FELIPE ANGUITA

TRIGONOMETRÍA

RECTILÍNEA Y ESFÉRICA

F. CRESPILLO, EDITOR
BOLIVAR 369
BUENOS AIRES

ELEMENTOS

DE

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA Y ESFÉRICA

OBRAS DEL MISMO AUTOR

ARITMETICA, texto adaptado a los programas de las Escuelas Primarias y de Artes y Oficios.

ARITMETICA, 3ª edición, para 1er. año de los Colegios Nacionales (en colaboración).

ARITMETICA, 2ª edición, para 2º año de los Colegios Nacionales (en colaboración).

ALGEBRA, 4ª edición, para 4º año de los Colegios Nacionales (en colaboración).

ALGEBRA, 4ª edición, para 3er. año de los Colegios Nacionales (en colaboración).

GEOMETRIA, 2ª edición, para 1er. año de los Colegios Nacionales (en colaboración).

GEOMETRIA, para 2º año de los Colegios Nacionales (en colaboración).

GEOMETRIA, para 3er. año de los Colegios Nacionales (en colaboración).

La Regla de Cálculo. — Instrucciones para su manejo. — Un folleto.

ELEMENTOS

DE

TRIGONOMETRÍA

RECTILÍNEA Y ESFÉRICA

Texto adaptado a los programas de los
Colegios Nacionales, Escuelas Normales
y Escuelas Industriales

POR

FELIPE ANGUITA

Profesor de Matemáticas

Catedrático de Matemáticas de los Colegios Nacionales
"Mariano Moreno" y "Bartolomé Mitre", de la Escuela
de Mecánica de la Armada, etc.

2da. EDICION

F. CRESPILLO, EDITOR

BOLIVAR, 369

BUENOS AIRES

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

CAPITULO I

Funciones Trigonométricas

1. Fórmulas de Geometría Plana relativas a los triángulos.

TRIÁNGULO RECTÁNGULO. — En la figura 1 se tiene un triángulo rectángulo *ABC*. Por el *Teorema de Pitágoras*, estudiado en 3er. año, se tiene la relación:

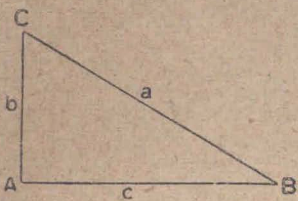

Fig. 1.

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (1)$$

es decir: *el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros de (1) se obtiene:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

luego: *la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.*

De la expresión (1) se deduce:

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$

y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

luego: *un cateto es igual a la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de la hipotenusa y el otro cateto.*

Triángulo cualquiera. — Si ABC, fig. 2, es un triángulo cuyo ángulo A es agudo, por Geometría Plana se tiene:

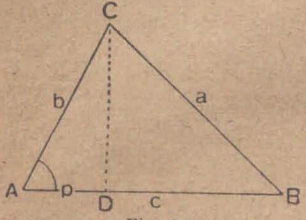

Fig. 2.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,.\,p$$

es decir: *el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo en un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo de uno de ellos por la proyección del otro lado sobre él.*

Si el triángulo ABC tiene el ángulo A obtuso, se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c\,.\,p$$

es decir: *el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso en un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el duplo de uno de ellos por la proyección del otro lado sobre él.*

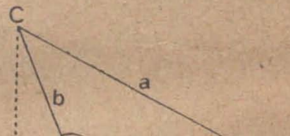

Fig. 3.

2. Semejanza de triángulos. — Dos triángulos son *semejantes*, cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y proporcionales los lados homólogos.

Lados homólogos son los que se oponen a ángulos iguales.

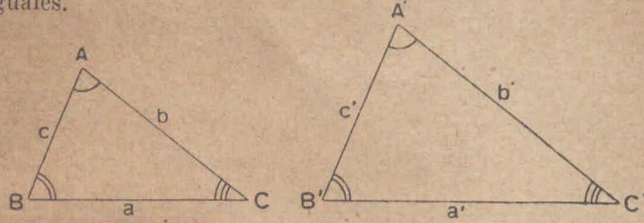

Fig. 4.

Si en los triángulos ABC y $A'B'C'$, fig. 4, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A = A' \;\; ; \;\; B = B' \;\; ; \;\; C = C' \\ \text{y además:} \quad \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \end{array}\right\} \text{es } \overset{\triangle}{ABC} \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

Al estudiar ~~en 3er. Año~~ semejanza de triángulos se demostró que para que dos triángulos fuesen semejantes bastaba que se cumpliesen una parte de las condiciones contenidas en la definición. Así, se demostró que dos triángulos son semejantes cuando tienen:

1º *Dos lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo comprendido;*

2º *Dos ángulos iguales;*

3º *Tres lados respectivamente proporcionales.*

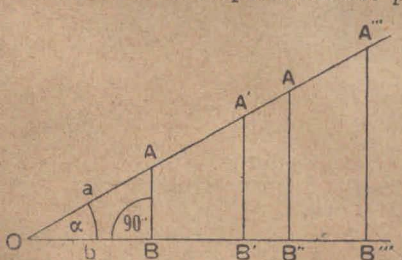

Fig. 5

3. Consideremos un ángulo cualquiera α, fig. 5.

Por un punto A de la recta a tracemos una perpendicular AB a la recta b. Si por otro punto A' de la recta a

trazamos $A'B' \perp b$, los triángulos AOB y $A'OB'$ formados, son semejantes, pues tienen dos ángulos iguales (2º *caso de semejanza*): uno es el ángulo α por ser común, y los otros son los rectos formados en B y en B'.

Si tomáramos otros puntos A'', A''',... y trazáramos perpendiculares a la recta b, todos los triángulos formados serían semejantes por el carácter transitivo de la semejanza, luego sus lados homólogos son proporcionales, es decir:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = \frac{A''B''}{OA''} = \ldots\ldots = \textit{número constante}$$

Como los segmentos considerados son cantidades homogéneas, *el cociente constante de la serie de razones anterior es un número abstracto*, observación que conviene tener muy presente cuando se estudien las definiciones de las funciones trigonométricas.

4. Funciones trigonométricas. — Se llaman *funciones trigonométricas* a los números determinados por las razones de dos lados de un triángulo rectángulo.

Estas funciones no son las longitudes de los elementos lineales, y son independientes de la escala de la figura.

Sea dado un ángulo γ, fig. 6. Trazando por un punto A del lado m un segmento $AB \perp m$, resulta un triángulo rectángulo ABC en el que relacionando sus lados dos a dos se obtienen las siguientes razones:

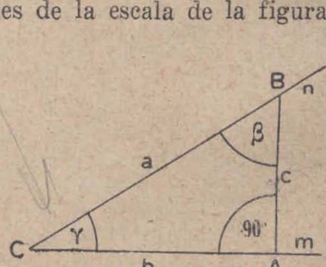

Fig. 6.

$$\frac{c}{a};\ \frac{b}{a};\ \frac{c}{b};\ \frac{b}{c};\ \frac{a}{b};\ \frac{a}{c}$$

Estas seis razones son las *funciones trigonométricas* de los *ángulos agudos* β y γ del triángulo ABC, independientes, como hemos dicho, de las longitudes de los lados del triángulo.

Las funciones trigonométricas son el *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante* y *cosecante*, que se abrevian así: *sen*, *cos*, *tg*, *cot*, *sec*, *cosec*.

Las funciones principales son el *seno*, *tangente* y *secante*; las otras, el *coseno*, *cotangente* y *cosecante*, se llaman *cofunciones*.

Más adelante veremos, (6), al definir las funciones trigonométricas que el lado AB podrá encontrarse a la izquierda de C o debajo de AC, estando el ángulo γ comprendido entre 0° y 360°.

5. Definición de las funciones trigonométricas. — Si consideramos los ángulos α, β, γ y δ orientados respecto a un *sistema de ejes de coordenadas rectangulares* (*) de manera que el vértice coincida con el origen, y uno de los lados coincida con el eje de las abscisas, fig. 7, los

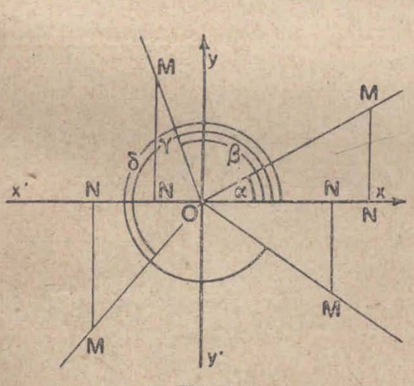

Fig. 7.

(*) Véase Algebra para 3er. año, por Bollo, Anguita y Dagnino Pastore, página 208 y siguientes.

segmentos MN y ON son, en los cuatro casos, las *ordenadas* y *abscisas*, respectivamente, de los diversos puntos M.

Según ya se ha visto, (*) : *las abscisas situadas a la derecha del origen son positivas, y las situadas a la izquierda, negativas; se representan con la letra* x.

Las ordenadas situadas arriba del origen son positivas, y las situadas debajo, negativas; se representan con la letra y.

El segmento OM llamado *vector*, es, en todos los casos, positivo: se representa con la letra ρ (ro).

6. Seno de un ángulo. — Se llama *seno* de un ángulo α, a la razón $\frac{y}{\rho}$, fig. 8:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{\rho}.$$

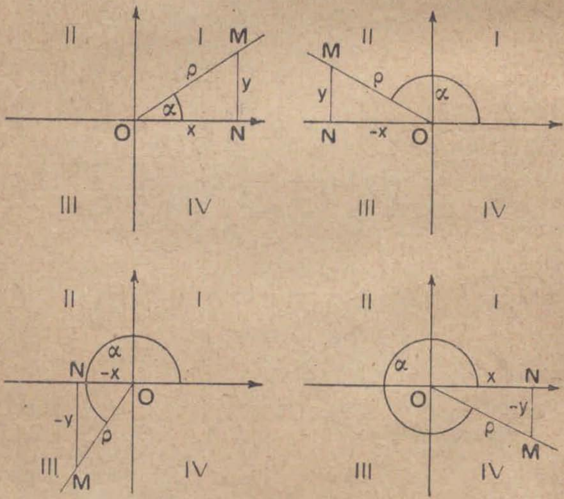

Fig. 8.

(*) Pág. 210, obra citada.

El seno es positivo si se encuentra el ángulo en el 1º o 2º cuadrantes; es *negativo*, si se halla en el 3º o 4º cuadrantes.

7. **Coseno de un ángulo.** — Se llama *coseno* de un ángulo α, a la razón $\frac{x}{\rho}$, fig. 8:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho}$$

El coseno es *positivo* si el ángulo se halla en el 1º o 4º cuadrantes; es *negativo* si está en el 2º o 3º cuadrantes.

8. **Tangente de un ángulo.** — Se llama *tangente* de un ángulo α, a la razón $\frac{y}{x}$, fig. 8:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

La tangente es *positiva* si el ángulo está en el 1º o 3º cuadrantes; es *negativa* si está en el 2º o 4º cuadrantes.

9. **Cotangente de un ángulo.** — Se llama *cotangente* de un ángulo α, a la razón $\frac{x}{y}$, fig. 8:

$$\cot \alpha = \frac{x}{y}$$

La cotangente es *positiva* en el 1º y 3º cuadrantes; es negativa en el 2º y 4º.

10. **Secante de un ángulo** — Se llama *secante* de un ángulo α, a la razón $\frac{\rho}{x}$, fig. 8:

$$\sec \alpha = \frac{\rho}{x}$$

La secante es *positiva* en el 1º y 4º cuadrantes; es *negativa* en el 2º y 3º.

11. Cosecante de un ángulo. — Se llama *cosecante* de un ángulo α, a la razón $\frac{\rho}{y}$, fig. 8:

$$\text{cosec } \alpha = \frac{\rho}{y}$$

La secante es *positiva* en el 1º y 2º cuadrantes; es *negativa* en el 3º y 4º.

12. Aplicaciones al triángulo rectángulo. — Consideremos el triángulo rectángulo *ABC*, fig. 9, orientado respecto a un sistema de coordenadas, es decir, que uno de los ángulos agudos coincida con el origen y uno de los catetos pertenezca al semieje positivo de las abscisas: Entonces la ordenada del punto *B* es el *lado opuesto al ángulo* α, y la abscisa del punto *B* es el *lado adyacente al ángulo* α.

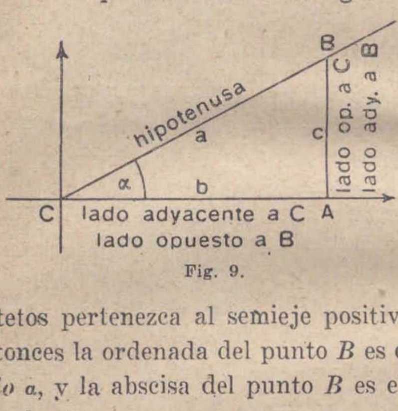

Fig. 9.

Aplicando las definiciones anteriores, resulta:

$$\text{sen } \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\textit{lado opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\textit{lado adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\textit{lado opuesto}}{\textit{lado adyacente}}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\textit{lado adyacente}}{\textit{lado opuesto}}$$

$$\sec \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}}$$

13. Ejemplos de aplicación. — 1º) *Hallar el seno y la tangente del ángulo γ, fig. 10.*

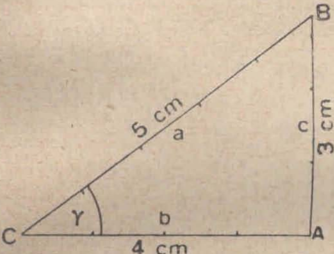

Fig. 10.

Solución

Por las fórmulas últimas, se tiene:

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{c}{a} = \frac{3\,cm}{5\,cm} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{c}{b} = \frac{3\,cm}{4\,cm} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

2º) *Hallar el coseno, la cotangente y la secante del ángulo R, fig. 11.*

Solución

Hace falta calcular el valor del cateto r; se tiene, (1):

$$r = \sqrt{p^2 - q^2} = \sqrt{144 - 81} = 7{,}93$$

$$\cos R = \frac{q}{p} = \frac{9}{12} = 0{,}75$$

$$\cot R = \frac{q}{r} = \frac{9}{7{,}93} = 1{,}13$$

$$\sec R = \frac{p}{q} = \frac{12}{9} = 1{,}33$$

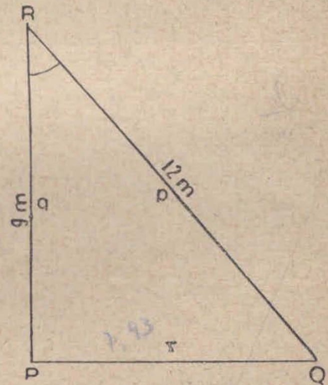

Fig. 11.

14. Construcción de ángulos conociendo sus funciones trigonométricas. — Conociendo una de las funciones trigonométricas de un *ángulo agudo*, éste puede determinarse gráficamente.

1º) *Construir el ángulo α sabiendo que sen α = 0,46.*

Solución

Se tiene: $$\operatorname{sen} \alpha = 0{,}46 = \frac{46}{100} = \frac{23}{50} = \frac{\textit{lado opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$$

Todo se reduce a construir ahora un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo α.

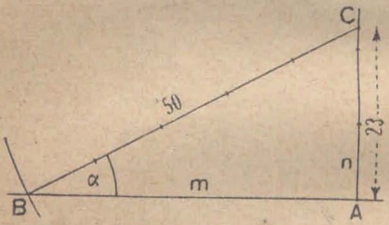

Fig. 12.

En una recta m, fig. 12, tomamos un punto A y se traza $n \perp m$. Luego se construye $AC = 23$ unidades, *milímetros*, por ejemplo. Haciendo centro con el compás en C y con radio igual a 50 m|m. se traza un arco que corte a m, quedando así construído el ángulo α.

Midiendo el ángulo con el transportador se halla $\alpha = 27^\circ 20'$ aproximadamente.

2º) *Construir el ángulo β sabiendo que cos β = 0,625.*

Solución

Se tiene: $$\cos \beta = 0{,}625 = \frac{625}{1{,}000} = \frac{5}{8} = \frac{\textit{lado adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$$

Ahora se construye un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo β.

En una recta m (fig. 13) tomamos un segmento $BA = 5$ unidades, *centímetros*, por ejemplo. En A se traza una recta $n \perp m$, y luego haciendo centro en B con radio igual a 8 de las unidades elegidas se traza un arco que corte a n, quedando así determinado el ángulo β. Con el transportador se halla que $\beta = 51° 40'$.

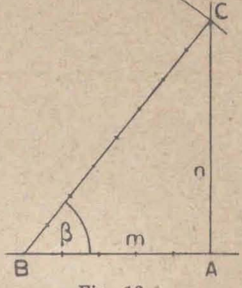

Fig. 13.

3º) *Construir el ángulo γ sabiendo que $tg\,\gamma = 0{,}75$.*

Solución

Se tiene: $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}75 = \dfrac{75}{100} = \dfrac{3}{4} = \dfrac{\textit{lado opuesto}}{\textit{lado adyacente}}$

Ahora se construye un triángulo rectángulo conociendo los dos catetos.

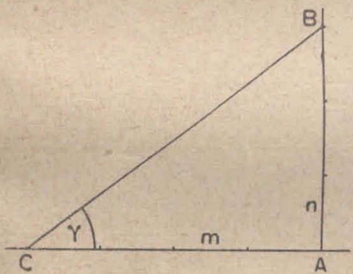

Fig. 14

En una recta m, fig. 14, se construye $CA = 4$ unidades, *centímetros*, por ejemplo, y en A se traza $n \perp m$, tomando luego $AB = 3$ *cm*.

Uniendo B con C resulta un triángulo rectángulo cuyo ángulo C es el ángulo γ buscado. Con el transportador se halla que $\gamma = 37°$, aproximadamente.

Procedienao de análoga manera, puede construirse un ángulo conociendo su *cotangente*, o su *secante*, o su *cosecante*.

Trigonometría. — La *trigonometría* estudia las funciones trigonométricas y su aplicación a la resolución de triángulos.

EJERCICIOS

1. En un triángulo rectángulo ABC, el cateto b mide 15 cm. y la hipotenusa a mide 40 cm. Calcular sen B, tg B, sen C y tg C.

$$\text{R: } \begin{cases} \text{sen } B = 0{,}3750; \ \text{tg } B = 0{,}4045 \\ \text{sen } C = 0{,}9270; \ \text{tg } C = 2{,}4720 \end{cases}$$

2. En un triángulo rectángulo ABC, la hipotenusa mide 10 m y el cateto b mide 6 m. Calcular sen B, tg B, sen C y tg C.

$$\text{R: } \begin{cases} \text{sen } B = 0{,}6; \ \text{tg } B = 0{,}75 \\ \text{sen } C = 0{,}8; \ \text{tg } C = 1{,}333\ldots \end{cases}$$

3. En un triángulo rectángulo ABC, $b = 150$ m. y $c = 225$ m. Calcular sen B, tg B, sen C y tg C.

$$\text{R: } \begin{cases} \text{sen } C = 0{,}8320; \ \text{tg } C = 1{,}5 \\ \text{sen } B = 0{,}555 \ ; \ \text{tg } B = 0{,}6667 \end{cases}$$

4. Se tiene un ángulo α. Por un punto de uno de sus lados se traza una perpendicular al otro lado, midiendo esta perpendicular 1,25 m. La distancia entre el vértice y el pie de la perpendicular es de 0,775 m. Calcular sen α y tg α.

R: sen $\alpha = 0{,}8499$; tg $\alpha = 1{,}6129$

5. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 43,7 cm. y 79,2 cm. Calcular la hipotenusa y los senos de los ángulos agudos.

R: 90,45 cm.; sen $B = 0{,}8756$; sen $C = 0{,}4831$

6. En un triángulo rectángulo ABC, $a = 12$ *m* y $b = 9$ *m*. Calcular c, sen B y tg C.

R: $c = 7{,}94$ m.; sen $B = 0{,}75$; tg $C = 0{,}8819$

7. En un triángulo rectángulo ABC, $b = 12$ cm. y $c = 15$ cm. Calcular las funciones de B y las cofunciones de C.

$$\text{R:} \begin{cases} \text{sen } B = 0{,}6247; \ \text{tg } B = 0{,}8; \ \sec B = 1{,}2806 \\ \cos C = 0{,}6247; \ \cot C = 0{,}8; \ \text{cosec } C = 1{,}2806 \end{cases}$$

8. Construir el ángulo agudo α, sabiendo que sen $\alpha = 0{,}475$.
9. Construir los ángulos cuyos senos sean iguales a 0,36.
10. Construir los ángulos cuyos senos sean iguales a 0,88.
11. Construir el ángulo agudo B, sabiendo que cos $B = 0{,}32$.
12. Construir los ángulos cuyos cosenos sean iguales a 0,56.
13. Construir los ángulos cuyos cosenos sean iguales a 0,96.
14. Construir el ángulo α sabiendo que tg $\alpha = 0{,}75$.
15. Construir los ángulos cuyas tangentes sean iguales a 2,36.
16. Construir los ángulos cuyas tangentes sean iguales a 4,08.
17. De acuerdo con los datos de la figura 15, calcular las funciones trigonométricas, en valor y signo, de los ángulos α, β, γ y δ.

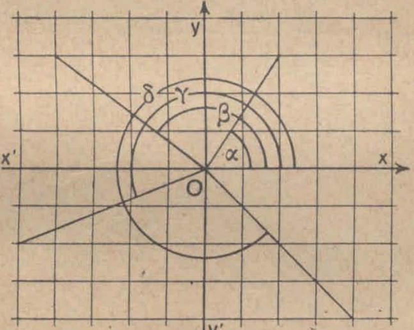

Fig. 15.

CAPITULO II

Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo

15. Relación entre el seno y el coseno de un ángulo. — Teorema Fundamental. — *En todo triángulo, el cuadrado de su seno, más el cuadrado de su coseno, es igual a 1.*

H) ángulo α, fig. 16

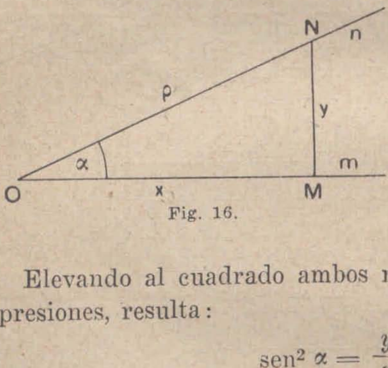

Fig. 16.

T) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Por definición de seno y coseno, (6 y 7), se tiene:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{\rho}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de las dos expresiones, resulta:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{y^2}{\rho^2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{x^2}{\rho^2}$$

sumando miembro a miembro:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{y^2 + x^2}{\rho^2} \qquad (1)$$

Pero por el teorema de *Pitágoras*:

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

luego, reemplazando en (1):

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{\rho^2}{\rho^2}$$

y como el cociente de dos números iguales es 1:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

16. Corolario. — Se tiene:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

de donde: $\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros:

$$\boxed{\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$$

es decir: *El seno de un ángulo es igual a más o menos la raíz cuadrada de* 1 *menos el cuadrado del coseno del mismo ángulo.*

Ejemplo: *Dado* $\cos \alpha = 0,6$ *calcular* $\operatorname{sen} \alpha$.

Se tiene:

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - 0,6^2} = \pm \sqrt{1 - 0,36} = \pm \sqrt{0,64} = \pm 0,8$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm 0,8$$

17. Corolario II. — Se tiene:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

de donde $\cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$

y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros:

$$\boxed{\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

luego: *El coseno de un ángulo es igual a más o menos la raíz cuadrada de* 1 *menos el cuadrado del seno del mismo ángulo.*

Ejemplo: *Dado sen* $\alpha = 0{,}4$, *calcular cos* α.

Se tiene: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$

$$= \pm\sqrt{1 - 0{,}4^2} = \pm\sqrt{0{,}84} = \pm\, 0{,}916$$

$$\cos\alpha = \pm\, 0{,}916$$

18. Relación entre la tangente y el seno y coseno de un ángulo. — TEOREMA. — *La tangente de un ángulo es igual a la razón del seno y coseno del mismo ángulo.*

H) ángulo α, fig. 16 *T*) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

Por definición de tangente, se tiene:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \qquad (1)$$

También se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{\rho}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\rho}$$

y dividiendo ordenadamente:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{y}{\rho}}{\dfrac{x}{\rho}}$$

y efectuando la división indicada en el segundo miembro, resulta:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2), se obtiene:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

19. Relación entre la tangente y la cotangente de un ángulo. — TEOREMA. — *La cotangente de un ángulo es igual a la inversa de la tangente del mismo ángulo.*

H) ángulo α, fig. 16 *T*) $\cot\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Por definición de cotangente, se tiene:

$$\cot\alpha = \frac{x}{y}$$

o bien:

$$\cot\alpha = \frac{1}{\frac{y}{x}}$$

pero $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$, luego:

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}} \qquad (1)$$

20. COROLARIO I. — De la expresión (1) anterior se deduce:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

luego: *La tangente de un ángulo es igual a la inversa de la cotangente del mismo ángulo.*

21. COROLARIO II. — De la expresión (1) se deduce:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

luego: *El producto de la tangente por la cotangente de un ángulo es igual a 1.*

22. COROLARIO III. — Por el teorema (19) se tiene:

$$\cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad (1)$$

y como por el teorema (18) es: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

reemplazando este valor en la (1) resulta:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}$$

y efectuando la división:

$$\boxed{\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}$$

luego: *La cotangente de un ángulo es igual a la razón del coseno y del seno del mismo ángulo.*

23. Relación entre la secante y el coseno. — TEOREMA. — *La secante de un ángulo es la inversa del coseno del mismo ángulo.*

H) ángulo α, fig. 16. *T*) $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$

Por definición de secante:

$$\sec \alpha = \frac{\rho}{x}$$

o bien

$$\sec \alpha = \frac{1}{\dfrac{x}{\rho}}$$

pero $\dfrac{x}{\rho} = \cos \alpha$, luego:

$$\boxed{\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}}$$

24. COROLARIO. — De la expresión última se deduce:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$$

luego: *El coseno de un ángulo es la inversa de la secante del mismo ángulo.*

25. **Relación entre la cosecante y el seno.** — TEOREMA. — *La cosecante de un ángulo es la inversa del seno del mismo ángulo.*

H) *ángulo* α, fig. 16 *T*) $\operatorname{cosec} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$

Por definición de cosecante:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\rho}{y}$$

o bien:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\dfrac{y}{\rho}}$$

pero $\dfrac{y}{\rho} = \operatorname{sen} \alpha$, luego:

$$\boxed{\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}$$

26. COROLARIO. — De la expresión anterior se deduce:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}$$

luego: *El seno de un ángulo es la inversa de la cosecante del mismo ángulo.*

Expresión de una función trigonométrica por medio de otra.

27. **Valor del cos, tg, cot, sec y cosec en función del seno.** — Hemos visto, (17), que:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} \qquad (1)$$

También sabemos (18), que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

y reemplazando el valor (1):

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

Por (22), es: $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

o bien: $$\cot\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Por (23), es: $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

y reemplazando el valor (1):

$$\sec\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$$

Por (25) se sabe que: $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

28. **Valor del sen, tg, cot, sec y cosec en función del coseno.** — Procediendo como en el párrafo anterior, se obtiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

29. **Valor del sen, cos, cot, sec y cosec en función de la tangente.** — Hallamos el valor del sen α y cos α resolviendo el sistema:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \tag{1}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \tag{2}$$

Dividiendo ambos miembros de la (1) por $\cos^2 \alpha$:

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

o bien
$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

de donde:
$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}}$$

Reemplazando este valor en (2):

$$\text{tg } \alpha = \pm \frac{\text{sen } \alpha}{\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}}} = \pm \text{ sen } \alpha . \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}$$

de donde:
$$\text{sen } \alpha = \pm \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}}$$

Por (19):
$$\cot \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

Por (23):
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

y reemplazando el valor del $\cos \alpha$:

$$\sec \alpha = \pm \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}$$

Por (25):
$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

y reemplazando el valor del sen α:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

30. Aplicaciones. — 1º *Calcular* $tg\, \alpha$ *sabiendo que* $sen\, \alpha = 0{,}5$.

Se tiene: $$\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - 0{,}5^2} = \pm \sqrt{0{,}75} = \pm\, 0{,}866$$

y como $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

en valor absoluto se tiene:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0{,}500}{0{,}866} = 0{,}577$$

2º) *Calcular* $cot\, \alpha$ *sabiendo que* $tg\, \alpha = \frac{3}{5}$

Se tiene: $$\cot \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

3º) *Calcular* $cot\, \alpha$ *sabiendo que* $cos\, \alpha = \frac{1}{3}$

Se tiene: $$\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^2} = \pm \sqrt{\tfrac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

y en valor absoluto se tiene:

$$\cot \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

4º) *Calcular sec α sabiendo que cos α = 0,45.*

Se tiene: $$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{0,45} = 2,22$$

5º) *Calcular cosec α sabiendo que sen α = 0,234.*

Se tiene: $$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{0,234} = 4,27$$

31. Angulos positivos y negativos. — Se considera como *positivo* el ángulo engendrado por una semirrecta que gira alrededor de un punto en sentido contrario a las agujas de un reloj, y *negativo* en caso contrario. En la figura 17 el ángulo α se considera positivo, y negativo el ángulo $A'OB$.

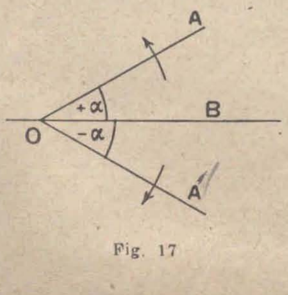

Fig. 17

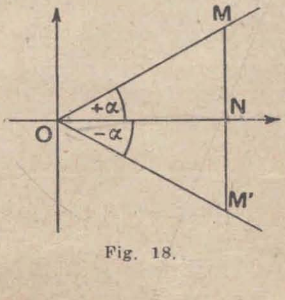

Fig. 18.

32. Funciones trigonométricas de los ángulos negativos. — Sean los ángulos $+\alpha$ y $-\alpha$, fig. 18, de igual valor absoluto y distinto signo.

SENO. — Por definición de seno, (6), se tiene:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{+MN}{OM} \qquad (1)$$

$$\operatorname{sen} (-\alpha) = \frac{-M'N}{OM'} \qquad (2)$$

Los triángulos rectángulos ONM y ONM' son iguales por tener iguales los ángulos agudos $+\alpha$ y $-\alpha$ (iguales en valor absoluto), y común el cateto ON, luego:

$$M'N = MN$$
$$OM' = OM$$

Reemplazando en (2):

$$\operatorname{sen} (-\alpha) = \frac{-MN}{OM} \qquad (3)$$

Multiplicando ambos miembros de (1) por -1, resulta:

$$-\operatorname{sen} \alpha = \frac{-MN}{OM} \qquad (4)$$

Comparando (3) y (4), se deduce:

$$\boxed{\operatorname{sen} (-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha}$$

luego: *El seno de un ángulo negativo es igual en valor y de distinto signo que el seno del mismo ángulo pero positivo.*

COSENO. — Por definición de coseno, (7):

$$\cos \alpha = \frac{ON}{OM} \qquad (1)$$

$$\cos (-\alpha) = \frac{ON}{OM'} \qquad (2)$$

Pero como los triángulos rectángulos ONM y ONM' son iguales, es:

$$OM' = OM$$

luego: $$\cos(-\alpha) = \frac{ON}{OM} \qquad (3)$$

Comparando (1) y (3), se deduce:

$$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$$

luego: *El coseno de un ángulo negativo es igual en valor y signo que el coseno del mismo ángulo pero positivo.*

TANGENTE. — Por definición de tangente, (8):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MN}{ON} \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-M'N}{ON} \qquad (2)$$

y como $M'N = MN$, en la (2) se tiene:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-MN}{ON} \qquad (3)$$

multiplicando ambos miembros de (1) por -1:

$$-\operatorname{tg}\alpha = \frac{-MN}{ON} \qquad (4)$$

comparando (3) y (4), se deduce:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad (5)$$

luego: *La tangente de un ángulo negativo es igual en valor y de distinto signo que la tangente del mismo ángulo pero positivo.*

COTANGENTE. — Dividiendo 1 por ambos miembros de la (5):

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(-\alpha)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

pero, (19), $\cot \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, luego:

$$\boxed{\cot(-\alpha) = -\cot \alpha}$$

luego: *La cotangente de un ángulo negativo es igual en valor y de distinto signo que la cotangente del mismo angulo pero positivo.*

Secante. — Hemos visto que:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

y dividiendo 1 por ambos miembros de esta igualdad:

$$\frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

pero, (23), $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, luego:

$$\boxed{\sec(-\alpha) = \sec \alpha}$$

luego: *La secante de un ángulo negativo es igual en valor y signo que la secante del mismo ángulo pero positivo.*

Cosecante. — Hemos visto que:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

y dividiendo 1 por ambos miembros:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(-\alpha)} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

pero, (25), $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$, luego:

$$\boxed{\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha}$$

luego: *La cosecante de un ángulo negativo es igual en valor y de distinto signo que la cosecante del mismo ángulo pero positivo.*

EJERCICIOS

18. Dado $\cos \beta = 0{,}5$, calcular sen β y cot β.

R: $\text{sen } \beta = 0{,}866$; $\cot \beta = 0{,}577$

19. Dado $\text{sen } \alpha = 0{,}8$, calcular las demás funciones del ángulo α

R: $\cos \alpha = 0{,}6$; $\text{tg } \alpha = 1{,}33\ldots$; $\cot \alpha = 0{,}75$;
$\sec \alpha = 1{,}66\ldots$; $\text{cosec } \alpha = 1{,}25$

20. Dado $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$, calcular sen α y cos α

R: $\text{sen } \alpha = 0{,}6$; $\cos \alpha = 0{,}8$

21. Dado $\text{tg } \alpha = 1{,}45$, calcular cot α

R: $\cot \alpha = 0{,}69$

22. Dado $\cot \beta = 0{,}865$, calcular tg β

R: $\text{tg } \alpha = 1{,}156$

23. Si $\cos \alpha = 0{,}342$, calcular sec α

R: $\sec \alpha = 2{,}923$

24. Si $\text{sen } \beta = 0{,}058$, calcular cosec β

R: $\text{cosec } \beta = 17{,}24$

25. Si $\cos \alpha = 0{,}34$, calcular cosec α

R: $\text{cosec } \alpha = 1{,}063$

26. Si $\cos \alpha = 0{,}55$, calcular el seno, tangente y cotangente de α

R: $\text{sen } \alpha = 0{,}835$; $\text{tg } \alpha = 1{,}518$; $\cot \alpha = 0{,}658$

27. Si $\text{sen } \beta = 0{,}15$, calcular sec β

R: $\sec \beta = 1{,}012$

28. Calcular las funciones trigonométricas del ángulo α, si $\text{tg } \alpha = 0{,}35$.

R: $\text{sen } \alpha = 0{,}33$; $\cos \alpha = 0{,}944$; $\cot \alpha = 2{,}857$;
$\sec \alpha = 1{,}059$; $\text{cosec } \alpha = 3{,}03$

29. Calcular las funciones trigonométricas del ángulo β, si $\text{tg } \beta = 1{,}5$.

R: $\text{sen } \beta = 0{,}832$; $\cos \beta = 0{,}555$;
$\cot \beta = 0{,}667$; $\sec \beta = 1{,}8$; $\text{cosec } \beta = 1{,}2$;

CAPITULO III

Relaciones entre las funciones trigonométricas de dos ángulos suplementarios

33. **Angulos suplementarios.** — Dos ángulos son suplementarios, cuando su suma es igual a dos ángulos rectos.

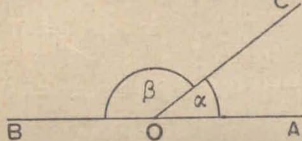

Fig. 19.

Los ángulos α y β, figura 19, son suplementarios, pues:

$$\alpha + \beta = \widehat{AOB} = 2\ R$$

Si dos ángulos son suplementarios, se dice que cada uno de ellos es *suplemento* del otro.

34. TEOREMA. — *El seno de un ángulo es igual al seno del suplemento de dicho ángulo.*

H) $\alpha + \beta = 180^\circ$, figura 20 $\qquad$ T) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$.

Tracemos la semirrecta c', tal, que forme un ángulo $\beta' = \beta$, y construyamos dos segmentos iguales OM y OM'. Por los puntos M y M' tracemos las rectas MN y $M'N'$ perpendiculares a la recta AB, y unamos M con M'.

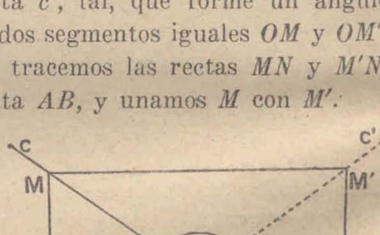

Fig. 20.

Los triángulos rectángulos OMN y $OM'N'$ son iguales por tener iguales las hipotenusas OM y OM', por construcción, así como los ángulos agudos β y β':

$$\overset{\triangle}{OMN} = \overset{\triangle}{OM'N'} \therefore MN = M'N' \qquad (1)$$

Por definición de seno, se tiene:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{MN}{OM} \qquad (2)$$

$$\text{sen}\ \beta' = \frac{M'N'}{OM'}$$

pero $OM' = OM$ por construcción, y $M'N' = MN$ por lo demostrado en (1), y $\beta' = \beta$ por construcción, luego, reemplazando:

$$\text{sen}\ \beta = \frac{MN}{OM} \qquad (3)$$

Comparando (2) y (3), por el carácter recíproco de la igualdad, resulta:

$$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \beta$$

Ejemplo: Si $60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, es $\text{sen}\ 60^\circ = \text{sen}\ 120^\circ$

35. TEOREMA. — *Si dos ángulos son suplementarios, sus cosenos son iguales en valor absoluto y de distinto signo.*

H) $\alpha + \beta = 180^\circ$, fig. 20 *T*) $\cos\alpha = -\cos\beta$

En el párrafo anterior se ha visto que:

$$\overset{\triangle}{OMN} = \overset{\triangle}{OM'N'} \therefore ON = O'N' \qquad (1)$$

Considerando el punto O como origen de abcisas en la recta AB, por lo estudiado en 3er. año se tiene que:

$$ON' = +\ ON'$$
$$ON = -\ ON$$

Por definición de coseno, se tiene:

$$\cos\alpha = \frac{-ON}{OM} = -\frac{ON}{OM} \qquad (2)$$

$$\cos\beta' = \frac{+ON'}{OM'} = +\frac{ON'}{OM'}$$

pero $\beta' = \beta$ y $OM' = OM$ por construcción, y $ON = O'N'$ por lo demostrado en (1), luego, reemplazando:

$$\cos \beta = + \frac{ON}{OM} \qquad (3)$$

Comparando (2) y (3), se deduce que los segundos miembros son de igual valor absoluto y de distinto signo, luego los primeros miembros también serán de igual valor absoluto y de distinto signo, es decir:

$$\cos \alpha = - \cos \beta$$

Ejemplo: $\cos 80^\circ = - \cos 100^\circ$; $80^\circ + 100^\circ = 180^\circ$

36. Teorema. — *Si dos ángulos son suplementarios, sus tangentes son iguales en valor absoluto y de distinto signo.*

H) $\alpha + \beta = 180^\circ$, fig. 20 *T*) $\operatorname{tg} \alpha = - \operatorname{tg} \beta$

Se tiene según lo demostrado anteriormente, (34):

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$$

y también, (35): $\cos \alpha = - \cos \beta$

dividiendo ordenadamente:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = - \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}$$

o bien, (18): $\operatorname{tg} = - \operatorname{tg} \beta$

Ejemplo:

$$\operatorname{tg} 50^\circ = - \operatorname{tg} 130^\circ \quad ; \quad 50^\circ + 130^\circ = 180^\circ$$

37. Teorema. — *Si dos ángulos son suplementarios, sus cotangentes son iguales en valor absoluto y de distinto signo.*

H) $\alpha + \beta = 180^\circ$, fig. 20 *T*) $\cot \alpha = - \cot \beta$

Se tiene, por (35):

$$\cos \alpha = - \cos \beta$$

y por (34): $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$

dividiendo ordenadamente:

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = - \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$$

o bien, (19):

$$\cot\alpha = -\cot\beta$$

Ejemplo: $\cot 40^\circ = -\cot 140^\circ \quad ; \quad 40 + 140^\circ = 180^\circ$

38. TEOREMA. — *Si dos ángulos son suplementarios, sus secantes son iguales en valor absoluto y de distinto signo.*

H) $\alpha + \beta = 180^\circ$, fig. 20 *T*) $\sec\alpha = -\sec\beta$

Sabemos que: $1 = 1$

y que, (35): $\cos\alpha = -\cos\beta$

dividiendo ordenadamente:

$$\frac{1}{\cos\alpha} = - \frac{1}{\cos\beta}$$

o bien, (23):

$$\sec\alpha = -\sec\beta$$

Ejemplo: $\sec 70^\circ = -\sec 110^\circ \quad ; \quad 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$

39. TEOREMA. — *Si dos ángulos son suplementarios, sus cosecantes son iguales en valor y signo.*

H) $\alpha + \beta = 180^\circ$, fig. 20 *T*) $\operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{cosec}\beta$

Sabemos que: $1 = 1$

y que, (34): $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$

dividiendo ordenadamente:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}$$

o bien, (25): $\operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{cosec}\beta$

Ejemplo: $\operatorname{cosec} 25^\circ = \operatorname{cosec} 155^\circ \quad ; \quad 25^\circ + 155^\circ = 180^\circ$

Relaciones entre las funciones trigonométricas de dos ángulos complementarios

40. Angulos complementarios. — Dos ángulos son *complementarios*, cuando su suma es un ángulo recto.

Los ángulos α y β, fig. 21, son complementarios, pues:

$$\alpha + \beta = \widehat{AOB} = 1R.$$

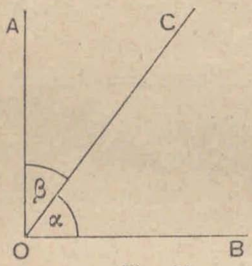

Fig. 21.

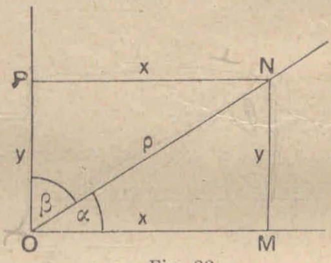

Fig. 22.

Si dos ángulos son complementarios, se dice que cada uno de ellos es *complemento* del otro.

41. Teorema. — *El seno de un ángulo es igual al coseno del complemento de dicho ángulo.*

H) $\alpha + \beta = 90^o$, fig. 22 *T*) $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$

Por definición de seno y de coseno, se tiene:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{\rho} \qquad (1)$$

$$\cos \beta = \frac{OP}{\rho}$$

Como la figura $OMNP$ es un rectángulo, se deduce que:

$$OP = MN = y$$

luego:
$$\cos \beta = \frac{y}{\rho} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2), por el carácter transitivo de la igualdad se deduce que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$$

Ejemplo: $\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ$, porque $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

42. Corolario. — Se tiene que si es:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \therefore \quad \operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha$$

luego: *Si dos ángulos son complementarios, el coseno de uno de ellos es igual al seno del otro.*

Ejemplo:

$\cos 53^\circ 20' = \operatorname{sen} 36^\circ 40'$, porque $53^\circ 20' + 36^\circ 40' = 90^\circ$

43. Teorema. — *La tangente de un ángulo es igual a la cotangente del complemento de dicho ángulo.*

H) $\alpha + \beta = 90^\circ$, fig. 22 *T*) $\operatorname{tg} \alpha = \cot \beta$

Por definición de tangente y de cotangente, se tiene:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \qquad (1)$$

$$\cot \beta = \frac{OP}{PN}$$

pero: $OP = y$; $PN = x$, luego:

$$\cot \beta = \frac{y}{x} \qquad (2)$$

Como los segundos miembros de (1) y (2) son iguales, se deduce:

$$\operatorname{tg} \alpha = \cot \beta$$

Ejemplo: $\operatorname{tg} 20^\circ = \cot 70^\circ$, porque $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$

44. Corolario. — Se tiene que si es:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \therefore \quad \operatorname{tg} \alpha = \cot \beta$$

luego, por el carácter recíproco de la igualdad:

$$\cot \beta = \operatorname{tg} \alpha$$

luego: *Si dos ángulos son complementarios, la cotangente de uno de ellos es igual a la tangente del otro.*

Ejemplo: $\cot 48^\circ = \operatorname{tg} 42^\circ$, porque $48^\circ + 42^\circ = 90^\circ$

45. Teorema. — *La secante de un ángulo es igual a la cosecante del complemento de dicho ángulo.*

H) $\alpha + \beta = 90^\circ$, fig. 22 *T*) $\sec \alpha = \operatorname{cosec} \beta$

Por definición de secante y de cosecante:

$$\sec \alpha = \frac{\rho}{x} \qquad (1)$$

$$\operatorname{cosec} \beta = \frac{\rho}{PN}$$

pero $PN = x$, luego:

$$\operatorname{cosec} \beta = \frac{\rho}{x} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que:

$$\sec \alpha = \operatorname{cosec} \beta$$

Ejemplo: $\sec 10^\circ = \operatorname{cosec} 80^\circ$, porque $10^\circ + 80^\circ = 90^\circ$

46. Corolario. — Se tiene que si es:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \therefore \quad \sec \alpha = \operatorname{cosec} \beta$$

también es:

$$\operatorname{cosec} \beta = \sec \alpha$$

luego: *Si dos ángulos son complementarios, la cosecante de uno de ellos es igual a la secante del otro.*

Ejemplo:

$\operatorname{cosec} 15^\circ 30' = \sec 74^\circ 30'$, porque $15^\circ 30' + 74^\circ 30' = 90^\circ$

47. Expresión general de las funciones trigonométricas de dos ángulos complementarios. — Dado el ángulo α, su complemento es $90^\circ - \alpha$, luego, por los teoremas anteriores, se tiene:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \alpha &= \cos(90^\circ - \alpha) \\
\cos \alpha &= \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) \\
\operatorname{tg} \alpha &= \cot(90^\circ - \alpha) \\
\cot \alpha &= \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) \\
\sec \alpha &= \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) \\
\operatorname{cosec} \alpha &= \sec(90^\circ - \alpha)
\end{aligned}$$

48. Funciones trigonométricas de los arcos de circunferencia. — Sabemos que la medida de un arco es la medida del ángulo central correspondiente. Las funciones trigonométricas de los arcos de circunferencia son las mismas que las de los ángulos centrales respectivos.

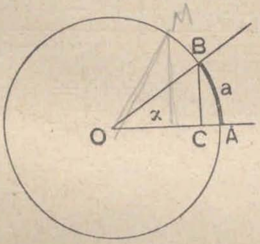

Fig. 23.

Si el ángulo α, fig. 23, es el ángulo central del arco a, las funciones trigonométricas del arco a son las funciones del ángulo α.

EJERCICIOS

30. Dados los ángulos

1º)	30º	6º)	60º
2º)	38º	7º)	40º
3º)	140º	8º)	120º
4º)	155º	9º)	150º
5º)	142º	10º)	25º

decir cuáles son los que tienen igual seno.

R: 1º y 9º; 6º y 8º; 3º y 7º; 4º y 10º; 2º y 5º

31. Dados los ángulos:

1º)	50°	6º)	120°
2º)	18°	7º)	132°
3º)	60°	8º)	40°
4º)	72°	9º)	30°
5º)	-30°	10º)	-42°

decir los pares de ángulos en donde las funciones de uno sean las cofunciones del otro.

R: 1º y 8º; 2º y 4º: 3º y 9º; 5º y 6º; 7º y 10º

32. Simplificar la expresión: $\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) - \cos(90^\circ - \alpha)$

R: $\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha$

33. Idem: $$\frac{\cos(90^\circ - \alpha) + 2\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) - \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

R: $\cos\alpha$

CAPITULO IV

Funciones trigonométricas de algunos ángulos

49. Funciones trigonométricas de un ángulo de 0°. — Un ángulo de 0° se puede considerar como perteneciente a un triángulo rectángulo *ABC*. fig. 24, cuyo cateto opuesto al ángulo de 0° es nulo, es decir, que el punto *C* es el mismo punto *A*.

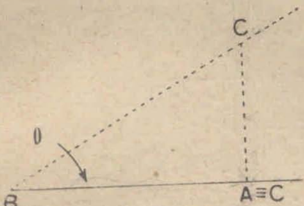

Fig. 24.

Por definición, se tiene:

$$\text{sen } 0^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{0}{BC} = 0$$

es decir: $\text{sen } 0^\circ = 0$

luego: *El seno de 0° es cero.*

Por definición de coseno:

$$\cos 0^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AB} = 1$$

es decir: $\cos 0^\circ = 1$

luego: *El coseno de 0° es 1.*

Por un teorema anterior, (18):

$$\text{tg } 0^\circ = \frac{\text{sen } 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

es decir: $\text{tg } 0^\circ = 0$

luego: *La tangente de 0° es cero.*

Por un corolario anterior, (22):

$$\cot 0^\circ = \frac{\cos 0^\circ}{\operatorname{sen} 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \quad (*)$$

es decir:

$$\cot 0^\circ = \infty$$

luego: *La cotangente de 0° es infinita, es decir, no tiene ningún valor numérico.*

Por un teorema anterior, (23):

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

es decir:

$$\sec 0^\circ = 1$$

luego: *La secante de 0° es igual a uno.*

Por un corolario anterior, (24):

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

es decir:

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \infty$$

luego: *La cosecante de 0° es infinita, es decir, no tiene ningún valor numérico.*

50. Funciones trigonométricas de un ángulo de 90°. — Un ángulo de 90° es el complemento de otro de 0°, puesto que:

$$90^\circ + 0^\circ = 90^\circ$$

y por (41) se tiene:

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \cos 0^\circ = 1$$

luego: *El seno de 90° es 1.*

Por (42): $\cos 90^\circ = \operatorname{sen} 0^\circ = 0$

luego: *El coseno de 90° es 0.*

Por (43): $\operatorname{tg} 90^\circ = \cot 0^\circ = \infty$

luego: *La tangente de 90° es infinita.*

Por (44): $\cot 90^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$

(*) A medida que el divisor disminuye, el cociente aumenta, y cuando el divisor tiende a cero, el cociente tiende a ser tan grande, que no es posible expresarlo numéricamente, indicándose entonces con el signo ∞ (infinito).

luego: *La cotangente de 90° es cero.*

Por (45): $\sec 90° = \operatorname{cosec} 0° = \infty$

luego: *La secante de 90° es infinita.*

Por (46): $\operatorname{cosec} 90° = \sec 0° = 1$

luego: *La cosecante de 90° es 1.*

51. Funciones trigonométricas de un ángulo de 30°. — Consideremos un triángulo equilátero *ABC*, fig. 25, de lado *a*. Tomando el punto *M*, medio de *AC*, *BM* será la mediana de *AC*, y como se trata de un triángulo equilátero, *BM* es la bisectriz del ángulo en *B* que es de 60°, resultando así el ángulo *ABM* de 30°

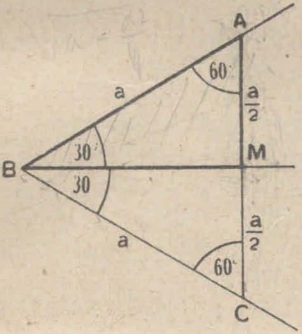

Fig. 25.

Por definición de seno, se tiene:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$$

Por definición de coseno:

$$\cos 30° = \frac{BM}{AB} \qquad (1)$$

pero *BM* es un cateto del triángulo rectángulo *ABM*, luego por el teorema de *Pitágoras*:

$$BM^2 = AB^2 - AM^2 \therefore BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$BM = \sqrt{\frac{3\,a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

reemplazando este valor en (1):

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2\,a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\ldots$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por el teorema (18) se tiene:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$

y reemplazando valores resulta:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577\ldots$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por el teorema (19) se tiene:

$$\cot 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ}$$

y reemplazando valores resulta:

$$\cot 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = 1{,}732\ldots$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

Por el teorema (23) se tiene:

$$\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ}$$

o bien: $$\sec 30^\circ = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}154\ldots$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Por el teorema (25) se tiene:

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 30^\circ}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$$

52. Funciones trigonométricas de un ángulo de 60°. — Conociendo las funciones trigonométricas de un ángulo de 30°, por las relaciones (47) se tienen calculadas las funciones trigonométricas de 60°, puesto que los ángulos de 30° y 60° son complementarios:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Directamente, y de una manera análoga a la de (51), también se pueden calcular las funciones trigonométricas de un ángulo de 60°

53. Funciones trigonométricas de un ángulo de 45°.

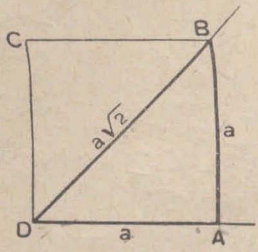

Fig. 26.

— Consideremos un cuadrado $ABCD$, fig. 26, de lado a.

Trazando la diagonal BD, por Geometría Plana sabemos que el ángulo ADB es de 45°.

Por definición de seno, se tiene:

$$\text{sen } 45^0 = \frac{AB}{BD} \qquad (1)$$

pero BD es hipotenusa del triángulo rectángulo ABD, luego, por el teorema de *Pitágoras*:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2\ a^2} = a\sqrt{2}$$

y reemplazando este valor en (1):

$$\text{sen } 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\ldots$$

$$\text{sen } 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por definición de coseno, se tiene:

$$\cos 45^0 = \frac{AD}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$$

$$\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por el teorema (18) se tiene:

$$\text{tg } 45^o = \frac{\text{sen } 45^0}{\cos 45^0}$$

y reemplazando valores, resulta:

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$$

Por el teorema (19), se tiene:

$$\cot 45^{\circ} = \frac{\cos 45^{\circ}}{\operatorname{sen} 45^{\circ}}$$

o bien: $$\cot 45^{\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\cot 45^{\circ} = 1$$

Por el teorema (23), se tiene:

$$\sec 45^{\circ} = \frac{1}{\cos 45^{\circ}}$$

o bien: $$\sec 45^{\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$$

$$\sec 45^{\circ} = \sqrt{2}$$

Por el teorema (25), se tiene:

$$\operatorname{cosec} 45^{\circ} = \frac{1}{\operatorname{sen} 45^{\circ}}$$

o bien: $$\operatorname{cosec} 45^{\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$$

$$\operatorname{cosec} 45^{\circ} = \sqrt{2}$$

54. Tabla de los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 0°, 30°, 45°, 60° y 90°. — Con los valores obtenidos precedentemente podemos formar el siguiente cuadro, en el que omitimos la secante y la cosecante:

Angulo	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
0°	0	1	0	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	∞	0

De la simple observación del cuadro se deduce *que no hay proporcionalidad entre los ángulos y los valores de sus respectivas funciones trigonométricas.*

Así, el seno de 30° es $\frac{1}{2}$, pero el seno de 60°, duplo de 30°, no es el duplo de $\frac{1}{2}$.

CAPITULO V

Representación gráfica de las variaciones de las funciones trigonométricas

55. **Representación gráfica de las funciones trigonométricas.** — Las funciones trigonométricas, definidas por razones entre cantidades, son números, pero a veces resulta cómodo representar esos números por *segmentos de recta*, medidos respecto a una cierta unidad de medida, que suele ser la hipotenusa del triángulo rectángulo a que pertenece el ángulo dado, o la longitud del vector que lo determina.

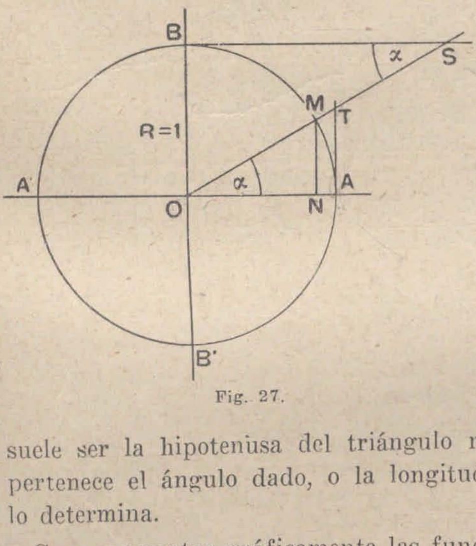

Fig. 27.

Sea representar gráficamente las funciones trigonométricas del ángulo α, fig. 27.

Con una unidad cualquiera de medida, $OM = 1$, trazo una circunferencia, llamada ~~*circunferencia*~~ circulo *trigonométrico*

Por M se traza $MN \perp OA$, resultando:

$$\text{sen } \alpha = \frac{MN}{OM} = \frac{MN}{1} = MN$$

$$\cos \alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{ON}{1} = ON$$

Resulta, así, que respecto a la unidad de medida OM, el seno está representado por el *segmento* MN, y el coseno por el *segmento* ON.

Tracemos ahora por A una perpendicular a OA, por B una perpendicular a OB y prolonguemos el radio OM hasta que corte a ambas perpendiculares. Se tiene:

$$\text{tg } \alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT \quad \therefore \quad \text{tg } \alpha = AT$$

$$\cot \alpha = \frac{BS}{OB} = \frac{BS}{1} = BS \quad \therefore \quad \cot \alpha = BS$$

$$\sec \alpha = \frac{OT}{OA} = \frac{OT}{1} = OT \quad \therefore \quad \sec \alpha = OT$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{OS}{OB} = \frac{OS}{1} = OS \quad \therefore \quad \text{cosec } \alpha = OS$$

De manera que, respecto a la unidad OM, la tangente, cotangente, secante y cosecante de α son, respectivamente, los segmentos AT, BS, OT y OS.

Variaciones de las funciones trigonométricas
Representación grafica

56. Variación del seno. — Consideremos en una circunferencia trigonométrica, fig. 28, un ángulo MOA, cuyo valor puede variar de 0° a 360° a medida que gira el vector OM desde A en el sentido de la flecha. Cuando el punto M se halla en A, el seno es nulo, pero a medida que crece el ángulo AOM de 0° a 90°, su seno MN va creciendo desde 0 a $+1$.

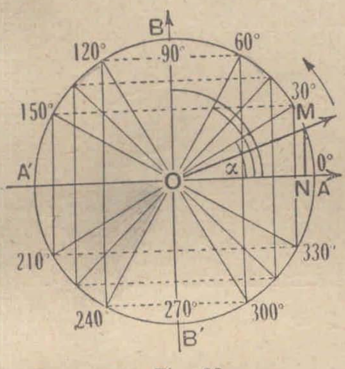

Fig. 28.

Si el ángulo continúa aumentando de 90° a 180°, su seno decrece de $+1$ a 0; cuando el ángulo aumenta de 180° a 270°, el seno decrece de 0 a -1, y cuando el ángulo aumenta de 270° a 360°, el seno aumenta de -1 a 0.

De manera que cuando un ángulo varía de 0° a 360°, su seno pasa por dos valores nulos (cuando el ángulo vale 0° y 180°), por un valor máximo $+1$ (cuando el ángulo vale 90°), y por un valor mínimo -1 (cuando el ángulo vale 270°).

57. Representación gráfica de las variaciones del seno. — Sea, fig. 29, una circunferencia *O* de radio 1, y supongámosla dividida en 12 partes iguales, por ejemplo, y consideremos un segmento *MN* igual a la longitud de la circunferencia *O*, también dividido en 12 partes iguales; entonces cada parte del segmento equivale a la longitud de cada arco de los 12 en que se considera dividida la circunferencia.

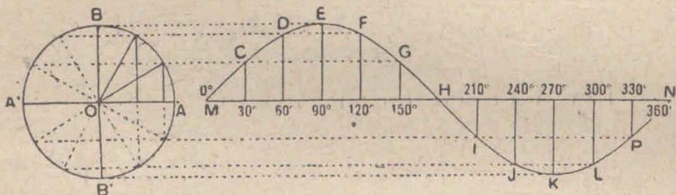

Fig. 29

En el punto 30° tracemos una perpendicular a *MN* y tomemos en ella un segmento igual a sen 30°, así obtenemos el punto *C*; en el punto 60° se traza una perpendicular y se toma un segmento igual a sen 60°, resultando así el punto *D*. Procediendo de la misma manera se obtienen los puntos *E*, *F*, *G* y *H*. A partir de *H* obtenemos los puntos *I*, *J*, *K*, *L*, *P*, situados en el semiplano inferior porque los senos de los ángulos comprendidos entre 180° y 360° son negativos.

Uniendo los puntos *M*, *C*, . . . *P*, *N* obtenemos una curva llamada *sinusoide*, que es la representativa de las variaciones del seno.

58. Variación del coseno. — Consideremos en una circunferencia trigonométrica, fig. 30, un ángulo MOA, cuyo valor puede variar de 0° a 360° a medida que gira el vector OM desde A en el sentido de la flecha. Cuando el punto M se halle en A, el coseno es + 1, pero a medida que el ángulo crece de 0° a 90°, su coseno va decreciendo de + 1 a 0.

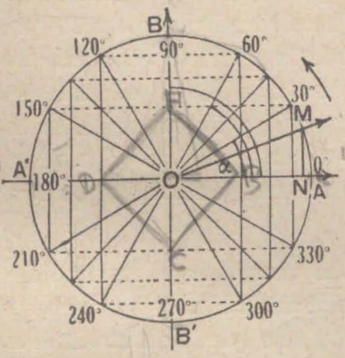

Fig. 30.

Si el ángulo aumenta de 90° a 180, su coseno decrece de 0 a — 1; si el ángulo aumenta de 180° a 270°, su coseno crece de — 1 a 0, y si el ángulo aumenta de 270° a 360° su coseno crece de 0 a + 1.

Así, si un ángulo varía de 0° a 360°, su coseno pasa por dos valores nulos (cuando el ángulo vale 90° y 270°), por un valor máximo + 1 (cuando el ángulo vale 0°), y por un valor mínimo — 1 (cuando el ángulo vale 180°).

59. Representación gráfica de las variaciones del coseno. — Sea, fig. 31, una circunferencia O de radio 1,

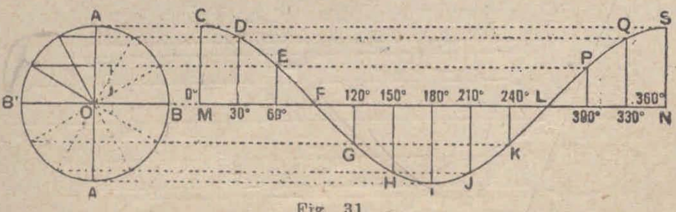

Fig. 31.

y supongámosla dividida en 12 partes iguales, por ejemplo, y consideremos un segmento MN igual a la longitud de la circunferencia O, también dividido en 12 partes iguales, siendo cada parte la longitud de cada uno de los 12 arcos en que se considera dividida la circunferencia.

Procediendo de manera análoga a como se ha hecho en (57), se obtiene, al unir los puntos $CD \ldots QS$, una curva llamada *cosinusoide*, que es la representativa de las variaciones del coseno.

60. Observación. — La sinusoide y cosinusoide representativas de las variaciones del seno y coseno de un mismo ángulo son idénticas, sólo que la sinusoide es nula en el origen, mientras que la cosinusoide en el origen tiene un valor de $+1$. Los valores 0 y $+1$ se corresponden para cada múltiplo de 90°, por lo que se dice que las dos curvas están *caladas* a 90°, o que están en *cuadratura*.

61. Aplicaciones. — La sinusoide se emplea en electricidad para representar la *corriente alternada monofásica.*

El gráfico de la sinusoide y cosinusoide de un mismo ángulo sirve para representar la *corriente alternada bifásica,* (fig. 32), y el gráfico de tres sinusoides, cuyos orígenes se hallan a 120° unos de otros, es la representación de la *corriente alternada trifásica*, fig. 33.

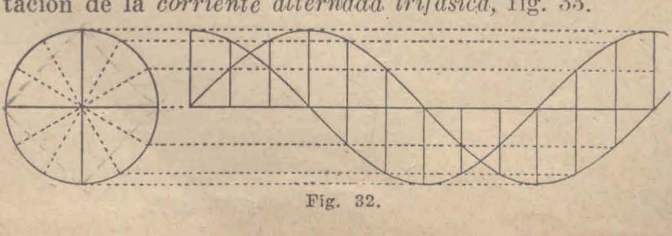

Fig. 32.

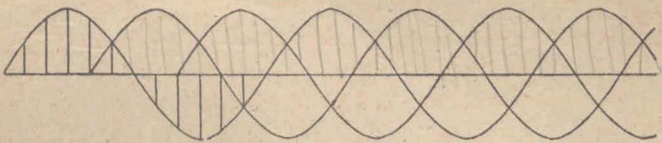

Fig. 33.

62. Variaciones de la tangente. — Sea la circunferencia trigonométrica 0, fig. 34, y consideremos un ángulo AOM, cuyo valor puede variar de 0° a 360°, a medida que gira el vector AM en el sentido de la flecha. Cuando el punto M se halle en A, la tangente es nula, pero a medida que crece el ángulo MOA de 0° a 90°, su tangente AT va creciendo de 0 a $+\infty$.

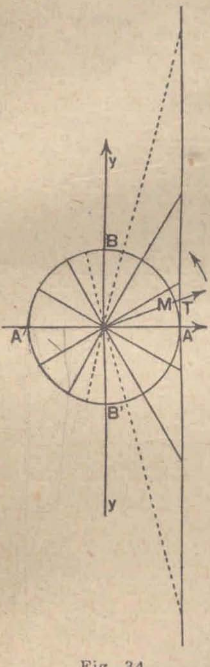

Fig. 34.

Si el ángulo aumenta de 90° a 180°, la tangente crece de $-\infty$ a 0; si el ángulo aumenta de 180° a 270°, la tangente crece de 0 a $+\infty$, y si el ángulo aumenta de 270° a 360°, la tangente aumenta de $-\infty$ a 0.

Cuando un ángulo varía de 0° a 360°, su tangente pasa por dos valores nulos (cuando el ángulo vale 0° y 180°), por un valor máximo $+\infty$ (cuando el ángulo vale 90°), y por un valor mínimo $-\infty$ (cuando el ángulo vale 270°).

63. Representación gráfica de las variaciones de la tangente. — Sea, fig. 35, una circunferencia de radio

1, dividida en 12 partes iguales, por ejemplo, y consideremos un segmento *MN* igual a la longitud de la circunferencia, también dividido en 12 partes iguales.

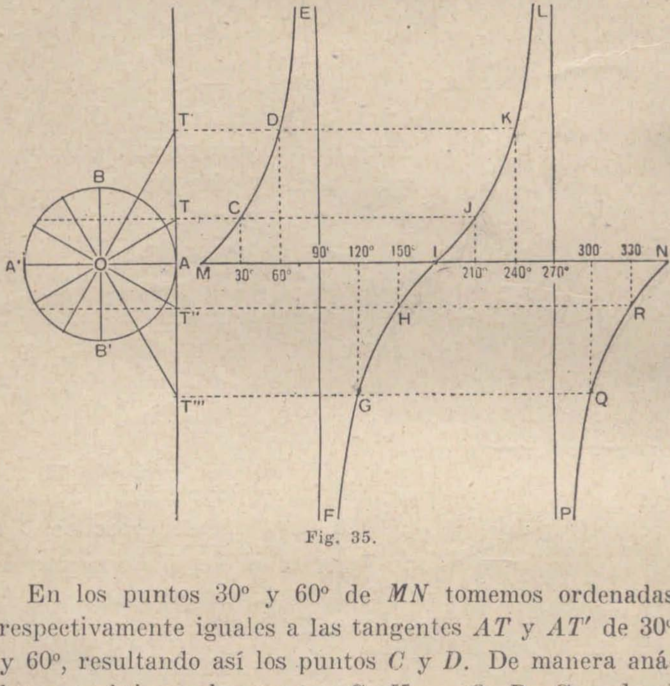

Fig. 35.

En los puntos 30° y 60° de *MN* tomemos ordenadas respectivamente iguales a las tangentes *AT* y *AT'* de 30° y 60°, resultando así los puntos *C* y *D*. De manera análoga se obtienen los puntos *G*, *H*, ... *Q*, *R*. Cuando el ángulo vale 90° o 270°, su tangente es infinita, de modo que al unir aquellos puntos obtendremos una curva discontínua, llamada *tangentoide*, que es la representación gráfica de las variaciones de la tangente.

Como puede verse, las ramas de la curva se acercan a las rectas *EF*, *LP*, sin que la toquen nunca. Estas rectas se llaman *asíntotas*.

EJERCICIOS

34. Representar gráficamente las variaciones del seno de un ángulo que crece de 0° a 360°. Dibujar el círculo de 5 cm. de diámetro y tomar las divisiones sobre el eje horizontal iguales a los arcos respectivos rectificados.

35. Representar gráficamente las variaciones del coseno de un ángulo de 0° a 360°. Datos iguales al ejercicio anterior.

36. Representar en una misma figura los gráficos de los dos ejercicios anteriores.

CAPITULO VI

Funciones trigonométricas de la suma de dos ángulos

64. Seno de la suma de dos ángulos. — Sean los ángulos α y β, figura 36, en donde queremos hallar sen $(\alpha + \beta)$.

Por un punto A de la recta a trazamos $AB \perp a$, por B trazamos $BC \perp b$, y por C trazamos $CE \perp a$. Por B trazamos $BD \perp CE$, resultando así los triángulos rectángulos AOB, BOC, EOC y DCB.

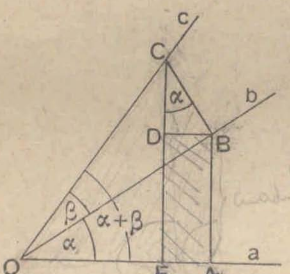

Fig. 36.

Por definición de las funciones trigonométricas, se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AB}{OB} \; (1) \; ; \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{BD}{BC} \; (3) \; ; \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{BC}{OC} \; (5)$$

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OB} \; (2) \; ; \quad \cos\alpha = \frac{CD}{BC} \; (4) \; ; \quad \cos\beta = \frac{OB}{OC} \; (6)$$

En el triángulo rectángulo EOC, el seno del ángulo $\alpha + \beta$ es:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{CE}{OC} = \frac{CD + DE}{OC}$$

pero la figura $DBAE$ es un paralelógramo, luego $DE = AB$, y sustituyendo, resulta:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{CD + AB}{OC}$$

De (4) se deduce que: $CD = \cos\alpha . BC$

y de (1): $AB = \text{sen}\,\alpha . OB$

y reemplazando estos valores:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\cos\alpha . BC + \text{sen}\,\alpha . OB}{OC}$$

De (5) se deduce que: $BC = OC . \text{sen}\,\beta$

y de (6): $OB = OC . \cos\beta$

y reemplazando estos valores:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\cos\alpha . \text{sen}\,\beta . OC + \text{sen}\,\alpha . \cos\beta . OC}{OC}$$

y sacando el factor común OC:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{OC(\cos\alpha . \text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\alpha . \cos\beta)}{OC}$$

y simplificando y cambiando el orden de los sumandos, resulta:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \text{sen}\,\beta}$$

luego: *El seno de la suma de dos ángulos es igual al seno del primero por el coseno del segundo, más el coseno del primero por el seno del segundo.*

65. Coseno de la suma de dos ángulos. — Por definición de coseno, en el triángulo EOC, fig. 36, se tiene:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OE}{OC} = \frac{OA - AE}{OC}$$

pero $AE = BD$, luego:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OA - BD}{OC}$$

De (2) se deduce que: $OA = \cos\alpha \, . \, OB$
y de (3): $BD = \operatorname{sen}\alpha \, . \, BC$
y reemplazando estos valores:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\cos\alpha \, . \, OB - \operatorname{sen}\alpha \, . \, BC}{OC}$$

De (6) se deduce: $OB = \cos\beta \, . \, OC$
y de (5): $BC = \operatorname{sen}\beta \, . \, OC$, luego:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\cos\alpha \, . \cos\beta \, . \, OC - \operatorname{sen}\alpha \, . \operatorname{sen}\beta \, . \, OC}{OC}$$

sacando el factor común OC:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OC(\cos\alpha \, . \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \, . \operatorname{sen}\beta)}{OC}$$

y simplificando, resulta:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \, . \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \, . \operatorname{sen}\beta}$$

luego: *El coseno de la suma de dos ángulos es igual al producto de los cosenos menos el producto de los senos de los ángulos dados.*

66. Tangente de la suma de dos ángulos. — Por lo demostrado, se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \, . \cos\beta + \cos\alpha \, . \operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \, . \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \, . \operatorname{sen}\beta$$

Dividiendo ordenadamente:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha \, . \cos\beta + \cos\alpha \, . \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \, . \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \, . \operatorname{sen}\beta}$$

dividiendo ambos términos del último miembro por *cos* α . *cos* β, resulta:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha \, . \cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha \, . \cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha} \, . \operatorname{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha} \, . \cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha} \, . \cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha} \, . \cancel{\cos\beta}} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \, . \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \, . \cos\beta}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}$$

y por (18):

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}}$$

luego: *La tangente de la suma de dos ángulos es igual a la suma de las tangentes de los ángulos dados, dividido por la diferencia de 1 y el producto de las mismas tangentes.*

Funciones trigonométricas de la diferencia de dos angulos

67. Seno de la diferencia de dos ángulos. — Sean los ángulos α y β, fig. 37, en donde queremos hallar $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$.

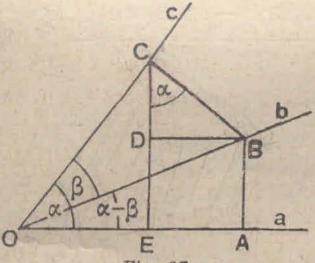

Fig. 37.

Por un punto A de la recta a trazamos $AB \perp a$, por B trazamos $BC \perp c$, y por C trazamos $CE \perp a$, y luego $BD \perp CE$

Por definición de las funciones trigonométricas, se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{CE}{OC}\ (1);\quad \operatorname{sen}\alpha=\frac{BD}{BC}\ (3);\quad \operatorname{sen}\beta=\frac{BC}{OB}\ (5)$$

$$\cos\alpha=\frac{OE}{OC}\ (2);\quad \cos\alpha=\frac{CD}{BC}\ (4);\quad \cos\beta=\frac{OC}{OB}\ (6)$$

En el triángulo rectángulo AOB, el seno de $\alpha - \beta$ es:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{AB}{OB} = \frac{DE}{OB} = \frac{CE - CD}{OB}$$

De (1) se deduce que: $CE = \operatorname{sen} \alpha . OC$

y de (4): $CD = \cos \alpha . BC$

y reemplazando estos valores:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sen} \alpha . OC - \cos \alpha . BC}{OB}$$

De (6) se deduce: $OC = \cos \beta . OB$

y de (5): $BC = \operatorname{sen} \beta . OB$

y reemplazando estos valores:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sen} \alpha . \cos \beta . OB - \cos \alpha . \operatorname{sen} \beta . OB}{OB}$$

sacando el factor común OB:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{OB(\operatorname{sen} \alpha . \cos \beta - \cos \alpha . \operatorname{sen} \beta)}{OB}$$

y simplificando:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha . \cos \beta - \cos \alpha . \operatorname{sen} \beta}$$

luego: *El seno de la diferencia de dos ángulos es igual al seno del primero por el coseno del segundo, menos el coseno del primero por el seno del segundo.*

68. Coseno de la diferencia de dos ángulos. — Por definición de coseno, en el triángulo AOB, fig. 37, se tiene:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{OA}{OB} = \frac{OE + EA}{OB} = \frac{OE + BD}{OB}$$

De (2) se deduce que: $OE = \cos \alpha . OC$

y de (3): $BD = \operatorname{sen} \alpha . BC$

y reemplazando estos valores:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\cos\alpha . OC + \operatorname{sen}\alpha . BC}{OB}$$

De (6) se deduce que: $OC = \cos\beta . OB$
y de (5): $BC = \operatorname{sen}\beta . OB$

y reemplazando estos valores:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\cos\alpha . \cos\beta . OB + \operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen}\beta . OB}{OB}$$

sacando el factor común OB:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{OB(\cos\alpha . \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen}\beta)}{OB}$$

y simplificando:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha . \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen}\beta}$$

luego: *El coseno de la diferencia de dos ángulos es igual al producto de los cosenos más el producto de los senos de los ángulos dados.*

69. Tangente de la diferencia de dos ángulos. — Por lo demostrado, se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha . \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen}\beta$$

Dividiendo ordenadamente:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha . \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen}\beta}$$

dividiendo ambos miembros del último miembro por *cos* α . *cos* β, resulta:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha . \cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha . \cancel{\cos\beta}} - \dfrac{\cancel{\cos\alpha} . \operatorname{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha} . \cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha . \cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha . \cos\beta}} + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha . \cos\beta}}$$

simplificando, queda:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}$$

y por (18):

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}}$$

luego: *La tangente de la diferencia de dos ángulos es igual a la tangente del primero menos la tangente del segundo, dividido por la suma de 1 y el producto de las mismas tangentes.*

70. Aplicaciones. — Las fórmulas de las funciones trigonométricas de la suma o diferencia de dos ángulos se usan, preferentemente, para la transformación de expresiones trigonométricas complicadas en otras más simples, sobre todo calculables por logaritmos.

Funciones trigonométricas del duplo de un ángulo

71. Seno del duplo de un ángulo. — Si en la fórmula:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$$

Si suponemos que es $\beta=\alpha$, se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha+\cos\alpha.\operatorname{sen}\alpha$$

o bien:

$$\boxed{\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha}$$

luego: *El seno del duplo de un ángulo es el duplo del producto del seno y coseno de dicho ángulo.*

72. Coseno del duplo de un ángulo. — Si en la fórmula:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$$

Si suponemos que es $\beta=\alpha$, se tiene:

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha = \cos\alpha.\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\alpha$$

o bien:

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

luego: *El coseno del duplo de un ángulo es igual al cuadrado del coseno menos el cuadrado del seno del ángulo dado.*

73. Tangente del duplo de un ángulo. — Si en la fórmula:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}$$

Si suponemos que es $\beta=\alpha$, resulta:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\alpha}$$

o bien:

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

luego: *La tangente del duplo de un ángulo es igual al duplo de la tangente del ángulo dividido por la diferencia entre 1 y el cuadrado de la misma tangente.*

Funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo

74. Seno de la mitad de un ángulo. — Se tiene, por (15):

$$1 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$$

y por (72) $\qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

restando ordenadamente:

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \operatorname{sen}^2\alpha$$

de donde:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

o bien:

$$\boxed{\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}}$$

luego: *El seno de la mitad de un ángulo es igual a la raíz cuadrada de la mitad de la diferencia entre* 1 *y el coseno del ángulo dado.*

75. Coseno de la mitad de un ángulo. — Se tiene:

$$1 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

sumando ordenadamente:

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2\alpha$$

de donde:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

o bien:

$$\boxed{\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}}$$

luego: *El coseno de la mitad de un ángulo es igual a la raíz cuadrada de la mitad de la suma entre* 1 *y el coseno del ángulo dado.*

76. Tangente de la mitad de un ángulo. — Se tiene:

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

dividiendo ordenadamente y simplificando:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}}{\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}}}$$

y simplificando:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}$$

luego: *La tangente de la mitad de un ángulo es igual a la raíz cuadrada del cociente de 1 menos el coseno del ángulo, y 1 más el coseno del ángulo.*

APLICACIONES

77. Funciones trigonométricas de $a \pm 90^\circ$. — Por (64) y (67) se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm 90^\circ) = \operatorname{sen} \alpha . \cos 90^\circ \pm \cos \alpha . \operatorname{sen} 90^\circ$$

pero $\cos 90^\circ = 0$ y $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$, luego:

$$\operatorname{sen}(a \pm 90^\circ) = \pm \cos a$$

luego: *El seno de un ángulo al que se le suma o resta* 90°, *es igual al coseno del mismo ángulo, con signo* + *o* — *según se sume o reste* 90°.

Por (65) y (68) se tiene:

$$\cos(a \pm 90^\circ) = \cos a \cdot \cos 90^\circ \mp \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} 90^\circ$$

y como $\cos 90^\circ = 0$ y $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$, resulta:

$$\cos(a \pm 90^\circ) = \mp \operatorname{sen} a$$

luego: *El coseno de un ángulo al que se le suma o resta* 90°, *es igual al seno del mismo ángulo, con signo* — *o* + *según se sume o reste* 90°.

Sabemos que:
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm 90^\circ) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm 90^\circ)}{\cos(\alpha \pm 90^\circ)}$$

o bien, reemplazando:
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm 90^\circ) = \frac{\pm \cos \alpha}{\mp \cos \alpha} = -\cot \alpha$$

luego: *La tangente de un ángulo al que se le suma o resta 90°, es igual a menos la cotangente del mismo ángulo.*

78. Funciones trigonométricas de $\alpha \pm 180°$. — Por (64) y (67) se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm 180^\circ) = \operatorname{sen}\alpha . \cos 180^\circ \pm \cos\alpha . \operatorname{sen} 180^\circ$$

y como $\cos 180^\circ = -1$ y $\operatorname{sen} 180^\circ = 0$, resulta:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm 180^\circ) = -\operatorname{sen}\alpha$$

luego: *El seno de un ángulo al que se le suma o resta 180°, es igual al seno del mismo ángulo con signo menos.*

Por (65) y (68) se tiene:

$$\cos(\alpha \pm 180^\circ) = \cos\alpha . \cos 180^\circ \mp \operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen} 180^\circ$$

y como $\cos 180^\circ = -1$, y $\operatorname{sen} 180^\circ = 0$, resulta:

$$\cos(\alpha \pm 180^\circ) = -\cos\alpha$$

luego: *El coseno de un ángulo al que se le suma o resta 180°, es igual al coseno del mismo ángulo con signo menos.*

Sabemos que:
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm 180^\circ) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm 180^\circ)}{\cos(\alpha \pm 180^\circ)}$$

o bien, reemplazando:
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm 180^\circ) = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

luego: *La tangente de un ángulo al que se le suma o resta 180° es igual a la tangente del mismo ángulo.*

79. Funciones trigonométricas de $\alpha \pm 270°$. — Sabemos que:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm 270^\circ) = \operatorname{sen}\alpha . \cos 270^\circ \pm \cos\alpha . \operatorname{sen} 270^\circ$$

pero: $\cos 270° = 0$, y $\operatorname{sen} 270° = -1$, y reemplazando:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm 270°) = \mp \cos \alpha$$

luego: *El seno de un ángulo al que se le suma o resta 270°, es igual al coseno del mismo ángulo, con signo — o +, según se sume o reste 270°.*

Sabemos que:

$$\cos(\alpha \pm 270°) = \cos \alpha . \cos 270° \mp \operatorname{sen} \alpha . \operatorname{sen} 270°$$

y como $\cos 270° = 0$, y $\operatorname{sen} 270° = -1$, resulta:

$$\cos(\alpha \pm 270°) = \mp \operatorname{sen} \alpha$$

luego: *El coseno de un ángulo al que se le suma o resta 270°, es igual al seno del mismo ángulo con signo + o —, según se sume o reste 270°.*

Sabemos que: $$\operatorname{tg}(\alpha \pm 270°) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm 270°)}{\cos(\alpha \pm 270°)}$$

y reemplazando: $$\operatorname{tg}(\alpha \pm 270°) = \frac{\mp \cos \alpha}{\pm \operatorname{sen} \alpha} = -\cot \alpha$$

luego: *La tangente de un ángulo al que se le suma o resta 270°, es igual a la cotangente del mismo ángulo con signo menos.*

80. Funciones trigonométricas de 360° — α. — Sabemos que:

$$\operatorname{sen}(360° - \alpha) = \operatorname{sen} 360° . \cos \alpha - \cos 360° . \operatorname{sen} \alpha$$

pero, $\operatorname{sen} 360° = 0$, y $\cos 360° = 1$, luego:

$$\operatorname{sen}(360° - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

luego: *El seno de la diferencia entre 360° y un ángulo, es igual al seno del mismo ángulo, con signo menos.*

Sabemos que:

$$\cos(360 - \alpha) = \cos 360° . \cos \alpha + \operatorname{sen} 360° . \operatorname{sen} \alpha$$

y como $\cos 360^\circ = 1$, y $\operatorname{sen} 360^\circ = 0$, resulta:

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

luego: *El coseno de la diferencia entre 360° y un ángulo, es igual al coseno del mismo ángulo.*

Sabemos que:

$$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(360^\circ - \alpha)}{\cos(360^\circ - \alpha)}$$

y reemplazando:

$$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$$

luego: *La tangente de la diferencia entre 360° y un ángulo es igual a la tangente del mismo ángulo, con signo menos.*

81. Reducción de un ángulo al primer cuadrante. — La *reducción de un ángulo al primer cuadrante* consiste en hallar un ángulo situado en el primer cuadrante es decir, comprendido entre 0° y 90°, cuyas funciones trigonométricas sean iguales a las del ángulo dado.

Para ello se procede así:

1º *Si el ángulo es negativo, se aplican las relaciones estudiadas en* (32);

2º *Si el ángulo está comprendido entre* 90° *y* 180°, *se aplican las relaciones entre las funciones de los ángulos suplementarios,* (34 *a* 39);

3º *Si el ángulo está comprendido entre* 180° *y* 270°, *se le resta* 180° *y se aplican las relaciones estudiadas en* (78);

4º *Si el ángulo está comprendido entre* 270° *y* 360°, *se le resta* 270° *y se aplican las relaciones estudiadas en* (79).

EJERCICIOS

37. Dado sen $\alpha = 0{,}5$ y sen $\beta = 0{,}3$, calcular sen $(\alpha \mp \beta)$.
R: 0,736

38. Idem, Idem, calcular cos $(\alpha + \beta)$.
R: 0,217

39. Idem, Idem, calcular cos $(\alpha + \beta)$.
R: 0,676

40. Idem, Idem, calcular cos $(\alpha - \beta)$.
R: 0,976

41. Idem, Idem, calcular tg $(\alpha + \beta)$.
R: 1,088

42. Idem, Idem, calcular tg $(\alpha - \beta)$.
R: 0,222

43. Dado tg $\alpha = 2{,}35$ y tg $\beta = 1{,}42$, calcular tg $(\alpha + \beta)$.
R: 1,613

44. Idem, Idem, calcular tg $(\alpha - \beta)$.
R: 0,214

45. Dado sen $30° = 0{,}5$ y sen $43° = 0{,}682$, calcular sen y cos $73°$.
R: sen $73° = 0{,}9563$; cos $73° = 0{,}29237$

46. Con los datos anteriores, calcular sen y cos $13°$.
R: sen $13° = 0{,}22495$; cos $13° = 0{,}97437$

47. Calcular sen $105°$.
R: $-0{,}9659$

48. Calcular cos $150°$.
R: $-0{,}866$

49. Calcular tg $105°$.
R: $-0{,}373$

50. Dado sen $20° = 0{,}342$, calcular sen y cos $40°$.
R: sen $40° = 0{,}6428$; cos $40° = 0{,}766$

51. Dado tg $35° = 0{,}7$, calcular tg $70°$.
R: tg $70° = 2{,}747$

52. Dado cos $36°50' = 0{,}8$, calcular sen y cos $18°25'$.
R: sen $18°25' = 0{,}315$; cos $18°25' = 0{,}948$

53. Dado tg $36°10'$, $= 0{,}73$, calcular tg $18°5'$

R: 0,3265

54. Dado sen $\alpha = 0{,}8$, calcular sen 2α, cos 2α y tg 2α.

R: sen $2\alpha = 0{,}96$; cos $2\alpha = 0{,}28$; tg $2\alpha = 3{,}43$

55. Sabiendo que cos $30° = 0{,}866$, calcular sen $15°$, cos $15°$ y tg $15°$.

R: sen $15° = 0{,}2588$
cos $15° = 0{,}9659$
tg $15° = 0{,}2679$

56. Dado cos $\beta = 0{,}7$, calcular tg $\frac{\beta}{2}$

R: 0,31

Reducir al primer cuadrante:

57.	sen $(-25°)$	R: $-$sen $25°$
58.	cos $(-10°)$	„ cos $10°$
59.	tg $125°$	„ $-$cot $35°$
60.	cos $300°$	„ sen $30°$
61.	tg $500°$	„ $-$tg $50°$
62.	sen $430°$	„ sen $70°$
63.	cot $410°$	„ cot $50°$
64.	cos $350°$	„ cos $10°$
65.	tg $(-200°)$	„ tg $20°$
66.	cot $(-280°)$	„ $-$cot 10
67.	sen $(-480°)$	„ $-$sen $60°$
68.	cos $(-320°)$	„ sen $50°$

CAPITULO VII

Transformaciones logarítmicas

82. Como las propiedades de los logaritmos no son aplicables a las sumas algebraicas, a fin de que lo sean, se transforman aquéllas en monomios.

Estudiaremos a continuación las transformaciones más usuales.

83. Transformar en producto la suma o la diferencia de dos senos o de dos cosenos. — Escribamos las fórmulas conocidas:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta \qquad (1)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta \qquad (2)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta \qquad (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta \qquad (4)$$

Sumando y restando miembro a miembro las dos primeras así como las dos últimas, se tiene, después de reducir los términos semejantes:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{la (1) más la (2):} \\
\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta \\
\text{la (1) menos la (2):} \\
\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta \\
\text{la (3) más la (4):} \\
\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha.\cos\beta \\
\text{la (3) menos la (4):} \\
\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta
\end{array}\right\} (5)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Haciendo:} & \alpha+\beta=p \\
\text{y:} & \alpha-\beta=q
\end{array}\right\} (6)$$

sumando y restando miembro a miembro se traduce:

$$\left.\begin{array}{lll} 2\alpha = p + q & \therefore & \alpha = \dfrac{p+q}{2} \\[2ex] 2\beta = p - q & \therefore & \beta = \dfrac{p-q}{2} \end{array}\right\} (7)$$

y reemplazando los valores (6) y (7) en las expresiones (5):

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \dfrac{p+q}{2} \,.\, \cos \dfrac{p-q}{2} \\[2ex] \operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \,.\, \operatorname{sen} \dfrac{p-q}{2} \\[2ex] \cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \,.\, \cos \dfrac{p-q}{2} \\[2ex] \cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \dfrac{p+q}{2} \,.\, \operatorname{sen} \dfrac{p-q}{2} \end{array}}$$

Fórmulas que pueden traducirse al lenguaje vulgar fácilmente.

84. Aplicaciones. — 1ª) *Transformar la expresión*

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}$$

Se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}}{2 \cos \dfrac{p+q}{2} \operatorname{sen} \dfrac{p-q}{2}}$$

simplificando y recordando (18) y (19):

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \operatorname{tg} \frac{p+q}{2} \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \dfrac{p-q}{2}}$$

o bien, efectuando el producto:

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{p-q}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{p-q}{2}}}$$

2ª *Transformar la expresión* $\operatorname{sen} a + \cos b$.

Se tiene, (42): $\cos b = \operatorname{sen}(90^\circ - b)$

luego: $\operatorname{sen} a + \cos b = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen}(90^\circ - b)$

y transformando el segundo miembro:

$$\boxed{\operatorname{sen} a + \cos b = 2 \operatorname{sen} \frac{a - b + 90^\circ}{2} \cdot \cos \frac{a + b - 90^\circ}{2}}$$

3ª) *Transformar la expresión* $1 + \cos \alpha$.

Se tiene, (49): $1 = \cos 0^\circ$

luego: $1 + \cos \alpha = \cos 0^\circ + \cos \alpha$

y transformando el segundo miembro:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

pero, (32): $\cos \dfrac{-\alpha}{2} = \cos \dfrac{\alpha}{2}$

luego: $\boxed{1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$

85. Transformar en producto la suma o la diferencia de dos tangentes o de dos cotangentes.

1º) Se tiene:

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}$$

y reduciendo a común denominador y sumando en el segundo miembro:

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

y como el numerador es $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)$, resulta:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}}$$

2º) Se tiene:

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \pm \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$$

efectuando la suma del segundo miembro:

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta.\cos\alpha \pm \cos\beta.\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}$$

y como el numerador es $\operatorname{sen}(\beta \pm \alpha)$, resulta:

$$\boxed{\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\operatorname{sen}(\beta \pm \alpha)}{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}}$$

EJERCICIOS

69. Dados $\alpha = 45°$ y $\beta = 15°$, calcular sen $(\alpha - \beta)$ y cos $(\alpha + \beta)$. R: 0,5 y 0,5

70. Dados sen $\alpha = 0{,}25$ y cos $\beta = 0{,}6$, calcular sen $(\alpha + \beta)$ y cos $(\alpha - \beta)$.
R: sen $(\alpha + \beta) = 0{,}93$; cos $(\alpha - \beta) = 0{,}78$

71. Demostrar que si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, es $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha.\ \operatorname{tg}\beta.\ \operatorname{tg}\gamma$.

72. Transformar en producto 1 + sen 20°.
R: 2sen 55°. cos 35°

73. Idem, 1 — sen 50°.
„ 2 sen 20°. cos 70°

74. Idem, 1 + cos 34°.
„ 2 cos² 17°

75. Idem, $1 - \cos 12^\circ$. R: $2 \operatorname{sen}^2 6^\circ$

76. Idem, $1 + \operatorname{tg} 70^\circ$. „ $\dfrac{\sqrt{2}.\ \operatorname{sen} 25^\circ}{\cos 70^\circ}$

77 Idem, $1 - \operatorname{tg} 20^\circ$. „ $\dfrac{\sqrt{2}.\ \operatorname{sen} 25^\circ}{\cos 20^\circ}$

78 Idem, $1 - \cot 80^\circ$. „ $\dfrac{\sqrt{2}.\ \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ}$

79. Simplificar la expresión $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \operatorname{tg} 20^\circ}$ „ $\operatorname{tg} 65^\circ$

80. Idem. $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg} 40^\circ}$ „ $\operatorname{tg} 85^\circ$

81. Idem, $\dfrac{\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{sen} 40^\circ}$ „ $\dfrac{\operatorname{tg} 50^\circ}{\operatorname{tg} 10^\circ}$

CAPITULO VIII

Tablas de las funciones trigonométricas

86. Hemos hallado, (49 a 53), los valores de las funciones trigonométricas de algunos ángulos. Para construir una *Tabla de las funciones trigonométricas*, se toma como punto de partida un ángulo muy pequeño, de $10''$ generalmente, y se halla su seno y su coseno, basado en los dos teoremas que siguen, y luego, aplicando las fórmulas relativas a la multiplicación de ángulos, (71 a 73), se van calculando los senos y cosenos de los ángulos de $20'$, $40'$ 1°, 2°, 3°, ... hasta 45°. No se calculan las funciones de los ángulos superiores a 45°, pues aplicando las relaciones entre las funciones de los ángulos complementarios, se determinan las de los ángulos comprendidos entre 45° y 90°.

De los ángulos superiores a 90° no se calculan las funciones trigonométricas, pues basta en tal caso, reducirlos al primer cuadrante.

Conociendo el seno y el coseno, se calculan las demás funciones trigonométricas.

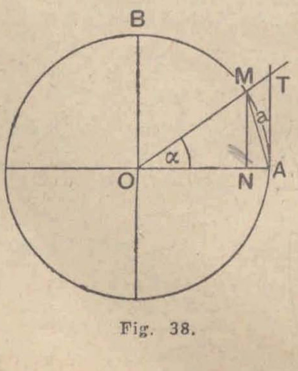

Fig. 38.

87. TEOREMA. — *Todo arco menor que un cuadrante es mayor que su seno y menor que su tangente.*

Si en una circunferencia 0 fig. 38, de radio $OM = 1$ consideramos un ángulo $a < 90^\circ$, en donde $MN = \text{sen}\, a$,

$a = \text{arco}\, a$,

$AT = \text{tg}\, a$, demostraremos que es: $\quad \text{sen}\, a < a < \text{tg}\, a$

Esto es la papa de la matemática

 ¡¡Que lindo lo estudié

siendo $OM = 1$ la unidad de medida del arco a.

Unamos A con M; en el triángulo rectángulo AMN se verifica:

$$MN < AM \qquad (1)$$

pero la cuerda de un arco es menor que el arco, luego:

$$AM < a \qquad (2)$$

Como el área del sector AMO es menor que la del triángulo ATO, resulta que:

$$a < AT \qquad (3)$$

Comparando (1), (2) y (3), resulta:

$$MN < AM < a < AT$$

o bien: $$MN < a < AT$$

y por último: $$\boxed{\operatorname{sen} a < a < \operatorname{tg} a}$$

88. Postulado. — *La diferencia entre un arco y la sexta parte de su cubo es menor que el seno del ángulo siendo el radio del arco la unidad de medida.*

Es decir, fig. 38, que:

$$\boxed{a - \frac{1}{6} a^3 < \operatorname{sen} a}$$

89. **Valor del seno de 1'.** — Sabemos por *Geometría Plana* que la longitud de un arco de circunferencia está expresado por la fórmula:

$$l = \frac{2 \pi R \times n^0}{360^0} = \frac{R \times n^0}{180^0}$$

y si el arco está expresado en minutos:

$$l = \frac{\pi R n'}{180 \times 60'}$$

Si el arco es $n' = 1'$ y suponemos que $R = 1$, tendremos:

$$l = \frac{\pi \times 1'}{180 \times 60'} = \frac{\pi}{180 \times 60} = \frac{3{,}1415926535\overset{6}{\cancel{5}}89}{10.800}$$

y efectuando el cociente, resulta:

$$l = 0{,}00029088820866$$

Calculemos ahora la sexta parte del cubo de la longitud del arco l:

$$\frac{l^3}{6} = \frac{0{,}00029088820866^3}{6} = \frac{0{,}000000000024613782}{6}$$

o bien: $$\frac{l^3}{6} = 0{,}000000000004102297$$

y ahora la diferencia $a - \frac{1}{6} a^3$ del postulado último, es decir:

$$a - \frac{1}{6} a^3 = 0{,}00029088820866 - 0{,}000000000004102297$$

o sea: $$a - \frac{1}{6} a^3 = 0{,}000290888204557703$$

De manera que, según el teorema (87), se tiene:

$$\operatorname{sen} 1' < 0{,}00029088820\mathbf{866}$$

y según (88): $\operatorname{sen} 1' > 0{,}00029088820\mathbf{455}$

Como puede verse, las primeras once cifras decimales son iguales, de manera que si tomamos como valor del seno el valor del arco, la diferencia es muy pequeña, es decir, que sin que el error sea apreciable, se puede escribir:

$$\operatorname{sen} 1' = 0{,}00029088820866$$

Dado el valor del seno de $1'$, aplicando las fórmulas de la multiplicación y suma de ángulos, se calculan los senos de los ángulos de $2'$, $3'$, $4'$ ... $30'$, 1°, 2° ... 45°. Para los ángulos superiores de 45°, basta recordar que sus senos son iguales a los cosenos de sus complementos, de manera que no hay necesidad de calcular los senos de los ángulos comprendidos entre 45° y 90°.

Conociendo los senos de los ángulos comprendidos entre 1′ y 45°, aplicando (17) se calculan los cosenos, y luego las tangentes (18), y cotangentes (22), secantes (23), y cosecantes (25).

90. **Tabla de las funciones trigonométricas.** — Damos a continuación las tablas de los valores naturales de las funciones trigonométricas con cinco cifras decimales. Los ángulos figuran de 10 en 10 minutos.

Los ángulos menores de 45° se leen de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha los minutos, y los mayores que 45° se leen de abajo hacia arriba, y de derecha a izquierda los minutos.

91. **Uso de las Tablas Naturales.** — Dos problemas se presentan:

I. Hallar el valor de una función trigonométrica de un ángulo dado.

92. **Seno.** — 1º *El ángulo está en las tablas.* — Sea hallar sen 23° 20′. En la página 84 se halla:

$$\text{sen } 23^\circ 20' = 0{,}39608$$

Este valor es también el cos 66° 40′, complemento de 23° 20′.

2º *El ángulo no está en las tablas.* — Sea hallar sen 65° 17′. En la página 85 se halla:

$$\text{sen } 65^\circ 10' = 0{,}90753$$

$$\text{y:} \quad \text{sen } 65^\circ 20' = 0{,}90875$$

Entre los ángulos hay una diferencia de 10′ y entre sus senos una diferencia de 0,00122, y suponiendo proporcionalidad entre los ángulos muy pequeños y sus senos, diremos: Si a 10′ corresponden 0,00122, ¿cuánto corresponde a 7′?:

$$\left.\begin{array}{l} 10' \text{ ——— } 0{,}00122 \\ 7' \text{ ——— } x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{7 \times 0{,}00122}{10} = 0{,}00085$$

Luego: sen 65° 17′ = 0,90753 + 0,00085 = 0,90838.

SENOS

Grados	Minutos 0'	10'	20'	30'	40'	50'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03200	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09685	0,09874	0,10164	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0.18509	0,18795	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	78
12	0,20791	0,21076	021,359	0,21644	0,21928	0,22212	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	74
16	0,27556	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	71
19	0,32557	0,32852	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0.39875	0,40141	0,40408	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	65
25	0,42263	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45139	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	58
32	0,52982	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	47
43	0,68199	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69236	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	45
45	0,70711						44
	60'	50'	40'	30'	20'	10' Minutos	Grados

COSENOS

COSENOS

Grados	Minutos 0'	10'	20'	30'	40'	50'	
0	1,00000	0,99999	0,99998	0,99995	0,99992	0,99988	89
1	0,99984	0,99980	0,99973	0,99965	0,99958	0,99950	88
2	0,99940	0,99928	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	87
3	0,99863	0,99848	0,99831	0,99814	0,99795	0,99776	86
4	0,99756	0,99735	0,99714	0,99692	0,99669	0,99644	85
5	0,99618	0,99594	0,99567	0,99539	0,99511	0,99482	84
6	0,99452	0,99421	0,99389	0,99357	0,99324	0,99289	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	80
10	0,98481	0,98429	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97629	0,97566	0,97502	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97099	76
14	0,97029	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	72
18	0,95106	0,95015	0,94921	0,94832	0,94739	0,94646	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93402	0,92935	0,92827	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91589	0,91472	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78979	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	49
41	0,75471	0,75279	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	48
42	0,74314	0,74119	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	45
45	0.70711						44
	60'	50'	40'	30'	20'	10' Minutos	Grados

SENOS

II. — Tabla de las tangentes y cotangent

TANGENTES

Grados ↓	Minutos → 0'	10'	20'	30'	40'	50'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	89
1	0,01746	0,02036	0,02338	0.02620	0,02910	0,03201	88
2	0,03492	0,03783	0,04085	0,04366	0,04658	0,04950	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	74
16	0,28675	0,28989	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31520	0,31850	0,32171	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33459	0,33783	0,34108	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35739	0,36068	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	63
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	54
36	0,72654	0,73099	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	53
37	0,74355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	52
38	0,78125	0,78598	0,79060	0,79544	0,80019	0,80498	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	48
42	0,90040	0,90669	0,91099	0,91633	0,92169	0,92709	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	46
44	0,96569	0,97133	0,97699	0,98260	0,98843	0,99419	45
45	1,00000						44
	60'	50'	40'	30'	20'	10' ← Minutos	Grados ↑

COTANGENTES

de los ángulos de 10 en 10 minutos

COTANGENTES

Grados ↓ / Minutos →	0'	10'	20'	30'	40'	50'	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	81,24158	88
2	28,63225	26,43160	24,54176	22,90377	21,47060	20,20655	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34086	15,60478	14,92442	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6.43484	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22666	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3 56557	3,52609	74
16	3,48741	3,45951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30524	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98868	2,96004	2,93189	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2.82391	2,79802	2,77254	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	69
21	2,60509	2,58361	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2.29984	2,28167	2,26374	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	65
25	2,14451	2,12832	2,11232	2,09654	2,08094	2,06553	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	60
30	1,72205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	58
32	1,60033	1,59002	1.57981	1,56969	1,55966	1,54972	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	56
34	1,48256	1,47280	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	50
40	1.19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	45
45	1,00000						44
	60'	50'	40'	30'	20'	10' ← M nutos	Grados ↑

TANGENTES

93. **Coseno.** — 1º *El ángulo está en las tablas.* — Sea hallar cos 47º 10'. En la página 84 se halla:

$$\cos 47^\circ 10' = 0{,}67987$$

Nótese que a medida que aumenta el ángulo disminuye el coseno, y viceversa.

2º *El ángulo no está en las tablas.* — Sea hallar cos 32º 46'. En la página 85 se halla:

$$\cos 32^\circ 40' = 0{,}84182$$

y: $$\cos 32^\circ 50' = 0{,}84025$$

A un aumento de 10' en el ángulo corresponde una disminución de 0,00157 en el coseno, ¿qué disminución corresponde a 6'?

$$\left.\begin{array}{l} 10' \text{———} 0{,}00157 \\ 6' \text{———} x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{6 \times 0{,}00157}{10} = 0{,}00094$$

Luego: $\cos 32^\circ 46' = 0{,}84182 - 0{,}00094 = 0{,}84088.$

94. **Tangente.** — 1º *El ángulo está en las tablas.* — Sea hallar tg 12º 30'. En la página 86 se halla:

$$\operatorname{tg} 12^\circ 30' = 0{,}22169$$

2º *El ángulo no está en las tablas.* — Sea hallar tg 53º 43'. En la página 87 se halla:

$$\operatorname{tg} 53^\circ 40' = 1{,}35968$$
$$\operatorname{tg} 53^\circ 50' = 1{,}36800$$

La diferencia de las tangentes es 0,00832, luego:

$$\left.\begin{array}{l} 10' \text{———} 0{,}00832 \\ 3' \text{———} x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{3 \times 0{,}00832}{10} = 0{,}00250$$

Luego: $\operatorname{tg} 53^\circ 43' = 1{,}35968 + 0{,}00250 = 1{,}36218.$

96. **Cotangente.** — 1º *El ángulo está en las tablas.* — Sea hallar cot 74º. En la página 86 se halla:

$$\cot 74^\circ = 0{,}28675$$

Nótese que a medida que aumenta el ángulo disminuye la cotangente, y viceversa.

2º *El ángulo no estó en las tablas.* — Sea hallar cot 27º 18'. En la página 87 se halla:

$$\cot 27^\circ 10' = 1{,}94858$$
$$\cot 27^\circ 20' = 1{,}93470$$

A un aumento de 10' en el ángulo corresponde una disminución de 0,01388 en la cotangente, ¿qué disminución corresponde a 8'?

$$\left.\begin{array}{l} 10' \text{ ——— } 0{,}01388 \\ 8' \text{ ——— } x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{8 \times 0{,}01388}{10} = 0{,}011104$$

Luego: $\cot 27^\circ 18' = 1{,}94858 - 0{,}01110 = 1{,}93748.$

II. DADA UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA, HALLAR EL ÁNGULO CORRESPONDIENTE.

96. **Seno.** — 1º *El seno está en las tablas.* — Dado sen $x =$ 0,58307, calcular x. En la página 84 se halla:

$$x = 35^\circ 40'$$

2º *El seno no está en las tablas.* — Dado sen $x = 0{,}87125$, calcular x. En la página 85 se halla:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 60^\circ 30' = 0{,}87036 \\ \text{sen } 60^\circ 40' = 0{,}87178 \end{array}\right\} D = 0{,}00142$$

se tiene que: sen $60^\circ 30'$ — sen $x = 0{,}00089$, de manera que:

$$\left.\begin{array}{l} 10' \text{ ——— } 0{,}00142 \\ x' \text{ ——— } 0{,}00089 \end{array}\right\} \therefore\ x' = \frac{10 \times 0{,}00089}{0{,}00142} = 6'$$

luego: $x = 60^\circ 30 + 6' = 60^\circ 36'$

97. **Coseno.** — 1º *El coseno está en las tablas.* — Dado cos $x = 0{,}18795$, calcular x. En la página 84 se halla:

$$x = 79^\circ 10$$

2º *El coseno no está en las tablas.* — Dado cos $x = 0{,}98400$, calcular x. En la página 85 se halla:

$$\left.\begin{array}{l} \cos 10^\circ 10' = 0{,}98429 \\ \cos 10^\circ 20' = 0{,}98378 \end{array}\right\} D = 51$$

se tiene que: cos $10^\circ 10'$ — cos $x = 29$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} 10' \text{ ——— } 51 \\ x' \text{ ——— } 29 \end{array}\right\} \therefore\ x' = \frac{10 \times 29}{51} = 5'$$

es decir $x = 10^\circ 10' + 5' = 10^\circ 15'$

98. **Tangente.** — 1º *La tangente está en las tablas.* — Dado tg $x = 5{,}67128$, calcular x. En la página 87 se halla:

$$x = 80^\circ$$

2º *La tangente no está en las tablas.* — Dado tg $x = 0{,}47406$, calcular x. En la página 86 se halla:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 25^\circ\,20' = 0{,}47341 \\ \text{tg } 25^\circ\,20' = 0{,}47698 \end{array}\right\} D = 357$$

Además: tg $25^\circ\,20'$ — tg $x = 65$, luego:

$$\left\{\begin{array}{l} 10' \text{ ——— } 357 \\ x' \text{ ——— } 65 \end{array}\right. \therefore x' = \frac{10 \times 65}{357} = 1'49''$$

es decir: $x = 25^\circ\,20 + 1'49'' = 25^\circ\,21'49''$

99. **Cotangente.** — 1º *La cotangente está en las tablas.* — Dado cot $x = 1{,}26471$, calcular x. En la página 87 se halla:

$$x = 38^\circ\,20'$$

2º *La cotangente no está en las tablas.* — Dado cot $x = 0{,}82356$, calcular x. En la página 86 se halla:

$$\left.\begin{array}{l} \text{cot } 50^\circ\,30' = 0{,}82434 \\ \text{cot } 50^\circ\,40' = 0{,}81946 \end{array}\right\} D = 488$$

Además: cot $50^\circ\,30$ — cot $x = 78$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} 10' \text{ ——— } 488 \\ x' \text{ ——— } 78 \end{array}\right\} \therefore x' = \frac{10 \times 78}{488} = 1'48''$$

es decir: $x = 50^\circ\,30' + 1'48'' = 50^\circ\,31'48''$

100. **Observación.** — Los ángulos próximos a 90° tienen grandes variaciones en la tangente para pequeñas variaciones en los ángulos, por lo que no se puede admitir la proporcionalidad, debiendo recurrirse al seno o al coseno.

Lo mismo sucede con las cotangentes de los ángulos próximos a 0°.

Tablas Logarítmicas de las funciones trigonométricas

101. Las *Tablas logarítmicas de las funciones trigonométricas* contienen los logaritmos de las funciones trigonométricas. Estas tablas son las usadas en los cálculos de aplicación. Entre las *Tablas naturales* y las *Tablas logarítmicas* se tienen estas relaciones:

según las tablas naturales, sen $25° = 0{,}42263$
según las tablas de logaritmos, $\log 0{,}42263 = \bar{1}{,}62596$
y según las tablas logarítmicas de las funciones, $\log \operatorname{sen} 25° = \bar{1}{,}62595$.

Las tablas de los diversos autores tienen una disposición análoga, variando sólo en el número de cifras decimales. Así, las tablas de *Lalande*, de *Hoüel* y de *Pastor*, dan 5 cifras decimales para los logaritmos de las funciones trigonométricas, variando los ángulos de 1′ en 1′. Las tablas de *Caillet* y de *Vázquez Queipo* dan 6 cifras decimales, variando los ángulos de 15″ en 15″ en las primeras y de 1′ en 1′ en las segundas. Dan 7 decimales, de 10″ en 10″, las tablas de *Dupuis* y de *Schrön.*

102. Descripción de las tablas de Lalande. — Reproducimos una página de las tablas de *Lalande.* En la parte superior de las tablas están indicados los ángulos desde 0°, hasta 45°, correspondiendo las columnas a los *senos, tangentes, cotangentes* y *cosenos*, y en la parte inferior están los ángulos complementarios de los ángulos que figuran arriba, es decir, desde 45° hasta 90°. En la primera columna de la izquierda, de arriba abajo, se leen los minutos de los ángulos que figuran arriba (de 0° a 45°), y en la columna de la derecha, de abajo arriba, se leen los minutos de los ángulos que figuran abajo (de 45° a 90°).

A la derecha de la columna de los senos y de las tangentes hay una columna encabezada con las letras *D* y *d.c.*, que dan *las diferencias tabulares*, es decir, las diferencias entre dos logaritmos consecutivos.

103. Manejo de las tablas. — Se nos presentan dos casos:

1º) *Dado un ángulo, hallar el logaritmo de una de sus funciones trigonométricas;*

2º) *Dado el logaritmo de una función trigonométrica, hallar el valor del ángulo.*

PRIMER CASO. — *Dado un ángulo, hallar el logaritmo de una de sus funciones trigonométricas.* — Si el ángulo consta de *grados* y *minutos*, las tablas dan directamente los logaritmos.

Ejemplo 1º: Hallar log sen 23° 18':

Se busca en la página correspondiente a 23° y en la columna *sen* 23° se baja hasta 18', resultando:

$$\log \text{sen } 23°18' = 9{,}59720$$

Cuando la característica del logaritmo es mayor que 5, debe restarse 10, resultando así la verdadera característica, de manera que en el ejemplo último se tiene:

$$\log \text{sen } 23'\,18' = 9{,}59720 - 10 = \bar{1}{,}59720$$

Ejemplo 2º: Hallar log cot 23° 5'.

Procediendo como en el ejemplo anterior, resulta:

$$\log \cot 23°\,5' = 0{,}37039$$

Ejemplo 3º: Hallar log cos 66° 40'.

Se tiene: $\log \cos 66°\,40' = 9{,}59778 - 10 = \bar{1}{,}59778$

Ejemplo 4º: Hallar log tg 66° 32'.

Se tiene: $\log \text{tg } 66°32' = 0{,}36239$

Si el ángulo consta de *grados, minutos* y *segundos*, las tablas no dan directamente el logaritmo de las funciones, sino que se hace una interpolación por medio de una regla de tres simple.

Ejemplo 1º: Hallar log cos 23° 15′ 35″

El log cos 23° 15′ 35″ está comprendido entre log cos 23° 15′ y log cos 23° 16′:

$$\left.\begin{array}{l}\log\cos 23^\circ 16' = \bar{1},96316 \\ \log\cos 23^\circ 15' = \bar{1},96322\end{array}\right\} \text{dif.} = 6$$

′	Sin. 23	D.	Tang. 23	d. c.	Cot. 23	Cos. 23	D.	′
0	9.59188	30	9.62785	35	0.37215	9.96403	6	60
1	9.59218	29	9.62820	35	0.37180	9.96397	5	59
2	9.59247	30	9.62855	35	0.37145	9.96392	5	58
3	9.59277	30	9.62890	36	0.37110	9.96387	6	57
4	9.59307	29	9.62926	35	0.37074	9.96381	5	56
5	9.59336	30	9.62961	35	0.37039	9.96376	6	55
6	9.59366	30	9.62996	35	0.37004	9.96370	5	54
7	9.59396	29	9.63031	35	0.36969	9.96365	5	53
8	9.59425	30	9.63066	35	0.36934	9.96360	6	52
9	9.59455	29	9.63101	34	0.36899	9.96354	5	51
10	9.59484	30	9.63135	35	0.36865	9.96349	6	50
11	9.59514	29	9.63170	35	0.36830	9.96343	5	49
12	9.59543	30	9.63205	35	0.36795	9.96338	5	48
13	9.59573	29	9.63240	35	0.36760	9.96333	6	47
14	9.59602	30	9.63275	35	0.36725	9.96327	5	46
15	9.59632	29	9.63310	35	0.36690	9.96322	6	45
16	9.59661	29	9.63345	34	0.36655	9.96316	5	44
17	9.59690	30	9.63379	35	0.36621	9.96311	6	43
18	9.59720	29	9.63414	35	0.36586	9.96305	5	42
19	9.59749	29	9.63449	35	0.36551	9.96300	6	41
20	9.59778	30	9.63484	35	0.36516	9.96294	5	40
21	9.59808	29	9.63519	34	0.36481	9.96289	5	39
22	9.59837	29	9.63553	35	0.36447	9.96284	6	38
23	9.59866	29	9.63588	35	0.36412	9.96278	5	37
24	9.59895	29	9.63623	34	0.56377	9.96273	6	36
25	9.59924	30	9.63657	35	0.36343	9.96267	5	35
26	9.59954	29	9.63692	34	0.36308	9.96262	6	34
27	9.59983	29	9.63726	35	0.36274	9.96256	5	33
28	9.60012	29	9.63761	35	0.36239	9.96251	6	32
29	9.60041	29	9.63796	34	0.36204	9.96245	5	31
30	9.60070		9.63830		0.36170	9.96240		30
′	Cos. 66		Cot. 66		Tang. 66	Sin. 66		

Cuando los ángulos difieren en muy poco, *se conviene en que son proporcionales a los logaritmos de las funciones trigonométricas,* lo que aproximadamente se verifica. Entonces, en nuestro caso, a un minuto (60″) de diferencia entre dos ángulos corresponde una diferencia de 6 entre los logaritmos; a 35″ de diferencia, ¿cuánto corresponderá entre los logaritmos?:

$$\left.\begin{array}{l}60'' \text{———} 6 \\ 35'' \text{———} x\end{array}\right\} \therefore \frac{60}{35} = \frac{6}{x} \therefore x = \frac{35 \times 6}{60} = 3{,}5$$

Como los cosenos *disminuyen* a medida que *aumentan* los ángulos, al log cos 23° 15′ le *restaremos* el número 3,5, luego:

$$\begin{array}{r} \log\cos 23^\circ 15' = \bar{1},96322 \\ 3,5 \\ \hline \log\cos 23^\circ 15' 35'' = \bar{1},96318 \end{array}$$

Ejemplo: 2º: Hallar log tg 66° 30′ 20″

El log tg 66° 30′ 20″ está comprendido entre log tg 66° 30′ y log tg 66° 31′:

$$\left.\begin{array}{l} \log tg\ 66^\circ 30' = 0,36170 \\ \log tg\ 66^\circ 31' = 0,36204 \end{array}\right\} \text{dif.} = 34$$

Procediendo como en el ejemplo anterior, diremos: si a 60″ de diferencia entre los ángulos corresponden 34 de diferencia entre los logaritmos, a 20″, ¿cuántos corresponderá entre los logaritmos?:

$$\left.\begin{array}{l} 60'' \text{———} 34 \\ 20'' \text{———} x \end{array}\right\} \therefore \frac{60}{20} = \frac{34}{x} \therefore x = \frac{20 \times 34}{60} = 11$$

Como las tangentes aumentan a medida que aumentan los ángulos, al log tg 66° 30′ le sumaremos 11, que es la parte correspondiente a 20″:

$$\begin{array}{r} \log tg\ 66^\circ 30' = 0,36170 \\ 11 \\ \hline \log tg\ 66^\circ 30' 20'' = 0,36181 \end{array}$$

SEGUNDO CASO. — *Dado el logaritmo de una función trigonométrica, hallar el valor del ángulo.* — Si el ángulo consta de grados y minutos, las tablas dan directamente los logaritmos.

Ejemplo 1º: Dado log cos $x = \bar{1},59720$, hallar el valor de x.

Buscando en las columnas encabezadas por *cos*, hallamos:

$$x = 66^\circ 42'$$

Ejemplo 2º: Dado log tg $x = \bar{1},63345$, hallar el valor de x.

Como en el ejemplo anterior, se halla:

$$x = 23^\circ\, 16'$$

Ejemplo 3º: Dado log sen $x = \bar{1},59924$, hallar el valor de x.

Se tiene: $x = 23^\circ\, 2\cancel{6}5'$

Ejemplo 4º: Dado log cot $x = \bar{1},63135$, hallar el valor de x.

Se tiene: $x = 66^\circ\, 50'$

Si la función dada no figura exactamente en las tablas, consta de grados, minutos y segundos, calculándose éstos por medio de una interpolación simple.

Ejemplo 1º: Dado log sen $x = \bar{1},59768$, hallar el valor de x.

En las tablas se halla que el ángulo x es igual a 23° 19′ más un cierto número de segundos. La diferencia en las tablas es 29, y la diferencia entre el logaritmo dado y el logaritmo más aproximado de las tablas, es:

$$\begin{array}{r} \bar{1},59768 \\ \bar{1},59749 \\ \hline 19 \end{array}$$

Diremos, pues: si a 60″ corresponde una diferencia de 29 entre los logaritmos, ¿cuántos segundos corresponden a 19 de diferencia entre los logaritmos?:

$$\left.\begin{array}{l} 60'' \text{——} 39 \\ x'' \text{——} 19 \end{array}\right\} \therefore \frac{60}{x} = \frac{39}{19} \therefore x = \frac{60 \times 19}{39} = 29''$$

luego: $x = 23^\circ\, 19'\, 29''$

Ejemplo 2º: Dado log cot $x = 1,63678$, hallar el valor de x.

En las tablas se halla que el ángulo más aproximado es $66° 35'$ más cierto número de segundos. La diferencia de tablas es 34, y la diferencia entre el logaritmo dado y el logaritmo más aproximado de las tablas es:

$$\begin{array}{r} \bar{1},63657 \\ \bar{1},63623 \\ \hline 34 \end{array}$$

y diremos: Si a $60''$ corresponde una diferencia de 34 entre los logaritmos, ¿cuántos segundos corresponden a 21 de diferencia entre los logaritmos?:

$$\left.\begin{array}{l} 60'' \text{———} 34 \\ x'' \text{———} 21 \end{array}\right\} \therefore \frac{60}{x} = \frac{34}{21} \therefore x = \frac{60 \times 21}{34} = 37''$$

luego: $x = 66° 35' 37''$

EJERCICIOS

Empleando las Tablas Naturales, calcular el valor de las siguientes funciones trigonométricas:

82.	sen 36 20'	R: 0,59248
83.	sen 17° 46'	„ 0,30514
84.	sen 78° 15'	„ 0,97905
85.	cos 12° 10'	„ 0,97754
86.	cos 36° 52'	„ 0,80003
87.	cos 42° 17'	„ 0,73983
88.	tg 25° 40'	„ 0,48055
89.	tg 68° 14'	„ 2,5044
90.	tg 36° 42'	„ 0,74538
91.	cot 37° 20'	„ 1,3111
92.	cot 56° 55'	„ 0,65148
93.	cot 15° 38'	„ 3,57537

Empleando las Tablas Naturales, hallar los ángulos que corresponden a las siguientes funciones trigonométricas:

94.	sen $\alpha = 0{,}08107$	R: $\alpha = 4^\circ 39'$
95.	sen $\beta = 0{,}21530$	„ $\beta = 12^\circ 26'$
96.	sen $\gamma = 0{,}99055$	„ $\gamma = 82^\circ 7'$
97.	cos $\alpha = 0{,}99596$	„ $\alpha = 5^\circ 9'$
98.	cos $\beta = 0{,}92477$	„ $\beta = 22^\circ 22'$
99.	cos $\gamma = 0{,}33874$	„ $\gamma = 70^\circ 12'$
100.	tg $\alpha = 0{,}17273$	„ $\alpha = 9^\circ 48'$
101.	tg $\beta = 7{,}57872$	„ $\beta = 82^\circ 29'$
102.	tg $\gamma = 0{,}94620$	„ $\gamma = 43^\circ 25'$
103.	cot $\alpha = 3{,}41973$	„ $\alpha = 16^\circ 18'$
104.	cot $\beta = 0{,}16286$	„ $\beta = 80^\circ 45'$
105.	cot $\gamma = 9{,}20516$	„ $\gamma = 6^\circ 12'$

Empleando las Tablas Logarítmicas, calcular el valor de las siguientes funciones trigonométricas:

106.	log sen $36^\circ 52' 32''$	R: $\overline{1},77821$
107.	log sen $48^\circ 0' 41''$	„ $\overline{1},87115$
108.	log sen $9^\circ 39' 17''$	„ $\overline{1},22456$
109.	log sen $39^\circ 8' 52''$	„ $\overline{1},80025$
110.	log cos $33^\circ 21' 46''$	„ $\overline{1},92179$
111.	log cos $49^\circ 12' 12''$	„ $\overline{1},81516$
112.	log cos $72^\circ 52' 49''$	„ $\overline{1},46889$
113.	log cos $65^\circ 0' 47''$	„ $\overline{1},62574$
114.	log tg $63^\circ 39' 27''$	„ $0,30526$
115.	log tg $39^\circ 8' 52''$	„ $\overline{1},91065$
116.	log tg $49^\circ 0' 54''$	„ $0,06107$
117.	log tg $89^\circ 32' 14''$	„ $2,08921$
118.	log cot $72^\circ 35' 47''$	„ $\overline{1},49617$
119.	log cot $9^\circ 39' 17''$	„ $0,76924$
120.	log cot $25^\circ 15' 23''$	„ $0,32627$
121.	log cot $45^\circ 1' 48''$	„ $\overline{1},99954$

Empleando las Tablas Logarítmicas, hallar el valor de los ángulos que corresponden a las siguientes funciones trigonométricas:

122. $\log \operatorname{sen} \alpha = \bar{1},40888$	R: $\alpha = 14^\circ 51' 19''$
123. $\log \operatorname{sen} \beta = \bar{1},77569$	„ $\beta = 36^\circ 37' 40''$
124. $\log \operatorname{sen} \gamma = \bar{1},94267$	„ $\gamma = 61^\circ 12' 8''$
125. $\log \operatorname{sen} \delta = \bar{1},70435$	„ $\delta = 30^\circ 24' 50''$
126. $\log \cos \alpha = \bar{1},67412$	„ $\alpha = 61^\circ 49' 23''$
127. $\log \cos \beta = \bar{1},92386$	„ $\beta = 32^\circ 56' 45''$
128. $\log \cos \gamma = \bar{1},12575$	„ $\gamma = 82^\circ 19' 24''$
129. $\log \cos \delta = \bar{3},89002$	„ $\delta = 89^\circ 33' 18'',8$
130. $\log \operatorname{tg} \alpha = \bar{1},88201$	„ $\alpha = 37^\circ 18' 40''$
131. $\log \operatorname{tg} \beta = \bar{1},99500$	„ $\beta = 44^\circ 40' 12''$
132. $\log \operatorname{tg} \gamma = 0,27743$	„ $\gamma = 62^\circ 10' 10''$
133. $\log \operatorname{tg} \delta = \bar{1},33471$	„ $\delta = 12^\circ 11' 44''$
134. $\log \cot \alpha = 0,54139$	„ $\alpha = 16^\circ 2' 20''$
135. $\log \cot \beta = \bar{1},12345$	„ $\beta = 82^\circ 25' 52''$
136. $\log \cot \gamma = \bar{1}.81707$	$\gamma = 56^\circ 43' 30''$
137. $\log \cot \delta = \bar{1},97500$	„ $\delta = 46^\circ 38' 52''$

CAPITULO IX

Relaciones entre los elementos de un triángulo rectángulo.

104. TEOREMA I. — *En todo triángulo rectángulo, cada cateto es igual a la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto a dicho cateto, o por el coseno del ángulo adyacente.*

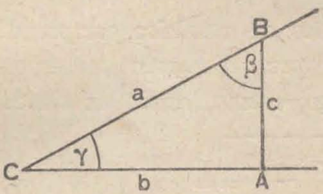

Fig. 39.

H) $\overset{\triangle}{ABC}$. rectángulo, fig. 39.

T) $c = a . \text{sen}\ C$; $b = a . \text{sen}\ B$
$c = a . \cos B$; $b = a . \cos C$

Por definición de seno, se tiene:

$$\text{sen}\ C = \frac{c}{a} \therefore \quad \boxed{c = a .\ \text{sen}\ C}$$

$$\text{sen}\ B = \frac{b}{a} \therefore \quad \boxed{b = a .\ \text{sen}\ B}$$

y por definición de coseno:

$$\cos C = \frac{b}{a} \therefore \quad \boxed{b = a .\ \cos C}$$

$$\cos B = \frac{c}{a} \therefore \quad \boxed{c = a .\ \cos B}$$

105. COROLARIO. — *La proyección de un segmento sobre una recta es igual al producto del segmento dado por el coseno del ángulo agudo que forma con la recta.*

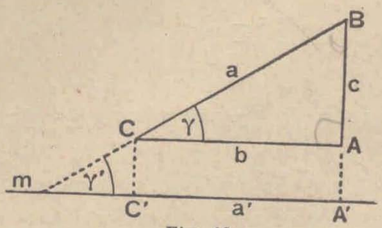

Fig. 40.

Sea el segmento a, fig. 40, y la recta m. La proyección de a sobre m sabemos que es a', y el ángulo que forma con m es γ'. Trazando $CA||m$ resulta, en el triángulo rectángulo ABC:

$$b = a . \cos \gamma$$

pero $b = a'$ por ser segmentos de paralelas comprendidas entre paralelas, y $\gamma = \gamma'$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas, luego, reemplazando, se tiene:

$$\boxed{a' = a. \cos \gamma}$$

106. Teorema II. — *En todo triángulo rectángulo, cada cateto es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero, o por la cotangente del ángulo adyacente.*

H) $\overset{\triangle}{ABC}$, rectángulo, fig. 41

T) $c = b. \text{ tg } C$; $b = c. \text{ tg } B$

$c = b. \cot B$; $b = c. \cot C$

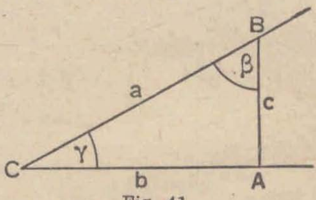

Fig. 41.

Por definición de tangente, se tiene:

$$\text{tg } C = \frac{c}{b} \quad \therefore \quad \boxed{c = b. \text{ tg } C}$$

$$\text{tg } B = \frac{b}{c} \quad \therefore \quad \boxed{b = c. \text{ tg } B}$$

y por definición de cotangente:

$$\cot C = \frac{b}{c} \therefore \quad \boxed{b = c.\ \cot C}$$

$$\cot B = \frac{c}{b} \therefore \quad \boxed{c = b.\ \cot B}$$

107. Pendiente de una recta. — Al estudiar *Geometría del Espacio,* hemos visto que el ángulo de una recta y un plano es el ángulo determinado por la recta y la proyección de la recta en el plano. Corrientemente, en lugar de indicar en grados la inclinación de una recta con un plano, se emplea una *razón,* llamada *pendiente de la recta,* que es, precisamente, la tangente del ángulo que forma la recta con el plano.

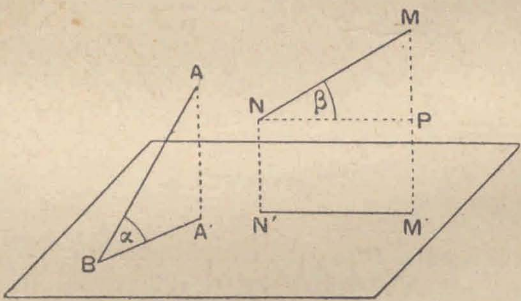

Fig. 42.

Así, fig. 42, si $A'B$ es la proyección de AB y α y el ángulo formado, se tiene:

$$pendiente\ de\ AB = tg\,\alpha = \frac{AA'}{A'B}$$

Y si $M'N'$ es la proyección de MN, se tiene:

$$pendiente\ de\ MN = tg\,\beta = \frac{MP}{NP}$$

Ejemplo: Para indicar la inclinación de una vía de tranvías se dice que su pendiente es de tanto, por ejemplo, de 4 por 100, lo que significa que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{100}$$

siendo α el ángulo de la inclinación.

108. Recta de máxima pendiente de un plano. — Si dos planos se cortan, la *recta de máxima pendiente* de uno respecto al otro, es la recta del primer plano que es perpendicular a la intersección. La *pendiente de un plano es la pendiente de la recta de máxima pendiente.*

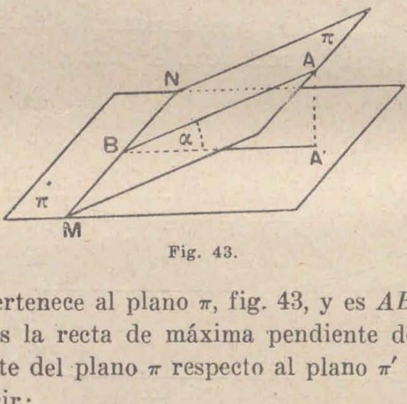

Fig. 43.

Si AB pertenece al plano π, fig. 43, y es $AB \perp MN$, la recta AB es la recta de máxima pendiente del plano π. La pendiente del plano π respecto al plano π' es el ángulo α, es decir:

$$\textit{pendiente de } \pi = \textit{pendiente de } AB = \operatorname{tg} \alpha = \frac{AA'}{A'B}$$

Ejemplo: Cuando se dice que la pendiente de una carretera es del 7,5 % significa que el ángulo α que forma con un plano horizontal es:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7{,}5}{100} = \frac{75}{1000} = 0{,}075$$

Resolución de los triángulos rectángulos

109. Definición. — *Resolver un triángulo,* es calcular sus elementos conociendo algunos de ellos.

Los *elementos* principales de un triángulo son sus lados y sus ángulos.

Un triángulo está determinado cuando se conocen tres de sus elementos, siempre que entre los datos figure un lado, por lo menos.

En un triángulo rectángulo, el ángulo recto siempre es conocido.

110. Casos de resolución. — Se presentan los siguientes casos:

1º) *Dados los catetos;*
2º) *Dados un cateto y la hipotenusa;*
3º) *Dados un cateto y un ángulo agudo;*
4º) *Dados la hipotenusa y un ángulo agudo.*

Estos cuatro casos son los llamados *casos clásicos de resolución,* pero existen otros muchos cuya resolución sale de los límites de esta obra.

111. Primer Caso. — *Resolver un triángulo rectángulo conociendo los catetos.*

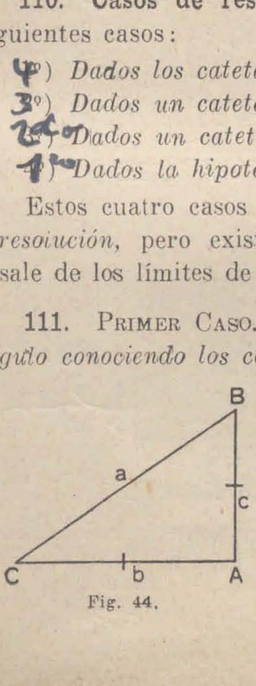

Fig. 44.

Datos: b y c, fig. 44.
Incógnitas: a, B, C.

Solución

Por el *Teorema de Pitágoras* se tiene:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Por definición de tangente, se tiene:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \therefore \log \operatorname{tg} B = \log b - \log c$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} \therefore \log \operatorname{tg} C = \log c - \log b$$

Una vez calculado el ángulo B, el ángulo C se calcula más fácilmente por medio de la fórmula:

$$C = 90^\circ - B$$

EJEMPLO NUMÉRICO. — *Datos*: $b = 15$ cm., $c = 20$ cm. *Incógnitas*: a, B, C.

Cálculo de a:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 ; a = 25 \ cm.$$

Cálculos auxilares	*Cálculo de* B:
$\log 15 = \quad 1{,}17609$	$\log \operatorname{tg} B = \log b - \log c$
$-\log 20 = -1{,}30103$	$\log \operatorname{tg} B = \log 15 - \log 20$
$\overline{1},87506$	$\log \operatorname{tg} B = \overline{1},87506$

En las tablas se halla que: $B = 36^\circ \, 52' \, 11'',5$

Cálculo de C:

$$C = 90^\circ - B$$

$$C = 90^\circ - 36^\circ \, 52' \, 11'',5$$

$$C = 53^\circ \, 7' \, 48'',5$$

112. SEGUNDO CASO. — *Resolver un triángulo rectángulo conociendo un cateto y la hipotenusa.*

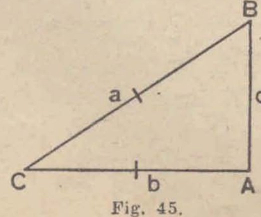

Fig. 45.

Datos: a y b, fig. 45.
Incógnitas: c, B, C.

Solución

Por el *Teorema de Pitágoras*, se tiene:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Por definición de seno y de coseno, se tiene:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \quad \therefore \quad \log \operatorname{sen} B = \log b - \log a.$$

$$\cos C = \frac{b}{a} \quad \therefore \quad \log \cos C = \log b - \log a.$$

Ejemplo numérico. — Dados $a = 3{,}50$ m. y $b = 2$ m., calcular c, B, C.

Cálculo de C:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{3{,}5^2 - 2^2} = \sqrt{8{,}25} = 2{,}87 \; ; \quad c = 2{,}87 \text{ m.}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}30103 \\ -\log 3{,}5 &= -0{,}54407 \\ \hline & \bar{1}{,}75696 \end{aligned}$$

Cálculo de B:

$$\log \operatorname{sen} B = \log b - \log a$$

$$\log \operatorname{sen} B = \log 2 - \log 3{,}5$$

$$\log \operatorname{sen} B = \bar{1}{,}75696$$

En las tablas se halla que: $B = 34^\circ\, 51'$.

Cálculo de C:

$$C = 90^\circ - B$$

$$C = 90^\circ - 34^\circ\, 51'$$

$$C = 55^\circ\, 9'$$

113. Tercer Caso. — ***Resolver un triángulo rectángulo conociendo un cateto y un ángulo agudo.***

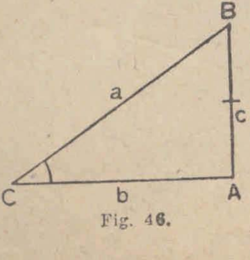

Fig. 46.

Datos: b y C, fig. 46.

Incógnitas: a, c, B.

Solución

Se tiene:

$$\cos C = \frac{b}{a}$$

de donde: $a = \dfrac{b}{\cos C}$ $\therefore$ $\log a = \log b - \log \cos C$.

Por el teorema II (106), se tiene:

$$c = b \,.\, \mathrm{tg}\, C \quad \therefore \quad \log c = \log b + \log \mathrm{tg}\, C.$$

Una relación conocida da:

$$B = 90^\circ - C$$

Ejemplo numérico.—Dados $B = 725$ m. y $C = 28^\circ\ 32'$, calcular a, c y B.

Cálculos auxiliares:	*Cálculo de a:*
$\log 725 = 2{,}86034$	$\log a = \log b - \log \cos C$
$\log \cos 28^\circ\ 32' = -\ \bar{1}{,}94376$	$\log a = \log 725 - \log \cos 28^\circ\ 32'$
$2{,}91658$	$\log a = 2{,}91658$
	En las tablas se halla que:
	$a = 825{,}24$ m.
——	*Cálculo de c:*
$\log 725 = 2{,}86034$	$\log c = \log b + \log \mathrm{tg}\, C$
$\log \mathrm{tg}\ 28^\circ\ 32' = +\ \bar{1}{,}73537$	$\log c = \log 725 + \log \mathrm{tg}\ 28^\circ 32'$
$2{,}59571$	$\log c = 2{,}59571$
	En las tablas se halla que:
	$c = 394{,}19$ m.

Cálculo de B:

$$B = 90^\circ - C$$
$$B = 90^\circ - 28^\circ 32'$$
$$B = 61^\circ 28'$$

114. Cuarto Caso. — *Resolver un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y un ángulo agudo.*

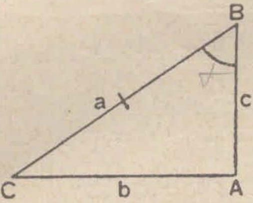

Fig. 47.

Datos: a y B, fig. 47.

Incógnitas: b, c y C

Solución

En el teorema I (104), se tiene:

$$b = a.\operatorname{sen} B \;\therefore\; \log b = \log a + \log \operatorname{sen} B$$
$$c = a.\cos B \;\therefore\; \log c = \log a + \log \cos B$$

Por una relación conocida:

$$C = 90^\circ - B$$

Ejemplo numérico.—Dados $a = 45{,}18$ m y $B = 64^\circ 20'$, calcular b, c y C.

Cálculo de b:

Cálculos auxiliares:

$\log 45{,}18$	$=$	$1{,}65495$
$\log \operatorname{sen} 64^\circ 20'$	$= +$	$\overline{1},95488$
		$1{,}60983$

$$\log b = \log a + \log \operatorname{sen} B$$
$$\log b = \log 45{,}18 + \log \operatorname{sen} 64^\circ 20'$$
$$\log b = 1{,}60983$$

En las tablas se halla que:

$$b = 40{,}72 \text{ m}$$

Cálculo de c:

$\log a$	$=$	$1{,}65495$
$\log \cos 64^\circ 20'$	$= +$	$\overline{1},63662$
		1.29157

$$\log c = \log a + \log \cos B$$
$$\log c = \log 45{,}18 + \log \cos 64^\circ 20'$$
$$\log c = 1{,}29157$$

En las tablas se halla que: $c = 19{,}569$ m

Cálculo de C:

$$C = 90^\circ - B$$
$$C = 90^\circ - 64^\circ 20'$$
$$C = 25^\circ 40'$$

EJERCICIOS

Resolver los siguientes triángulos rectángulos empleando las Tablas Naturales:

138. $b = 18$ m; $c = 15$ m.
R: $a = 23{,}431$ m.; $B = 50^\circ 11' 40''$; $C = 39^\circ 48' 20''$

139. $a = 21{,}28$ m.; $b = 13{,}56$ m.
R: $c = 16{,}4$ m.; $B = 39^\circ 35'$; $C = 50^\circ 25'$

140. $b = 17{,}28$ m.; $C = 51^\circ 25$.
R: $a = 27{,}7$ m.; $c = 21{,}66$ m.; $B = 38^\circ 35'$

141. $a = 48$ m.; $B = 60^\circ 29'$.
R: $b = 41{,}78$ m.; $c = 23{,}64$ m.; $C = 29^\circ 31'$

142. $c = 742{,}34$ m.; $C = 46^\circ 44'$.
R: $a = 1020{,}4$ m.; $b = 699$ m.; $B = 43^\circ 16$

143. $a = 400$ m.; $b = 352{,}39$ m.
R: $c = 189{,}25$ m.; $B = 61^\circ 45' 46''$

144. $a = 52{,}28$ m.; $C = 51^\circ 44'$.
R: $b = 32{,}36$ m.; $c = 41{,}03$ m.; $B = 38^\circ 16'$

145. $b = 202{,}93$ m.; $c = 103{,}33$ m.
R: $a = 227{,}73$ m.; $B = 63^\circ 0' 54''$; $C = 26^\circ 59' 6''$

Resolver los siguientes triángulos rectángulos empleando las Tablas Logarítmicas:

146. $b = 70{,}5$ m.; $c = 90{,}6$ m.
R: $a = 114{,}8$ m.; $B = 37^\circ 53' 16''$; $C = 52^\circ 6' 44''$

147. $a = 871{,}33$ m.; $b = 786{,}11$ m.
R: $c = 375{,}83$ m.; $B = 64^\circ 26' 53''$; $C = 25^\circ 33' 7''$

148. $b = 261{,}7$ m.; $B = 61^\circ 10' 42''$.
R: $a = 248{,}19$ m.; $c = 144$ m.; $C = 28^\circ 49' 18''$

149. $a = 58{,}9$ m.; $C = 65^\circ 57' 15''$.
R: b $= 24$ m.; $c = 53{,}79$ m.; $B = 24^\circ 2' 45''$

150. $a = 22{,}062$ m.; $b = 12$ m.
R: $c = 18{,}513$ m.; $B = 32^\circ 57'$; $C = 57^\circ 3'$

151. $a = 596{,}76$ m.; $B = 30^\circ 47\ 14''$.
R: $b = 305{,}45$ m.; $c = 512{,}66$ m.; $C = 59^\circ 12' 46''$

152. $b = 211{,}4$ m.; $c = 248{,}34$ m.
R: $a = 326{,}4$ m.; $B = 40^\circ 22'$; $C = 49^\circ 38'$

153. $b = 6{,}12$ m.; $C = 46^\circ 43' 28''$.
R: $a = 8{,}927$ m.; $c = 6{,}5$ m.; $B = 43^\circ 16' 32''$

Relaciones entre los elementos de un triángulo cualquiera

115. **Teorema del seno.** — *En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

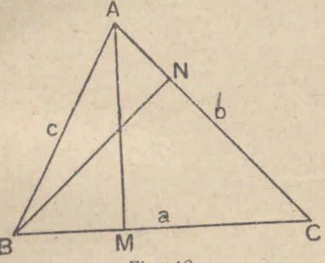

Fig. 48.

$H)$ $\overset{\triangle}{ABC}$, fig. 48

$$T) \quad \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Al trazar la altura de AM, resulta:

en el $\overset{\triangle}{AMC}$, rect.:

$$AM = b\,.\text{sen } C \quad (1)$$

en el $\overset{\triangle}{AMB}$, rect.:

$$AM = c\,.\text{sen } B \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce:

$$b\,.\text{sen } C = c\,.\text{sen } B$$

de donde se saca:

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \qquad (3)$$

Al trazar la altura BN, resulta:

en el $\overset{\triangle}{BNC}$, rect.: $\quad BN = a\,.\text{sen } C \qquad (4)$

en el $\overset{\triangle}{BNA}$. rect.: $\quad BN = c\,.\text{sen } A \qquad (5)$

De (4) y (5) se deduce:

$$a\,.\text{sen } C = c\,.\text{sen } A$$

de donde:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \qquad (6)$$

Comparando (3) y (6) se deduce que:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

116. Teorema del coseno. — *En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de ellos por el coseno del ángulo comprendido.*

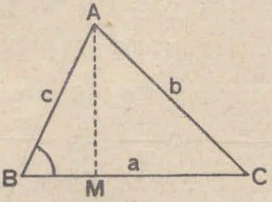

Fig. 49.

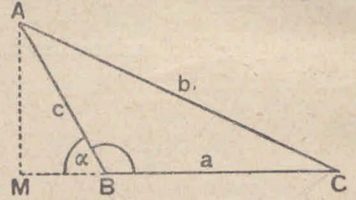

Fig. 50.

H) $\overset{\triangle}{ABC}$, fig. 49 y 50

T) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \, . \cos B.$

Hay que distinguir si el ángulo opuesto al lado dado es agudo u obtuso.

1º Angulo agudo. (Figura 49). — Por *Geometría plana* sabemos que el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos *menos* el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él; es decir:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \, . BM \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo *ABM* se tiene:

$$BM = c \, . \cos B$$

Sustituyendo este valor en (1), resulta:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \, . \cos B$$

2º) Angulo obtuso. (Fig. 50). — Se sabe que el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos *más* el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él; es decir:

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2a.BM \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo ABM se tiene:

$$BM = c.\cos \alpha \qquad (2)$$

pero los ángulos α y B son suplementarios, y sabemos que los senos de dos ángulos suplementarios son iguales en valor absoluto y de distinto signo, luego:

$$\cos \alpha = -\cos B$$

y sustituyendo en (2):

$$BM = c.(-\cos B) = -c.\cos B$$

valor que reemplazado en (1) da:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$

Análogamente: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

117. Teorema del coseno modificado. — *En todo triángulo ABC se tiene que:*

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b\,c}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}}$$

siendo a, b *y* c *los lados y* p *el semiperímetro.*

1º) De la fórmula:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

se deduce que: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$ (1)

Recordemos, (72), que:

$$\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}$$

y que. (15):

$$1 = \text{sen}^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}$$

Restando ordenadamente:

$$1 - \cos A = 2\text{sen}^2 \frac{A}{2}$$

o bien: $$2 \text{ sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

Reemplazando en esta expresión el valor (1).

$$2 \text{ sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

o bien: $$2 \text{ sen}^2 \frac{A}{2} = 1 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2\,b\,c}$$

y efectuando: $$= \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{2\,b\,c} \qquad (2)$$

Por otra parte, sabemos que:

$$a + b + c = 2p$$

y restando $2c$: $$a + b + c - 2c = 2p - 2c$$

$$a + b - c = 2(p - c) \qquad (3)$$

De igual manera:

$$a - b + c = 2(p - b) \qquad (4)$$

Reemplazando los valores (3) y (4) en (2):

$$2 \text{ sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{2\,(p - c)\,.\,2\,(p - b)}{2\,b\,c}$$

trasponiendo 2: $$\text{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{4\,(p - b)\,(p - c)}{4\,b\,c}$$

$$\text{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{(p - b)\,(p - c)}{b\,c}$$

y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, queda:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b\,c}} \\ \text{Análogamente:} \quad \operatorname{sen} \frac{B}{2} &= \pm \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{a\,c}} \\ \operatorname{sen} \frac{C}{2} &= \pm \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{a\,b}} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

2º) Sabemos que: $$1 = \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}$$

y que: $$\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}$$

sumando ordenadamente: $$1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2}$$

es decir: $$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A$$

y reemplazando aquí el valor ya hallado de

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

efectuando la suma:

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2\,b\,c} \qquad (5)$$

Pero: $$b + c + a = 2p \qquad (6)$$

y: $$b + c - a = 2(p-a) \qquad (7)$$

Reemplazando los valores (6) y (7) en (5):

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4p(p-a)}{2\,b\,c}$$

o bien
$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{b\,c}$$

y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}} \\
\text{Análogamente: } &\cos \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{a\,c}} \\
&\cos \frac{C}{2} = \pm \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}}
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{II})$$

118. Corolario. — Dividiendo ordenadamente las primeras fórmulas de (I) y (II), se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}{\frac{p\,(p-a)}{bc}}}$$

o bien:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}} \\
\text{Análogamente: } &\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}} \\
&\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \pm \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{III})$$

Los grupos de fórmulas (I), (II) y (III) son calculables por logaritmos y permiten calcular los ángulos conociendo los lados de un triángulo cualquiera.

119. Teorema de las tangentes. — *En todo triángulo la suma de dos lados es a su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos.*

$H)$ $\overset{\triangle}{ABC}$, $\qquad T)$ $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}}$

Por el teorema del seno se sabe que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

e invirtiendo la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

y por una propiedad de las proporciones, tenemos:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}$$

y transformando en producto la suma y diferencia de senos:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{A+B}{2} \cdot \cos \dfrac{A-B}{2}}{2 \cos \dfrac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{A-B}{2}}$$

o sea: $\qquad \dfrac{a+b}{a-b} = \operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2} \cdot \cot \dfrac{A-B}{2}$

y como $\qquad \cot \dfrac{A-B}{2} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}}$, se obtiene:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}}$$

Resolución de triángulos oblicuángulos

120. Casos de resolución. — Se presentan los siguientes casos:

1º) *Dados dos lados y el ángulo comprendido;*

2º) *Dados dos ángulos y el lado comprendido;*

3º) *Dados los tres lados;*

4º) *Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.*

121. Primer Caso. — *Resolver un triángulo conociendo dos lados y el ángulo comprendido.*

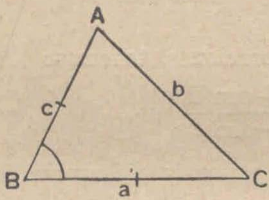

Fig. 51.

Datos: a, c y B, fig. 51.

Incógnitas: A, C y b.

Solución

Los ángulos A y C se calculan resolviendo un sistema de de dos ecuaciones con dos incógnitas. En efecto, se tiene que:

$$A + B + C = 180^\circ$$

o bien:
$$A + C = 180^\circ - B$$

de donde:
$$\frac{A + C}{2} = 90^\circ - \frac{B}{2} \qquad (1)$$

y calculando la tangente de ambos miembros:

$$\operatorname{tg} \frac{A + C}{2} = \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) \qquad (2)$$

que es una de las dos ecuaciones del sistema.

Por el teorema de las tangentes, se tiene:

$$\frac{a + c}{a - c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A + C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A - C}{2}}$$

de donde se deduce que:

$$\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}(a-c)}{a+c} \qquad (3)$$

que es la otra ecuación del sistema. Reemplazando el valor (2) en (3), resulta:

$$\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}=\frac{\operatorname{tg}\left(90^{0}-\frac{B}{2}\right)(a-c)}{a+c}$$

En el segundo miembro todos los elementos son conocidos, de manera que efectuando las operaciones resultará un cierto valor α, luego:

$$\frac{A-C}{2}=\alpha \qquad (4)$$

Sumando las expresiones (1) y (4) resulta:

$$A=90^{0}-\frac{B}{2}+\alpha$$

Restando a (1) la expresión (4):

$$C=90^{0}-\frac{B}{2}-\alpha$$

y obtenidos así los valores de los ángulos A y C.

Para calcular el lado c aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

de donde: $$b=\frac{a.\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

Ejemplo numérico. — Datos: $a=45$ m, $c=32$ m. $B=36^{0}$. Incógnitas: A, C, b.

Cálculo de A y C:

Se tiene: $$\frac{A+C}{2}=90^{0}-\frac{B}{2}$$

$$\frac{A+C}{2} = 90^\circ - \frac{36^\circ}{2} = 72^\circ \qquad (1)$$

Además:

$$\operatorname{tg}\frac{A-C}{2} = \frac{\operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right)(a-c)}{a+c}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-C}{2} = \operatorname{tg}\frac{72^\circ\,(45-32)}{45+32} = \frac{\operatorname{tg} 72^\circ \times 13}{77}$$

y logaritmando:

$$\log \operatorname{tg}\frac{A-C}{2} = \log 72^\circ + \log 13 + \operatorname{colog} 77$$

Cálculos auxiliares

log tg 72°	=	0,48822
log 13	=	1,11394
colog 77	=	$\bar{2}$,11351
		$\bar{1}$,71567

$$\log \operatorname{tg}\frac{A-C}{2} = \bar{1}.71567$$

En las tablas se halla que:

$$\frac{A-C}{2} = 27^\circ\,27'\,23'' \quad (2)$$

Sumando y restando los valores (1) y (2), resulta:

$$\frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2} = A = 72^\circ + 27^\circ 27' 23'' \quad \therefore \quad A = 99^\circ 27' 23''$$

$$\frac{A+C}{2} - \frac{A-C}{2} = C = 72^\circ - 27^\circ 27' 23'' \quad \therefore \quad C = 44^\circ 32' 37''$$

Cálculos auxiliares

log 45	=	1,65321
log sen 36°	=	$\bar{1}$,76922
		1,42243

sen 99° 27' 23'' = sen (180° — 99° 27' 23'') = 80° 32' 37''

log sen 80° 32' 37''	=	$\bar{1}$,99405
		1,42243
	—	$\bar{1}$,99405
		1,42838

Cálculo de b

Se tiene: $b = \dfrac{a.\ \text{sen}\ B}{\text{sen}\ A}$

de donde:

$$\log b = \log a + \log \text{sen}\, B - \log \text{sen}\, A$$

$$\log b = \log 45 + \log \text{sen}\, 36^\circ - \log \text{sen}\, 99^\circ 27' 23''$$

$$\log b = 1{,}42838$$

$$\therefore \quad b = 26{,}815 \text{ m}$$

122. SEGUNDO CASO. — *Resolver un triángulo conociendo dos ángulos y el lado comprendido.*

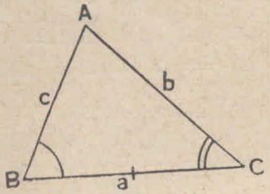

Fig. 52.

Datos: B, C y a, fig. 52.

Incógnitas: b, c y A.

Solución

Se sabe que:

$$A + B + C = 180^\circ$$

luego:

$$A = 180^\circ - (B + C)$$

Por el teorema del seno, se tiene:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

de donde se deduce:

$$b = \frac{a.\ \text{sen } B}{\text{sen } A}$$

$$c = \frac{a.\ \text{sen } C}{\text{sen } A}$$

EJEMPLO NUMÉRICO. — Datos: $B = 56^\circ$, $C = 38^\circ 25'$, $a = 75$ m. Incógnitas: b, c, A.

Cálculo de A:

$$A = 180^\circ - (B + C)$$
$$A = 180^\circ - (56^\circ + 38^\circ 25')$$
$$A = 85^\circ 35'$$

Cálculo de b:

$$b = \frac{a.\ \text{sen } B}{\text{sen } A}$$

y logaritmando:

$$\log\ b = \log\ a + \log\ \text{sen } B + \text{colog sen } A$$

Cálculos auxiliares

log 75	$= 1,87506$
log sen 56°	$= \overline{1},91857$
colog sen 85° 35'	$= 0,00129$
	$1,79492$

$\log b = \log 75 + \log \text{sen}\ 56° + \text{colog sen}\ 85°35'$

$\log b = 1,79492$

y en las tablas se halla:

$b = 62,36\ \text{m}$

Cálculo de c:

$$c = \frac{a.\ \text{sen}\ C}{\text{sen}\ A}$$

$\log c = \log a + \log \text{sen C} + \text{colog sen}\ A$

$\log c = \log 75 + \log \text{sen}\ 38°25' + \text{colog sen}\ 85°35'$

$\log c = 1,66970$

$\therefore\ c \cong 46,74\ \text{m}$

log 75	$= 1,87506$
log sen 38° 25'	$= \overline{1},79335$
colog sen 85° 35'	$= 0,00129$
	$1,66970$

123. Tercer Caso. — *Resolver un triángulo conociendo sus tres lados.*

Datos: a, b, c, fig. 53.

Incógnitas: A, B, C.

Solución

Las fórmulas obtenidas en (117) nos dan las soluciones:

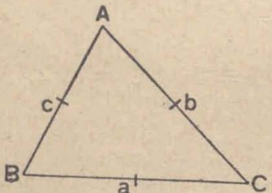

Fig. 53.

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}}$$

$$\cos \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}}$$

$$\cos \frac{C}{2} = \pm \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{ab}}$$

Ejemplo numérico. — Datos: $a = 48$ m, $b = 64$ m, $c = 90$ m; Incógnitas: A, B y C.

Muera Perón
Viva la libertad de culto
1420

Cálculo de A:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}}$$

logaritmando:

$$\log \cos \frac{A}{2} = \frac{\log p + \log (p-a) + \operatorname{colog} b + \operatorname{colog} c}{2}$$

$$\log \cos \frac{A}{2} = \frac{\log 101 + \log 53 + \operatorname{colog} 64 + \operatorname{colog} 90}{2}$$

Cálculos auxiliares

$$p = \frac{48 + 64 + 90}{2} = 101$$

$$p - a = 101 - 48 = 53$$

$\log\ 101 = 2{,}00432$
$\log\ 53 = 1{,}72428$
$\operatorname{colog}\ 64 = \bar{2}{,}19382$
$\operatorname{colog}\ 90 = \bar{2}{,}04576$
$\bar{1}{,}96818$

$$\frac{\bar{1}{,}96818}{2} = \bar{1}{,}98409$$

$$\log \cos \frac{A}{2} = \bar{1}{,}98409$$

En las tablas se halla:

$$\frac{A}{2} = 15^\circ 25' \quad \therefore \quad A = 30^\circ 50'$$

Cálculo de B:

$$\cos \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}}$$

$$\log \cos \frac{B}{2} = \frac{\log p + \log (p-b) + \operatorname{colog} a + \operatorname{colog} c}{2}$$

$$\log \cos \frac{B}{2} = \frac{\log 101 + \log 37 + \operatorname{colog} 48 + \operatorname{colog} 90}{2}$$

$p - b = 101 - 64 = 37$
$\log\ 101 = 2{,}00432$
$\log\ 37 = 1{,}56820$
$\operatorname{colog}\ 48 = \bar{2}{,}31876$
$\operatorname{colog}\ 90 = \bar{2}{,}04576$
$\bar{1}{,}93704$

$$\frac{\bar{1}{,}93704}{2} = \bar{1}{,}96852$$

$$\log \cos \frac{B}{2} = \bar{1}{,}96852$$

En las tablas se halla:

$$\frac{B}{2} = 21^\circ\ 33' \quad \therefore \quad B = 43^\circ\ 6'$$

Cálculo de C:

$$\cos \frac{C}{2} = \pm \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}}$$

$$\log \cos \frac{C}{2} = \frac{\log p + \log (p-c) + \operatorname{colog} a + \operatorname{colog} c}{2}$$

$$\log \cos \frac{C}{2} = \frac{\log 101 + \log 11 + \operatorname{colog} 48 + \operatorname{colog} 64}{2}$$

Cálculos auxiliares

$b - c = 101 - 90 = 11$

$\log\ 101 = 2,00432$

$\log\ 11 = 1,04139$

$\operatorname{colog}\ 48 = \bar{2},31876$

$\operatorname{colog}\ 64 = \bar{2},19382$

$\bar{1},55829$

$$\frac{\bar{1},55829}{2} = \bar{1},77914$$

$$\log \cos \frac{C}{2} = \bar{1},77914$$

En las tablas se halla:

$$\frac{C}{2} = 53^{\circ}\ 2' \therefore C = 106^{\circ}\ 4'$$

124. Cuarto Caso. — *Resolver un triángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.*

Datos: a, b y A, fig. 54. *Incógnitas*: c, B y C.

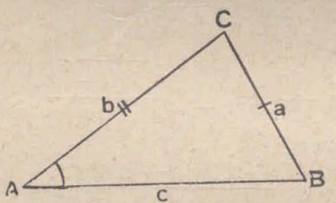

Fig. 54.

Solución

Los ángulos B o C se calculan aplicando el teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

de donde: $\operatorname{sen} B = \dfrac{b.\operatorname{sen} A}{a}$

Conocido el valor de B, se halla el de C por la fórmula

$$A + B + C = 180^{\circ}$$

de donde: $C = 180^{\circ} - (A + B)$

El lado c se calcula aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

de donde: $c = \dfrac{a.\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$

Con los datos del problema se tienen dos triángulos que cumplen las condiciones, como puede observarse en la figura 55, resultando, en consecuencia, *dos soluciones* para el problema.

La razón de esta solución doble está en que como el ángulo C se determina por su seno, y el seno de un ángulo es igual que el seno de su suplemento (34), resulta que se puede tomar cualquiera de los dos ángulos.

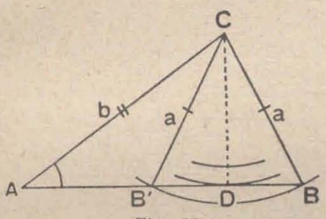

Fig. 55.

Consideremos geométricamente el problema y sea construir el triángulo en el que se conocen a, b, y A, fig. 55.

Construímos el ángulo A, y luego $AC = b$.

Si hacemos centro en el punto C y con una medida del compás igual al lado a cortamos al lado AB, el triángulo $AB'C$ también tiene los mismos datos que el triángulo ABC.

Podría suceder que el arco descrito cortara en un solo punto al lado AB, entonces no tendremos sino una sola solución: el triángulo rectángulo ABC.

Si el arco no corta al lado AB, no hay solución.

El problema tiene una sola solución:

1º) Cuando es $a = b . \text{sen}\, A$, pues entonces resulta un triángulo rectángulo;

2º) Cuando es $a = b$, pues entonces los ángulos A y B son iguales;

3º) Cuando es $a > b$, pues entonces resulta $A > B$, siendo agudo el ángulo B.

Cuando es $a < b . \text{sen}\, A$ el problema no tiene solución.

EJEMPLO NUMÉRICO. — Datos: $a = 120\ m$, $b = 185\ m$. $A = 35^\circ\ 18'$.

Incógnitas: B, C, c.

Cálculo de B:

Se tiene:

$$\text{sen } B = \frac{b.\ \text{sen } A}{a} = \frac{185.\text{sen } 35^\circ\ 18'}{120}$$

Cálculos auxiliares

log 185	$= 2{,}26717$
log sen $35^\circ\ 18'$	$= \bar{1}{,}76182$
colog 120	$= \bar{3}{,}92082$
log sen B	$= \bar{1}{,}94981$

y logaritmando:

$$\log \text{sen } B = \log 185 +$$
$$+ \log \text{sen } 35^\circ\ 18' + \text{colog } 120$$
$$\log \text{sen } B = \bar{1}{,}94981$$

y en las tablas se halla:

$$B = \begin{cases} 62^\circ\ 58'\ 51'' \\ 180^\circ - 62^\circ\ 58'\ 51'' = 117^\circ\ 1'\ 9'' \end{cases}$$

Cálculo de C:

Se tiene:

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

$$C = \begin{cases} 180^\circ - (35^\circ\ 18' + 62^\circ\ 58'\ 51'') = 81^\circ\ 43'\ 9'', \\ 180^\circ - (35^\circ\ 18' + 117^\circ\ 1'\ 9'') = 27^\circ\ 40'\ 51'' \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

log 120	$= 2{,}07918$
log sen $81^\circ 43' 9''$	$= \bar{1}{,}99545$
colog sen $35^\circ\ 18'$	$= 0{,}23818$
log c	$= 2{,}31281$
log 120	$= 2{,}07918$
log sen $27^\circ 40' 51''$	$= \bar{1}{,}66702$
colog sen $35^\circ\ 18'$	$= 0{,}23818$
log c	$= 1{,}98438$

Cálculo de c:

$$c = \frac{a.\ \text{sen } C}{\text{sen } A}$$

$$C = \frac{120.\ \text{sen} \begin{cases} 81^\circ\ 43'\ 9'' \\ 27^\circ\ 40''\ 51' \end{cases}}{\text{sen } 35^\circ\ 18'}$$

Hemos obtenido:

$\log c = 2{,}31281 \therefore c = 205{,}5\ m.$

$\log c = 1{,}98438 \therefore c = 96{,}467\ m.$

Las dos soluciones del problema son:

1ª) $B = 62^\circ 58' 51''$; $C = 81^\circ 43' 9''$; $c = 205,5$ *m.*

2ª) $B = 117^\circ 1' 9''$; $C = 27^\circ 40' 51''$; $c = 96,467$ *m.*

En ambos casos comprobamos que la suma de los ángulos es 180°:

$$\begin{array}{r} 35^\circ \ 18' \\ 62^\circ \ 58' 51'' \\ 81^\circ \ 43' \ 9'' \\ \hline 178^\circ 119' 60'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35^\circ 18' \\ 117^\circ \ 1' \ 9'' \\ 27^\circ 40' 51'' \\ \hline 179^\circ 59' 60'' \end{array}$$

EJERCICIOS

Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos empleando las Tablas Naturales:

154. $a = 16,65$ m.; $c = 10,684$ m.; $B = 58^\circ 20'$.
R: $b = 14,30$ m.; $A = 82^\circ 10'$; $C = 39^\circ 30'$

155. $a = 77,5$ m.; $B = 113^\circ 40'$; $C = 40^\circ 5'$.
R: $b = 160,6$ m.; $c = 112,9$ m.; $A = 26^\circ 15'$

156. $a = 23,6$ m.; $b = 13,18$ m.; $c = 16,11$ m..
R: $A = 106^\circ 55'$; $B = 32^\circ 17'$; $C = 40^\circ 45'$

157. $b = 140,8$ m.; $c = 249,8$ m.; $B = 34^\circ 3$.
R: $a = 191,5$ m.; $A = 49^\circ 40'$; $C = 96^\circ 17'$

Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos empleando las Tablas Trigonométricas:

158. $a = 17$ m.; $b = 12$ m.; $C = 59^\circ 23'$.
R: $c = 15,007$ m.; $A = 77^\circ 7' 55''$; $B = 43^\circ 29' 5''$

159. $c = 102,58$ m.; $A = 35^\circ 8' 10''$; $B = 57^\circ 13' 20''$.
R: $a = 59,088$ m.; $b = 86,32$ m.; $C = 87^\circ 38' 30''$

160. $a = 112,38$ m.; $b = 177,51$ m.; $c = 173,16$ m.
R: $A = 37^\circ 21' 30''$; $B = 73^\circ 25' 30''$; $C = 69^\circ 13'$

161. $a = 27,3$ m.; $b = 39,2$ m.; $A = 37^\circ 14'$.

R: $B = \begin{cases} 60^\circ 19' 17'' \\ 119^\circ 40' 43'' \end{cases}$; $C = \begin{cases} 82^\circ 26' 43'' \\ 23^\circ \ 5' 17'' \end{cases}$; $c = \begin{cases} 44,727 \text{ m.} \\ 17,693 \text{ m.} \end{cases}$

162. $a = 10$ m.; $B = 104° 28' 39''$; $C = 46° 34' 4''$.
R: $b = 20$ m.; $c = 15$ m.; $A = 28° 57' 17''$

163. $a = 203,2$ m.; $b = 215,4$ m.; $C = 72° 10'$.
R: $c = 246,73$ m.; $A = 51° 37' 35''$; $B = 56° 12' 24'' 5$

164. $a = 150$ m.; $b = 184$ m.; $c = 214$ m.
R: $A = 43° 28' 16''$; $B = 57° 33' 28''$; $C = 78° 58' 16''$

165. $a = 105$ m.; $b = 110$ m.; $A = 58°$.

$$B = \begin{cases} 106,4 \text{ m.} \\ 10,03 \text{ m.} \end{cases} ; \quad B = \begin{matrix} 62° 40' 30'' \\ 117° 19' 30'' \end{matrix} ; \quad C = \begin{cases} 59° 20' \\ 4° 40' \end{cases}$$

CAPITULO XI

Aplicaciones varias

Area de un triangulo

125. *Area de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo comprendido.* — Sea el triángulo ABC, fig. 56

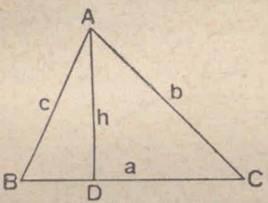

Fig. 56.

Trazando la altura h, su área es:

$$S = \frac{a \,.\, h}{2} \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo ADC se tiene que (104) :

$$h = b \,.\, \text{sen}\, C$$

y reemplazando este valor en (1), resulta:

$$S = \frac{a \,.\, b \,.\, \text{sen}\, C}{2}$$

lo que nos dice que: *El área de un triángulo cualquiera es igual a la mitad del producto de dos lados multiplicado por el seno del ángulo comprendido.*

Ejemplo: *Hallar el área de un triángulo, midiendo:* $a = 18\, m$, $b = 25\, m$, $C = 37^\circ\, 23'$.

Se tiene: $$S = \frac{a \,.\, b \,.\, \text{sen}\, C}{2}$$

Cálculos auxiliares

log 18	$= 1{,}25527$
log 25	$= 1{,}39794$
log sen $37^\circ\, 23'$	$= \bar{1}{,}78329$
colog 2	$= \bar{1}{,}69897$
	$2{,}13547$

$$S = \frac{18 \times 25 \times \text{sen}\, 37^\circ\, 23'}{2}$$

$$\log S = \log 18 + \log 25 + $$
$$+ \log \text{sen} 37^\circ 23' + \text{colog} 2$$

$$\log S = 2{,}13547$$

$$\therefore\ S = 136{,}6062 \text{m}^2.$$

126. II. — *Hallar el área de un triángulo conociendo dos ángulos y el lado comprendido.* — Sea el triángulo ABC, fig. 57.

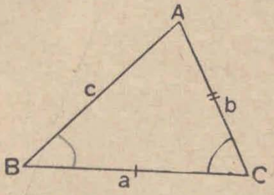

Fig. 57.

Por el caso anterior se tiene:

$$S = \frac{a.\ b.\ \text{sen}\ C}{2} \qquad (1)$$

y del teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\ A} = \frac{b}{\text{sen}\ B}$$

se deduce que:

$$b = \frac{a.\ \text{sen}\ B}{\text{sen}\ A}$$

y reemplazando este valor en (1), resulta:

$$S = \frac{a^2 . \text{sen}\ B . \text{sen}\ C}{2\ \text{sen}\ A}$$

lo que nos dice que: *El área de un triángulo cualquiera es igual al cuadrado de un lado por los senos de los ángulos adyacentes a dicho lado, todo dividido por el duplo del seno del tercer ángulo.*

Ejemplo: *Hallar el área de un triángulo, midiendo:* $a = 14\ \text{m}$, $B = 65°\ 18'$, $C = 43°\ 35'$.

Cálculos auxiliares

$A = 180° - (B + C)$

$A = 180° - (65°\ 18' + 43°\ 35') = 71°\ 7'$

$2 \log 14 = 2{,}29226$

$\log \text{sen}\ 65°\ 18' = \overline{1}{,}95833$

$\log \text{sen}\ 43°\ 35' = \overline{1}{,}83848$

$\text{colog}\ 2 = \overline{1}{,}69897$

$\text{colog}\ \text{sen}\ 71°\ 7' = 0{,}02403$

$1{,}81207$

Se tiene: $\dfrac{a^2 . \text{sen}\ B . \text{sen}\ C}{2\ \text{sen}\ A}$

$$S = \frac{14^2 . \text{sen}\ 65°\ 18' . \text{sen}\ 43°\ 35'}{2 . \text{sen}\ 71°\ 7'}$$

Se tiene:

$$\log S = \log 14^2 + \log \text{sen} 65°18' + \log \text{sen} 43°35 + \text{colog} 2 + \text{colog}\ \text{sen} 71°7'$$

$$\log . S = 1{,}81207$$

$$\therefore \quad S = 64{,}8742\ \text{m}^2$$

127. Observación. — La fórmula que acabamos de deducir es cómoda para el cálculo logarítmico, pero para calcular con funciones naturales es preferible la siguiente.

Sea el triángulo ABC, fig. 58. Se sabe que:

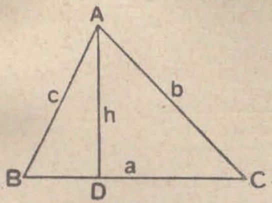

Fig. 58.

$$S = \frac{ah}{2} \qquad (1)$$

Pero por (106), se tiene:

$$BD = h . \cot B$$
$$CD = h . \cot C$$

sumando ordenadamente y factoreando h, resulta:

$$BD + CD = h(\cot B + \cot C)$$
$$a = h(\cot B + \cot C)$$

de donde:

$$h = \frac{a}{\cot B + \cot C}$$

y reemplazando este valor en (1):

$$S = \frac{a^2}{2(\cot B + \cot C)}$$

luego: *El área de un triángulo cualquiera es igual al cuadrado de un lado dividido por el duplo de la suma de las cotangentes de los ángulos adyacentes.*

Ejemplo. — *Hallar el área de un triángulo, midiendo:* $a = 14$ m, $B = 65^\circ 18'$, $C = 43^\circ 35'$

Se tiene:

$$S = \frac{a^2}{2(\cot B + \cot C)}$$

$$S = \frac{14^2}{2(\cot 65^\circ 18' + \cot 43^\circ 38')}$$

Empleando las *Tablas de las funciones naturales,* resulta:

$$S = \frac{196}{2(0{,}45995 + 1{,}05072)}$$

y efectuando, se obtiene:

$$S = 64{,}87 \text{ m}^2$$

128. III. — *Hallar el área de un triángulo conociendo sus tres lados.*

Hemos visto, (117), que:

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad (1)$$

y que (117):

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad (2)$$

También sabemos (71), que:

$$\operatorname{sen} A = 2 . \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

y reemplazando en esta expresión los valores (1) y (2)

$$\operatorname{sen} A = 2 . \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

y efectuando el producto de radicales de igual índice:

$$\operatorname{sen} A = 2 \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

o bien:

$$\operatorname{sen} A = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$$

y trasponiendo bc como factor, y 2 como divisor, queda:

$$\frac{b.c.\operatorname{sen} A}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

pero sabemos que:

$$S = \frac{b.c.\operatorname{sen} A}{2}$$

luego:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

es decir: *El área de un triángulo cualquiera es igual a la raíz cuadrada del producto del semiperímetro, por cada uno de los números que se obtienen al restar a éste cada uno de los lados del triángulo.*

EJEMPLO. — *Hallar el área de un triángulo cuyos lados miden* 8 *m.*, 12 *m.* y 10 *m.*

Se tiene: $$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Cálculos auxiliares

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p = \frac{8+12+10}{2} = 15$$

$$p - a = 15 - 8 = 7$$

$$p - b = 15 - 12 = 3$$

$$p - c = 15 - 10 = 5$$

$$S = \sqrt{15 \times 7 \times 3 \times 5}$$

$$S = \sqrt{1575} = 39{,}68 \text{ m}^2$$

Area de un cuadrilátero

129. **Area de un paralelógramo.** — Sea el paralelógramo $ABCD$, fig. 59. Trazando la diagonal AC, la figura queda descompuesta en dos triángulos iguales:

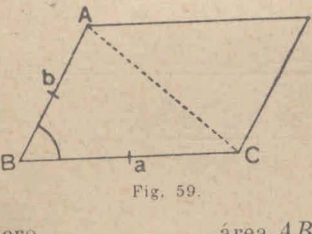

Fig. 59.

$$\text{área } ABCD = 2 \text{ área } \overset{\triangle}{ABC}$$

pero $$\text{área } ABCD = \frac{a.b.\text{sen } B}{2}$$

luego: $$\text{área } ABCD = a.b.\text{sen } B$$

es decir: *El área de un paralelógramo es igual al producto de dos lados consecutivos por el seno del ángulo comprendido.*

130. Area de un cuadrilátero cualquiera. — Sea el cuadrilátero $ABCD$, fig. 60. Trazando las diagonales d y d', resultan cuatro triángulos cuya suma de sus áreas es la del cuadrilátero dado:

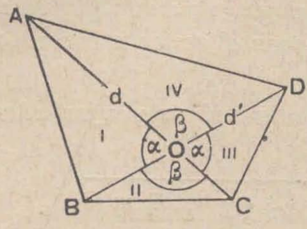

Fig. 60.

área $ABCD =$

area I + área II + área III + + área IV (1)

Por (125), se tiene que:

$$\text{Area I} = \frac{AO \cdot BO \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$$

$$\text{Area II} = \frac{BO \cdot OC \cdot \text{sen}\,\beta}{2}$$

$$\text{Area III} = \frac{OC \cdot OD \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$$

$$\text{Area IV} = \frac{OD \cdot AO \cdot \text{sen}\,\beta}{2}$$

reemplazando estos valores en (1), y recordando que $\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,\alpha$ por tratarse de ángulos suplementarios, resulta:

$$\text{Area } ABCD = \frac{AO \cdot BO \cdot \text{sen}\,\alpha}{2} + \frac{BO \cdot OC \cdot \text{sen}\,\alpha}{2} +$$

$$+ \frac{OC \cdot OD \cdot \text{sen}\,\alpha}{2} + \frac{OD \cdot AO \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$$

sacando $\frac{\text{sen}\,\alpha}{2}$ factor común:

$$\text{Area } ABCD = \frac{\text{sen}\,\alpha}{2}\,(AO \cdot BO + BO \cdot OC +$$

$$OC \cdot OD + OD \cdot AO)$$

factoreando BO en los dos primeros términos del paréntesis, y OD en los dos últimos:

$$\text{Area } ABCD = \frac{\text{sen } \alpha}{2} [BO(AO + OC) + OD(OC + AO)]$$

o bien:
$$= \frac{\text{sen } \alpha}{2} [BO.d + OD.d]$$

factoreando d:
$$= \frac{\text{sen } \alpha}{2} \quad d(BO + OD)$$

y como $BO + OD = d'$, resulta:

$$\text{Area } ABCD = \frac{d.d'.\text{sen } \alpha}{2}$$

luego: *El área de un cuadrilátero es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.*

Area de un polígono regular

131. Area de un polígono regular conociendo el número de lados y la longitud de éstos. — Sean n el número de lados del polígono regular y a uno de los lados. El polígono regular de n lados puede considerarse como la suma de las áreas de n triángulos isósceles cuyo vértice común es el centro del polígono, figura 61.

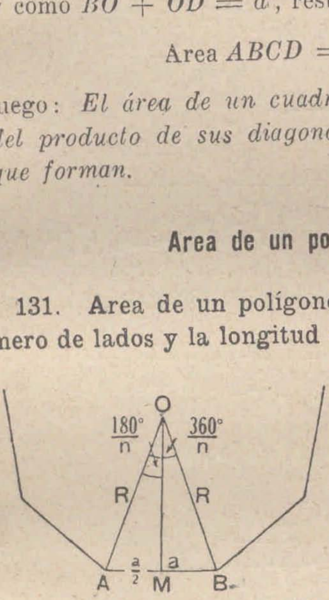

Fig. 61.

En la figura se tiene:

$$\text{Area polígono} = n \times \text{ área } \overset{\triangle}{AOB} \qquad (1)$$

Trazando la altura OM, resulta:

$$\text{Area } \overset{\triangle}{AOB} = \frac{a \,.\, OM}{2}$$

pero en el triángulo rectángulo AOM, es

$$OM = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \quad \text{luego:}$$

luego: $$\text{Area } \overset{\triangle}{AOB} = \frac{a \cdot \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}{2}$$

o bien: $$\text{Area } \overset{\triangle}{AOB} = \frac{a^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}{4}$$

y reemplazando este valor en (1):

$$\text{Area polígono} = \frac{n \cdot a^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}{4}$$

luego: *El área de un polígono regular es igual a la cuarta parte del producto del número de lados por el cuadrado del lado por la tangente de la mitad del ángulo central.*

132. Area de un polígono regular conociendo el número de lados y el radio del polígono. — Se tiene, figura 61:

$$\text{Area polígono} = n \times \text{área } \overset{\triangle}{AOB}$$

Por (125) se tiene:

$$\text{Area } \overset{\triangle}{AOB} = \frac{R^2 . \operatorname{sen} \frac{360^\circ}{n}}{2}$$

y reemplazando este valor en la expresión anterior:

$$\text{Area polígono} = \frac{n . R^2 . \operatorname{sen} \frac{360^\circ}{n}}{2}$$

luego: *El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del número de lados por el cuadrado del radio y por el seno del ángulo central.*

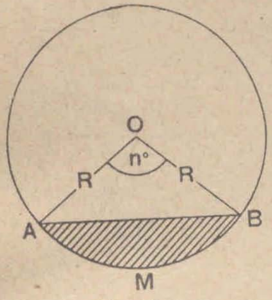

Fig. 62.

133. Area de un segmento de círculo. — El segmento de círculo, AMB, figura 62, es la diferencia entre el sector $OAMB$ y el triángulo AOB.

$$\text{Area segmento } AMB = \text{Area } OAMB - \text{área } OAB \quad (1)$$

Pero el área del sector es:

$$\text{Area sector } OAMB = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

y el área del triángulo es:

$$\text{Area triáng. } OAB = \frac{R^2 \cdot \text{sen } n^0}{2}$$

luego, reemplazando en (1), resulta:

$$\text{Area segm. } AMB = \frac{\pi R^2 n}{360} - \frac{R^2 \text{ sen } n^0}{2}$$

sacando $\frac{R^2}{2}$ factor común:

$$\text{Area segm. } AMB = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi n}{180} - \text{sen } n^0\right)$$

luego: *El área de un segmento circular es igual a la mitad del cuadrado del radio por la diferencia entre el producto de π y n dividido por* 180, *y el seno de* n°.

Area de la proyección de una figura plana sobre un plano

134. Area de la proyección de un triángulo. — El triángulo dado puede tener o no un lado en el plano de proyección.

1°) *El triángulo tiene un lado en el plano de proyección, fig.* 63.

Sea el triángulo ABC; su proyección sobre el plano π es el triángulo $A'BC$. Si es $A'M$ la altura del triángulo $A'BC$, por el teorema de las tres perpendiculares es AM la altura del triángulo ABC.

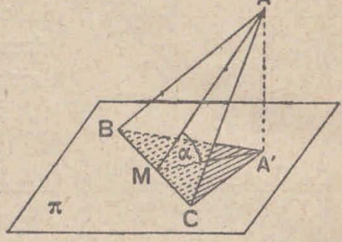

Fig. 63.

Se tiene:

$$\text{Area } \overset{\triangle}{A'BC} = \frac{BC \,.\, A'M}{2} \qquad (1)$$

pero en el triángulo rectángulo $AA'M$ se tiene que, (104):

$$A'M = AM \,.\, \cos \alpha$$

y reemplazando en (1):

$$\text{Area } \overset{\triangle}{A'BC} = \frac{BC \,.\, AM \,.\, \cos \alpha}{2}$$

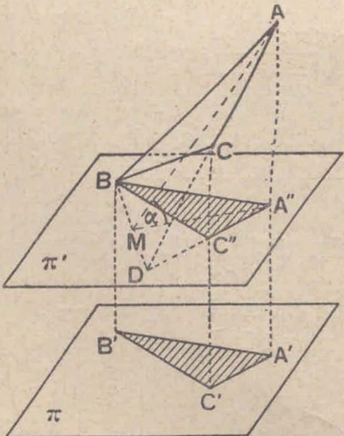

Fig. 64.

o bien: $= \dfrac{BC.\ AM}{2} \cdot \cos \alpha$

pero: Area $\overset{\triangle}{ABC} = \dfrac{BC.\ AM}{2}$

luego:

Area $\overset{\triangle}{A'BC} =$ área $\overset{\triangle}{ABC} \,.\, \cos \alpha$

2º) *El triángulo no tiene ningún punto común con el plano, fig.* 64.

Sea el triángulo ABC; su proyección sobre el plano π es el triángulo $A'B'C'$.

Por B trazamos el plano π' paralelo al plano π, resultando el triángulo $A''BC''$ igual al triángulo $A'B'C'$ por tener sus lados respectivamente iguales. Si D es la traza de AC sobre π', tenemos:

$$\text{área } A''\overset{\triangle}{B}C'' = \text{área } A''\overset{\triangle}{B}D - \text{área } C''\overset{\triangle}{B}D$$

y por el caso anterior:

$$\text{área } A''\overset{\triangle}{B}C'' = \text{área } A\overset{\triangle}{B}D \,.\cos\alpha - \text{área } C\overset{\triangle}{B}D \,.\cos\alpha$$

y sacando el factor común $\cos\alpha$:

$$\text{área } A''\overset{\triangle}{B}C'' = (\text{área } A\overset{\triangle}{B}D - \text{área } C\overset{\triangle}{B}D)\,.\cos\alpha$$

o bien:

$$\text{Area } A''\overset{\triangle}{B}C'' = \text{Area } A'\overset{\triangle}{B'}C' = \text{Area } A\overset{\triangle}{B}C\,.\cos\alpha$$

luego, en cualquier caso: *El área de la proyección de un triángulo sobre un plano es igual al área del triángulo por el coseno del ángulo que forma con el plano.*

135. **Area de la proyección de un polígono cualquiera.** — Sea figura 65, el polígono $ABCDE$, $A'B'C'D'$ su proyección sobre el plano π y α el ángulo que forma el plano del polígono dado con el plano π.

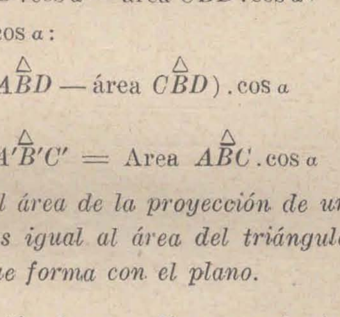

Fig. 65.

Por el caso anterior, se tiene:

$$t = T\,.\cos\alpha$$
$$t' = T'\,.\cos\alpha$$
$$t'' = T''\,.\cos\alpha\,.$$

y sumando ordenadamente:

$$t + t' + t'' = (T + T' + T'')\,.\cos\alpha$$

o bien:

$$\text{área } A'B'C'D'E' = \text{área } ABCDE \,.\cos \alpha$$

luego: *El área de la proyección de un polígono es igual al área del polígono por el coseno del ángulo de los dos planos.*

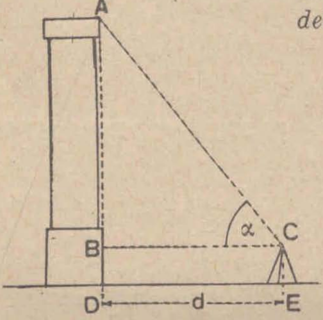

Fig. 66.

Medidas de alturas y distancias

136. Altura de una torre cuyo pie es accesible. — Sea AD, figura 66, la altura buscada. A partir del pie D se mide una cierta distancia d, y con un *grafómetro* o un *teodolito* puesto en E se dirige una visual al punto extremo A, quedando así determinada la medida del ángulo α. El triángulo ABC es rectángulo, luego, (106):

$$AB = BC \operatorname{tg} \alpha$$

o sea:

$$AB = d \operatorname{tg} \alpha$$

A la altura AB habrá que sumar la altura CE del aparato que se emplee.

137. Altura de una torre cuyo pie es inaccesible. — Sea AD la altura de la torre cuyo pie es inaccesible, fig. 67. En la dirección de la torre se mide una cierta distancia d, y en los puntos E y G con un grafómetro o teodolito

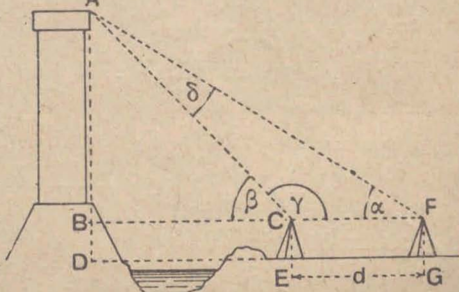

Fig. 67.

se miden los ángulos α y β, y luego el suplemento de β, es decir, el ángulo γ. Conociendo los ángulos α y γ se calcula el ángulo δ, de manera que en el triángulo ACF conocemos los tres ángulos y el lado CF y por el teorema del seno:

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{CF}{\operatorname{sen}\delta}$$

de donde se deduce: $$AC = \frac{\operatorname{sen}\alpha . CF}{\operatorname{sen}\delta}$$

Conocido AC, en el triángulo rectángulo ABC, se tiene, (104):

$$AB = AC.\operatorname{sen}\beta$$

Luego se suma al valor AB la altura CE.

138. Altura de una montaña. — Sea D el pie de la altura buscada, figura 68. El punto D no es visible, pero podemos medir el ángulo δ dirigiendo una visual horizontal y otra al punto C. Luego se mide una distancia $AB = d$ y los ángulos α y β. En el triángulo rectángulo ACD se tiene:

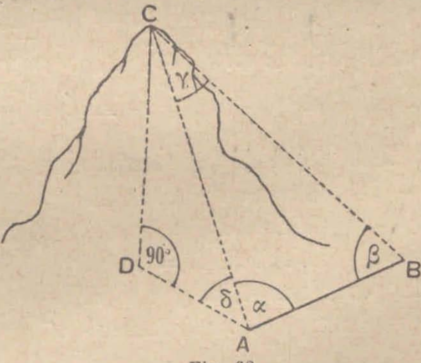

Fig. 68.

$$CD = AC.\operatorname{sen}\delta \tag{1}$$

y en el triángulo ABC, por el teorema del seno:

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{AB}{\operatorname{sen}\gamma}$$

de donde: $$AC = \frac{AB.\ \text{sen}\ \beta}{\text{sen}\ \gamma}$$

y sustituyendo este valor en (1), resulta:

$$CD = \frac{AB.\ \text{sen}\ \beta.\ \text{sen}\ \delta}{\text{sen}\ \gamma}$$

Todos los elementos del segundo miembro están determinados, con lo que se halla el valor de CD.

139. Hallar la distancia entre dos puntos, de los cuales uno solo es accesible. — Sea hallar la distancia $AB = x$, fig. 69. Se mide una distancia cualquiera BC, y desde B y C se miden los ángulos β y γ. En el triángulo ABC se tiene:

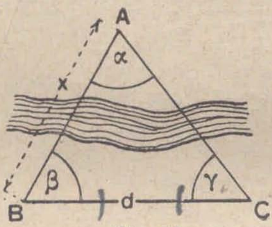

Fig. 69.

$$\frac{AB}{\text{sen}\ \gamma} = \frac{d}{\text{sen}\ \alpha}$$

de donde: $$AB = \frac{\text{sen}\ \gamma.\ d}{\text{sen}\ \alpha}$$

140. Hallar la distancia entre dos puntos inaccesibles. — Sea hallar la distancia entre C y D, figura 70. Se mide la distancia $AB = d$, en la parte accesible, y con el grafómetro o teodolito se miden los ángulos α, β, γ y δ. Conociendo estos ángulos se pueden calcular los ángulos 1 y 2:

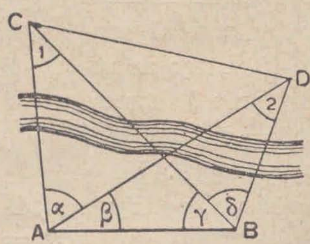

Fig. 70.

$$\overset{<}{1} = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\overset{<}{2} = 180^\circ - (\beta + \gamma + \delta)$$

En el triángulo ABC por el teorema del seno se tiene:

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{AB}{\operatorname{sen}\overset{<}{1}} \quad \therefore \quad AC = \frac{AB.\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\overset{<}{1}} \qquad (1)$$

Por el mismo teorema, en el triángulo ABD se tiene:

$$\frac{AD}{\operatorname{sen}(\gamma+\delta)} = \frac{AB}{\operatorname{sen}\overset{<}{2}} \quad \therefore \quad AD = \frac{AB.\operatorname{sen}(\gamma+\delta)}{\operatorname{sen}\overset{<}{2}} \qquad (2)$$

Las fórmulas (1) y (2) nos permiten calcular AC y AD y en el triángulo CAD se tiene por el teorema del coseno:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC.AD.\cos\alpha$$

y calculada así la distancia CD.

141. Hallar el ángulo del sector que es desarrollo de un cono dado. — El desarrollo lateral de un cono recto circular es un sector circular, figura 71, y para trazarlo debe conocerse el valor del ángulo β del sector.

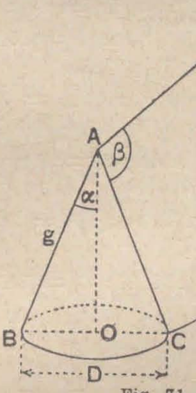

Fig. 71.

Por *Geometría plana* sabemos que:

$$\text{arco } CEF = \pi D = \frac{2\pi g.\ \beta}{360^\circ}$$

y simplificando:

$$D = \frac{g\ \beta}{180^\circ}$$

de donde:

$$\beta = \frac{180^\circ \times D}{g} \qquad (1)$$

Esta fórmula nos permite calcular el valor del ángulo β del sector. Veamos de hacerla más sencilla, conociendo el ángulo del vértice del cono.

En el triángulo rectángulo AOB se tiene:

$$OB = g \,.\, \text{sen}\, \alpha$$

como $D = 2 \,.\, OB$, reemplazando en (1) resulta:

$$\beta = \frac{180^\circ \times 2\, g\, \text{sen}\, \alpha}{g}$$

o bien: $\beta = 360^\circ \,.\, \text{sen}\, \alpha$

Ejemplo numérico. — Hallar el ángulo del sector que enrollado origine un cono de 40° en el vértice.

Se tiene: $\beta = 360^\circ \,.\, \text{sen}\, 20^\circ$

sen $20^\circ = 0{,}342$; $\beta = 360^\circ \,.\, 0{,}342 = 123^\circ{,}12$

y convirtiendo 12 centésimos de grado en minutos:

$$\beta = 123^\circ\, 7'$$

EJERCICIOS

Hallar el área de los siguientes triángulos:

166. $a = 117{,}8$ m.; $b = 181{,}64$ m.; $C = 24^\circ\, 3'$.
R: 4.360,1 m.²

167. $c = 560{,}4$ m.; $A = 72^\circ\, 17'$; $B = 48^\circ\, 12'$.
R: 129.390 m.²

168. $a = 75$ m.; $b = 92$ m.; $c = 107$ m.
R: 3.386,2 m².

169. $a = 203{,}2$ m.; $b = 215{,}4$ m.; $C = 72^\circ\, 10'$.
R: 20833 m.²

170. $A = 138^\circ\, 31$; $C = 8^\circ\, 12'$; $b = 56{,}79$ m.
R: 277,6 m.²

171. En un paralelogramo dos lados consecutivos miden 560,4 m. y 484,77 m., y el ángulo que forman mide 72° 17,. Calcular el área. R: 258.780 m.²

172. Idem, Idem, 17 m., 25 m., y 103° 47. „ 412,76 m.²

173. Hallar el área de un cuadrilátero cuyas diagonales miden 3,2 m. y 7,6 m. y 38° 25' el ángulo comprendido.
R: 7,556 m.²

174. Idem, Idem, 45 m., 73 m. y 58° 32'. R: 1400,93 m.²

175. Hallar el área de un polígono de 7 lados, midiendo el lado 14 m. R: 165,18 m.²

176. Idem, Idem, de 12 lados, midiendo 8 m. el radio. R: 192 m.²

177. Hallar el área de un segmento circular sabiendo que el radio mide 8 m. y el ángulo central 36°. R: 1,2963 m.²

178. Una figura de 45 m.² de área tiene una inclinación de 25° sobre el plano horizontal. Calcular el área de su proyección. R: 40,7839 m.²

179. Un terreno de 8560 m.² de área tiene una inclinación de 32° sobre el plano horizontal. Calcular el área de su proyección. R: 7259,16 m.²

180. En un triángulo isósceles la base mide 125 m. y el ángulo opuesto mide 130° 51'. Calcular la longitud de los lados iguales. R: 68,73 m.

181. La pendiente de una calle es del 6 %. Calcular el ángulo de inclinación. R: 3° 26' 2''

182. Desde la cima de un faro situado a 250 m. sobre el nivel del mar, se observa un barco bajo un ángulo de depresión de 50°. Calcular la distancia horizontal del faro al barco. R: 209,78 m.

183. En lo alto de una colina, a orillas del mar, hay un faro de 32 m. de alto, (fig. 72). Desde un barco B, dirigiendo visuales con el sextante a la base y a la cima del faro, se observan los ángulos de elevación que miden $\alpha = 5° \, 15'$ y $\beta = 6° \, 27'$. Calcular la altura h de la colina, y la distancia horizontal d desde el buque al faro.

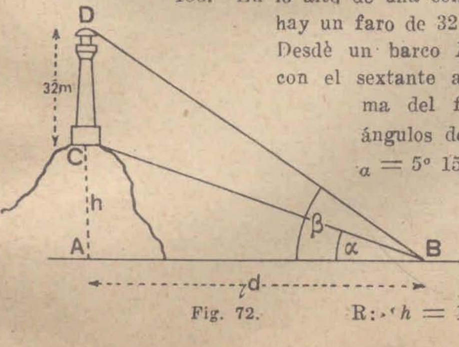

Fig. 72.

R: $h = 139$ m.; $d = 1512$ m.

184. El ángulo de elevación de la fachada de una casa, vista desde 10 m. de distancia, es de $36^\circ 50'$. Calcular la altura de la fachada.

R: 7,49 m.

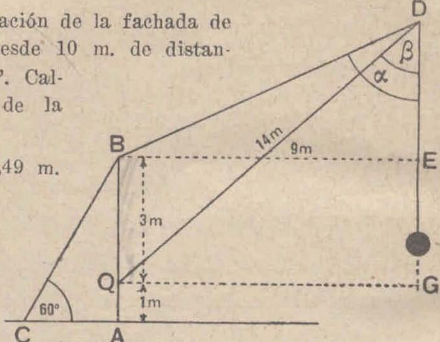

Fig. 73.

185. La fig. 73 representa una grúa. Con los datos de la figura calcular los ángulos α y β, la distancia AC, y la longitud BC.

R: $\alpha = 49^\circ 21' 50''$; $\beta = 40^\circ 18''$; $AC = 2{,}31$ m.; $BC = 4{,}61$ m.

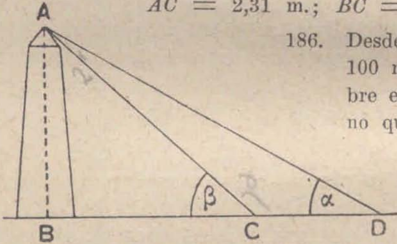

Fig. 74.

186. Desde los puntos C y D, distantes 100 m. y a 1,50 m. de altura sobre el suelo, y situados en el plano que pasa por la torre, se midieron los ángulos $\alpha = 31^\circ 8'$ y $\beta = 50^\circ 45'$, fig. 74. Calcular la altura AB de la torre y la distancia BC.

R: $AB = 120{,}76$ m.; $BC = 97{,}43$ m.

187. La distancia entre los puntos A y B (fig. 75), es de 237,8 m. y la de B a C es de 343,9 m., y las visuales dirigidas desde B a A y C forman un ángulo de $53^\circ 8' 16''$. Calcular la distancia AC.

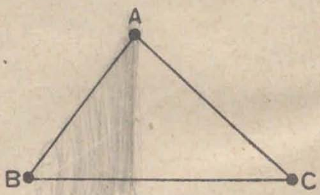

Fig. 75.

R: 276,94 m.

188. En la fig. 76 s, tiene que: $\alpha = 32^\circ 5'$, $\beta = 64^\circ 27'$, $\gamma = 50^\circ 30'$, $\delta = 47^\circ 10'$ y $AB = 55$ m., calcular la distancia CD.

R: 79,97 m.

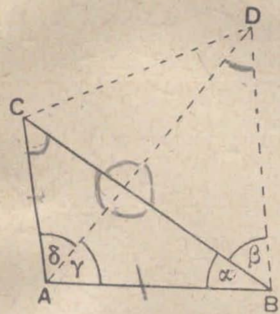

Fig. 76.

189. La biela AB de una máquina, mide 1,11 m. y la manivela 10,5 cm. La figura 77 representa la ma-

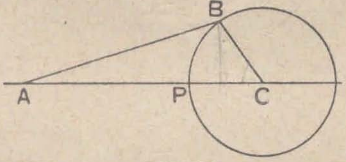

Fig. 77.

nivela cuando ha dado un octavo de vuelta, partiendo de P. Calcular el ángulo α y la distancia AC.

R: $\alpha = 3^\circ 50' 7''$; $AC = 1{,}18$ m.

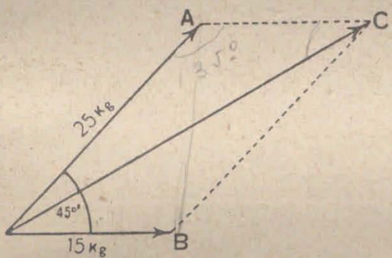

Fig. 78.

190. Dos fuerzas de 15 kg. y 25 kg. están aplicadas a un mismo punto, formando un ángulo de 45°, fig. 78. Calcular el valor de la resultante y el ángulo que forma ésta con la fuerza de 15 kg.

R: 37.15 kg; 28° 30'.

β β β β β β

β β

β β β β β β β

β β β β

β

TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

CAPITULO XII

Preliminares

144. Triángulo Esférico. — Se llama *triángulo esférico* a la parte de la superficie esférica, menor que una semi-esfera, comprendida entre tres circunferencias máximas.

Si en la figura 79 los arcos AB, AC y BC pertenecen a circunferencias máximas, la figura ABC es un triángulo esférico, siempre que el conjunto de puntos determinados por dichos arcos sea menor que una semi-esfera.

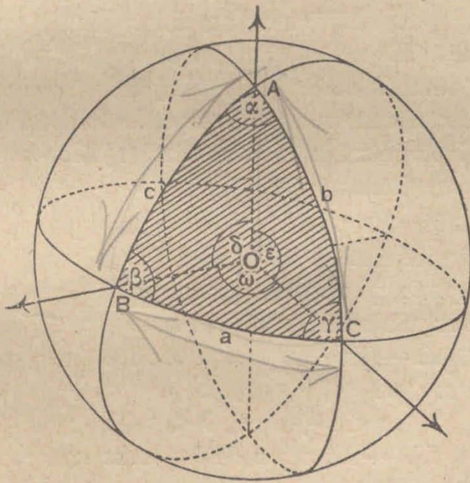

Fig. 79.

Los arcos AB, AC y BC son los *lados* del triángulo esférico, y los ángulos α, β y γ, los ángulos del triángulo.

Como los triángulos *rectilíneos*, los triángulos esféricos pueden ser *equiláteros*, *isósceles* y *escalenos*.

Si unimos el centro O de la esfera con los puntos A, B y C, con semirrectas, y consideramos los planos determinados por ellas, resulta el triedro $OABC$. Los ángulos planos δ, ϵ y ω del triedro tienen por medida a los arcos AB, AC y BC, respectivamente, del triángulo esférico, y los ángulos diedros OA, OB y OC, del triedro, tienen por medida a los ángulos α, β y γ del triángulo esférico. De manera, pues, que la resolución de los triángulos esféricos es análoga a la resolución de triedros, y todas las propiedades relativas a los triedros son aplicables a los triángulos esféricos, bastando para ello reemplazar las palabras *caras* y *diedros* del triedro, por *lados* y *ángulos* del triángulo esférico, respectivamente.

Como los *lados* del triángulo esférico son los arcos de circunferencia que corresponden á los ángulos planos del triedro, resulta que también los lados se expresan en grados, minutos y segundos.

145. Propiedades de los triángulos esféricos. — Las propiedades de los triedros, estudiadas en *Geometría del Espacio*, se verifican para los triángulos esféricos. En el triángulo esférico ABC, fig. 79, se tiene:

I. — Un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos:

$$a < b + c \quad ; \quad b < a + c \quad ; \quad c < a + b.$$

II. — La suma de los lados está comprendida entre 0° *y* 360°:

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ.$$

III. — Si dos ángulos son iguales, los lados opuestos también lo son, y recíprocamente:

Si es: $A = B$, también: $a = b$.

IV. — Si un ángulo es mayor que otro, el lado opuesto al primero es mayor que el lado opuesto al segundo:

Si es: $A > B$, también: $a > b$.

V. — La suma de los tres ángulos es mayor que dos y menor que seis ángulos rectos:

$$2R < A + B + C < 6R$$

VI. — La suma de dos ángulos es menor que el tercero más dos ángulos rectos:

$$A + B < C + 2R$$

VII. — Dos triángulos esféricos, pertenecientes a una esfera o a esferas iguales, son iguales cuando tienen:

1º) *un ángulo y los lados que lo forman respectiva y ordenadamente iguales;*

2º) *un lado y los ángulos adyacentes respectiva y ordenadamente iguales;*

3º) *los tres lados respectiva y ordenadamente iguales;*

4º) *los tres ángulos respectiva y ordenadamente iguales.*

VIII. — Si dos triángulos esféricos tienen sus elementos iguales, pero en distinto orden, son simétricos;

IX. — A todo triángulo esférico le corresponde en la misma esfera otro triángulo polar suplementario, tales que:

$$A + a' = B + b' = C + c' = a + A' = b + B' = c + C' = 180^\circ.$$

siendo A', B', C', y a', b', c' *los elementos del triángulo polar del dado.*

146. Exceso esférico. — Se llama *exceso esférico* a la diferencia entre la suma de los tres ángulos de un triángulo y 180°. Si el exceso esférico se representa por 2ϵ, se tiene:

$$2\epsilon = A + B + C - 180^\circ$$

147. Trigonometría esférica. — La *Trigonometría Esférica* tiene por objeto resolver los triángulos esféricos.

CAPITULO XIII

Relaciones entre los elementos de los triángulos esféricos

148. Teorema del coseno. — *El coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos, más el producto de los senos de éstos por el coseno del ángulo comprendido.*

H) *triáng. esf.* ABC, fig. 80.

T) $\cos a = \cos b \, . \cos c + \operatorname{sen} b \, . \operatorname{sen} c \, . \cos A$

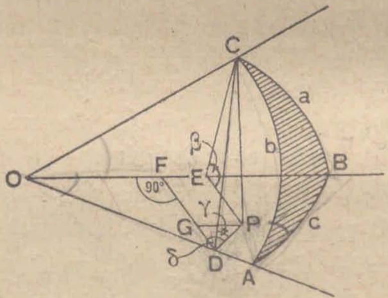

Fig. 80.

Por el punto C tracemos $CP \perp pl\, AOB$ y luego por P las perpendiculares PE y PD a las rectas OB y OA, respectivamente; por D se traza $DF \perp OB$, y $PG \perp DF$.

Si se une C con E y con D, resulta, por el teorema de las tres perpendiculares, que es $CE \perp OB$ y $CD \perp OA$.

Entonces resulta:

$$\widehat{CEP} = \beta = \textit{sección normal del diedro } OB$$
$$= \textit{medida diedro } OB$$

y además:

$$\widehat{CDP} = \gamma = \textit{sección normal del diedro } OA$$
$$= \textit{medida diedro } OA$$

Como es $PD \perp OA$ y $DF \perp OB$, resulta $\delta = c$ por tener sus lados respectivamente perpendiculares.

En la figura se tiene que:

$$OE = OF + FE$$

y como $FE = GP$ por ser segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas:

$$OE = OF + GP \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo OFD se tiene, (104):

$$OF = OD \cdot \cos c$$

Por ser radios de una misma esfera es $OA = OB = OC$, y si suponemos que esos radios son iguales a uno, resulta que es: $OD = \cos b$, luego:

$$OF = \cos b \cdot \cos c \qquad (2)$$

En el triángulo rectángulo PGD se tiene, (104):

$$GP = PD \cdot \operatorname{sen} \delta$$

y en èl triángulo rectángulo CPD:

$$PD = CD \cdot \cos \gamma$$

luego: $$GP = CD \cdot \operatorname{sen} \delta \cdot \cos \gamma$$

Y como $OC = 1$, es $CD = \operatorname{sen} b$, de manera que.

$$GP = \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} \delta \cdot \cos \gamma \qquad (3)$$

Reemplazando los valores (2) y (3) en (1):

$$OE = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} \delta \cdot \cos \gamma \qquad (4)$$

Como en el triángulo rectángulo OEC es $OC = 1$, resulta:

$$OE = \cos a$$

Según se dijo más arriba, es $\delta = c$ y $\gamma = A$, y reemplazando estos valores en (4) se obtiene finalmente:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A$$

De manera análoga se obtendría:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos B$$
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C$$

El teorema que acabamos de demostrar es la *propiedad fundamental* de la *Trigonometría Esférica.*

149. Teorema. — *En todo triángulo esférico el coseno de un ángulo es igual al producto de los senos de los otros dos por el coseno del lado comprendido, menos el producto de los cosenos de los mismos ángulos.*

H) *triáng. esf. ABC*, fig. 80.

T) $\cos A = \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C . \cos a - \cos B . \cos C$

Consideremos un triángulo $A'B'C'$, polar del triángulo ABC, en donde los lados de uno son suplementarios de los ángulos del otro y vice versa:

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{B}' = 180^\circ - b & b' = 180^\circ - \hat{B} \\ C' = 180^\circ - c & c' = 180^\circ - C \\ A' = 180^\circ - a & a' = 180^\circ - A \end{array}\right\} \quad (1)$$

En este triángulo $A'B'C'$ se tiene, por el teorema anterior, que:

$$\cos a' = \cos b' . \cos c' + \operatorname{sen} b' . \operatorname{sen} c' . \cos A'$$

y sustituyendo en esta fórmula los valores (1):

$$\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B) . \cos(180^\circ - C) +$$
$$+ \operatorname{sen}(180^\circ - B) . \operatorname{sen}(180^\circ - C) . \cos(180^\circ - a)$$

y aplicando las propiedades estudiadas en (34) y en (35), obtenemos:

$$- \cos A = \cos B . \cos C - \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C . \cos a$$

y multiplicando por -1:

$$\cos A = \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C . \cos a - \cos B . \cos C$$

De manera análoga se obtendría:

$$\cos B = \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} C . \cos b - \cos A . \cos C$$
$$\cos C = \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B . \cos c - \cos A . \cos B$$

150. Teorema del seno. — *En todo triángulo esférico los senos de los ángulos están entre sí como los senos de los ángulos opuestos.*

H) *triáng. esf. ABC*, fig. 80.

T)
$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} \qquad (3)$$

En el triángulo rectángulo *PCD* se tiene:

$$PC = CD . \operatorname{sen} \gamma \qquad (1)$$

y en el triángulo rectángulo *PCE*:

$$PC = CE . \operatorname{sen} \beta \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2) se deduce:

$$CD . \operatorname{sen} \gamma = CE . \operatorname{sen} \beta \qquad (3)$$

pero $CD = \operatorname{sen} b$, y $CE = \operatorname{sen} a$; y también $\gamma = A$ y $\beta = B$, luego, reemplazando estos valores en (3):

$$\operatorname{sen} b . \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} B$$

de donde:
$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} \qquad (3)$$

De manera análoga se demostrará que:

$$\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} \qquad (4)$$

y de (3) y (4) se deduce:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$

151. Teorema de los cuatro elementos. — *En todo triángulo esférico el producto de la cotangente de un lado por el seno de otro, es igual al coseno de este lado por el coseno del ángulo comprendido, más el seno de este ángulo por la cotangente del ángulo opuesto al primer lado.*

H) *triáng. esf. ABC*, fig. 80.

T) $\cot a . \operatorname{sen} b = \cos b . \cos C + \operatorname{sen} C . \cot A$

Por el teorema del coseno, se tiene:

$$\cos a = \cos b \,.\cos c + \operatorname{sen} b \,.\operatorname{sen} c \,.\cos A \qquad (1)$$

$$\cos b = \cos a \,.\cos c + \operatorname{sen} a \,.\operatorname{sen} c \,.\cos B \qquad (2)$$

y por el teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} \therefore \operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} a .\ \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \qquad (3)$$

Sustituyendo en (1) el valor $\cos b$ por el valor dado en la (2), y el valor $\operatorname{sen} b$ por el valor dado en la (3):

$$\cos a = (\cos a \,.\cos c + \operatorname{sen} a \,.\operatorname{sen} c \,.\cos B)\cos c +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen} a \,.\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \cdot \operatorname{sen} c \,.\cos A$$

y efectuando las operaciones y trasponiendo:

$$\cos a - \cos a \,.\cos^2 c = \operatorname{sen} a \,.\operatorname{sen} c \,.\cos c \,.\cos B +$$

$$+ \operatorname{sen} a \,.\operatorname{sen} c \,.\operatorname{sen} B \,.\cot A$$

factoreando $\cos a$ en el primer miembro, y $\operatorname{sen} a \,.\operatorname{sen} c$ en el segundo miembro:

$$\cos a (1 - \cos^2 c) = \operatorname{sen} a \,.\operatorname{sen} c (\cos c \,.\cos B + \operatorname{sen} B \,.\cot A)$$

trasponiendo $\operatorname{sen} a \,.\operatorname{sen} c$ al primer miembro, y recordando, por lo visto en (16), que $1 - \cos^2 c = \operatorname{sen}^2 c$, obtenemos:

$$\frac{\cos a \,.\operatorname{sen}^2 c}{\operatorname{sen} a \,.\operatorname{sen} c} = \cos c \,.\cos B + \operatorname{sen} B \,.\cot A$$

de donde sacamos que:

$$\cot a \,.\operatorname{sen} c = \cos c \,.\cos B + \operatorname{sen} B \,.\cot A$$

Análogamente:

$$\cot a \,.\operatorname{sen} b = \cos b \,.\cos C + \operatorname{sen} C \,.\cot A$$

$$\cot b \,.\operatorname{sen} a = \cos a \,.\cos C + \operatorname{sen} C \,.\cot B$$

$$\cot b \,.\operatorname{sen} c = \cos c \,.\cos A + \operatorname{sen} A \,.\cot B$$

$$\cot c \,.\operatorname{sen} a = \cos a \,.\cos B + \operatorname{sen} B \,.\cot C$$

$$\cot c \,.\operatorname{sen} b = \cos b \,.\cos A + \operatorname{sen} A \,.\cot C$$

152. Relaciones entre tres lados y dos ángulos, o tres ángulos y dos lados. — Entre cinco elementos de un triángulo esférico se pueden establecer relaciones que si bien no tienen aplicación directa, permiten facilitar algunas transformaciones, empleadas sobre todo en problemas de *Cosmografía.*

Relaciones entre tres lados y dos ángulos. — Por el teorema del coseno se tiene:

$$\cos a = \cos b . \cos c + \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} c . \cos A \qquad (1)$$

$$\cos b = \cos a . \cos c + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos B \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\cos a = (\cos a . \cos c + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos B) \cos c + \\ + \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} c . \cos A$$

y efectuando:

$$\cos a = \cos a . \cos^2 c + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos c . \cos B + \\ + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c . \cos A$$

trasponiendo $\cos a . \cos^2 c$ al primer miembro:

$$\cos a - \cos a . \cos^2 c = \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos c . \cos B + \\ + \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} c . \cos A$$

factoreando $\cos a$ en el primer miembro, y $\operatorname{sen} c$ en el segundo:

$$\cos a (1 - \cos^2 c) = \operatorname{sen} c (\operatorname{sen} a . \cos c . \cos B + \operatorname{sen} b . \cos A)$$

y como $1 - \cos^2 c = \operatorname{sen}^2 c$, (16):

$$\cos a . \operatorname{sen}^2 c = \operatorname{sen} c (\operatorname{sen} a . \cos c . \cos B + \operatorname{sen} b . \cos A)$$

y dividiendo ambos miembros por $\operatorname{sen} c$, obtenemos:

$$\cos a . \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a . \cos c . \cos B + \operatorname{sen} b . \cos A$$

Análogamente:

$$\cos a . \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a . \cos b . \cos C + \operatorname{sen} c . \cos A$$

$$\cos b . \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b . \cos a . \cos C + \operatorname{sen} c . \cos B$$

$$\cos b . \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} b . \cos c . \cos A + \operatorname{sen} a . \cos B$$

$$\cos c . \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} c . \cos a . \cos B + \operatorname{sen} b . \cos C$$

$$\cos c . \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} c . \cos b . \cos A + \operatorname{sen} a . \cos C$$

Relaciones entre tres ángulos y dos lados. — Aplicando la primera de las relaciones anteriores al triángulo $A'B'C'$, polar del triángulo ABC, se tiene:

$$\cos A' . \operatorname{sen} C' = \operatorname{sen} A' . \cos C' . \cos b' + \operatorname{sen} B' . \cos a'$$

y si fuera el triángulo ABC, resultaría:

$$\cos A . \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} A . \cos C . \cos b + \operatorname{sen} B . \cos a$$

Análogamente:

$$\cos A . \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A . \cos B . \cos c + \operatorname{sen} C . \cos a$$

$$\cos B . \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} B . \cos A . \cos c + \operatorname{sen} C . \cos b$$

$$\cos B . \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} B . \cos C . \cos a + \operatorname{sen} A . \cos b$$

$$\cos C . \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} C . \cos A . \cos b + \operatorname{sen} B . \cos c$$

$$\cos C . \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} C . \cos B . \cos a + \operatorname{sen} A . \cos c$$

CAPITULO XIV

Resolución de los triángulos esféricos rectángulos

153. Triángulos esféricos rectángulos. — Los triángulos esféricos pueden tener uno, dos o tres ángulos rectos. Si tienen un ángulo recto, el lado opuesto es un cuadrante, si tienen dos ángulos rectos, los lados opuestos son cuadrantes, y si tienen los tres ángulos rectos, los tres lados son cuadrantes.

El caso único que da origen a problemas es el *rectángulo,* pues en los *birrectángulos* y los *trirrectángulos,* todos sus elementos son conocidos.

154. Fórmulas de resolución. — Sea un triángulo rectángulo ABC, en donde A es el ángulo recto. Escribamos todas las fórmulas deducidas en el Capítulo anterior y que contengan al ángulo A:

$$\cos a = \cos b . \cos c + \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} c . \cos A \quad (1)$$

$$\cos A = \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C . \cos a - \cos B . \cos C \quad (2)$$

$$\cos B = \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} C . \cos b - \cos A . \cos C \quad (3)$$

$$\cos C = \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B . \cos c - \cos A . \cos B \quad (4)$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} \quad (5)$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} \quad (6)$$

$$\cot a . \operatorname{sen} b = \cos b . \cos C + \operatorname{sen} C . \cot A \quad (7)$$

$$\cot a . \operatorname{sen} c = \cos c . \cos B + \operatorname{sen} B . \cot A \quad (8)$$

$$\cot b . \operatorname{sen} c = \cos c . \cos A + \operatorname{sen} A . \cot B \quad (9)$$

$$\cot c . \operatorname{sen} b = \cos b . \cos A + \operatorname{sen} A . \cot C \quad (10)$$

En los triángulos rectángulos es $A = 90^{\circ}$, luego:

$$\operatorname{sen} A = 1 \quad ; \quad \cos A = 0 \quad ; \quad \cot A = 0$$

Reemplazando estos valores a las diez fórmulas anterio res, resulta:

$$\cos a = \cos b . \cos c \qquad \text{(I)}$$

$$\cos B . \cos C = \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C . \cos a \qquad \text{(II)}$$

$$\cos B = \operatorname{sen} C . \cos b \qquad \text{(III)}$$

$$\cos C = \operatorname{sen} B . \cos c \qquad \text{(IV)}$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} \qquad \text{(V)}$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C} \qquad \text{(VI)}$$

$$\cot a . \operatorname{sen} b = \cos b . \cos C \qquad \text{(VII)}$$

$$\cot a . \operatorname{sen} c = \cos c . \cos B \qquad \text{(VIII)}$$

$$\cot b . \operatorname{sen} c = \cot B \qquad \text{(IX)}$$

$$\cot c . \operatorname{sen} b = \cot C \qquad \text{(X)}$$

Estas diez fórmulas son las que permiten resolver los triángulos rectángulos esféricos, bastando conocer dos elementos cualesquiera para determinar el triángulo.

155. Regla de Neper. — Como las fórmulas que hemos obtenido para la resolución de los triángulos esféricos rectángulos son algo difíciles de recordar, fácilmente podemos escribirlas por medio de la *Regla mnemónica del pentágono de Neper*, o *Regla de Neper*, que se enuncia así:

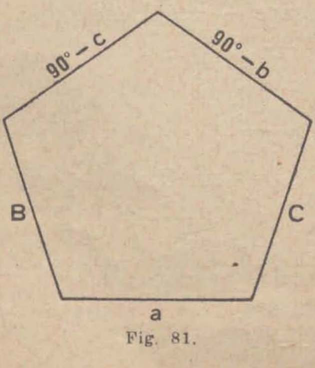

Fig. 81.

El coseno de un elemento es igual al producto de los senos de los elementos opuestos o al de las cotangentes de los elementos adyacentes.

156. Corolarios. — De las diez fórmulas obtenidas en (154) deducimos que:

1º) En la fórmula

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c \qquad (I)$$

$\cos a$ será positivo cuando $\cos b$ y $\cos c$ sean de igual signo, y negativo en caso contrario; es decir que si es $b < 90°$ y $c < 90°$, es $a < 90°$; y si es $b < 90°$ y $c > 90°$. es $180° > a > 90°$, luego: *La hipotenusa es mayor o menor que 90°, según que los catetos sean de igual o distinta especie;* es decir: *o hay dos lados mayores que 90°, o ninguno.*

2º) En la fórmula

$$\cos B \,.\, \cos C = \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos a \qquad (II)$$

o bien: $\cos a = \cot B \,.\, \cot C$

razonando con el corolario 1º, deducimos que: *La hipotenusa es mayor o menor que 90°, según que los ángulos adyacentes sean de igual o distinta especie.*

3º) En la fórmula

$$\cot b \,.\, \operatorname{sen} c = \cot B$$

si es $c > 0°$, los signos de tg b y tg B son iguales, es decir, que si es $b \gtrless 90°$, también es $B \gtrless 90°$, luego: *Un cateto y su ángulo opuesto siempre son de la misma especie.*

157. Triángulos rectiláteros. — Se llama *rectilátero* al triángulo esférico que tiene un lado de 90°.

Las fórmulas de resolución de los triángulos rectiláteros se obtiene tomando todas las fórmulas deducidas en el Capítulo anterior y que contengan al lado a. y luego se reemplazan las funciones trigonométricas de a por sus valores correspondientes:

$$a = 90°;\ \operatorname{sen} a = 1;\ \cos a = 0;\ \cot a = 0$$

Resolución de los triángulos esféricos rectángulos

158. Casos de resolución. — Se presentan los seis casos siguientes:

1º) *Dados los dos catetos b y c, resolver el triángulo;*

2º) *Dados la hipotenusa a y un cateto b, resolver el triángulo;*

3º) *Dados el lado b y el ángulo opuesto B, resolver el triángulo;*

4º) *Dados el lado b y el ángulo adyacente C, resolver el triángulo;*

5º) *Dados la hipotenusa a y el ángulo B, resolver el triángulo;*

6º) *Dados los ángulos B y C, resolver el triángulo.*

159. Primer Caso. — *Dados los catetos b y c, resolver el triángulo.*

Datos: b, c. *Incógnitas*: a, B, C.

Fórmulas a aplicar:

$$\cos a = \cos b \, . \cos c \qquad \text{(I)}$$

$$\cot b \, . \text{sen}\, c = \cot B \qquad \text{(IX)}$$

$$\cot c \, . \text{sen}\, b = \cot C \qquad \text{(X)}$$

El problema siempre es posible.

160. Segundo Caso. — *Dados la hipotenusa a y un cateto b, resolver el triángulo.*

Datos: a, b. *Incógnitas*: c, B, C.

Fórmulas a aplicar:

$$\cos a = \cos b \, . \cos c \qquad \text{(I)}$$

$$\text{sen}\, a = \frac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, B} \qquad \text{(V)}$$

$$\cot a \, . \text{sen}\, b = \cos b \, . \cos C \qquad \text{VII)}$$

El problema es posible cuando sea $a < 90^\circ$, pues entonces es $b < a$. Si fuese $a > 90^\circ$, es $b > a$. Resulta una sola solución, pues, (156,3°), b y B son de la misma especie.

161. TERCER CASO. — *Dados el lado b y el ángulo opuesto B, resolver el triángulo.*

Datos: b, B. *Incógnitas*: a, c, C.

Fórmulas a aplicar:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} \qquad (\text{V})$$

$$\cot b . \operatorname{sen} c = \cot B \qquad (\text{IX})$$

$$\cos B = \operatorname{sen} C . \cos b \qquad (\text{III})$$

Si fuese $b = B$, el triángulo sería birrectángulo, y habría una sola solución.

Si fuese $b < 90^\circ$, el problema será posible cuando sea $b < b$; hay dos soluciones.

Si fuese $b > 90^\circ$, el problema será posible cuando sea $b > B$; hay dos soluciones.

162. CUARTO CASO. — *Dados el lado b y el ángulo adyacente C.*

Datos: b, C. *Incógnitas*: a, c, B.

Fórmulas a aplicar:

$$\cot a . \operatorname{sen} B = \cos b . \cos C \qquad (\text{VII})$$

$$\cot c . \operatorname{sen} b = \cot C \qquad (\text{X})$$

$$\cos B = \operatorname{sen} C . \cos b \qquad (\text{III})$$

El problema siempre es posible; hay una sola solución.

163. QUINTO CASO. — *Dados la hipotenusa a y el ángulo B, resolver el triángulo.*

Datos: a, B. *Incógnitas*: b, c, C.

Fórmulas a aplicar:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} \qquad (V)$$

$$\cot a . \operatorname{sen} c = \cos c . \cos B \qquad (VIII)$$

$$\cos B . \cos C = \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C . \cos a \qquad (II)$$

El problema siempre es posible.

164. Sexto Caso. — *Dados los ángulos B y C, resolver el triángulo.*

Datos: B, C. *Incógnitas*: a, b, c.

Fórmulas a aplicar:

$$\cos B . \cos C = \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C . \cos a \qquad (II)$$

$$\cos B = \operatorname{sen} C . \cos b \qquad (III)$$

$$\cos C = \operatorname{sen} B . \cos c \qquad (IV)$$

El problema es posible cuando se tenga

$$90^\circ < B + C < 180^\circ$$

y

$$-90^\circ < B - C < 90^\circ;$$

hay una solución.

EJERCICIOS

Resolver los siguientes triángulos rectángulos esféricos:

191. $b = 42^\circ 32'$; $c = 73^\circ 18'$.

192. $a = 85^\circ 12'$; $B = 60^\circ 15'$.

193. $b = 24^\circ 30'$; $B = 56^\circ 45'$.

194. $b = 57^\circ 24'$; $C = 82^\circ 17'$.

195. $B = 84^\circ 45'$; $C = 120^\circ 34$.

CAPITULO XV

Transformaciones Logarítmicas

165. Valor de un ángulo en función de los lados. — Sea la fómula:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \cos A$$

de donde:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

Restando de 1 ambos miembros:

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

y efectuando:

$$1 - \cos A = \frac{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c - \cos a + \cos b \,.\, \cos c}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c} \qquad (1)$$

Pero sabemos, (68), que:

$$\cos (b - c) = \cos b \,.\, \cos c + \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c$$

y reemplazando este valor en (1):

$$1 - \cos A = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

y transformando en producto el numerador, (83):

$$1 - \cos A = \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (b - c + a) \,.\, \operatorname{sen} \frac{1}{2} (b - c - a)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

y como $-\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (-\alpha)$, y trasponiendo el 2, resulta:

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (b - c + a) \,.\, \operatorname{sen} \frac{1}{2} (a + c - b)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

Recordando, (117), que:

$$1 - \cos A = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}$$

$$b - c + a = 2(p - c)$$
$$a + c - b = 2(p - b)$$

obtenemos:

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 \dfrac{A}{2}}{2} = \frac{\operatorname{sen}(p - b).\operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c}$$

Simplificando y extrayendo la raíz cuadrada, resulta:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p - b).\operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c}} \\
&\text{Análogamente:} \\
\operatorname{sen}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p - a).\operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} c}} \\
\operatorname{sen}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p - a).\operatorname{sen}(p - b)}{\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}}
\end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I}$$

Podémos obtener otras fórmulas que nos dan el coseno en vez del seno.

Sea la fórmula:

$$\cos a = \cos b.\cos c + \operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c.\cos A$$

de donde:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b.\cos c}{\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c}$$

Sumando 1 a ambos miembros:

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b.\cos c}{\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c}$$

y efectuando:

$$1 + \cos A = \frac{\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c + \cos a - \cos b.\cos c}{\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c} \quad (1)$$

Pero sabemos, (65), que:

$$\cos(b + c) = \cos b.\cos c - \operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c$$

o bien: $$-\cos(b + c) = \operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c - \cos b.\cos c$$

y reemplazando este valor en (1):

$$1+\cos A=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\operatorname{sen} b\,.\operatorname{sen} c}$$

y transformando en producto el numerador, (83):

$$1+\cos A=\frac{-2\operatorname{sen}(a+b+c)\,.\operatorname{sen}(a-b-c)}{\operatorname{sen} b\,.\operatorname{sen} c}$$

y como $-\operatorname{sen} \alpha=\operatorname{sen}(-\alpha)$, y trasponiendo el 2, resulta:

$$\frac{1+\cos A}{2}=\frac{\operatorname{sen} {}^1/_2(a+b+c)\,.\operatorname{sen} {}^1/_2(b+c-a)}{\operatorname{sen} b\,.\operatorname{sen} c}$$

Recordando, (117), que:

$$1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}$$
$$a+b+c=2p$$
$$b+c-a=2(p-a)$$

obtenemos:

$$\frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2}=\frac{\operatorname{sen} p\,.\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b\,.\operatorname{sen} c}$$

Simplificando y extrayendo la raíz cuadrada:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen} p\,.\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b\,.\operatorname{sen} c}}$$

Análogamente:

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen} p\,.\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a\,.\operatorname{sen} c}}\qquad \text{II}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen} p\,.\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a\,.\operatorname{sen} b}}$$

Dividiendo ordenadamente las fórmulas (I) y (II), resulta:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\,.\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p\,.\operatorname{sen}(p-a)}}\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\,.\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p\,.\operatorname{sen}(p-b)}}\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\,.\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p\,.\operatorname{sen}(p-c)}}\end{aligned}\right\}\quad \text{III}$$

166. Valor de un lado en función de los ángulos. — Sea la fórmula:

$$\cos A = \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C . \cos a - \cos B . \cos C$$

Procediendo de la misma manera que en la primera parte del párrafo anterior, se obtiene:

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{-\cos {}^1/_2 (B+C+A) . \cos {}^1/_2 (B+C-A)}{\operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C}} \quad (1)$$

Sabemos, (146), que:

$$2\epsilon = A + B + C - 180^\circ$$

de donde: $$A + B + C = 180^\circ + 2\epsilon$$

o bien: $$\frac{1}{2}(A + B + C) = 90 + \epsilon \quad (2)$$

y además: $$\frac{1}{2}(A + B + C) - A = 90^\circ + (\epsilon - A)$$

$$\frac{1}{2}(B + C A) = 90^\circ - (A - \epsilon) \quad (3)$$

En (2), se tiene:

$$-\cos \frac{1}{2} (B + C + A) = -\cos(90^\circ + \epsilon)$$

y por (77): $$-\cos \frac{1}{2} (B + C + A) = \operatorname{sen} \epsilon \quad (4)$$

En (3), se tiene:

$$\cos \frac{1}{2} (B + C - A) = \cos [90^\circ - (A - \epsilon)]$$

y por (77): $$\cos \frac{1}{2} (B + C - A) = \operatorname{sen}(A - \epsilon) \quad (5)$$

Reemplazando los valores (4) y (5) en (1):

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \epsilon . \operatorname{sen}(A - \epsilon)}{\operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C}}$$

Análogamente:

$$\operatorname{sen} \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \epsilon . \operatorname{sen}(B - \epsilon)}{\operatorname{sen} A . \operatorname{sen} C}} \quad (\mathrm{I})$$

$$\operatorname{sen} \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \epsilon . \operatorname{sen}(C - \epsilon)}{\operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B}}$$

Sea la fórmula:

$$\cos A = \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C . \cos a - \cos B . \cos C$$

Procediendo de la misma manera que en la segunda parte del párrafo anterior, se obtiene:

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos {}^1/_2(A+B-C)\,.\cos {}^1/_2(A-B+C)}{\operatorname{sen} B\,.\operatorname{sen} C}} \quad (1)$$

y como:

$$\frac{1}{2}(A+B+C)=90^\circ+\epsilon$$

$$\frac{1}{2}(A+B-C)=90^\circ-(C-\epsilon)$$

$$\frac{1}{2}(A-B+C)=90^\circ-(B-\epsilon)$$

luego:

$$\cos\frac{1}{2}(A+B-C)=\cos[90^\circ-(C-\epsilon)]$$

y por (77):

$$\cos\frac{1}{2}(A+B-C)=\operatorname{sen}(C-\epsilon) \quad (2)$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B+C)=\cos[90^\circ-(B-\epsilon)]$$

y por (77):

$$\cos\frac{1}{2}(A-B+C)=\operatorname{sen}(B-\epsilon) \quad (3)$$

Reemplazando los valores (2) y (3) en (1):

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-\epsilon)\,.\operatorname{sen}(C-\epsilon)}{\operatorname{sen} B\,.\operatorname{sen} C}}$$

Análogamente:

$$\cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(A-\epsilon)\,.\operatorname{sen}(C-\epsilon)}{\operatorname{sen} A\,.\operatorname{sen} C}} \quad \text{II}$$

$$\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(A-\epsilon)\,.\operatorname{sen}(B-\epsilon)}{\operatorname{sen} A\,.\operatorname{sen} B}}$$

Dividiendo ordenadamente las fórmulas (I) y (II), se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\epsilon\,.\operatorname{sen}(A-\epsilon)}{\operatorname{sen}(B-\epsilon)\,.\operatorname{sen}(C-\epsilon)}}\\
\operatorname{tg}\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\epsilon\,.\operatorname{sen}(B-\epsilon)}{\operatorname{sen}(A-\epsilon)\,.\operatorname{sen}(C-\epsilon)}}\\
\operatorname{tg}\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\epsilon\,.\operatorname{sen}(C-\epsilon)}{\operatorname{sen}(A-\epsilon)\,.\operatorname{sen}(B-\epsilon)}}
\end{aligned}\right\}\ \text{III}$$

167. Analogías de Delambre (o Fórmulas de Gauss) — Las *Analogías de Delambre* dan las relaciones entre los tres ángulos y los tres lados de un triángulo esférico.

Consideremos la expresión:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}+\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\quad(1)$$

y las fórmulas deducidas:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\cdot\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}b\cdot\operatorname{sen}c}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\cdot\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}c}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\cdot\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}b\cdot\operatorname{sen}c}}$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\cdot\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}c}}$$

Reemplazando estos valores en (1), se obtiene:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\cdot\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}b\cdot\operatorname{sen}c}}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\cdot\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}c}}+$$
$$+\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\cdot\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}c}}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\cdot\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}b\cdot\operatorname{sen}c}}$$

y aplicando la propiedad $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$, resulta:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\cdot\operatorname{sen}^2(p-b)\cdot\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b\cdot\operatorname{sen}^2c}}+$$
$$+\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\cdot\operatorname{sen}^2(p-a)\cdot\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b\cdot\operatorname{sen}^2c}}$$

extrayendo factores fuera de los radicales:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}c}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\cdot\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b}}+$$
$$+\frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}c}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\cdot\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b}}$$

sacando el radical como factor común:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{sen}(p-a)+\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} c}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen} p.\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}} \quad (2)$$

pero sabemos que, (165):

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen} p.\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}}$$

y sustituyendo este valor en (2):

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{sen}(p-a)+\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} c}\cdot\cos\frac{C}{2} \quad (3)$$

pero se sabe, (83), que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(p-a)+\operatorname{sen}(p-b) &= 2\operatorname{sen}\frac{p-a+p-b}{2}\cdot\cos\frac{p-b-p+a}{2}\\ &= 2\operatorname{sen}\frac{2p-a-b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}\\ &= 2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}\end{aligned}$$

y sustituyendo este valor en (3):

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} c}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

pero $\operatorname{sen} c = 2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}$, luego:

$$\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{c}{2}.\cos\frac{a-b}{2}.\cos\frac{C}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{c}{2}.\cos\frac{c}{2}}$$

y simplificando:

$$\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}.\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

de donde:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \qquad (I)$$

De manera análoga se deducen las otras analogías:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}} \qquad (II)$$

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \qquad (III)$$

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}} \qquad (IV)$$

168. **Analogías de Neper.** — Estas fórmulas se obtienen dividiendo ordenadamente las *Analogías de Delambre.*

Dividiendo la (II) por la (I), resulta, después de simplificar:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}$$

Dividiendo la (IV) por la (III), y simplificando:

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}$$

Dividiendo la (I) por la (III), y simplificando:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A + B}{2}}{\cot \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a - b}{2}}{\cos \frac{a + b}{2}}$$

Dividiendo la (II) por la (IV), y simplificando:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A - B}{2}}{\cot \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a - b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a + b}{2}}$$

Las fórmulas obtenidas son las *Analogías de Neper.*

CAPITULO XVI

ángulos Esféricos Oblicuángulos

169. Casos de resolución. — Para resolver un triángulo esférico oblicuángulo se necesitan tres de sus seis elementos. Se presentan los seis casos siguientes:

1º) Dados a, b, c, resolver el triángulo;
2º) Dados a, b, C, resolver el triángulo;
3º) Dados a, b, A, resolver el triángulo;
4º) Dados A, B, C, resolver el triángulo;
5º) Dados A, B, c, resolver el triángulo;
6º) Dados A, B, b, resolver el triángulo.

Resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos

170. PRIMER CASO. — *Dados a, b y c, resolver el triángulo.*

Datos: a, b, c. *Incógnitas*: A, B, C.

Se aplican las fórmulas deducidas en (165):

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b).\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p.\operatorname{sen}(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a).\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p.\operatorname{sen}(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a).\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p.\operatorname{sen}(p-c)}}$$

El problema es posible cuando la suma de los lados es menor que 360°, y cada lado sea menor que la suma de los otros dos.

171. Segundo Caso. — *Dados a, b y. C, resolver el triángulo.*

Datos: a, b, C. *Incógnitas*: c, A, B.

Se aplican las siguientes *analogías de Neper*:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\cot \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\cot \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a+b}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c}{2}}$$

De las dos primeras se hallan los valores $\frac{A+B}{2}$ y $\frac{A-B}{2}$, de donde se deducen los de A y B; la tercera da el valor de c.

172. Tercer Caso. — *Dados a, b y A, resolver el triángulo.*

Datos: a, b, A. *Incógnitas*: c, B, C.

El lado c y el ángulo C se hallan con las siguientes *analogías de Neper*:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}$$

El ángulo B se halla con la fórmula:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}=\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}$$

173. CUARTO CASO. — *Dados A, B y C, resolver el triángulo.*

Datos: A, B, C. *Incógnitas*: a, b, c.

Se aplican las fórmulas deducidas en (166):

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\epsilon.\operatorname{sen}(A-\epsilon)}{\operatorname{sen}(B-\epsilon).\operatorname{sen}(C-\epsilon)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\epsilon.\operatorname{sen}(B-\epsilon)}{\operatorname{sen}(A-\epsilon).\operatorname{sen}(C-\epsilon)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\epsilon.\operatorname{sen}(C-\epsilon)}{\operatorname{sen}(A-\epsilon).\operatorname{sen}(B-\epsilon)}}$$

174. QUINTO CASO. — *Dados A, B y c, resolver el triángulo*:

Datos: A, B, c. *Incógnitas*: a, b, C.

Los lados a y b se determinan con las *analogías de Neper*:

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}$$

El ángulo C se calcula con la fórmula:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p \,.\operatorname{sen}(p-c)}}$$

175. Sexto Caso. — *Dados A, B y b, resolver el triángulo*:

Datos: A, B, b. *Incógnitas*: a, c, C.

El lado a se calcula con la fórmula:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}$$

El lado c y el ángulo C se hallan con las siguientes *analogías de Neper*:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\cot \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a+b}{2}}$$

EJERCICIOS

Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos:

196 $a = 75°$; $b = 42°\,34'$; $c = 138°\,15'$.

197. $a = 38°\,25'$; $b = 70°\,30'$; $C = 84°\,24'$.

198. $a = 12°\,46'$; $b = 20°\,16'$; $A = 150°$.

199. $A = 135°$; $B = 86°\,38'$; $C = 63°\,25'$.

200. $A = 28°\,18'$; $B = 164°\,56'$; $c = 32°\,24'$.

201. $A = 72°\,35'$; $B = 112°$; $b = 45°$.

CAPITULO XVII

Aplicaciones de la Trigonometría Esférica

176. Area del triángulo esférico. — En *Geometría del espacio* se halla que el área de un triángulo esférico está dado por la fórmula:

$$S = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{(A + B + C) - 180^\circ}{90^\circ}$$

y como sabemos, (146), que:

$$A + B + C - 180^\circ = 2\epsilon$$

al reemplazar este valor, resulta:

$$S = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{2\,\varepsilon}{90^\circ}$$

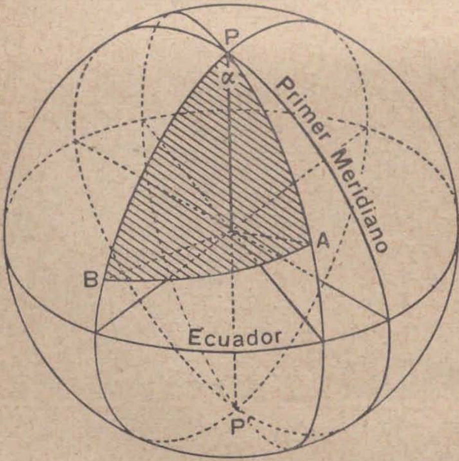

Fig. 82.

en donde ϵ está dado en grados.

Si ϵ estuviese dado en minutos o en segundos, el denominador 90° habría que reducirlo a minutos o segundos, según sea ϵ.

177. Distancia entre dos puntos de la superficie terrestre. — Sean A y B dos puntos cuyas coordenadas geográficas se conocen (fig. 82). Considerando los meridianos que pasen por A y B, y el plano que pasa por A, B y O, resulta un triángulo esférico ABP.

En el triángulo ABP se conocen:

$$\textit{lado } AP = 90^\circ - \textit{latitud de } A;$$
$$\textit{lado } BP = 90^\circ - \textit{latitud de } B;$$
$$\textit{ángulo } \alpha = \textit{long. de } B - \textit{long. de } A;$$

y como esos elementos son suficientes para resolver el triángulo ABP, calcularemos el lado AB, en grados, y luego, como se conoce el radio medio terrestre, hallaremos la longitud de dicho AB en metros o kilómetros.

Ejemplo numérico. — Hallar la distancia que hay en kilómetros entre dos puntos A y B de la superficie terrestre, cuyas coordenadas son:

$$A\begin{pmatrix}\lambda = O.\,42^\circ 28' \\ \varphi = N.\,35^\circ 45'\end{pmatrix} \quad ; \quad B\begin{pmatrix}\lambda = O.\,75^\circ 32' \\ \varphi = N.\,17^\circ 25'\end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$a = 90^\circ - 17^\circ 25' = 72^\circ 35'$$
$$b = 90^\circ - 35^\circ 45' = 54^\circ 15'$$
$$\alpha = 75^\circ 32' - 42^\circ 28' = 33^\circ 4'$$

Este caso es el 2º caso de resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos, estudiado en (171).

$$\frac{a+b}{2} = \frac{72^\circ 35' + 54^\circ 15'}{2} = 63^\circ 25'$$

$$\frac{a-b}{2} = \frac{72^\circ 35' - 54^\circ 15'}{2} = 9^\circ 10'$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{33^\circ 4'}{2} = 16^\circ 32'$$

Sustituyendo estos valores en las *Analogías de Neper*:

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\cot\dfrac{C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\cot\dfrac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}}$$

y pasando $\cot\dfrac{C}{2}$ al segundo miembro, resulta:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\cos 9^\circ 10' . \cot 16^\circ 32'}{\cos 63^\circ 25'}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\operatorname{sen} 9^\circ 10' . \cot 16^\circ 32'}{\operatorname{sen} 63^\circ 25'}$$

y aplicando logaritmos:

$$\log\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \log\cos 9^\circ 10' + \log\cot 16^\circ 32' + \operatorname{colog}\operatorname{sen} 63^\circ 25'$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \log\operatorname{sen} 9^\circ 10' + \log\cot 16^\circ 32' + \operatorname{colog}\operatorname{sen} 63^\circ 25'$$

En las *Tablas de Lalande* se halla:

Cálculo de $\dfrac{A+B}{2}$

$$\begin{array}{rl} \log\cos 9^\circ 10' = & 1{,}99442 \\ \log\cot 16^\circ 32' = & 0{,}52747 \\ \operatorname{colog}\cos 63^\circ 25' = & \bar{1}{,}65079 \\ \hline \log\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2} = & 0{,}17268 \\ \therefore\ \dfrac{A+B}{2} = & 56^\circ 6' 6'',6 \quad (1) \end{array}$$

Cálculo de $\dfrac{A-B}{2}$

$$\begin{array}{rl} \log\operatorname{sen} 9^\circ 10' = & \bar{1}{,}20223 \\ \log\cot 16^\circ 32' = & 0{,}52747 \\ \operatorname{colog}\operatorname{sen} 63^\circ 25' = & \bar{1}{,}95148 \\ \hline \log\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2} = & \bar{1}{,}68118 \\ \therefore\ \dfrac{A-B}{2} = & 25^\circ 38' 16'',4 \quad (2) \end{array}$$

Sumando y restando ordenadamente (1) y (2), resulta:

$$A = 81^\circ 44' 23''$$
$$B = 30^\circ 27' 50''$$

El lado AB se calcula mediante la fórmula de *Neper*:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c}{2}}$$

Despejando el valor de $\operatorname{tg} \frac{c}{2}$, resulta:

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}$$

sustituyendo valores:

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\operatorname{sen} 56^\circ 6' 6'',6 \operatorname{tg} 9^\circ 10'}{\operatorname{sen} 25^\circ 38' 16'',4}$$

y logaritmando:

$$\log \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \log \operatorname{sen} 56^\circ 6' 6'',6 + \log \operatorname{tg} 9^\circ 10' +$$
$$+ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 25^\circ 38' 16'',4$$

En las Tablas se halla:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} 56^\circ 6' 6'',6 &= \bar{1},91908 \\ \log \operatorname{tg} 9^\circ 10' &= \bar{1},20782 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 25^\circ 38' 16'',4 &= \bar{0},36383 \\ \hline \log \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \bar{1},49073 \quad \therefore \frac{c}{2} = 17^\circ 12' \end{aligned}$$

$$\therefore c = AB = 34^\circ 24'$$

De manera, pues, que la distancia AB es de $34^\circ 24'$.

El radio medio terrestre, suponiendo la Tierra esférica, mide 6.371 Km., de manera que para calcular la distancia *AB*, basta hallar la longitud del arco *AB* por medio de la fórmula:

$$l = \frac{2\,\pi\,R.\,a}{360}$$

o bien:

$$l = \frac{2 \times \pi \times 6{,}371 \times 34{,}4}{360}\;;\; 34^\circ 24' = 34{,}4$$

Efectuando estos cálculos, resulta, finalmente:

$$AB = 3825{,}974 \text{ Km.}$$

178. Reducir un ángulo al horizonte. — Reducir un ángulo al horizonte es hallar el ángulo que forman las proyecciones de sus lados sobre un plano horizontal.

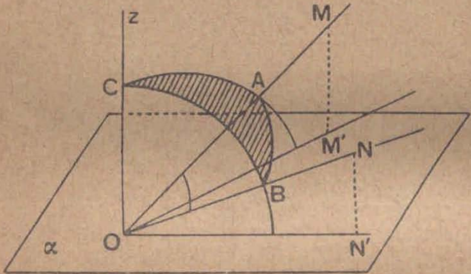

Fig. 83.

Los ángulos medidos con el teodolito ya son reducidos sobre el círculo horizontal, no sucediendo lo mismo cuando se emplea el sextante.

Sea el ángulo *MON*, fig. 83; su reducción al horizonte es el ángulo *M'ON'*, formado por las proyecciones de los lados *OM* y *ON* sobre el plano horizontal α. Midiendo los ángulos *MOM'* y *NON'* y suponiendo una esfera con centro *O* y radio $OA = OB = OC$, en el triángulo esférico formado *ABC*, se conocen los tres lados:

$$AB = \text{medida de } MON,$$
$$AC = 90^\circ - MOM',$$
$$BC = 90^\circ - NON'.$$

De manera que al calcular el ángulo C, del triángulo esférico, habremos calculado el ángulo $M'ON'$.

El ángulo C, está dado por la fórmula, (170) :

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a).\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p.\operatorname{sen}(p-c)}}$$

EJERCICIOS

202. Hallar el área de un triángulo esférico cuyos ángulos miden 45°, 72° y 85°.

203. Idem, Idem, 65° 30', 98° 25', 120° 37'.

204. Hallar la distancia entre Buenos Aires y Lima, siendo $R = 6.371$ km.

$$B.A.\begin{pmatrix} \lambda = \text{O}.58^\circ 30' \\ \varphi = \text{S } 34^\circ 36' \end{pmatrix} \; ; \; L.\begin{pmatrix} \lambda = \text{O}.77^\circ \\ \varphi = \text{S}.12^\circ \end{pmatrix}$$

205. Idem. entre Madrid y Buenos Aires:

$$B.A.\begin{pmatrix} \lambda = \text{O}.58^\circ 30' \\ \varphi = \text{S}.34^\circ 36' \end{pmatrix} \; ; \; M.\begin{pmatrix} \lambda = \text{O}.\ 3^\circ 40' \\ \varphi = \text{N}.40^\circ 25' \end{pmatrix}$$

INDICE

TRIGONOMETRIA RECTILINEA

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

CAPITULO IV

CAPITULO V

CAPITULO VI

CAPITULO VII

CAPITULO VIII

CAPITULO IX

CAPITULO X

CAPITULO XI

TRIGONOMETRIA ESFERICA

CAPITULO XII

CAPITULO XIII

CAPITULO XIV

CAPITULO XV

CAPITULO XVI

CAPITULO XVII

OBRAS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA PUBLICADAS POR LA CASA

ANGUITA F. — Elementos de Algebra, 1 tomo enc.	$ 2.50
— Elementos de trigonometría rectilínea y esférica, 1 tomo encuadernado	„ 3.50
BOLLO J. N. — Felipe Anguita y Lorenzo Dagnino Pastore. Aritmética 1er. año, 1 tomo encuadernado	„ 3.50
— Aritmética, 2º año, 1 tomo enc.	„ 3.50
— Algebra, 3er. año, 1 tomo enc.	„ 3.50
— Algebra, 4º año, 1 tomo enc.	„ 3.50
— Geometría, 1er. año, 1 tomo enc.	„ 3.—
— Geometría, 2º año, 1 tomo enc.	„ 2.50
— Geometría, 3er. año, 1 tomo enc.	„ 2.50
— Geometría del Espacio (4º año), 1 tomo enc.	„ 3.50
COBOS DARACT. — Historia Argentina, 1er. tomo, 1 t. enc.	„ 4.—
— Historia Argentina, 2º tomo, 1 t. enc.	„ 4.—
COTTINI E. H. — Tratado de Construcciones	„ 7.—
CHAROLA FLORENCIO. — Lecciones de Física Elemental	„ 4.—
DAUS F. A. — Nociones de Geografía General, Astronómica y Física, Asia y Africa, 1 tomo enc.	„ 4.—
DAGNINO PASTORE LORENZO. — El Universo, La Tierra y El Hombre, 1 tomo enc.	„ 6.50
— Estadística, 1 tomo enc.	„ 3.50
DIAZ DE GUIJARRO E. — Curso teórico práctico de Prosodia y Ortografía, 1 tomo enc.	„ 3.—
— Texto de lectura del curso teórico práctico de Prosodia y Ortografía, 1 tomo enc.	„ 1.50
DARQUIER H. y HASENBALG A. — Las trece bolillas de química, 1 tomo rústica	„ 1.50
GOURVILLE H. D. — The modern Handbook of English, 1º parte, 1 tomo enc.	„ 3.—
— The modern Handbook of English, 2º, 1 tomo enc.	„ 3.—
— The modern Handbook of English, 3º, 1 tomo enc.	„ 3.—
— Manuel Moderne du Français Parlé (Premier livre), 1 tomo enc	„ 3.—
JARA JUAN G. — Manual de lógica aplicada, 1 tomo enc.	„ 4.—
MARTONNE EMM. DE. — Compendio de Geografía Física (traducción del Sr. F. A. Daus), 1 tomo enc.	„ 5.—
PARENTE RICCIOTTI. — Gramática de la lengua italiana, 1er. y 2º curso (4º y 5º años), 1 tomo enc.	„ 5.50
PASSARELLI V. — Lecciones de historia Americana, 1 t. encuadernado	„ 2.50
PERALTA J. M. — Historia de las Civilizaciones Antiguas, 1 tomo enc.	„ 4.—
PIZZURNO CARLOS H. — Lecciones de Historia Argentina. (Epoca Colonial, 1492-1810), 1 tomo enc.	„ 4.—
POIRIER LALANNE. — Curso de Francés, 1er año, 1 t. enc.	„ 2.—
PORCEL CARLOS A. — Tratado de Contabilidad y Teneduría de libros, 1 tomo enc.	„ 5.—
RESUMEN de la Edad Media, Moderna y Contemporánea, 1 tomo para 2º año, enc.	„ 2.—
RESUMEN de Historia Americana y Argentina, 3er. año, 1 tomo rústica	„ 1.50
RESUMEN de Historia Americana y Argentina, 4º año, 1 t. rústica	„ 1.50
TORRES IBAÑEZ M. C. — Curso completo de pedagogía, 1 tomo enc.	„ 4.—
TRUCCO SIXTO E. — Elementos de Cosmografía, 1 t. enc.	„ 3.50