PRIMERA ENSEÑANZA.

GEOMETRÍA.

Agotados, con una rapidez desconocida en nuestro país, los muchos miles de ejemplares de las ediciones anteriores de este libro, ofrecemos hoy al público su reimpresion estereotípica, agradecidos á la favorable acogida que le han dispensado el CONSEJO DE INSTRUCCION PÚBLICA, el Ministerio de Ultramar, los Gobiernos de algunas Repúblicas Hispano-Americanas, los RR. PP. Jesuitas y los muchos Profesores de España y América por quienes ha sido señalado de texto en sus respectivas enseñanzas.

Ha servido tambien para la instruccion elemental de S. A. el malogrado infante de España D. Fernando, hijo de los Sres. Duques de Montpensier.

Agradecido el autor de esta obrita á la benevolencia con que las REPÚBLICAS DEL RIO DE LA PLATA han recibido todas sus publicaciones de primera y segunda enseñanza, ha creido corresponder á tan señalada y honorífica distincion, imprimiendo ediciones especiales y exclusivamente destinadas á las tres Repúblicas, con las noticias geográficas é históricas y los datos estadísticos más apropiados al conocimiento del país. Su estudio en las escuelas ofrecerá así mayor utilidad práctica, elevándose por este medio más rápidamente el nivel de la general cultura, objeto esencialísimo de la primera y segunda enseñanza, y base fundamental del bienestar y riqueza de los pueblos.

GEOMETRÍA

PARA

LOS NIÑOS,

POR EL DOCTOR

D. ACISCLO F. VALLIN Y BUSTILLO,

Consejero de Instruccion pública y Director del Instituto del Cardenal Cisneros, agregado á la Universidad de Madrid.

Obra declarada de texto por el Consejo de Instruccion pública de España para las escuelas de primera enseñanza de la Península, y por el Ministerio de Ultramar para las de Cuba, Puerto-Rico y Filipinas.

DIPLOMA DE MÉRITO EN VIENA Y PREMIO EN FILADELFIA.

Trigésima segunda edicion,

destinada exclusivamente á las Repúblicas del Rio de la Plata.

BUENOS-AIRES,

LIBRERÍA DE DON MANUEL REÑÉ, EDITOR.

42, Calle del Perú, 42.

1880.

Son tantas y tan variadas las noticias y cuestiones prácticas que abraza esta obrita, que por ella no sólo se hace agradable á los niños el estudio de la GEOMETRÍA, sino que se les instruye á la par en otros ramos tan importantes como la historia, la cronología, la geografía, la estadística, la agricultura, la industria y el comercio.

Madrid, 1880.—Imp. de Aribau y C.ª (sucesores de Rivadeneyra).

PRÓLOGO DE LAS EDICIONES ANTERIORES.

Es, en nuestro juicio, un error de funestos resultados para la instruccion pública, bajo el aspecto general de la cultura de un país, el reducir los libros de texto de la escuelas de primera enseñanza meramente á unas cuantas páginas, con las definiciones y ejemplos prácticos de cada materia. Sin las explicaciones del profesor, los niños no comprenden á fondo ni las unas, ni los otros, y olvidan al breve tiempo lo poco que llegaron á comprender, siendo de esto la causa la lacónica sequedad del texto, y la escasez de aplicaciones á los usos ordinarios de la vida. Por lo mismo que la comprension de la niñez es siempre débil ó inexperta, se hace indispensable la suma de todos los auxilios que valgan á esclarecer la materia, á conducir como por la mano al tierno alumno, y á iniciarle extensamente, y hasta con profusion, á fin de que por uno ó por otro lado penetre la luz en su mente.

Los más de los niños de ambos sexos que concurren á las escuelas de primeras letras no reciben otra enseñanza, ni ven otros libros, que el Catecismo, la Gramática y un cuadernito de Aritmética que en muchísimas escuelas está reducido á las definiciones y ejercicios de las cuatro reglas con los números enteros. La ampliacion de estas materias, como todo lo referente á la Geometría, Geografía, Historia de España, etc., tienen que explicarlo los Maestros con harto trabajo y escaso fruto, por falta de libros adecuados al objeto y que abracen, no solamente la respectiva materia con prudente extension tratada, claridad suma y buen método, sino tambien que en los ejemplos ó ejercicios prácticos se hagan aplicaciones á todos los conocimientos útiles que sea posible. De este modo se hace grato á los niños el estudio, y se les estimula á adquirir mayores conocimientos con la aficion que en ellos despiertan las noticias históricas, cronológicas, estadísticas, administrativas, etc., que si son de la mayor utilidad para los que aspiran á superiores estudios, todavía interesan más á los que no reciben otra enseñanza que la de la modestísima escuela de su pueblo. A la mayor ilustracion de estos últimos, que son casi la totalidad, deben ir encaminados los libros de texto, únicos acaso que llegan á sus manos en el resto de la vida, con el fin de que no tan sólo les sirvan durante su asistencia á la escuela, sino tambien para que en edad más madura puedan sacar algun fruto de las noticias y conocimientos útiles que tanto conviene difundir en la masa general de la poblacion.

Persuadidos del gran bien que reportará la primera enseñanza, y como consecuencia suya la cultura intelectual de nuestro país, con trataditos redactados bajo este pensamiento, hemos publicado ya los de ARITMÉTICA, GEOMETRÍA y GEOGRAFÍA con un éxito tan lisonjero, que en muy pocos años se han dado á la estampa más de cien mil ejemplares, adoptándolos de texto un crecidísimo número de los más distinguidos profesores de España y de Ultramar, y honrándonos de una manera muy grata la muestra de distincion que han merecido á S. A. R. el DUQUE DE MONTPENSIER, designándolos para la instruccion elemental de su hijo el malogrado Infante D. FERNANDO.

El tratado de GEOMETRÍA ofrece grande utilidad y reconocidas ventajas, no sólo para los niños que completan la instruccion primaria con el propósito de seguir despues una carrera literaria ó científica, sino tambien, y acaso más señaladamente, para aquellos otros que han de utilizar esa misma enseñanza en las artes y oficios, por la estrecha relacion y enlace de las figuras geométricas con el dibujo lineal y de adorno de que tanto necesitan los niños que más tarde han de contribuir en las fábricas y talleres al desarrollo y progreso de la industria nacional.

La parte primera comprende el conocimiento y propiedades más importantes de las figuras cuyos elementos están en un mismo plano, con numerosos ejercicios acerca de la determinacion de sus áreas. La línea recta, la circunferencia, los polígonos y las figuras circulares son otros tantos capítulos de contínua é inmediata aplicacion á las artes del dibujo.

En la segunda parte damos una ligera idea de las rectas y planos, de las superficies curvas más usuales, de los cuerpos poliedros y de los redondos, con variedad de ejercicios referentes á sus volúmenes.

. . . . . . Esto deciamos en las ediciones anteriores de esta obrita; pero deseosos de mejorarla de una manera notable, coadyuvando así á la mayor cultura general con noticias de inmediata aplicacion práctica, adquiridas desde los primeros años que los niños asisten á la escuela, completamos el texto de esta nueva edicion, con unas ligeras nociones de *Mecánica práctica*, que convenientemente ampliadas por los señores profesores, contribuirán mucho á legitimar la preferencia que tanto en América como en España vienen dando las personas ilustradas, que tienen á su cargo la enseñanza pública, á nuestro tratadito de GEOMETRÍA para los niños.

PRIMERA PARTE.

GEOMETRÍA PLANA.

Preliminares.
Líneas rectas.
Circunferencia.
Polígonos.
Figuras circulares.
Areas de las figuras planas.
Ejercicios.

SEGUNDA PARTE.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

Rectas y planos.
Superficies curvas.
Cuerpos poliedros.
Cuerpos redondos.
Volúmenes de los cuerpos geométricos.
Ejercicios.

GEOMETRÍA.

Preliminares.

1. Qué es Geometría? — La ciencia que tiene por objeto el estudio de la extension.

Qué es *extension?*—El espacio que ocupa un cuerpo.

Cuántas son sus dimensiones?—Tres, que se llaman *longitud* ó largo, *latitud* ó ancho y *altura ó grueso* (*).

La extension es independiente de la naturaleza y propiedades físicas de los cuerpos : un trozo de madera y otro de piedra pueden tener igual extension.

Qué es *superficie* de un cuerpo?—El conjunto de las caras ó límites que le separan del espacio infinito en que se hallan todos los cuerpos. Las superficies sólo tienen longitud y latitud.

Qué son *líneas?* — Los límites de las superficies : sólo tienen longitud.

Qué es *punto geométrico?*— El límite de la línea : no tiene extension.

Le señalamos, sin embargo, como el punto de la escritura comun, distinguiendo los unos de los otros por medio de las letras del alfabeto.

Qué nombre tiene la medida de la extension? — La extension de un cuerpo se llama su *volúmen;* la de una superficie su *área;* y la de una línea su *longitud.*

(*) La *altura* ó *grueso* se llama en algunos casos *profundidad.* Se dice la *altura* de un hombre, de un árbol, de una pared, de una torre, de una montaña; y la *profundidad* de un pozo, de un estanque, de un rio, de los mares, etc.

Las *longitudes*, las *áreas* y los *volúmenes* se determinan por su relacion con la unidad de la especie correspondiente; siendo las más usuales el *metro* para las longitudes, el *metro cuadrado* para las áreas, y el *metro cúbico* para los volúmenes.

A qué se llama *figura?*—A la forma de la extension.

Generalmente se llama tambien así la reunion de las líneas trazadas para la demostracion de un teorema ó la resolucion de un problema geométrico.

Qué son *figuras iguales?*—Las que superpuestas una sobre otra, coinciden exactamente en toda su extension.

2. Cómo se dividen las líneas?—Principalmente en *rectas* y *curvas*.

Qué es *línea recta?* — La que tiene todos sus puntos en una misma direccion, como el córte de una regla, un hilo muy tirante, etc.

Toda recta se puede considerar prolongada indefinidamente.

Dos puntos determinan la posicion de una recta.

Si dos ó más rectas tienen sus extremos comunes, se confunden en toda su extension, y son iguales.

La distancia más corta entre dos puntos es la recta que los une.

La interseccion de dos rectas es un punto (*).

Para designar una recta, se leen unidas las letras escritas en sus extremos; así decimos la recta AB en la figura 1.ª

Llámase *línea quebrada* una continuacion de rectas que no forman una sola recta.

3. Qué es *línea curva?* — Aquella cuyos puntos cambian contínuamente de direccion.

La línea curva admite variedad de especies: ninguna parte de ella es recta.

Desde un punto á otro se puede trazar un número infinito de líneas curvas (**).

Qué es *línea mixta?* — Una continuacion de rectas y curvas.

Los caminos ordinarios, y más señaladamente los ferro-carriles, son aplicaciones de las líneas mixtas.

(*) Llámase interseccion de dos líneas el punto ó puntos en que se cortan.
(**) Los proyectiles describen en el aire curvas que se llaman *trayectorías*.

4. Qué es *circunferencia?* — Una curva cerrada cuyos puntos equidistan todos de otro, que está en el medio, llamado *centro.*

Qué son *rádios?*—Las rectas que van desde el centro á la circunferencia.

Tales son en la figura 2.ª las rectas OA, OC y OB.

Todos los rádios de una misma circunferencia son iguales.

Qué son *diámetros?*—Las rectas que, pasando por el centro, terminan en la circunferencia.

Todo diámetro se compone de la suma de dos rádios; y por consiguiente, los diámetros de una misma circunferencia son tambien iguales.

Cómo resulta dividida la circunferencia por un diámetro cualquiera?—En dos partes iguales llamadas *semicircunferencias.*

Pues si doblando la figura por el diámetro no se verificase la superposicion de una y otra parte de la circunferencia, resultarian desiguales sus rádios, lo cual es absurdo.

Qué es *arco?* — Una porcion cualquiera de la circunferencia.

Y *cuerda?*—La recta que une los extremos de un arco.

Aun cuando á toda cuerda corresponden dos arcos, que juntos componen toda la circunferencia, se hace siempre referencia al arco menor de los dos.

Qué es *secante?*—La recta que corta á la circunferencia.

Y *tangente?*—La recta que, prolongada indefinidamente, no tiene más que un punto comun con la circunferencia. Este punto se llama de *contacto* ó de *tangencia.*

Qué son *circunferencias concéntricas?* — Las que tienen un mismo centro (*).

Y *circunferencias excéntricas?* — Las que tienen centros diferentes.

(*) Una piedra que cae en las aguas tranquilas de un estanque, de un lago ó del mar, forma una multitud de circunferencias concéntricas.

Las circunferencias se trazan en el campo con una cinta ó una cuerda bien tirante; y en el papel con un instrumento llamado *compas.*

5. Cómo se dividen las superficies? — Principalmente en *planas* y *curvas*.

Qué es *superficie plana?* — Aquella con la cual coincide en toda su extension una recta aplicada á dos cualesquiera de sus puntos.

La superficie plana se llama simplemente *plano*.

El plano no admite variedad de especies.

Todo plano se puede considerar prolongado indefinidamente.

Dos rectas que se cortan, ó tres puntos que no están en línea recta, determinan la posicion de un plano.

La interseccion de dos planos es una línea recta.

Una continuacion de planos, que no forman un solo plano, se llama *superficie quebrada*, como las escaleras de una casa.

Qué es *superficie curva?*—Aquella con la cual no coincide una recta aplicada á dos cualesquiera de sus puntos.

La superficie curva admite variedad de especies: ninguna parte de ella es plana.

Qué es *superficie mixta?* — Una continuacion de planos y superficies curvas.

6. Cómo se divide la *Geometría?* — En Geometría plana y Geometría del espacio.

De qué trata la *Geometría plana?*— De la extension que tiene todos sus elementos en un mismo plano, como las líneas rectas, la circunferencia y las superficies planas terminadas por estas líneas (*).

Y la *Geometría* del *espacio?* — De la extension cuyos elementos no están todos en un mismo plano, como las superficies quebradas y curvas y los espacios terminados por estas superficies.

El estudio de la Geometría sirve de base al de todos los conocimientos útiles, enseñándonos en su parte más elemental á representar la figura y extension de nuestros campos y jardines, á valuar y comparar sus gastos y sus productos; á medir alturas y distancias inaccesibles; guia la mano del dibujante y del artista, y nos ofrece, por último, multitud de aplicaciones en la economía doméstica.

(*) Se llama *figura plana* la que tiene todos sus puntos en un mismo plano. La línea recta es esencialmente plana. Las curvas pueden ó no ser planas; las que no son planas, como las espirales de los muelles de las butacas, sofás, etc., se llaman de *doble curvatura*.

GEOMETRÍA PLANA.

Líneas rectas.—Circunferencia.
Polígonos.—Figuras circulares.—Areas de las figuras planas.

LÍNEAS RECTAS.

Angulos.—Perpendiculares y oblicuas.—Rectas paralelas.
Rectas proporcionales.

ANGULOS.

7. **Definicion.**— Llámase *ángulo* la mayor ó menor abertura ó inclinacion de dos rectas que tienen un punto comun.
Las rectas que forman el ángulo se llaman *lados*, y el punto comun *vértice*.

Un ángulo se designa por tres letras, leyendo en el medio la del vértice; sin embargo, cuando está solo, basta leer la letra del vértice. Así se dice, el ángulo AOB, el ángulo COD, el ángulo P, el ángulo Q, en la figura 3.ª

8. **La magnitud de un ángulo** no depende de la longitud de sus lados sino de su mayor ó menor abertura.

El ángulo AOB aumenta sucesivamente á medida que la recta OB toma las direcciones OC, OD, etc., y llegará al límite, si el lado OB toma la direccion OM opuesta á OA. En este caso, como las rectas OA y OM se reducen á una sola por ser una prolongacion de otra, el ángulo no existe.

9. **Angulos iguales** son aquellos cuyos lados tienen la misma abertura ó inclinacion respectiva.
Llámase *bisectriz* de un ángulo la recta que le divide en otros dos ángulos iguales.

OB en la figura 4.ª es la bisectriz del ángulo AOC, puesto que AOB y BOC son iguales. Un ángulo no tiene más que una sola bisectriz.

10. Angulos adyacentes — Son los que tienen el vértice y un lado comun y los otros dos lados son una misma recta.

AOB y BOC en la figura 5.ª son ángulos adyacentes, pues tienen el vértice y el lado OB comun, y los otros dos lados AO y OC, son prolongacion el uno del otro, ó forman una sola recta.

Si dos ángulos adyacentes son iguales, cada uno de ellos se llama *ángulo recto.* Todos los ángulos rectos son iguales.

Los ángulos MOP y PON son rectos.

El ángulo mayor que el recto se llama *obtuso*, y el menor que el recto se llama *agudo.*

11. Angulos complementarios son los que juntos valen un ángulo recto, y *suplementarios* los que valen juntos tanto como dos ángulos rectos.

Si dos ángulos tienen el mismo complemento ó el mismo suplemento, serán iguales, puesto que les faltará lo mismo para componer respectivamente uno ó dos ángulos rectos.

Los ángulos adyacentes son siempre suplementarios.

Si dos ángulos valen juntos dos rectos y tienen el vértice y un lado comun, los otros dos lados serán una misma recta.

12. Angulos consecutivos son los que tienen el vértice y un lado comun no formando los otros dos lados una misma recta.

AOB, BOC y COD en la figura 7.ª son ángulos consecutivos.

Todos los ángulos consecutivos, formados en un punto hácia un mismo lado de una recta, valen tanto como dos ángulos rectos, y los formados al rededor de un punto valen juntos tanto como cuatro ángulos rectos.

La suma de AOB, BOC, COD y DOE es igual á AOE; luego la suma de todos los ángulos formados en O será igual á la de los adyacentes AOE y EOF, ó sea á dos ángulos rectos.

En el segundo caso, los ángulos formados por la parte superior de la recta MN valen dos ángulos rectos y los que corresponden á la parte inferior valen tambien dos rectos, luego todos juntos valdrán cuatro rectos (*).

(*) Los ángulos se dividen tambien en *rectos* y *oblícuos*, comprendiendo bajo este último nombre á los *agudos* y *obtusos.*

13. Angulos opuestos por el vértice son dos ángulos tales que los lados del uno son prolongaciones de los lados del otro. Estos ángulos son siempre iguales.

Tales son los ángulos A y B en la figura 8.ª

Dos rectas que se cortan determinan cuatro ángulos, de los cuales son opuestos por el vértice cada dos que no sean adyacentes. Estos ángulos son respectivamente iguales por tener un mismo suplemento.

Si uno de estos ángulos es recto lo serán todos cuatro, resultando en otro caso dos ángulos obtusos iguales, y otros dos agudos tambien iguales.

14. Medida de los ángulos.—Llámase en general *medida de una cantidad* el número de veces que contiene á la unidad de su misma especie.

La medida de un ángulo es la misma que la del arco trazado desde su vértice con un rádio cualquiera é interceptado entre sus lados.

15. Division de la circunferencia.—Para apreciar el valor de un arco cualquiera de circunferencia se supone dividida ésta en 360 partes iguales, llamadas *grados*, cada grado se divide en 60 partes iguales llamadas *minutos*, cada minuto se divide en 60 *segundos*, etc.

Los grados, minutos y segundos se expresan así:

$$45^{\circ} \;\ldots\ldots\; 20' \;\ldots\ldots\; 30''$$

Segun esto, un ángulo recto tiene por medida un cuadrante ó vale 90°, dos ángulos adyacentes valen 180°, y los ángulos consecutivos formados al rededor de un punto valen 360°.

16. Semicírculo graduado.—En los estuches de matemáticas hay siempre un semicírculo de bronce ó talco dividido en grados y medios grados.

Para *medir un ángulo* cualquiera empleando el semicírculo graduado, basta colocar este instrumento de modo que el centro coincida con el vértice del ángulo y el diámetro del semicírculo con uno de sus lados; en cuyo caso, el otro lado señalará en la graduacion del semicírculo el número de grados y medios grados del ángulo dado.

17. Angulos inscriptos.—Son los que tienen su vértice en la circunferencia y sus lados son dos cuerdas. Tienen por medida la mitad del arco que abrazan sus lados.

Los ángulos ABM, ACM y ADM en la figura 10 son ángulos inscriptos: su medida es la mitad del arco AOM.

Segun esto, todos los ángulos inscriptos, cuyos lados pasen por los extremos de un mismo arco, son iguales ó suplementarios. Son *iguales* los ángulos ABM, ACM y ADM, cuya medida comun es la mitad del arco AOM; y son *suplementarios* los ACM y AOM, que juntos valen la mitad de la circunferencia (*).

Los ángulos inscriptos cuyos lados pasen por los extremos de un diámetro, son rectos.

18. Llámase *ángulo del segmento* aquel cuyo vértice está en la circunferencia y sus lados son una cuerda y una tangente: su medida es la mitad del arco que abrazan sus lados.

El ángulo que tiene su vértice en la circunferencia, y cuyos lados son una cuerda y la prolongacion de otra, tienen por medida la semisuma de los arcos que corresponden á ambas cuerdas.

El ángulo que tiene su vértice dentro de la circunferencia, tiene por medida la semisuma de los arcos comprendidos por sus lados prolongados.

El ángulo que tiene su vértice fuera de la circunferencia y sus lados son dos secantes, dos tangentes ó una tangente y una secante, tiene por medida la semi-diferencia de los arcos que abrazan sus lados (**).

Consecuencias de las proposiciones anteriores:

Cuando los lados de un ángulo pasan por los extremos de un diámetro, se verifica que: si el ángulo tiene su vértice en la circunferencia será recto; si le tiene dentro será obtuso, y si fuera será agudo.

Recíprocamente, cuando los lados de un ángulo pasan por los extremos de un diámetro, si el ángulo es recto tendrá su vértice en la circunferencia; si es obtuso, el vértice estará dentro de la circunferencia, y si es agudo, le tendrá fuera.

(*) Llámanse *arcos complementarios* los que valen juntos un cuadrante, y *suplementarios* los que componen juntos dos cuadrantes.

(**) Los ángulos que teniendo su vértice fuera de la circunferencia, sus lados son dos tangentes, se llaman *ángulos circunscriptos*.

19. **Problemas gráficos.**—Los problemas geométricos que hacen referencia á la forma de la extension, se llaman *gráficos*, y para su resolucion son necesarios varios instrumentos que pueden redücirse á la regla, el compás, el semicírculo graduado y la escuadra.

Con el auxilio de estos instrumentos, basta su enunciado para resolver los problemas siguientes:

Trazar una recta por dos puntos dados.

Trazar una recta igual á otra dada.

Trazar una recta igual á la suma, ó la diferencia de otras dos.

Trazar una recta, dos, tres, etc., veces mayor que otra dada.

Trazar un arco de circunferencia, dado el centro y el rádio.

Trazar várias circunferencias concéntricas.

Problemas referentes á los ángulos:

20. Construir un ángulo igual á otro dado.

Sea A el ángulo dado, figura 11.

Trazando con un rádio cualquiera el arco que mide dicho ángulo, y con el mismo rádio desde el punto B de una recta cualquiera el arco indefinido *p r*, y tomando *p q* igual á *m n*, tendrémos el ángulo B que se pide.

21. Construir un ángulo igual á la suma de otros dos.

Sean A y B los ángulos dados, figura 12.

Se trazan con un mismo rádio los arcos que miden la abertura de dichos ángulos, y otro indefinido desde el vértice O; tomando ahora sobre el arco *m n* sucesivamente los *a* y *b* de los ángulos dados, tendrémos el ángulo COS igual á su suma.

De una manera análoga se construirá un ángulo duplo, triplo, etc., de otro dado.

22. Dividir un ángulo por el medio, ó trazar su bisectriz.

Sea AOC el ángulo propuesto, figura 13.

Se traza desde el vértice O del ángulo dado, con un rádio cualquiera, el arco que determina su medida, y desde sus extremos *m* y *n*, con un rádio mayor que la mitad de su distancia, se trazan otros dos arcos, cuya interseccion fijará la direccion de la bisectriz OB que se pide (*).

(*) Todos estos problemas se resuelven de una manera expedita y fácil empleando únicamente la *regla* y el *semicírculo graduado*.

Diferentes posiciones de dos rectas sobre un plano.

23. Las posiciones de dos rectas trazadas sobre un mismo plano pueden ser en general dos; á saber, la de que se corten, ó la de que no se corten, aunque se consideren prolongadas indefinidamente.

Si se cortan, pueden hacerlo formando ángulos iguales ó desiguales, de donde se deducen los tres casos conocidos con los nombres de *rectas perpendiculares*, *rectas oblícuas* y *rectas paralelas*, como se ve en la figura 14.

Dos rectas son perpendiculares entre sí, cuando forman uno ó más ángulos rectos.

Dos rectas son oblícuas, si forman uno ó más ángulos oblícuos.

Dos rectas son paralelas, si trazadas sobre un mismo plano no se encuentran, aunque se prolonguen todo lo que se quiera (*).

Es evidente que, por un punto dado en una recta se pueden trazar á ésta una perpendicular y diferentes oblícuas y si el punto está fuera, se podrán trazar una perpendicular, diferentes oblícuas y una paralela á dicha recta.

24. Si dos rectas, sean ó no paralelas, se cortan por una tercera, ésta se llama *secante* ó *trasversal* y forma con las rectas primeras ocho ángulos, cuatro internos y cuatro externos.

Llámanse *alternos* los internos ó externos de diferente lado de la secante, como *a* y *b*, *c* y *d*, A y B, C y D en la figura 15.

Llámanse *correspondientes* los situados á un mismo lado de la secante, el uno interno y el otro externo: tales son A y *b*, *a* y B, *c* y D, C y *d*.

Unos y otros se suponen siempre no adyacentes.

Los ángulos *b* y *c* son internos de un mismo lado de la secante.

(*) Llámanse en general *líneas paralelas* las que conservan siempre entre si las misma distancia, como los rails de un ferro-carril, las trazas ó señales de las ruedas de un coche que recorre una distancia cualquiera, etc.

Las líneas no paralelas pueden ser *convergentes* ó *divergentes* segun que al prolongarlas se acerquen ó separen del vértice llamado respectivamente *punto de convergencia* en el primer caso, y de *divergencia* en el segundo.

Rectas perpendiculares y oblícuas.

25. **Una recta es perpendicular á otra si ambas forman uno ó dos ángulos rectos; y es *oblícua*, si los forman oblícuos, es decir agudos ú obtusos.**

Por un punto dado no se puede trazar á una recta más que una sola perpendicular (*).

En efecto, si OA es perpendicular á MN en la figura 16, es absurdo suponer que tambien lo sea OB, porque, en tal caso, serian iguales los ángulos MOA y MOB, lo cual es imposible, por ser el uno parte del otro.

Tambien si OC es perpendicular á MN, no puede serlo OD, porque en otro caso, doblando la figura por MN las líneas OCO′ y ODO′ ambas serían rectas, lo cual es contrario al axioma de que por dos puntos O y O′, no puede pasar más que una sola recta.

26. **Si desde un punto fuera de una recta se trazan á ésta una perpendicular y diferentes oblícuas, la perpendicular es más corta que todas las oblícuas y las oblícuas equidistantes de la perpendicular son iguales.**

La primera parte se deduce fácilmente doblando la figura 17 por la recta AB, en cuyo caso resulta OO′ menor que OBO′, y por lo tanto, la mitad de la primera será menor que la mitad de la segunda, es decir OP menor que OB.

Doblando la figura por la perpendicular OP se verifica la superposicion de las dos oblícuas OA y OB que equidistan de dicha perpendicular, deduciéndose por consiguiente su igualdad.

Es evidente que la oblícua que se aleje ó se separe más de la perpendicular será mayor.

Recíprocamente, de todas las rectas que se pueden trazar desde un punto á una recta, la menor es la perpendicular; las oblícuas que son iguales equidistan de la perpendicular; y la oblícua mayor se separa más de la perpendicular.

Segun esto, ***la distancia desde un punto á una recta*** es la perpendicular trazada desde dicho punto á la recta (**).

(*) Si una recta es perpendicular á otra, ésta lo será tambien á la primera.
(**) Desde un punto fuera de una recta no se pueden trazar á ésta más que dos oblícuas iguales, una á un lado, y otra al otro de la perpendicular.

27. Un punto cualquiera de la perpendicular levantada á una recta en su punto medio equidista de sus extremos.

Suponiendo O el punto medio de la recta AB en la figura 18, cada uno de los puntos de la recta MN perpendicular á AB distará igualmente de los extremos A y B de esta última recta, puesto que tales distancias son siempre oblícuas que equidistan de la perpendicular.

Si el pnnto dado no se halla en la perpendicular MN, no equidistará de los extremos de AB.

Luego todo punto equidistante de los extremos de una recta está en la perpendicular levantada á dicha recta en su punto medio, y si no equidista de dichos extremos estará fuera de dicha perpendicular.

Y por consiguiente, si una recta tiene dos puntos, cada uno de ellos equidistante de otros dos de la recta sobre que cae, ambas rectas serán respectivamente perpendiculares entre sí (*).

28. Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de sus lados; y todo punto que no sea de la bisectriz, pero que se halle dentro del ángulo, no equidista de sus lados.

Doblando la figura correspondiente por la bisectriz, resulta la igualdad de las perpendiculares que determinan las distancias desde el punto dado á los lados del ángulo; no verificándose esa igualdad cuando el punto se halla fuera de dicha bisectriz.

Recíprocamente, todo punto equidistante de los lados de un ángulo está en la bisectriz de dicho ángulo; y si no equidista de los lados, estará fuera de la bisectriz.

29. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.

En efecto, el ángulo formado por las dos bisectrices vale la mitad de los dos ángulos adyacentes dados, es decir, un ángulo recto, y por lo tanto dichas bisectrices serán perpendiculares.

De donde se deduce que todos los puntos equidistantes de dos rectas que no sean paralelas se hallarán en la bisectriz del ángulo que forman y en la perpendicular á esta bisectriz trazada por el vértice de dicho ángulo.

(*) Si una recta perpendicular á otra tiene un punto equidistante de otros dos de la recta sobre que cae, cualquier otro punto de la primera equidistará de los mismos puntos de la segunda.

30. **Por un punto dado en una recta trazar á ésta una perpendicular.**

Tomando con el compás las distancias iguales OA y OB en la figura 19 y haciendo centro en A y B con un rádio cualquiera (pero siempre mayor que la mitad de la distancia AB) se trazan dos arcos, cuyas intersecciones nos darán la recta pedida.

Para resolver este problema con el *semicírculo graduado*, basta colocarle de modo que el centro coincida con O y el diámetro siga la recta AB, en cuyo caso la graduacion 90° nos dará la direccion de la perpendicular que se busca.

Con la *escuadra* ó *cartabon* áun es más sencillo el procedimiento, puesto que se reduce á aplicar uno de los lados menores á la recta dada á partir del punto O, en cuyo caso, corriendo un lápiz ó tiralíneas por el otro lado de la escuadra, tendrémos la perpendicular pedida.

31. **Por un punto dado fuera de una recta, trazar á ésta una perpendicular.**

Descríbase desde el punto dado O en la figura 23 un arco que corte á la recta AB y desde los puntos de interseccion A y B como centros, y con el mismo ó mayor rádio trácense dos arcos; únase el punto de interseccion de estos arcos con el punto dado O, y tendrémos la recta pedida.

Puede resolverse tambien este problema empleando bien sea el semicírculo ó la escuadra.

32. **Dividir una recta en dos partes iguales.**

Sea AB la recta dada, figura 24.

Haciendo centro en sus extremos y con un rádio mayor que la mitad de dicha recta, trácense dos arcos cuyos puntos de interseccion determinarán la recta *m n* perpendicular á la AB y el punto O medio de esta recta (*).

33. **Trazar una perpendicular á una recta dada que pase por uno de sus extremos.**

Descríbase una circunferencia que pase por el extremo A de la recta dada, figura 25, y por otro punto cualquiera de la misma recta, y el extremo del diámetro correspondiente á este segundo punto determinará la perpendicular que se pide.

(*) Los alumnos dividirán una recta en 4, 8, 16, etc., partes iguales, repitiendo el procedimiento del texto cuantas veces sea necesario.

Rectas paralelas.

34. Una recta es paralela á otra, cuando, trazadas ambas sobre un mismo plano, no se encuentran aunque se prolonguen cuanto se quiera: luego

Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas.

Suponiendo las rectas AB y CD ambas perpendiculares á PQ en la figura 26, serán paralelas entre sí, pues de lo contrario, desde el punto en que se encontrasen, tendríamos trazadas dos perpendiculares á una misma recta PQ, lo cual es absurdo.

35. Dos rectas, una perpendicular y otra oblícua á una misma recta, no son paralelas.

Siendo la recta PQ perpendicular á CD y la MN oblícua respecto de la misma recta PQ, MN y CD no serán paralelas, y por lo tanto, prolongadas suficientemente, se encontrarán (*).

De las dos proposiciones anteriores se deduce que:

Por un punto fuera de una recta no se puede trazar más que una paralela á ella.

Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí.

Si una recta es perpendicular á una de dos paralelas, lo será tambien á la otra.

36. Si dos rectas son paralelas y se cortan por una secante, *los ángulos alternos son iguales* y los correspondientes tambien lo son; y recíprocamente, si dos rectas cortadas por otra forman ángulos alternos ó correspondientes iguales, dichas líneas serán paralelas.

Siendo paralelas AB y CD, figura 28, resultarán iguales los ángulos alternos a y b, y lo mismo los correspondientes a y c (**).

Si por el contrario estos ángulos fueran iguales, las rectas AB y CD serian paralelas.

No siendo paralelas las rectas dadas, no serian iguales los ángulos alternos ni los correspondientes.

(*) Esta proposicion se conoce con el nombre de *postulado de Euclides*, el más ilustre geómetra de la antigüedad.

(**) Verificándose ademas que los internos ó externos de un mismo lado de la secante valen juntos tanto como dos ángulos rectos.

37. Las partes de paralelas interceptadas por otras paralelas son iguales.

Así se verifica que AB es igual á CD en la figura 29, y que AC lo es á BD; resultando ademas que si dos rectas son paralelas, las perpendiculares comunes interceptadas por ellas son todas iguales.

38. Los ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos, son iguales ó suplementarios, segun que ambos sean agudos ú obtusos, ó uno agudo y otro obtuso.

Serán ambos agudos ú obtusos, cuando sus lados estén dirigidos en un mismo sentido ó en sentido opuesto.

En la figura 30 son iguales los ángulos A y B que tienen sus lados dirigidos en un mismo sentido; tambien lo son los A y C que tienen sus lados en sentido contrario, y son suplementarios las ángulos A y D que tienen dos lados en un sentido y los otros dos en direccion contraria.

Los ángulos cuyos lados son respectivamente *perpendiculares*, son tambien iguales ó suplementarios segun que sean ambos agudos ú obtusos ó uno agudo y otro obtuso.

39. Por un punto dado fuera de una recta trazar á ésta una paralela.

Trazando por el punto dado P la recta PQ perpendicular á AB en la figura 31, y otra MN perpendicular á la perpendicular anterior, tendrémos la recta MN paralela á AB.

Trácese desde un punto cualquiera de la recta dada, por ejemplo, el punto O, el arco P *m* y desde P el arco OM igual al anterior, teniendo así determinada la paralela pedida.

Con el auxilio de la escuadra se ajusta el lado mayor de ésta con la recta dada, y haciendo coincidir una regla con uno da los otros dos lados, se corre la escuadra, siempre coincidiendo con la regla, hasta que el lado mayor pase por el punto dado (*).

Por último, puede trazarse tambien por el punto dado una recta que corte á la recta AB de un modo cualquiera, y formando en dicho punto un ángulo *b* igual y alterno con *a*, la recta MN será paralela á AB.

(*) Aplicando uno de los catetos de la escuadra á la recta dada, y haciendo coincidir el otro con la regla, queda éste perpendicular á la recta dada, siendo entónces el lado primero el que determina la paralela que se busca.

Rectas proporcionales.

40. Se dice que cuatro rectas son proporcionales cuando con sus valores numéricos puede formarse una proporcion.

Llámase *valor numérico de una línea* el número de veces que contiene á la unidad lineal, un metro, un decímetro, etc.

Expresando un centímetro la recta OA en la figura 37, el valor numérico de OD será de cuatro centímetros.

41. Si en uno de los lados de un ángulo se toman partes iguales y por los puntos de division se trazan paralelas, cortarán en el otro lado partes tambien iguales entre sí.

Siendo iguales las partes OA, AB, BC y CD, si trazamos por los puntos A, B y C rectas paralelas entre sí, se verificará la igualdad de O*a*, *ab*, *bc* y *cd*.

42. Si en uno de los lados de un ángulo se toman partes desiguales y por los puntos de division se trazan paralelas, cortarán en el otro lado partes proporcionales con las primeras.

En efecto, si OA y AB en la figura 38 contienen á una medida comun, por ejemplo, un milímetro, 5 y 3 veces respectivamente, y por los puntos de division se trazan paralelas, las rectas OM y MN contendrán tambien 5 y 3 veces á su medida comun respectiva; y por lo tanto se verificará la proporcion:

$$OA : AB :: OM : MN$$

43. Dividir una recta dada en cinco partes iguales.

Trazando por uno de los extremos de dicha recta AB otra indefinida A*m*, como indica la figura 41, y tomando en ésta cinco partes iguales á contar desde A, uniendo luégo los extremos B y C y trazando por los demas puntos de division rectas paralelas á BC, quedará resuelto el problema.

44. Dividir una recta en partes proporcionales á las de otra dada.

Siendo AB la recta dada en la figura 42 y AM la que queremos dividir, se unen los puntos B y M por la recta BM, y trazando por C y D paralelas á ella, quedará resuelto el problema.

Ejercicios referentes á las líneas rectas.

45. Propongámonos resolver los siguientes problemas:

1.° *Dados dos puntos* A *y* B *determinar con el compás otros muchos que se hallen en la misma direccion.*

Desde dichos puntos tracemos dos arcos que se corten, y sus intersecciones a y b equidistantes de los puntos dados servirán á su vez para determinar por un procedimiento análogo los puntos que se piden.

2.° *Trazar por un punto dado una recta equidistante de otros dos.*

La recta que se busca queda determinada por el punto dado O y el medio de la recta que une los otros dos A y B.

3.° *Por un punto dado* O *fuera de una recta, trazar otra que forme con la primera un ángulo igual á otro dado.*

Fórmese en un punto cualquiera N de la recta dada un ángulo igual al dado, y trazando por O una paralela á NC quedará resuelto el problema.

4.° *Dados dos puntos* A *y* B *fuera de una recta hallar un punto* O *sobre esta recta tal, que la suma* AO + OB *sea la menor posible.*

Trácese la recta BC perpendicular á MN y tomando CA′ igual á BC, la recta AA′ determinará el punto O que se pide, verificándose ademas la igualdad de los ángulos MOA y BON, de contínuas aplicaciones en la reflexion de la luz y del sonido, en el choque de los cuerpos, etc.

5.° *Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas.*

$$m : n :: p : x$$

Desde el vértice de un ángulo cualquiera (fig. 43) tómense en uno de sus lados los dos primeros términos de la proporcion, es decir, AM $= m$, y AN $= n$; tómese en el otro lado AP $= p$, y uniendo los puntos M y P, la paralela NX nos dará la recta que se busca, es decir AX.

6.° *Hallar una media proporcional á dos rectas dadas.*

$$m : n :: n : x$$

Tómese sobre una recta indefinida la parte AB $= m$, figura 44, la BC $= n$, y trazando sobre las dos una semicircunferencia, la perpendicular BX, correspondiente al punto comun B, será la media proporcional pedida.

CIRCUNFERENCIA.

Propiedades generales.

46. **El diámetro es la mayor de todas las cuerdas.**

En efecto, siendo el diámetro MN en la figura 32 igual á la suma de los rádios MO y OB; y valiendo esta suma por ser una línea quebrada, más que la recta MB, evidentemente se verifica que MN será mayor que MB.

Un razonamiento análogo nos dará igualmente que MN es mayor que CD en la figura 33.

47. **Dos diámetros perpendiculares entre sí dividen á la circunferencia en cuatro partes iguales que se llaman *cuadrantes*.**

Uno de los diámetros divide á la circunferencia en dos partes iguales, llamadas *semicircunferencias*, y como el otro diámetro divide por el medio cada una de estas dos mitades, resulta la circunferencia dividida en cuatro partes iguales. Cada *cuadrante* vale 90 grados.

48. **Si dos arcos de una misma circunferencia son iguales, lo serán tambien sus cuerdas; y si son desiguales, al mayor arco le corresponde mayor cuerda, y recíprocamente (*).**

Trazando en el primer caso por el punto M medio del arco AC de la figura 33 el diámetro MN, y doblando por él la figura, se verificará la superposicion de los arcos y cuerdas respectivamente, y por lo tanto su igualdad.

En la figura 32 por ser el arco ANB mayor que el CND, la cuerda del primero será mayor que la del segundo.

Por la proposicion recíproca tenemos que si dos cuerdas son iguales, tambien lo serán los arcos correspondientes, verificándose ademas que á mayor cuerda corresponde mayor arco.

(*) En el primer caso se suponen ambos arcos mayores ó menores que la semicircunferencia, y en el segundo siempre menores, pues de otro modo al arco mayor le corresponderia menor cuerda, y recíprocamente.

En tal supuesto, áun cuando á mayor arco corresponde mayor cuerda, no se verifica por eso que al arco doble corresponda doble cuerda: no son, pues, proporcionales los arcos con las cuerdas.

49. **Todo diámetro perpendicular á una cuerda la divide por el medio, y lo mismo á los arcos correspondientes.**

En efecto, hallándose O á igual distancia de A y B, en la figura 32, tambien lo estarán M, P y N; y como á cuerdas iguales corresponden arcos iguales, la proposicion es evidente.

Lo mismo se verifica que, si una recta es perpendicular á una cuerda y la divide por el medio, pasará por el centro de la circunferencia.

50. **Dos cuerdas paralelas interceptan arcos iguales.**

Siendo paralelas las cuerdas AB y CD, los arcos AC y BD serán iguales, pues trazando el rádio ON perpendicular á AB, lo será á su paralela CD, y tendrémos entónces, segun la proposicion anterior, las igualdades:

$$AN = NB \text{ y } CD = ND;$$

de donde fácilmente se deduce la igualdad de los arcos AC y BD.

51. **Las cuerdas iguales equidistan del centro.**

Siendo iguales las cuerdas AB y CD, basta doblar la figura 33 por el diámetro MN trazado por el punto medio del arco AC, para que, verificándose la superposicion de ambas cuerdas, resulte la igualdad de las perpendiculares respectivas Om y On.

Tambien es fácil deducir de la misma figura que si dos cuerdas son desiguales, la mayor se acerca más al centro.

52. **Una recta no puede tener más que dos puntos comunes con una circunferencia.**

Porque si tuviese tres, las rectas trazadas desde dichos puntos al centro serian iguales, por rádios, y ya sabemos que desde un punto á una recta no pueden trazarse otras tres iguales.

53. **Toda perpendicular al rádio en su extremo es tangente de la circunferencia, y recíprocamente, toda recta tangente de una circunferencia es perpendicular al rádio correspondiente al punto de contacto.**

En efecto, en el primer caso, la recta perpendicular al rádio tendrá en la figura 34 todos sus puntos fuera de la circunferencia, excepto uno solo, luego será *tangente;* y en el segundo, siendo el rádio la recta menor que puede trazarse desde el centro de la circunferencia á la tangente, el rádio y la tangente serán perpendiculares entre sí.

De esta proposicion se deducen fácilmente las que siguen:

Por un punto dado en una circunferencia no se puede trazar más que una recta tangente.

Las perpendiculares trazadas á los extremos de un diámetro son tangentes paralelas.

Los arcos interceptados por una cuerda y una tangente paralelas son iguales.

54. **Las posiciones relativas de dos circunferencias trazadas en un mismo plano, son las siguientes:**

Si no tienen punto alguno comun, y son exteriores una á la otra. En este caso se verifica que la distancia de los centros es mayor que la suma de los rádios.

Si no tienen punto alguno comun, y una está dentro de la otra. Entónces se verifica que la distancia de los centros es menor que la diferencia de los rádios.

Si son tangentes ó tienen un solo punto comun, siendo exteriores. La distancia de los centros resulta igual á la suma de los rádios.

Si son tangentes estando la una dentro de la otra. La distancia de los centros es igual á la diferencia de los rádios.

Si tienen dos puntos comunes ó son secantes. La distancia de los centros es menor que la suma de los rádios y mayor que su diferencia.

55. **Dados tres puntos que no estén en línea recta, trazar por ellos una circunferencia.**

Sean A, B y C los puntos dados, figura 36.

Unidos estos puntos por las rectas AB y BC, la interseccion de las perpendiculares á estas rectas en su punto medio será el centro de la circunferencia que se pide (*).

Conocido el centro, fácilmente se trazará la circunferencia.

56. **Por un punto dado en una circunferencia trazar una recta tangente de la misma circunferencia.**

Trácese en la figura 34 el rádio correspondiente al punto de contacto, y la recta perpendicular á este rádio, que pase por el mismo punto de contacto, será la tangente pedida.

(*) Esta misma construccion se emplea para hallar el centro de un arco ó de una circunferencia dada.

Ejercicios referentes á la circunferencia.

57. Resolver los problemas que siguen :

1.° *Por un punto dado fuera de una circunferencia trazar una ó más rectas tangentes de la misma circunferencia.*

Únase el centro de la circunferencia con el punto dado, y sobre esta recta como diámetro trácese una circunferencia, cuyas intersecciones con la circunferencia dada determinarán los puntos de contacto de las tangentes pedidas.

2.° *Trazar una circunferencia tangente de una recta en el punto* A *y que pase ademas por otro punto dado* B.

El centro de la circunferencia que se busca se hallará en el punto de interseccion de dos perpendiculares, una trazada por A á la recta dada y otra trazada á la recta AB en su punto medio.

3.° *Trazar una circunferencia tangente de otra dada en el punto* A *y que pase ademas por otro punto dado* B.

Se resuelve este problema de una manera análoga al anterior, recordando que dos circunferencias tangentes tienen su punto de contacto en la línea de los centros.

4.° *Trazar desde un punto dentro de la circunferencia una cuerda que resulte dividida por el medio en dicho punto.*

Se traza el diámetro correspondiente á dicho punto y la cuerda perpendicular al diámetro nos dará resuelto el problema.

5.° *Trazar una circunferencia cuyo rádio es* R *y que pase por dos puntos dados* A *y* B.

Haciendo centro en A y B con un rádio igual, R, se trazan dos arcos cuya interseccion será el centro de la circunferencia.

6.° *Dadas tres circunferencias iguales, determinar un punto tal, que trazando desde él rectas tangentes á las tres circunferencias, estas tangentes sean iguales.*

El punto que se busca es el centro de la circunferencia que pase por los centros de las circunferencias dadas (*).

(*) Los alumnos para adiestrarse en el manejo del compás resolverán los problemas indeterminados que siguen :
Trazar muchas circunferencias tangentes de otra circunferencia dada.
Trazar muchas circunferencias tangentes de otras dos dadas.

POLÍGONOS.

Triángulos.—Su igualdad y semejanza.

58. Llámase TRIÁNGULO la figura cerrada por tres rectas.
Lados del triángulo son las líneas que le forman;
Angulos los formados por sus lados, y
Vértices las intersecciones de estos lados. (Fig. 53.)
El triángulo relativamente á sus lados se divide en *equilátero*, *isósceles* y *escaleno*.
Se llama
Equilátero; si tiene los tres lados iguales;
Isósceles, si tiene dos lados iguales;
Escaleno, si los tres lados son desiguales.
Y con relacion á sus ángulos, se divide tambien en
Rectángulo, cuando tiene un ángulo recto;
Obtusángulo, si uno de los ángulos es obtuso;
Acutángulo, si los tres ángulos son agudos.
Los triángulos obtusángulos y acutángulos se llaman *oblicuángulos*.
El triángulo que tiene sus tres ángulos iguales se llama *equiángulo*.
Base de un triángulo es uno cualquiera de sus lados, áun cuando recibe generalmente este nombre el lado sobre que se apoya ó descansa el triángulo.
Altura es la perpendicular trazada, desde el vértice opuesto á la base, á la misma base ó á su prolongacion (*).

(*) La figura 54 representa todas las diferentes especies de triángulos rectilíneos. La recta AB sirve de base á todos ellos.
ACB es á la vez acutángulo, equilátero y equiángulo.
ADB es acutángulo é isósceles.
AEB es isósceles y rectángulo.
AFB es isósceles y obtusángulo.
ABO es escaleno y rectángulo.
ABP es escaleno y acutángulo.
ABQ es escaleno y obtusángulo.
Muchos edificios públicos presentan en lo más alto de su fachada un fronton *triangular*, de la forma AFB.
Cuando se dice simplemente *vértice* de un triángulo, se entiende el opuesto á la base. La base en el triángulo isósceles es siempre el lado que no es igual á ninguno de los otros dos.

59. **En todo triángulo se verifica que un lado es menor que la suma de los otros dos.**

Esto se deduce de la misma definicion de la línea recta, puesto que en la figura 55 el lado AC es una recta y los otros dos lados juntos forman una línea quebrada.

En el triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*, y los otros dos lados se llaman *catetos*.

60. **La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.**

Pues trazando por uno de sus vértices una paralela al lado opuesto, los tres ángulos formados en dicho punto valen dos rectos; pero uno de ellos es del triángulo y los dos restantes son iguales por alternos á los otros dos del triángulo, luego la proposicion es evidente.

De donde se deduce que un triángulo no puede tener dos ángulos rectos, ni dos obtusos, ni uno recto y otro obtuso.

Si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales respectivamente á dos del otro, los terceros ángulos tambien lo serán.

61. **En todo triángulo se verifica que *á lados iguales* se oponen ángulos iguales, y recíprocamente.**

Bajando en el triángulo ABC de la figura 56, la perpendicular BP, y doblando luego la figura por ella, resulta fácilmente la igualdad de los ángulos A y C.

Luego el triángulo equilátero es equiángulo, y el equiángulo es equilátero. Un triángulo equilátero no puede ser ni rectángulo, ni obtusángulo.

Cada uno de los ángulos del triángulo equilátero vale 60°.

Tambien se verifica que á *mayor lado* se opone mayor ángulo; y recíprocamente, que á mayor ángulo se opone mayor lado.

Siendo el lado AB mayor que AC en la figura 57, el ángulo C será mayor que el ángulo B (*).

Luego la hipotenusa es mayor que cada uno de los catetos.

(*) Generalmente se representan los ángulos de un triángulo por las tres letras mayúsculas A, B y C, en cuyo caso se señalan sus lados opuestos por las tres minúsculas respectivas *a*, *b* y *c*. Si el triángulo es rectángulo, el ángulo recto es *A* y la hipotenusa *a*.

62. Llámanse *figuras iguales* las que superpuestas coinciden en toda su extension; tienen, por consiguiente, respectiva y ordenadamente iguales todos sus elementos.

Los triángulos, por sus propiedades particulares, *son iguales*, cuando tienen iguales los tres lados, dos lados y el ángulo comprendido, ó un lado y los dos ángulos adyacentes.

63. Construir un triángulo, dados los elementos á que se refieren los tres casos que siguen :

Tres lados. Trazando desde los extremos de uno de los lados dados (fig. 58) dos arcos con rádios respectivamente iguales á los otros dos lados, su punto de interseccion será el tercer vértice del triángulo.

Dos lados y el ángulo comprendido. Tomando en los lados del ángulo dado (fig. 59) longitudes iguales á los lados dados, tendrémos los vértices restantes del triángulo que se pide.

Un lado y los ángulos adyacentes. Construyendo en los extremos de la recta conocida (fig. 60) dos ángulos respectivamente iguales á los dados, quedará resuelto el problema.

64. Construir un triángulo rectángulo, cuyos datos son :

La hipotenusa y un cateto. Trazando sobre la hipotenusa (figura 61) una semicircunferencia, y tomando desde uno de sus extremos una cuerda igual al cateto conocido, la cuerda que va al otro extremo del diámetro nos dará resuelto el problema.

La hipotenusa y un ángulo agudo. Describiendo sobre la hipotenusa una semicircunferencia (fig. 62), y trazando por uno de sus extremos una cuerda que forme con ella un ángulo igual al dado, quedarán determinados los dos catetos.

Un cateto y un ángulo. Formando en los extremos del cateto conocido dos ángulos, uno recto y otro igual al ángulo dado, quedará resuelto el problema.

Los dos catetos. Tomando en los lados de un ángulo recto, y á contar desde el vértice, dos rectas iguales á los catetos dados, tendrémos fácilmente el triángulo pedido (*).

(*) Llámanse *ángulos homólogos* ó *lados homólogos* de dos figuras iguales á los ángulos ó lados, que respectivamente coinciden en la superposicion de ambas figuras. Los lados homólogos de dos triángulos iguales son siempre los opuestos á ángulos iguales, y recíprocamente.

65. Llámanse *figuras semejantes* las que tienen sus ángulos respectiva y ordenadamente iguales y sus lados proporcionales.

Tambien se definen las *figuras semejantes*, diciendo que son las que tienen la misma forma y diferente extension.

66. Si por un punto cualquiera de uno de los lados de un triángulo se traza una paralela á otro lado, *el triángulo parcial* que resulta *es semejante al total.*

Así, los triángulos ABC y MBN de la figura 74 son semejantes, puesto que tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados son proporcionales (*).

67. *Los triángulos*, por sus propiedades particulares, *son semejantes en los tres casos siguientes:* cuando tienen los tres lados del uno proporcionales á los tres del otro; dos lados proporcionales é igual el ángulo que forman; ó los tres ángulos respectivamente iguales.

Es decir, que los triángulos ABC y abc serán semejantes en cada uno de estos supuestos:

1.° Verificándose $AB : ab :: BC : bc :: AC : ac$
2.° Verificándose $AB : ab :: BC : bc$ y ademas $B = b$
3.° Verificándose $A = a$, $B = b$ y $C = c$ (**).

Tambien son semejantes dos triángulos, si tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares; porque en tal supuesto tendrán sus ángulos iguales.

68. Construir un triángulo semejante á otro dado.

Este problema es indeterminado, puesto que pueden construirse cuantos triángulos se quieran semejantes al triángulo dado, para lo cual basta que sus lados sean respectivamente paralelos ó perpendiculares á los del propuesto, segun indican las figuras 75 y 76.

69. Sobre una recta dada construir un triángulo semejante á otro.

Basta construir en los extremos de la recta dada dos ángulos respectivamente iguales á los del triángulo dado.

(*) La proporcionalidad de los lados se funda en que *toda recta paralela á uno de los lados de un triángulo* divide á los otros dos lados en partes proporcionales, verificándose por consiguiente que $BA : BM :: BC : BN$

(**) Basta que tengan dos ángulos del uno iguales respectivamente á dos del otro, porque entónces los terceros ángulos tambien lo serán.

Cuadriláteros.—Su igualdad y semejanza.

70. Llámase CUADRILÁTERO la figura cerrada ó limitada por cuatro rectas (Fig. 65).

Lados del cuadrilátero son las líneas que le forman;

Angulos los formados por sus lados;

Vértices la intersecciones de estos lados; y

Diagonal la recta que une un vértice con su opuesto.

El cuadrilátero se designa generalmente con las cuatro letras de sus vértices.

El cuadrilátero se divide en

Trapezoide, si no tiene ningun lado paralelo á otro;

Trapecio, si tiene dos lados paralelos;

Paralelógramo, si los cuatro lados son paralelos dos á dos.

Los dos lados paralelos de un trapecio se llaman generalmente *bases* del trapecio.

Una de las diagonales de todo cuadrilátero le divide en dos triángulos, y las dos diagonales le dividen en cuatro triángulos.

71. El *paralelógramo* se divide en (Fig. 66):

Cuadrado, si tiene los lados iguales y los ángulos son rectos.

Rombo, si tiene los lados iguales y los ángulos no son rectos.

Rectángulo, si los lados son desiguales y tiene los ángulos rectos.

Romboide, si los lados son desiguales y los ángulos no son rectos (*).

La diagonal de un paralelógramo le divide en dos triángulos iguales; puesto que tienen un lado comun, que es la diagonal, é iguales por alternos los ángulos adyacentes á dicho lado (**).

(*) La figura 67 representa todas estas especies de cuadriláteros.

(**) En el *cuadrado* estos triángulos son rectángulos é isósceles;
en el *rectángulo*, son rectángulos y escalenos;
en el *rombo*, son isósceles, acutángulos ú obtusángulos;
y en el *romboide* son escalenos, acutángulos ú obtusángulos

Se llama *trapecio rectangular* el que tiene dos de sus ángulos rectos, y *trapecio isósceles* ó *simétrico* si los lados no paralelos son iguales. Cuando se dice simplemente *cuadrilátero* se sobreentiende el *trapezoide*.

72. **La suma de todos los ángulos de un cudrilátero vale tanto como cuatro ángulos rectos.**

Pues, trazando una diagonal, resulta el cuadrilátero dividido en dos triángulos, cuyos ángulos componen los del cuadrilátero; y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos ó 180°, los del cuadrilátero valdrán cuatro rectos, ó sean 360°.

Segun esto, un cuadrilátero no puede tener tres ángulos obtusos y uno recto, ni dos obtusos y dos rectos, ni uno obtuso y tres rectos.

Dos cuadrilateros con tres ángulos respectivamente iguales tendrán el cuarto tambien igual.

73. En todo paralelógramo los ángulos opuestos son iguales, y los lados opuestos tambien lo son.

En efecto, los ángulos opuestos tienen sus lados paralelos y dirigidos en sentido contrario, luego son iguales; y como los lados opuestos del paralelógramo son partes de paralelas interceptadas entre paralelas, tambien son iguales (*).

74. *Las diagonales de todo paralelógramo* se cortan mútuamente por el medio; las del cuadrado y rectángulo son iguales, y las del cuadrado y rombo son bisectrices de los ángulos opuestos y se cortan formando ángulos rectos.

Esto se deduce de la comparacion de los cuatro triángulos en que se divide un paralelógramo por medio de sus diagonales.

75. **Igualdad de los cuadriláteros.** — Los cuadrados son iguales, si tienen un lado igual.

Los rectángulos son iguales, si tienen dos lados contíguos respectivamente iguales.

Los rombos son iguales, si tienen respectivamente iguales un lado y un ángulo.

Los romboides son iguales, si tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido.

Los cuadriláteros en general son iguales si los triángulos, en que puede descomponerse cada uno, son respectivamente iguales en ambos cuadriláteros y están del mismo modo colocados.

(*) Un *cuadrilátero será paralelógramo,* si tiene los ángulos opuestos iguales, los lados opuestos iguales, ó dos lados iguales y paralelos.

76. **Construir un cuadrado, conocido su lado.**

En los extremos A y B de la recta dada, figura 66, se levantan dos perpendiculares, cuya longitud será igual á AB; y uniendo los puntos C y D, tendrémos resuelto el problema.

77. **Construir un rombo, conocidos un lado y un ángulo.**

Tomando en los lados del ángulo dado las distancias AB y AD iguales, y describiendo con el mismo rádio desde B y D dos arcos que se corten, quedará resuelto el problema.

78. **Construir un rectángulo conociendo dos lados contiguos.**

Tomando en los lados de un ángulo recto las distancias AB y BC iguales á los lados dados, trazando desde C un arco con el rádio AB, y otro desde A con el rádio BC, el punto de interseccion D nos dará fácilmente el rectángulo que se pide.

79. **Construir un romboide, siendo conocidos dos lados, y el ángulo comprendido por ellos.**

La resolucion de este problema es análoga á la del anterior, con la sola diferencia de sustituir al ángulo recto el ángulo dado.

80. **Construir un paralelógramo, dadas las diagonales y el ángulo que forman.**

Trácense dos rectas indefinidas AC y BD, que formen un ángulo igual al ángulo dado; y tomando desde O las distancias OA y OC, iguales á la mitad de una diagonal, y las OB y OD, iguales á la mitad de la otra, quedará resuelto el problema.

81. **Dadas las diagonales, trazar unc uadrado ó un rombo.**

La resolucion de este problema es la misma que la del anterior, teniendo presente que las diagonales del rombo y del cuadrado se cortan siempre perpendicularmente (*).

82. **Construir un cuadrilátero dados los cuatro lados y un ángulo.**

Siendo A el ángulo dado y los lados que le forman AB y AC, se trazan desde B y C con los otros dos lados, dos arcos que se crucen, y tendrémos el otro vértice del cuadrilátero.

(*) *Construir un cuadrilátero, dado tres lados y los dos ángulos comprendidos por ellos, ó bien tres ángulos y los dos lados adyacentes.*

La sola inspeccion de la figura 68 es muy bastante para que los alumnos resuelvan este doble problema.

83. **Semejanza de los cuadriláteros.** — Dos cuadriláteros serán semejantes cuando los triángulos en que se puede descomponer el uno son semejantes á los del otro, hallándose igualmente colocados en ambas figuras.

Verificándose la semejanza de los triángulos en que se descomponen ambos triángulos, tendrán sus lados proporcionales y sus ángulos iguales; y como los lados de los cuadriláteros son los de los triángulos, y los ángulos de los cuadriláteros se forman de los de los triángulos, los cuadriláteros serán evidentemente semejantes (*).

Los paralelógramos son semejantes, si tienen un ángulo del uno igual á un ángulo del otro y proporcionales los lados que le forman.

Los rectángulos son semejantes, si tienen las bases y alturas proporcionales.

Los *rombos son semejantes*, si tienen un ángulo igual.

Los *cuadrados* son todos *semejantes.*

Pues en todos estos casos resultan los lados proporcionales é iguales los ángulos homólogos.

84. Construir un cuadrilátero semejante á otro dado.

Este problema es indeterminado, puesto que pueden construirse cuantos cuadriláteros se quieran semejantes al propuesto con sólo formar dos triángulos semejantes á los dos en que se divide el cuadrilátero dado, y de la misma manera colocados.

Sobre una recta dada sólo se puede construir un cuadrilátero semejante á otro.

Basta enunciar los problemas siguientes para que los alumnos puedan resolverlos sin ninguna dificultad:

Construir romboides, rombos ó rectángulos semejantes á otros dados.

Construir sobre una recta dada un romboide, un rombo ó un rectángulo semejante á otro dado.

Construir sobre una recta como diagonal un cuadrilátero, un rombo, un romboide ó un rectángulo respectivamente semejantes á otros dados.

(*) Los *cuadriláteros* son tambien *semejantes* si tienen tres lados proporcionales y respectivamente iguales los dos ángulos comprendidos por ellos; dos lados proporcionales y respectivamente iguales tres de sus ángulos homólogos, ó bien sus cuatro lados proporcionales é igual un ángulo homólogo.

Polígonos en general.—Su igualdad y semejanza.

85. POLÍGONO es la superficie plana terminada por rectas. *Lados* del polígono son las rectas, que le forman. *Perímetro* es el conjunto de sus lados. *Vértices* son las intersecciones de estos lados. *Diagonales* son las rectas que unen dos vértices no inmediatos.

Base de un polígono es el lado sobre que se considera insistiendo ó descansando, y *altura* es la perpendicular, trazada desde el vértice más distante de la base á la base ó á su prolongacion.

AB, BC, CD, DE, etc., son los *lados* del polígono de la figura 69; la línea quebrada ABCDEFGA es su *perímetro*; los puntos A, B, C, D, etc., son los *vértices*; las rectas AC, AD y AE son *diagonales*; AB es la *base* y FA la *altura*.

Llámase *polígono equilátero* el que tiene todos sus lados iguales; y *polígono equiángulo* el que tiene todos sus ángulos iguales.

Polígono regular es el que tiene todos los lados iguales, y los ángulos tambien iguales.

Polígono irregular es el que tiene los lados ó los ángulos desiguales.

86. Los polígonos toman diferentes nombres, segun el número de sus lados:

El polígono de tres lados se llama..	*triángulo.*
El polígono de cuatro lados........	*cuadrilátero.*
El polígono de cinco lados.........	*pentágono.*
El polígono de seis lados...........	*exágono.*
El polígono de ocho lados.........	*octógono.*
El polígono de diez lados..........	*decágono.*
El polígono de doce lados..........	*dodecágono* (*).

(*) Los polígonos se dividen tambien en *cóncavos* y *convexos*. En estos últimos la prolongacion de cada uno de sus lados no divide la figura en otras dos y toda recta trazada en el mismo plano no corta á su perímetro más que en dos puntos. El perímetro ó contorno de un polígono convexo se llama ordinariamente *línea convexa*.

87. Todo polígono puede descomponerse en tantos triángulos como lados tiene, ó en tantos como lados tiene ménos dos.

Para la segunda descomposicion, se trazan diagonales desde uno de los vértices á todos los demas; y para la primera, basta trazar rectas desde un punto, elegido dentro del polígono, á todos sus vértices, como se ve en la figura 70.

88. *La suma de los ángulos* de todo polígono vale tantas veces dos rectos como lados tiene ménos dos.

En efecto, descompuesto el polígono en tantos triángulos como lados tiene ménos dos, los ángulos de los triángulos componen juntos los del polígono; pero los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, luego los del polígono valdrán tantas veces dos rectos como lados tiene ménos dos.

Si el polígono es equiángulo, el valor de cada ángulo se hallará, dividiendo el valor de todos por el número de ellos. Cada ángulo será tanto mayor cuanto mayor sea el número de sus lados.

99. En los *polígonos regulares*, las bisectrices de sus ángulos, lo mismo que las rectas trazadas por los puntos medios de sus lados perpendicularmente á éstos, se encuentran en un mismo punto, llamado *centro* del polígono.

Las bisectrices son todas iguales y se llaman *rádios* del polígono; y las perpendiculares á los lados se llaman *apotemas* y son tambien iguales, segun fácilmente se deduce de la igualdad de los triángulos formados por estas rectas y los lados del polígono.

90. **Igualdad de los polígonos.**— Los *polígonos iguales* superpuestos deben coincidir en toda su extension; y, por consiguiente, tienen sus lados y ángulos respectiva y ordenadamente iguales.

De la descomposicien de un polígono en triángulos se deduce que, si dos polígonos pueden descomponerse en igual número de triángulos respectivamente iguales y del mismo modo colocados, los polígonos serán iguales (*).

Los polígonos regulares del mismo número de lados bastará que tengan un lado igual para que sean iguales.

(*) Si los triángulos componentes, respectivamente iguales, no están del mismo modo colocados en ambos polígonos, éstos no serán iguales.

91. **Construir un exágono regular sobre una recta dada.**
Fórmense en los extremos de la recta dada AB, figura 71, dos ángulos A y B de 120°, tómese en sus lados una longitud igual á AB; fórmense de nuevo en los extremos M y N de estas rectas ángulos de 120°, cuyos lados sean tambien iguales á AB, y continuando de la misma manera hasta cerrar la figura, quedará resuelto el problema.

92. **Construir un polígono igual á otro dado.**
La resolucion de este problema es la misma que la del anterior; pero, como los lados y los ángulos de un polígono irregular son desiguales, necesitamos conocer todos los lados ménos dos consecutivos, y todos los ángulos excepto el comprendido por los lados desconocidos.

Otra construccion: Trácense por todos los vértices del polígono dado, ABCDE de la figura 72, rectas paralelas entre sí, y tomando en ellas desde cada vértice partes iguales, tendrémos los vértices *a*, *b*, *c*, etc., del nuevo polígono (*).

93. La combinacion de los polígonos regulares entre sí es de grande aplicacion en las artes. Sirva de ejemplo:

Cubrir una superficie plana con polígonos regulares.

Si los polígonos son todos iguales, podrán hacerse las combinaciones que siguen:

Con cuadrados uniendo 4 ángulos al rededor de cada vertice,

Con triángulos equiláteros, uniendo 6 ángulos al rededor de cada vértice.

Con exágonos, uniendo 3 ángulos al rededor de cada vértice.

Si los polígonos dados son de dos especies:

Con exágonos y triángulos, uniendo en cada vértice dos ángulos de cada uno de estos polígonos.

Con octógonos y cuadrados, uniendo en cada vértice dos ángulos del octógono y uno del cuadrado.

Con dodecágonos y triángulos, uniendo en cada vértice dos ángulos del dodecágono y uno del triángulo.

Si los polígonos son de tres especies, quedará resuelto el problema con dos cuadrados, un triángulo y un exágono.

(*) Tambien se acostumbra emplear el procedimiento de la figura 73, en cuyo caso los dos polígonos que resultan de esta construccion se llaman *simétricos* respecto de la recta MN.

94. Semejanza de polígonos.— Dos polígonos son semejantes si pueden descomponerse en igual número de triángulos respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.

Por efecto de la semejanza de los triángulos componentes se deduce la proporcionalidad de los lados homólogos de los polígonos y la igualdad de sus ángulos, que son condiciones bastantes para su semejanza (*).

Tambien son semejantes dos polígonos si tienen proporcionales todos sus lados y respectivamente iguales todos sus ángulos, excepto tres consecutivos.

Los polígonos regulares de igual número de lados son siempre semejantes.

95. *Los perímetos de los polígonos semejantes* son proporcionales á sus lados y rectas homólogas.

Si los polígonos son semejantes y la base de uno de ellos es mitad de la base del otro; como todos los lados del menor han de ser tambien mitades de los homólogos del mayor, se verificará que la suma de estos lados, ó sea el perímetro del primero, será mitad del perímetro del segundo.

En los polígonos regulares semejantes los perímetros son proporcionales á sus rádios y apotemas.

96. Construir un polígono semejante á otro dado.

Trazando rectas desde todos sus vértices á un punto cualquiera O en la figura 78, y trazando despues paralelas á los lados del polígono propuesto, é interceptadas por las rectas anteriores, resultarán cuantos polígonos se quieran, B, C, etc., todos semejantes al polígono dado.

97. Sobre una recta dada construir un polígono semejante á otro.

Trazando diagonales desde A y B, y formando en M y N dos ángulos respectivamente iguales á los del triángulo ACB, dos iguales á los del ADB, y otros dos iguales á los del AEB, quedarán terminados los vértices del nuevo polígono.

(*) *Los polígonos semejantes* admiten siempre una descomposicion en triángulos respectiva y ordenadamente semejantes.

Ejercicios referentes á los polígonos.

98. Resolver los siguientes problemas:

1.° *Construir un triángulo ABC, conociendo dos lados a y b, y el ángulo A opuesto á uno de ellos.*

En uno de los extremos de la recta *b* se forma un ángulo igual al dado, y trazando un arco desde el otro extremo con un rádio igual al lado *a*, su interseccion con el otro lado del ángulo determinará el triángulo pedido.

2.° *Construir un triángulo conociendo un lado, uno de los ángulos adyacentes y la longitud de su bisectriz.*

El lado dado, la mitad del ángulo adyacente y la longitud de la bisectriz, son datos bastantes para construir un triángulo del que fácilmente resulta el que se busca.

3.° *Construir un rombo dada una diagonal y el ángulo opuesto.*

Este problema se reduce á construir sobre la diagonal dada dos triángulos isósceles, conocida la base y el ángulo opuesto.

4.° *Construir un polígono idéntico con otro dado.*

Trazando desde un punto cualquiera O rectas á todos los vértices A, B, C, etc., del polígono dado, y tomando las distancias OA′ igual á OA, OB′ igual á OB, etc., quedará determinado el polígono que se pide.

5.° *Construir un polígono simétrico con otro dado.*

Trazando desde todos los vértices A, B, C, etc., del polígono dado perpendiculares á una recta fija llamada *eje de simetría*, y tomando en dichas perpendiculares AM=MA′, BN=NB′, etc., tendrémos los vértices del polígono que se busca.

6.° *Hallar el lado de un polígono regular conocido el rádio.*

Se multiplica el rádio por el número constante que para cada polígono determina la siguiente tabla:

Triángulo.	1,732	Octógono.	0,765
Cuadrado.	1,414	Decágono.	0,618
Pentágono. . . .	1,176	Dodecágono. . .	0,518
Exágono.	1,000	Pentadecágono. .	0,416

Conocido el lado, se hallará el rádio dividiendo el número correspondiente de la tabla anterior por la longitud de dicho lado.

FIGURAS CIRCULARES.

Polígonos inscriptos y circunscriptos en el círculo.

99. Llámanse FIGURAS CIRCULARES el círculo, la corona ó anillo, el sector, el segmento y el trapecio circulares.

Círculo es la superficie comprendida por la circunferencia.

Corona ó anillo es la superficie comprendida entre dos circunferencias concéntricas.

Sector circular es la parte de círculo terminada por dos rádios y el arco correspondiente.

Segmento circular es la porcion de círculo comprendida entre dos cuerdas, ó entre una cuerda y su arco.

Trapecio circular es la parte de corona interceptada por dos rádios.

AOB es un sector circular y AB*ba* un trapecio circular (fig. 80).

Los círculos que tienen un mismo rádio son *iguales*.

Las coronas ó anillos son *iguales*, si los rádios respectivos son iguales.

Todos los círculos son *semejantes*.

100. Un polígono está *inscripto* en un círculo ó un círculo está *circunscripto* á un polígono, cuando todos los lados del polígono son cuerdas de la circunferencia.

Un polígono está *circunscripto* á un círculo ó un círculo está *inscripto* en un polígono, cuando todos los lados del polígono son tangentes de la circunferencia.

La figura 81 representa un exágono inscripto en un círculo, y tambien un cuadrilátero circunscripto al mismo círculo.

101. Todo triángulo puede inscribirse en un círculo y circunscribirse á otro.

Los polígonos regulares tienen esta misma propiedad.

Respecto del triángulo es evidente, puesto que el punto de interseccion de las perpendiculares á los lados en su punto medio equidista de los tres vértices, y el de las bisectrices equidista de los tres lados. En los polígonos regulares se deduce la primera parte de la igualdad de los rádios, y la segunda de la igualdad de sus apotemas.

102. **Si una circunferencia se divide en partes iguales, y por los puntos de division se trazan cuerdas ó tangentes, el polígono inscripto ó circunscripto será regular.**

En el primer caso, todos sus lados son iguales por ser cuerdas de arcos iguales, y los ángulos son tambien iguales por ser ángulos inscriptos, que abrazan un mismo arco, como se ve en la figura 82. Lo mismo se verifica en el caso de ser tangentes las rectas que se tracen por los puntos de division.

Y como es evidente que los perímetros de los polígonos regulares inscriptos en una misma circunferencia aumentan, y los de los circunscriptos disminuyen á medida que aumenta el número de sus lados, se deduce que la *circunferencia* es siempre mayor que cada uno de los perímetros inscriptos, y menor que cualquiera de los circunscriptos, siendo por tanto el *límite comun* de unos y otros. Puede pues considerarse como el perímetro de un polígono regular de infinito número de lados.

103. ***Las circunferencias son proporcionales á sus rádios,*** **ó lo que es lo mismo, la relacion de la circunferencia al diámetro es una misma en todos los círculos.**

Para hallar esta relacion, ó sea las veces que la circunferencia es mayor que el diámetro, se inscribe en una circunferencia de un metro de diámetro un exágono, y luégo un polígono de 12 lados, despues otro de 24, otro de 48, y otro de 96, etc.

Siendo grande el número de lados, el polígono casi se confundirá con el círculo, y su perímetro con la circunferencia; luego el perímetro del último polígono será muy aproximadamente la longitud de la circunferencia, calculada en el supuesto de ser el diámetro igual á 1 en 3,14159.

Si llamamos π al número que expresa la razon de la circunferencia el diámetro, tendrémos:

$$\frac{\text{Circunferencia}}{2R}=\pi \quad \text{de donde} \quad \text{Circunferencia}=2\pi R$$

Segun esto, dado el rádio se hallará la circunferencia correspondiente multiplicándole por 2 veces el número 3,14159.

Y dada la circunferencia, se hallará el rádio, dividiendo su longitud por dos veces el número 3,14159 (*).

(*) Es tambien muy importante esta proporcion:
360° : Número de grados de un arco :: $2\pi R$: longitud de dicho arco.

Ejercicios referentes á las figuras circulares.

104. Las aplicaciones más importantes de las figuras circulares se reducen en este capítulo á la *rectificacion de la circunferencia* y á los problemas referentes á los polígonos inscriptos y circunscriptos en el círculo. Veamos su resolucion:

1.° *Rectificacion de la circunferencia.*

La construccion gráfica que nos da esta rectificacion, ó sea la longitud de la circunferencia en línea recta, es la siguiente:

Trácese el diámetro AB, figura 83, la tangente que corresponde al punto A, la recta ON, de modo que el arco A*m* sea igual á 30°, ó sea la mitad del arco, cuya cuerda es el rádio; tómense desde N sobre la tangente tres rádios, y uniendo el extremo M con B, tendrémos la recta MB, equivalente á la semicircunferencia rectificada.

2.° *Trazar una circunferencia inscripta y otra circunscripta á un triángulo dado.*

El punto de interseccion de las perpendiculares levantadas en los puntos medios de sus lados nos dará el centro de la circunferencia circunscripta, y las bisectrices de los ángulos nos darán el centro de la circunferencia inscripta.

3.° *Inscribir un triángulo equilátero en una circunferencia dada.*

Se lleva el rádio seis veces seguidas sobre la circunferencia, y las cuerdas de cada dos de estos arcos nos darán el triángulo equilátero inscripto, como se ve en la figura 86.

4.° *Inscribir en una circunferencia dada un exágono regular.*

Llevando el rádio seis veces seguidas sobre la circunferencia, las cuerdas de estos arcos formarán el exágono inscripto.

5.° *Inscribir un cuadrado en una circunferencia dada.*

Trácense dos diámetros perpendiculares, y uniendo sus extremos con cuerdas, quedará resuelto el problema.

6.° *Inscribir en una circunferencia dada los polígonos regulares de* 8, 16, 32, *etc., lados.*

Si se dividen por el medio los cuatro cuadrantes del problema anterior, las cuerdas de estos arcos formarán el octógono regular. Lo mismo se inscriben los polígonos de 16, 32, etc., lados.

7.° *Para circunscribir á un círculo todos los polígonos anteriores,* se trazan tangentes en vez de cuerdas por todos los puntos de division de la circunferencia respectiva.

8.° *Hallar la longitud del lado del triángulo equilátero inscripto en una circunferencia cuyo rádio es conocido.*

Multiplíquese el rádio por la raiz cuadrada de 3.

Si el rádio del círculo es de 100 metros, el lado del triángulo será igual á

$$100\times\sqrt{3}=100\times1,7320=173,20 \text{ metros.}$$

9.° *Calcular el rádio del círculo circunscripto á un triángulo equilátero.*

Divídase el lado del triángulo por la raíz cuadrada de 3.

Para resolver este problema gráficamente se construyen en los extremos de uno de sus lados dos ángulos, uno recto y otro de 30°, y la hipotenusa será el diámetro del círculo.

10.° *Hallar la longitud del lado del cuadrado inscripto en una circunferencia.*

Multiplíquese el rádio por la raíz cuadrada de 2.

Si el rádio del círculo es de 100 metros, el lado del cuadrado será igual á

$$100\times\sqrt{2}=100\times1,4142=141,42 \text{ metros.}$$

11.° *Hallar el rádio del círculo circunscripto á un cuadrado dado.*

Divídase el lado del cuadrado por la raíz cuadrada de 2.

Para la resolucion gráfica basta formar en los extremos de uno de sus lados dos ángulos de 45°, y el punto comun de estas rectas nos dará el centro del círculo, y por consiguiente su rádio (*).

POLÍGONOS ESTRELLADOS.

Dado un polígono regular, se construirá un polígono estrellado, figura 88, por uno de los dos procedimientos siguientes:

Por *reduccion*, trazando las diagonales que no pasen por el centro, y por *extension*, prolongando los lados no paralelos del polígono dado. Las intersecciones de estas rectas nos darán los vértices del polígono estrellado que se busca.

(*) En todo *cuadrilátero inscripto* en un círculo, los ángulos opuestos son suplementarios, y si está *circunscripto*, la suma de dos lados opuestos es igual á la suma de los otros dos, y recíprocamente.

AREAS DE LAS FIGURAS PLANAS.

105. Área de una figura es la medida de su extension superficial.

La unidad de superficie es un cuadrado, cuyo lado es la unidad lineal, como un metro, un decímetro, etc.

Las figuras planas, que tienen igual extension superficial, se llaman *equivalentes.*

Al medir, por ejemplo, la alfombra que se necesita para cubrir una sala ó la extension de un solar para edificar una casa, se toma por unidad el *metro cuadrado*; pero si hemos de expresar la superficie de una provincia ó de una nacion, la unidad será el *kilómetro cuadrado.*

106. *El área de un rectángulo* es igual al producto de su base por su altura.

Esta proposicion se deduce fácilmente de la figura 89; puesto que si la base del rectángulo mide 8 metros y la altura 5, trazando por los puntos de division rectas respectivamente paralelas á estas dimensiones, resultarán en toda la extension del rectángulo 40 metros cuadrados.

107. *El área de un paralelógramo cualquiera* es tambien igual al producto de su base por su altura.

Pues el paralelógramo ABCD de la figura 90 equivale al rectángulo MBCN de la misma base y altura que él, teniendo en cuenta la igualdad de los triángulos rectángulos ABM y DCN.

108. *El área de un cuadrado* es igual á la segunda potencia de su lado.

Siendo el cuadrado un paralelógramo, se hallará su área multiplicando la base por la altura, y como estos factores son iguales, el producto será la segunda potencia de uno de ellos (*).

Una plaza cuadrada cuyo lado mida 120 metros, tendrá de superficie 14400 metros cuadrados.

(*) Luego, *para hallar la longitud del lado de un cuadrado* basta extraer la raíz cuadrada de su área ó sea, de su extension superficial.

Así, un campo perfectamente cuadrado, y cuya área sea de 2500 metros cuadrados, tendrá de lado 50 metros; y por consiguiente, la longitud de su contorno ó perímetro será de 200 metros ó sean 2 hectómetros.

109. *El área de un triángulo* **es igual á la base por la mitad de su altura.**

Trazando por los vértices B y C del triángulo ABC de la figura 91, rectas respectivamente paralelas á los lados opuestos, resultará el paralelógramo ABDC de la misma base y altura que el triángulo dado, y duplo á la vez de dicho triángulo. El área de éste será por lo tanto la mitad del área del paralelógramo (*).

110. *El área de un trapecio* **es igual á sus bases por la mitad de la altura.**

Pues trazando en la figura 92 la diagonal BD, resulta dividido el trapecio en dos triángulos, cuya área es en cada uno igual á su base por la mitad de su altura (**).

111. *El área de un polígono regular* **es igual á su perímetro por la mitad de la apotema.**

En efecto, trazando los rádios OA, OB, OC, etc., en la figura 93, queda dividido el polígono dado en triángulos iguales, cuyas áreas componen la del polígono. Las bases de estos triángulos forman el perímetro del polígono, y su altura comun es la apotema del polígono.

El *área de un polígono regular* se determina tambien aproximadamente multiplicando el cuadrado de su lado por el número que en cada caso nos da esta tabla:

Triángulo. . . .	0,4330	Octógono. . . .	4,8284
Cuadrado. . . .	1,0000	Decágono. . . .	7,6942
Pentágono. . . .	1,7205	Dodecágono. . .	11,1962
Exágono.. . . .	2,5981	Pentedecágono..	17,6424

Si una finca rústica ó un castillo de forma octogonal regular tiene de lado 580 metros, su área será igual al producto del número constante 4,8284 por el cuadrado de su lado, ó sean 1.624274 metros cuadrados.

Inversamente, conociendo el área de uno de estos polígonos, se hallará la longitud del lado, extrayendo la raiz cuadrada del cociente de dividir su área por el número que nos da la tabla anterior.

(*) El *área de un triángulo* es tambien igual á la raiz cuadrada del producto de multiplicar el semi-perímetro del triángulo por la diferencia entre dicho semi-perímetro y cada uno de sus lados.

(**) Siendo la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio paralela á las bases é igual á su mitad, el *área de un trapecio* será tambien igual á su altura por la paralela media entre ambas bases.

112. *El área de un polígono irregular* es igual á la suma de las áreas de los triángulos, paralelógramos, trapecios, rombos, etc., en que puede descomponerse toda su extension superficial.

La sola inspeccion de la figura 94 indica este procedimiento como el más expedito para la medida de fincas rústicas ó terrenos de gran extension, usándose, sin embargo, con más frecuencia la division llamada *trapecial*, que consiste en trazar desde todos los vértices del polígono perpendiculares á una recta arbitraria, que generalmente une los dos vértices más distantes de la figura cuya área nos proponemos averiguar.

113. *El área de un círculo* es igual á su circunferencia por la mitad del rádio.

Esto se deduce de considerar al círculo como un polígono regular de infinito número de lados.

El área del círculo se expresa más generalmente por la fórmula πR^2, representando R el rádio y π la razon de la circunferencia al diámetro, ó sea el número constante 3,141592, en cuyo caso se puede decir tambien que para hallar el *área de un círculo* basta multiplicar la razon de la circunferencia al diámetro por el cuadrado del rádio.

114. *El área de una corona* es igual á la diferencia entre las áreas de sus dos círculos.

Siendo sus rádios R y r, el área de la corona será $\pi(R^2—r^2)$.

115. *El área de un sector circular* es igual á la mitad del arco que le sirve de base por el rádio.

La longitud del arco se determina por el número de grados que abraza, formando la siguiente proporcion :

360° es á $2\pi R$ como los grados del arco es á su longitud.

116. *El área de un segmento circular* de una sola cuerda es la diferencia entre las áreas del sector y del triángulo correspondientes (*).

(*) Si el *segmento circular* es de dos bases ó cuerdas, se considera como la diferencia entre dos segmentos de una sola cuerda.

El *área de un trapecio circular* es igual á la diferencia entre las áreas de los sectores respectivos.

Equivalencia de las figuras planas.

117. Son notables entre otras las equivalencias que siguen, fundadas en las reglas para la determinacion de las áreas.

Todos los triángulos de igual base y altura son equivalentes.

El triángulo es mitad de un paralelógramo de la misma base y altura.

Todos los paralelógramos de igual base y altura son equivalentes.

El rombo es mitad del rectángulo, construido sobre sus diagonales.

El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo equivale á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos (*).

En la figura 95, el cuadrado A vale tanto como la suma de los otros dos B y C.

Luego para hacer un cuadrado doble de otro cuadrado bastará construir un triángulo rectángulo cuyos catetos sean iguales al lado del cuadrado dado, en cuyo caso el cuadrado construido sobre la hipotenusa sería el cuadrado pedido.

118. *Las áreas de las figuras semejantes* son entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos.

Por eso una vara cuadrada tiene 9 piés cuadrados; un metro cuadrado tiene 100 decímetros cuadrados; y un kilómetro cuadrado tiene 1.000000 de metros cuadrados.

Un cuadrado cuyo lado es doble de otro cuadrado, áun cuando el perímetro es tambien doble, la superficie será cuádruple.

Si el rádio de un círculo es 12 veces mayor que el de otro círculo, la circunferencia del primero será 12 veces mayor que la del segundo, pero su extension superficial será 144 veces mayor.

El círculo construido con un rádio igual á la hipotenusa de un triángulo rectángulo equivale á la suma de los círculos cuyos rádios sean los catetos.

(*) Se llama esta proposicion *teorema de Pitágoras*, su inventor.
Para *hallar la hipotenusa* de un triángulo rectángulo, se suman los cuadrados de los catetos y del resultado se extrae la raiz cuadrada.

Reduccion de figuras planas á otras equivalentes.

119. **Reducir un polígono á otro equivalente y que tenga un lado ménos.**

Prolongando en la figura 96 un lado cualquiera, por ejemplo, AB; trazando la diagonal BD, la recta CM, paralela á BD, y uniendo los puntos D y M, tendrémos el polígono AMDE, equivalente al polígono dado ABCDE, puesto que los triángulos BCD y BMD que tienen la misma base BD é iguales alturas, son tambien equivalentes.

Segun esto, todo polígono puede siempre reducirse á un triángulo equivalente.

Si el polígono es regular, entónces se toma por base del triángulo el perímetro del polígono y por altura su apotema.

120. **Trasformar un paralelógramo en un triángulo equivalente.**

Puede tomarse por base del triángulo la del paralelógramo, y por altura, el duplo de la altura del paralelógramo. Este problema es indeterminado.

121. **Trasformar un triángulo en un paralelógramo equivalente.**

Puede tomarse por base del paralelógramo la del triángulo, y por altura la mitad de la altura del triángulo. Tambien este problema es indeterminado.

122. **Trasformar un trapecio en otro equivalente.**

Basta que tengan una misma altura é igual la semisuma de sus bases ó bien la paralela media.

123. **Trasformar un círculo en un triángulo ó en un paralelógramo equivalente.**

Se tomará por base la circunferencia rectificada, y por altura el rádio si hemos de construir un triángulo, y la mitad del rádio, si la figura equivalente ha de ser un paralelógramo. Problema indeterminado (*).

(*) Para trasformar una figura plana cualquiera en un triángulo equilátero equivalente se divide el área de dicha figura por el número constante 0,4330, y extrayendo despues la raiz cuadrada del cociente, el resultado será el lado del triángulo equilátero.

Cuadratura de las figuras planas.

124. Llámase *cuadrar una figura* transformarla en un cuadrado equivalente.

Propongámonos reducir á cuadrado las figuras que siguen:

Un triángulo. Hallando una media proporcional entre la base y la mitad de la altura, tendrémos el lado del cuadrado pedido, puesto que ambas figuras tendrán igual extension.

Un paralelógramo. Hállese una media proporcional entre la base y la altura, y tendrémos el lado del cuadrado equivalente al paralelógramo dado.

Un trapecio. Hállese una media proporcional entre la suma de ambas bases y la mitad de su altura, y tendrémos así el lado del cuadrado que se busca.

Tambien pudiera hallarse la media proporcional entre la altura y la paralela media entre ambas bases.

Un polígono regular. Se hallará una media proporcional entre el perímetro del polígono, y la mitad de su apotema.

Si el polígono es irregular, se trasforma primero en un triángulo de la misma área, y luégo se busca el cuadrado equivalente á este triángulo.

Un círculo. Se hallará una media proporcional entre la circunferencia rectificada, y la mitad del rádio.

Un sector circular. Una media proporcional entre la longitud del arco y la mitad del rádio nos dará el lado del cuadrado.

125. Construir un cuadrado equivalente á la suma ó la diferencia de otros dos.

En el primer caso, se forma un triángulo rectángulo cuyos catetos sean los dos lados de los cuadrados dados, y la hipotenusa será el lado del cuadrado equivalente á la suma pedida.

En el segundo, se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el lado mayor de las figuras dadas y uno de los catetos el lado menor, en cuyo supuesto el otro cateto será el lado del cuadrado equivalente á la diferencia que se busca.

Es evidente que si los cuadrados dados son iguales, la suma será el duplo de cada uno de ellos (*).

(*) Lo mismo se resuelve este otro problema: *Hallar un círculo equivalente á la suma ó la diferencia de otros dos írculos dados.*

Ejercicios referentes á las áreas de las figuras planas.

126. Los problemas referentes á las áreas de las figuras planas pueden ser tambien gráficos y numéricos; pero siendo estos últimos los de mayor aplicacion en las artes, la agricultura y el comercio, vamos á concretar á ellos estos ejercicios resolviendo los siguientes:

1.º *Cuántos metros cuadrados de alfombra se necesitan para cubrir una sala rectangular de 20 metros de largo y 12 de ancho?*

20 metros $\times$ 12 metros $=$ 240 metros cuadrados (*).

2.º *Cuál es el área de un plaza cuadrada de 500 metros de lado?*

500 metros $\times$ 500 metros $=$ 250000 metros cuadrados.

3.º *Calcular el área de un terreno trapecial, suponiendo la distancia entre ambas bases igual á 250 metros y midiendo la base mayor 360 metros y la menor 280.*

El área pedida será igual á 80000 metros cuadrados.

4.º *Calcular la extension superficial de un circo cuyo diámetro es de 100 metros.*

La circunferencia resulta igual á 314,159 metros; luego el área del circo será 314,159 $\times$ 25 $=$ 7853,97 metros cuadrados.

De otro modo:

$\pi R^2 = 3{,}14159 \times 50 \times 50 = 7853{,}97$ metros cuadrados.

Suponiendo 20 metros el rádio del círculo interior ó de arena, y ocupando cada tres personas un metro cuadrado, *¿cuántas personas cabrian en el circo?*

5.º *Hallar el número de fanegas de tierra de una dehesa circular cuya circunferencia sea de 2 kilómetros y medio.*

Siendo la circunferencia 2500 metros, el rádio será igual á 397,887 metros; luego el área de la dehesa será aproximadamente igual á 497359 metros cuadrados, cuya reduccion á fanegas de tierra nos dará el número pedido.

(*) Si la alfombra tuviera justamente un metro de ancho, bastaria comprar los 240 metros que resultan de la multiplicacion del texto; pero si la pieza de alfombra tuviera solo medio metro de ancho, se necesitarian entónces 480 metros. Siendo el ancho 6 decímetros, se formará una regla de tres inversa, de cuya resolucion se deduce que deberian comprarse 400 metros, para que resulten 240 metros cuadrados.

6.° *Hallar el área de un terreno de forma irregular.*

Se divide en paralelógramos, trapecios y triángulos, y la suma de las áreas de estas figuras nos dará la del polígono.

En la figura 94 resulta el área total 1870 metros cuadrados (*).

7.° *Cuál será el lado de un cuadrado equivalente á un triángulo cuya base es de 4500 metros y su altura de 5 kilómetros?*

El término medio proporcional entre 4500 metros de la base, y 2500 metros mitad de la altura es 3354, que señala el número de metros del lado del cuadrado que se pide.

8.° *Trasformar un rombo, cuyas diagonales tienen respectivamente de longitud 100 y 60 metros, en un círculo equivalente.*

Siendo el área del rombo igual á 3000 metros cuadrados, el rádio del círculo se hallará extrayendo la raíz cuadrada del cociente de dividir este número por la razon de la circunferencia al diámetro, cuyo resultado es igual á 30,9 metros.

9.° *Calcular el lado de un cuadrado equivalente á un círculo.*

Suponiendo 1000 metros el rádio, la circunferencia será aproximadamente igual á 6283 metros; luego el cuadrado que se busca tendrá de lado 1772 metros.

10.° *Trasformar el círculo anterior en un paralelógramo.*

Este problema es indeterminado. Siendo la base del paralelógramo 1492 metros (número arbitrario), su altura será el cociente de dividir el área del círculo por este número.

11.° *Dado un círculo cuyo rádio es de 50 metros, calcular los rádios de otros dos círculos cuya suma sea equivalente al círculo dado.*

Si los nuevos círculos han de ser iguales, tendrán por rádio 35,3 metros. No siendo iguales, uno de ellos puede tener por rádio el número que se quiera menor que 50 metros; 20 por ejemplo, en cuyo caso el rádio del otro círculo será:

$$\mathrm{R}=\sqrt{2500-400}=\sqrt{2100}=45{,}82 \text{ metros.}$$

(*) Si el polígono irregular es inaccesible por su interior, como sucede en un monte, se traza un rectángulo exterior cuyos lados pasen por el mayor número de vértices posible; y hallando luégo el área de este rectángulo, y la de los triángulos, trapecios, etc., comprendidos entre el polígono propuesto y el rectángulo, la diferencia de estos resultados será el área pedida.

Ejercicios referentes á la Geometría plana.

127. Antes de terminar esta primera parte de la GEOMETRÍA, conviene que los alumnos completen el estudio de las verdades geométricas relativas á las figuras planas, y adquieran á la vez mayor soltura y facilidad en la resolucion de problemas, con los siguientes ejercicios:

Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice son una prolongacion de otra ó forman una sola recta.

Las bisectrices de dos ángulos alternos ó correspondientes formados por dos paralelas y una secante, son tambien paralelas.

El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de sus tres vértices, y recíprocamente.

Si la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos partes iguales, el triángulo será isósceles.

Los ángulos externos de todo polígono valen juntos 4 ángulos rectos.

Cuántos lados tiene un polígono cuyos ángulos valen juntos tanto como 20 ángulos rectos?

La suma de las rectas que unen los tres vértices de un triángulo con un punto interior cualquiera, es menor que su perímetro y mayor que la mitad de este perímetro.

La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado é igual á su mitad.

Las bisectrices de los ángulos exteriores de un triángulo, forman otro cuyos vértices están en las bisectrices de los ángulos interiores del primero.

Los triángulos rectángulos son iguales si tienen la hipotenusa y uno de los catetos, ó la hipotenusa y uno de los ángulos agudos respectivamente iguales.

Los triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual, ó bien la hipotenusa y un cateto proporcionales.

Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, se verifica que la perpendicular es media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa, y tambien cuarta proporcional á la hipotenusa y á los catetos. Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.

Si desde un punto fuera de la circunferencia se trazan á ésta una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento externo.

Formar una tabla con los valores de cada uno de los ángulos de los polígonos regulares de tres, cuatro, cinco, seis, ocho, diez, doce y veinte lados.

Si se unen los puntos medios de los lados de un cuadrilátero, resulta un paralelógramo.

Toda recta que pasando por el centro de un paralelógramo termina en dos de sus lados opuestos, resulta dividida por el medio en dicho punto.

En todo cuadrilátero inscripto en un círculo, los ángulos opuestos son suplementarios, y recíprocamente.

Los rectángulos son siempre inscriptibles.

En todo cuadrilátero circunscripto á un círculo, la suma de dos lados opuestos es igual á la suma de los otros dos, y recíprocamente.

El rombo es siempre circunscriptible.

El área de un triángulo es igual á su perímetro por la mitad del rádio del círculo inscripto.

Las áreas de los triángulos son entre sí, como los productos de sus bases por sus alturas.

El área de una corona es igual á la de un círculo, cuyo rádio es la mitad de una cuerda de la circunferencia mayor, que á la vez sea tangente de la menor.

Verificar con sólo el auxilio del compás si tres puntos dados A, B y C están ó no en línea recta.

Dividir gráficamente una recta dada en partes proporcionales á los números 1, 2 y 5.

Trazar una circunferencia tangente de otras dos circunferencias dadas.

Trazar una recta tangente de una circunferencia, y que sea paralela á una recta dada.

Trazar una circunferencia igual á la suma ó á la diferencia de otras dos dadas.

Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos tienen 300 metros el uno y 400 el otro.

Calcular la altura y los catetos de un triángulo rectángulo, siendo los segmentos de la hipotenusa 10 y 15 metros.

Construir un polígono estrellado reduciendo ó ampliando un exágono regular de 5 centímetros de lado.

Calcular el área de un triángulo equilátero, cuyo lado es de 100 metros.

Cuál es el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos valen 100 metros el uno y 120 metros y medio el otro?

Cuántos azulejos de 15 centímetros de lado se necesitan para cubrir un piso de forma rectangular, cuya longitud sea de 10 metros y medio y su anchura de 6 metros y 12 centímetros?

Cuántas planchas de zinc se necesitan para cubrir una extension trapecial cuyas bases midan 20 y 25 metros y su altura 5 metros y medio? Las planchas de zinc son rectángulos de 1 metro y 20 centímetros de longitud y 50 centímetros de ancho.

Hallar el área de una corona ó anillo, cuyos rádios tengan de longitud el uno 4 y el otro 5 metros.

Circunscribir á un círculo un polígono regular, conociendo el polígono inscripto del mismo número de lados.

La altura de un triángulo equilátero inscripto en un círculo es la mitad de 3R y la del circunscripto es 3R. El lado del primero es la mitad del lado del segundo.

Dividir un círculo en cinco ó en seis partes equivalentes por medio de semicircunferencias, cuyos centros se hallen todos en un mismo diámetro.

Cuánto vale la diagonal de un cuadrado si la longitud de su lado es de 100 metros?

Calcular el rádio de un círculo equivalente á otros tres, cuyos rádios tienen de longitud 20, 28 y 29 metros.

Hallar el lado de un cuadrado equivalente á un círculo, cuyo rádio es de 1 metro.

Hallar el rádio de un círculo equivalente á un cuadrado, cuyo lado es de un kilómetro.

Calcular la relacion entre las áreas de un círculo y un cuadrado, si ambas figuras tienen igual perímetro.

En una circunferencia de 100 metros de rádio, ¿cuál es la longitud de un arco de 100 grados?

Cuál es el número de grados de un arco cuya longitud es igual al rádio?

Sabiendo que las ruedas delanteras de un carruaje tienen 80 centímetros de diámetro y las traseras 1 metro y 20 centímetros, calcular las vueltas que tienen que dar unas y otras para que el carruaje recorra un kilómetro.

Cuál es el rádio de un meridiano terrestre suponiendo perfectamente esférica la superficie del globo?

Cuál es la distancia entre dos lugares situados en el Ecuador, cuya diferencia de longitud sea de 4^{o} y $10'$?

Construir un triángulo equilátero equivalente á la suma ó á la diferencia de otros dos.

Construir un triángulo equilátero equivalente á otros tres tambien equiláteros.

Construir un polígono semejante á otro, y cuyo perímetro sea igual á una recta dada.

Construir un polígono equivalente á la suma ó á la diferencia de otras dos, siendo todos semejantes entre sí.

El cuadrado construido sobre la suma de dos rectas se compone del cuadrado de la mayor, del cuadrado de la menor, y de dos rectángulos que tienen por base y altura respectivamente las dos rectas dadas.

Si el rádio de un círculo es de 100 metros, ¿cuánto valdrá el lado del triángulo equilátero y el del cuadrado inscriptos?

Siendo 100 metros el lado de un triángulo equilátero ó el de un cuadrado, calcular el rádio del círculo circunscripto.

Dado el lado de un triángulo equilátero ó el de un cuadrado, determinar gráficamente el rádio del círculo inscripto y el del circunscripto correspondiente.

Cubrir una superficie rectangular con triángulos equiláteros, con cuadrados, con exágonos regulares, y con la reunion de octógonos regulares y cuadrados.

Construir un paralelógramo, conocidas las diagonales y uno de sus lados.

Hallar numérica y gráficamente el lado de un cuadrado equivalente á un triángulo, cuya base sea de 1492 metros y su altura de 365 y medio.

Calcular la extension superficial de un triángulo equilátero cuyo lado es de 100 metros.

Para cuadrar un rombo, basta hallar una media proporcional entre una de sus diagonales y la mitad de la otra.

Trasformar un rombo, cuyas diagonales miden respectivamente 100 y 60 metros en un triángulo equilátero ó en un rectángulo equivalente.

Hallar el área de un círculo cuya circunferencia es de 1 metro.

Hallar el diámetro de un círculo cuya superficie sea de 1 metro cuadrado.

Construir un círculo equivalente á una corona.

SEGUNDA PARTE.

GEOMERÍA DEL ESPACIO.

Rectas y planos.
Superficies curvas.
Cuerpos poliedros.
Cuerpos redondos.
Volúmenes de los cuerpos geométricos.
Ejercicios.

TROS CONOCIMIENTOS UTILES.

Agrimensura.
Nociones de Mecánica práctica.
Ciencias naturales.
Pesos específicos de los cuerpos.
Cuadros estadisticos.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

Rectas y planos. — Superficies curvas. — Poliedros.
Cuerpos redondos. — Sus volúmenes.

RECTAS Y PLANOS.

128. Si una recta tiene dos puntos en un plano, estará toda ella en dicho plano.

Por una recta pueden pasar muchos planos.

La interseccion de una recta y un plano es un punto llamado generalmente *pié de la recta*.

Tres puntos *que no estén en línea recta*, determinan la posicion de un plano.

Siendo A, B y C tres puntos que no están en línea recta, si se concibe por la recta que une á dos de ellos A y B un plano y le hacemos girar al rededor de AB, hasta pasar por el otro punto C, una de las infinitas posiciones del plano quedará determinada por los puntos dados (*).

La insersección de dos planos es una línea recta.

129. Una recta y un plano, que se cortan, *son perpendiculares entre sí*, cuando la recta es perpendicular á todas las que, trazadas en el plano, pasan por su pié.

Una recta y un plano que se cortan *son oblícuos entre sí*, cuando la recta no es perpendicular á todas las que, trazadas en el plano, pasan por su pié.

Una recta y un plano *son paralelos*, cuando no se encuentran aunque se prolonguen indefinidamente.

Por un punto fuera de un plano pueden trazarse una recta perpendicular é infinitas oblícuas y paralelas al mismo plano.

(*) Tambien determinan la posicion de un plano dos rectas, que se cortan, ó bien dos rectas paralelas. Aun cuando para representar los planos sobre el papel los suponemos limitados bajo la forma de un paralelógramo, deben, sin embargo, concebirse siempre indefinidos.

30. Toda recta perpendicular á otras dos, que se cruzan por su pié en un plano, es perpendicular á este plano.

Se funda esto en que dos rectas que se cruzan, determinan la posicion de un plano.

Por un punto O de la recta AB, figura 98, pueden trazarse cuantas perpendiculares se quieran á dicha recta, las cuales se hallarán todas en un mismo plazo perpendicular á la recta dada.

131. Por un punto dado no puede trazarse más que una recta perpendicular á un plano.

Pues de lo contrario resultaria un triángulo con dos ángulos rectos, ó bien el absurdo de ser iguales dos ángulos, que eran á la vez uno parte del otro segun se ve en la figura 99.

132. Si desde un punto fuera de un plano se bajan á este plano una perpendicular y diferentes oblícuas, la perpendicular es más corta que todas las oblícuas.

Las oblícuas que se separan igualmente de la perpendicular son iguales, y la oblícua que más se separa es la mayor.

Las oblícuas iguales pueden ser infinitas y sus piés forman una circunferencia, cuyo centro es el pié de la perpendicular.

La distancia desde un punto á un plano es la perpendicular trazada desde dicho punto al plano.

133. Por un punto del espacio no puede pasar más que una recta paralela á otra recta dada.

Pues las paralelas deben estar siempre en un mismo plano.

Por un punto dado fuera de un plano pueden pasar un número infinito de rectas paralelas á este plano. Todas estas rectas estarán, ademas, en un mismo plano.

134. *Proyeccion de un punto sobre un plano* es el pié de la perpendicular, trazada desde dicho punto al plano.

Proyeccion de una recta ó curva sobre un plano es la línea formada por las proyecciones de todos sus puntos sobre dicho plano. La proyeccion de una recta está determinada por la proyeccion de sus dos extremos (*).

(*) Llámase *ángulo de una recta con un plano* el que forma dicha recta con su proyeccion sobre el plano. Este ángulo es el menor de todos los que forma dicha recta con las que pasan por su pié y se hallan en el mismo plano.

Angulos diedros.

135. *Angulo diedro* es la mayor ó menor inclinacion de dos planos que se cortan. *Caras* del ángulo son los planos que le forman, y *arista* la interseccion de estos planos (*).

Un ángulo diedro se designa comunmente por cuatro letras de las cuales las tres primeras indican uno de los planos, las tres últimas, el otro, y las dos del medio, la arista ó sea la interseccion de ambos planos, como el CABD en la figura 102.

136. *La magnitud de un ángulo diedro* no depende de la mayor ó menor extension de sus caras, sino de su mayor ó menor abertura ó inclinacion.

Dos ángulos diedros, cuyas caras superpuestas coinciden, son iguales y reciprocamente.

137. *Angulos diedros adyacentes* son los que tienen la arista y un plano comunes y cuyas otras dos caras son un solo plano.

Si dos ángulos diedros adyacentes son iguales, cada uno se llama *ángulo diedro recto.*

Todos los ángulos diedros rectos son iguales.

Si dos ángulos diedros adyacentes no son iguales, el mayor se llama *obtuso* y el menor *agudo.*

Los ángulos diedros adyacentes valen juntos dos diedros rectos.

Los ángulos diedros son *opuestos por la arista* cuando las caras del uno son prolongaciones de las caras del otro.

Estos ángulos tienen siempre un mismo suplemento, y son por consiguiente iguales.

138. *La medida de un ángulo diedro* se aprecia por la del rectilíneo formado por dos perpendiculares á la arista, trazadas por un mismo punto de ella, una en un plano y otra en el otro.

Todos los ángulos rectilíneos correspondientes á un diedro son iguales. Si dos diedros son iguales, los rectilíneos correspondientes tambien lo serán. A mayor diedro corresponde mayor ángulo rectilíneo.

(*) *La interseccion de dos planos* es siempre una línea recta.

Planos perpendiculares y paralelos entre sí.

139. Llámanse *planos perpendiculares* entre sí los que forman ángulos diedros rectos; y *oblícuos*, aquellos cuyos ángulos diedros no son rectos.

Planos paralelos son los que no se encuetran, aunque se prolonguen indefinidamente.

Es evidente que por una recta trazada en un plano no puede pasar más que otro perpendicular al primero; pero si la recta es perpendicular al plano, pasarán por ella un número infinito de planos perpendiculares al primero, segun indica la figura 103.

Por una recta oblícua ó paralela á un plano no puede pasar más que un plano perpendicular al primero (*).

Dos planos perpendiculares á una misma recta son *paralelos*.

140. Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano son rectas paralelas.

Y, por consiguiente, las partes de dos ó más rectas paralelas comprendidas entre dos planos paralelos, son iguales.

141. Entre las diferentes direcciones que una recta puede tomar en el espacio, merece una atencion particular la que tiene un hilo, del cual pende un peso cualquiera.

Esta direccion se llama *línea de aplomo* ó *línea vertical*, y determina la prolongacion del rádio terrestre correspondiente á dicho punto.

Todo plano perpendicular á la línea vertical se llama *plano horizontal*.

Toda recta trazada en un plano horizontal se llama *línea horizontal*.

Todo plano, que pasa por una línea vertical, se llama *plano vertical*.

La interseccion de dos planos verticales es una *línea vertical*; y la interseccion de dos planos, uno vertical y otro horizontal, es *horizontal*.

La superficie de las aguas tranquilas de un lago ó del mar, si es de corta extension, determina un plano horizontal.

(*) Dos planos perpendiculares á una misma recta *son paralelos*, pues de lo contrario resultaria un triángulo con dos ángulos rectos.

Angulos poliedros.

142. *Angulo poliedro* es la inclinacion de tres ó más planos, que concurren en un punto, llamado *vértice.*

Los planos componentes se llaman *caras*, y sus intersecciones *aristas* del ángulo poliedro.

Los planos que unen dos aristas de caras diferentes se llaman *planos diagonales.*

Un ángulo poliedro se compone de tantos diedros como caras tiene; y se llama *regular*, cuando todas sus caras y ángulos diedros son iguales.

El ángulo poliedro que está formado únicamente por tres ángulos planos, se llama *triedro.*

143. Todo ángulo poliedro puede descomponerse en tantos triedos como caras tiene, ó en tantos triedos como caras tiene ménos dos.

Para la primera division basta trazar planos por un punto cualquiera, elegido dentro del poliedro y cada una de sus aristas; y para la segunda, planos diagonales desde una arista á todas las demas.

144. Tres planos, que se cortan, dividen todo el espacio en ocho ángulos triedros, cuyo vértice comun es el punto de concurso de las intersecciones de dichos planos.

Cada plano divide dicho espacio indefinido en dos mitades, y cada una de éstas está dividida por los otros dos planos en cuatro ángulos diedros.

145. En todo ángulo poliedro se verifica que:

Una cara es menor que la suma de todas las demas.

Así la cara AOD es menor que AOB+BOC+COD.

La suma de sus ángulos planos es menor que cuatro rectos.

Y por consiguiente, la suma de los ángulos AOB, BOC, EOD y DOA es siempre menor que 360° (*).

(*) En todo ángulo triedro la suma de sus ángulos diedros es mayor que dos rectos y menor que seis; pudiendo por lo tanto tener uno, dos ó tres ángulos diedros rectos. Si tiene sólo un ángulo diedro recto, se llama *rectángulo*, si dos *birectángulo*, y *trirectángulo* si tiene tres rectos.

SUPERFICIES CURVAS.

146. Todas las *superficies curvas* que se consideran en el estudio elemental de la GEOMETRÍA, pueden ser engendradas por el movimiento de una línea en el espacio. Esta línea se llama *generatriz.*

Superficies regladas son aquellas cuya generatriz es una recta: las más notables son la superficie *cónica* y la *cilíndrica.*

La *superficie cónica* está engendrada por el movimiento de una recta, que sujeta por uno de sus extremos describe con el otro una circunferencia ú otra curva cualquiera llamada *directriz.*

La *superficie cilíndrica* está engendrada por el movimiento de una recta que gira al rededor de sí misma, describiendo bien sea una circunferencia ú otra curva cualquiera llamada *directriz.*

Superficie esférica es la engendrada por el movimiento de una semicircunferencia al rededor de su diámetro llamado *eje.* El centro de la semicircunferencia generatriz es tambien el centro de la superficie esférica.

Las superficies cónica y cilíndrica más usuales ó de más aplicacion en las artes y la industria, y las únicas de que se trata en los principios de GEOMETRÍA, son aquellas cuya directriz es una circunferencia. Llámase *eje* la recta que pasa por el centro de la directriz y por el punto fijo en la superficie cónica, ó es paralela á la generatriz en la cilíndrica (*).

147. La interseccion de una superficie cónica con un plano perpendicular al eje es una *circunferencia*, cuyo centro está en el mismo eje.

Si el plano secante es oblícuo al eje y corta á todas las generatrices, la interseccion es una curva cerrada llamada *elipse.*

Si el plano secante es paralelo á una de las generatrices, la interseccion es una curva llamada *parábola.*

Si el plano secante es paralelo al eje, la interseccion que resulta es una *hipérbola.*

Ultimamente, si el plano secante pasa por el vértice, la interseccion puede ser un *punto*, una *generatriz* ó dos *generatrices.*

Las superficies cónicas se pueden desarrollar sobre un plano.

(*) Todas estas superficies pueden tambien considerarse compuestas de un número infinito de planos infinitamente pequeños.

148. En la superficie cilíndrica, la distancia de la generatriz al eje es constante y se llama rádio de la superficie cilíndrica.

La interseccion de una superficie cilíndrica y un plano perpendicular al eje es una *circunferencia*, cuyo centro está en el mismo eje. Estas circunferencias son todas iguales, puesto que tienen por rádio la distancia constante de las generatrices al eje.

Si el plano secante es oblícuo al eje, la interseccion es una curva cerrada llamada *elipse*.

Si el plano secante es paralelo al eje, la interseccion comun se reduce á dos generatrices.

Las superficies cilíndricas se pueden desarrollar sobre un plano.

149. En la superficie esférica, los extremos del eje se llaman *polos*. El centro de la semicircunferencia generatriz lo es tambien de la superficie esférica.

Llámanse *rádios* las rectas que van desde el centro á los diferentes puntos de la superficie esférica; y *diámetros* las rectas que pasando por el centro terminan por ambos extremos en la misma superficie.

Todos los rádios de una misma superficie esférica son iguales.

La interseccion comun de una superficie esférica y un plano es una circunferencia que será *máxima*, cuando su plano pase por el centro de la superficie esférica, y será *menor* aquella cuyo plano no pase por el centro.

Todas las circunferencias máximas de una misma superficie esférica son iguales. Dos circunferencias máximas se cortan siempre en los extremos de un diámetro de la superficie esférica.

La parte de superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos se llama *zona* (*).

150. *La línea más corta* que puede trazarse sobre la superficie esférica entre dos puntos de la misma, es el arco menor de circunferencia máxima que pase por dichos puntos.

Un buque que saliendo de Cádiz se dirija al Rio de la Plata navegará por el camino más corto siempre que recorra el arco de circunferencia máxima de la Tierra que pase por esos dos puntos, sabiendo que si dos arcos tienen una cuerda comun, es más pequeño el que tiene mayor rádio, y como las circunferencias máximas tienen mayor rádio que las menores, el camino recorrido sobre aquéllas será el menor.

(*) La interseccion comun de dos superficies esféricas es siempre una circunferencia cuyo plano es perpendicular á la línea de sus centros.

CUERPOS POLIEDROS.

151. Se llama CUERPO POLIEDRO, ó simplemente *poliedro*, el espacio terminado por superficies planas (*).

Caras del poliedro son los planos que le forman.

Aristas son los lados de sus caras, y *vértices* son los puntos de interseccion de unas aristas con otras.

Diagonal es la recta que une dos vértices de caras diferentes; y *planos diagonales* los que pasan por tres vértices, que no están en una misma cara, ó bien los que unen dos aristas de caras diferentes.

Se llama *base* de un poliedro á cualquiera de sus caras; pero generalmente se da este nombre á aquella sobre la que se apoya ó en la que descansa el poliedro.

Caras laterales son todas las caras ménos su base ó bases, y *aristas laterales* son las intersecciones de cada dos caras laterales.

Los poliedros se dividen en *cóncavos* y *convexos*. Los segundos son aquéllos cuya superficie no puede ser cortada por una recta más que en dos puntos: todos sus planos diagonales son interiores.

Los poliedros toman diferentes nombres, segun el número de sus caras:

Se llaman *tetraedros*, si tienen 4 caras; *pentaedros*, si tienen 5; *exaedros*, si tienen 6; *octaedros*, si tienen 8; *dodecaedros*, si tiene 12, é *icosaedros* cuando tienen 20.

Poliedro regular es el que tiene todas sus caras regulares é iguales, é iguales tambien todos sus ángulos diedros y poliedros.

152. *Area lateral* de un poliedro es la suma de las áreas de sus caras laterales; y *área total* la suma de las áreas de todas sus caras.

Dos poliedros son iguales cuando tienen todos sus elementos ordenadamente iguales, de modo que si fuera posible adaptar el uno sobre el otro coincidieran en toda su extension.

(*) El conjunto de estas superficies constituye la *superficie del poliedro*.

Pirámides.

153. PIRÁMIDE es un poliedro terminado por una base poligonal y tantos triángulos como lados tiene esta base.

Los lados de la base poligonal se consideran como bases de los triángulos, y el vértice comun de éstos se llama *vértice* ó *cúspide* de la pirámide.

Altura de la pirámide es la perpendicular trazada desde el vértice á la base.

La pirámide toma el nombre del polígono de su base; así decimos pirámide *triangular* ó *tetraedro*, *cuadrangular*, *trapecial*, *pentagonal*, etc., segun la figura de su base.

La pirámide es *regular*, cuando su base es un polígono regular y todas las aristas laterales son iguales.

Las caras laterales de la pirámide regular tienen igual altura: esta altura se llama *apotema* de la pirámide.

OABCDE en la figura 107 es una pirámide regular.

La pirámide que no reuna las condiciones de la regular, se llama pirámide *irregular*.

Llámase generalmente *trozo de pirámide* al poliedro que resulta de cortar una pirámide con un plano paralelo á su base, y comprendido entre dicha base y el plano secante.

ABCDE*abcde* es un trozo de pirámide.

154. Toda pirámide puede descomponerse en tantos tetraedros como lados tiene el polígono de su base, ó en tantos como lados tiene ménos dos.

En el primer caso, basta unir el vértice de la pirámide con un punto cualquiera de la base, y trazar por esta recta y por cada una de las aristas laterales planos secantes.

En el segundo se divide la base en tantos triángulos como lados tiene, ménos dos, y luégo se trazan planos por estas rectas y el vértice de la pirámide (*).

(*) Todo poliedro puede descomponerse en pirámides, y por consiguiente en tetraedros; pues si trazamos planos secantes por todas sus aristas y un punto cualquiera, elegido dentro del poliedro, resultarán tantas pirámides cuantas sean sus caras.

155. *El área lateral de una pirámide regular* es igual al perímetro de su base por la mitad de su apotema (*).

El área lateral de un trozo de pirámide regular es igual al perímetro de sus bases por la mitad de la apotema correspondiente.

Las caras laterales de este poliedro son trapecios.

El área total se halla en uno y otro caso, añadiendo á la lateral el área de la base ó de las bases respectivamente.

Si la pirámide ó el trozo de pirámide es irregular, se hallará su área sumando la de todas sus caras.

La superficie de toda pirámide ó trozo de pirámide regular ó irregular puede siempre *desarrollarse sobre un plano.*

156. Calcular el área de una pirámide regular.

Suponiendo la apotema igual á 12 metros y que el lado del triángulo equilátero de su base es de 2 metros y medio, su perímetro será de 7 metros y 50 centímetros, y tendrémos:

Area lateral de la pirámide	$7{,}5 \times 6 = 45$	metros cuadrados.	
Area de su base. . . .	$2{,}5 \times 1{,}082 = 2{,}70$	id.	(**)
Area total de la pirámide.	47,70	metros cuadrados.	

157. Hallar el área de un trozo de pirámide exagonal regular cuyos datos son:

Apotema del poliedro, 10 metros.
Lado de la base mayor 5 metros; y su apotema 433 centímet.
Lado de la base menor 2 metros; y su apotema 173 centímet.

Luego el perímetro de la base mayor será igual á 30 metros, y el de la menor á 12 metros.

Segun esto, tendrémos

Area lateral del poliedro. . . .	110	metros cuadrados.
Area de la base mayor.	64,95	id.
Area de la base menor.	10,38	id.
Area total del poliedro.	285,33	metros cuadrados.

(*) Entiéndese por *área lateral*, el área de sus caras laterales.

(**) La altura de este triángulo equilátero se halla multiplicando la mitad de su lado por la raiz cuadrada de 3, ó sea por 1,732; puesto que es un cateto de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa y el otro cateto son conocidos.

Prismas.

158. Se llama PRISMA el poliedro que tiene por bases dos polígonos iguales y paralelos, siendo todas las demas caras paralelógramos.

Tales son los que representan las figuras 108, 109 y 110.

Altura del prisma es la distancia entre sus bases.

Las aristas laterales de un prisma son iguales.

Llámase *prisma recto* el que tiene sus aristas laterales perpendiculares á las bases; y *prisma oblícuo* aquel cuyas aristas laterales son oblícuas á los planos de ambas bases.

Un prisma se llama *regular*, cuando es recto y sus bases son polígonos regulares; y se llama *irregular* si le falta alguna de estas dos circunstancias (*).

El prisma recibe diferentes nombres segun la figura de sus bases, así decimos prisma *triangular*, *trapecial*, *rombal*, *pentagonal*, etc., segun que sus bases sean triángulos, trapecios, rombos, pentágonos, etc.

Cuando las bases son paralelógramos, se llama *paralelepípedo*, y si estos paralelógramos son rectángulos, el paralelepípedo se llama rectangular.

Cubo es el paralelepípedo cuyas seis caras son cuadrados.

159. Todo prisma puede descomponerse en tantos prismas triangulares como lados tiene la base, ó en tantos como lados tiene ménos dos.

En efecto, si dividimos ambas bases en triángulos respectivamente iguales, y tantos en cada una como lados tiene, los planos secantes, que pasan por dos rectas homólogas ó correspondientes de una y otra base, nos darán la primera descomposicion del prisma. La segunda resulta de dividir ambas bases en tantos triángulos, cada una como lados tiene ménos dos, y trazar despues los planos secantes por las rectas de division.

Las caras laterales opuestas de todo paralelepípedo son iguales y paralelas.

(*) Las caras laterales de un prisma regular son rectángulos iguales. Un trozo de prisma de bases no paralelas se llama *prisma truncado*.

160. El *área lateral de un prisma oblícuo* es igual al producto de una de sus aristas laterales por el perímetro de una seccion perpendicular á dicha arista.

El *área lateral de un prisma recto* es igual al producto de una de sus aristas laterales por el perímetro de su base.

El *área total* se halla, agregando á la lateral la de las bases.

La superficie lateral ó total de todo prisma recto ú oblícuo, regular ó irregular, puede siempre *desarrollarse sobre un plano.* El desarrollo de la superficie lateral de un prisma recto es un paralelógramo rectángulo de su misma altura y cuya base es igual al perímetro de la base del prisma.

161. Calcular los metros de papel pintado que se necesitan para cubrir las paredes de un salon.

Siendo la forma del salon la de un paralelepípedo recto, se hallará su área lateral, ó sea la de sus paredes, multiplicando el perímetro de su base por su altura.

Siendo la longitud ó largo del salon..	15 metros,
y la latitud ó ancho..................	10 metros,
El perímetro del suelo será igual á....	50 metros.
Altura del salon..................	7 metros.

Luego el *área lateral* pedida será..... 350 metros cuadrados.

Y suponiendo que las piezas de papel pintado tienen 6 decímetros de ancho, se necesitarán

$$\frac{350}{0{,}6}=583{,}3 \text{ metros de papel.}$$

162. Hallar el área de un prisma triangular regular.

Suponiendo la altura del prisma de 25 metros y el lado de su base de 5 metros y medio, su perímetro será igual á 16 metros y 50 centímetros, y tendrémos:

Area lateral del prisma $16{,}50\times25=$	412,50	metros	cuadrados.
Y como el área de cada base es igual á	13,10	»	» (*)
El *área total* pedida será.........	438,70	»	»

(*) El área de un triángulo equilátero se halla multiplicando el cuadrado de su lado por el número constante 0,433.

Poliedros regulares.

163. Llámanse *poliedros regulares* los que tienen las caras regulares é iguales, y los ángulos diedros y poliedros tambien iguales.

No hay más que cinco poliedros regulares; *tetraedro*, *exaedro*, *octaedro*, *dodecaedro* é *icosaedro*.

Todos estos poliedros se hallan gráficamente representados en la figura 111.

El *tetraedro* está formado por cuatro triángulos equiláteros iguales. Sus ángulos son triedros: tiene seis aristas y cuatro vértices.

El *exaedro* lo está por seis cuadrados iguales. Los ángulos son triedros: tiene doce aristas y ocho vértices.

El *octaedro* está terminado por ocho triángulos equiláteros iguales. Sus ángulos están formados por cuatro planos: tiene doce aristas y seis vértices.

El *dodecaedro* lo está por doce pentágonos regulares é iguales. Sus ángulos son triedros: tiene treinta aristas y veinte vértices.

El *icosaedro* está terminado por veinte triángulos equiláteros iguales. Sus ángulos están formados por cinco planos: tiene treinta aristas y doce vértices.

Vemos, pues, que tres de estos poliedros están terminados por triángulos; uno por cuadrados y otro por pentágonos.

164. *El área de un poliedro regular* es igual al producto del área de una de sus caras por el número de ellas.

Puesto que, siendo todas las caras iguales, basta conocer el área de una de ellas para tener el área total del poliedro.

Las áreas de estos poliedros se terminan aproximadamente multiplicando el cuadrado de su lado ó arista por el número que nos da la siguiente tabla:

Tetraedro.	Exaedro.	Octaedro.	Dodecaedro.	Icosaedro.
1,7320	6,0000	3,4640	20,6457	8,6600

Inversamente, dividiendo el área de uno de estos poliedros por el número correspondiente de la tabla anterior, el cociente que resulte será el cuadrado de su arista.

CUERPOS REDONDOS (*).

Cono.

165. Llámase CONO á un cuerpo redondo originado por la revolucion de un triángulo rectángulo que gira al rededor de uno de sus catetos, llamado *eje* del cono.

La hipotenusa del triángulo generador, ó sea el lado del cono describe la superficie cónica, y el otro cateto traza la base.

Si el lado del cono es igual al diámetro de su base, el cono se llama *equilátero.*

Toda seccion hecha en un cono por un plano paralelo á la base es un círculo menor que la base; y toda seccion que pasa por el eje es doble del triángulo generador.

Trozo de cono es la parte de cono comprendida entre su base y otro plano, que corte todos los lados.

Si la base y el plano secante son paralelos, el trozo de cono se llama de bases paralelas.

AabB es un trozo de cono de bases paralelas, figura 112.

166. *El área lateral de un cono* es igual á la circunferencia de su base por la mitad de su lado.

Puesto que se puede considerar el cono como una pirámide regular de infinito número de caras, infinitamente pequeñas.

La fórmula que expresa el *área lateral* de un cono es πRL; ó sea el producto del número constante 3,14159 por el lado del cono y por el rádio de su base.

El área total del cono se halla agregando á la lateral el área de la base (**).

El *área lateral* de un trozo de cono de bases paralelas es igual á las circunferencias de sus bases por la mitad de su lado. El *área total* se hallará agregando á la lateral el área de ambas bases.

(*) Llámanse *cuerpos redondos* los terminados por una superficie curva sola, ó cortada por un plano ó por dos planos paralelos.

(**) Siendo el *cono equilátero*, sus áreas lateral y total estarán expresadas por las fórmulas:

$$2\pi R^2 \quad y \quad 3\pi R^2$$

167. *El desarrollo de la superficie lateral de un cono sobre un plano* es un sector circular, cuyo rádio es el lado del cono, y su base un arco de la misma longitud que la circunferencia de la base del cono.

El desarrollo de la superficie total se obtiene agregando al sector anterior el círculo de la base del cono.

168. Hallar el área lateral de un cono.

Suponiendo el lado 15 metros, y el rádio de su base 10 metros, la circunferencia de la base será:

$$2\pi R = 2 \times 3{,}14159 \times 10 = 62{,}8318 \text{ metros.}$$

Luego el *área lateral* del cono resulta igual á

471,24 metros cuadrados;

Añadiendo á este número el área de la base, ó sean

314,16 metros cuadrados, tendrémos que

El *área total* será 785,40 metros cuadrados.

169. Calcular el área total de un trozo de cono de bases paralelas.

Datos:	Rádio de la base inferior....	10	metros.
	Rádio de la base superior....	5	id.
	Lado del trozo de cono.....	22	id.

La circunferencia de la base mayor será:

$$20 \times 3{,}14159 = 62{,}8318 \text{ metros,}$$

y la circunferencia de la base menor,

$$10 \times 3{,}14159 = 31{,}4159 \text{ metros.}$$

Luego el *área lateral* del trozo de cono resultará igual á

$$(62{,}8318 + 31{,}4159) \times 11 = 1036{,}725 \text{ metros cuadrados.}$$

Y siendo ademas el área de la base mayor igual á

$$3{,}14159 \times 100 = 314{,}159 \text{ metros cuadrados;}$$

y el área de la base menor igual á

$$3{,}14159 \times 25 = 78{,}540 \text{ metros cuadrados;}$$

El *área total* pedida será la suma de estos tres últimos resultados, ó sea 1429 metros cuadrados, aproximadamente.

Cilindro.

170. Cilindro es un cuerpo redondo, originado por la revolucion de un rectángulo, que gira al rededor de uno de sus lados llamado eje ó altura del cilindro.

El lado opuesto al eje describe la superficie cilíndrica, y los otros dos lados trazan las bases circulares, iguales y paralelas del cilindro, como se ve en la figura 114.

Toda seccion de un cilindro por un plano paralelo á la base es un círculo igual á la base; y toda seccion que pase por el eje es doble del rectángulo generador.

Si el lado del cilindro es igual al diámetro de la base, el cilindro se llama *equilátero*.

171. *El área lateral de un cilindro* es igual al producto de la circunferencia de su base por su lado ó altura.

Puesto que el cilindro puede considerarse como un prisma regular de infinito número de caras infinitamente pequeñas.

Fórmula que expresa el área lateral de un cilindro $2\pi RL$: es decir el doble producto del número constante 3,14159 por el lado del cilindro y por su rádio.

El *área total* se halla agregando á la lateral la de las bases (*).

172. *El desarrollo de la superficie cilíndrica sobre un plano* es un rectángulo cuya altura es la misma del cilindro y su base la circunferencia rectificada de la base del cilindro.

Agregando á este rectángulo las dos bases del cilindro, tendrémos el desarrollo total, figura 115.

173. Hallar el área de un cilindro.

Suponiendo la altura igual á 5 metros y el rádio de la base igual á 60 centímetros, la circunferencia de la base será:

$2 \times 3{,}14159 \times 0{,}60$ metros $= 3{,}7699$ metros cuadrados;

y por consiguiente, tendrémos:

Area lateral del cilindro $= 85{,}85$ metros cuadrados;

y su *área total* igual á 88,11 metros cuadrados.

(*) Si el cilindro es equilátero, las fórmulas de sus áreas lateral y total son las siguientes:

$$4\pi R^2 \quad \text{y} \quad 6\pi R^2$$

Esfera.

174. ESFERA es un cuerpo redondo, terminado por una superficie curva, cuyos puntos equidistan de otro interior llamado *centro*.

La esfera se considera engendrada por la revolucion de un semicírculo, que gira al rededor del diámetro, llamado *eje*.

Los extremos del eje se llaman *polos*.

Rádios de la esfera son las rectas que se dirigen desde el centro á la superficie esférica.

Toda seccion de la esfera hecha por un plano es un círculo.

Si la seccion pasa por el centro, se llama *círculo máximo*, porque su rádio es el de la esfera; y si no pasa, se llama *menor*.

Todas las circunferencias máximas de una misma esfera ó de esferas iguales, son iguales.

Todo círculo máximo divide á la esfera en dos partes iguales, que se llaman *hemisferios*.

Dos esferas son iguales cuando lo son sus rádios.

Se llama *plano tangente* de la esfera, el que toca á su superficie en un solo punto (*).

Segmento esférico es la porcion de esfera comprendida entre dos planos paralelos, que son sus bases.

175. *El área de la esfera* es igual á una circunferencia máxima por su diámetro, ó bien á cuatro veces el área de un círculo máximo.

La fórmula del área de la esfera es $4\pi R^2$;
es decir, 4 veces el producto del número constante 3,14159 por el cuadrado del rádio.

176. Las áreas de las esferas son como los cuadrados de sus rádios.

Por consiguiente, si el rádio de una esfera es duplo del rádio de otra, el área de la primera será cuatro veces mayor que la de la segunda; y si el rádio de la una fuese 10 veces mayor que el de la otra, el área de aquella sería 100 veces mayor que el área de ésta.

(*) Todo plano tangente de la esfera es perpendicular al rádio correspondiente al punto de contacto, y recíprocamente.

177. Resolver los siguientes problemas numéricos referentes al área de la esfera:

1.° *Calcular el importe de la tela que se necesita para hacer un globo de forma esférica de* 10 *metros de rádio*, siendo el precio de cada metro cuadrado 50 céntimos de peseta.

El área del globo, ó sea la cantidad de tela necesaria para su construccion, se determina por la fórmula:

$4\pi R^2 = 4 \times 3{,}14159 \times 100 = 1256{,}636$ metros cuadrados, cuyo número multiplicado por 50 céntimos de peseta nos dará resuelto el problema.

2.° *Hallar el área de la Tierra en leguas cuadradas:*

Suponiendo la Tierra perfectamente esférica y su rádio de 1145 leguas, tendrémos para su *área:*

$4 \times 3{,}14159 \times 1145 \times 1145 = 16474812$ leguas cuadradas.

3.° *Si la circunferencia máxima de una esfera tiene* 10 *metros de longitud*, ¿cuál será el área de la esfera?

El área de un círculo máximo de esta esfera resultará igual á 7,95 metros cuadrados; y por consiguiente, cuatro veces este número expresará el área de la esfera.

4.° *Cuántas veces es mayor el área del Sol que la de la Tierra*, sabiendo que el rádio solar es 112 veces mayor que el terrestre?

El número pedido será el cuadrado de 112, ó sea 12544.

5.° *Conocida el área de una esfera hallar su rádio.*

Sea el área de la esfera igual á 100 metros cuadrados.

Dividiendo este número por 4, resultará para el área de un círculo máximo 25 metros cuadrados.

Luego si dividimos este resultado por π, y extraemos del cociente la raíz cuadrada, quedará resuelto el problema.

6.° *Calcular el área de la zona tórrida de nuestro globo* (*).

Basta multiplicar la circunferencia máxima terrestre por 5070 kilómetros, que es la distancia entre los planos de los trópicos que limitan dicha zona.

(*) *El área de una zona* es igual á la circunferencia máxima de la esfera por la altura de la zona, ó sea por la distancia entre sus dos bases.

Volúmenes de los poliedros.

178. Llámase VOLÚMEN DE UN CUERPO la medida de su extension.

La unidad de volúmen es el cubo, cuyo lado ó arista es la unidad lineal, como un metro, un decímetro, un pié, una pulgada, etc.

Los cuerpos geométricos que tienen igual volúmen se llaman *equivalentes.*

179. *El volúmen de un paralelepípedo recto* es igual al área de su base por su altura.

Esta proposicion se deduce fácilmente de la figura 117.

El *volúmen de un cubo* es igual á la tercera potencia de su lado (*).

El volúmen de un paralelepípedo cualquiera es igual al área de su base por su altura.

El paralelepípedo dado puede transformarse en otro equivalente recto, de igual altura, y cuya base tenga la misma área que la del paralelepípedo propuesto, como se ve en la figura 118.

El volúmen de un prisma triangular es igual al área de su base por su altura.

Porque todo paralelepípedo puede descomponerse en dos prismas triangulares equivalentes de igual altura, y cuyas bases sean la mitad de la del paralelepípedo.

El volúmen de un prisma cualquiera es igual al área de su base por su altura.

Fúndase esta regla en que todo prisma puede descomponerse en otros triangulares de la misma altura, y cuyas bases compongan juntas la del prisma total.

El volúmen de una pirámide triangular, ó sea un *tetraedro*, es igual al área de su base por el tercio de su altura.

Puesto que todo prisma triangular puede dividirse siempre en tres pirámides equivalentes, segun indica la figura 120.

(*) En esto se funda el nombre de *cubo* que se da en la Aritmética á la tercera potencia de un número.

El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al área de su base por el tercio de su altura.

Pues, descomponiendo la pirámide en otras triangulares de su misma altura, la suma de los volúmenes de éstas nos dará el volúmen de la pirámide total.

El volúmen de un poliedro cualquiera se halla descomponiéndole en otros poliedros, cuyo volúmen pueda determinarse por las reglas anteriores, y sumando despues los volúmenes de estos poliedros parciales.

El volúmen de un poliedro regular es igual al tercio del producto de su área por su apotema.

Pues los poliedros regulares pueden considerarse formados por pirámides iguales, cuyas bases son las caras, y su vértice comun el centro del poliedro,

180. *Son notables las equivalencias que siguen* :

Los prismas que tienen la misma altura y bases equivalentes.

Las pirámides que tienen la misma altura y bases equivalentes.

Toda pirámide es la tercera parte de un prisma de la misma altura y base equivalente.

Segun esto, será fácil reducir un paralelepípedo oblícuo á otro recto, y un prisma cualquiera á otro de diferente base.

181. Comparacion de los volúmenes de los poliedros:

Los volúmenes de los poliedros semejantes (*) son entre sí como los cubos de sus aristas y rectas homólogos.

Si las aristas del uno son dobles de las del otro, el volúmen del primero será $2 \times 2 \times 2$ veces mayor que el del segundo.

Los volúmenes de los poliedros regulares de igual número de caras tienen la misma razon que los cubos de sus aristas.

Si la arista de un cubo ó de un icosaedro regular es 4 veces mayor que la de otro, el volúmen del primero será 64 veces mayor que el volúmen del segundo.

Por esto, un metro cúbico tiene 1000 decímetros cúbicos.

(*) Llámanse *poliedros semejantes* los que tienen todas sus caras respectivamente semejantes, é iguales sus ángulos diedros y poliedros.

Los poliedros semejantes tienen sus aristas homólogas proporcionales.

Los poliedros regulares de igual número de caras son siempre semejantes.

Problemas numéricos relativos á los volúmenes de los poliedros.

182. Resolver los siguientes problemas numéricos relativos á los volúmenes de los poliedros:

1.° *Calcular el número de metros cúbicos de agua que contiene un estanque* cuyas dimensiones son conocidas.

Suponiendo el estanque de la forma de un paralelepípedo, y sus dimensiones de 250 metros de longitud, 180 de ancho y 2 metros y medio de profundidad, tendrémos:

Area de la base, ó sea del fondo del estanque,

$$250 \times 180 = 45000 \text{ metros cuadrados;}$$

y como la altura ó profundidad es de 2 metros y medio, tendrémos para el volúmen del estanque 112500 metros cúbicos.

2.° *Cuál es el volúmen de una pirámide*, cuya base sea una hectárea y su altura igual á 150 metros?

Multiplicando los 10000 metros cuadrados del área de la base por el tercio de la altura del poliedro, tendrémos para su volúmen 500000 metros cúbicos.

3.° *Hallar el volúmen de un desmonte de* 500 *metros de longitud*, suponiendo que el ancho del camino es de 5 metros, la altura del desmonte de 2 metros y medio, y su ancho por la parte superior de 8 metros.

La tierra que hay que desmontar forma un prisma trapecial cuya altura es de 500 metros; y como el área de su base es igual á la suma de 5 metros y 8 metros, multiplicada por la mitad de 2 y medio, tendrémos.

Area de la base $13 \times 1{,}25 = 16{,}25$ metros cuadrados.

Longitud del desmonte ó altura del prisma 500 metros.

Luego el volúmen pedido será 8125 metros cúbicos.

4.° *Hallar el volúmen de un trozo de pirámide de bases paralelas* (*).

Siendo 15 metros su altura y 2 y 8 metros cuadrados respectivamente el área de sus bases; como el término medio entre estos últimos números es 4, tendrémos para el volúmen que se pide: 5 metros $\times$ 14 metros cuadrados, ó sean 70 metros cúbicos.

(*) El volúmen de este poliedro es igual al tercio de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre ellas.

Volúmenes de los cuerpos redondos.

183. *El volúmen de un cono* es igual al producto de su base por el tercio de su altura.

Porque puede considerarse el cono como una pirámide regular de infinito número de caras.

Fórmula del volúmen de un cono $\frac{1}{3}\pi R^2 A$ (*)

El volúmen de un cilindro es igual al producto de su base por su altura.

El cilindro se considera tambien como un prisma recto de infinito número de caras, y por consiguiente, los volúmenes de uno y otro cuerpo se determinan del mismo modo.

Fórmula del volúmen de un cilindro $\pi R^2 A$

Todo cono es la tercera parte de un cilindro de igual base y altura.

El volúmen de una esfera es igual al producto de su área por el tercio del rádio.

La esfera puede considerarse como un poliedro regular terminado por un número infinito de caras, ó bien compuesto de conos, cuyos vértices están en el centro de la esfera, y cuyas bases infinitamente pequeñas constituyen la superficie esférica.

Fórmula del volúmen de la esfera $\frac{4}{3}\pi R^3$

184. Comparacion de los volúmenes de los cuerpos redondos:

Los volúmenes de los conos ó cilindros semejantes son entre sí como los cubos de sus rádios, ó de sus alturas (**).

Los volúmenes de las esferas son entre sí como los cubos ó terceras potencias de sus rádios.

Si el rádio de la esfera es 3 veces mayor que el de la otra, el volúmen de la primera será 27 veces mayor que el de la segunda.

(*) *El volúmen de un trozo de cono de bases paralelas* es igual al tercio de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre ellas, ó sea

$$1/3\,\pi A\,(R^2+r^2+Rr)$$

(**) Llámanse *conos ó cilindros semejantes* los que tienen proporcionales sus alturas y los rádios de sus bases. Las *esferas* siempre son *semejantes*.

Problemas numèricos relativos á los volúmenes de los cuerpos redondos.

185. Resolver los siguientes problemas numéricos relativos á los volúmenes de los cuerpos redondos:

1.° *Hallar el volúmen de un cono de sal*, cuya altura es de 15 metros, y el rádio de su base de 12 metros.

Area de la base $\pi R^2 = 452,389$ metros cuadrados.

Luego el volúmen del cono será 2261,945 metros cúbicos.

Teniendo un metro cúbico 1000 decímetros cúbicos, y siendo un decímetro cúbico la capacidad de un litro, el cono propuesto contendrá 2261945 litros de sal.

2.° *Calcular la capacidad de un pozo cilíndrico*, cuyo diámetro es de 5 metros, y su profundidad de un hectómetro.

Área de la base $\pi R^2 = 3,14159 \times 2,5 \times 2,5 = 19,63494$ metros cuadrados, cuyo número, multiplicado por la profundidad del pozo, nos dará la capacidad pedida.

3.° *Hallar el volúmen de la Tierra en kilómetros cúbicos.*

Siendo la fórmula del volúmen de la esfera $\frac{4}{3}\pi R^3$, tendrémos

$^4/_3$ de $3,14159 \times 6366 \times 6366 \times 6366$ kilómetros cúbicos.

4.° *Cuántas veces es mayor el Sol que la Tierra?*

La razon de los volúmenes de dos esferas es la misma que la de los cubos de sus rádios; y por consiguiente, siendo el rádio del Sol 112 veces mayor que el de la Tierra, el volúmen del Sol será 1404928 veces mayor que nuestro globo.

5.° *Cuántos kilógramos pesarán dos esferas, una de oro y otra de plata*, suponiendo que el rádio de la primera es igual á 1 decímetro y el de la segunda á 2 decímetros?

Volúmen de la esfera de oro:

$^4/_3\pi R^3 = 4,18878 \times 1 = 4,18878$ decímetros cúbicos;

y como cada decímetro cúbico de oro fundido pesa 19,258 kilógramos, la *esfera de oro* pesará 80,667 kilógramos (*).

Lo mismo se calcula el peso de la esfera de plata, sabiendo que un decímetro cúbico de este metal pesa 10,474 kilógramos.

(*) Un decímetro cúbico de agua pura pesa 1 kilógramo.

Ejercicios referentes á la Geometría del espacio.

Por un punto dado en un plano ó fuera de él, ¿cuántos otros planos podrán trazarse perpendiculares, oblícuos ó paralelos al plano primero?

Por una recta perpendicular, oblícua ó paralela á un plano, ¿cuántos otros pueden pasar perpendiculares á este plano?

Cuántos puntos determinan una superficie esférica?

Trazar por dos puntos dados sobre la superficie esférica una circunferencia máxima.

Suponiendo perfectamente esférica la superficie del mar, ¿á qué distancia se verá un faro colocado á 50 metros de altura sobre el nivel del agua, sabiendo que el rádio terrestre tiene una longitud aproximada de 6366198 metros?

Formar una tabla del número de aristas, caras y vértices de los cinco poliedros regulares.

Calcular las áreas de los cinco poliedros regulares, suponiendo su lado ó arista igual á 50 centímetros.

Cuál será la arista de cada uno de los cinco poliedros regulares, suponiendo su área igual á 10 metros cuadrados?

Representar sobre un plano el desarrollo de la superficie de los poliedros regulares, cuya arista sea de 5 centímetros.

Hallar el área de un trozo de pirámide de bases paralelas, cuya apotema es de 10 metros y el lado de sus bases cuadradas, 5 y 3 metros respectivamente.

Cuál es el lado de la base de una pirámide triangular regular cuya área lateral sea de 10,65 metros cuadrados, y su apotema de 2,25 metros?

Calcular el área lateral y total de un cono, siendo el rádio de la base 10 metros, y la altura del cono 25 metros y medio.

Suponiendo igual á un metro la circunferencia de la base de un cono y su altura de dos metros y medio, ¿cuál será su lado y cuál su área lateral y total?

Hallar el rádio de un cono equilátero conocida su área total.

Calcular el área lateral y total de un cilindro, siendo el rádio de la base 10 metros y la altura del cilindro 25 metros y medio.

Suponiendo igual á un metro la circunferencia de la base de un cilindro y su altura de dos metros y medio, ¿cuál será su área lateral y total?

Hallar el rádio de un cilindro equilátero conocida su área lateral ó total.

Comparar las áreas lateral y total del cono y de cilindro equiláteros con el área de la esfera, en el supuesto de tener todos estos cuerpos el mismo rádio.

Hallar los volúmenes de los cinco poliedros regulares, suponiendo su lado ó arista igual á 50 centímetros.

Calcular el lado de un cubo de doble volúmen que otro dado.

Suponiendo el volúmen de cada uno de los poliedros regulares igual á un metro cúbico, ¿cuál será su lado ó arista?

Hallar el volúmen de la más alta de la pirámides de Egipto que mide 145 metros de altura, siendo su base un cuadrado de 227 metros y medio de lado.

Calcular el número de ladrillos empleados en una pared que mide 145 metros de longitud, 1 metro y 50 centímetros de ancho y 5 metros de altura. Las dimensiones de los ladrillos son respectivamente 25, 10 y 2 centímetros.

Hallar el volúmen de un cono, suponiendo 10 metros el rádio de la base y la altura del cono 25 metros y medio.

Cuál será el volúmen del cilindro que tenga iguales dimensiones que las del cono del problema anterior?

Hallar el rádio de un cono equilátero, cuyo volúmen sea igual á un metro cúbico.

Calcular las dimensiones del hectólitro para áridos, cuya forma es la de un cilindro equilátero.

Hallar la cabida de una esfera cuya área sea igual á 100 metros cuadrados.

Si un cono, un cilindro y una esfera tienen igual rádio, ¿cuál será la altura de los primeros para que todos tres tengan igual volúmen?

Tomando por unidad el diámetro de la Tierra, el de la Luna es de 0,273, ¿cuántas veces será mayor el globo que habitamos que su satélite?

Considerando un cono y un cilindro equiláteros circunscriptos á una esfera, se verificará que: el área de la esfera es igual á la lateral del cilindro; que el volúmen del cilindro equivale á dos terceras partes del volúmen del cono, y que la esfera equivale á dos tercios del cilindro ó cuatro novenos del cono. Los volúmenes de los tres cuerpos son entre sí como sus áreas totales.

Hallar la cabida ó volúmen de una pipa de vino. Se considera compuesta de dos trozos de cono, unidos por su base mayor.

Cuál es el peso de una columna cilíndrica de mármol de 5 metros de altura y 60 centímetros de rádio? El peso específico del mármol es de 2,837.

Calcular el peso de los cinco poliedros regulares suponiendo de plomo el tetraedro, el octaedro y el icosaedro; el cubo de plata y de oro el dodecaedro. El lado ó arista de todos ellos se supone de cinco centímetros.

Una barra de hierro pesa 365 kilógramos, ¿cuál es su volúmen?

Qué volúmen ocupan 1810 kilógramos de aceite de olivo?

Cuál será el peso de una esfera de plata cubierta por una capa de oro de cinco milímetros de espesor, midiendo cinco centímetros el rádio total?

FIN DE LA GEOMETRÍA.

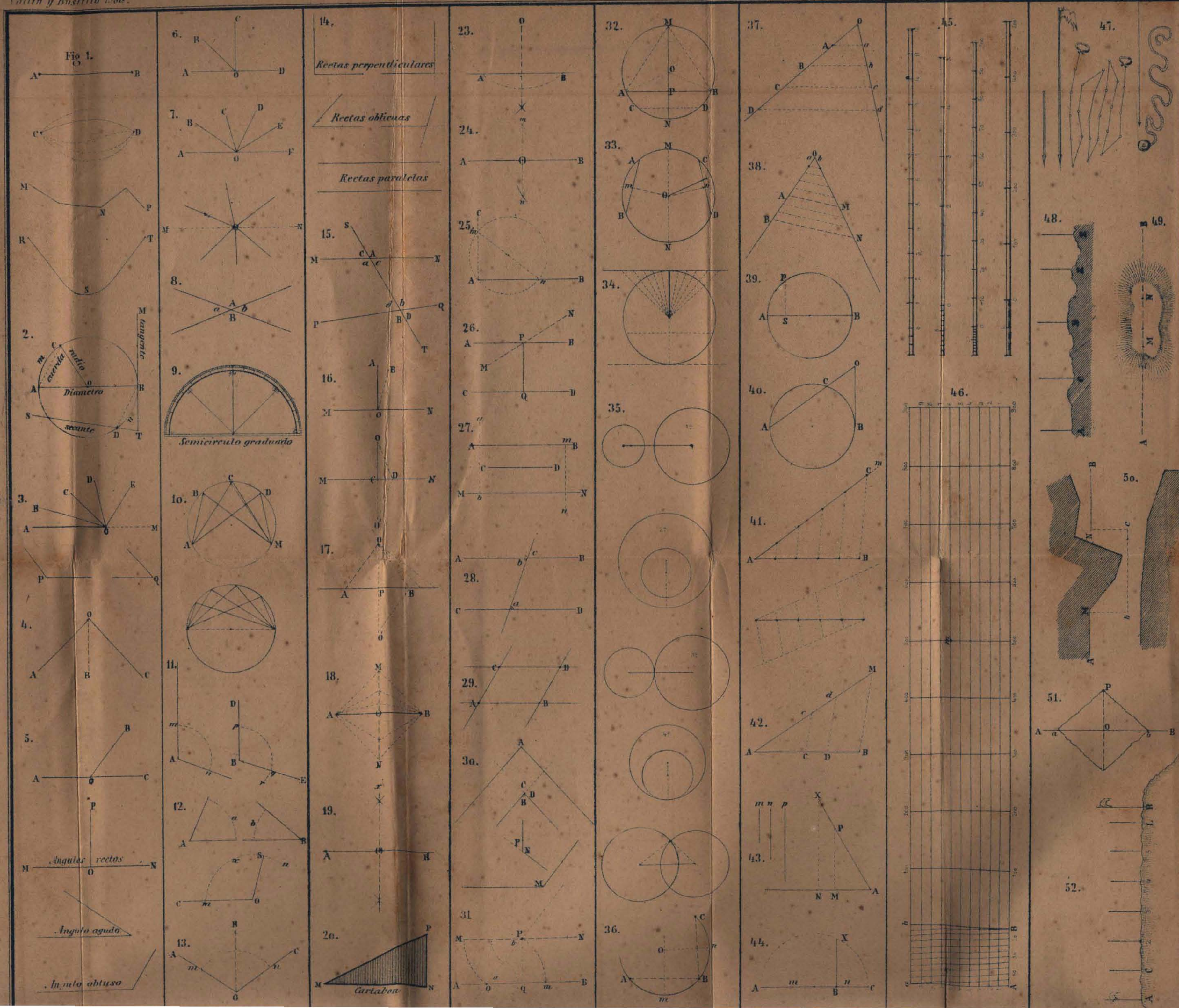
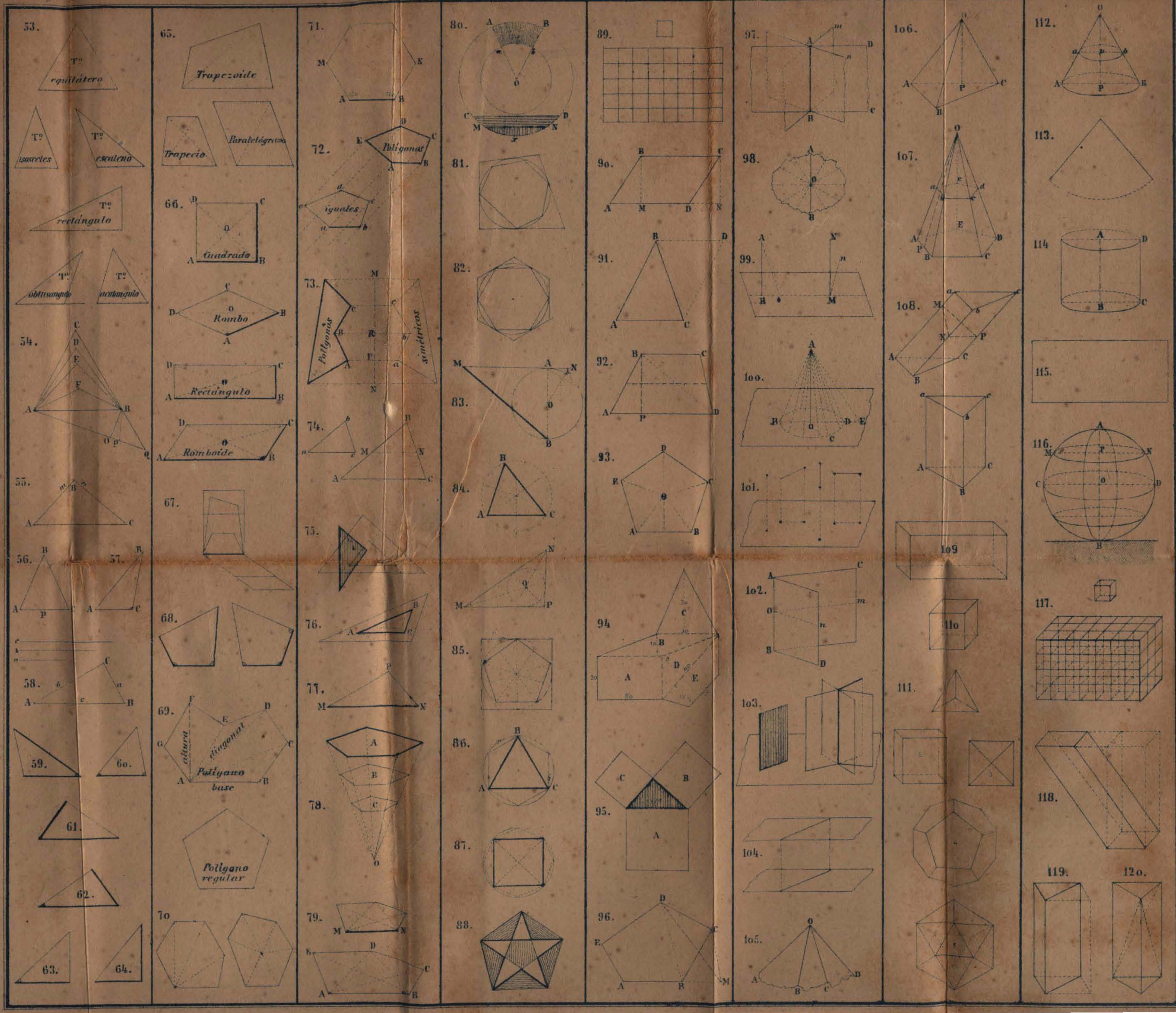


Fig 1.
tangente
cuerda
radio
Diametro
secante
Angulos rectos
Angulo agudo
Angulo obtuso
Semicirculo graduado
Rectas perpendiculares
Rectas oblicuas
Rectas paralelas
Cartabon

GEOMETRIA PARA LOS NIÑOS.



AGRIMENSURA

ó

Aplicaciones de la Geometría á la medicion de terrenos.

INSTRUMENTOS MAS USUALES.

1. **Piquetes, cadenilla y plomada.**—Llámanse *piquetes* á unos bastones de madera con punta de hierro, para que puedan clavarse en tierra, de uno ó dos metros de largo, divididos en decímetros y centímetros, y dispuestos á propósito para colocar en su parte superior un papel ó bandera, con objeto de verlos á grandes distancias. Si pasan de dos metros de altura se llaman *jalones*.

2. **La cadenilla** consta de cien eslabones de alambre grueso, de un decímetro de longitud. Termina en dos grandes anillos, y para compensar en la medida de cualquiera recta (que no sea vertical) el error originado por la curvatura inevitable de la cadena tendida, se le da un decímetro más de longitud, repartido convenientemente entre todos los eslabones.

Acompañan á la cadena cierto número de agujas de hierro de dos y medio á tres decímetros de longitud.

En lugar de la cadena se puede usar, y se usa con ventaja, una cinta preparada al efecto, de diez, veinte, veinticinco ó cincuenta metros, dividida en decímetros y centímetros.

3. **La plomada** es una pequeña pesa cónica sostenida por un hilo en el centro de su base. Cuando el otro extremo del hilo está sujeto y queda la plomada en reposo, la direccion del hilo es una *línea vertical* (*).

Un plano será *vertical* si se ajusta con el hilo de la plomada libremente suspendida. *Plano horizontal* es el plano perpendicular á la línea vertical.

(*) Llámase *línea vertical* de un punto la prolongacion del rádio terrestre correspondiente á dicho punto.

4. Los niveles señalan las líneas y planos horizontales, pudiendo determinarse por su medio la diferencia de altura, ó llámese de nivel, entre dos ó más puntos dados. Se dividen en niveles de *albañil*, de *agua* y de *aire*.

El nivel de albañil consiste en tres reglas de madera que forman un triángulo equilátero ó isósceles: la base tiene señalado el punto medio por una línea llamada de fe, y del vértice está sostenida una plomada. La base del triángulo será horizontal, si el perpendículo ó plomada coincide con la línea de fe.

El nivel de agua es un tubo de laton de un metro de longitud y 30 á 40 milímetros de diámetro, doblado perpendicularmente en sus extremos, donde recibe dos pequeños cilindros de cristal de 8 á 10 centímetros de altura.

El líquido que se introduce en el tubo de laton se eleva en los de cristal á una misma altura determinando así la línea horizontal.

El nivel de aire es un tubo de cristal cerrado herméticamente, de longitud variable, ligeramente convexo en su parte superior, ajustado á una plancha de metal y casi lleno de espíritu de vino ú otro licor no expuesto á congelarse.

El aire, en virtud de la diferencia entre su peso específico y el del líquido del tubo, ocupa la parte superior de éste, formando una pequeña burbuja cuya posicion indica si el instrumento está ó no horizontal.

Acompañan á los niveles unos jalones con una tablilla cuadrada ó circular pintada de diferentes colores, que puede moverse en sentido vertical á lo largo del jalon y fijarse en él por medio de un tornillo. Estos jalones se llaman *miras*.

5. **El cartabon** ó *escuadra de agrimensor* es un prisma octogonal regular, ó tambien un cilindro, que suele tener un decímetro de altura y cinco centímetros de diámetro.

En las caras del prisma, ó en otro caso en la superficie cilíndrica, hay ocho aberturas longitudinales para dirigir, por cada dos opuestas visuales á los objetos, pudiéndose formar de este modo ángulos de 45°, de 90° y de 135°.

La base del instrumento tiene un pequeño cilindro hueco, para colocarlo sobre un piquete ó un trípode, girando así al rededor de su eje (*).

(*) Con la *escuadra perfeccionada* pueden formarse ángulos de cualquiera número de grados, puesto que al rededor de la superficie cilíndrica se halla dividida la circunferencia de una seccion paralela á la base en 360°.

6. Llámase **plancheta** una tabla de cinco decímetros en cuadro, poco más ó ménos, perfectamente plana por su parte superior y colocada sobre un trípode de modo que pueda tomar la posicion horizontal, la vertical ó la inclinada que se quiera. En el plano superior de la tabla se pega una hoja de papel.

Acompaña á la plancheta una *alidada*, ó sea una regla de madera ó de bronce con dos *pínulas* en los extremos, dispuestas para dirigir por ellas visuales á los objetos lejanos.

Las pínulas se sustituyen ventajosamente con un *anteojo*.

7. **Brújula** es una aguja ó flecha de acero imantada y colocada en equilibrio sobre un estilo ó eje vertical, fijo en el centro de un círculo, cuya circunferencia, dividida en grados y medios grados, se llama *limbo*. Dos niveles de aire colocados en el plano de la brújula señalan cuando el limbo está ó no horizontal.

La aguja y su limbo están encerrados en una caja cuadrada, cubierta por la parte superior con un cristal. En uno de los lados de la caja, paralelamente á la graduacion 0... 180° del limbo, hay un anteojo con movimiento vertical.

Todo el aparato se coloca sobre un trípode para moverle alrededor de su centro, sin perder el limbo la posicion horizontal.

La aguja imantada se convierte en un iman artificial y adquiere todas las propiedades de los naturales: así la brújula en equilibrio, ó libremente suspendida, se dirige hácia un mismo punto del horizonte racional, formando un ángulo constante con el meridiano. Este ángulo del meridiano magnético con el meridiano verdadero ó del mundo, se llama *declinacion de la brújula* (*).

8. El **grafómetro** es un semicírculo graduado de metal y de un decímetro de rádio, con dos alidadas, fija la una en la direccion 0... 180° del limbo, y la otra movible alrededor del centro del semicírculo. El grafómetro se coloca sobre un trípode, y puede girar en todas direcciones: algunos grafómetros tienen brújula y niveles.

Si en vez de un semicírculo se compone de dos planchas circulares bien ajustadas entre sí, de las cuales la inferior lleva la graduacion, ó sea el limbo, y la superior es la alidada juntamente con un semicírculo vertical tambien graduado, para apreciar á un mismo tiempo los ángulos horizontales y verticales, el instrumento recibe entónces el nombre de *teodolito*.

(*) Las brújulas que usan los marinos son de limbo movible.
Llámase *meridiana de un lugar* la interseccion de su meridiano con el plano horizontal de dicho punto. Por su medio se determinan los puntos cardinales N., S.; E. y O., juntamente con la *rosa náutica ó de los vientos*.

Alineaciones y medicion de distancias.

9. Ocurre con frecuencia determinar sobre un terreno *la alineacion de dos puntos*, ó sea señalar otros varios, que se hallen en la misma direccion que los dos dados.

Sean los puntos dados A y B en la figura 48.

Colóquense en dichos puntos dos jalones ó piquetes lo más verticalmente que sea posible, y en el punto C otro piquete tambien vertical, de modo que mirando por A y C se oculte B.

Repitiendo la misma operacion en los puntos D, E, etc., tendrémos la alineacion pedida.

La alineacion se puede prolongar cuanto se quiera.

Si entre los puntos dados hay un terreno elevado, se plantarán, ademas de los jalones A y B, otros dos intermedios, de modo que estén en línea recta con A, y tambien con B, segun indica la figura 49. Hecha esta operacion, muy fácil por tanteo, queda este caso reducido al anterior.

Los jalones todos estarán en su verdadera posicion, cuando cada uno se halle en la alineacion de otros dos.

Si en la alineacion se encuentra algun obstáculo, como sucede al construir nuevos edificios en una calle quebrada y estrecha, como la que representa la figura 50, se levanta á la recta AM una perpendicular M*b* y á ésta otra nueva perpendicular *bc*. Por *c* se tira la *c*N perpendicular á *bc* é igual á M*b*, y por último, la NB perpendicular á esta última perpendicular será la alineacion pedida.

10. *Trazar una perpendicular á una recta dada.*

Si el punto dado es O, figura 51, se tomarán las distancias iguales O*a* y O*b*, y fijando en *a* y *b* los extremos de una cuerda, el punto medio P, que resulte lo más distante posible de AB, será el segundo punto de la perpendicular que se pide.

Siendo P el punto dado, se fijará en él el medio de la cuerda, y sus extremos nos darán los puntos *a* y *b* equidistantes de P. Llevando ahora la cuerda por la parte inferior de AB, su punto medio nos dará el segundo punto de la perpendicular pedida.

Tambien se puede determinar un segundo punto de la perpendicular, dividiendo la distancia *ab* en dos partes iguales (*).

(*) Este problema se resuelve fácilmente con la *escuadra de agrimensor*.

11. *Trazar una paralela á una recta dada.*

Trácese por el punto dado una perpendicular á dicha recta, y por el mismo punto otra perpendicular á esta última perpendicular, y tendrémos la recta pedida.

12. *Medir la distancia entre dos puntos dados.*

Se hace la alineacion entre dichos puntos separando los piquetes entre sí una distancia igual á la longitud de la cuerda, cadena ó cinta (que suponemos de 25 metros), y de este modo fácilmente se averiguará la distancia total AB. En la figura 52 tendrémos:

AB=6 veces AC+LB=150 metros+10 metros=160 metros.

Si el terreno no es horizontal, al hacer la alineacion se cuidará de dar á la cadena ó cinta entre cada dos piquetes, la misma posicion de la recta AB, ó una posicion paralela á ella.

Cuando la distancia entre los puntos dados es muy considerable, puede calcularse fácilmente por la velocidad del sonido multiplicando por 340 metros los segundos que median desde el momento de percibir en uno de sus extremos el fogonazo de una arma de fuego disparada en el otro, hasta que se oye el ruido del disparo.

13. *Medir ó calcular la altura de una torre.*

Suponiendo el terreno llano y accesible el pié de la torre, cuya altura nos proponemos averiguar, se colocan verticalmente dos jalones en alineacion con la torre, de modo que la distancia entre ellos sea casi igual á su diferencia de altura, y que la visual que pase por el extremo del jalon menor y por el extremo de la torre toque ademas en el otro jalon.

Midiendo luégo la distancia desde el jalon menor al pié de la torre, la semejanza de los dos triángulos que resultan de esta operacion nos dará fácilmente, por la proporcionalidad de sus lados, la altura de la torre.

Otro procedimiento facilísimo consiste en medir la sombra de la torre y la de un piquete, jalon ú otro objeto cualquiera colocado en posicion vertical, formando en seguida esta proporcion: Sombra del jalon es á la sombra de la torre, como la altura del jalon es á la altura de la torre (*).

(*) *La reflexion de la luz* se emplea tambien en la resolucion de este problema, colocando un espejo horizontal entre la torre y el observador.

Medir un ángulo en el terreno.

14. En la resolucion de este problema pueden emplearse la escuadra de agrimensor perfeccionada, la plancheta, la brújula, el grafómetro ó el teodolito.

Con la *escuadra de agrimensor* basta colocarla en el vértice del ángulo, de modo que el diámetro 0... 180°, siga la direccion de uno de sus lados, en cuyo caso la vertical dirigida por el otro lado señalará el número de grados del ángulo cuya medida se trata de averiguar.

La plancheta se coloca tambien en el vértice del angulo, cuidando de que la posicion del tablero sea poco más ó ménos paralelo á sus lados. Hecho esto, por el centro del tablero se dirigen por medio de la alidada dos visuales, que coincidan respectivamente con las rectas del terreno, y el ángulo que forman dichas visuales, trazadas con lápiz sobre el papel, será el ángulo pedido. El ángulo del tablero se mide con el trasportador ó semicírculo.

Con *la brújula* se miden los ángulos que forman las dos rectas del terreno con el meridiano magnético, que permanece constante en un mismo punto, y la suma ó la diferencia, segun los casos de estos ángulos, será la medida del ángulo propuesto.

La contínua movilidad de la aguja no permite apreciar con toda precision los ángulos observados, y por eso se emplea únicamente en operaciones que no exijan una grande exactitud.

El uso del *grafómetro* para la medicion de ángulos en el terreno se reduce á dirigir desde el vértice del ángulo dos visuales en la direccion de sus lados, correspondiendo una de ellas con el diámetro 0... 180° de la graduacion del instrumento, en cuyo caso, la otra visual determinará, en el limbo del semicírculo, el número de grados del ángulo propuesto.

El teodolito se usa de una manera análoga al grafómetro, pudiendo, sin embargo, observarse á un mismo tiempo ángulos horizontales, verticales y oblícuos al horizonte ó inclinados, sin variar en nada su posicion (*).

(*) Para comprobar todos los instrumentos destinados á la medida de ángulos se observan ó miden en el terreno los tres ángulos de un triángulo, y si la suma es precisamente igual á 180° el instrumento será exacto.

Nivelacion.

15. La nivelacion tiene por objeto determinar la diferencia de altura vertical entre dos ó más puntos del espacio, y más particularmente de los que constituyen la superficie terrestre.

Las líneas verticales de dos puntos que no disten demasiado, se pueden considerar como paralelas sin error sensible.

Se ha elegido por nivel constante para referir á él la altura vertical de todos los puntos de la superficie del globo, el que forma la superficie del mar á marea media, es decir entre el flujo y reflujo.

Con el *nivel de albañil*, convenientemente graduado, se determina con facilidad el ángulo que forma una recta con el horizonte. Una pendiente de 2, 3, 4, 5, etc., quiere decir que por cada 100 unidades de longitud horizontal corresponden 2, 3, 4, 5, etc., de altura ó pendiente.

Para hallar *la pendiente de un camino* ó de un terreno inclinado cualquiera, se coloca el nivel sobre un trípode en uno de sus extremos, y en el otro un piquete de igual altura que el trípode, y dirigiendo una visual por la base del nivel al extremo superior del piquete, el número de divisiones que el perpendículo ó plomada se separa del punto medio de la base, determinará la pendiente que se busca.

16. Para determinar *la diferencia de nivel* entre dos puntos A y B que no disten demasiado con los niveles de agua ó de aire, se coloca el nivel en un punto intermedio, y en los puntos A y B dos miras verticales.

El observador dirige desde el nivel una visual horizontal en direccion de A, y manda levantar ó bajar la tablilla, hasta que su punto medio coincida con dicha visual. Esta misma operacion se repite dirigiendo la visual en direccion de B.

Medidas luégo las acotaciones de ambas miras, es evidente que su diferencia nos dará la diferencia de nivel de los puntos A y B. El punto cuya mira tengan mayor altura está más bajo (*).

No es indispensable que el punto donde se pone el nivel se halle en alineacion de los puntos dados. Si el nivel es de aire con anteojo, puede suprimirse la tablilla de las miras anotando el mismo observador, al dirigir la visual horizontal, su altura sobre el cero ó pié de la mira.

(*) Cuando uno de los puntos es superior al plano del nivel y el otro es inferior, la suma de sus acotaciones nos dará la diferencia de nivel.

17. Cuando la distancia de los puntos cuya diferencia de nivel deseamos calcular es muy considerable y el terreno es quebrado, se emplea la *nivelacion compuesta*, que consiste en dividir la distancia total en dos, tres, etc., parciales, nivelando separadamente cada una de éstas.

Suponiendo los puntos dados A y F, se considera dividida esta distancia en las parciales AB, BC, CD y DF. Hecho esto, se nivelan los puntos A y B, luégo los C y D, y por último, los D y F, de cuyas diferencias de nivel respectivas fácilmente se deduce la de los puntos dados.

Para hallar más directamente el resultado final, se suman las alturas de las visuales dirigidas hácia el punto de partida, llamadas de *espalda*, se suman tambien las de *frente*, que serán dirigidas en sentido opuesto á las anteriores, y la diferencia de ambas sumas será el número pedido.

En la primera y última mira sólo se toma una altura; pero en todas las intermedias se toman dos.

Para comprobar toda la operacion, se repite ésta en sentido contrario, es decir, desde F hasta A, y si el resultado final es el mismo que anteriormente, se puede asegurar que ambas nivelaciones son exactas.

18. La nivelacion forma una parte muy principal de este problema: *Formar el proyecto de un camino y levantar su plano.*

Para lo primero se verifica la nivelacion aproximada del terreno en diferentes direcciones, para apreciar con el mayor número posible de datos la que ofrezca más positivas ventajas, no sólo relativamente á la distancia total del camino, sino tambien á sus mayores ó menores pendientes, curvas, terraplenes, etc.

Elegida ya la direccion más conveniente entre cada dos puntos principales, se practica la nivelacion exacta de la seccion longitudinal del camino y la de las secciones perpendiculares al eje, de decámetro en decámetro, de cuyos datos se deducen los desmontes y terraplenes que exige la pendiente de cada alineacion.

Para trazar el *plano del proyecto*, se miden sus diferentes alineaciones y los ángulos que forman entre sí, bastando estas notas para construir sobre el papel, mediante la escala que al efecto se adopte, la direccion del camino, ó sea su plano.

A este plano acompañan los de los perfiles trasversales, aunque en escala mayor, para apreciar los menores accidentes del terreno y determinar con más exactitud los desmontes y terraplenes, que no son otra cosa que prismas ó trozos de pirámide que tienen por bases las secciones trasversales, y por altura la distancia entre cada dos de ellas, ó sea un decámetro.

Escalas.

19. ESCALA es una recta dividida en partes iguales, que representan unidades lineales, como metros, kilómetros, millas, leguas, etc.

Basta la sola inspeccion de una escala cualquiera para comprender su construccion y su uso. La escala primera de la figura 45 expresa varas y piés, la segunda metros y decímetros, la tercera es de 100 kilómetros, y la cuarta de 500 millas.

En cualquiera de ellas es muy fácil tomar con el compás un número cualquiera de unidades menor que el total de la escala.

20. *Construir sobre una recta dada la escala de mil partes.*

Divídase la escala dada en 10 partes iguales segun indica la figura 46, y cada una representará 100 unidades de las 1000 que debe contener la recta total. Divídase la parte AB en otras 10, y cada una representará 10 unidades de las 1000 de la escala. En los puntos A, B, 100, 200, 300, etc., levántense perpendiculares á la recta dada; tómese en la primera una distancia arbitraria A*a* y divídase en diez partes iguales; por estos puntos de division trácense paralelas á la misma recta, y tirando por último las trasversales que unan los puntos de *ab* y AB, como indica la figura, quedará construida la escala pedida.

Para tomar en esta escala un número cualquiera de partes menor que 1000, por ejemplo 576, se pone una punta del compás en el punto *m* de interseccion de la línea 500 con la paralela 6, y la otra en el punto comun *n* de la trasversal 70 con la misma paralela 6.

En general, las unidades del número que se quiere tomar sobre la escala indican la paralela, cuyas intersecciones con las decenas y centenas determinan la longitud que se pide.

21. Los *planos topográficos* llevan siempre la escala á que se refieren, bien sea trazada gráficamente en la parte inferior del papel, ó expresada por medio de una unidad fraccionaria.

La escala $^1/_{500}$ quiere decir que las distancias del terreno ó del objeto que representa el dibujo ó plano son 500 veces mayores que las correspondientes ú homólogas del papel.

La escala llamada de *milímetros* facilita notablemente los cálculos y por su medio se determina inmediatamente la relacion entre el plano topográfico y el terreno que representa.

Levantamiento de un plano topográfico.

22. Llámase PLANO TOPOGRÁFICO la figura plana que representa con la mayor exactitud posible una pequeña extension de terreno, como una finca rústica, las márgenes de un rio, los alrededores de una ciudad, etc.

23. Las operaciones que constituyen el levantamiento de un plano topográfico son las siguientes: *triangulacion* del terreno, *determinacion de los detalles*, *nivelacion*, *orientacion*, *dibujo topográfico* y su *copia* ó *reduccion* á una escala determinada.

La triangulacion del terreno es la operacion más importante, porque de ella dependen todas las demas: consiste en formar sobre el terreno una serie de triángulos, á cuyos vértices y lados se refieran todos los detalles que deban representarse en el papel. Una buena triangulacion facilita extraordinariamente el levantamiento del plano, y siendo posible, se debe procurar que todos los triángulos tengan un vértice comun.

Señalados con banderas los puntos más notables del terreno, y fijada y medida una base de modo que desde sus extremos se vean dichos puntos, se coloca el grafómetro, la brújula ó la escuadra de agrimensor perfeccionada en dichos extremos, y midiendo los ángulos que forma la base con los puntos señalados de antemano, fácilmente se representarán en el papel triángulos semejantes á los del terreno, obteniendo así la triangulacion gráfica del plano, con arreglo á la escala correspondiente.

Usando la plancheta, sobre su mismo tablero, resulta trazada la triangulacion al señalar en el papel la direccion de las visuales respectivas á cada punto.

Trazados en el papel los puntos principales del terreno, los secundarios ó *detalles* se fijan directamente midiendo con la cinta las distancias que los determinan con relacion á los lados de la triangulacion, y trazando á pulso las sinuosidades del cauce de los rios, las pequeñas desviaciones de los caminos, las irregularidades de las costas, los accidentes del terreno, etc.

Si hubiere uno ó más edificios, se trazarán aparte y en mayor escala su *planta* y *alzado* (*).

(*) Llámase *replanteo* el trazado sobre el terreno de todos los detalles de la planta baja de un edificio, los cimientos de un puente, etc.

La *nivelacion* nos da á conocer las desigualdades del terreno por medio de las diferencias de nivel de sus puntos principales, que se marcan, bien sea escribiendo las cifras que expresan esas diferencias respecto de un plano general de comparacion, ó bien señalando por *curvas*, llamadas de *nivel*, todos los puntos que se encuentren á igual altura respecto de dicho plano general.

Para hallar aproximadamente la diferencia de nivel entre dos puntos muy distantes, como entre el fondo de un valle y la cima de una montaña, se emplean dos *barómetros*, multiplicando el número constante 13 metros por la diferencia en milímetros de las alturas de la columna barométrica respectiva.

El trazado de la direccion de la *meridiana* en un plano topográfico, es de gran importancia, por cuanto fija la posicion de todos los puntos del terreno con relacion á los puntos cardinales N., S., E. y O. La *brújula*, despues de corregida su declinacion, determina fácilmente la meridiana de un punto cualquiera, que es lo que se llama su *orientacion*.

El *dibujo topográfico* completa la parte geométrica del plano, representando convencionalmente los llanos, las montañas, las tierras labrantías, los pastos, el arbolado, los caminos ordinarios, juntamente con los rios, ferro-carriles, fortificaciones, puentes, edificios públicos y particulares, etc.

Los planos se copian poniendo encima una hoja de papel trasparente ó de tela, sobre la cual se puede reproducir el original con toda exactitud. Tambien se puede dividir el original y el papel de la copia en centímetros ó milímetros cuadrados, determinando despues á la simple vista el punto ó los puntos que hubiere en cada cuadrado.

La *reduccion de un plano* consiste en dibujarle en tamaño menor, pero conservando siempre la proporcion relativa de los detalles, obteniendo así una figura más pequeña, pero semejante á la que se quiere representar.

Basta para esto reducir convenientemente los cuadrados del original, en el papel destinado á la copia, pero sin alterar el número de ellos, de modo que si el lado de cada uno de los cuadrados del original es duplo del lado del cuadrado de la copia, ésta será cuatro veces menor que el plano dado (*).

(*) Se facilita de una manera notable la reduccion de los planos empleando el instrumento llamado *pantógrafo*.

Dibujo topográfico.

24. Para la mayor uniformidad en los dibujos topográficos, se han adoptado ciertas convenciones que facilitan su estudio, dividiéndose en cinco partes, á saber: *trazado lineal*, *curvas de nivel*, *lavado*, *escritura* y *memoria descriptiva.*

El trazado lineal debe hacerse con tinta de china, pasando con una pluma las líneas señaladas con lápiz en el trazado primitivo, del que formarán una parte muy principal los caminos, arroyos, rios, fortificaciones, puertos, edificios de todas clases, divisiones del cultivo y la representacion de los accidentes del terreno.

Las carreteras se indican por dos líneas paralelas muy finas; los caminos vecinales por una sola línea, y los ferro-carriles por dos líneas paralelas con otras muchas trasversales en toda la longitud del camino. En los rios y arroyos se trazan muy finas las orillas, y siguiendo las sinuosidades del cauce, se dibujan otras con tinta más suave hasta cubrir casi la totalidad del ancho del rio. Esto mismo se hace en los planos de las costas.

Los muros de toda clase de obras de fábrica y los contornos de los edificios se representan segun la forma de su base, trazando finas las líneas que reciben luz y más gruesas las restantes.

Las curvas de nivel se dibujan muy finas, casi imperceptibles; pero no así las de máxima pendiente, que marcan con su mayor ó menor grueso las desigualdades del terreno, la altura de las montañas, la extension de los valles y laderas, etc.

Al lavar un plano se empieza por las tierras de cultivo, despues se pasa á las huertas, jardines, viñas, y últimamente á las alamedas y bosques. Las aguas y los edificios es lo último que se lava, aquéllas con tinta azul muy clara, y éstos con carmin.

En la *escritura de los planos* no es arbitrario ni el tamaño de las letras, ni el carácter y posicion de los nombres de los caminos, rios, fuentes, caseríos, etc., debiendo escribirse del mismo modo los nombres de igual significacion é indicando el tamaño de la letra en los rios, montes, etc., su mayor ó menor importancia.

La *memoria* ó explicacion que siempre acompaña á los planos topográficos completa su estudio, con noticias referentes á la calidad de las tierras, á su division en tierras de regadío y de secano, al valor y produccion de unas y otras, etc.

BREVISIMAS NOCIONES

DE

MECÁNICA PRÁCTICA.

Preliminares.

1. Llámase MECÁNICA la ciencia que trata del equilibrio y movimiento de los cuerpos y de las causas que los producen.

Fuerza es toda causa que cambia ó tiende á cambiar el estado de reposo ó movimiento de los cuerpos.

Son fuerzas de gravedad, la accion muscular de los animales, la tension del vapor, etc. Toda fuerza capaz de producir un movimiento se llama *potencia*, y la que es capaz de impedirlo ó resistirlo se llama *resistencia*.

2. Se dice que un cuerpo está en *movimiento*, cuando ocupa sucesivamente diferentes lugares del espacio; y que está en *reposo*, ó que está fijo, cuando ocupa un mismo lugar del espacio.

Los cuerpos inanimados son *inertes*, ó lo que es lo mismo, no pueden pasar del estado de reposo al de movimiento, ó al contrario, ni modificar su movimiento, sin que una causa exterior les obligue á ello.

3. Cuando se aplican muchas fuerzas á un mismo cuerpo, puede suceder que se neutralicen mútuamente sin modificar su estado de reposo ó de movimiento, que es lo que se llama *equilibrio* del cuerpo.

Al conjunto de fuerzas que obran sobre un cuerpo se llama *sistema de fuerzas*, y *resultante* de éstas á la fuerza única capaz de producir el mismo efecto que ellas, las cuales toman el nombre de *componentes*.

4. La Mecánica se divide en *Estática*, que trata del equilibrio de los cuerpos sólidos; *Dinámica*, que estudia su movimiento; *Hidrostática*, que se ocupa del equilibrio de los flúidos (líquidos y gases), é *Hidrodinámica*, que estudia el movimiento de éstos (*).

(*) La *Estática* examina las condiciones que han de tener las fuerzas para producir el equilibrio, y la *Dinámica* estudia las propiedades del movimiento.

Estática.

5. Esta parte de la Mecánica tiene por objeto el estudio del equilibrio de los cuerpos sólidos.

No es lo mismo el *reposo* que el *equilibrio* de los cuerpos : un cuerpo está en equilibrio cuando se halla solicitado por fuerzas que se destruyen entre sí, y está en reposo cuando no se halla solicitado por fuerza alguna.

6. En toda fuerza hay que considerar su *punto de aplicacion*, su *direccion* y su *intensidad*.

Las fuerzas se representan por líneas rectas, en las que uno de sus extremos marca el punto de aplicacion ; su direccion indica la de la fuerza, y su longitud la intensidad de la misma fuerza.

7. El problema de la *composicion de las fuerzas* consiste en hallar la resultante de un sistema de fuerzas dado, y en el de *descomposicion* se trata de hallar dos ó más fuerzas, cuyo efecto sea el mismo que el de otra dada.

8. *Las fuerzas pueden actuar sobre los cuerpos* de tres modos: en una misma direccion, en direcciones contrarias, y angularmente ó concurriendo en un punto.

En el primer caso, la resultante es igual á la suma de las componentes; en el segundo, si las fuerzas son desiguales, la resultante es la diferencia de las componentes, y sigue la direccion de la mayor; pero si son iguales, se equilibran ; en el tercer caso, la resultante está representada por la diagonal del paralelógramo construido sobre las intensidades de las fuerzas (*).

La resultante de dos fuerzas angulares podrá ser mayor, igual ó menor que cada una de las componentes, haciendo variar el ángulo que forman.

9. La resultante de dos fuerzas paralelas que obran en el mismo sentido es paralela á la direccion de estas fuerzas é igual á su suma. Actúa en el mismo sentido que las fuerzas componentes.

Si obran en sentido contrario, la resultante es paralela á la direccion de estas fuerzas é igual á su diferencia. Actúa en el sentido de la mayor.

La resultante de dos fuerzas paralelas é iguales pasa por el punto medio de la recta que une sus puntos de aplicacion; y si son desiguales, divide á esta recta en partes inversamente proporcionales á sus intensidades. Si las fuerzas son iguales y obran en sentidos contrarios, constituyen *un par de fuerzas* que no producen movimiento de traslacion, pero si de rotacion.

(*) Cuando un barco de remos atraviesa un rio no se dirige hácia donde los remos le impulsan, ni tampoco marcha en la direccion de la corriente, sino que sigue la direccion de la diagonal de estas dos fuerzas.

10. Todos los cuerpos están sometidos á la accion de várias fuerzas, siendo las principales las siguientes:

La *atraccion universal*, en virtud de la cual todos los cuerpos se atraen en razon directa de sus masas y en razon inversa de los cuadrados de sus distancias.

El movimiento de los planetas al rededor del Sol se verifica en virtud de este principio, descubierto por Newton á fines del siglo XVII.
Si la atraccion se verifica entre las partículas homogéneas de los cuerpos, se llama *atraccion molecular* ó *cohesion*, y si entre las partículas heterogéneas que forman los cuerpos compuestos, se llama *afinidad* (*).

La *gravedad* es un caso particular de la atraccion universal, la cual consiste en la atraccion que ejerce el globo terrestre sobre los cuerpos que están á su inmediacion ó en su interior, y tiende á determinar su caida ó aproximacion al centro de la Tierra.

La *gravedad* produce el movimiento del agua en los rios y canales, y este movimiento determina el de las ruedas hidráulicas, que son los motores más baratos que se conocen.

El *calor* produce el aumento de volúmen de todos los cuerpos, y sus cambios de estado, fusion, vaporizacion, liquidacion y solidificacion.

Todos los cuerpos se *dilatan* por la accion del calor cuando éste aumenta, y se contraen por su disminucion: observándose que en igualdad de circunstancias los gases se dilatan más que los líquidos y éstos más que los sólidos. Por la dilatacion ascienden los globos aerostáticos llenos de aire caliente y se producen los vientos, las tempestades y las corrientes de los mares. La *ebullicion* del agua produce el *vapor*, que es el motor de la mayor parte de las industrias.

La *electricidad* obliga á los cuerpos á aproximarse ó alejarse, y puede producir efectos físicos, químicos y mecánicos, de notoria utilidad y aplicacion á las artes industriales.

Este agente se desenvuelve por la frotacion, la presion, el calor, las acciones químicas y el magnetismo. Se divide en electricidad *vítrea* ó positiva y *resinosa* ó negativa, verificándose que las electricidades del mismo nombre se repelen y las de nombre contrario se atraen.

El *magnetismo*, al cual se deben los telégrafos y relojes eléctricos, los aparatos de induccion y las máquinas electro-motoras.

La fuerza magnética nace de la propiedad que tienen los imanes de atraer al hierro, al niquel y al cobalto, y de repeler el agua, el aire, el éter, el alcohol, el antimonio, el zinc y el mercurio. El globo terrestre es un gran iman cuyos polos se hallan próximos á los de su rotacion.

(*) Las partículas más pequeñas que pueden existir en un cuerpo se llaman *átomos* ó *moléculas*.

11. La *gravedad* es una fuerza que obliga á los cuerpos á caer ó dirigirse al centro de la Tierra.

La direccion de esta fuerza se llama *la línea vertical*, que se determina por la *plomada* en equilibrio, ó sea la direccion de un hilo que lleva suspendido en su extremo un cuerpo pesado.

La accion de la gravedad se ejerce sobre todas las moleculas de los cuerpos y actúa igualmente sobre cada una de ellas. La suma de las moléculas de un cuerpo, ó sea la cantidad de materia que contiene, se llama su *masa*.

12. La resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan sobre las moléculas de un cuerpo, constituye su *peso*.

Este peso es el *absoluto*, ó sea la presion que el cuerpo ejerce sobre el obstáculo que le impide caer. El peso *relativo* es la relacion del peso absoluto con otro peso que se toma por unidad, que en el sistema métrico es el *gramo*. Los pesos de los cuerpos son proporcionales á sus masas.

13. Llámase *peso específico* de un cuerpo las veces que, en igualdad de volúmen, pesa más ó ménos que el agua pura ó destilada á la temperatura de 4° sobre cero.

Un decímetro cúbico de agua pura pesa un kilógramo.

14. Llámase *densidad* de un cuerpo la masa de este cuerpo contenida en la unidad de volúmen.

Se aprecia por comparacion con respecto á otro cuerpo, que para los sólidos y los líquidos es el agua destilada; de modo que cuando se dice que la densidad del plomo es 11,352, significa que bajo el mismo volúmen este metal contiene 11 veces y 352 milésimas más materia que el agua. El platino es el cuerpo más denso que se conoce.

15. Para que un cuerpo *esté en equilibrio* es necesario que se halle solicitado cuando ménos por dos fuerzas iguales y contrarias.

En lo general estas fuerzas son: una, la *gravedad*, y la otra, que destruye á ésta, la *resistencia* que opone el punto de apoyo ó de suspension del cuerpo.

Segun la posicion respectiva de estas fuerzas se originan tres clases de equilibrio: *estable*, *inestable* é *indiferente*.

Se llama *estable* cuando, separándole un poco de la posicion de equilibrio, vuelve por la accion de su propio peso á su posicion primitiva: el *centro de gravedad* está entónces lo más bajo posible.

Se llama *inestable* cuando, separándole por poco que sea de la posicion de equilibrio, se separa más de ella por la accion de su propio peso y no vuelve nunca á recobrarla: el centro de gravedad está entónces lo más alto posible.

Y se llama equilibrio *indiferente* cuando, separándole de la posicion que ocupa, vuelve á quedar en equilibrio en la nueva posicion (*).

(*) Llámase *centro de gravedad* de un cuerpo el punto por el cual pasa la resultante de todas las acciones que la gravedad ejerce sobre sus moléculas.

16. Llámase *máquina* todo aparato capaz de producir el equilibrio ó el movimiento de los cuerpos por medio de fuerzas, cuya accion se modifica al traves de aquél.

Los elementos de toda máquina son tres: 1.°, la *potencia*, que es el motor ó fuerza que se emplea para vencer ó equilibrar un obstáculo cualquiera; 2.°, la *resistencia*, ó sea la fuerza ú obstáculo que se ha de remover; y 3.°, el *punto* ó *puntos* de *apoyo* sobre que descansa ó gira la máquina.

Las *máquinas simples* pueden reducirse á tres: la *palanca*, el *torno* y el *plano inclinado*, segun que el obstáculo sea un punto fijo, una recta ó un plano.

Ademas, son muy importantes el *tornillo* y la *cuña* y la cuerda ó *máquina funicular* y sus aplicaciones á la *polea* y la *grúa*.

Por el intermedio de las máquinas se ponen en movimiento masas considerables y se elevan pesos enormes empleando fuerzas muy pequeñas, que por sí solas no podrian verificarlo; pero á expensas del tiempo, porque las máquinas, no sólo no producen fuerza, sino que consumen por el rozamiento una parte de la potencia que sobre ellas aplicamos.

17. *Palanca* es una barra inflexible recta, curva ó angular, que puede girar al rededor de un *punto* llamado *de apoyo*.

Si el punto de apoyo está entre la potencia y la resistencia, se llama de *primer género*; si la resistencia está entre el punto de apoyo y la potencia, se llama de *segundo género*, y si la potencia se halla entre el punto de apoyo y la resistencia, se llama de *tercer género*. Se llama *brazo de palanca* la distancia que hay entre la potencia y la resistencia y el punto de apoyo.

Siempre se verifica que *la potencia y la resistencia* están en razon inversa de los brazos de palanca.

En las palancas de primer género la potencia puede ser igual, mayor ó menor que la resistencia; en las de segundo género siempre está favorecida la potencia, y en las de tercero está perjudicada, aplicándose sólo con ventaja en los telares donde las resistencias son pequeñas.

Son palancas de primer género de brazos iguales la *balanza* que se emplea para determinar el peso de los cuerpos; y de brazos desiguales la *romana*, que tiene el mismo objeto. Tambien lo son las tijeras y las tenazas comunes, cuyo punto de apoyo es el clavillo al rededor del cual giran (*).

De segundo género son los fuelles de cocina, los remos de una barca, el partidor de nueces y las carretillas de mano.

Son de tercer género los brazos de nuestro cuerpo, las pinzas, etc.

(*) Las *balanzas* necesitan para su uso un juego de pesas; la *romana*, con una sola llamada *pilon* puede pesar diferentes cuerpos. La *báscula* es una combinacion de palancas para pesar grandes masas, de que se hace mucho uso en las estaciones de los ferro-carriles.

18. La *polea ó garrucha* es un cilindro poco grueso, en cuya superficie exterior hay una garganta ó carril por donde pasa una cuerda, á cuyos extremos se aplican la potencia y la resistencia.

Puede ser *fija ó móvil* : la primera está suspendida de un punto fijo, y la segunda tiene fijo uno de los extremos del cordon, aplicándose la potencia al otro extremo.

La polea fija sólo tiene un movimiento de rotacion dentro de sus ramas, y la móvil tiene dos movimientos, uno de rotacion y otro de traslacion.

En la polea fija siempre la potencia es igual á la resistencia; y en la móvil se verifica que *la potencia es á la resistencia*, como el rádio de la polea es á la cuerda del arco que abraza el cordon.

Cuando el arco es, por ejemplo, la sexta parte de la circunferencia, la cuerda es igual al rádio, y la potencia es igual á la resistencia: si las cuerdas son paralelas, la potencia es mitad de la resistencia.

19. El *torno* es un cilindro de madera ó de metal, terminado en sus dos extremos por otros dos cilindros de menor diámetro, los cuales descansan horizontalmente en dos apoyos fijos : lleva ademas una cuerda que se arrolla ó se desarrolla teniendo pendiente la resistencia. La potencia se aplica á una rueda ó un manubrio.

La ley de equilibrio en el torno es la siguiente : *la potencia es á la resistencia* como el rádio del cilindro es al rádio de la rueda.

Se favorece por lo tanto la potencia aumentando el rádio de la rueda ó del manubrio, ó bien disminuyendo el del cilindro.

El torno combinado con un juego de poleas y palancas, destinado á elevar pesos á grande altura, se llama *grúa;* y si tiene el eje vertical, y por su medio se arrastran cuerpos muy pesados, se llama *cabrestante.*

La *cábria* es tambien una combinacion del torno y la polea, muy usada para elevar materiales en las construcciones ó embarcar y desembarcar mercancías desde los muelles.

20. *Cric ó gato* es una rueda dentada cuyo piñon engrana en una barra tambien dentada por una de sus caras, pudiendo ascender ó descender por medio de un manubrio al que se aplica la potencia (*).

Sirve para elevar pesos á pequeña altura y tiene un uso frecuente en los ferro-carriles para volver á la vía los carruajes descarrilados.

En el cric ó gato se verifica que *la potencia es á la resistencia* como el rádio del piñon ó de la rueda es al rádio de la circunferencia que describe el manubrio.

(*) Las *ruedas dentadas* son unos tornos en los cuales lo mismo los cilindros, que son muy cortos, que las ruedas, llevan dientes que engranan los del piñon de cada una en los de la rueda inmediata.

21. Llámase *plano inclinado* al que forma con el plano horizontal un ángulo menor que 90°.

La potencia puede ser paralela á la longitud del plano ó á su base, verificándose en el primer caso que *la potencia á es la resistencia* como la altura del plano es á su longitud; y en el segundo, que *la potencia es á la resistencia* como la altura del plano es á su base.

Úsase principalmente esta máquina para hacer más fácil la subida y la bajada de los cuerpos.

22. La *cuña* es un prisma triangular que se introduce por una de sus aristas entre dos obstáculos, para ejercer lateralmente esfuerzos que tiendan á separarlos; verificándose que *la potencia*, aplicada con un martillo en la cabeza de la cuña, *es á la resistencia* como la cabeza de la cuña es á la suma de sus caras laterales.

La cuña, segun esto, producirá mayor efecto cuanto más pequeña su cabeza y más largas las caras laterales.

Los cuchillos, las hachas, los punzones, los clavos, y en general todos los instrumentos cortantes, son verdaderas cuñas.

23. El *tornillo* ó *rosca* es un cilindro recto y macizo, rodeado de un filete saliente que se ajusta en los carriles huecos que tiene otra pieza llamada *tuerca* (*).

Una de estas dos piezas está siempre fija; la otra se mueve por medio de la potencia. La forma que toma el filete saliente se llama *espiral; espira* cada una de las vueltas, y *paso de la espira ó de la rosca* el intervalo ó distancia entre dos filetes consecutivos paralelamente al eje de la rosca.

En la rosca ó tornillo *la potencia es á la resistencia*, ó sea al peso con que está cargada la tuerca, como el paso de la rosca es á la circunferencia que describe la potencia.

Si en el paso de la rosca de un tornillo se engranan los dientes de una rueda dentada de un torno á cuyo cilindro se aplica la resistencia, resulta lo que se llama *tornillo sin fin*.

24. Se llama *máquina funicular* á todo aparato en el cual sólo se emplean cuerdas para sostener un peso ó para equilibrar otras fuerzas.

Las cuerdas se forman por la torsion de várias sustancias filamentosas vegetales, como el cáñamo, el lino, el algodon, etc. Por su medio se pueden producir efectos considerables con pequeñas potencias.

(*) Es un verdadero plano inclinado arrollado en espiral, por donde desciende ó asciende otro cuerpo llamado *tuerca*.

Dinámica.

---

25. Llámase *Dinámica* la parte de la Mecánica que trata del movimiento de los cuerpos sólidos.

Se entiende por *movimiento* de un cuerpo su traslacion de un lugar á otro del espacio.

Las fuerzas cuando producen movimiento pueden ser instantáneas ó continuas: las primeras obran en un solo momento, y las segundas están obrando constantemente miéntras el cuerpo se mueve.

26. El movimiento puede ser *uniforme* ó *variado;* en el primer caso los cuerpos recorren en tiempos iguales espacios iguales, y en el segundo recorren espacios desiguales, que pueden ser cada vez mayores ó menores, originándose así el movimiento *acelerado* ó *retardado.*

Las fuerzas instantáneas producen el movimiento uniforme y las continuas dan lugar al movimiento variado.

Es uniforme el movimiento de la luz, que recorre 300000 kilómetros por segundo; lo propio sucede al sonido, cuya velocidad es de 340 metros por segundo en el aire, y de 1435 metros en el agua. El movimiento de rotacion del globo terrestre es tambien uniforme.

27. En todo movimiento se consideran: el *tiempo*, el *espacio* y la *velocidad.* Llámase *tiempo* lo que tarda un cuerpo en recorrer la distancia entre dos puntos; *espacio* es la distancia que recorre un cuerpo en un tiempo dado; y *velocidad* es el espacio recorrido en la unidad de tiempo, que generalmente es un segundo.

La velocidad está siempre en razon directa de la fuerza y en razon inversa de la masa del cuerpo.

28. *En el movimiento uniforme*, los espacios recorridos crecen como los tiempos, y, por lo tanto, el espacio se representa por la velocidad multiplicada por el tiempo; y el tiempo es igual al espacio dividido por la velocidad.

Una fuerza instantánea produce, actuando sobre un cuerpo, un movimiento uniforme y rectilíneo, verificándose en tal supuesto que:

Si los tiempos son iguales, los espacios son como las velocidades.

Si las velocidades son iguales, los espacios son proporcionales á los tiempos.

Si los espacios recorridos son iguales, las velocidades están en este caso en razon inversa de los tiempos (*).

(*) Todas las máquinas destinadas á medir el tiempo deben marchar con movimiento uniforme: en los relojes la manecilla de las horas recorre sólo 30° miéntras el minutero anda 360° en una hora: uno y otro, sin embargo, andan con movimiento uniforme.

29. *En el movimiento uniformemente acelerado*, las velocidades son como los tiempos; los espacios recorridos en cada unidad de tiempo son como los números impares 1, 3, 5, 7, etc., y los espacios totales son como los cuadrados de los tiempos.

Un cuerpo que desciende sometido sólo á las leyes de la gravedad lo verifica con movimiento uniformemente acelerado, y si asciende en virtud de otra fuerza, pero solicitado al mismo tiempo por la accion de la gravedad, camina con movimiento uniformemente retardado.

Un cuerpo que desciende libremente recorre en las latitudes medias en el primer segundo 4,8995 metros; en dos segundos, 4 veces el número anterior: en tres segundos, 9 veces el mismo número, y así sucesivamente (*).

Todos los cuerpos en el vacío caen con igual velocidad.

30. El movimiento puede ser tambien *constante*, *alternativo* y *periódico*.

El *movimiento constante* no experimenta modificacion alguna en su duracion, como el de los planetas al rededor del Sol; el *alternativo* se produce en dos sentidos diferentes, como el del brazo de un hombre que sierra maderas ó maneja un martillo; y el *periódico* se interrumpe por tiempo más ó ménos largo, como en las máquinas de coser, en los telares, etc.

31. *El movimiento parabólico* le originan dos fuerzas que obran en distintas direcciones sobre un cuerpo, siendo la una instantánea y contínua la otra.

Los proyectiles ofrecen un ejemplo de estos movimientos.

32. *El movimiento circular* le originan dos fuerzas aplicadas á un cuerpo, una de las cuales le obliga á dirigirse hácia un punto del espacio y recibe el nombre de *centrípeta*, y la otra tiende á separarle del mismo punto, y se la denomina *centrífuga*. Ambas se llaman *fuerzas centrales*.

La fuerza *centrífuga* produce notables efectos, como se advierte en la piedra lanzada por el movimiento circular de la honda, en el vaso lleno de agua que suspendido de una cuerda se le hace tomar como á la honda un movimiento circular rapidísimo, sin que se derrame una sola gota; la imposibilidad de que se sostenga sobre un cuerpo que gira, un grano de trigo ú otro cuerpo cualquiera, etc.

La fuerza centrífuga es proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo y está en razon inversa del rádio del círculo que describe, verificándose que disminuye desde el ecuador hasta los polos donde se reduce á cero, miéntras sucede lo contrario á la fuerza de la gravedad ó *centrípeta* que crece del ecuador á los polos donde está en su máximum. Por su medio se explica la figura y movimiento de los astros y su aplanamiento polar.

(*) En general el *movimiento uniformemente retardado* se origina cuando una fuerza se opone constantemente á otra con tendencia á disminuir los efectos de ésta, como sucede á una piedra lanzada de abajo arriba, á cuya fuerza de impulso se opone el peso de la piedra.

33. El *movimiento oscilatorio* es el que presenta el péndulo en su movimiento.

Llámase *péndulo* todo cuerpo suspendido de un hilo ó una varilla que gira en un mismo plano describiendo arcos de círculos iguales. Se mueve por la accion de la gravedad; es, pues, un cuerpo que desciende y su movimiento oscilatorio va siendo cada vez menor á causa de la resistencia del aire y del rozamiento en el punto de suspension; sin esto se verificaria que en un mismo péndulo las oscilaciones serian iguales ó durarian el mismo tiempo (*).

Los péndulos se aplican como reguladores en los relojes para la medida del tiempo; para demostrar el movimiento de rotacion de la Tierra y para determinar el valor de la gravedad en un punto cualquiera de nuestro globo.

Los columpios son verdaderos péndulos, cuyas oscilaciones pueden aumentar considerablemente (**).

34. Se llama *inercia* la propiedad general de que gozan los cuerpos, en virtud de la cual no pueden modificar por sí mismos el estado de reposo ó de movimiento en que se encuentran.

Para que pasen del reposo al movimiento, ó al contrario, se necesita una fuerza proporcional á su masa y al movimiento que se haya de producir ó destruir. Llámase *fuerza viva* de un cuerpo en movimiento, el producto de su masa por el cuadrado de la velocidad.

35. *Cuerpos duros* son aquéllos cuya forma no puede alterarse por ninguna fuerza que exteriormente se les aplique; *cuerpos blandos* son los que pueden ser comprimidos; y *elásticos*, aquéllos que pueden ser comprimidos y tienen la propiedad de volver á recobrar su primitiva forma.

36. *Choque* es la accion recíproca entre dos cuerpos que se encuentran, uno de los cuales ó los dos se hallan en movimiento.

El choque puede ser *central* ó *excéntrico*, segun que se verifique ó no en la direccion de la recta que pasa por los centros de movimiento de los cuerpos.

37. Si dos cuerpos duros de iguales masas se chocan en sentidos contrarios con velocidades iguales, deben permanecer en reposo despues del choque.

La velocidad mayor ó menor con la que un cuerpo choque con otro da lugar á efectos muy diferentes : si una bala de plomo choca suavemente contra una puerta ó contra un cristal, será rechazada por la madera ó el cristal sin rotura ninguna; si se lanza más fuerte atravesará la madera ó el cristal rompiéndole en pedazos al rededor del agujero; pero si la bala se tira con un arma de fuego y á corta distancia, no hará en el vidrio más que un agujero redondo por el cual pasará dejando intacto el resto del cristal.

(*) En péndulos de diferente longitud la duracion de las oscilaciones en el mismo tiempo es proporcional á la raiz cuadrada de las longitudes.

(**) La longitud del péndulo de segundos ha sido hallada para diferentes puntos del globo : corresponde á Madrid 0,992881 metros.

38. Si el choque se verifica entre dos cuerpos elásticos, la velocidad que ganan ó pierden será doble de la que por la misma razon les corresponderia si no poseyeran dicha propiedad.

Si el choque tiene lugar entre un cuerpo duro y otro elástico en direccion diferente de la que une los centros, este último se separará del primero, formando el *ángulo de reflexion* igual al de *incidencia.*

Por las leyes del choque se explica entre otros fenómenos el que las aguas del mar reboten los proyectiles, y que los torrentes y el aire lo arrastren todo cuando es muy grande su velocidad.

39. Llámase *rozamiento* la fuerza necesaria para vencer la resistencia que al moverse dos cuerpos uno sobre otro, les ofrece la penetracion de los puntos elevados ó asperezas de cada uno en los intersticios ó poros de la superficie del otro.

En los cuerpos de naturaleza diferente es menor el rozamiento que en los homogéneos ó de la misma naturaleza.

El rozamiento aumenta con la mayor extension de las superficies en contacto. Es proporcional á la presion que el cuerpo ejerce sobre la superficie que frota, es decir, se duplica cuando se duplica la presion y se reduce á la mitad cuando la presion se reduce á la mitad. Y, finalmente, no depende de la velocidad del móvil, siendo mayor al empezar que durante el movimiento.

Pulimentando las superficies se disminuye el rozamiento, al ménos hasta cierto límite; tambien se disminuye cubriéndolas de aceite ó grasa (*).

El rozamiento se llama de primera especie cuando los dos cuerpos resbalan el uno sobre el otro; y de segunda cuando siendo esférico ó cilíndrico uno de ellos, rueda ó gira sobre el otro.

40. Llámase *kilográmetro* la unidad de trabajo, ó sea el trabajo necesario para elevar un kilógramo á un metro de altura en un segundo.

Elevar 30 kilógramos á 5 metros de altura es producir un trabajo igual al producto de 30 por 5, ó sean 150 kilográmetros.

La unidad de trabajo más generalizada en la industria es el *caballo de vapor*, ó sea el esfuerzo necesario para elevar 75 kilógramos á 1 metro de altura por segundo.

En la práctica se necesitan 7 caballos ordinarios para hacer el mismo trabajo que un caballo de vapor en 24 horas; y como el trabajo de un caballo ordinario equivale al de 7 hombres, el de vapor equivale al de 50 hombres.

Suponiendo en constante trabajo á los caballos de tiro, dos de ellos equivaldrian al caballo de vapor (**).

(*) En las maderas se reduce á la mitad si están bien engrasadas.

Algunas veces conviene aumentar el rozamiento, como cuando hay necesidad de disminuir el movimiento de una máquina, de un carruaje, etc.

(**) El caballo de vapor gasta por término medio 2 kilógramos de carbon por hora, ó sean unos 50 kilógramos de hulla en 24 horas.

Hidrostática.

41. Es la parte de la Mecánica que estudia *el equilibrio de los flúidos*, ó sea de los líquidos y los gases.

Los líquidos y los gases tienen la propiedad de trasmitir con igual intensidad en toda su masa la presion que se ejerza en cualquiera punto de la misma; fúndase en este principio la *prensa hidráulica*.

42. Para que un líquido esté en equilibrio, se necesita que su superficie sea horizontal, y que cada una de sus moléculas sufra en todas sus direcciones presiones iguales y contrarias.

Cuando dos ó más líquidos diferentes se hallan contenidos en un mismo vaso, se colocan en el órden de sus densidades, y las superficies que los separan siempre son horizontales.

43. Si las moléculas de un flúido contenidas en un vaso abierto se hallan solicitadas únicamente por la gravedad, y la superficie del flúido está á nivel, toda la masa flúida está en equilibrio, verificándose del mismo modo la proposicion recíproca (*).

En esto se funda la nivelacion con el nivel de agua y la conduccion del agua á las fuentes por cañerías.

44. La presion que un flúido ejerce sobre una superficie cualquiera es igual al producto de dicha superficie por la distancia de su centro de gravedad al plano de nivel, y por el peso específico del flúido.

Si el fondo de un vaso lleno de agua, vino, etc., es horizontal, la presion sobre dicho fondo podrá ser igual, mayor ó menor que el peso del agua.

45. Cuando un cuerpo se sumerge en un flúido, desaloja un volúmen de éste igual al suyo y pierde de su peso una parte igual al peso del flúido desalojado.

Este principio, debido á Arquímides, es de la mayor importancia, pudiendo por su medio determinarse el peso específico de los cuerpos.

46. Los *cuerpos flotantes* en equilibrio desalojan un volúmen de líquido que pesa tanto como ellos.

Cuando el peso del cuerpo es menor que el del flúido desalojado, el cuerpo se eleva y sale poco á poco del flúido, como se observa en el corcho.
Los cuerpos más densos que el agua, como el plomo, el hierro, etc., pueden flotar sobre todos los líquidos dándoles tal forma, que la parte sumergida en el líquido desaloje un volúmen de éste que pese tanto como todo el cuerpo.

(*) El instrumento que se emplea en esta operacion se llama *areómetro*, que puede ser de volúmen constante y peso variable, ó al contrario.

Hidrodinámica.

47. Trata esta parte de la Mecánica *del movimiento de los flúidos*. En una vasija de agua ú otro líquido, cuyo fondo sea horizontal y tenga en él una abertura ú orificio, se verifica :

1.°, que todas las partículas, comprimiéndose mútuamente, se dirigen hácia el orificio; 2.°, que dichas moléculas descienden con velocidades sensiblemente verticales, é iguales hasta cerca del fondo; y 3.°, que la superficie del líquido permanece sensiblemente horizontal.

Lo propio sucede si el orificio se practica en una de las paredes laterales; pero solicitada entónces la vena flúida al salir del vaso por dos fuerzas, la de la gravedad que actúa sobre las moléculas en direccion vertical, y la presion del líquido que obra perpendicularmente á la pared, la vena flúida describe la curva llamada *parábola*. Cuando el orificio está en el fondo del vaso, el chorro es vertical y rectilíneo.

48. Se llama *gasto efectivo* el volúmen de líquido que sale por un orificio en un tiempo dado.

Es igual á un cilindro ó prisma cuya base es el área del orificio, y su altura el espacio corrido en este tiempo con la velocidad adquirida cayendo de la altura del flúido.

La vena flúida se contrae por la reduccion que experimenta el diámetro del cilindro líquido á una distancia igual al rádio del orificio de salida.

Para aumentar este gasto efectivo, se aplican á los orificios tubos adicionales, bien sean cilíndricos ó cónicos.

Si el tubo es cilíndrico y su longitud no llega á ser el cuádruplo del diámetro del orificio, la velocidad se aumenta y la cantidad del líquido que sale en un tiempo dado está en la relacion de 133 á 100. Si el tubo es cónico y la base menor se apoya en el orificio, el gasto aumenta todavía más, llegando á ser casi un doble.

49. Los *surtidores* son tubos de salida que arrojan el agua vertical ú oblícuamente, por efecto de la presion que ejerce una columna de líquido sobre el nivel del orificio por donde sale (*).

Se explican fácilmente por la teoría de los *sifones* destinados á trasvasar los líquidos y en los cuales la fuerza que determina la salida del líquido está representada por la diferencia de las columnas líquidas de ambas ramas.

(*) El agua de los surtidores y de los pozos artesianos, segun el principio de Torricelli, tiende á elevarse á la misma altura del nivel del depósito; pero se lo impide el rozamiento del líquido en las paredes del tubo, la resistencia del aire y el choque de las moléculas de la columna de agua que descienden con las que se elevan.

50. Se da el nombre de *atmósfera* á la capa de aire que envuelve nuestro globo, y cuya altura desde la superficie de la Tierra es de unos 75 á 80 kilómetros.

El aire es un flúido pesado, y ejerce presion en todas direcciones del mismo modo que los líquidos.

Esta presion es próximamente de 100 kilógramos sobre la superficie de un decímetro cuadrado. A medida que nos elevamos en la atmósfera la presion disminuye, notándose que por cada 13 metros de altura sobre el nivel del mar baja un milímetro la columna de mercurio del barómetro.

51. Los volúmenes ocupados por una misma masa de gas á una temperatura constante, se hallan en razon inversa de las presiones que sufren.

Se da el nombre de *manómetro* al instrumento destinado á medir la tension de los gases comprimidos ó las presiones ejercidas por los vapores. Pueden ser de aire libre, de aire comprimido, ó metálicos.

52. Los *gasómetros* son aparatos destinados á producir la salida constante de un gas,

Los de las fábricas del gas del alumbrado están formados por un gran cilindro de chapa de hierro, abierto por su parte inferior y sumergido en un depósito de agua : este cilindro se halla sostenido por un contrapeso.

53. La *máquina neumática* sirve para hacer el vacío en un espacio dado, ó mejor dicho, para enrarecer el aire contenido en dicho espacio.

Sus partes principales son dos cuerpos de bomba, dentro de cada uno de los cuales se halla un émbolo y dos válvulas que se abren de abajo arriba; 2.°, la platina ó plano de cristal deslustrado en el que se colocan las campanas de donde se ha de extraer el aire; 3.°, la probeta ó barómetro truncado que sirve para conocer el grado de enrarecimiento del aire.

54. Por el principio de Arquímides aplicado á los gases, resulta que todo cuerpo sumergido en el aire pierde una parte de su peso, igual al peso del volúmen de aire que desaloja.

Si el cuerpo es más pesado que el aire en igualdad de volúmen, el cuerpo desciende; si la densidad del cuerpo es igual á la del aire, ni desciende ni se eleva, permaneciendo en equilibrio en la atmósfera; pero si su densidad es menor que la del aire, entónces se elevará en la atmósfera con una fuerza igual á la diferencia entre su peso y el volúmen del aire que desaloja.

En este último principio se funda la ascension de los *globos aerostáticos.*

55. Los instrumentos llamados *anemómetros* determinan la direccion y miden la velocidad del viento.

Las *veletas* que generalmente se ven colocadas en las torres de las iglesias, sirven principalmente para indicar la direccion del viento.

BREVÍSIMAS NOCIONES

DE

CIENCIAS NATURALES.

Física.—Química.—Historia natural (*).

Física.

Las propiedades generales ó comunes á todos los cuerpos son la *extension*, *impenetrabilidad*, *divisibilidad*, *porosidad*, *compresibilidad*, *elasticidad*, *inercia*, *movilidad* y *gravedad;* y las particulares ó sólo propias de algunos de ellos, la *dureza*, *tenacidad*, *fragilidad*, ó *ductibilidad*, etc.

Por la mayor ó menor adherencia ó enlace de las partículas ó partes pequeñísimas de que los cuerpos se componen, pueden éstos hallarse en tres estados diferentes, conocidos con los nombres de *sólidos*, *líquidos* ó *gaseosos*.

Cuerpos *sólidos* son aquellos cuyas partículas tienen tanta adherencia ó enlace que conservan la forma que se les da, como las piedras, la madera y el hierro.

En los *líquidos* la movilidad de sus partículas es tal, que se necesita contenerlos en vasijas, como el agua, la leche y el vino.

Las partículas de los cuerpos *gaseosos* tienden á separarse unas de otras de tal modo que encerrados en un recipiente le llenan todo, como el aire y los vapores.

Los cuerpos están en *reposo* cuando permanecen en un mismo lugar y, en *movimiento* cuando pasan de un lugar á otro diferente, en cuyo caso se llama *velocidad* el espacio que recorre el cuerpo en la unidad de tiempo, que generalmente es un segundo, y *movimiento uniforme* aquel con el cual el móvil recorre en tiempos iguales espacios tambien iguales.

(*) Las CIENCIAS NATURALES tienen por objeto el estudio de todos los séres que se hallan en la superficie del globo terráqueo, y los que constituyen su masa. Se dividen ordinariamente en *Física*, *Química* é *Historia natural:* la primera estudia las propiedades de los cuerpos, el calor, la luz, la electricidad y el magnetimo; la segunda examina la accion molecular de los cuerpos y los fenómenos de su afinidad; y la tercera reconoce la forma, estructura y modo de existir de todos los cuerpos de la naturaleza: ésta última se divide en *mineralogía*, *botánica* y *zoología*.

Anemómetros son los instrumentos destinados á medir la velocidad del viento y á señalar su direccion respecto de los cuatro puntos cardinales N., S., E. y O.

Palanca es una barra recta, curva ó mixta, pero inflexible, sujeta á girar sobre un punto llamado *punto de apoyo.*

Balanza es una palanca de brazos iguales; sirve para conocer el peso de los cuerpos.

Romana es una balanza de brazos desiguales, y *báscula* una combinacion de palancas. Ambos aparatos se emplean para medir el peso de los cuerpos, con una sola unidad de peso.

Llámase *gravedad* la fuerza de atraccion que solicita á los cuerpos hácia el centro del globo terrestre, y es la causa del peso de los mismos cuerpos; la línea *vertical* señala su direccion.

Densidad de un cuerpo es la relacion de su masa con su volúmen; y *peso específico* la relacion del peso del cuerpo con el de un volúmen igual de agua destilada para los sólidos y líquidos, ó de aire atmosférico para los gases (*).

El agua helada ó sólida pesa ménos, en igualdad de volúmen, que si está líquida, y en este estado pesa más á la temperatura de 4.° sobre cero, ésta es pues la *máxima densidad del agua.*

Todo cuerpo sumergido en un flúido (líquido ó gaseoso) pierde de su peso una parte igual al peso del flúido que desaloja, segun el *principio* llamado de *Arquímides;* por eso el corcho flota en el agua y se elevan en el aire los globos aerostáticos.

El *barómetro* es un instrumento destinado á medir la *presion atmosférica,* por la altura del mercurio encerrado en un tubo vertical de vidrio de casi un metro de longitud, cerrado por la parte superior y abierto por la inferior, introducido en una cubeta que lleva tambien mercurio. En nuestros climas, la mayor altura de la columna de mercurio indica generalmente buen tiempo, y su descenso lluvia, viento ó tempestad. La altura média de la columna barométrica al nivel del mar, es de 760 milímetros. Hay tambien barómetros metálicos sin la columna mercurial.

La *máquina neumática* sirve para hacer el vacío en un espacio dado, ó hablando más propiamente, para enrarecer el aire contenido en dicho espacio.

(*) El metal llamado *platino* pesa en igualdad de volúmen, 22 veces más que el *agua,* ésta 770 veces más que el *aire,* y éste 14 veces más que el *gas hidrógeno,* que es el cuerpo más ligero de la naturaleza. El *oro* y la *plata* pesan el primero 19 veces, y la segunda 10 y media veces más que el agua.

Los aparatos destinados á elevar el agua se llaman *bombas*; pueden ser *aspirantes*, *impelentes* ó una combinacion de ambas.

Los *sifones* son tubos encorvados de brazos desiguales, que sirven para trasvasar los líquidos.

Los *niveles de agua* señalan la *línea horizontal* por la propiedad que tienen los líquidos de tomar el mismo nivel cuando están en vasos ó tubos que se comunican entre sí.

Producido el *sonido* por la vibracion ó movimiento de las moléculas de un cuerpo elástico, *se propaga* en todas direcciones, pero tanto mejor cuanto más denso es el cuerpo. De la reflexion del sonido, ó sea del cambio de direccion de las ondas sonoras, nacen los *ecos*. En el vacío no se propaga el sonido.

La *velocidad del sonido*, en el aire, á la temperatura ordinaria, es de 340 metros por segundo; en el agua de 1450 metros, y todavía mayor en los cuerpos sólidos.

Termómetro es el aparato que mide la temperatura de los cuerpos por medio de la dilatacion ó contraccion que experimenta el mercurio ó el alcohol encerrado en un pequeño depósito de cristal, que se comunica con un tubo cerrado por su extremo superior. Este tubo está graduado marcando 0° en el punto á que baja el mercurio cuando se sumerge el termómetro en hielo fundente, y 80° ó 100°, segun sea la escala de Réaumur ó centígrada, en el punto á que llega en el vapor del agua hirviendo.

Los *higrómetros* señalan el estado de humedad del aire; el más sencillo es un cabello, que se alarga con la humedad y se encoge con la sequedad.

Las *máquinas de vapor* son unos aparatos en los cuales el vapor del agua, en virtud de su prodigiosa elasticidad, se emplea como fuerza motriz. Esta se valúa por *caballos de vapor*, representando cada uno aproximadamente dos caballos de tiro. Si las máquinas de vapor son de alta presion y trasmiten el movimiento á las ruedas sobre que están montadas, se llaman *locomotoras*.

La *luz* se *propaga* en línea recta y su velocidad es de 300000 kilómetros por segundo, tardando 8 minutos y 18 segundos en llegar desde el Sol hasta nosotros.

Los rayos luminosos que caen sobre un cuerpo pulimentado se vuelven ó *reflejan* formando el ángulo de *reflexion* igual al de *incidencia;* por eso los espejos reproducen las imágenes de los objetos.

Refraccion de la luz es el desvío que experimentan los rayos luminosos al penetrar oblícuamente en los cuerpos diáfanos ó trasparentes.

Los *lentes* son discos de cristal terminados por superficies curvas; los convexos son *convergentes* ó de aumento, porque reunen los rayos luminosos, y los cóncavos son *divergentes* porque los separan. Usan generalmente los primeros las personas de vista cansada y los segundos los miopes ó de corta vista.

Cada rayo de luz blanca ó del Sol está compuesto de los siete colores: rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul, añil y violado, que se separan al atravesar un prisma de cristal.

Microscopio es un instrumento destinado á ver los objetos pequeños con dimensiones hasta mil veces mayores que las que realmente tienen.

El *anteojo* es un tubo de metal con dos ó más lentes convexos que nos permiten ver las imágenes de los objetos lejanos. Si uno de los lentes se sustituye con un espejo, entónces se llama *telescopio* y se destina principalmente á la observacion de los astros.

Llámanse *imanes* los minerales que tienen la propiedad de atraer el hierro, el acero y otros cuerpos, á los cuales comunican su propiedad atractiva convirtiéndoles en imanes artificiales.

La *brújula* es un iman artificial en forma de aguja, movible sobre un eje vertical, destinado á señalar el eje de la Tierra.

La *electricidad*, que como el calor y la luz, es un agente de naturaleza desconocida, produce en los cuerpos atracciones y repulsiones, apariencias luminosas, la fusion, la volatilizacion de ciertos metales, composiciones y descomposiciones químicas, conmociones orgánicas, etc. Se desarrolla en la superficie de los cuerpos por la frotacion, la presion, el calor y el magnetismo. La electricidad desarrollada sobre el vidrio por frotacion se llama *vítrea* ó *positiva*, y la que se desarrolla sobre la resina, *resinosa* ó *negativa*.

La *máquina eléctrica* por la frotacion de un disco de vidrio que gira por entre cuatro almohadillas, produce electridad positiva en unos cilindros huecos de metal que rodean el aparato.

Los aparatos destinados á producir la electridad por contacto de los metales se llaman *pilas*, como las de Volta, Bunsen, etc.

Los imanes obtenidos mediante la electricidad se llaman *electro-imanes*, y su más importante aplicacion es á los *telégrafos eléctricos*, destinados á trasmitir signos convencionales á grandes distancias, por medio de corrientes eléctricas, que se propagan con gran rapidez por los alambres metálicos que unen dos aparatos, llamados *manipulador* el de la estacion de orígen ó de partida, y *receptor* el de la estacion de llegada.

Quimica.

La materia que forma los cuerpos puede ser una, en cuyo caso el cuerpo se llama *simple*, ó dos ó más diferentes, y entónces se llama *compuesto*.

Entre los muchos cuerpos simples ó elementales que se conocen hasta el dia, son los más importantes los siguientes:

Aluminio.	*Carbono.	*Fósforo.	Mercurio.	Platino.
Antimonio.	*Cloro.	*Hidrógeno.	*Nitrógeno.	Plomo.
*Arsénico.	Cobalto.	Hierro.	Oro.	Potasio.
*Azufre.	Cobre.	*Iodo.	*Oxígeno.	Sodio.
Calcio.	Estaño.	Magnesio.	Plata.	Zinc.

Los que llevan una estrellita llámanse *metalóides* ó cuerpos no metálicos, y *metales* todos los demas; éstos son buenos conductores del calor y de la electricidad, y aquéllos no. Son *gaseosos* el oxígeno, hidrógeno, nitrógeno y cloro; *líquido* el mercurio y y los demas *sólidos* á la temperatura ordinaria.

El *oxígeno* es necesario para la respiracion y la combustion, y forma una quinta parte del aire atmosférico.

El *hidrógeno* es impropio para la respiracion y la combustion: forma más de la mitad del agua.

El *nitrógeno* apaga los cuerpos en combustion y mata los animales que le respiran: forma las $^4/_5$ partes de la atmósfera.

Son *ácidos* los cuerpos de sabor agrio, que resultan ordinariamente de la union del oxígeno con otro cuerpo simple, como el *ácido carbónico* y el *ácido sulfúrico*. Hay tambien ácidos formados por el hidrógeno, como el *ácido sulfhídrico*.

Óxidos son los cuerpos no agrios que resultan de la union del oxígeno con un metal, como la *cal* ó sea el *óxido de calcio*.

Los cuerpos que resultan de la union de los ácidos con los óxidos se llaman *sales*, como el *carbonato de plomo*.

Los cuerpos *binarios no oxigenados* pueden ser de tres clases: metales con metales, como el *cobre* y *zinc*, que forman el *laton;* metaloides con metaloides, como el *sulfuro de arsénico*, y metales con metaloides, como el *cloruro de sodio*.

El *agua pura* es un compuesto de dos volúmenes de oxígeno y uno de hidrógeno, líquido á la temperatura ordinaria, pero que se solidifica á cero grados y pasa á los 100 al estado de vapor. El *agua natural* contiene $^1/_{25}$ de aire atmosférico en disolucion.

El *aire atmosférico* es una mezcla de 21 partes de oxígeno y 79 de nitrógeno, con pequeñísimas cantidades de ácido carbónico y vapor de agua.

Mineralogía.

Llámanse *minerales* los seres inorgánicos naturales que se encuentran en la supérficie ó en el interior de la tierra (*).

Los minerales se forman por la reunion de partes ó moléculas análogas entre sí, y crecen por la superposicion de unas capas sobre otras. Presentándose el mineral en grandes masas, se denomina *roca*.

A excepcion de los *ácidos libres*, pueden comprenderse todos los minerales en los tres grandes grupos de *piedras*, *metales* y *combustibles*, todos sólidos ménos el mercurio.

Piedras son los minerales sin brillo metálico, no combustibles, y de aspecto vítreo, compacto ó terroso, como la *caliza* ó *piedra de cal*, y sus variedades el mármol, el alabastro y la piedra litográfica; el *yeso*, la *cal*, uno de los minerales más abundantes y más útiles, el *nitro*, el *cuarzo*, que forma más de una tercera parte del globo terrestre, y cuyas variedades principalles son el pedernal y el jaspe; las *arcillas*, las *pizarras*, el *granito*, que forma el mayor número de las montañas y las *piedras preciosas*, como el diamante, rubí, topacio, etc.

Metales son minerales de mucho brillo, maleables, buenos conductores del calor y más pesados que el agua, á excepcion del potasio y el sodio, como los siguientes:

Oro, cuya liga con el cobre sirve para fabricar alhajas, monedas y otros objetos de lujo.

Plata, que unida al cobre sirve para la misma fabricacion.

Cobre, que con el zinc forma el laton y con el estaño el bronce.

Mercurio, que unido al estaño, forma el azogado de los espejos.

Plomo, blando y muy maleable; sirve para tubos, planchas, etc.

Estaño, metal blanco, flexible, lustroso y muy fusible.

Zinc, sirve para cubrir los edificios y la fabricacion de tubos.

Hierro, muy duro y tenaz; es el más duro de todos los metales.

Combustibles son los minerales que arden y pierden de su peso por la combustion, como el *azufre*, *asfalto*, *grafito* y la *hulla* ó *carbon de piedrra*. El *cok* es el residuo que deja la hulla.

(*) Todos los seres naturales, únicos de que trata la HISTORIA NATURAL, se dividen en dos grandes secciones: *orgánicos* ó *inorgánicos*. Los primeros tienen vida; es decir, nacen, crecen, se reproducen y mueren, y los segundos sólo tienen las propiedades generales de la materia. Los *orgánicos* se subdividen en *animales* y *vegetales*; los *animales* sienten y se mueven de un punto á otro del espacio, y los *vegetales* no sienten y están siempre fijos donde nacen.

Botánica.

Llámanse *vegetales* los seres orgánicos ó vivientes que no tienen estómago ni movimientos voluntarios, permaneciendo siempre en el punto donde nacen.

Los vegetales nacen de otros seres análogos, crecen, se reproducen y mueren. Están compuestos principalmente de oxígeno, hidrógeno y carbono, siendo este último el más esencial.

Las plantas se dividen segun su tamaño en *árboles*, *arbustos*, *matas* y *hierbas*; y segun sus productos, en *cereales*, *legumbres*, *hortalizas*, *frutales*, *medicinales*, *gomosas*, *fibrosas*, de *tinte*, de *construccion*, etc (*).

En la vida de las plantas hay dos clases de órganos y funciones: los de *nutricion* y los de *reproduccion*.

Son *órganos de nutricion* para conservar el individuo:

La *raiz*, parte inferior del vegetal destinada á sustentarle en la tierra y á chupar los jugos necesarios para la vida.

El *tallo* sirve de apoyo á las hojas, flores y frutos, y crece en sentido inverso á la raíz.

Las *hojas* son de color verde en forma de láminas delgadas, y nacen del tallo y sus ramificaciones.

Son *órganos de reproduccion* para perpetuar la especie:

La *flor*, ó conjunto de hojas reunidas en el extremo de un ramo: consta de *cáliz* ó cubierta exterior, otra interior más vistosa, llamada *corola*, los *estambres* ú órganos sexuales masculinos, y los *pistilos* ú órganos sexuales femeninos.

El *fruto*, que es el ovario fecundado y maduro, y

La *semilla* ó *simiente*, que contiene el gérmen de un nuevo vegetal: es la parte más esencial del fruto y de toda la planta.

Las *funciones de nutricion* en el reino vegetal son:

La *absorcion*, que consiste en introducir en los vegetales sustancias que les sirvan de alimento, lo cual se verifica principalmente por las raíces y las hojas.

(*) Son *cereales*, el trigo, el maiz, la cebada, la avena, el centeno y el arroz.
Son *legumbres*, los garbanzos, las judías, las habas, los guisantes, las lentejas.
» *hortalizas*, las berzas, las coles, las lechugas, los cardos y las escarolas.
» *frutales*, el peral, el manzano, el naranjo, el granado y la higuera.
» *medicinales*, la belladona, la salvia, la malva, el té, la quina y la cicuta.
» *textiles*, el lino, el cáñamo, el esparto, la pita, el abacá y la ortiga.
» *gomosas*, la mirra, el caoutchouc y la goma arábiga.
» de *tinte*, la rubia, el añil, el campeche, la gualda y la hierba carmin.
» de *construccion*, el roble, el pino, la encina, el aliso, el olmo y la caoba

La *circulacion*, en cuya virtud suben los jugos absorbidos ó *savia* desde la raíz á las hojas, y descienden desde las hojas á la raíz.

La *respiracion* por la cual la savia ascendente se trasforma en descendente ó nutritiva, mediante el aire atmosférico y las hojas. Las partes verdes durante el dia desprenden oxígeno y fijan el carbono, y por la noche se apropian el oxígeno y desprenden el ácido carbónico, que es como respiran siempre los tejidos que no son verdes.

La *asimilacion* es el acto por el cual los tejidos toman de la savia descendente las partes que los componen.

Funciones de reproduccion en el reino vegetal:

La *florescencia* abraza los fenómenos relativos á la aparicion de las flores en los vegetales, verificándose en los más durante la primavera y el estío.

La *fecundacion* es el acto por el cual el *pólen* que se desprende de los estambres, trasforma en fruto el ovario del pistilo.

La *diseminacion* es el acto de desprenderse las semillas de la planta que las produjo, esparciéndose en la tierra para dar nacimiento á otras nuevas plantas de la misma especie.

La *germinacion* es el conjunto de fenómenos que presenta una semilla para dar orígen á otras nuevas plantas mediante el calor, el agua, el aire y la falta de luz.

Una multitud de plantas se perderian si se reprodujeran sólo por semillas; se propagan tambien por *estacas*, *acodos* é *ingertos*.

Los vegetales, como seres vivos, mueren naturalmente en un término variable, segun las especies. Los hay *anuales*, *bienales* y *perennes*, y éstos pueden vivir hasta siglos, segun se deduce del número de anillos ó zonas de madera de sus troncos (*).

Llámase *Flora* el conjunto de vegetales propios de una region geográfica determinada. De los países cálidos á los frios se pasa gradualmente por las zonas de vegetacion siguientes : 1.ª, *region de la caña de azúcar*; 2.ª, *region del naranjo*; 3.ª, *region del olivo*; 4.ª, *region de la vid*; 5.ª, *region de los cereales*; 6.ª, *region de los forrajes*; 7.ª, *region alpina ó de los bosques*.

(*) Entre las plantas de adorno son muy conocidas: la *albahaca*, el *geranio* y la *hierba-luisa*, de hojas aromáticas: el *heliotropo* y la *violeta* de flores moradas y pequeñas, pero olorosas; los *claveles*, las *azucenas* y las *rosas* de bellas formas y colores y gratos aromas: la *dalia*, la *camelia*, el *alelí* y el *pensamiento*, de variados matices; el *tulipan* y la *verbena*, de flores encarnadas; el *lirio*, la *pasionaria* y la *lila*, de flores moradas, y el *girasol* de grandes flores amarillas.

Zoologia.

Llámanse *animales* los seres órgánicos que tienen estómago y se mueven voluntariamente. Nacen de otros seres análogos, sienten, crecen, se reproducen y mueren.

Están compuestos principalmente de oxígeno, hidrógeno, carbono y nitrógeno, predominando éste último sobre lo demas.

En la vida de los animales hay tres clases de órganos y funciones, mediante las cuales conservan el individuo, perpetúan la especie, y se ponen en relacion con los objetos exteriores.

Funciones de nutricion para la conservacion del individuo:

La *digestion*, que modifica los alimentos hasta poderlos absorber en los tejidos: sus órganos son la boca, la faringe, el esófago, el estómago, el intestino delgado y el intestino grueso, que constituyen el aparato digestivo.

La *absorcion*, por la cual penetran en los tejidos los flúidos que los rodean; sus órganos son los vasos quilíferos, las venas y los vasos linfáticos.

La *circulacion*, que imprime movimiento en la sangre de los animales, trasladándola en los llamados superiores como el hombre, del corazon á todas las partes del cuerpo por las artérias, y de aquéllas al corazon por las venas.

La *respiracion*, cuyo objeto es convertir la sangre venosa en arterial, mediante el aire atmosférico. En ella nos apropiamos el oxígeno del aire, y espiramos ácido carbónico y vapor de agua.

La *asimilacion*, en cuya virtud las sustancias nutritivas que fueron adsorbidas llegan al tejido de los órganos, donde se depositan, organizándose en materias dotadas de vida.

Llámanse *secreciones* ciertos humores que se producen á expensas de la sangre en determinados órganos llamados *glándulas*, siendo las principales las salivales, el hígado, el páncreas y los riñones, que segregan la orina.

Las *funciones de relacion* tienen por órganos el *sistema nervioso*, compuesto de masas centrales ó *encéfalo* y cordones ó *nervios*, que se ramifican por todo el cuerpo, destinados unos para las sensaciones y otros para los movimientos.

Las impresiones exteriores se reproducen en uno de los *cinco sentidos*; tacto, gusto, olfato, vista y oido.

La reunion ordenada de todos los huesos de un animal constituye su *esqueleto*. El del hombre se compone de 200 huesos.

Llámanse *vivíparos* los animales que nacen vivos, y *ovíparos* los que nacen de huevos.

Todos los animales se dividen en cuatro grandes grupos ó tipos, á saber:

Vertebrados, como los mamíferos, aves, reptiles y peces.

Articulados, como los insectos, arañas, cangrejos y gusanos.

Moluscos, como las ostras, almejas y caracoles de mar.

Zoófitos, como los pólipos, infusorios, etc.

Llámanse *mamíferos* los animales de sangre caliente que nacen vivos y se alimentan de la leche que les dan sus madres en la primera época de la vida, como el hombre, los monos; los llamados *carniceros*, perros, gatos, leones, tigres; los *roedores*, ratones, liebres, conejos; los *paquidermos*, caballos, asnos, cerdos, elefantes, hipopótamos; los *rumiantes*, bueyes, cabras, ovejas, ciervos, camellos; y los *cetáceos*, como las ballenas.

Las *aves* son animales de sangre caliente, que nacen de huevos, están cubiertos de plumas y tienen alas como las llamadas de *rapiña*, águilas, buitres, milanos, gavilanes, buhos, lechuzas y mochuelos; los *pájaros*, mirlos, tordos, ruiseñores, calandrias, gorriones, jilgueros, canarios y el ave del paraiso; las *trepadoras*, cuclillos, loros, cotorras, guacamayos; las *gallináceas*, palomas, tórtolas, pavos, gallinas, faisanes, perdices, codornices; las *aves de ribera*, avestruces, grullas, cigüeñas, garzas, y las *acuáticas*, cisnes, gansos, patos, gaviotas, etc.

Los *reptiles* son vertebrados, de sangre fria, que respiran el aire libre, y nacen de huevos como las tortugas, lagartos, lagartijas, camaleones, cocodrilos, culebras, ranas y sapos.

Los *peces* tienen sangre fria y el cuerpo cubierto de escamas; nacen de huevos, y viven debajo del agua, como las tencas, truchas, salmones, atunes, abadejos, merluzas, tiburones, etc.

Respiran mediante las agallas ó branquias el aire disuelto en el agua, siendo prodigiosa su fecundidad. El abadejo pone medio millon de huevos.

Los *articulados*, *moluscos* y *zoófitos* no tienen vértebras ó huesos, y por eso se llaman *invertebrados*.

La sangre de los *vertebrados* es roja, la de los *articulados* blanca en algunos y roja en otros, y la de los *moluscos* incolora ó ligeramente azulada. Los *zoófitos* tienen poco perceptible el sistema de la circulacion.

Estos cuatro grupos ó tipos se subdividen en *clases*, éstas en *órdenes*, los órdenes en *familias*, las familias en *tribus*, las tribus en *géneros*, y éstos en *especies*. El número de las especies conocidas por los naturalistas llega á 100000.

Peso específico de los cuerpos.

Llámase *peso específico* de un cuerpo sólido ó líquido las veces que, en igualdad de volúmen, pesa más ó ménos que el agua pura ó destilada. Los gases se refieren al peso del aire atmosférico.

Un decímetro cúbico de agua pura pesa 1 kilógramo. El *platino* pesa 23 veces más que el agua, ésta pesa 770 veces más que el aire, y este 14 veces más que el *hidrógeno*, que es el cuerpo más ligero de todos.

La *densidad* de un cuerpo es la relacion de su masa con su volúmen: el platino es por lo tanto el cuerpo más denso que se conoce. Los instrumentos para determinar la densidad de los cuerpos se llaman *areómetros*.

Sólidos.

Platino forjado.	23,000
Platino en alambre.	21,042
Platino fundido.	19,500
Oro forjado.	19,362
Oro fundido.	19,258
Plomo fundido.	11,350
Rodio.	11,000
Plata.	10,474
Monedas de plata.	10,121
Bismuto.	9,822
Cobre laminado.	8,950
Bronce de cañones.	8,640
Laton.	8,427
Arsénico.	8,308
Niquel fundido.	8,279
Acero forjado.	7,840
Acero dulce.	7,833
Acero templado.	7,816
Hierro en barra.	7,788
Hierro fundido.	7,207
Estaño.	7,291
Antimonio.	6,712
Zinc.	6,561
Cromo.	5,900
Diamante.	3,501 á 3,531
Marmol.	2,837
Arcilla.	2,830
Perlas.	2,750
Jaspe.	2,710
Granito.	2,700
Azufre.	2,086
Marfil.	1,917
Fósforo.	1,770
Hielo á 0°.	0,930
Madera de haya.	0,850
Corcho.	0,240

Líquidos.

Mercurio.	13,596
Bromo.	2,966
Acido sulfúrico.	1,841
Cloroformo á 0°.	1,525
Acido nítrico.	1,520
Acido sulfuroso.	1,491
Sulfuro de carbono.	1,208
Vino de Málaga.	1,056
Leche de oveja.	1,040
Leche de vaca.	1,032
Agua destilada.	1,000
Agua del mar.	1,026
Vino comun.	0,990
Aceite de oliva.	0,915

Gases.

Ácido iodhídrico.	4,443
Cloro.	2,470
Acido sulfuroso.	2,234
Acido carbónico.	1,529
Protóxido de nitrógeno.	1,520
Acido clorhídrico.	1,247
Acido sulfhídrico.	1,191
Oxígeno.	1,105
Aire atmosférico.	1,000
Nitrógeno.	0,971
Amoniaco.	0,596
Hidrógeno.	0,069

Vapores.

Arsénico á 300°.	10,600
Mercurio á 350°.	6,976
Azufre á 440°.	6,617
Alcohol á 78°.	1,613
Agua á 100°.	0,624

Cuadro estadístico de Europa y Asia.

Estados de Europa.	Kilómetros cuadrados.	Poblacion.	Capitales y sus habitantes.	
Alemania. . . .	540800	42.800000	Berlin........	680000
Austria.. . . .	624000	37.400000	Viena.........	610000
Bélgica.. . . .	29500	5.405000	Bruselas.	182700
Dinamarca. . .	38240	1.985000	Copenhague. ..	233000
España. ; . . .	507000	16.800000	Madrid.	410000
Francia. . . .	528600	36.905000	Paris.	1.988800
Grecia.	50100	1.460000	Atenas........	44500
Holanda. . . .	32840	3.810000	Haya.........	105000
Inglaterra.. . .	315000	33.800000	Lóndres.......	3.320000
Italia.	296000	27.800000	Roma.........	220000
Portugal. . . .	92830	4.677500	Lisboa........	225000
Rusia.	5.860000	76.600000	S. Petersburgo	680000
Suecia y Noruega.	760000	6.240000	Stokolmo......	160000
Suiza.	41400	2.760000	Berna.........	36000
Turquía. . . .	365000	9.500000	Constantinopla	600000

Regiones de Asia.	Poblacion.	Principales divisiones ó Estados y grandes ciudades.
Arabia.	10.000000	Pequeños Estados y tribus independientes.—Meca, Medina y Aden.
China.	380.000000	El mayor imperio del mundo.—Pekin, Nankin, Canton y Lassa.
Indostan. . . .	200.000000	Posesiones inglesas—Calcuta, Bombay, Madrás, Pondichery y Goa.
Indo-China. . .	30.000000	Posesiones inglesas, Birman, Siam, Annam etc. — Hué y Singapur.
Japon.	30.000000	Islas Niffon, Kiusiu, Silok y Yesso. —Yeddo, Yokoama y Kyoto.
Persia.	12.000000	Reino independiente á orillas del mar Caspio.—Teheran, Ispahan.
Rusia asiática.. .	6.000000	Siberia, Armenia y Georgia. — Tobolsk y Tiflis.
Tartaria. . . .	7.000000	Confederacion de varios Estados.—Bukara, Khiva y Samarcanda.
Turkestan.. . .	12.000000	Estados tributarios de Rusia.—Kabul, Herat y Kelat.
Turquía asiática..	14.000000	Asia menor, Armenia y Siria.—Jerusalen, Damasco y Beyrut.

Cuadro estadístico de África, América, y Oceanía.

Regiones ó Estados.	Kilómetros cuadrados.	Poblacion.	Capitales y sus habitantes
Abisinia.......	350000	3.000000	Gondar......... 50000
Argelia........	670000	2.500000	Argel........... 65000
Egipto.........	5.180000	5.250000	El Cairo......... 350000
El Cabo.......	450000	650000	El Cabo......... 25000
Nubia..........	1.160000	2.000000	Senaar y Dongola,
Senegambia....	6.700000	10.000000	S. Luis y Bathurst.
Marruecos.....	770000	8.000000	Marruecos...... 40000
Trípoli.........	890000	2.000000	Trípoli.......... 30000
Túnez..........	120000	1.150000	Túnez.......... 120000
Guinea.........	5.500000	10.000000	Dahomey, Loango, Loanda y Benguela.
AMÉRICA.			
Nueva Bretaña.	9.100000	3.720000	Quebec con..... 60000
Estados Unidos.	9.340000	38.925000	Washington..... 109000
Méjico.........	1.920000	9.275000	Méjico.......... 200000
Guatemala.....	100000	1.190000	N. Guatemala... 45000
San Salvador...	20000	600000	San Salvador.... 20000
Honduras......	122000	352000	Comayagua..... 8000
Nicaragua......	150000	250000	Managua........ 10000
Costa-Rica.....	56000	185000	San José........ 25000
Colombia.......	830000	2.950000	Bogotá.......... 50000
Ecuador........	650000	866000	Quito........... 76000
Venezuela......	1.140000	1.785000	Caracas......... 55000
Brasil..........	8.350000	10.110000	Rio Janeiro..... 260000
Perú...........	1.300000	2.710000	Lima........... 160000
Bolivia.........	1.300000	2.000000	Chuquisaca..... 25000
R. Argentina..	4.195500	2 060000	Buenos-Aires.... 200000
Chile..........	330000	2.075000	Santiago........ 115000
Paraguay......	150000	450000	Asuncion....... 20000
Uruguay.......	180000	450000	Montevideo..... 100000

La **Oceanía** occidental la constituyen las islas de la Sonda, Sumatra, Java y Borneo, Célebes, Molucas y Filipinas con una poblacion total de 20 millones de habitantes. Las Filipinas son de España.

El grupo central le forman la Australia, Nueva Guinea, Nueva Bretaña, las Marianas y Carolinas y otras ménos importantes con una poblacion de 8 millones de habitantes.

La parte oriental la componen muchos grupos de pequeñas islas como las de Sandwich, de la Union, de los Amigos, Nueva Caledonia, Nueva-Zelanda, de Cook, Taiti, Marquesas, etc., con 2 millones de habitantes.

Cuadro estadístico de la República Argentina.

Provincias y Territorios.	Kilómetros cuadrados.	Poblacion.	Capitales y sus habitantes.	
Buenos-Aires.	215264	500000	Buenos-Aires. . .	200000
Santa Fé.	117259	100000	Santa Fé..	12000
Entre-Rioz.	113789	140000	Concepcion. . . .	7000
Corrientes..	125265	138000	Corrientes.. . . .	12000
Córdoba..	217019	317000	Córdoba.	30000
San Luis.	126890	70000	San Luis..	5000
Santiago..	108933	170000	Santiago..	8000
Mendoza.	155745	90000	Mendoza..	8000
San Juan.	103998	80000	San Juan.	10000
Rioja..	110786	70000	La Rioja..	6000
Catamarca.	246309	85000	Catamarca.. . . .	6000
Tucuman.	62259	150000	Tucuman.	16000
Salta.	155847	100000	Salta..	15000
Jujuy.	93905	50000	Jujuy.	8000
Gran Chaco.	621100	50000	» »	»
Misiones..	62110	3000	» »	»
Pampas del Sur.. . .	496880	25000	» »	»
Patagonia..	1.066140	25000	» »	»

Presupuesto de gastos en pesos fuertes para 1877:

Servicio de la deuda pública consolidada. . .	7.972258	Justicia, culto é instruccion pública.. . .	1.208088
Guerra y Marina.	5.015912	Hacienda.	891430
Interior.	1.876670	Relaciones exteriores. .	116376

Total de ingresos ó rentas de la Nacion en 1877, pesos fuertes 13.583634

Comercio de importacion 34.910290 $ f.
Comercio de exportacion 44.041131 $ f.
Deuda interior 21.071645 $ f.—Deuda exterior 44.409081 $ f.

El ejército activo consta de 15000 hombres de todas armas, y la marina de guerra de 28 buques con 88 cañones y una dotacion de 500 plazas.
La Marina mercante se compone de 6438 buques con 140520 toneladas.
Kilómetros de ferro-carril en explotacion 2317.— Kilómetros concedidos ó en construccion 3183.—Kilómetros de telégrafo eléctrico 15400.
Número de escuelas de 1.ª enseñanza 1982 con más de 120800 alumnos.
Poblacion oficial en 1869 de las 14 provincias de la República 1.736923, ascendiendo los extranjeros á 212000, en esta forma: italianos 71442, americanos 43663, españoles 34080, ingleses 10709, suizos 5860, alemanes 4997, etc.

ÍNDICE.

Preliminares.

GEOMETRÍA PLANA.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.