2\ 7\ 4,5$ $ \underline{2\ 7\ 0\ 9}$ $ 3\ 6$	453 $8 = \text{duplo de } 4; \quad 45 : 8 = 5$ $85 \times 5 = 425$ $90 = \text{duplo de } 45; \quad 274 : 90 = 3$ $903 \times 3 = 2709$
--	---

260. Prueba de la raíz cuadrada. — Una operación de raíz cuadrada está bien hecha cuando el radicando es igual al cuadrado de la raíz, más el resto.

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes sumas:

180	131 + 413 + 23 + 222	R: 789
181	9.215 + 40 + 425 + 907	„ 10.587
182	104 + 203 + 613 + 214	„ 1.134
183	1.875 + 3.143 + 5.826 + 10.832	„ 21.676
184	4.865 + 2.145 + 8.173 + 40.084	„ 55.267
185	6.354 + 2.145 + 2.042 + 1.111 + 3.333	„ 14.985
186	639.914	
	661.107	
	124.776	
	75.468	
	83.305	
	R: 1.584.570	
	187)	
	75.114	
	1.636.535	
	1.011.975	
	19.421	
	78.771	
		R: 2.821.816

Efectuar las siguientes restas:

188	$5.987 - 4.683$	R:	1.304
189	$9.877 - 6.407$	"	3.470
190	$3.426 - 2.897$	"	529
191	$20.000 - 8.763$	"	11.237
192	$94.278 - 62.574$	"	31.704
193	$53.714 - 25.824$	"	27.890
194	$20.804 - 10.408$	"	10.396
195	$789.740 - 545.694$	"	244.046

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

196	475×234	R:	111.150
197	903×407	"	367.521
198	5.682×543	"	3.085.326
199	67.485×472	"	31.852.920
200	95.723×6.095	"	583.431.685
201	46.703×983	"	45.909.049
202	$135 \times 28 \times 45$	"	170.100
203	$87 \times 73 \times 56 \times 39$	"	13.870.584

Efectuar las siguientes divisiones:

204	$18.278 : 38$	R:	481
205	$461.622 : 87$	"	5.306
206	$126.498 : 58$	"	2.181
207	$3.207.594 : 767$	"	4.182
208	$124.758 : 289$	"	431; $r = 199$
209	$969.936 : 4.008$	"	242
210	$1.525.957 : 5.003$	"	305; $r = 42$
211	$379.511.145 : 70.905$	"	48.009

Calcular las siguientes raíces:

212	$\sqrt{225}$	R:	15
213	$\sqrt{576}$	"	24
214	$\sqrt{1.369}$	"	37
215	$\sqrt{55.225}$	"	235
216	$\sqrt{3.364}$	"	58
217	$\sqrt{164.853}$	"	406; $r = 17$
218	$\sqrt{327.234}$	"	572; $r = 50$
219	$\sqrt{1.572.516}$	"	1.254

CAPITULO XV

PROGRAMA XV. — Divisibilidad. Teoremas preliminares: La suma de varios múltiplos de un número es un múltiplo de dicho número; la diferencia de dos múltiplos de un número es un múltiplo de dicho número; si en una suma de dos sumandos, uno de ellos es múltiplo de un número y el otro no lo es, la suma tampoco es múltiplo de dicho número; todo múltiplo de un múltiplo de un número, es también múltiplo de dicho número.

Teorema fundamental de la divisibilidad: Un número cualquiera es igual a un múltiplo de otro más la cifra de las decenas del mismo multiplicada por el resto por defecto o por exceso, respectivamente, de la división de diez por el segundo número; más o menos las cifras de las decenas del primero por el resto del defecto o por exceso, respectivamente.

Caracteres de divisibilidad por 2 y por 5; por 4 y por 25; por 8 y por 125; por 3 y por 9; por 11.

Divisibilidad

261. Definición. — Un número es *divisible* por otro, cuando es su múltiplo.

Así, 12 es divisible por 3 porque $12 = 3 \cdot 4$.

La *divisibilidad* es la parte de la Aritmética que estudia las condiciones que debe cumplir un número para que sea divisible por otro.

262. TEOREMA. — La suma de varios múltiplos de un número es un múltiplo de dicho número.

$$\text{H) } a = m; b = m; c = m. \quad \text{T) } a + b + c = m$$

Por hipótesis se tiene:

$$\text{si } a = \dot{m} \quad \text{es :} \quad a = m. a'$$

$$,, \quad b = \dot{m} \quad ,, : \quad b = m. b'$$

$$,, \quad c = \dot{m} \quad ,, : \quad c = m. c'$$

Sumando miembro a miembro se obtiene:

$$a + b + c = m.a' + m.b' + m.c'$$

o sea $a + b + c = m(a' + b' + c')$

pero el segundo miembro es múltiplo de m , luego:

$$a + b + c = \dot{m}$$

263. TEOREMA. — *La diferencia de dos múltiplos de un número es un múltiplo de dicho número.*

$$\text{H) } a = \dot{m}; b = \dot{m}; a > b \quad \text{T) } a - b = \dot{m}$$

Por hipótesis se tiene:

$$\text{si } a = \dot{m} \quad \text{es :} \quad a = m.a'$$

$$,, \quad b = \dot{m} \quad ,, : \quad b = m.b'$$

restando miembro a miembro se obtiene:

$$a - b = m.a' - m.b'$$

o sea: $a - b = m(a' - b')$

pero el segundo miembro es múltiplo de m , luego:

$$a - b = \dot{m}$$

264. TEOREMA. — *Si en una suma de dos sumandos uno de ellos es múltiplo de un número y el otro no, la suma tampoco es múltiplo de dicho número.*

$$\text{H) } a + b; a = \dot{m}; b \neq \dot{m} \quad \text{T) } a + b \neq \dot{m}$$

La suma $a + b$ o es o no es múltiplo de m .

Si fuese: $a + b = \dot{m}$

como es $a = \dot{m}$

restando miembro a miembro se obtiene:

$$a + b - a = \dot{m}$$

o bien: $b = \dot{m}$

lo que es absurdo, pues es contrario a la hipótesis, luego:

$$a + b \neq \dot{m}$$

265. TEOREMA. — *Todo múltiplo de un múltiplo de un número, es múltiplo de dicho número.*

H) $a = m; m = \dot{n}$ T) $a = \dot{n}$

por hipótesis se tiene:

$$a = m.a' \quad (1)$$

$$m = n.m' \quad (2)$$

y reemplazando (2) en (1):

$$a = (n.m')a'$$

o bien:

$$a = \dot{n}(m'.a')$$

pero el segundo miembro es múltiplo de n , luego:

$$a = \dot{n}$$

266. Teorema fundamental de la divisibilidad. — *Todo número es igual a un múltiplo de otro, más la cifra de las unidades del primero; más o menos la cifra de las decenas del mismo multiplicada por el resto por defecto o por exceso, respectivamente, de la división de 10 por el segundo; más o menos la cifra de las centenas del primero por el resto por defecto o por exceso, respectivamente,*

de la división de 100 por el segundo, y así sucesivamente.

$$H \left\{ \begin{array}{l} 1485 \text{ número dado.} \\ 10: 7 \left\{ \begin{array}{l} r=3 \\ r'=4 \end{array} \right. \quad 100: 7 \left\{ \begin{array}{l} r=2 \\ r'=5 \end{array} \right. \quad 1.000: 7 \left\{ \begin{array}{l} r=6 \\ r'=1 \end{array} \right. \text{ etc.} \end{array} \right.$$

$$T \left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ}) \quad 1485 = \dot{7} + 5 + 8.3 + 4.2 + 1.6 \\ 2^{\circ}) \quad 1485 = \dot{7} + 5 + 8.4 - 4.5 - 1.1 \end{array} \right.$$

Sabemos, que:

$$1485 = 5 + 8.10 + 4.100 + 1.1000 \quad (1)$$

y que

$$\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ 3 & 1 \end{array} \quad \therefore \quad 10 = 7.1 + 3 = \dot{7} + 3 \quad (2)$$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 7 \\ 2 & 14 \end{array} \quad \therefore \quad 100 = 7.14 + 2 = \dot{7} + 2 \quad (3)$$

$$\begin{array}{r|l} 1.000 & 7 \\ 6 & 142 \end{array} \quad \therefore \quad 1000 = 7.142 + 6 = \dot{7} + 6 \quad (4)$$

Reemplazando los valores (2), (3) y (4) en (1):

$$\begin{aligned} 1485 &= 5 + 8(\dot{7} + 3) + 4(\dot{7} + 2) + 1(\dot{7} + 6) \\ &= 5 + \dot{7} + 8.3 + \dot{7} + 4.2 + \dot{7} + 1.6 \\ &= (\dot{7} + \dot{7} + \dot{7}) + 5 + 8.3 + 4.2 + 1.6 \end{aligned}$$

$$\text{luego:} \quad \boxed{1485 = \dot{7} + 5 + 8.3 + 4.2 + 1.6} \quad (5)$$

2:) Se sabe que $r + r' = d$,

$$\text{es decir} \quad 3 + 4 = 7 \quad \therefore \quad 3 = 7 - 4 \quad (6)$$

$$2 + 5 = 7 \quad \therefore \quad 2 = 7 - 5 \quad (7)$$

$$6 + 1 = 7 \quad \therefore \quad 6 = 7 - 1 \quad (8)$$

Reemplazando los valores (6), (7) y (8) en (5):

$$\begin{aligned} 1485 &= \dot{7} + 5 + 8(7-4) + 4(7-5) + 1(7-1) \\ &= \dot{7} + 5 + \dot{7} - 8.4 + \dot{7} - 4.5 + \dot{7} - 1.1 \\ &= (\dot{7} + \dot{7} + \dot{7} + \dot{7}) + 5 - 8.4 - 4.5 - 1.1 \end{aligned}$$

luego:

$$1485 = \dot{7} + 5 - 8.4 - 4.5 - 1.1$$

267. Corolarios del Teorema Fundamental. — Divisibilidad por 2. — *Un número es divisible por 2, cuando termina en cero o en cifra par.*

Sea el número $N = mcd u$

Al dividir 10, 100, 1000, etc., por 2, los restos son nulos, luego, por el *Teorema Fundamental*:

$$N = \dot{2} + u + 0. d + 0. c + 0. m$$

o bien: $N = \dot{2} + u$

y para que N sea divisible por 2, debe ser $u = \dot{2}$, lo que sucede cuando u es cero o cifra par. (*)

268. Divisibilidad por 5. — *Un número es divisible por 5, cuando termina en 0 o en 5.*

Al dividir 10, 100, 1000, etc., por 5, los restos son nulos, luego, por el *Teorema Fundamental*:

$$N = \dot{5} + u + 0. d + 0. c + 0. m$$

$$N = 5 + u$$

y para que N sea divisible por 5 debe ser $u = \dot{5}$, lo que sucede cuando u es cero o termina en 5.

(*) Los números divisibles por 2 se llaman pares, y se representan así: $2m$; los demás son los impares, y se representan así: $2m + 1$.

269. Divisibilidad por 4. — *Un número es divisible por 4, cuando la suma de las unidades y el duplo de las decenas, es múltiplo de 4.*

Al dividir 10 por 4 el resto es 2, y al dividir 100, 1000, etc. por 4, los restos son nulos, luego, por el *Teorema Fundamental*:

$$N = \dot{4} + u + 2. d + 0. c. + 0. m$$

$$N = \dot{4} + u + 2. d$$

y para que N sea divisible por 4 debe ser $u + 2d = \dot{4}$.

270. Divisibilidad por 25. — *Un número es divisible por 25, cuando las cifras de las decenas y unidades forman un número divisible por 25.*

Al dividir 10 por 25 el resto es 10, y al dividir 100, 1000, etc. por 25, los restos son nulos, luego, por el *Teorema Fundamental*:

$$N = \dot{25} + u + 10. d + 0. c + 0. m$$

$$N = \dot{25} + u + 10 d$$

y para que N sea divisible por 25 debe ser $u + 10 d = \dot{25}$.

271. Divisibilidad por 8. — *Un número es divisible por 8, cuando la suma de las unidades, más el duplo de las decenas, más el cuádruplo de las centenas, es múltiplo de 8.*

Se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 8 \\ 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 8 \\ 4 & 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 8 \\ 0 & 125 \end{array}$$

y por el Teorema Fundamental:

$$N = \dot{8} + u + 2.d + 4.c + 0.m$$

$$N = \dot{8} + u + 2.d + 4.c$$

y para que N sea divisible por 8, debe ser:

$$u + 2.d + 4.c = \dot{8}.$$

272. Divisibilidad por 125. — *Un número es divisible por 125, cuando el número formado por las unidades, decenas y centenas es un múltiplo de 125.*

Se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 125 \\ 10 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 125 \\ 100 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 125 \\ 0 & 8 \end{array}$$

luego: $N = 125 + u + 10.d + 100.c + 0.m$

$$N = 125 + u + 10.d + 100.c$$

y para que N sea divisible por 125, debe ser

$$u + 10.d + 100.c = 125.$$

273. Divisibilidad por 3. — *Un número es divisible por 3, cuando la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.*

Se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ 1 & 3 \end{array} ;$$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 3 \\ 1 & 33 \end{array} ;$$

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 3 \\ 1 & 333 \end{array}$$

luego: $N = \dot{3} + u + 1.d + 1.c + 1.m$

$$N = \dot{3} + u + d + c + m$$

y para que N sea divisible por 3 debe ser:

$$u + d + c + m = \dot{3}.$$

272. Divisibilidad por 9. — *Un número es divisible por 9, cuando la suma de sus cifras es un múltiplo de 9*

Se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 9 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 9 \\ 1 & 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 9 \\ 1 & 111 \end{array}$$

luego: $N = \dot{9} + u + 1.d + 1.c + 1.m$

$$N = \dot{9} + u + d + c + m$$

y para que N sea divisible por 9 debe ser:

$$u + d + c + m = \dot{9}.$$

275. Divisibilidad por 11. — *Un número es divisible por 11, cuando la diferencia entre la suma de las cifras de lugar par, y la suma de las cifras de lugar impar, es un múltiplo de 11.*

Se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 100 & 11 \\ r=1 & \end{array}; \quad \begin{array}{r|l} 10.000 & 11 \\ r=1 & \end{array}; \quad \begin{array}{r|l} 10 & 11 \\ r'=1 & \end{array}; \quad \begin{array}{r|l} 1.000 & 11 \\ r'=1 & \end{array}$$

luego: $N = 1\dot{1} + u - 1.d + 1.c - 1.m$

$$N = 1\dot{1} + u - d + c - m$$

por (82): $N = 1\dot{1} + (u - d) + (c - m)$

por (86): $N = 1\dot{1} + (u + c) - (d + m) \quad (1)$

Por otra parte, se tiene que:

$$N = 11 + u - d + c - m$$

y por (84): $N = \dot{11} - (d + m - u - c)$

por (82 y 84): $N = \dot{11} - [(d + m) - (u + c)]$ (2)

y para que N en (1) y en (2) sea divisible por 11, debe ser:

$$(u + c) - (d + m) = \dot{11}$$

o bien: $(d + m) - (u + c) = \dot{11}$

275 bis. Divisibilidad por 7. — *Un número de cuatro cifras es divisible por 7, cuando la suma de las unidades, más el triplo de las decenas, más el duplo de las centenas, más el séxtuplo de los millares, es divisible por 7.*

Se tiene:
$$\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ 3 & 1 \end{array} ; \begin{array}{r|l} 100 & 7 \\ 2 & 14 \end{array} ; \begin{array}{r|l} 1000 & 7 \\ 6 & 142 \end{array}$$

luego: $N = \dot{7} + u + 3d + 2c + 6m$

y para que N sea divisible por 7, debe ser (262):

$$N = u + 3d + 2c + 6m = \dot{7}$$

De manera análoga, aplicando el teorema fundamental, se hallaría cuando es divisible por 7 un número de más de cuatro cifras.

EJERCICIOS

- 220 Demostrar que la suma de dos números pares o impares es divisible por 2.
- 221 Demostrar que el producto de dos números consecutivos es divisible por 2.
- 222 Demostrar que el producto de tres números consecutivos es divisible por 6.
- 223 Hallar la condición que debe cumplir un número de cuatro cifras para ser divisible por 7.
- 224 Hallar la condición que debe cumplir un número de cuatro cifras para ser divisible por 13.
- 225 Determinar qué números dividen a 360.
- 226 Idem, ídem 280.
- 227 Determinar cuándo un número es divisible por 6.

CAPITULO XVI

PROGRAMA XVI. — Números primos y compuestos. Definiciones. y ejemplos. Criba de Eratóstenes. La sucesión de números primos es indefinida. Manera de reconocer si un número es primo.

El menor divisor, distinto de uno, de un número compuesto, es primo. Todo número compuesto se puede descomponer en un producto de números primos. Postulado: Un número compuesto no admite más que una sola descomposición en factores primos. Práctica de la descomposición de números compuestos en factores primos.

Números primos y compuestos

276. Definiciones. — Un número es *primo* o *simple* cuando sólo es divisible por sí mismo y por uno.

Un número es *compuesto*, cuando no es primo.

Ejemplos:

5 es primo; sus divisores son 5 y 1.

8 es compuesto; sus divisores son 8, 4, 2 y 1.

Varios números son *primos entre sí*, cuando tienen solamente al número *uno* como divisor común.

Ejemplo: 16 y 21 son primos entre sí, porque 1 es el único divisor común.

277. Criba de Eratóstenes. — Sea hallar los números primos contenidos en los 100 primeros números. El procedimiento llamado *Criba de Eratóstenes* nos permitirá obtenerlos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Una vez escritos los 100 primeros números, a partir del 2, de dos en dos, tachamos los números que siguen al 2. A partir del 3, de tres en tres, tachamos los números que siguen al 3. A partir del 5, de cinco en cinco, tachamos los números que siguen al 5, y así continuamos tachando de 7 en 7, de 11 en 11, etc.

Los números no tachados son los números primos que hay en los 100 primeros números, puesto que ninguno de ellos es divisible por ningún otro número que no sea sí mismo o uno.

278. Observación. — Al tachar los múltiplos de un número, se empieza por su cuadrado; así empezamos a tachar por $4 = 2^2$, luego por $9 = 3^2$, luego por $25 = 5^2$, etc.

279. Postulado. — *La sucesión de los números primos es indefinida. (*)*

(*) La demostración de esta propiedad no es difícil; la damos como postulado según aconseja Young en su obra "La Enseñanza de las Matemáticas".

280. Manera de reconocer si un número es primo

— Reconocer si el número 251 es primo.

No sería primo 251, si, al dividirlo por los números primos sucesivos, algún cociente fuese exacto.

Aplicando los caracteres de divisibilidad, se comprueba que 251 no es divisible por 2, 3, 5, 7, y 11; dividámoslo por 13 y 17:

$$\begin{array}{r|l} 251 & 13 \\ 121 & 19 \\ \hline 04 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 251 & 17 \\ 81 & 14 \\ \hline 13 & \end{array}$$

En las divisiones hasta el 13, los cocientes eran *mayores que el divisor*, pero disminuyendo cada vez, pero al dividir por 17, el cociente resulta *menor que el divisor*; en tal caso, no continuaremos ensayando y afirmaremos que 251 es primo.

Si el cociente entero de 251 y 17 es 14, será $251 < 17 \times 15$, y con mayor razón: $251 < 17 \times 17$, luego 251 es primo, pues en la tabla que tuviese hasta 251, estarían tachados los múltiplos de 2, 3, 5, 7, 11 y 13, puesto que los de 17 se tacharían a partir de

$$17^2 = 289 > 251$$

luego *Para reconocer si un número es primo se lo divide por la serie de los números primos hasta que el cociente sea igual o menor que el divisor empleado. Si alguna de esas divisiones es exacta, el número no es primo, y si se hace exactamente, el número es primo.*

281. TEOREMA. — *El menor divisor, distinto de uno, de un número compuesto, es primo.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} A = \text{núm. compuesto;} \\ a = \text{menor divisor de } A; a \neq 1 \end{array} \right. \quad T) \text{ } a \text{ es primo}$$

El número a o es o no es primo. Si no fuera primo, sería compuesto, y admitiría un divisor a' , menor que él, tal, que $a = a'.b'$ y entonces el número A sería divisible por a' , menor que a , lo que es absurdo, pues se opone a la hipótesis. Y si suponer que a es compuesto, nos conduce a un absurdo, resulta que:

a es primo

282. TEOREMA. — *Todo número compuesto se puede descomponer en un producto de números primos.*

H) $A = \text{núm. comp.}$ T) $A = \text{producto de núm. prim.}$

Sea a el menor divisor de A , siendo $a > 1$. Por el teorema anterior:

$$A = a.B \quad (1)$$

Si B es primo, el teorema queda demostrado. y si no lo es, por el teorema anterior se tendrá

$$B = b.C \quad (2)$$

y sustituyendo en (1):

$$A = a.b.C \quad (3)$$

Si C es primo, el teorema queda demostrado, y si no lo es, por el teorema anterior se tendrá:

$$C = c.D$$

y reemplazando en (3):

$$A = a.b.c.D$$

Continuando de la misma manera, llegaría a:

$$A = a.b.c \dots m.$$

siendo $a, b, c \dots m$, números primos, luego:

$$A = \text{producto de números primos.}$$

283. Postulado. — *Un número compuesto no admite más que una sola descomposición en factores primos.*

Es decir, que la descomposición anterior:

$$A = a.b.c. \dots\dots m$$

es única.

Descomposición de un número en factores primos

284. Definición. — *Descomponer un número en sus factores primos, es hallar un producto de factores primos igual a ese número.*

Basándonos en el teorema último, (282), diremos:

Para descomponer un número en sus factores primos, se lo divide por su menor divisor distinto de uno; el cociente obtenido, por su menor divisor distinto de uno, y así hasta llegar a un cociente igual a uno. Luego se forma el producto de los diversos factores primos.

Ejemplo: Descomponer el número 360 en sus factores primos.

En la práctica se hacen mentalmente las divisiones, disponiéndose la operación así:

360	2	$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
180	2	
90	2	
45	3	
15	3	
5	5	
1		

EJERCICIOS

228 Formar la tabla de los números primos contenidos en los 200 primeros números.

229 Reconocer si 943 es primo. R: no es primo

230 " " 647 " " " es primo

231 " " 1.187 " " " es primo

232 " " 4.393 " " " no es primo

233 Descomponer 540 en sus factores primos. R: 2².3².5

234 " 1.144 " " " " 2.52.11

235 " 4.851 " " " " 32.72.11

336 " 3.168 " " " " 25.32.11

237 " 10.800 " " " " 24.33.52

238 " 592.900 " " " " 22.52.72.112

239 " 23.265 " " " " 33.53.7

240 " 5.005 " " " " 5.7.11 13

241 " 1.260 " " " " 22.32.5.7

242 " 55.440 " " " " 24.32.5 7.11

CAPITULO XVII

PROGRAMA XVII. — Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Definiciones. Ejemplos. Procedimiento práctico para obtener mentalmente el M. C. D. y el M. C. M. de números pequeños. Ejercicios.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro, es que contenga los factores primos de este último con exponentes respectivamente iguales o mayores.

Obtención del M. C. D. de dos o más números.

Obtención del M. C. M. de dos o más números.

Máximo común divisor y Mínimo común múltiplo

285. Definiciones. — Se llama *divisor común* de varios números, al número que los divide exactamente.

Ejemplo: Sean los números 36, 24 y 18. Se tiene:

divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18

Los divisores comunes de 36, 24 y 18 son: 1, 2, 3 y 6.

Se llama *máximo común divisor* de varios números, al mayor divisor común de todos ellos.

En el ejemplo anterior, el máximo común divisor de 36, 24 y 18. es 6.

El máximo común divisor se indica así: *m. c. d.*

286. Se llama *múltiplo común* de varios números, al número que es divisible exactamente por ellos.

Ejemplo: Sean los números 2 y 3. Se tiene: múltiplos de 2:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26

múltiplos de 3: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30,

Los múltiplos comunes a 2 y 3, son:

0, 6, 12, 18, 24,

Se llama *mínimo común múltiplo* de varios números, al menor múltiplo común de todos ellos.

En el ejemplo anterior, el mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6, pues el cero, múltiplo común de todos los números, no se tiene en cuenta.

El mínimo común múltiplo se indica así: *m.c.m.*

287. Procedimiento práctico para hallar mentalmente el *m.c.d.* de números pequeños.

Sea hallar el *m.c.d.* de 12, 15 y 24.

Probemos mentalmente, si el número menor, 12, es divisor de los tres: como no lo es, hallemos su *mitad*, 6, y probemos si 6 es divisor de los números dados; como tampoco es divisor común, hallamos la *tercera parte* de 12, es decir, 3, y probemos si 3 es divisor común de los números dados. Como, efectivamente, lo es, 3 es el *m.c.d.* de 12, 15 y 24.

Si el número ~~menor~~, 12, hubiera dividido a los otros dos, habría sido el *m.c.d.* de los tres, pero al no serlo, probamos por el mayor divisor de 12, o sea 6, o el mayor divisor de 12 distinto de 6, como lo es 3, luego:

Para hallar mentalmente el m.c.d. de varios números, se prueba si el número menor divide a los otros números; si los divide, es el m.c.d.

Si no los dividiese, se prueba por la mitad del menor, o la tercera parte, o la cuarta, etc., y el número así hallado que divida a los otros números, es el m.c.d. de todos los números dados.

288. Procedimiento práctico para hallar el m.c.m. de números pequeños. — Sea hallar, el m.c.m. de 2, 4 y 5.

Probemos si el número mayor, 5, es divisible por los otros dos; como no lo es, hallemos su *duplo*, 10, y veamos si 10 es divisible por 2 y por 4; como tampoco es, probemos por el triple de 5, por el cuádruplo de 5, 20, y como 20 es el menor múltiplo de 5, divisible por 2 y por 4, 20 es el m.c.m. de 2, 4 y 5, luego:

Para hallar mentalmente el m.c.m. de varios números, se prueba si el número mayor es divisible por los otros: si lo es, el número mayor es el m.c.m.

Si no fuese, formamos el duplo del mayor, o el triplo, o el cuádruplo, etc., y el número así hallado, que sea divisible por los otros, es el m.c.m. de todos los números dados.

289. Condición para que un número sea múltiplo de otro. — TEOREMA. — *Un número es múltiplo de otro, cuando contiene a los factores primos de éste, y los exponentes del primero son iguales o mayores que los exponentes respectivos del segundo.*

$$\text{H) } \begin{cases} A = a^3 b^2 c d \\ B = a^2 b^2 c \end{cases} \quad \text{T) } A \text{ es múltiplo de } B.$$

Por hipótesis: $A = a^3 . b^2 . c . d$
 o bien, (163): $A = a^2 . a . b^2 . c . d$
 y por 108) y (110): $A = a^2 . b^2 . c . (a d)$
 y como $a^2 . b^2 . c = B$, podemos escribir:

$$A = B (a d)$$

es decir:

A es múltiplo de B

290. COROLARIO. — *Un número es divisor de otro, cuando contiene a todos o algunos de los factores primos que entren en ese otro, con exponentes menores o iguales.*

Es decir que si:

$$\left. \begin{array}{l} A = a^3.b^2.c.d \\ B = a^2.b^2.c \end{array} \right\} B \text{ es divisor de } A.$$

291. Obtención del m.c.d. de dos o más números.
Sea hallar el m.c.d. de los números 120, 72 y 84

Descompongámoslos en sus factores primos:

120	2	72	2	84	2
60	2	36	2	42	2
30	2	18	2	21	3
15	3	9	3	7	7
5	5	3	3	1	
1		1			

$$120 = 2^3.3.5$$

$$72 = 2^3.3^2$$

$$84 = 2^2.3.7$$

Sabemos, por el corolario anterior, que todo divisor de uno de los números dados debe contener a todos o algunos de los factores primos que entren en ese número, con exponentes menores o iguales. Quiere decir que, en nuestro caso, un *divisor común* deberá contener sólo a los factores primos 2 y 3, que son los únicos que entran en los tres números, y como los mayores factores

comunes son 2^2 y 3, tendremos que:

$$2^2.3 = 12$$

es el *m.c.d.* de 120, 72 y 84, luego:

Para hallar el m.c.d. de varios números, se los descompone en sus factores primos, y luego se forma el producto de los factores comunes con su menor exponente.

292. Obtención del *m.c.m.* de dos o más números.

— Sea hallar el *m.c.m.* de:

$$120 = 2^3.3.5$$

$$72 = 2^3.3^2$$

$$84 = 2^2.3.7$$

Todo múltiplo común debe contener, por el teorema (289), el factor 2 con el exponente 3 a lo menos, el factor 3 con el exponente 2 a lo menos, y los factores 5 y 7, es decir, que:

$$2^3.3^2.5.7 = 2520$$

es el *m.c.m.* de 120, 72 y 84, luego:

Para hallar el m.c.m. de varios números, se los descomponen en sus factores primos y luego se forma el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

293. Números perfectos. — Un número es *perfecto*, cuando es igual a la suma de sus divisores, excepto el número.

Ejemplos: $6 = 3 + 2 + 1$

$$28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$$

Todos los números perfectos conocidos son pares y terminan en 6 o en 8.

294. Números amigos. — Dos números son *amigos*, cuando cada uno es igual a la suma de los divisores del otro.

Ejemplo: 220 y 284 son amigos pues:

$$220 = 142 + 71 + 4 + 2 + 1 \quad (\text{divisores de } 284)$$

$$284 = 110 + 55 + 44 + 22 + 11 + 10 + 5 + 4 + 2 + 1 \quad (\text{divisores de } 220)$$

EJERCICIOS

243	Hallar el <i>m.c.d.</i> de	72; 64; 60.	R:	4
244	"	"	"	36; 24; 48.
245	"	"	"	360; 504; 792
246	"	"	"	90 y 210.
247	"	"	"	10.800 y 3.168
248	"	"	"	120; 300; 360.
249	"	"	"	1.476 y 984
250	"	"	"	630.784; 16.332; 7.644
251	"	"	"	2.052 y 648
252	"	"	"	231; 1320; 1386
253	Hallar el <i>m.c.m.</i> de	540; 504 528.	R:	55.440
254	"	"	"	360 y 19.800.
255	"	"	"	360; 1.260. 204.
256	"	"	"	231; 1.386; 1.320
257	"	"	"	936; 1.820; 1.320
258	"	"	"	784 y 630
259	"	"	"	561 y 2.800
260	"	"	"	630.000 y 588
261	"	"	"	360; 4.200; 240
262	"	"	"	100; 254; 270.
263	Comprobar si	6; 28; 496; 8.128 son números perfectos.		
264	"	"	"	2620 y 2924 son números amigos.
265	"	"	"	69.615 y 87.633 son números amigos.

CAPITULO XVIII

PROGRAMA XVIII. — Números enteros. Números negativos: necesidad de su creación para hacer posible la resta en los casos en que el minuendo es menor que el sustraendo. Números enteros. Valor absoluto. Interpretaciones concretas de los números enteros. Representación gráfica.

Relaciones de igualdad, mayor y menor, entre números enteros. Caracteres formales.

Números enteros

295. Números negativos. — Sabemos que:

$$5 - 2 = 3 \quad \text{porque: } 3 + 2 = 5$$

pero si tuviéramos la resta $2 - 5$, después de varios ensayos veríamos que no hay ningún número natural que, sumado con 5, dé una suma igual a 2, y en general, en el campo de los números naturales las restas en que el *minuendo es menor que el sustraendo*, no tienen sentido. Para que las restas siempre sean posibles, los matemáticos han inventado los *números negativos*.

296. Notación. — Los números negativos se representan con los números naturales precedidos del signo menos.

La serie de los números negativos es:

— 1, — 2, — 3, — 4, — 5, — 6, — 7, —

que se lee: *menos uno, menos dos, menos tres, etc.*

297. Números positivos. — Por oposición a los números negativos, a los números naturales, excepto el cero, los llamaremos *números positivos*, y los haremos

preceder del signo más. *La serie de los números positivos es:*

$$+ 1, + 2, + 3, + 4, + 5, + 6, + 7, \dots$$

298. Números enteros. — Los *números enteros* son el conjunto de los números naturales y negativos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Números naturales o positivos} \\ \text{Números negativos} \end{array} \right\} \text{Números enteros}$$

La serie de los números enteros es:

$$\dots - 4, - 3, - 2, - 1, 0, + 1, + 2, + 3, + 4, \dots$$

299. Valor absoluto. — Se llama *valor absoluto* de un número entero, al número natural que lo compone.

$$\text{Ejemplos: } \left\{ \begin{array}{l} \text{El valor absoluto de } + 3 \text{ es } 3. \\ \text{El valor absoluto de } - 2 \text{ es } 2. \end{array} \right.$$

El valor absoluto de un número se indica encerrándolo entre dos rayitas verticales, así:

$$\left| + a \right| = a, \text{ significa valor absoluto de } + a.$$

$$\left| - b \right| = b, \text{ significa valor absoluto de } - b.$$

300. Números opuestos. — Dos números enteros son *opuestos*, cuando tienen distinto signo e igual valor absoluto.

$$\text{Ejemplos: } + 4 \text{ y } - 4; - 2 \text{ y } + 2; + a \text{ y } - a.$$

301. Notación. — A los números enteros los representaremos por medio de las letras minúsculas precedidas del signo $\pm$ (*más-menos*), significando así que podrán ser *positivos* o *negativos*. En general, el número

$\pm$ a es uno cualquiera de la serie de los números enteros. (*)

302. Interpretaciones concretas de los números enteros. — *Concretamente*, los números positivos y negativos representan, convencionalmente, cantidades (**) de naturaleza opuesta, como el dinero que se tiene y que se debe, los grados de temperatura sobre y bajo cero, las fechas anteriores o posteriores a Cristo, la altura de una torre o la profundidad de un pozo, la latitud norte y la latitud sur, etc., etc.

Así se dice:

tengo 80 \$ de haber, y se interpreta:	$+ 80 \$$
tengo 30 \$ de deuda, y se interpreta:	$- 30 \$$
la temperatura es de 25° sobre 0, se interpreta:	$+ 25^\circ$
la temperatura es de 5° bajo 0, se interpreta:	$- 5^\circ$
Roma se fundó el año 753 a. Cristo, se interp.	753 ^{meu}
América se descubrió el año 1492 d. Cristo,	$+ 1492$

etc. etc.

303. Representación gráfica de los números enteros. — Hemos visto, (22), cómo se representaban los números naturales en una semirrecta O F.

(*) No representamos a los números entero con letras del tipo **negrita**, como hicimos en la 1ª edición, porque si queda bien en un libro, es muy difícil representarlos en el pizarrón y en los cuadernos de apuntes de los alumnos. El primero que designó expresamente una misma letra un número positivo o negativo fué J. Hudde, en su obra "De reductione asquatationum", reimpressa en 1657, como puede leerse en la "Encyclopédie des Sciences Mathématiques", tomo I, volumen 2, pág. 1, editada por Gauthier-Villars. París, Agosto de 1904.

(**) El concepto de **cantidad** aún no se ha aquilatado, pero los alumnos conocen las diversas cantidades aun cuando no sepan definir las con rigor.

Lo mismo, y en la semirrecta opuesta, se representan los números negativos, Fig. 13.

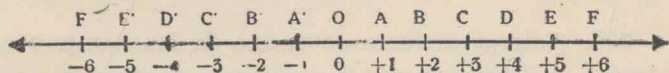


Fig. 13

Relaciones de igualdad y desigualdad entre números enteros

304. Igualdad de números enteros. — Dos números enteros son *iguales*, si tienen igual signo y valor absoluto.

Es decir: $\pm a = \pm b$ siempre el signo sea el mismo y sea $a = b$.

Desigualdad de números enteros. — Dados dos números enteros, diremos:

1º Si los dos son *positivos*, es *mayor* el de *mayor* valor absoluto.

$+ 5 > + 3$, porque son positivos y $5 > 3$.

$+ a > + b$, siempre que sea $a > b$.

2º Si los dos son *negativos*, es *mayor* el de *menor* valor absoluto.

$- 2 > - 7$, porque son negativos y $2 < 7$

$- a > - b$, siempre que sea $a < b$.

3º Si son de distintos signos, es *mayor* el *positivo*.

$+ 3 > - 12$, porque el 3 es positivo.

$+ a > - b$, porque a es positivo.

Recíprocamente, dados dos números enteros, diremos:

1º Si los dos son *positivos*, es *menor* el de *menor* valor absoluto.

$+ 3 < + 8$, porque son positivos y $3 < 8$

2º Si los dos son *negativos*, es menor el de *mayor* valor absoluto.

$$-7 < -2, \text{ porque son negativos y } 7 > 2$$

3º Si son de distinto signo, es *menor* el negativo

$$-4 < +1, \text{ porque el 4 es negativo.}$$

305. COROLARIO. — Si un número entero es mayor que otro, éste es menor que el primero, y *recíprocamente*.

$$\text{Si: } \begin{cases} \pm a > \pm b, & \text{también } \pm b < \pm a \\ \pm m < \pm n, & \text{también } \pm n > \pm m \end{cases}$$

306. Convención. — Todo número positivo es mayor que cero, y todo número negativo es menor que cero.

$$+4 > 0$$

$$-5 < 0$$

307. Criterio práctico para reconocer si un número entero es mayor o menor que otro. — Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, y observando la serie de los números enteros.

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4,$$

diremos que *Un número entero es mayor que otro, cuando está después que ese otro en la serie de los números enteros:*

$$+2 > -5, \text{ porque } +2 \text{ está después que } -5.$$

Un número entero es menor que otro, cuando está antes que ese otro en la serie de los números enteros:

$$-3 < -1, \text{ porque } -3 \text{ está antes que } -1.$$

Caracteres formales de la igualdad

De la definición de igualdad, (304), se deducen los siguientes *corolarios*:

308. I **Carácter idéntico.** — *Todo número entero es igual a sí mismo:*

$$\pm a = \pm a$$

309. II. **Carácter recíproco.** — *Si un número entero es igual a otro, éste es igual al primero.*

$$\text{Si: } \pm a = \pm b, \text{ también: } \pm b = \pm a$$

310. III. **Carácter transitivo.** — *Si un número entero es igual a otro y éste es igual a un tercero, el primero es igual al tercero.*

$$\begin{array}{l} \text{Si: } \pm a = \pm b \\ \text{y} \quad \pm b = \pm c \end{array} \left\{ \text{también: } \pm a = \pm c \right.$$

311. **Consecuencias.** — *Dos números enteros iguales a un tercero, son iguales entre sí.*

$$\begin{array}{l} \text{Si: } \pm a = \pm b \\ \text{y} \quad \pm c = \pm b \end{array} \left\{ \text{también: } \pm a = \pm c \right.$$

312. **Carácter transitivo de las relaciones de mayor y menor.** — **POSTULADO.** — *Si un número entero es mayor que otro, y éste es mayor que el tercero, el primero es mayor que el tercero, y recíprocamente.*

$$\begin{array}{l} \text{Si: } \pm a > \pm b \\ \text{y} \quad \pm b > \pm c \end{array} \left\{ \text{también: } \pm a > \pm c \right.$$

$$\text{Recíprocamente, si: } \begin{array}{l} \pm m < \pm n \\ \text{y} \quad \pm n < \pm p \end{array} \left\{ \text{también: } \pm m < \pm p \right.$$

CAPITULO XIX

PROGRAMA XIX. — Operaciones con números enteros. Suma: definición y ejemplos. Propiedades y ejercicios.

Resta: definición y ejemplos. Transformación de la resta en suma. Verificación de la posibilidad, en el campo entero, de la resta de números naturales tales que el minuendo sea menor que el substraendo. Ejercicios.

Multiplicación de números enteros: definición, regla de los signos. Propiedades y ejercicios.

Potencias de números enteros con exponente natural: reglas de los signos. Ejercicios.

Radicación de números enteros: regla de los signos. Imposibilidad de la extracción de raíces pares de números negativos, en el campo entero.

Operaciones de números enteros

Suma de números enteros

313. Definiciones. — I. Se llama *suma de varios números enteros de igual signo*, al número que se obtiene sumando sus valores absolutos, asignando a esta suma el signo común:

Ejemplos:

$$(+3) + (+2) + (+7) = + (3+2+7) = + 12$$

$$(+a) + (+b) + (+c) = + (a+b+c)$$

$$(-4) + (-2) + (-8) = - (4+2+8) = - 14$$

$$(-a) + (-b) + (-c) = - (a+b+c)$$

II. Se llama *suma de dos números enteros de distintos signos*, a la diferencia entre sus valores absolutos, hecha en la forma posible, asignando a la diferencia el signo del número de mayor valor absoluto.

Ejemplos:

$$(+8) + (-2) = + (8-2) = + 6$$

$$(+7) + (-10) = - (10-7) = - 3$$

III. Se llama *suma de varios números enteros de distintos signo*, al número que es la suma del número que es suma de todos los positivos, y del número que es suma de todos los negativos.

$$\begin{aligned} \text{Ejemp.: } (-2) + (+3) + (-7) + (+8) + (-4) &= \\ &= [(-2) + (-7) + (-4)] + [(+3) + (+8)] \\ &= -(2+7+4) + (3+8) \\ &= -13+11 = -2 \end{aligned}$$

$$(+a) + (-b) + (+c) + (-d) = +(a+c) - (b+d)$$

IV. Se llama *suma de dos números opuestos*, al número cero.

$$\text{Ejemplos: } (+3) + (-3) = 0$$

$$(-a) + (+a) = 0$$

314. Convención. — Como se habrá podido observar, el signo $+$ nos ha servido para indicar la suma de varios números y para distinguir a los números positivos de los negativos, es decir, que el signo $+$ tiene dos significados: como signo de *operación* y como signo de *dirección*.

Para lo sucesivo, convendremos:

La suma de varios números enteros la indicaremos escribiendo los sumandos separados por sus respectivos signos de dirección.

Así tendremos que:

$$(+3) + (-2) + (-4) + (+5) = 3 - 2 - 4 + 5.$$

$$(+a) + (-b) + (+c) + (-d) = a - b + c - d.$$

Toda suma algebraica puede convertirse en una suma de números enteros.

Es decir:

$$4 - 2 + 3 = (+4) + (-2) + (+3)$$

$$a + b - c = (+a) + (+b) + (-c).$$

Propiedades de la suma de números enteros (*)

315. Propiedad uniforme. — TEOREMA. — *Sumando miembro a miembro varias igualdades entre números enteros, se obtiene otra igualdad.*

1º) LOS SUMANDOS SON DE IGUAL SIGNO.

$$H \begin{cases} + a = + a' \\ + b = + b' \end{cases} \quad T) (+a) + (+b) = (+a') + (+b')$$

Por definición de suma:

$$(+a) + (+b) = +(a+b) \quad (1)$$

$$(+a') + (+b') = +(a'+b') \quad (2)$$

pero siendo:

$$y \quad \begin{cases} + a = + a', \text{ es } a = a' \\ + b = + b', \text{ „ } b = b' \end{cases} \quad \therefore a + b = a' + b'$$

entonces, los segundos miembros de (1) y (2) son iguales, luego:

$$(+a) + (+b) = (+a') + (+b')$$

(*) Habría que demostrar que las propiedades de las operaciones con números enteros se verifican en los casos de las respectivas definiciones, como hicimos en la potenciación, pero por razones de brevedad sólo consideramos los más importantes,

2º) LOS SUMANDOS SON DE DISTINTO SIGNO.

$$H \begin{cases} +a = +a' \\ -b = -b' \end{cases} T) (+a) + (-b) = (+a') + (-b')$$

Por definición de suma:

$$(+a) + (-b) = + (a-b), \quad o = -(b-a) \quad (1)$$

$$(+a') + (-b') = + (a'-b'), \quad o = -(b'-a') \quad (2)$$

pero siendo:

$$y \begin{cases} +a = +a', \text{ es } a = a' \\ -b = -b', \text{ ,, } b = b' \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} a-b = a'-b' \\ b-a = b'-a' \end{array} \right.$$

entonces los segundos miembros de (1) y (2) son iguales, luego:

$$(+a) + (-b) = (+a') + (-b')$$

316. Propiedad conmutativa. — TEOREMA. — *En toda suma de varios números enteros, el orden de los sumandos no altera la suma.*

1º) LOS SUMANDOS SON DE IGUAL SIGNO.

$$H) (-a) + (-b); \quad T) (-a) + (-b) = (-b) + (-a)$$

Por definición de suma:

$$(-a) + (-b) = - (a+b) \quad (1)$$

$$(-b) + (-a) = - (b+a) = - (a+b) \quad (2)$$

Como los segundos miembros son iguales, es:

$$(-a) + (-b) = (-b) + (-a)$$

2º) LOS SUMANDOS SON DE DISTINTO SIGNO.

$$H) (+a) + (-b); \quad T) (+a) + (-b) = (-b) + (+a)$$

Por definición de suma:

$$(+a) + (-b) = +(a-b), \text{ o } = -(b-a) \quad (1)$$

$$(-b) + (+a) = +(a-b), \text{ o } = -(b-a) \quad (2)$$

Como los segundos miembros son iguales, es:

$$\boxed{(+a) + (-b) = (-b) + (+a)}$$

317. Propiedad asociativa. — TEOREMA. — *En toda suma de varios números enteros, pueden reemplazarse dos o más de ellos por su suma efectuada.*

1º) LOS SUMANDOS SON DE IGUAL SIGNO.

H) $(+a) + (+b) + (+c).$

T) $(+a) + (+b) + (+c) = (+a) + [(+b) + (+c)]$

Por definición de suma:

$$(+a) + (+b) + (+c) = +(a+b+c) \quad (1)$$

Suprimiendo paréntesis:

$$\begin{aligned} (+a) + [(+b) + (+c)] &= (+a) + (+b) + (+c) \\ &= +(a+b+c) \end{aligned} \quad (2)$$

Como los segundos miembros son iguales, es:

$$\boxed{(+a) + (+b) + (+c) = (+a) + [(+b) + (+c)]}$$

2º) LOS SUMANDOS SON DE DISTINTO SIGNO.

H) $(-a) + (+b) + (-c).$

T) $(-a) + (+b) + (-c) = (-a) + [(+b) + (-c)]$

Por la convención (314):

$$(-a) + (+b) + (-c) = -a+b-c \quad (1)$$

Suprimiendo paréntesis:

$$\begin{aligned} (-a) + [(+b) + (-c)] &= (-a) + (+b) + (-c) \\ &= -a+b-c \end{aligned} \quad (2)$$

Como los segundos miembros son iguales:

$$(-a) + (+b) + (c-) = (-a) + [(+b) + (-c)]$$

Resta de números enteros

318. Definición. — Se llama *diferencia* de dos números enteros, llamados *minuendo* y *sustraendo*, a otro número entero, tal, que sumado al sustraendo dé una suma igual al minuendo.

Ejemplo:

$$(+8) - (+3) = +5, \text{ porque } (+5) + (+3) = +8$$

319. Procedimiento para hallar la diferencia. —

TEOREMA. — *La diferencia entre dos números enteros se obtiene sumando al minuendo el sustraendo cambiado de signo.*

$$H) (+a) - (-b); \quad T \quad (+a) - (-b) = (+a) + (+b)$$

Supongamos que sea:

$$\underbrace{(+a)}_M - \underbrace{(-b)}_S = \underbrace{(+a) + (+b)}_D$$

Por definición de diferencia, se deberá tener

$$\underbrace{(+a) + (+b)}_D + \underbrace{(-b)}_S = \underbrace{+a}_M$$

y como la suma de números contrarios es cero:

$$+a = +a$$

y como esta expresión es cierta, también lo es la su-
puesta, luego:

$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b)$$

De igual manera se demostraría cualquiera de las otras combinaciones de signos.

320. Verificación de la posibilidad, en el campo entero, de la resta de dos números naturales, tales, que el minuendo sea menor que el sustraendo. — Como la resta se transforma en suma, y ésta nos es conocida, podremos ahora efectuar aquellas restas de números naturales en que el minuendo es menor que el sustraendo.

Sea efectuar $2 - 5$, siendo 2 y 5 números naturales

Por (314), se tiene:

$$2 - 5 = (+2) - (+5)$$

y por (319): $= (+2) + (-5) = - (5-2) = - 3$

En efecto:

$$(-3) + (+5) = + (-5) = + 2 = 2$$

Multiplicación de números enteros

321. Definiciones. — Dados dos números enteros, se tiene:

I. — Si los dos son de *igual signo*, su *producto* es *positivo*, y se obtiene multiplicando los valores absolutos de los factores.

Ejemplos:

$$(+4) \times (+2) = + (4 \times 2) = + 8$$

$$(-3) \times (-5) = + (3 \times 5) = + 15$$

$$(+a) (+b) = + (a b) ; (-a) \times (-b) = + (a b)$$

II. — Si los dos son de *distinto signo*, su *producto* es *negativo*, y se obtiene multiplicando los valores absolutos de los factores.

Ejemplos:

$$(-2) \times (+3) = - (2 \times 3) = - 6$$

$$(+a) \times (-b) = - (a b)$$

322. Reglas de los signos. — De las definiciones anteriores se deduce, prescindiendo de los números respectivos, que:

$$\begin{aligned} &+ \text{ multiplicado por } + \text{ da } + \\ &- \text{ multiplicado por } - \text{ da } + \\ &+ \text{ multiplicado por } - \text{ da } - \\ &- \text{ multiplicado por } + \text{ da } - \end{aligned}$$

Es decir, que: *signos iguales, producto positivo; y signos desiguales, producto negativo.*

323. Producto de varios números enteros. — Se llama *producto de varios números enteros*, al número cuyo signo se obtiene aplicando sucesivamente la regla de los signos, y cuyo valor absoluto es el producto de los valores absolutos de los factores.

Ejemplos:

$$(-2) \times (+3) \times (-1) \times (+4) = 2. 3. 1. 4 = 24$$

$$(+a) \times (-b) \times (+c) = - (a b c)$$

Propiedades de la multiplicación de números enteros

324. Propiedad uniforme. — TEOREMA. — *Multipli- cando miembro a miembro varias igualdades entre números enteros, se obtiene otra igualdad.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} -a = -a' \\ +b = +b' \\ -c = -c' \end{array} \right.$$

$$T) (-a) (+b) (-c) = (-a') (+b') (-c')$$

Por definición, se tiene:

$$(-a) (+b) (-c) = + (a. b. c.) \quad (1)$$

$$(-a') (+b') (-c') = + (a'.b'.c') \quad (2)$$

pero siendo:

$$\left. \begin{array}{l} -a = -a', \text{ es } a = a' \\ +b = +b', \text{ ,, } b = b' \\ -c = -c', \text{ ,, } c = c' \end{array} \right\} \therefore a.b.c = a'.b'.c'$$

entonces los segundos miembros de (1) y (2) son iguales, luego:

$$(-a) (+b) (-c) = (-a') (+b') (-c')$$

325. Propiedad conmutativa. — TEOREMA. — *En un producto de números enteros, el orden de los factores no altera el producto.*

$$H) (+a) (-b). \quad T) (+a) (-b) = (-b) (+a)$$

Por definición se tiene:

$$(+a) \times (-b) = -(a b) \quad (2)$$

$$y \quad (-b) \times (+a) = -(b a) = -(a b) \quad (2)$$

Como los segundos miembros son iguales, es:

$$(+a) (-b) = (-b) (+a)$$

326. Propiedad asociativa. — TEOREMA. — *En todo producto de varios números enteros, se pueden reemplazar dos o más de ellos por su producto efectuado.*

$$H) (+a) (-b) (+c)$$

$$T) (+a) (-b) (+c) = (+a) [(-b) (+c)]$$

Por definición de producto:

$$(+a) (-b) (+c) = - (a.b.c) \quad (1)$$

$$(+a) [(-b) (+c)] = (+a) [-(b.c)] = -(a.b.c)$$

Como los segundos miembros son iguales, es:

$$(+a) (-b) (+c) = (+a) [(-b) (+c)]$$

327. Propiedad distributiva. — TEOREMA. — *El producto de una suma de números enteros por otro número entero, es igual a la suma de los productos que se obtienen multiplicando cada sumando por el número dado.*

$$H) \quad (+a) + (-b) ; -m$$

$$T) \quad [(+a) + (-b)] (-m) = -(a.m) + (b.m)$$

Por la convención (314):

$$[(+a) + (-b)] (-m) = (a-b) (-m)$$

y por la regla de los signos (322):

$$= -[(a-b)m]$$

y por (97):

$$= -[(a.m) - (b.m)]$$

sacando paréntesis:

$$[(+a) + (-b)] (-m) = -(a.m) + (b.m)$$

División exacta de números enteros

328. Definición. — Se llama *cociente exacto* de dos números enteros, llamados *dividendo* y *divisor*, a otro número entero, tal, que multiplicando por el divisor, dé un producto igual al dividendo.

Ejemplo:

$$\frac{-6}{+3} = -2, \text{ porque } (-2) (+3) = -6$$

329. TEOREMA — *El cociente de dos números enteros, es el número entero que se obtiene al dividir los valores absolutos del dividendo y divisor, siendo el signo + si los dos signos son iguales, y — si los signos son distintos.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} +a \\ -b \end{array} \right. \qquad T \left\{ \begin{array}{l} +a \\ -b \end{array} \right. = - \frac{a}{b}$$

— Si $\frac{a}{b}$ fuese el cociente de $+a$ y $-b$, multiplicado por el divisor daría $+a$. En efecto, por la regla de los signos, (322) y por (118):

$$\left(-\frac{a}{b}\right)(-b) = + \left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = +a$$

Como el producto obtenido es igual al dividendo, se deduce que:

$$\boxed{\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}}$$

De la misma manera demostraríamos cualquier otra combinación de signos.

330. Regla de los signos. — Teniendo en cuenta el teorema anterior, y prescindiendo de los números respectivos, se deduce que:

+ dividido por + da +
 — dividido por — da +
 + dividido por — da —
 — dividido por + da —

Es decir, que: *signos iguales, cociente positivo; y signos desiguales, cociente negativo.*

Propiedades de la división de números enteros

331. Propiedad uniforme. — TEOREMA. — *Dividiendo miembro a miembro dos igualdades entre números enteros, se obtiene otra igualdad.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} + a = + a' \\ - b = - b' \end{array} \right. \quad T \left\{ \begin{array}{l} + a = + a' \\ - b = - b' \end{array} \right.$$

Por el teorema último:

$$\frac{+ a}{- b} = - \frac{a}{b} \quad (1)$$

$$\frac{+ a'}{- b'} = - \frac{a'}{b'} \quad (2)$$

pero siendo $+ a = + a'$, es $a = a'$,
y $- b = - b'$, „ $b = b'$, $\left\{ \therefore \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

entonces los segundos miembros de (1) y (2) son iguales, luego:

$$\boxed{\frac{+ a}{- b} = \frac{+ a'}{- b'}}$$

332. Propiedad distributiva. — TEOREMA. — *El cociente de una suma de números enteros por otro número entero, es igual a la suma de los cocientes que se obtienen dividiendo cada sumando por el número entero dado.*

$$H) (+ a) + (- b) ; - m.$$

$$T \left\{ \frac{(+ a) + (- b)}{- m} = \left(- \frac{a}{m} \right) + \left(+ \frac{b}{m} \right) \right.$$

Si la tesis fuese cierta, el producto del cociente por el divisor daría el dividendo. En efecto, por (327) se tiene:

$$\left[\left(-\frac{a}{m} \right) + \left(+\frac{b}{m} \right) \right] (-m) = \left(-\frac{a}{m} \right) (-m) + \left(+\frac{b}{m} \right) (-m)$$

por la regla de los signos:

$$= \left(+\frac{a}{m} \cdot m \right) + \left(-\frac{b}{m} \cdot m \right)$$

y por (118): $= (+a) + (-b)$

Como hemos obtenido de producto el dividendo, es:

$$\boxed{\frac{(+a) + (-b)}{-m} = \left(-\frac{a}{m} \right) + \left(+\frac{b}{m} \right)}$$

De la misma manera se demostraría cualquiera otra combinación de signos.

Potencias de números enteros con exponente natural

333. Definiciones. — I. — Se llama potencia *cero* de un número entero, al número uno:

$$(+2)^0 = 1 \quad ; \quad (-3)^0 = 1$$

II. — Se llama potencia *uno* de un número entero, al mismo número entero:

$$(+5)^1 = +5 \quad ; \quad (-7)^1 = -7$$

III. — Se llama potencia *mésima* de un número entero, siendo $m > 1$, al producto de m factores iguales al número dado:

$$(-2)^4 = (-2) (-2) (-2) (-2) = + 16$$

$$(\pm a)^m = (\pm a) (\pm a) \overbrace{(\pm a) \dots (\pm a)}^m$$

334. Regla de los signos. — Dado un número entero cuya potencia se desea hallar, se nos presentan sólo estos 4 casos:

1º NÚMERO POSITIVO ELEVADO A POTENCIA DE EXPONENTE PAR.
Sea calcular $(+3)^4$.

Se tiene: $(+3)^4 = (+3) (+3) (+3) (+3) = + 3^4$

y en general:

$$(+a)^{2m} = + a^{2m}$$

2º NÚMERO POSITIVO ELEVADO A POTENCIA DE EXPONENTE IMPAR.

Sea calcular $(+2)^3$.

Se tiene: $(+2)^3 = (+2) (+2) (+2) = + 2^3$

y en general:

$$(+a)^{2m+1} = + a^{2m+1}$$

Luego: *Cualquier potencia de un número positivo, es positiva.*

3º NÚMERO NEGATIVO ELEVADO A POTENCIA DE EXPONENTE PAR
Sea calcular $(-2)^4$.

Se tiene: $(-2)^4 = (-2) (-2) (-2) (-2) = + 2^4$

y en general:

$$(-a)^{2m} = + a^{2m}$$

Luego: *La potencia de exponente par de un número negativo, es positiva.*

4º NÚMERO NEGATIVO ELEVADO A POTENCIA DE EXPONENTE IMPAR.

Sea calcular $(-2)^3$

Se tiene: $(-2)^3 = (-2) (-2) (-2) = - 2^3$

y en general:

$$(-a)^{2m+1} = - a^{2m+1}$$

Luego: *La potencia de exponente impar de un número negativo, es negativa.*

Radicación de números enteros

335. Definición. — Se llama *raíz emésima* de un número entero, llamado *radicando*, siendo $m > 1$, a otro número entero, tal, que elevado a la potencia emésima, dé un producto igual al número dado.

Ejemplos:

$$\sqrt[2]{+16} = \pm 4, \text{ porque } (\pm 4)^2 = +16$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ porque } (-2)^3 = -8$$

336. Regla de los signos. — Al hallar la raíz emésima de un número entero se nos presentan los mismos casos que en la potenciación.

1º RAÍZ DE GRADO PAR DE UN NÚMERO POSITIVO.

$$\text{Sea: } \sqrt[4]{+81} = x \therefore x^4 = \pm 81$$

y por (334 - 1º y 3º) se deduce: $x = \pm 3$, luego

$$\sqrt[4]{+81} = \pm 3 \text{ y en general:}$$

$$\boxed{\sqrt[2m]{+a} = \pm b}$$

Luego: La raíz de grado par de un número positivo, es positiva o negativa.

2º RAÍZ DE GRADO IMPAR DE UN NÚMERO POSITIVO.

$$\text{Sea: } \sqrt[3]{+8} = x \therefore x^3 = +8$$

y por (334) - 2º: $x = +2$, luego: $\sqrt[3]{+8} = +2$
y en general:

$$\boxed{\sqrt[2m+1]{+a} = +b}$$

Luego: *La raíz de grado impar de un número positivo, es positiva.*

3° RAIZ DE GRADO IMPAR DE UN NÚMERO NEGATIVO.

Sea: $\sqrt[5]{-32} = x \therefore x^5 = -32$

y por $(334 - 4^9) : x = -2$, luego: $\sqrt[5]{-32} = -2$
y en general:

$$\sqrt[2m+1]{-a} = -b$$

Luego: *La raíz de grado impar de un número negativo, es negativa.*

4° RAIZ DE GRADO PAR DE UN NÚMERO NEGATIVO.

Sea calcular: $\sqrt{-4}$.

Se tiene: $\begin{cases} \sqrt{-4} \neq +2, \text{ porque } (+2)^2 \neq -4 \\ \sqrt{-4} \neq -2, \text{ porque } (-2)^2 \neq -4 \end{cases}$

en donde comprobamos que la raíz de grado par de un número negativo, no tiene solución en el campo de los números enteros, pues no da ni un número positivo ni negativo, que son los únicos números que hasta ahora conocemos.

En general:

$$\sqrt[2m]{-a} \text{ no tiene solución en el campo entero.}$$

Luego: *La raíz de grado par de un número negativo, es imposible en el campo de los números enteros.*

Sin embargo, esas raíces tendrán solución mediante la creación de nuevos números, pero eso se estudiará en 4° año.

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes sumas:

266	$(+3) + (+2) + (+7) + (+4)$.	R: + 16
267	$(+2) + (+5) + (+4) + (+9) + (+6)$.	„ + 26
268	$(-5) + (-1) + (-12) + (-15)$.	„ - 33
269	$(-4) + (-7) + (-24) + (-6) + (-8)$.	„ - 49
270	$8 - 3 + 7 - 10 + 5 - 15 + 12$.	„ + 4
271	$-6 - 4 + 8 - 5 + 9 - 3 + 7 + 6 - 12$.	„ 0
272	$9 - 12 + 7 - 15 - 2 + 5 + 8 - 10$.	„ - 10
273	$-7 + 12 - 5 + 7 - 13 + 11 - 18 + 20$.	„ + 7
274	$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$.	„ - 5
275	$-5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10 - 11 + 12 - 13 + 14$.	„ + 5

Efectuar las siguientes restas:

276	$(+8) - (+5)$.	R: + 3
277	$(-5) - (+2)$.	„ - 7
278	$(-4) - (-7)$.	„ + 3
279	$(+2) - (-6)$.	„ + 8

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

280	$(+3) \cdot (-2) \cdot (+4)$.	R: - 24
281	$(-2) \cdot (-5) \cdot (-4)$.	„ - 40
282	$(-5) \cdot (+1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-6)$.	„ + 180
283	$(+4) \cdot (-2) \cdot (+5) \cdot (-7)$.	„ + 280

Efectuar las siguientes divisiones:

284	$(-8) : (+4)$.	R: - 2
285	$(+32) : (-8)$.	„ - 4
286	$(+54) : (+9)$.	„ + 6
287	$(-64) : (-16)$.	„ + 4

Efectuar las siguientes potencias:

288	$(+4)^3$	R: + 64
289	$(-3)^2$	„ + 9
290	$(-2)^5$	„ - 32
291	$(+5)^4$	„ + 625
292	$(-6)^5$	„ - 7.776

CAPITULO XX

PROGRAMA XX. — Operaciones con monomios y polinomios cuyos coeficientes sean enteros. Valor numérico. Ejercicios de suma, resta, multiplicación y división.

Operaciones con monomios y polinomios cuyos coeficientes sean enteros

337. En este capítulo no hay nada nuevo que estudiar, sino ejercicios que resolver, por lo que nos remitimos a los ejercicios correspondientes que van a continuación.

EJERCICIOS

293 Valor número de: $a - b + c$;
Siendo: $a = 2$; $b = -3$; $c = 4$. R: 9

294 Idem, de : $a^2 + 2ab + b^2$; ..
Siendo: $a = -4$; $b = 2$. „ (4

295 Idem, de : $a^3 - 3a^2b + 3a^2b^2 - b^3$
Siendo: $a = -5$; $b = 2$. „ 17

296 Idem, de : $8a^2b^4c - 3a^2bc^2 + 2a^3bc^3$
Siendo: $a = -1$; $b = 2$; $c = -3$ „ 42

Sumar los siguientes monomios:

297 $3a+2b-5a+7b-12b+a-3b-6a$ R: $-7a - 6b$

298 $2a+5b+a-a+7b+3a-8b$. „ $5a + 4b$

299 $a^2-2a+8a^2-5a+3-2a^2+7a-3$. „ $7a^2$

Sumar los siguientes polinomios:

300 $(6a^2-4a+3b) + (12a^2-1+b-3a)$. R: $18a^2-7a+4b-1$

301 $(5a-3b+4c) + (-2a+4b-3c) (-a+7b-c)$
R: $2a + 8b$

Restar los siguientes monomios:

302 $(+4a^2b) - (+5a^2b)$ R: $-a^2b$

303 $(+6ab) - (-3b)$ „ $6ab-3b$

Restar los siguientes polinomios

304 $(6a^2-4a+3b-4) - (3a-7b)$ R: $6a^2-7a+10b-4$

305 $(4a-5b) - (12a^2-3a+b-1)$ „ $7a-6b+1-12a^2$

306 $(5x^3-2x+y-15) - (3x^3+4y-x)$ „ $2x^3-x-3y-15$

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

307 $7a \times 8a^2b$ R: $56a^3b$

308 $-5a^2b^2c \times 8a^2b^2d$ „ $-40a^4b^4cd$

309 $(-3ab) (-4a^2b) (-5ab^2)$ „ $-60a^4b^4$

310 $(4ab^2-5a^2b+6) (-3a^3)$ R: $-12a^4b^2+15a^4b-18a^3$

311 $(2a^3-4a^2+5a-3) (4a^2+6a+2)$.
R: $8a^5-4a^4+10a^3-8a^2-6a+6$

$$312 \quad (4a^3 - 5a^2b + 3ab^2 - 2b^3) \div (2a^2 + 3ab - 4b^2)$$

$$R: 8a^5 + 2a^4b - 25a^3b^2 + 25a^2b^3 - 18ab^4 + 8b^5.$$

Efectuar las siguientes divisiones:

$$313 \quad -a^7 : a^6$$

$$R: -a$$

$$314 \quad 16x^3 : 4x$$

$$,, \quad 4x^2$$

$$315 \quad 15a x y^3 : -3a y$$

$$,, \quad -5xy^2$$

$$316 \quad 34x^m y^n : -17x y$$

$$,, \quad -2x^{m-1} y^{n-1}$$

$$317 \quad (a-c)^5 : (a-c)^3$$

$$,, \quad (a-c)^2$$

$$318 \quad (3b c d + 12b c x - 9b^2c) : 3b c$$

$$,, \quad d + 4x - 3b$$

$$319 \quad (15x^5 - 45x^4 + 10x^3 - 105x^2) : 5x^2$$

$$R: 3x^3 - 15x^2 + 2x - 21$$

$$320 \quad (12a^3b^2 - 20a^2b^3 + 32a^2b^4 - 8a^2b) : (-4a^2b)$$

$$R: -3ab + 5b^2 - 8b^3 + 2$$

Efectuar las siguientes operaciones:

$$321 \quad 3a - \{ 2b + [5c - 9a - (3a + b)] \} + 6a - (b + 5c) \{$$

$$R: 9a$$

$$322 \quad 2^2 - a - 1 - \{ a^2 - 2a - 2 - [a^2 - 3a - 3 - (a^2 - 4a - 4)] \}$$

$$R: 2a + 2$$

$$323 \quad (a + 1)^2 (a - 1)a$$

$$R: a^4 + a^3 - a^2 - a$$

$$324 \quad (a^2 + 1) (a + 1) (a - 1)$$

$$,, \quad a^4 - 1$$

$$325 \quad a b(1+a) - a \{ b - a [1 - (b+1)] \}$$

$$,, \quad 0$$

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS



INDICE

CAPITULO I

Números naturales

	Pág.
Unidad y pluralidad	7
Conjuntos coordinables	9
Caracteres fundamentales de la coordinación de conjuntos	10
Concepto de número natural	11
Representación gráfica de los números naturales	14
Interpretación geométrica de los números naturales ...	14
Interpretación geométrica de los números naturales ...	14
Ejercicios	15

CAPITULO II

Relaciones de igualdad y desigualdad entre números naturales	
Comparación de conjuntos	16
Significado de las relaciones de igualdad mayor y menor	17
Interpretación geométrica de las relaciones de igualdad mayor y menor	19
Caracteres formales de la igualdad	19
Carácter transitivo de las relaciones de mayor y menor	21
Ordenación de los números naturales	21

CAPITULO III

Suma de números naturales

Operaciones aritméticas	22
Suma de conjuntos	23
Suma de números naturales	23
Tabla de sumar	26
Interpretación geométrica de la suma de números naturales	26
Propiedades de la suma de números naturales	27
Ejercicios	33

CAPITULO IV

Resta de números naturales

	Pág.
Condición de posibilidad	35
Interpretación geométrica de la resta de números naturales	36
Propiedades de la resta de números naturales	36
Ejercicios	40

CAPITULO V

Suma algebraica de números naturales

Restar un número de una suma	41
Sumar un número a una diferencia	42
Restar un número a una diferencia	43
Restar una suma de un número	43
Restar una diferencia de un número	44
Reglas prácticas para la supresión e intercalación de paréntesis	45
Ejercicios	50

CAPITULO VI

Multiplicación de números naturales

Definiciones	51
Tabla de multiplicar	52
Interpretación geométrica de la multiplicación de números naturales	53
Propiedades de la multiplicación de números naturales	53
Producto de una suma algebraica por un número	56
Factor común	57
Producto de una suma por otra	57
Producto de una suma por una diferencia	58
Producto de una diferencia por otra	59
Propiedad monótona	60
Ejercicios	61

CAPITULO VII

Producto de varios números naturales

	Pág.
Definición	62
Propiedades del producto de varios números naturales ..	63
Ejercicios	65

CAPITULO VIII

División de números naturales

Condiciones de posibilidad	66
Interpretación geométrica de la división de números naturales	68
Propiedades de las divisiones de números naturales ..	69
Ejercicios	75

CAPITULO IX

División entera

Cociente entero	76
Interpretación geométrica de la división entera	77
Cociente entero por exceso	78
Teoremas	78
Ejercicios	81

CAPITULO X

Potenciación de números naturales

Definiciones	82
Interpretaciones geométricas del cuadrado y cubo de un número natural	84
Propiedades de la potenciación	84
Producto de potencias de igual base	92
Cociente de dos potencias de igual base	92
Cociente de dos potencias de igual base	93
Potencia de una potencia	95
Cuadrado de la suma y de la diferencia de dos números ..	96
Producto de la suma por la diferencia de dos números ..	97
Ejercicios	99

CAPITULO XI

Radicación y logaritmación

	Pág.
Operaciones inversas de la potenciación	100
Raíz enésima de un número	101
Logaritmo de un número	102
Condiciones de posibilidad de la radicación	102
Propiedades de la radicación	103
Raíz cuadrada	108
Ejercicios	111

CAPITULO XII

Expresiones algebraicas

Valor numérico	113
Monomios semejantes	114
Polinomio	114
Suma de expresiones algebraicas	115
Resta de expresiones algebraicas	117
Multiplicación de expresiones algebraicas	119
División de expresiones algebraicas	121
Ejercicios	122

CAPITULO XIII

Numeración decimal

Numeración oral	124
Numeración escrita	127
Descomposición polinómica de un número cualquiera de dos o más cifras	128
Ejercicios	122

CAPITULO XIV

Mecanismo de las operaciones aritméticas fundamentales

Mecanismo de la suma	130
Mecanismo de la resta	133
Mecanismo de la multiplicación	134
Mecanismo de la división	136

	Pág.
Mecanismo de la raíz cuadrada	141
Ejercicios	145

CAPITULO XV

Divisibilidad

Teorema fundamental de la divisibilidad	148
Divisibilidad por 2	150
Divisibilidad por 5	150
Divisibilidad por 4	152
Divisibilidad por 25	151
Divisibilidad por 8	152
Divisibilidad por 125	152
Divisibilidad por 3	152
Divisibilidad por 9	153
Divisibilidad por 11	153
Divisibilidad por 7	154
Ejercicios	154

CAPITULO XVI

Números primos y compuestos

Criba de Eratóstenes	155
Manera de reconocer si un número es primo	157
Descomposición de un número en factores primos ..	159
Ejercicios	160

CAPITULO XVII

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Procedimiento práctico para hallar mentalmente el <i>m.c.d.</i> de números pequeños	162
Procedimiento práctico para hallar mentalmente el <i>m.c.m.</i> de números pequeños	163
Obtención del <i>m.c.d.</i> de dos o más números	164
Obtención del <i>m.c.m.</i> de dos o más números	165
Ejercicios	166

CAPITULO XVIII

Números enteros

Números negativos	167
-------------------------	-----

	Pág.
Números positivos	167
Interpretaciones concretas de los números enteros	169
Representación gráfica de los números enteros	169
Relaciones de igualdad y desigualdad entre números enteros	170
Criterio práctico para reconocer si un número entero es mayor o menor que otro	171
Caracteres formales de la igualdad	172
Carácter transitivo de las relaciones de mayor o menor	172

CAPITULO XIX

Operaciones con números enteros

Suma de números enteros	173
Propiedades de la suma de números enteros	175
Resta de números enteros	178
Procedimiento para hallar la diferencia	178
Multiplicación de números enteros	179
Producto de varios números enteros	180
Propiedades de la multiplicación de números enteros ..	180
División exacta de números enteros	181
Propiedades de la división de números enteros	184
Potencias de números enteros con exponente natural ..	185
Regla de los signos	186
Radicación de números enteros	187
Reglas de los signos	187
Ejercicios	190

CAPITULO XX

Operaciones con monomios y polinomios cuyos coeficientes sean enteros

Ejercicios	191
------------------	-----



