JUSTO M. DUCCO S. S.

FISICA

PARA LOS ALUMNOS DEL CURSO SECUNDARIO (NACIONAL, NORMAL, COMERCIAL E INDUSTRIAL)

PRIMERA PARTE

FISICA GENERAL – MECANICA ACUSTICA Y TERMICA

(Ilustrada con profusión de grabados originales)



DONACION DE Doctor

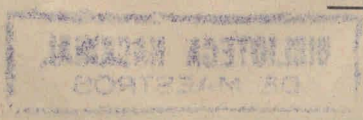
BIBLIOTECA NACIONAL DE MAESTROS

TIPOGRAFÍA Y LIBRERÍA DEL COLEGIO PÍO IX DE ARTES Y OFICIOS
ADOLFO BERRO, 4050 — BUENOS AIRES

Inv. 52658
24-5-90

Obsequio del Autor
a la Biblioteca Nacional
de Maestros.
9 Septbre 1937
P. Justo Ordoñez

ES PROPIEDAD
247 - 30 - 3 M



Aclaraciones

Al decidirnos a compilar el presente texto, nos hemos propuesto ofrecer a los alumnos una obra que reúna las siguientes condiciones:

1.º – REDACCIÓN CLARA, CONCISA Y EXACTA.

La *claridad*, considerada desde el punto de vista de la necesidad que tienen los alumnos, *no sólo de repasar*, sino también de ESTUDIAR POR PRIMERA VEZ conceptos que tal vez no llegaron a comprender en el aula, o que no tuvieron ocasión de recibir, ya sea por inadvertencia del catedrático, ya por distracción del alumno (cosa más común de lo que a veces se sospecha), o ya por ausencias forzosas, motivadas por enfermedades u otras causas.

La *concisión*, tiene por fin, más que todo, presentar un libro *que sirva de preparación al examen*.

Se han editado libros de Física muy estimables por su claridad y otras cualidades; pero fallan por su base: NO PREPARAN PARA EL EXAMEN.

En el texto *no se debe hacer pedagogía;* y los autores abusan de su autoridad cuando pretenden forzar al profesor a que siga un determinado método y procedimientos en la enseñanza de cualquier asignatura.

El texto debe prestarse a que se le use, *a pesar del método* que adopte el catedrático. **El texto no suple al maestro:** DEBE SERVIR DE COMPLEMENTO A SUS EXPLICACIONES. Y hay que apreciar tanto más un texto cuanto más libertad de acción deje al catedrático.

La *exactitud* de lenguaje y de conceptos no está reñida con la *claridad* y *concisión*, cuando el que redacta un texto, lo medita, en todas sus fases, y procura mantenerse continuamente en los rieles prefijados.

2.º – PRESCINDENCIA DE CUESTIONES DOCTRINARIAS.

Aquí nos referimos a la renuncia de *hacer escuela* en asuntos científico – filosóficos.

Es difícil dar con un autor que no aproveche su texto, para eliminar la posibilidad de que otros disientan con ellos en asuntos que los sabios andan discutiendo sin llegar a un acuerdo.

De aquí que el alumno que se prepara al examen con un texto determinado, corre riesgo de ser descalificado, NO PORQUE NO SEPA, *sino porque sabe las cosas bajo un aspecto muy diverso de como las juzga la intransigencia de algunos examinadores.*

Renunciando, pues, al puntillo de honor de poder decir: «*Yo pienso así*», puede un autor presentar los temas discutidos, *en una de sus fases más probables*, y luego llamar la atención del alumno sobre los diversos criterios que existen a ese respecto.

3.º – DESCARTE DE INDECISIONES.

Hay en cambio otros autores que caen en el extremo opuesto: SON ESCRUPULOSOS; y en medio del laberinto de opiniones, no ven mas senda que la ensortijada que contiene una síntesis o enumeración de todas ellas.

No se atreven a dar a los alumnos CONCEPTOS INEXACTOS, y se ven obligados a sustituir las *definiciones* por *descripciones interminables*.

En nuestra Geometría, bajo el epígrafe "**Algo de Pedagogía**", hemos descrito a estos escrupulosos, y hemos ponderado las fallas de su Metodología.

Aquí sólo nos resta decir que estos *antidefinicionistas*, han dado en tachar a sus contrarios de «DOGMATICISTAS».

En los definicionistas razonables, no hay tal espíritu de dogmatizar. Su lema se puede exponer así:

"Sabemos que muchas de las cosas que debemos enseñar, aun no están sancionadas por la generalidad de los sabios. Pero nuestros alumnos *deben aprenderlas de alguna manera*.

Y así como los sabios llegaron a la duda DESPUÉS DE HABER JUZGADO COMO CIERTOS LOS CONCEPTOS QUE AHORA JUZGAN COMO DUDOSOS O ERRÓNEOS, no hacemos ningún daño a los alumnos enseñándoles como *suficientemente cierto* lo que es *más probable* que su contrario. Y para no engañar a nuestros alumnos, les advertiremos CON OPORTUNIDAD que lo que dábamos como cierto, no pasa de ser *simplemente probable*.»

Hay otros antidefinicionistas que embrollan la enseñanza, teniendo presentes de continuo las excepciones que se oponen a la RIGIDEZ que, como *postulado*, ellos exigen que tengan las leyes y definiciones.

CUANDO UN CASO ES GENERAL, DEBE SER DEFINIDO, CON PRESCINDENCIA DE LAS EXCEPCIONES QUE COMPLICAN SU EXPOSICIÓN.

¡Ya llegará el momento en que podremos decir al alumno: «Aquella ley o definición, no contemplaba todos los casos posibles, sino tan sólo los más comunes»!

Nunca se debiera estudiar una excepción, hasta no haber asimilado la regla general.

Y aquí nos permitimos un ejemplo de esto que llamamos «*Escrúpulos de los sabios*»:

Nos referimos a la inacabable cuestión de la definición racional de *masa*.

De hecho aquí hay tergiversación de conceptos: «No porque la masa se pueda medir por el peso o por la aceleración, vamos a dejar de creer que la masa es *algo intrínseco a los cuerpos*: Si aceptamos, pues, *para comodidad de lenguaje o por convicción*, que la MATERIA ES ALGO REALMENTE DISTINTO DE LA ENERGÍA, ¿quién nos niega el derecho de *suponer* (hasta que se demuestre lo contrario) que: *masa es la cantidad de materia que hay en cada cuerpo, o en cada molécula o átomo?*»

Además es una aberración creer que es definición de una magnitud la difinición del sistema que se ha adoptado para medir dicha magnitud.

Decir que «masa es el cociente que se obtiene al dividir una fuerza por la aceleración que ésta produce en un cuerpo» es tan definición como decir que «temperatura es el incremento de dilatación cúbica que se produce en la columna mercurial del termómetro».

Si examinamos a fondo esta definición de masa, veremos que hemos definido una entidad valiéndonos de dos cosas extrañas a dicha entidad: a) La fuerza que produce la aceleración es extrínseca al cuerpo que posee la masa en referencia; b) La aceleración aparece en un momento dado: en cambio la masa existe antes que se produzca dicha aceleración. Además la aceleración puede crecer o decrecer, permaneciendo constante la masa.

¡Es que los sabios temen que algún día se demuestre que «la masa es una entidad aparente», como Graetz cree que ya está demostrado, y no quieren exponerse al ridículo con sus afirmaciones aprioristas!

No hay tal peligro, si se tiene en cuenta que ya se han mostrado aprioristas al suponer que las masas *gravítica* y *de inercia* eran MANIFESTACIONES DIRECTAS de la masa *física*, lo cual aun ahora es UN POSTULADO muy cómodo para iniciar la explicación de masa en una clase como las de nuestros Cursos Secundarios.

Seamos pedagogos, no sólo al ENSEÑAR, sino también al EXAMINAR; y desaparecerán ciertos escrúpulos *que nos hacen despreciar el criterio de otros catedráticos*, erigiéndonos en censores de la transigencia que ellos tienen con la idiosincracia del cerebro de los alumnos.

PLAN DE LA OBRA

1.° – Nos hemos propuesto satisfacer por completo a los siguientes programas: del Colegio Nacional (de Buenos Aires y de La Plata), de la Escuela Normal de Maestros, de la Comercial (de Buenos Aires y de La Plata) y de la Industrial de la Nación.

De modo que el texto deberá forzosamente contener detalles, y también asuntos, que no interesan sino a una parte de los alumnos para quienes se ha compilado.

2.° – No hallándose a menudo suficientemente eslabonados los diversos tópicos de cada programa, Y NO SIENDO DIGNITOSO PARA UN AUTOR, PRESENTAR AL PÚBLICO UN TEXTO CUYAS PARTES CAREZCAN DE ILACIÓN, fué necesario llenar *las muchas lagunas de los programas* con materia que no se exige directamente en ellos.

3.° – Como el profesor de Física no puede someterse a que sus alumnos NO LE ENTIENDAN O NO ASIMILEN CONVENIENTEMENTE SUS EXPLICACIONES, por culpa de la *mala preparación matemática* con que llegan a sus clases los alumnos (debido a muy variadas causas) fué menester desarrollar, como si fuera asunto físico, un conjunto de conocimientos matemáticos que en Física entran en la categoría de *"conocimientos instrumentales"*.

4.° – En el desarrollo de las lecciones hemos procurado combinar el orden *científico* con el *didáctico*, sacrificando a menudo el primero al segundo, a fin de satisfacer a principios pedagógicos tales como:

a) Pasar de lo simple a lo compuesto, de lo conocido a lo desconocido de lo concreto a lo abstracto.

b) Relacionar las causas con sus efectos.

c) Correlacionar series de conocimientos conjugados (tales como la resonancia acústica, la selectividad retiniana del color y la sintonización hertziana).

d) Volver interesante la enseñanza, diseminando los conocimientos abstrusos en un campo variado de conocimientos atrayentes.

5.° – Por eso hemos mezclado la *Física general* con la *Mecánica*, aun exponiéndonos a dejar algunas lecciones, como si estuviesen dislocadas o como si se propusieran detener el curso lógico de *sucesión de asuntos*.

Y aquí permítasenos que critiquemos a los que, pagados de la importancia innegable que tiene en Física la *Metrotecnia* o *arte de medir*, se pasan los primeros meses del curso escolar inspirando en sus alumnos repugnancia a una asignatura tan interesante como la Física, por culpa del prurito antipedagógico de NO QUERER QUE EL ALUMNO TRABAJE, HASTA QUE NO ESTÉ DISCIPLINADO PARA EL TRABAJO.

Trabajando con gusto se aprende mejor a trabajar que cuando se trabaja a desgana.

Se aprende más pronto a nadar nadando, que manoteando el aire en natación ficticia.

Enséñese al alumno a medir, mientras experimenta, aunque las primeras mediciones adolezcan de defectos.

Déjese el *esferómetro*, el *nonio* y el *catetómetro* para más tarde, y comiéncese la Física métrica por las manipulaciones con *palancas*, *dinamómetros* y *balanzas:* allá el alumno recibe una inyección de opio, y acá MIDE, mientras SE DIVIERTE Y APRENDE.

Preguntad en Mayo a los alumnos de ciertos profesores: «*¿Qué tal la Física?*»; y os contestarán espontánea y unánimemente: «*Ya nos tienen secos* con el nonio, el calibre, el metro patrón y la caja de pesas».

Otros os dirán: «Antes creíamos que el metro era una medida muy conocida; y ahora ya estamos aburridos de oir por centésima vez que: — *El metro – patrón es una barra de platiniridio que se halla en una caja fuerte de una academia científica de Francia*».

Otros añadirán: «*Nuestro profesor ya nos ha hecho gastar dos o tres "blok"*» *con* "TRABAJOS PRÁCTICOS", *que consisten en* COPIAR del libro las figuras del *pálmer*, de la *probeta graduada* conteniendo una piedra y agua, del *reloj de arena*, de la *balanza de Joly*, de la *regla de cálculo* y de muchas otras cosas por el estilo».

¡A cuántas aberraciones ha llevado el capricho de transformar a los alumnos en máquinas medidoras! — DE HECHO SE LES HACE MEDIR MUY POCO; PERO SE LES OBLIGA A APRENDER MECÁNICAMENTE LA LOCALIZACIÓN DE LOS RESORTES, TOPES, ÍNDICES Y TORNILLOS DE CADA APARATO DE MEDICIÓN.

¿Y eso es Física?

¡PUES, DICEN QUE SÍ!

6.° – Decididos a no escatimar tiempo y trabajo en la compilación del presente texto, y con el fin de que no desmerezca ante sus similares, tanto en *practicidad* cuanto en *autoridad*, lo hemos compilado consultando continuamente las siguientes obras:

a) O. D. Chwolson: TRATADO DE FÍSICA. *Hemos tomado a este autor como base de nuestro trabajo*, siendo, como es, el que reúne las siguientes cualidades, cuyo conjunto nos fué difícil encontrar en los demás de nuestra biblioteca: *ciencia profunda y moderna, claridad y sencillez de exposición,* POSITIVISMO SERENO, *practicidad en la selección y manejo de las hipótesis*

y teorías, y respeto a la opinión ajena cuando coloca en el fiel de la balanza doctrinas filosóficas que tambalean ante los resultados de la experimentación.

b) H. Poincaré: La Ciencia y la Hipótesis — La Lumiére. — Les rapports de la matiére et de l'éther

Como matemático que es Poincaré, insinúa en sus obras un *excepticismo científico mitigado*, que contrasta con el positivismo de Chwolson; sin embargo ambos llevan a una misma conclusión, tal vez sin advertirlo, cosa que hacemos notar en la síntesis que de "La ciencia y la hipótesis", insertamos al final de este primer Curso.

c) D. Nys: *Cosmologie* ou *E'tude phylosophique du monde inorganique.* — Obra preciosa, que además de exponer clara y detalladamente todas las teorías referentes a la materia, energía y éter, presenta una crítica mesurada y transigente de todas ellas.

d) H. Schoentjes: Cours de Physique experimentale. — M. Bresse: Cours de Mécanique et Machines. — Teófilo Isnardi: Física — W. Watson: Curso de Física — Prácticas de Física. — Orestes Murani: Física. — Eduardo Fontserré: Cinemática. — Bmé. Feliú y Pérez: Curso de Física experimental y aplicada. — Loyarte y Loedel: Física. — E. Burat: Précis de Mécanique. — Jäger: Física teórica. — Hans Polster: Cinemática. — H. F. B. Muller Berslau: Estática gráfica, aplicada a las construcciones. — P. Henckel: Estática gráfica. - Luis B. Laporte: Estática gráfica. — Ch. Maurain: Los estados físicos de la materia. — M. Schlick: Teoría de la relatividad. — Boucher: Ensayo sobre el hiperespacio. Stallo: La materia y la física moderna. — Langevin: Les grains d'électricité. — L'évolution de l'espace et du temps.— La theorie du rayonnement et les quanta.— Maxvell: La acción a distancia.- Ab. Moreux. El relativismo de Einstein. — Enrique Herrero Ducloux: La Ciencia y sus grandes problemas. — Flammarión: La Atmósfera. — L. Fontaine: L'Hydraulique agricole et les Moteurs hydrauliques. — José Mariano Vallejo: Compendio de Matemáticas puras y mixtas. — F. Reuleaux: Le constructeur.—Cinemática y Construcción — Torquato Perdoni: Le forze idrauliche dell'Italia continentale. — A. Dumas: Étude théorique et pratique sur les barrages — reservoirs. — Pío Checchi: Corso teórico pratico sulla costruzione dei ponti metallici.- F. Díaz Rivero: Cuestiones de mecánica pura. — E. Aragón: Resistence des matériaux appliquée aux constructions. — E. Dacremont: L'electricité. — Deschanel: Física. — Carlos E. Gibson: La Ciencia al día. — La electricidad al día. — Ganot Maneuvrier: Tratado elemental de Física. — Hanns Guenther: El reino de las ondas eléctricas. — Galdino Negri: Velocidad de propagación de las ondas sísmicas. — Pablo Sans y Guitart: La locomotora en acción (*Problemas relativos al cálculo de potencia, velocidad etc.*). — L. A. Barré: Movimientos de tierras, fundaciones, andamios, talleres, etc. — Jorge Duclout: Lecciones de teoría de la elasticidad.

Sin citar la colección de textos de Física que se están usando en nuestros Cursos Secundarios.

e) El acopio de artículos sobre asuntos físicos, que hay diseminados en las siguientes revistas: ANALES DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA (colección desde 1890). — CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LAS CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS, *de la Universidad de La Plata* (colección desde 1914). — LA INGENIERÍA, *del "Centro Nacional de Ingenieros"* (colección desde 1906). — REVISTA TÉCNICA, *de Buenos Aires* (colección desde su fundación, 1895). — INGENIERÍA INTERNACIONAL, *de Nueva York* (colección desde 1920). — CHIMIE ET INDUSTRIE, *de París* (desde 1922). — GIORNALE DI CHIMICA INDUSTRIALE ED APPLICATA, *Milán-Roma* (desde 1922). — LA HOUILLE BLANCHE, *Revue générale des forces hydro-électriques* (años 1902-04). — ENGINEERING: *An illustrated weekly journal*, (Londres: años 1877-82) — LA SCIENCE ET LA VIE, *de París* (1913—14) — ELECTRICAL EXPERIMENTER, *science and invention*, (Nueva York: 1918-19). — POPULAR MECHANICS MAGAZINE, *Chicago* (colección desde 1912). — LA NATURE, *París* (colección desde 1905). — MONITEUR SCIENTIFIQUE, *París* (1909-19). — REVISTA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICAS ELEMENTALES, *Buenos Aires* (1920-24). — IBÉRICA (desde 1918). — EL PROGRESO DE LA INGENIERÍA, *de Berlín* (1920-23)

f) Un variado caudal de datos y observaciones que el autor ha ido recogiendo en los 19 años que transcurrieron desde que inició su cátedra de Física en la Escuela Normal incorporada de Bernal.

7.° – Dado el trabajo que importa *una selección meditada* del material que se supone apto para la capacidad intelectual de los alumnos, y *el estudio y redacción* de la forma más apropiada a dicha capacidad, damos por anticipado que esta obra no alcanzará a satisfacer el desiderátum de todos los profesores de enseñanza secundaria, pero creemos no equivocarnos al afirmar que muchos de los tópicos de este libro agradarán por su originalidad y practicidad.

Por lo que respecta a la redacción, aunque nos gloriamos de ser sumamente independientes en nuestro modo de ver y obrar, no tenemos reparo en transcribir, con sus mismas palabras, pensamientos enteros de otros autores, teniendo en cuenta que *lo que ya ha sido bien expresado por otros, es ocioso pretender exponerlo con palabras propias* por vanos temores de que alguien atribuya a plagio lo que es un simple acatamiento a los méritos ajenos.

No por eso creemos que el texto deba ir plagado de notas que indiquen la fuente de donde se ha extraído cada uno de los asuntos que no son originales. Aunque, siempre que lo juzguemos conveniente, satisfaremos la curiosidad del lector, aun en este particular.

Buenos Aires de 1930.

El Autor.

FISICA GENERAL

I° – Conocimientos primordiales

1.° - Materia, sustancia y cuerpo.

1. – Para cada hombre existen dos mundos, uno **externo** y otro **interno.**

MUNDO EXTERNO *es el conjunto de todo lo que impresiona a nuestros sentidos.*

MUNDO INTERNO *es el conjunto de todo lo que sucede en el interior de cada hombre, en forma tal, que no pueda ser conocido por otro hombre.*

Ej.: Suena el timbre o campanilla, y yo me doy cuenta de ese hecho.

La campanilla pertenece al mundo externo; los golpes de su martillito se efectuaron en el mundo externo; la campanilla vibró, y en el aire se produjeron ondas, etc. Hasta aquí estamos en el mundo externo.

En mi oído, en mi cerebro y en mi conciencia acontecieron hechos que tradujeron las ondas vibratorias, en lo que llamamos SONIDO. Es este un proceso del mundo interno.

2. – En Física estudiamos tan sólo el mundo externo. Y al agente de nuestra sensación, lo llamamos MATERIA.

En nuestro ejemplo, la materia está representada por las piezas del timbre.

3. – **Materia** es todo lo que puede impresionar a nuestros sentidos.

Ej: la tierra, el carbón, el hierro, el agua, el aire.

4. – La materia impresiona a nuestros sentidos: DIRECTA O INDIRECTAMENTE.

a) DIRECTAMENTE, como cuando vemos un trozo de carbón, oímos el choque de una piedra arrojada a un vidrio, gustamos un terrón de azúcar, etc.

b) INDIRECTAMENTE, cuando notamos los efectos que una

porción insensible de materia, produce sobre otra materia sensible.

Ej.: Vemos tremolar una bandera, y de ello deducimos que hay viento, *o sea, que: el* AIRE *(materia invisible) está moviéndose y chocando con la bandera.*

5. – Sustancias son las diversas clases de materia.

Así, el ORO *es una sustancia distinta de la* PLATA; *y ambas son sustancias muy distintas del* CARBÓN, *y aun más distintas del* AGUA.

6. – Cuerpo es cualquier porción determinada de materia

Ej.: un tintero, una piedra, el cuerpo de cada animal o de cada planta..

7. – Hay cuerpos que están formados por una sola sustancia: son cuerpos **homogéneos.**

Ej.: una botella, *una* copa..., *cuya sustancia es el vidrio.*

Y hay cuerpos que están formados por la reunión de varias sustancias: son cuerpos **heterogéneos.**

Ej.: el cuerpo humano, *que consta de carne, hueso, sangre y otras muchas sustancias.*

La distinción que hemos hecho entre *materia, sustancia* y *cuerpo,* es algo en que convienen todos los naturalistas modernos. Pero los nombres "MATERIA", "SUSTANCIA" y "CUERPO", tienen muy diverso significado, en boca de unos u otros autores, debido a la falta de rigor que la mayoría tienen en el manejo del léxico.

Advertimos, pues, que:

a) Para unos autores, lo mismo da decir *materia* que *sustancia.*

b) Otros confunden deplorablemente las palabras *sustancia* y *cuerpo;* y hasta hay algunos que usan indistintamente las tres palabras, dándoles ora un significado, ora otro; ¡con toda tranquilidad!

c) Los que confunden las palabras *materia* y *sustancia,* generalmente llaman CUERPO QUÍMICO a lo que nosotros hemos denominado *sustancia;* y CUERPO FÍSICO a lo que hemos llamado simplemente *cuerpo.*

2.° - Propiedades de la materia.

8. – Propiedades de la materia son los distintos modos de manifestarse a nuestros sentidos.

Así el COLOR *del oro sirve para distinguirlo de la plata y del carbón. Estas tres sustancias generalmente las vemos en* ESTADO SÓLIDO, *mientras que el agua en igualdad de condiciones es* LÍQUIDA.

9. – En la materia podemos distinguir cuatro clases de propiedades: GENERALES, CARACTERÍSTICAS, ESPECÍFICAS y ACCIDENTALES.

Son **generales** las propiedades comunes a todas las sustancias.

Ej.: la extensión, la pesantez, la divisibilidad.

Son **características** las propiedades que sirven para distinguir una sustancia de otra.

Ej.: el color, el sabor, etc.

10. – Son propiedades **específicas** las que pertenecen *exclusivamente* a cada sustancia.

Ej.: el agua (a la presión ordinaria) se evapora a los 100°, y se solidifica a 0°.

11. – Es difícil determinar cuales son las propiedades específicas de cada sustancia.

Sin embargo:

Cada sustancia tiene una propiedad ESPECÍFICA ESENCIAL a saber: *su constitución íntima*, que denominamos: CONSTITUCION QUÍMICA.

12. – Son **accidentales** o VARIABLES las propiedades que no influyen en la distinción de las sustancias.

SIRVEN TAN SÓLO PARA DISTINGUIR UN CUERPO DE OTRO.

Ej.: la forma, el tamaño, el lugar que ocupa cada cuerpo.

13. – *Podemos también decir que:*

Propiedades son las relaciones que pueden tener los cuerpos entre sí o con nuestros sentidos.

14. – Ahora podemos distinguir mejor entre SUSTANCIA y CUERPO.

Si el azúcar *es una* SUSTANCIA, *un* terrón *de* azúcar es un CUERPO.

El terrón tendrá tamaño y forma; y si lo trituramos, obtenemos muchos cuerpecitos diminutos, o granitos, *que se distinguen del terrón primitivo por su tamaño y forma.*

Al triturar el azúcar, hemos destruido el cuerpo, pero no la sustancia; puesto que cada granito de azúcar sigue siendo blanco y dulce.

15. – Una *propiedad accidental* de los cuerpos, sobre la que llamamos la atención de los alumnos es la de OCUPAR UN LUGAR DETERMINADO.

3.° - Fenómenos.

16. – **Fenómeno** es cualquier variación de las propiedades de un cuerpo.

Ej.: La caída de una piedra.

La ocupación de lugar *es una propiedad de los cuerpos; por lo tanto el* cambio de lugar *es un fenómeno.*

17. – Debemos advertir que las propiedades *generales* de la materia son *inmutables;* por consiguiente no puede haber fenómenos que alteren estas propiedades.

18. – Hay tres clases de fenómenos: FÍSICOS, QUÍMICOS y ALOTRÓPICOS.

a) Son fenómenos **físicos** o ACCIDENTALES los que alteran tan sólo las propiedades *variables* de los cuerpos.

Ej.: el movimiento de un cuerpo, la ruptura de un vidrio, la mezcla de sal y azúcar.

b) Son fenómenos **químicos** o SUSTANCIALES los que alteran las propiedades *específicas.*

Ej.: la combustión del carbón o del papel, la transformación del hierro en herrumbre, la putrefacción de la carne.

c) Se han denominado fenómenos **alotrópicos** ciertos cambios íntimos que se producen en las sustancias, dando por consecuencia, cambios en sus propiedades *características.*

Ejs.: El carbono *es una sustancia que se presenta en tres formas* ALOTRÓPICAS: *diamante, grafito y carbón.*

El fósforo, *tiene también tres formas* ALOTRÓPICAS: *blanco, rojo y pardo.*

El paso de una a otra forma *alotrópica,* es un FENÓMENO ALOTRÓPICO.

4.° - Ciencias físico-químicas.

19. – Hay tres ciencias hermanas que estudian las tres clases de fenómenos sobre-expuestos: la FÍSICA, la QUÍMICA y la FÍSICO-QUÍMICA.

Física es la ciencia que estudia: a) las propiedades *generales y accidentales* de la materia; b) los fenómenos físicos.

Química es la ciencia que estudia: a) las propiedades específicas y características de cada sustancia; b) los fenómenos químicos.

Físico – química o QUÍMICA GENERAL es la ciencia que estudia: a) las propiedades *específicas* y *características* en general; b) los fenómenos físicos que tienen relación directa de *causa* o *efecto* con los fenómenos químicos; y c) los fenómenos alotrópicos.

Hasta hace poco la *Química general* se consideró como parte integrante de la Física. Pero los trabajos de Van der Waals, Guldberg Waage y Ostwald demostraron la necesidad de desdoblar la Física, separando de ella un material que se hallaba en continuo contacto con la Química.

La nueva ciencia así formada, se llamó primeramente *Físico – química*, y presentemente se llama *Química general*.

5.° - Los seres.

20. – Ente o SÉR es todo lo que de algún modo existe.

Dios, los hombres, los animales, las plantas, una mesa, una piedra, un libro, etc.

21. – Los seres se dividen en: REALES, HIPOTÉTICOS y FICTICIOS.

Reales son los que existen en el mundo externo.

Dios, los hombres, la mesa, etc.

Hipotéticos o SUPUESTOS son los que no sabemos si existen en el mundo externo, o si tan sólo se hallan en nuestra imaginación.

El éter.

Ficticios o FABULOSOS son los que solamente se hallan en nuestra imaginación, o sea, en el mundo interno.

Don Quijote, el Cuco, Perogrullo, el dios Mercurio, la diosa Vesta.

Los seres ficticios, se llaman también MITOS.

22. – Estas tres clases de seres se dividen en: CONCRETOS y ABSTRACTOS.

Concretos son los que tienen existencia propia sin formar parte integrante y necesaria de otro sér.

Los ejemplos dados hasta ahora.

Seres **abstractos** son diversas propiedades o manifestaciones de los seres concretos, los cuales se presentan a nuestra imaginación como si fuesen verdaderos seres.

El color, el tamaño, la forma, la alegría, el día, la noche.

Nadie niega, por ej., que el color es algo REAL; *pero sabemos que el color no puede subsistir solo: debe hallarse sobre un cuerpo o sea sobre un sér determinado.*

Los seres abstractos se llaman también ACCIDENTES de los seres concretos.

23. – Los seres concretos se dividen en: MATERIALES y ESPIRITUALES.

Materiales o NATURALES son los que constan de materia.

Espirituales o SOBRENATURALES son los que no están formados de materia.

O sea, son los que no se sujetan al análisis o estudio que hacemos basándonos en la mutua impresionabilidad de la materia.

24. – Además, los seres concretos, pueden ser: VIVOS o INERTES.

Vivos son los que actúan espontáneamente, sin empuje extraño.

Dios, los hombres, los animales, las plantas.

Inertes o **muertos** son los que actúan solamente cuando reciben un empuje extraño.

La mesa, el tintero, las piedras.

Todos los seres espirituales que conocemos por revelación son vivos: *Dios, los ángeles.*

<table>
<tr><td rowspan="3">Seres</td><td rowspan="3">REALES
HIPOTÉTICOS
FICTICIOS</td><td rowspan="2">Concretos</td><td>Espirituales</td><td>Vivos</td></tr>
<tr><td>Materiales</td><td>Vivos
Inertes</td></tr>
<tr><td colspan="3">Abstractos o accidentes</td></tr>
</table>

25. – La palabra **cosa** sirve para indicar la generalidad de los seres, exceptuando *generalmente* los seres vivos.

6.° - La naturaleza y las ciencias naturales.

26. – El conjunto de todos los seres naturales, recibe el nombre de NATURALEZA, MUNDO UNIVERSO o ESPACIO, según como se lo considere.

Lo llamamos **naturaleza** *cuando lo consideramos como conjunto de los seres naturales.*

Lo llamamos **universo** *cuando lo consideramos como conjunto de los astros y del éter que enlaza a éstos.*

Lo llamamos **espacio** *cuando lo consideramos como un* mar de éter en el que nadan las demás cosas.

El espacio geométrico y físico no difieren esencialmente entre sí; pero es bueno advertir que la Física estudia el espacio *tal cual es* con sus diversas sustancias, y con la distribución real de dichas sustancias; mientras que la Geometría considera el espacio como constituido por una sustancia única, homogéneamente distribuida. Los cuerpos para el geómetra son porciones *visibles* de esa sustancia única e *invisible* que constituye el espacio.

27. – Dos grupos de ciencias estudian la naturaleza: las CIENCIAS NATURALES y las CIENCIAS GEOMÉTRICAS.

Las **Ciencias Naturales** estudian la naturaleza en *concreto*, o sea: así como es.

La **Geometría** y sus ciencias afines o derivadas, estudian la naturaleza, haciendo *abstracción* de las sustancias que la componen.

Entre las ciencias afines a la Geometría, citaremos la *Astronomía matemática.*

28. – Las Ciencias Naturales se dividen en dos grupos: las ESPECULATIVAS y las DESCRIPTIVAS.

Especulativas son la que estudian las propiedades de la materia, y la acción mutua de las sustancias y de los cuerpos.

Son la Física, la Química y la Físico – química.

Descriptivas son las que estudian los seres de la naturaleza: su forma (externa e interna), su acción y demás propiedades, no como cuerpos en general, sino *como seres en particular.*

Su conjunto forma la HISTORIA NATURAL.

29. – La Historia Natural se puede dividir en:

Astronomía (estudio de los astros).

Cosmografía (estudio de la Tierra con relación a los demás astros, especialmente con relación al sol y demás planetas del sistema).

Geología (estudio de la Tierra como cuerpo).

Geografía física (estudio de la superficie de la Tierra).

Meteorología (estudio de la atmósfera y de los fenómenos particulares que en ella se producen).

Mineralogía (estudio particular de los seres inertes que constituyen la corteza de la Tierra).

Biología (estudio de los seres vivos).

La Biología se divide en:
Zoología (estudio de los animales) y
Botánica (estudio de las plantas).

CIENCIAS NATURALES Estudian la naturaleza en concreto.	a) ESPECULATIVAS (estudian la materia, las sustancias y los cuerpos en general).	**Física** QUÍMICA FÍSICO - QUÍMICA
	b) DESCRIPTIVAS o HISTORIA NATURAL (Estudian los seres naturales en particular).	ASTRONOMÍA COSMOGRAFÍA GEOLOGÍA GEOGRAFÍA FÍSICA METEOROLOGÍA MINERALOGÍA BIOLOGÍA (1)

(1) Zoología y Botánica.

7.° - Lugar que corresponde a la Física en la clasificación de las Ciencias.

30. – Con lo que se ha dicho anteriormente, queda satisfecha esta pregunta que figura en varios programas.

Podemos sintetizarlo así:

La Física es una de las ciencias que estudian la naturaleza.

Debido a su objeto, forma con la Química y la Físico-Química el grupo de *Ciencias Naturales especulativas*, cuyo fin es estudiar la materia, las sustancias y los cuerpos en general (sus propiedades y su acción mutua).

En las Ciencias Naturales existen dos grupos de Ciencias, las *especulativas* (entre las que se halla la Física) y la *Historia Natural*.

Forman parte de la Historia Natural la Astronomía..... y la Biología.

31. – Para terminar con la localización de la Física añadiremos que La *Geometría* es su ciencia hermana, porque la diferencia esencial entre ambas se halla en que la Física estudia los cuerpos con *su sustancia propia*, y la Geometría los estudia *con abstracción de su sustancia*.

8.° - Relación de la Física con las demás ciencias artes e industrias.

32. – Al hablar de la localización de la Física en el conjunto de las demás ciencias, ya se ha satisfecho en parte a esta otra pregunta.

Pero éstas eran relaciones de CLASIFICACIÓN. *Falta ahora hacer ver las relaciones de* DEPENDENCIA.

33. – *Antes de satisfacer a esta pregunta, hay que definir, qué se entiende por* CIENCIA, ARTE *e* INDUSTRIA, *hablando en sentido estricto.*

Ciencia es el estudio de un ente o conjunto de entes, con el fin de llegar a conocer sus propiedades y sus relaciones con los demás entes.

La *Zoología* es la ciencia que estudia los animales.

La *Zoografía* es la parte de la Zoología que describe la conformación de cada grupo de animales.

Arte es el estudio y práctica de los medios más propios para conseguir un fin determinado.

La *Zootecnia* es el arte de criar y perfeccionar los animales.

Industria es la explotación de una o más artes con el fin de lucro.

La *Ganadería* es la aplicación de la Zootecnia y de otras muchas artes al cuidado del ganado.

Es digno de notarse sobre el proceso de formación de muchos nombres de ciencias y artes.

Los nombres de ciencias a menudo terminan en *logía* o *grafía;* y los de artes en *tecnia* o *técnica.*

Además, los nombres que terminan en *logía*, indican ciencias más profundas que sus correspondientes con nombres terminados en *grafía.*

GEOLOGÍA, ciencia que estudia la estructura de la Tierra.
GEOGRAFÍA, ciencia que describe su superficie.

En la práctica podemos decir que:

....*logía* = estudio de..
....*grafía* = descripción de....
....*tecnia* = arte de....

34. – Hay ciencias y artes que se relacionan con la Física por haber derivado de ella.

Tales son entre las ciencias, la *Astronomía* y la *Química*, gran parte de la *Geología* y parte de la *Mineralogía;* y entre las artes, la *Mecánica* (arte), la *Hidráulica* (arte), la *Aeronáutica*, la *Calefacción*, el arte de los Oculistas (que podríamos llamar Oftalmotecnia), la *Electrotecnia*, la *Telegrafía*, la *Telefonía*, la *Balística*, etc.

Y todas las ciencias, artes e industrias están continuamente recurriendo a la Física y a la Geometría en forma tan diversa que, se puede afirmar que la Física y la Geometría son las dos ruedas maestras del complicado mecanismo del saber y actividad humanos.

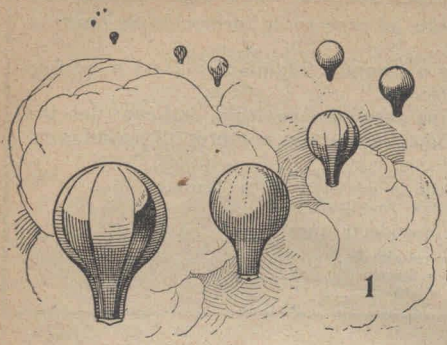
II.º- Materia, energía y éter.

1.º – Concepto objetivo de "punto".

35. - Nos formamos idea de lo que es un **punto**, contemplando un objeto que se aleja de nuestra vista (fig.1).

El cuerpo va reduciendo su tamaño, y confundiendo su forma, hasta que... desaparece.

Cuando el cuerpo ha reducido su tamaño a la menor expresión, podemos decir que ES UN PUNTO MATERIAL.



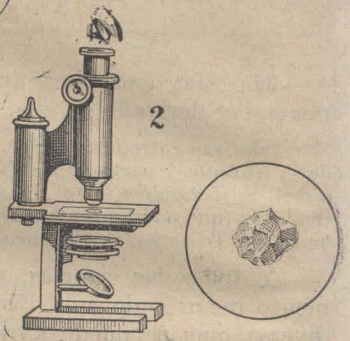
1

36. – Y como en Física, todo lo que se estudia, es materia, podemos con todo derecho decir que:

Punto es un cuerpo sin extensión apreciable. (1).

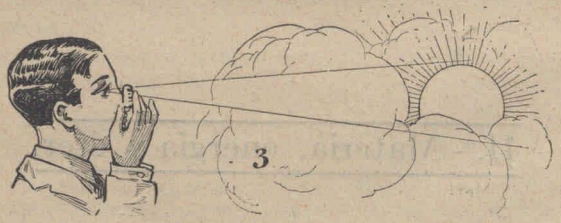
37. – TODO ES RELATIVO EN ESTE MUNDO.

Así, un granito de polvo que se ve caer sobre la ropa, es un PUNTO para nuestros ojos; pero si lo miramos con un microscopio, tiene *extensión* y *forma* bien apreciables (fig. 2).



2

Un pedazo de tiza colocado a dos dedos del ojo, nos tapa el sol: es un cuerpo con extensión más que apreciable (fig. 3).



3

Pero el mismo pedazo de tiza, arrojado a unos veinte o treinta metros, ya pasa a ser para nosotros un PUNTO.

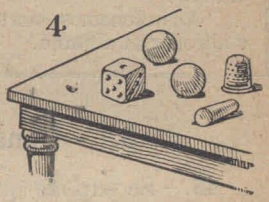
Las estrellas son cuerpos muchísimo más grandes que la Tierra; y sin embargo, como se hallan a enorme distancia de ella, aparecen a nuestra vista como PUNTOS LUMINOSOS.

(1) Al afirmar que «PUNTO *es un cuerpo*», no nos desentendemos de las abstracciones de la *Geometría pura:* tan sólo nos permitimos concretizar el concepto de punto, para los fines que se propone la Física.

2.° - Los cuerpos puntuales.

38. – Cuerpos **puntuales** o PUNTIFORMES son los que tienen extensión despreciable, y que en la práctica se pueden considerar como puntos.

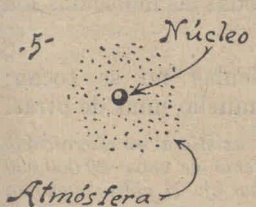
En la clase de Física podemos considerar como puntos, las bolitas, los dados, los trozos de tiza, etc. (fig. 4); por lo tanto son CUERPOS PUNTUALES.



39. – Y en la Física superior, son CUERPOS PUNTUALES, aquellos que pertenecen a un sistema cuyas dimensiones son enormes en comparación con el tamaño de dichos cuerpos.

Por ej., en Astronomía, al estudiar el movimiento de los astros, *se considera a éstos como verdaderos puntos.*

40. – En la práctica, siempre que nos conviene, consideramos como *puntos*, cualesquiera cuerpos, aunque no tengan las condiciones anteriormente expuestas.



Y en tal caso, por medio de una ficción, consideramos que dichos cuerpos constan de un núcleo material *o* PUNTO DE REFERENCIA *rodeado de una* atmósfera visible, pero inmaterial, *que no influye en el hecho que estamos considerando (fig. 5).*

Habrá casos en que nos convendrá considerar como núcleo material de los cuerpos una de sus *líneas* o *superficies.*

41. – Más adelante veremos que generalmente se considera como *núcleo material*, el CENTRO DE GRAVEDAD del cuerpo. Pero hay muchos casos en que es más práctico tomar por *núcleo* un punto cualquiera, con tal que sea bien definible.

42. – Como hay casos en que necesitamos advertir en qué forma consideramos a los cuerpos, usaremos las expresiones:

a) CUERPO PUNTUAL o *puntiforme*, cuando recurrimos a la comparación que acabamos de exponer,

b) CUERPO REAL, cuando renunciamos a dicha comparación.

Cuando decimos simplemente "CUERPO" *hay que deducir su significado del texto en que se halla dicha palabra.*

Esta consideración es de suma importancia; puesto que así usamos de la palabra *cuerpo*, donde la escrupulosidad de algunos científicos introdujo la frase molesta *"punto material"* o su equivalente *«cuerpo puntual»*.

En el presente texto se recurrirá a dichas dos frases *solamente cuando hay verdadero peligro de producir confusión en la cabeza del alumno.*

Abandonemos ciertas sutilezas que no sirven más que para embrollar al alumno.

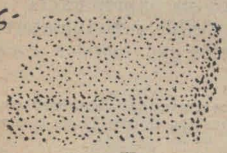
3.° - Constitución de la materia.

43. – Se supone que cada cuerpo es una asociación de numerosos *puntos materiales*, llamados MOLÉCULAS.

44. – **Molécula** es la menor porción que podemos obtener de cada sustancia.

Así, el terrón más pequeño que se pudiera obtener de azúcar, es la molécula de azúcar. *La gota más pequeña que se pudiera obtener de agua,* es la molécula de agua.

45. – En las sustancias *homogéneas*, todas las moléculas son iguales.



46. – Las moléculas no se tocan; antes bien, distan mucho unas de otras.

De modo que, si existiera un microscopio que produjese un aumento de unos 20.000.000 diámetros, veríamos, por ej. el vidrio como en la fig. 6.

47. – Pero si el microscopio tuviera más aumento aún, notaríamos que cada molécula es una asociación de puntos más pequeños, llamados ÁTOMOS.

Atomos son porciones sumamente pequeñas de materia, que, asociándose en formas diversas, constituyen las moléculas.

48. – En las moléculas los átomos no se tocan.

Cada molécula es, pues, como un sistema planetario, con su SOL y sus PLANETAS, a menudo con SATÉLITES, y a veces también con COMETAS.

Estos astros archimicroscópicos que constituyen las moléculas, son los ÁTOMOS.

Cada molécula de agua está formada por tres ÁTOMOS: uno de *oxígeno*, que es el sol, y dos de *hidrógeno*, que són los planetas (fig. 7).

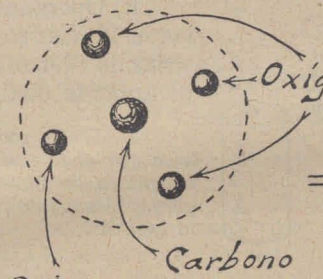
Cada molécula de mármol está formada por cinco ÁTOMOS; uno de carbono, que es el sol, siendo cuatro sus planetas (3 átomos de oxígeno y 1 átomo de calcio).



= Agua = H_2O

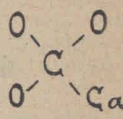
H-O-H

-7-



CO_3Ca

= Mármol



49. – Las moléculas pueden ser: HOMOGÉNEAS y HETEROGÉNEAS.

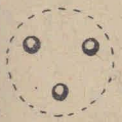
Molécula **homogénea** es la que está formada por varios átomos iguales.

Así la molécula de oxígeno, *está formada por dos átomos iguales, llamados "átomos de oxígeno".*



= Oxígeno : O_2

-8-



= Ozono : O_3

La molécula de ozono *está formada por tres átomos de oxígeno (fig. 8).*

Molécula **heterogénea** es la que está formada por átomos diferentes.

La molécula de agua, y la de mármol, son heterogéneas (fig. 7).

50. – Atendiendo a la constitución de las moléculas, las sustancias se dividen en: SIMPLES y COMPUESTAS.

Son sustancias **simples** las que constan de moléculas homogéneas.

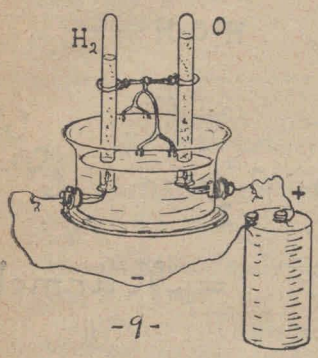
Ej.: el oxígeno, el hidrógeno, el hierro, la plata, el oro.

Son sustancias **compuestas** las que constan de moléculas heterogéneas.

Ej.: el agua, el mármol, el vidrio.

51. – En la práctica se conoce si una sustancia es *simple* o *compuesta* por la propiedad siguiente:

a) Por más operaciones o experimentos que se efectúen con una sustancia simple, nunca se puede llegar a obtener de ella otra sustancia.



-9-

Así, por más trabajos que hagamos con un trozo de oro, nunca sacaremos de él, azufre, cobre, oxígeno, ni cualquier otra sustancia.

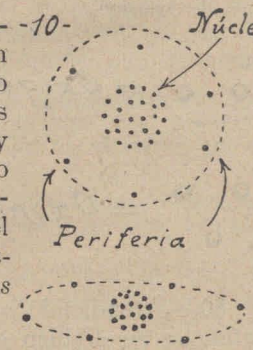
b) Operando debidamente con las sustancias compuestas, podemos sacar de ellas otras sustancias completamente distintas.

Haciendo pasar una corriente eléctrica por agua acidulada, descomponemos el agua en dos gases: hidrógeno y oxígeno, porque el agua es una sustancia compuesta (fig. 9).

4.° - Constitución de los átomos.

52. – Hasta hace medio siglo se suponía que el átomo era la menor porción que se podía obtener de materia; pero las experiencias iniciadas por CROOKES en 1879, y proseguidas por PERRIN y THOMSON, demostraron que todo átomo es también un sistema planetario, formado por un *sol* o *núcleo* al rededor del cual están girando, *en vertiginosa carrera*, uno o muchos *planetas llamados* ELECTRONES (fig. 10).

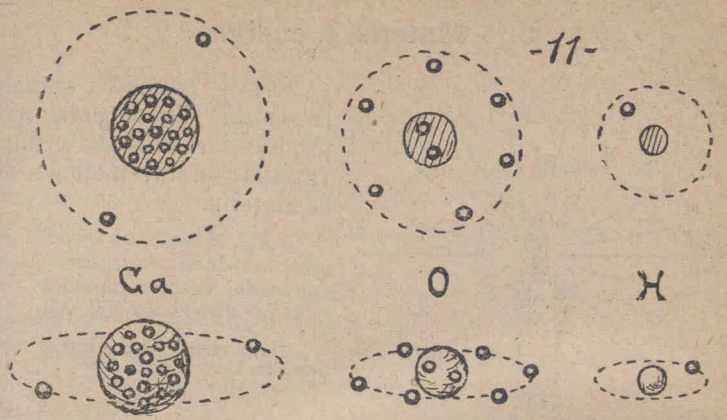
-10-



53. Dos son las suposiciones mejor definidas, respecto a la distribución de los electrones en el átomo.

HIPÓTESIS DE THOMSON, con modificaciones ulteriores (fig. 11).— EL NÚCLEO es una *esfera hueca* que contiene electrones. Y en la PERIFERIA hay también electrones.

Los *electrones* son *granos de electricidad negativa*, o sino son corpúsculos que están forzosamente cargados de una cantidad invariable de electricidad negativa.



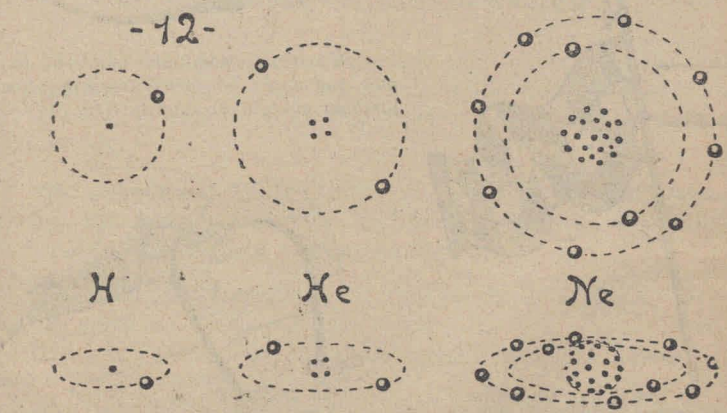
La *esfera hueca* o núcleo, es una carga de *electricidad positiva*, dicha carga varía en magnitud según la clase de átomos.

b) Hipótesis Rutherford (fig 12).— Los electrones se hallan sólo en la periferia, recorriendo varias órbitas concéntricas.

En cada órbita no puede haber más que 8 electrones.

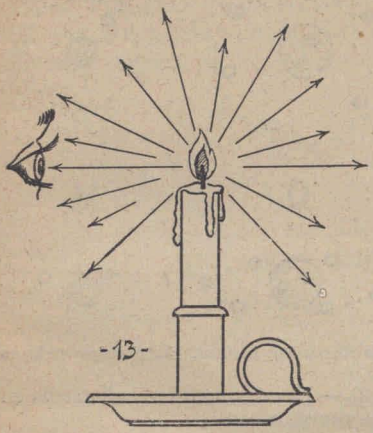
El núcleo está formado por un conjunto más o menos numeroso de corpúsculos mucho más pequeños que los electrones, a los que se les denomina protones.

Los electrones son cargas de electricidad negativa y los protones son corpúsculos materiales, cargados de electricidad positiva.



Todavía no se ha podido efectuar ninguna experiencia donde se haya comprobado la existencia de un protón aislado. *En cambio hay muchos experimentos que acusan la existencia de* electrones sueltos.

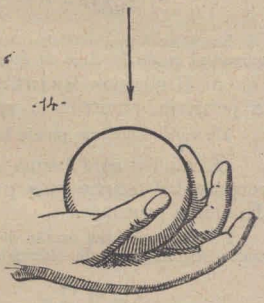
5.° - Materia y energía.



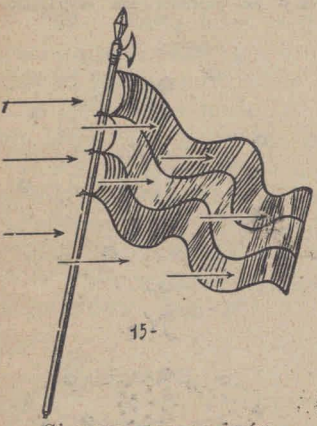
54. – Llámase **energía** la causa desconocida que produce las diversas y muy variadas manifestaciones de la materia.

Así, si vemos *los diversos objetos, suponemos que ellos están emanando* energía lumínica *en todas las direcciones (fig. 13).*

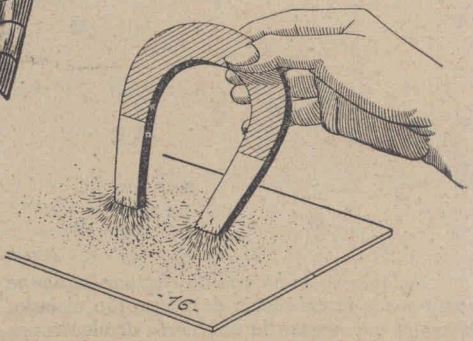
Dicha energía, al penetrar en nuestros ojos, hiere la retina, etc.



Si sentimos la presión de un cuerpo sobre nuestra mano (fig. 14), suponemos que dicho cuerpo posee una energía especial, que consiste en empujar.



Si vemos tremolar una bandera, decimos que el aire (en forma de viento) tiene también energía de empuje *(fig. 15).*



Si vemos que un imán atrae las limaduras de hierro, decimos que posee una energía especial que consiste en atraer *(fig. 16).*

LÉXICO. — Las palabras *energía* y *fuerza* son sinónimos; pero además, la palabra FUERZA en muchos casos significa: «porción determinada de energía».

55. – No sabemos *qué es la energía*; pero no podemos dudar de su existencia, puesto que es evidente.

Pero aquí se plantean tres suposiciones:

a) La *materia* y la *energía* son dos cosas reales y distintas (teoría dualista).

b) Lo único que existe es la *materia*, cuya última expresión es el electrón.

La energía no es más que el efecto del movimiento vertiginoso de los electrones (teoría mecanicista).

c) Lo único que existe es la *energía*. Los electrones y protones serían porciones sumamente pequeñas de energía (teoría dinamista).

56.– Sin discutir filosófica ni físicamente estas tres teorías nos vemos obligados en la práctica a aceptar la *teoría dualista*, que es la que más se acomoda a nuestra ideología.

En adelante hablaremos, pues, como si estuviese demostrado que nuestro mundo material se compone de dos elementos fundamentales: la MATERIA *y la* ENERGÍA.

6.º - Diversas formas de energía.

57. – La energía adquiere formas muy diversas; pero puede cambiar de una a otra forma; de modo que *podemos suponer* que en el mundo material existe una ENERGÍA ÚNICA y UNIVERSAL.

58. – Según las diversas maneras de actuar, la energía puede ser: MECÁNICA, GRAVÍTICA, ACÚSTICA, TÉRMICA, LUMÍNICA, ELÉCTRICA, MAGNÉTICA y HERTZIANA.

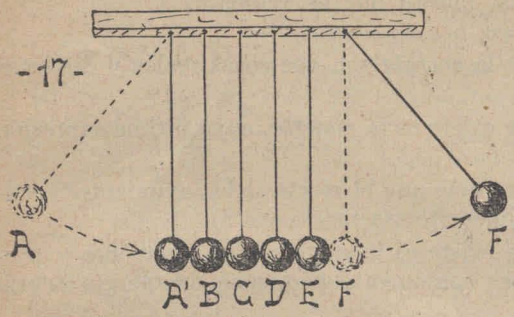
59. – **Energía mecánica** es la que produce los efectos directos de *presión* o tensión y de *movimiento*.

Una pesa colocada sobre la balanza, empuja *el platillo hacia abajo: tiene* ENERGÍA MECÁNICA.

Al dar una patada al fútbol, éste se mueve porque nuestro pie estaba animado de energía mecánica.

Y el fútbol recorre su trayectoria animado también de *energía mecánica*.

60. – La energía mecánica que posee un cuerpo, no se trasmite a otro sino por contacto directo.



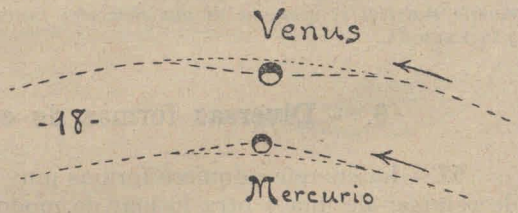
Si en el aparato de las BOCHAS DE REPERCUSIÓN (*fig. 17*) *la bocha* **A** *hace saltar la bocha* **F**, *es porque* **A** *trasmite su energía a* **B**, *ésta a* **C**, *etc.*

61. – **Gravitación** es una energía indefinible que produce atracciones mutuas entre los cuerpos.

Así el sol y los diversos planetas de nuestro sistema se atraen mutuamente.

NOTAS. — 1.ª – La atracción entre el sol y los planetas es mutua; pero en el lenguaje vulgar decimos, por ej.: que el sol atrae a la tierra; aunque diríamos lo mismo a afirmar que la tierra atrae al sol.

2.ª – Se nota la atracción mutua de los planetas, por las desviaciones que se advierten en sus órbitas al pasar uno frente a otro (fig. 18)



Con intención dijimos «*que produce atracciones*»...».

En su debido lugar llamaremos la atención sobre lo absurdo que es la "ACCIÓN A DISTANCIA", así como la concibe el vulgo y como la supusieron los sabios al adherirse a la sentencia afirmativa de Newton.

Pero aún sin creer en la *acción a distancia*, podemos hablar de "atracciones" y "repulsiones" *a distancia*, ASÍ COMO SE PRESENTAN A NUESTRA EXPERIMENTACIÓN; venciendo siempre el absurdo con aceptar la existencia de los campos gravítico y electromagnético que LA MATERIA PRODUCE EN EL ÉTER, sea de continuo, sea tan sólo en ciertas condiciones.

62. – **Gravedad** es el nombre que se da a la *gravitación terrestre* o sea a la atracción que existe entre la tierra y los cuerpos que se hallan en ella o en el espacio que la rodea.

Debido a la intensidad de la gravedad, es difícil observarla gravitación entre dos cuerpos que se hallan cerca de la superficie de la Tierra.



Pero, colocando muy cerca uno de otro dos péndulos de hilo *muy largo*, se puede notar la desviación debida a la gravitación (fig. 19).

63. – La gravedad al actuar sobre los diversos cuerpos de nuestro globo, imprime en ellos ENERGÍA MECÁNICA.

Así en el ejemplo de la balanza, la tierra actúa sobre la pesa por gravedad; *pero la pesa presiona el platillo por simple* energía mecánica

64. – El **sonido** o ENERGÍA ACÚSTICA es el efecto de las vibraciones de las moléculas de los cuerpos.

Y como la vibración es un movimiento, resulta que en último análisis, la energía acústica *es un caso particular de la* ENERGÍA MECÁNICA.

65. – El **calórico** o ENERGÍA TÉRMICA es una forma especial de energía, que produce en los cuerpos *dilataciones* y *condensaciones*, y en nuestro cuerpo causa las impresiones de *calor* y *frío*.

Con facilidad se transforma la energía térmica en mecánica como se ve en las máquinas de vapor y en los motores a nafta.

En todos estos motores se aprovecha la propiedad que tiene la energía térmica, producir *expansiones*.

66. – La **luz** o ENERGÍA LUMÍNICA es el agente de la visión.

La LUZ *es un caso particular de la energía denominada* "ondas electromagnéticas". *Sin embargo a veces conviene considerarla como una forma especial de energía, para comodidad de estudio.*

67. – La **electricidad** o ENERGÍA ELÉCTRICA y el **magnetismo** o ENERGÍA MAGNÉTICA son las causas de muy variados fenómenos como las atracciones y repulsiones eléctricas y las de los imanes.

La electricidad y el magnetismo tienen relación tan íntima, que no se pueden estudiar por separado, siendo así, que continuamente aparece la primera como causa del segundo, y viceversa.

68. – Muchos fenómenos eléctricos son efecto directo de la acción de los *electrones libres*.

ELECTRONES LIBRES *son los que no están formando parte de los átomos. Su número es enorme: tal vez muchísimo mayor que el de los electrones atómicos.*

La materia está continuamente DESINTEGRÁNDOSE, a consecuencia de los fenómenos químicos y físicos. – La desintegración consiste en desprenderse electrones de los átomos.

Pero también está continuamente REINTEGRÁNDOSE por la penetración de nuevos electrones en los átomos.

Ha quedado ya suficientemente demostrado que los electrones libres son específicamente idénticos a los electrones atómicos.

69. – En muchos fenómenos térmicos y electromagnéticos se producen ONDAS o vibraciones irradiantes, que se trasmiten por el espacio con la velocidad de unos 300.000.000 m. por segundo.

Esta forma de energía ha recibido el nombre de **ondas electromagnéticas.**

De estas ondas, unas son AMPLIAS *y de lenta repetición y constituyen las llamadas* ONDAS HERTZIANAS, *que son las que se aprovechan en los aparatos de* «radio».

En cambio otras son sumamente cortas y rápidas y constituyen el CALOR RADIANTE *y la* LUZ.

Por eso dijimos que la luz era un caso particular de las ondas *electromagnéticas.*

70. – Existen otras formas de energía, como la *fuerza de expansión de los gases,* la *radioactividad,* la *energía química* o de atracciones atómicas; pero por el momento no nos interesa tomarlas en consideración.

7.° - División de la Física.

71. – Atendiendo a su objeto, la Física se divide primeramente en GENERAL y PARTICULAR.

Física **general** es la que estudia: a) los conocimientos primordiales, b) las propiedades generales de la materia, c) los diversos procedimientos que se siguen en la investigación de los fenómenos físicos, d) la construcción y manejo de los aparatos de medida y de experimentación, e) el modo de sistematizar el estudio de la Física mediante los conocimientos matemáticos.

Física **particular** es la que estudia los fenómenos físicos en detalle: a) describiéndolos, b) midiéndolos y c) explicándolos.

72. – La *Física particular* se divide, según la categoría de fenómenos que estudia, en: MECÁNICA PURA, GRAVEDAD, MECÁNICA MIXTA, METEOROLOGÍA, ACÚSTICA, TÉRMICA, ÓPTICA, MAGNETO – ELECTRICIDAD y ONDAS HERTZIANAS...

73. – La **Mecánica pura** estudia el movimiento y reposo de los SÓLIDOS IDEALES, y la causa directa de estos dos fenómenos, que es la *energía mecánica.*

Son sólidos ideales: a) los puntos materiales, *b*) *los* cuerpos puntuales, *c*) *los cuerpos sólidos* DE RIGIDEZ ABSOLUTA, *o sea completamente* indeformables.

Estos cuerpos, así como los supone la Mecánica, no existen; por eso para la experimentación se buscan los que más se les asemejan.

74. – El estudio de la **Gravedad** forma teóricamente una parte especial de la Física. Pero por razones que después veremos, es en la práctica una parte integrante de la Mecánica.

75. – La **Mecánica mixta** estudia: a) las propiedades particulares de los sólidos, líquidos y gases; b) el movimiento y reposo de los *cuerpos reales* (sólidos, líquidos y gaseosos).

ESTEREOMECÁNICA *es la mecánica de los sólidos.*

HIDRÁULICA, Hidrología *o* Hidromecánica *es la mecánica de los líquidos.*

NEUMÁTICA *o* Aeromecánica *es la mecánica de los gases.*

76. – La **Meteorología** estudia los fenómenos que se producen en la atmósfera, los cuales reciben el nombre de METÉOROS.

La Meteorología es en rigor una parte de la Historia Natural.

Posee conocimientos de Física pura; pero éstos pertenecen a muy diversas partes de la Física.

Así las variaciones de la presión atmosférica y los vientos corresponden a la *Neumática;* los cambios de temperatura del ambiente pertenecen a la *Térmica;* los fenómenos de humedad y lluvia, a la *Neumática* y *Térmica,* y también a la *Electricidad;* etc.

De aquí que no sea lógico determinar ex-profeso una parte de la Física a este asunto.

77. – La **Acústica** o FONOLOGÍA estudia el SONIDO, o sea los fenómenos debidos a las *vibraciones materiales irradiantes.*

La **Térmica** o TERMOLOGÍA estudia los fenómenos debidos al calor.

La **Optica** o FOTOLOGÍA estudia la luz.

La **Magneto - electricidad** estudia los fenómenos debidos al magnetismo y a la electricidad.

El estudio de las **Ondas hertzianas,** que podríamos llamar HERTZIOLOGÍA, es relativamente reciente; y a pesar de ello ha adquirido sumo interés, debido a sus aplicaciones.

78. – El calor se presenta en dos formas: a) *calor almacenado en la materia*, b) calor *radiante*, o que se desprende irradiando de los cuerpos calientes, lo mismo que la luz se desprende de los cuerpos luminosos, el sonido de los cuerpos sonoros y las ondas hertzianas de los focos de vibración electromagnética.

Existen, pues conocimientos que son comunes al sonido, al calor, a la luz, a las ondas hertzianas y a cualquier otra suerte de emanaciones radiantes que puedan existir.

La parte de la Física que estudia las leyes comunes a las diversas clases de radiaciones ha recibido el nombre de RADIACIÓN.

Hay tratados de Física donde se estudia esta parte por separado, mientras que en otros se desmiembra, consignando gran parte de ella a la Óptica.

FÍSICA	GENERAL (Consta de varias partes, algunas de ellas sin nombre especial)		
	PARTICULAR	MECÁNICA	PURA (En ella se incluye la GRAVEDAD) MIXTA (Estereomecánica, Hidráulica y Neumática)
		¿ Meteorología ?	
		TÉRMICA ACÚSTICA ÓPTICA ONDAS HERTZIANAS	Forma parte de ellas la RADIACIÓN
		ELECTROMAGNETISMO	

79. – Además, atendiendo a su plan de estudio, la Física se puede dividir primeramente en ESPECULATIVA y APLICADA.

Física **especulativa** es la que *investiga*, con el único fin de catalogar conocimientos sobre la Naturaleza y sus fenómenos.

Física **aplicada** es la que aprovecha los conocimientos de la Física ESPECULATIVA, para facilitar y simplificar los trabajos humanos.

Aquélla es CIENCIA, *y ésta es* ARTE.

80. – La Física especulativa consta de tres partes: EXPERIMENTAL, TEÓRICA y MATEMÁTICA.

La Física **experimental** investiga los fenómenos en forma directa, a saber: *presenciándolos, comparándolos, midiéndolos y catalogando los resultados.*

La Física **teórica**, se basa en los conocimientos de la FÍSICA EXPERIMENTAL, para *hacer suposiciones, generalizar los casos particulares* y *prever otros fenómenos* aun no observados.

El conjunto de las dos Físicas, EXPERIMENTAL *y* TEÓRICA *recibe el nombre de* **Física empírica.**

La Física **matemática** sistematiza los conocimientos de la EMPÍRICA, mediante *procedimientos geométricos* y *cálculos algébricos.*

En los Cursos de Enseñanza Secundaria se estudian estas tres Físicas simultáneamente.

Hasta hace poco se fué dando cada vez más importancia a la FÍSICA MATEMÁTICA; pero debido a las dificultades e inexactitudes que se producen al querer aplicar sus fórmulas a los casos reales, ha comenzado esta Física a ceder terreno a la EMPÍRICA, que a menudo resulta, no sólo más práctica, sino también más exacta que aquélla.

<table>
<tr><td rowspan="3">FÍSICA</td><td rowspan="2">Especulativa</td><td>Empírica</td><td>TEÓRICA
EXPERIMENTAL</td></tr>
<tr><td colspan="2">MATEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="3">APLICADA (es arte, y no ciencia)</td></tr>
</table>

8.º - El éter cósmico.

81. – Además de la MATERIA y la ENERGÍA, han supuesto los físicos la existencia de una sustancia especial denominada **éter cósmico**, o simplemente **éter.**

Al ÉTER *entre otras propiedades fundamentales se le atribuyen las siguientes:*

1.ª – Es una sustancia muchísimo más tenue que cualquier gas.

2.ª – Ocupa todo el *Espacio*, sin dejar en él vacíos.

3.ª – Penetra cualquier clase de materia, por más sólida y compacta que sea.

82. – Los físicos se hallan divididos en dos bandos: a) los que aceptan la posibilidad o la real existencia del éter; b) los que niegan su existencia, no sólo real, sino también posible.

83. – ¿POR QUÉ SE SUPUSO QUE EXISTÍA EL ÉTER? — Porque sin él es imposible explicar la *"acción a distancia"*.

Ej.: El sol atrae *a la tierra, y viceversa. — Debe, pues, existir alguna sustancia que haga de intermediaria entre el sol y la tierra.*

Y en particular la GRAVITACIÓN es una fuerza misteriosa, que no ha podido ser *aislada* mediante ningún experimento.

Se supone, pues, que la gravitación es un efecto de las vibraciones del éter.

84. – NATURALEZA DEL ÉTER. — Dando por cierta la existencia del éter, hay dos suposiciones sobre su naturaleza:

1.ª Según muchos físicos, el éter es una sustancia CONTINUA, o sea: no está formada de PARTECITAS como *hemos supuesto* que está formada la materia cuando dijimos que se descomponía en moléculas, átomos y electrones.

2.ª Según otros físicos el éter es el conjunto de todos los *electrones libres* que hay en el mundo.

85. – *Dejando para otro lugar, dar las ampliaciones necesarias a este respecto, añadiremos tan sólo que:*

Conservándonos completamente neutrales en estas cuestiones filosóficas, supondremos, para comodidad del lenguaje y para objetivar la enseñanza:

a) Que en el mundo material existen tres elementos diversos: la MATERIA, el ÉTER y la ENERGÍA.

b) Que la materia es el recipiente de la energía.

c) Que la materia es vehículo de la *energía mecánica* y *acústica*, y que el éter es el agente o el vehículo de la *energía gravítica*, de la *lumínica*, y *hertziana* y de la *magnetoeléctrica*.

d) Que la energía *térmica* puede tener por vehículos la materia o el éter. En el primer caso, se trata de *verdadero calor;* y en el segundo, del que llamamos *calor radiante*, que no es calor, sino *efecto* o *causa de él.*

86. – *El alumno para no exponerse a las intransigencias de los examinadores que desconocen el verdadero fin de las hipótesis o suposiciones, debe recordar siempre que:*

a) *Para los físicos, la distinción entre* MATERIA, ENERGÍA *y* ÉTER *es una simple suposición, que no merece la pena de ser discutida.*

b) *Para los filósofos es una cuestión de suma importancia.*

c) Como estamos estudiando Física, y no Filosofía, no debemos cuestionar sobre el asunto.

MECÁNICA

I.° – Generalidades

1.° - Los tres estados típicos de la materia

87. – La materia puede presentarse a nuestros sentidos en tres **estados:** SÓLIDO, LÍQUIDO y GASEOSO.

El paso de uno a otro estado es consecuencia de un *fenómeno alotrópico* puesto que una misma sustancia, puede pasar de uno a otro estado, con sólo variarle la temperatura o la presión.

Así el agua *es* LÍQUIDA *a la temperatura y presión ordinaria; pero mediante el enfriamiento se* SOLIDIFICA (*llamándosele entonces* "hielo"); *y mediante el calor se* GASIFICA (*llamándosele entonces* "vapor de agua").

88. – CARACTERES EXTERNOS DE LOS TRES ESTADOS.

1.° Un cuerpo **sólido** tiene forma propia, y se opone con notable resistencia a que se modifique dicha forma y a que lo descompongamos en varias partes.

Además mientras no se modifiquen las condiciones de calor y presión, el volumen de los sólidos queda inalterable.

2.° Un cuerpo **líquido** no tiene forma propia, adopta siempre la forma de la vasija que lo contiene.

No opone resistencia sensible a los cambios de forma; y su resistencia a la ruptura es insignificante, aunque existe.

Lo mismo que los sólidos, los líquidos tienen volumen constante, mientras no se alteren las condiciones de calor y presión.

3.° Los **gases,** lo mismo que los líquidos, carecen de forma propia, y adoptan la forma de la vasija que los contiene.

No oponen resistencia a la ruptura, y se distinguen esencialmente de los líquidos, por su fuerza de expansión que los impele a adquirir volúmenes exagerados.

Por eso los gases son muy presionables, pudiendo reducir sumamente su volumen por efecto de la presión.

89. – Los gases y los líquidos reciben el nombre de *flúidos*, a causa de la propiedad que tienen de cambiar de forma y escurrirse con suma facilidad.

2.° - Sistemas rígidos y sistemas muelles.

90. – En Física se supone que toda sustancia está formada por la asociación de numerosos *puntos materiales*, llamados **moléculas.**

Un conjunto de puntos materiales forma, por lo tanto, un cuerpo.

Esto es lo mismo que decir que: TODO CUERPO ES UN SISTEMA DE PUNTOS MATERIALES.

91. – Hay dos clases de sistemas de puntos materiales: sistemas RÍGIDOS y sistemas MUELLES.

Sistemas **rígidos** son aquellos cuyos puntos conservan continuamente su mutua relación de distancia.

Los SÓLIDOS *forman sistemas más o menos rígidos.*

Sistemas **muelles** son aquellos cuyos puntos pueden cambiar de relación con suma facilidad.

Los líquidos y gases son sistemas muelles.

92. – Aunque la Mecánica tiene por fin estudiar las leyes que son comunes a la generalidad de los fenómenos físicos, toma como base de su estudio las leyes que se observan en los *sistemas completamente rígidos*, o sea en unos *sólidos ideales* que no pueden deformarse.

3.° - Lugar y movimiento.

93. – Los sólidos son mutuamente impenetrables.

La impenetrabilidad de los sólidos es muy diversa de la de los líquidos y gases.

94. – No negamos la impenetrabilidad de la materia. Aquí nos referimos a que los CUERPOS son *penetrables.*

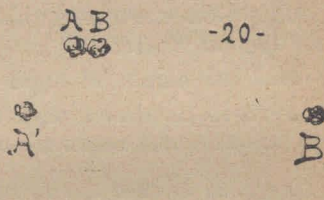
En efecto: Una esponja puede ser penetrada por un líquido o un gas. El carbón oculta generalmente en su interior un enorme volumen de gases condensados en sus poros.

Al disolverse un líquido en otro, o un gas en un líquido, etc., hay compenetración de ambos cuerpos, aunque no se compenetren sus moléculas, o mejor dicho: sus átomos.

Algunas experiencias hacen suponer que hay casos de soluciones donde las moléculas del disolvente y de la sustancia disuelta, se compenetran, o por lo menos, se asocian formando *moléculas de aglutinación.*

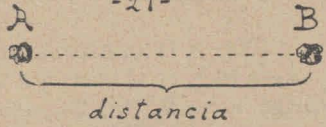
95. – Dados dos cuerpos impenetrables **A** y **B** (fig. 20), pueden presentarse dos casos: O SE TOCAN O NO SE TOCAN.

-20-



En ambos casos decimos que **A** y **B** ocupan LUGARES *distintos.*

-21-



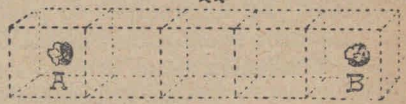
Para mayor claridad, abandonemos el primer caso.

En el segundo caso entre **A** y **B** existe una DISTANCIA (fig. 21).

96. — Cuando hablamos de **lugar** nos imaginamos que **el espacio** se fracciona en *aposentos* más o menos grandes, según nuestra conveniencia.

A los dos cuerpos **A** y **B** (fig. 22) les corresponderán aposentos distintos, o sea *distintos lugares.*

-22-



De aquí que la palabra LUGAR *no represente un volumen determinado del espacio, pudiendo, a veces, referirse a un volumen muy pequeño, y otras veces a un volumen inmenso.*

Ejs.: 1.° La abeja madre va poniendo un huevo en cada celdilla.

Aquí por *lugar* entendemos *cada celdilla.*

2.° Juan está en la sala, y Andrés en el comedor.

Aquí por lugares entendemos la *sala* y el *comedor*

3.° Los habitantes de Marte, quieren comunicarse con los de la Tierra.

Aquí por lugares entendemos las superficies de los planetas en referencia.

97. – NÚCLEO DE UN LUGAR. – Así como existen cuerpos puntiformes, existen *lugares puntiformes.*

Y todo lugar, por amplio que sea, puede considerarse formado por un *núcleo puntual* y una *atmósfera*.

98. – *Se ha convenido en que la distancia entre* **A** *y* **B** *se mide por medio de la longitud de la recta que va de* **A** *a* **B**.

La distancia **AB** es, pues, un ESPACIO RECTILÍNEO.

Para comodidad de lenguaje, se ha hecho de moda entre los mecánicos, llamar simplemente ESPACIO *a todo* espacio lineal.

De modo que es lo mismo decir *distancia* que *espacio*.

$$d = e$$

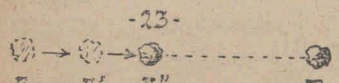
d (*distancia*) e (*espacio*).

99. – CONCEPTO DE LUGAR. — Dijimos que **A** y **B** ocupaban *"lugares distintos"*.

Nos referíamos al lugar puntual o puntiforme.

Pero la palabra LUGAR es vaga, y su verdadero significado es «PORCIÓN DISTINTA DEL ESPACIO CÓSMICO».

Aceptada la existencia del ESPACIO CÓSMICO, *cualquiera sea el concepto que nos hayamos hecho de él, podemos suponerlo descompuesto en infinidad de celdas o aposentos, más o menos grandes, según el fenómeno que estamos observando.*



100. – CONCEPTO DE MOVIMIENTO. – Si el cuerpo **A** se dirige hacia **B** (fig. 23), decimos que *se mueve*.

Movimiento ES EL CAMBIO DE LUGAR.

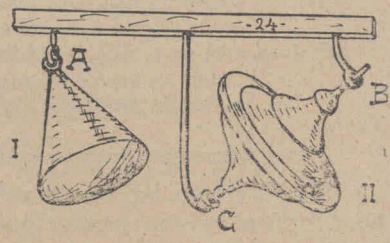
101. – En los cuerpos se pueden considerar tres clases de movimiento: TRASLACIÓN, ROTACIÓN Y PERTURBACIÓN.

Traslación es el cambio de lugar de un cuerpo.

Ej.: el movimiento de un coche.

102. – **Rotación** es el movimiento que se produce cuando el núcleo material de un cuerpo permanece quieto, mientras que todos los demás puntos materiales que forman el cuerpo, se trasladan alrededor de dicho núcleo.

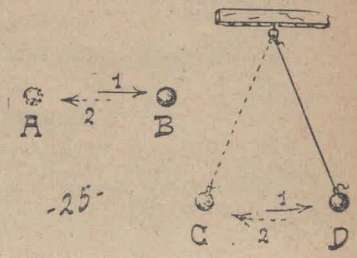
Ej.: la rotación de una rueda sobre su eje, el vaivén de una puerta sobre sus bisagras, el conjunto de movimientos que permite efectuar al cono **I**, *su punto de suspensión* **A** (*fig. 24*).



La rotación puede, pues, efectuarse, alrededor *de un eje* o alrededor *de un punto* (fig. 24).

En el caso **I** hay rotación *polar*; y en el caso **II** hay rotación *axial*.

103. – Tanto la *traslación*, cuanto la *rotación* pueden presentar el caso del movimiento de VAIVÉN (fig. 25).

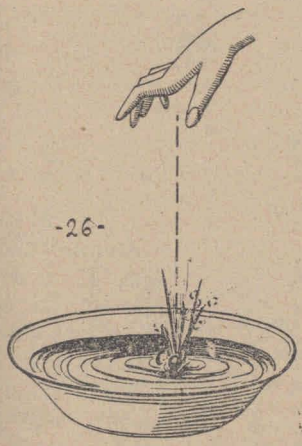


-25-

En el movimiento rotatorio, el de vaivén se llama MOVIMIENTO PENDULAR.

104. – **Perturbación** es el movimiento de vaivén que se produce en la sustancia de un cuerpo sin que él cambie de lugar.

a) Cuando la perturbación es visible, se llama ONDULACIÓN.



-26-

Ej.: el movimiento que se produce en la superficie del agua cuando tiramos una piedra (fig. 26).

Las olas del mar forman un caso de *ondulaciones* muy visibles.

b) Cuando la perturbación es debida al vaivén de las moléculas de los cuerpos, se llama VIBRACIÓN MECÁNICA.

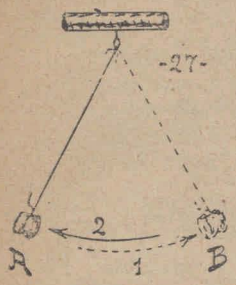
El sonido es el efecto que producen en nuestro cerebro las vibraciones mecánicas que impresionan a nuestro oído.

c) Cuando la perturbación es debida al movimiento de los átomos o de los electrones, se llama VIBRACIÓN ETÉREA, porque repercute en el éter.

La vibración etérea según su amplitud, se manifiesta en forma de calor radiante, luz *y* ondas hertzianas.

Nota. — Llámase *calor radiante* a las vibraciones etéreas producidas por el *calor de los cuerpos*. Estas vibraciones al actuar sobre los cuerpos, producen en ellos *calor*. Es, pues, un error creer que el calor radiante es energía idéntica al *calor de los cuerpos*.

4.° - Fenómenos simples, repetidos y complejos.



105. – El movimiento pendular nos servirá para explicar estas tres clases de fenómenos.

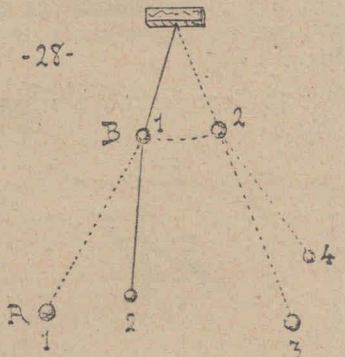
a) Una oscilación del péndulo es un **fenómeno simple** (fig. 27).

La lenteja va de **A** *hasta* **B**, *y vuelve a su punto de partida.*

LÉXICO. — **Oscilación** = *vaivén del péndulo.*

b) Si dejamos libre el péndulo, efectuará muchas oscilaciones.

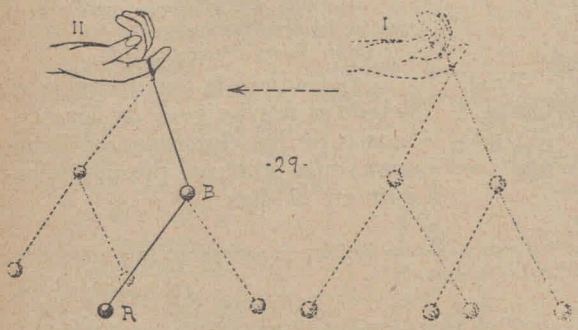
El conjunto de dichas oscilaciones, es un **fenómeno repetido**.



c) Si disponemos de un péndulo con dos lentejas (fig. 28), podemos hacer que la lenteja **A** oscile de derecha a izquierda, mientras que la lenteja **B** oscila de delante á atrás.

El fenómeno que presenciaremos en **A**, es **complejo**.

Para poder efectuar bien este experimento, se requiere que **B** *sea mucho más pesada que* **A**.



d) Más COMPLEJO aún será el fenómeno, si el punto de suspensión del péndulo está en nuestro dedo y movemos la mano a uno y otro lado, mientras oscilan las lentejas (fig. 29).

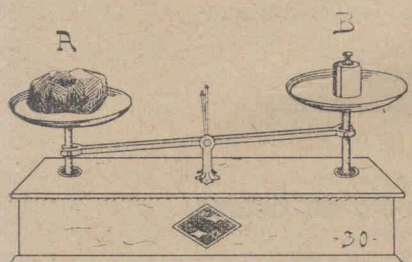
106. - Todo fenómeno complejo es una asociación de fenómenos simples.

Por lo tanto los fenómenos repetidos son casos particulares de los fenómenos complejos.

5.° - Concepto de instante y de simultaneidad.

107. - Los dos sentidos que más nos ayudan a estudiar los fenómenos, son la VISTA y el OÍDO.

Y aun en los casos de fenómenos que afecten directamente a otros sentidos, nos valemos de aparatos que produzcan como consecuencia directa de dichos fenómenos, un fenómeno que se pueda apreciar con la VISTA *o con el* OÍDO, *y especialmente con aquélla.*



Ej.: Por medio del *esfuerzo muscular* llegamos a sospechar que **A** pesa *más* que **B**. Pero la balanza nos ASEGURA *visualmente* que

$$a > b$$

a (peso de **A**) **b** (peso de **B**)

108. – Podemos, pues, decir que:

EN ÚLTIMO ANÁLISIS, TODOS NUESTROS CONOCIMIENTOS FÍSICOS SON CONOCIMIENTOS VISUALES O AUDITIVOS, *siendo la casi totalidad* VISUALES.

109. – Por medio de la vista o del oído nos formamos el concepto de INSTANTE.

Podemos abrir y cerrar los ojos con mayor o menor rapidez.

Lo mismo dígase de las orejas, que podemos tapárnoslas con las manos.

a) Si abro y cierro inmediatamente los ojos, y con ese acto logro ver a un hombre y un perro, diré que:

«*Los he visto en el mismo* **instante**».

b) Si con ese acto vi al hombre corriendo y al perro quieto, diré que:

«**Mientras** *el hombre corría, el perro estaba parado*».

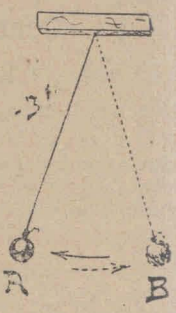
Aquí la palabra «**mientras**», significa: «EN EL MISMO INSTANTE».

110. – Dos hechos o fenómenos que presenciamos en el *mismo instante*, para nosotros son **simultáneos.**

Para llegar al concepto de SIMULTANEIDAD, no necesitamos tener concepto de tiempo.

6.° - Concepto de anterioridad y posterioridad.

111.– Los fenómenos repetidos nos dan idea de SUCESIÓN.



Si mientras oscila el péndulo, cuento «*Uno, dos, tres,* etc.» (CADA VEZ que el péndulo llega a **B**); podré decir que:

El golpe "UNO" *se efectuó* **antes** que *el golpe* "DOS", y así sucesivamente.

Y diré también que:

El golpe "DOS" *se efectuó* **después** *del golpe* "UNO" *etc.*

112.–El observador de un fenómeno, puede hablar *mientras lo presencia*, y dirá por ej.:

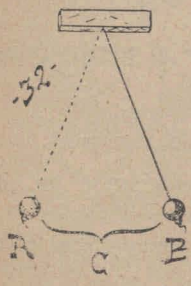
«**Ahora** corre un hombre».

Donde se ve que la palabra «AHORA» significa: «**mientras** *yo hablo*».

7.° - Concepto de tiempo.

113. – Los conceptos de *instante, simultaneidad, anterioridad* y *posterioridad* han producido en el hombre el concepto general de TIEMPO.

> Los filósofos disputan sobre la existencia real o ficticia del tiempo; pero para los físicos el tiempo no es más que la relación mutua de los diversos fenómenos, juzgados con el solo criterio de la *simultaneidad, anterioridad* y *posterioridad*.



114. – El concepto de ANTES y DESPUÉS nos enseña que en todo fenómeno existe un *principio* y un *fin*, que *corresponden a instantes diversos*, o sea QUE NO SON SIMULTÁNEOS.

Al salir el péndulo de **A** *para llegar a* **B**, *decimos que dicho movimiento* COMIENZA *en* **A** *y* TERMINA *en* **B**.

LÉXICO. — **Comenzar** = *tener principio.*
Terminar o CONCLUIR = *tener fin.*

115. – Pero MIENTRAS el péndulo va de **A** hacia **B**, debe recorrer el espacio **C**.

Si el péndulo es muy largo puedo abrir y cerrar los ojos muchas veces, antes que llegue a **B**.

Diré, pues, que «*el péndulo exige* MUCHOS INSTANTES *para efectuar su semioscilación* **AB**».

116. – EL **tiempo** ES UNA SUCESIÓN DE INSTANTES.

Los instantes los podemos considerar pequeños como queramos, porque podríamos suponer que es siempre posible acelerar el sucesivo cerrar y abrir de los ojos.

8.° - El reloj y las unidades de tiempo.

117. – **Reloj** es cualquier aparato que efectúe un fenómeno repetido (visible o audible), sin variar las condiciones que contribuyen a la producción de su componente: *fenómeno simple.*

Si el hombre pudiera abrir y cerrar sucesivamente los ojos ESTANDO SEGURO *de que se vale continuamente de los mismos medios internos para producir ese fenómeno, diríamos que posee un* precioso reloj *en sus mismos ojos.*

Lo mismo dígase si pudiese operar así con sus oídos.

118. – Como nuestro organismo no cuenta con un reloj seguro, debemos recurrir a aparatos suficientemente fieles que suplan la imperfección de nuestros órganos.

Tenemos, sin embargo, en nuestro organismo un reloj, al que recurrimos con bastante frecuencia.

ES ÉSTE EL **corazón,** CUYA SUCESIÓN DE *diástoles* Y *sístoles* PRODUCE EL FENÓMENO TAN CONOCIDO DE LAS **pulsaciones.**

Nuestro organismo, *en estado normal,* tiene pulsaciones suficientemente ISOCRÓNICAS como para valerse de ellas al comparar la duración de varios fenómenos que se producen a poca distancia de tiempo unos de otros.

Pero la FRECUENCIA de las pulsaciones varía notablemente de un individuo a otro. Y en un mismo individuo varía según las horas del día, las ocupaciones, la alimentación, el estado de ánimo, etc.

DE MODO QUE NUESTRO CORAZÓN ES UN RELOJ QUE NO SE PRESTA MÁS QUE A ALGUNAS MEDIDAS PERSONALES, QUE DEBEN SER LUEGO COMPROBADAS CON OTRO RELOJ.

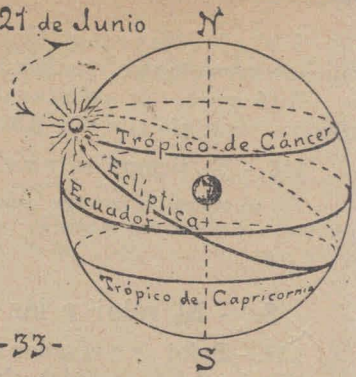
LÉXICO.— *Un fenómeno repetido es* **isocrónico,** *cuando cada uno de sus componentes* DURA EL MISMO TIEMPO.

FRECUENCIA *de un fenómeno isocrónico es el número de componentes que se producen en una unidad de tiempo.*

119. – El primer reloj que tuvo el hombre, fué nuestro sistema planetario.

La sucesión de luz y oscuridad, dió al hombre la primera unidad de tiempo, que fué el DÍA. Las fases de la luna sirvieron para crear el MES LUNAR, de 29½ días inexactos.

120. – La sucesión de las estaciones, y el recorrido aparente del sol de uno a otro *trópico*, recorriendo la *eclíptica* (fig. 33), dió margen a la creación de otra unidad de tiempo: el AÑO TRÓPICO, que mide 365¼ días (escaso).



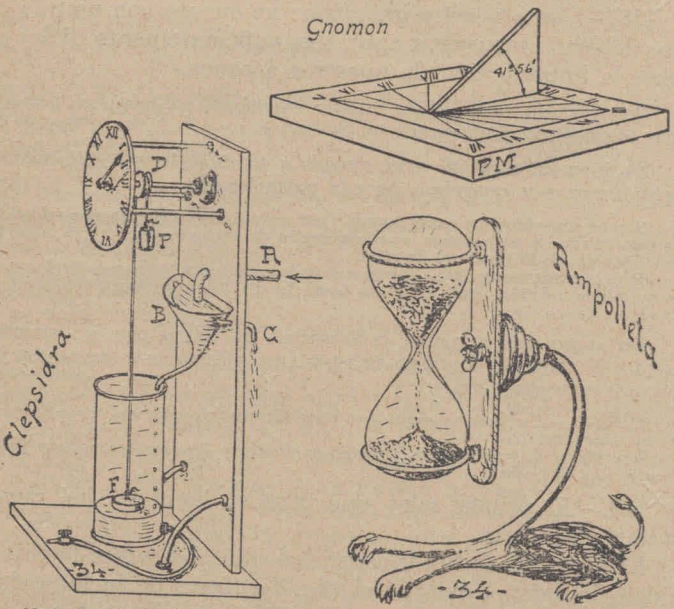
-33-

121. Como se ve, estas tres unidades: *día, mes* y *año trópico* no combinan entre sí; de modo que son unidades independientes.

122. – Cuando los astrónomos tomaron en cuenta que los días son más o menos largos, según las estaciones, convinieron en elegir una unidad exacta, creando el DÍA SOLAR MEDIO.

Día solar medio es el que corresponde en duración a un término medio entre todos los días del *año trópico*.

El mes lunar dió más tarde origen a un MES IDEAL, *de 30 días.*



-34-

N. B. Las ilustraciones señaladas con **P. M.** pertenecen a la revista "POPULAR MECHANICS MAGAZINE" de Chicago.

9. - Otros relojes y otras unidades de tiempo.

123. – Adelantando los estudios astronómicos, se necesitaron unidades de tiempo, más pequeñas que el DÍA, y se crearon sus submúltiplos.

Los tres submúltiplos prácticos del *día solar medio* son: la HORA, el MINUTO y el SEGUNDO.

La **hora** *corresponde a un veinticuatro-avo de día.*

El **minuto** *es un sesenta-avo de hora; y el* **segundo** *es un sesenta-avo de minuto.*

124. – Todos los relojes ideados por los hombres, son aparatos que *repiten* un fenómeno simple, en igualdad de condiciones.

Los principales relojes antiguos fueron: el GNOMON o reloj de sol (1), *la* AMPOLLETA o reloj de arena *y la* CLEPSIDRA o reloj de agua (fig. 34).

125. – Los relojes modernos constan de mecanismos que se mueven mediante *pesas* o *muelles* (fig. 35 a 36).

Para obtener que su movimiento sea regular, se recurre al péndulo *o al* balancín.

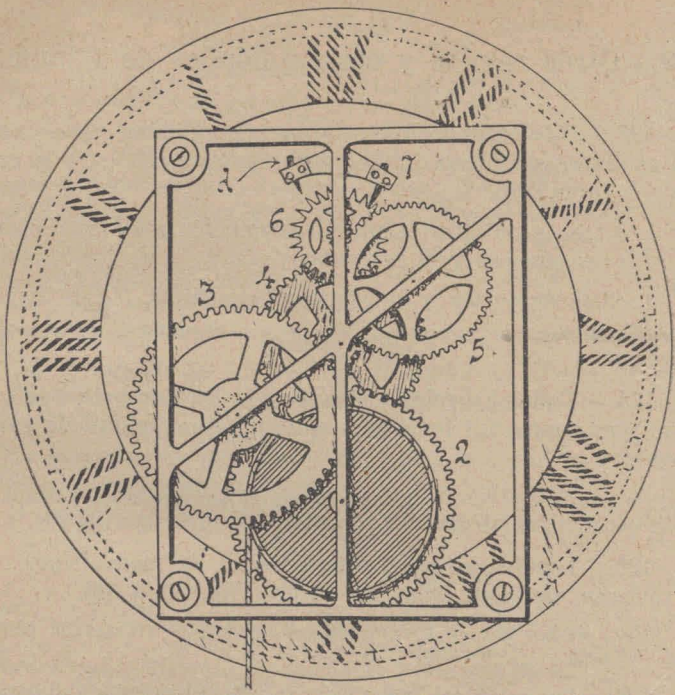
126. – ISOCRONISMO DEL RELOJ; – Se obtiene mediante el *péndulo* o el *balancín.*

El PÉNDULO conserva constante su amplitud de oscilación, mediante un pequeño empuje que la *rueda de escape* da al *ancla* cada vez que logra correr un diente.

Siendo constante la amplitud del péndulo, sus oscilaciones son ISÓCRONAS.

El BALANCÍN o *volante* conserva constante la amplitud de su vaivén, debido a que, además del empuje que el escape da al ancla, hay un *muelle* o *espiral* de elasticidad constante, aplicado al eje del balancín.

(1) El reloj de sol más antiguo que se conoce, se halla en el Museo de Berlín y tiene forma muy diferente de la del gnomon; lleva el nombre de Tutmés III, rey egipcio, conquistador de Asia y fundador del Imperio Asirio, cuyo gobierno duró desde 1501 h. 1447 (ant. de J. C.) — Ver: ESPASA: Art. *Reloj* (Reloj de sol).



- 35 -A -



127. - Mecanismo del reloj de pesa y péndulo (figs. 35 — *A* y *C*). —

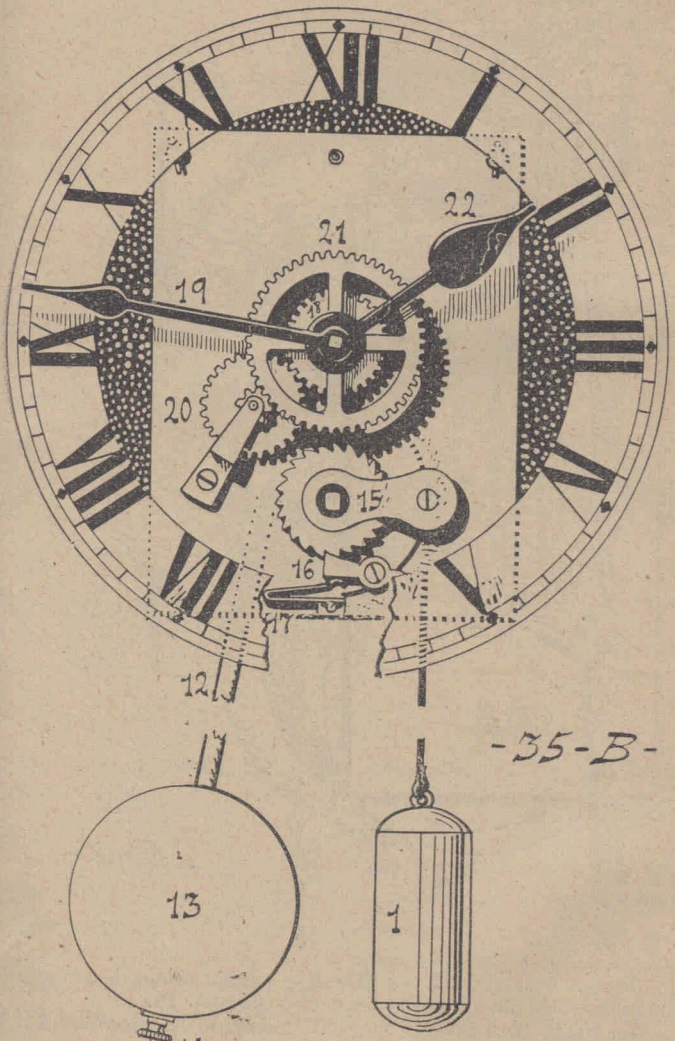
La PESA **1** hace voltear la RUEDA MOTORA **2**. Esta mueve la RUEDA CENTRAL **4**, mediante la RUEDA TRASMISORA **3**.

La RUEDA TRASMISORA **5** lleva el movimiento hasta la RUEDA CATALINA **6**, llamada también *rueda de escape*, la cual sirve para *regular el movimiento*.

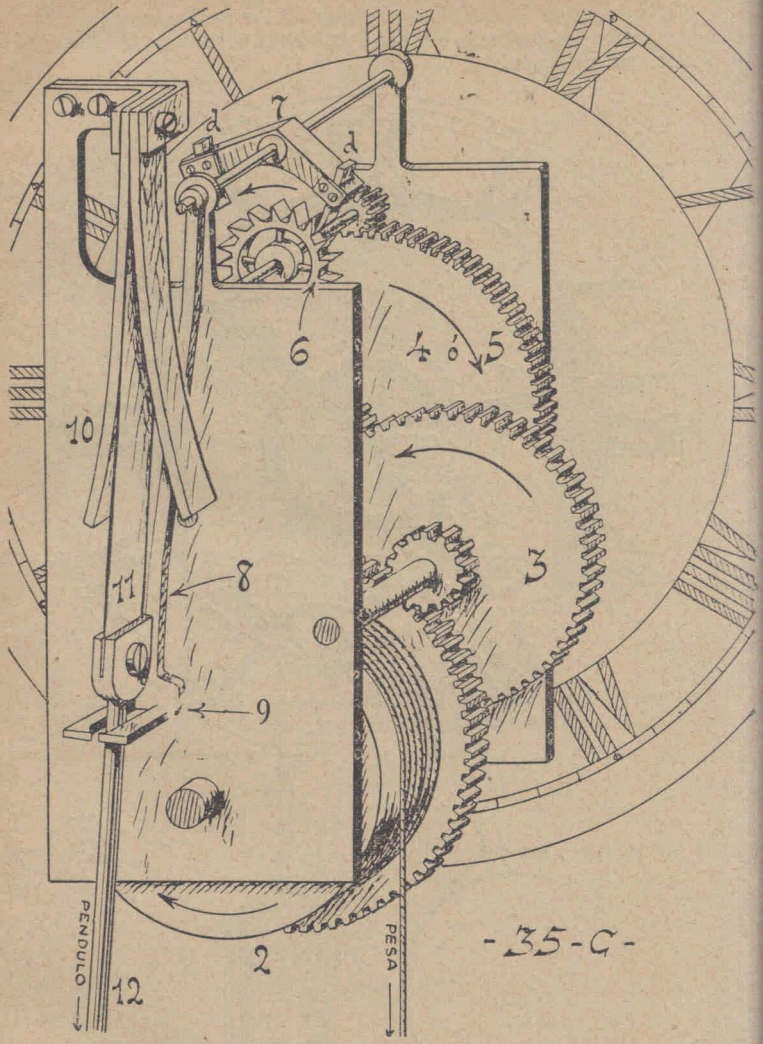
A este fin, el ANCLA o *trinquete* **7**, mediante los dos *diente* **d**, va dejando pasar *de a uno* los dientes de la rueda catalina, al compás del balanceo que le imprime la *varilla* **8**. (fig. 35—*C*).

La varilla **8** se mueve merced al vaivén del péndulo **13**, cuyo SOSTÉN **12** encaja en la HORQUILLA **9**. El sostén del péndulo consta de dos partes: una *flexible* **11** y otra *rígida* **12**.

La HORQUETA **10** limita la *amplitud* de las oscilaciones.
La *tuerca* **14** sirve para alargar o acortar el péndulo, a fin de *retardar o acelerar* su oscilación.



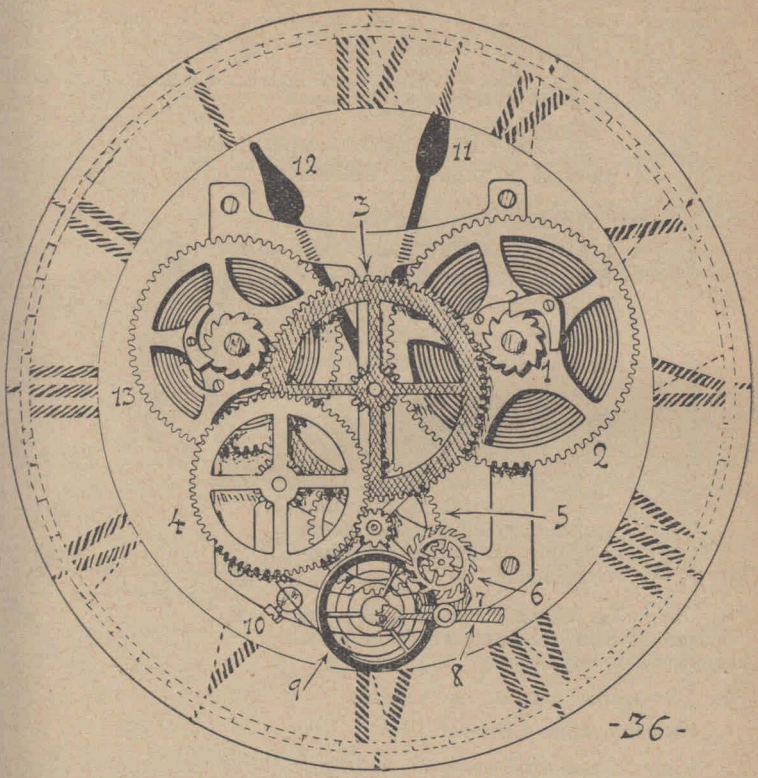
PIEZAS PARA DAR CUERDA. (fig. 35—*B*) — **15** = *escape* del tambor de la rueda motora — **16** = *freno* — **17** = *muelle del freno.*



PIEZAS MARCADORAS. (fig. 35—*B*) — Sobre el eje de la *rueda central* **4**, se hallan soldados la rueda **18** y el MINUTERO **19**.

La rueda **18** mueve la rueda **21** mediante la *trasmisora* **20**. Y a la rueda **21** está soldado el HORARIO **22**.

El minutero y el horario reciben el nombre general de MANECILLAS *o* SAETILLAS.



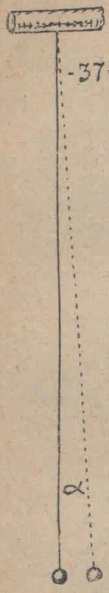
Mecanismo del reloj de muelle y balancín (fig. 36). — Al desarrollarse el MUELLE O RESORTE que hay dentro del TAMBOR MOTOR, voltea la rueda motora **2**.

La rueda motora, mueve *directamente* la RUEDA CENTRAL **3**.

Las *trasmisoras* **4** y **5** comunican la rotación a la RUEDA CATALINA **6**.

El TRINQUETE aquí consta de dos partes: el ANCLA **7** Y EL FRENO **8**. Éste recibe el movimiento de vaivén del VOLANTE O BALANCÍN **9**, el cual se *balancea* merced a la ESPIRAL de acero que tiene sujeto un extremo en el eje del volante, y el otro extremo en el *tope* **10**.

En la fig. 36 se ve otra rueda motora **13**: *es la que da movimiento al* DESPERTADOR o alarma, *cuyas piezas se han descartado para claridad de la ilustración.*



128. – Para los laboratorios de Física no hay mejor reloj que un *péndulo* cuya AMPLITUD de oscilación no pase los 4.° (fig. 37).

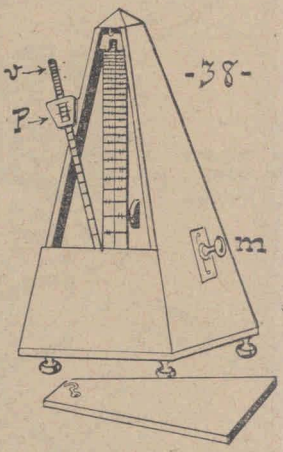
LÉXICO. — *Amplitud* de una oscilación es el ángulo α que recorre el péndulo al ir de *A* a *B* o viceversa.

129. – Para ciertos experimentos, hay que escuchar golpes que acusen el vaivén del péndulo.

Con este fin se ha ideado el METRÓNOMO (fig. 38), el cual además de los golpes del péndulo, acusa con un timbre la suma de 2, 3 ó 4 oscilaciones.

El metrónomo funciona con un mecanismo de relojería.

Es en realidad, un reloj de péndulo que marca una fracción cualquiera de tiempo, elegida a voluntad del experimentador.



En la fig. 38, no se ve la lenteja del péndulo, la cual queda oculta en la parte inferior de la caja.

v = varilla superior del péndulo.

p = contrapeso corredizo.

Cuanto más arriba está el contrapeso, tanto más lento va el péndulo.

m = manija para graduar los golpes del timbre o campanilla.

130. – Concluiremos este asunto, diciendo que en Física se ha adoptado como *unidad fundamental* de tiempo el **segundo**, el cual es UNA DE LAS TRES UNIDADES FUNDAMENTALES DEL *sistema cegesimal* o "*de unidades absolutas*".

10.° - Reposo o quietud

131. – Contrario a MOVIMIENTO es el **reposo** o QUIETUD, que a menudo se denomina *equilibrio*.

Nosotros evitaremos usar la palabra "equilibrio" *fuera del lugar que le corresponde hablando con rigor.*

132. – Tanto el movimiento como el reposo pueden ser ABSOLUTOS O RELATIVOS.

Movimiento o reposo **absoluto** es el que se considera con respecto a algún punto *inmóvil* del espacio.

Movimiento o reposo **relativo** es el que se considera con respecto a un cuerpo cualquiera, tomado como *punto de referencia.*

Como ejemplos de movimiento relativo:

Un hombre que pasea dentro de un tranvía (se mueve con respecto al tranvía); un tranvía en movimiento (se mueve con respecto a cualquier punto fijo de la superficie de la tierra); la Luna recorriendo su órbita (se mueve con respecto a la Tierra); la Tierra recorriendo su órbita (se mueve con respecto al sol); el Sol acercándose a la constelación de Hércules (se mueve con respecto a las estrellas de Hércules).

Preguntamos ahora: ¿Las estrellas de Hércules se moverán? Y respondemos: Sí, unas respecto de otras (por lo menos así lo suponemos).

133. – Pero preguntamos: ¿El conjunto de estrellas se mueve con respecto a un punto fijo del espacio; o todo el sistema se halla en reposo absoluto?

La respuesta racional es: ¡QUIÉN LO SABE!

¿Quién nos asegura que el espacio tiene puntos fijos?

Además ¿qué es el espacio? — ¿Es algo más que una simple ficción de nuestra fantasía?

Lo cierto es que el espacio, como ente real, y sus puntos fijos se hallan fuera del alcance de nuestra experimentación; y por lo tanto podemos afirmar que para el físico: EL MOVIMIENTO ABSOLUTO Y EL REPOSO ABSOLUTO SON DOS MITOS SIN NINGÚN VALOR POSITIVO (1).

134. – Y como el tiempo es una consecuencia de la comparación de movimientos, resulta que:

---

(1) Los conceptos de ESPACIO y TIEMPO han dado lugar a interminables polémicas entre los filósofos; y muchos físicos han hallado en esta cuestión, tema para sus investigaciones y consideraciones.

El que quiera enterarse del estado actual de este inacabable pleito filosófico, recurra a: DICC. ENCICL. HISP. AMER. y DICC. ENCICL. DE ESPASA. (Artículos: *Espacio, Tiempo, Relatividad).*

No existiendo el movimiento absoluto, no puede existir el tiempo absoluto.

Por lo tanto para los físicos:

EL TIEMPO ES UNA SIMPLE RELACIÓN SUBJETIVA ENTRE LOS DIVERSOS MOVIMIENTOS QUE OBSERVAMOS.

LÉXICO. — *Se dice que un concepto es* **objetivo,** *cuando se refiere a un* ENTE REAL *(concreto o abstracto); y se dice que es* **subjetivo,** *cuando se refiere a un* ENTE IMAGINARIO *(también concreto o abstracto).*

135. – Si suponemos que un cuerpo está fijo en el espacio, consideraremos como *reposo* y *movimiento* ABSOLUTOS los que se efectúan con relación a *los puntos materiales* de dicho cuerpo.

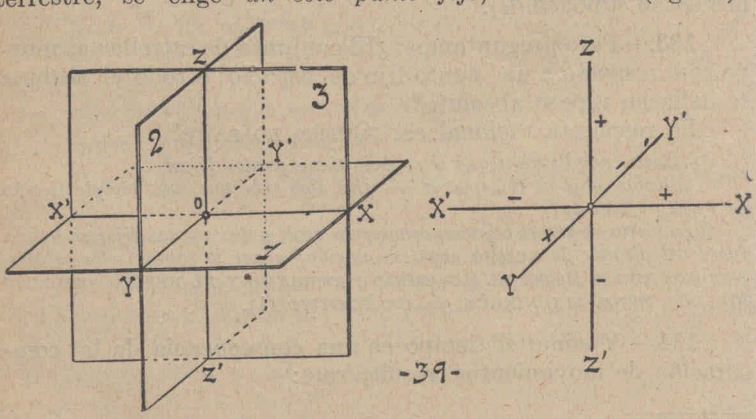
La Física planetaria *toma como puntos de referencia las estrellas.*

La Física terrestre *toma como puntos de referencia los que son visibles y fijos en la superficie de la Tierra.*

La Física escolar *toma como puntos de referencia los puntos visibles y fijos del edificio escolar.*

11.º - Relaciones de lugar.

136. – Para simplificar la referencia de lugar, en la Física terrestre, se elige *un solo punto fijo,* arbitrario (fig. 39).

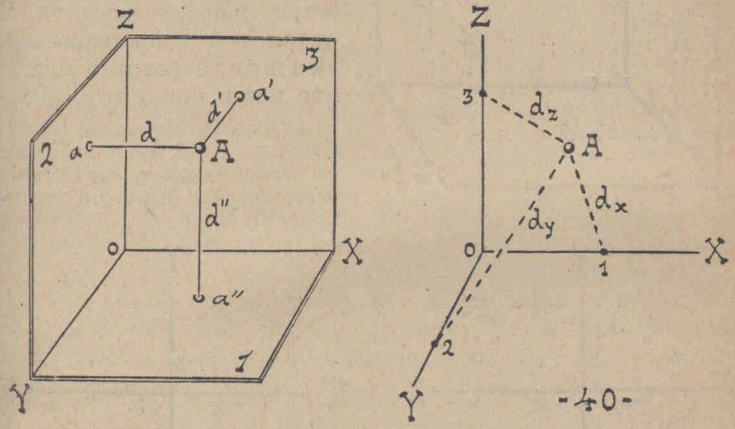


El punto de referencia es **o.**

Por el punto **o** se hacen pasar tres planos imaginarios, **1, 2** y **3,** mutuamente perpendiculares, siendo uno de ellos, *horizontal,* y los otros dos *verticales.*

Las intersecciones de esos tres planos, son tres rectas mutuamente perpendiculares: dos *horizontales*, **XX'** e **YY'**, y una *vertical*, **ZZ.**

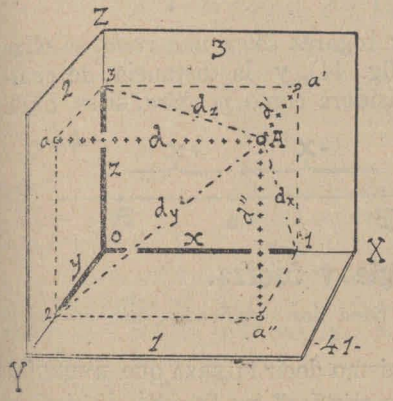
137. – Para señalar la posición de un punto **A** en el espacio, basta indicar las medidas de las distancias **d, d'** y **d''**, de dicho punto a los planos (fig. 40).



-40-

O sino se indican las medidas de d_x, d_y, d_z, distancias de dicho punto a las rectas **X, Y, Z.**

138. — *La fig. 41 es una superposición de las dos partes de la fig. 40.*



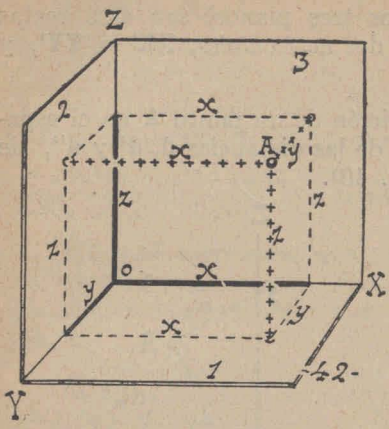
-41-

Examinando la fig. 41 se ve que el conjunto de líneas relacionadas con **A** y con los planos **1, 2, 3,** es un cuboide en el cual:

d = x **d' = y** **d'' = z.**

d_x, d_y, d_z, = *diagonales de las caras del cuboide.*

139. – Las porciones **x, y, z** que señalan la distancia del punto **A** a los planos de referencia, se llaman **coordenadas** de dicho punto a los planos **1, 2, 3.**

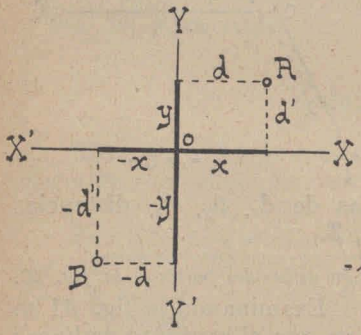


-42-

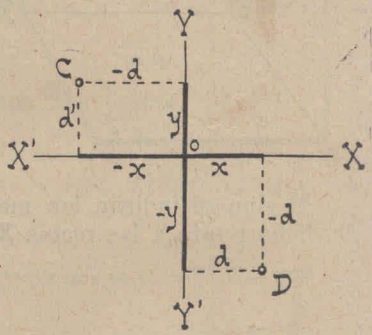
Siendo **d=x , d'=y , d''=z**, *para simplificar la notación, se acostumbra llamar* **x, y, z,** *también a las rectas* **d, d', d''**, *y a sus proyecciones sobre los planos (fig. 42).*

140. – Cuando tenemos que correlacionar lugares *sobre un plano*, se elige en él un punto **o** y dos rectas mutuamente perpendiculares que pasen por **o** (fig. 43).

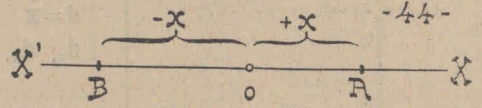
La posición de cualquier punto del plano, p. ej. **A**, *se indica por los segmentos* **x** *e* **y**, *que tienen la misma longitud que* **d** *y* **d'** *respectivamente.*



-43-



141. – Para correlacionar lugares *sobre una recta*, se elige un punto fijo **o** sobre ella, (fig. 44), y la distancia de cualquier punto al punto **o** se considera como *positiva*, si se halla a la derecha de dicho punto; y como *negativa*, si se halla a la izquierda.



-44-

12.° - Energía y fuerza.

142. — La palabra **"fuerza"** tiene dos significados, uno *general* y otro *restringido.*

En *sentido general* es lo mismo decir FUERZA que ENERGÍA. *Así es lo mismo decir* "fuerza eléctrica" *que* "energía eléctrica".

En *sentido restringido* la palabra "FUERZA" significa "PORCIÓN DETERMINADA DE ENERGÍA".

De modo que, en este sentido, hay la misma diferencia entre FUERZA *y* ENERGÍA, *que entre* CUERPO *y* MATERIA.

143. — Por más que las leyes de Mecánica se apliquen después a toda la Física, las experiencias mecánicas se hacen solamente con *energía mecánica.*

Energía mecánica es la causa capaz de modificar directamente los estados de reposo o de movimiento de los cuerpos.

a) *Se modifica el reposo de un cuerpo, poniendo a éste en movimiento.*
b) *El movimiento de un cuerpo se puede modificar:* 1.° *deteniéndolo total o parcialmente;* 2.° *acrecentándo dicho movimiento;* 3.° *desviando el móvil de su trayectoria.*

144. — EN ESTA PARTE DE LA FÍSICA, ENTENDEREMOS POR **"fuerza"**: *cualquier porción determinada de* ENERGÍA MECÁNICA.

Las fuerzas (mecánicas) producen dos efectos distintos: a) modifican el estado de movimiento o reposo; b) producen sobre nuestro cuerpo la sensación de PRESIÓN o TENSIÓN, según que se trate de fuerza *de empuje* o *de tracción.*

145. — **Las fuerzas** (mecánicas) **son inseparables de los cuerpos.**

Esto significa que, si bien otras clases de energía parece *que subsisten fuera de la materia,* NUNCA PODREMOS EXPERIMENTAR CON LA ENERGÍA MECÁNICA SEPARADA DE LA MATERIA.

13.° - División de la Mecánica pura.

146. — La Mecánica pura se divide en tres partes: ESTÁTICA, CINEMÁTICA y DINÁMICA.

Estática es el estudio de las condiciones que se requieren para que haya *equilibrio* entre varias fuerzas.

En otras palabras:

La **Estática** es el estudio de las condiciones que se requieren para el *reposo* de los cuerpos.

Cinemática es el estudio del movimiento *en sí,* sin tener en cuenta las causas que lo producen.

Dinámica es el estudio del movimiento relacionado con sus *causas activas* que son las fuerzas y con sus *estorbos* que son: la materia y las fuerzas que se oponen al movimiento.

En estas tres partes de la mecánica se distribuye el ESTUDIO DE LA GRAVEDAD, *que en la práctica pasa a ser una parte de la Mecánica.*

147. – Atendiendo a su PLAN DE ESTUDIO, la Mecánica pura se divide lo mismo que toda la Física:

Mecánica pura	Empírica	EXPERIMENTAL TEÓRICA
	Matemática	GRÁFICA ANALÍTICA

Mecánica **gráfica** es el estudio y cálculo de mecánica por procedimientos meramente geométricos.

Mecánica **analítica** es el estudio y cálculo de mecánica por medio de procedimientos algebraicos, que a menudo se basan en los conocimientos gráficos.

II.° — Factores del movimiento.

1.° - Gravedad.

148. – **Gravedad** es la energía gravítica que existe entre la Tierra y los cuerpos que hay en su superficie o cerca de ella.

La gravedad se manifiesta: a) haciendo que los cuerpos que se hallan sueltos en el aire caigan al suelo; b) haciendo que los cuerpos sostenidos, produzcan presión sobre sus soportes.



149. – DIRECCIÓN Y SENTIDO DE LA GRAVEDAD. — Conocemos la dirección y sentido de la gravedad por medio de la plomada (fig. 45) y por medio de la caída de una piedra (fig. 46).



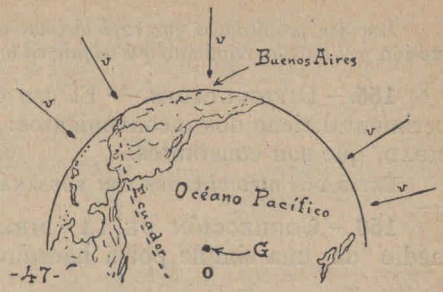
LA GRAVEDAD ES UNA ENERGÍA QUE SE MANIFIESTA **dirigida en línea recta hacia el centro de la Tierra.**

150. – Llámase **vertical** la recta que en cada lugar marca la dirección de la gravedad. La tierra tiene sensiblemente la forma de un elipsoide.

Su CENTRO GEOMÉTRICO es **O**.

Con experiencias exactas se ha demostrado que las VERTICALES *de las distintas partes de la superficie terrestre, concurren a un punto* **G** *que no coincide con el centro* **O**.

Dicho punto **G** es el *centro de gravedad de la* Tierra.



Centro de gravedad del globo terrestre es el punto de concurrencia de todas las verticales.

En rigor esta definición está completamente equivocada:

a) Si suponemos que **G** es un punto matemático.

b) Si pretendemos determinar el punto **G**, mediante verticales obtenidas con plomadas que se hallen cerca de la superficie de la tierra.

Más adelante se explicará mejor este asunto.

2°. - Concepto de peso.

151. – La gravedad, al actuar sobre los cuerpos, engendra en ellos una fuerza (mecánica) llamada PESO.

Peso de los cuerpos es la presión que ellos ejercen sobre los estorbos que les impiden dirigirse al centro de la Tierra.

No sólo pesan *los cuerpos que están alejados de la superficie de la Tierra; sino también los que están sobre su superficie, y los que se hallan por debajo de dicha superficie (enterrados o en los pozos).*

152. – Se distingue la energía gravítica del peso en cuanto aquélla actúa *"a distancia"*, y éste solamente *"por contacto"*.

Por eso hemos dicho que la gravedad no es energía mecánica, y que el peso es simplemente energía mecánica.

NOTA. — Cuando decimos que la gravedad, (u otra energía) actúa «*a distancia*» entendemos decir «*por intermedio del éter*».

153. – La gravedad es una energía constante *en cada lugar del globo*; por lo tanto el peso de cada cuerpo es también constante *en cada lugar del globo.*

Más adelante veremos como la gravedad tiene su máximo de intensidad en los Polos, y su mínimo en el Ecuador.

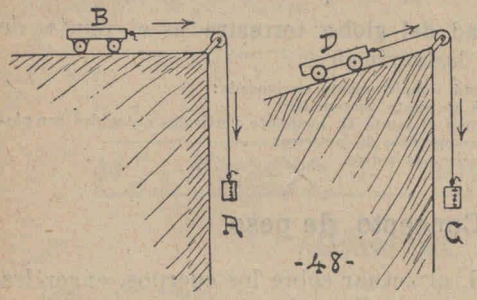
154. – Siendo el peso una fuerza constante, recurriremos a él para la generalidad de las experiencias mecánicas.

Las dos propiedades que explotaremos en el peso de los cuerpos son: la presión *y el* auto-movimiento *que adquieren los cuerpos, cuando están sueltos.*

155. – DIFICULTADES. — El uso del *peso* como fuerza experimental tiene dos inconvenientes: la DIRECCIÓN y la INTENSIDAD, que son constantes.

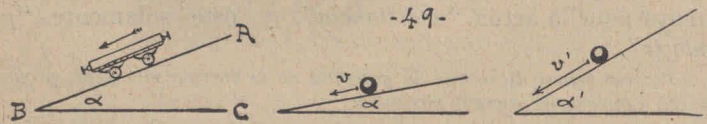
ESTAS DOS DIFICULTADES SON SUBSANABLES. *Veamos como:*

156. – CORRECCIÓN DE LA DIRECCIÓN DEL PESO. — Por medio de una simple polea hacemos que un cuerpo pesado trasmita su energía mecánica a otro cuerpo (fig. 48), en dirección *horizontal* (caso **A**, **B**), *inclinada* (caso **C**,**D**) y *vertical ascendente* (caso **E**,**F**).



157. – CORRECCIÓN DE LA INTENSIDAD DEL PESO. — Los cuerpos al caer al suelo, van con demasiada velocidad, debido a que su peso es excesivo.

Se disminuye el efecto del peso de un cuerpo, mediante el PLANO INCLINADO (fig. 49), y la MÁQUINA DE ATWOOD (fig. 50), que más tarde describiremos.



a) *En el* **plano inclinado**, *cuanto menor es el ángulo α, tanto más lento va el móvil, porque parte de su peso se pierde presionando el soporte* **AB**.

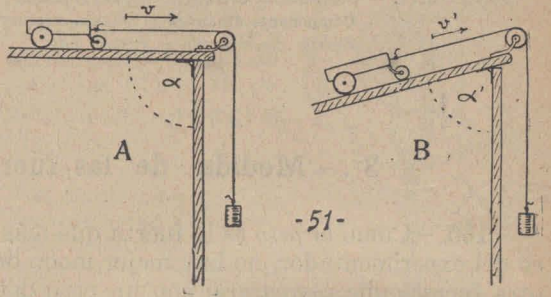
b) *En la* **máquina de Atwood** *las dos pesas* **P** *son iguales; luego* se equilibran.

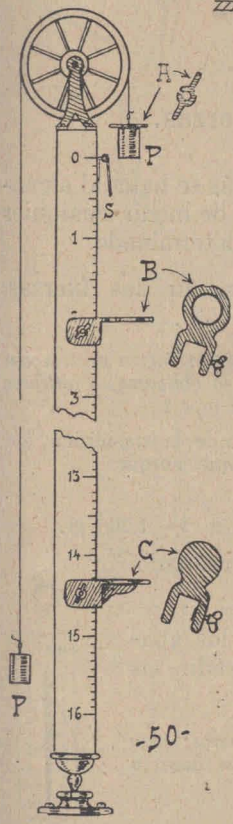
En cambio la pesa adicional **A**, *debe usar su* peso *para arrastrarse a sí misma y a las pesas* **P**; *de modo que el movimiento del sistema* **2P + A**, *es mucho más lento que el de la caída libre.*

También se corrige la intensidad del peso, cuando se recurre al *plano horizontal* o al *inclinado*, valiéndose del procedimiento de trasmisión de energía (fig. 51).

a) *En el caso de* **A**, *la pesa gasta su fuerza en arrastrarse a sí misma, en arrastrar el carro y en vencer el* **roce** *de los ejes y de las ruedas.*

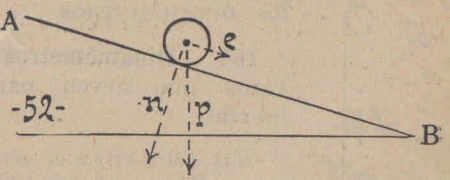
b) *En el caso de* **B** *parte de la fuerza se anula por servir de contra-peso entre la pesa y el peso efectivo del carro.*





158. – La corrección de la intensidad del peso nos enseña que en muchas experiencias tenemos que distinguir entre fuerza REAL, fuerza *que se anula* y fuerza EFECTIVA.

En el caso del plano inclinado (fig. 52) la fuerza **real** *del móvil es su propio peso* **p**, *que tiende a hacerlo* bajar verticalmente; *la fuerza* **anulada** *es* **n**, *que el cuerpo gasta presionando perpendicularmente el plano* **AB**; *y la fuerza* **efectiva** *es la que conduce al móvil en sentido de la flecha* **e**, *o sea paralelamente a* **AB**.



Las dos fuerzas **n** y **e** son ideales, o sea **no existen**; pero nos indican *como trabaja* la verdadera fuerza **p**.

159. – El trabajo que hemos hecho: de suponer que la fuerza **p** quedaba sustituida por las dos fuerzas **n** y **e**, se llama **descomposición de una fuerza** en otras dos que efectúen el mismo trabajo que la primera.

En todos los casos de descomposición de fuerzas, se dice que **n** y **e** son las COMPONENTES de **p**.

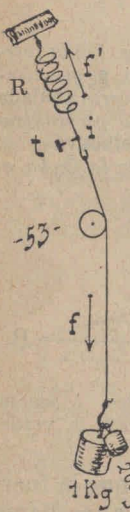
Y cuando **n** se anula por actuar perpendicularmente a un plano, se dice que **n** es la COMPONENTE ESTÁTICA, y **e** la COMPONENTE DINÁMICA.

SINONIMIA. — **Componente estática** = FUERZA NORMAL.
Componente dinámica = FUERZA EFECTIVA.
Fuerza descompuesta = FUERZA REAL.

3°. - Medida de las fuerzas.

160. – Como el *peso* es la fuerza que más se halla al alcance del experimentador, no hay mejor modo de medir cualquier otra fuerza, que *compararla* con un peso determinado.

Valiéndonos de una polea podemos medir las fuerzas, cualquiera sea su dirección y sentido (fig. 53).



Supongamos que queremos medir la fuerza de tracción que desarrolla el resorte **R** *cuando lo obligamos a estirarse hasta que el índice* **i** *llegue frente al tope* **t**.

Colgamos pesas en el extremo de la trasmisión (en nuestro caso 1200 gr.), y decimos que, porque:

$$f = f'$$

si $f' = 1.200$ gr. también $f = 1.200$ gr.

De este modo se han graduado los DINAMÓMETROS.

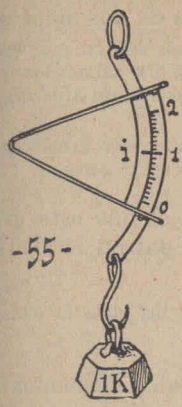
161. – **Dinamómetros** son los aparatos que sirven para medir las fuerzas.

Hay diversos tipos de dinamómetros; pero todos se basan en la elasticidad del acero u otras sustancias.

Podemos dividir los dinamómetros en dos clases: a) DE MUELLE, b) HIDRÁULICOS.



162.– Los dinamómetros más comunes **de muelle** son: el de RESORTE o *balanza romana* (fig. 54) y los de MUELLE ANGULAR (fig. 55).

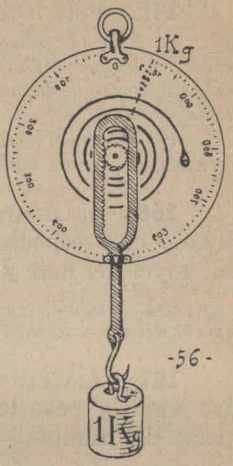


-55-

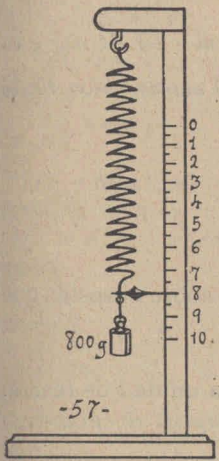
Existen otros dinamómetros de muelle, de formas muy variadas entre los que citaremos: el de MUELLE ESPIRAL (fig. 56), el de JOLY (fig. 57) y el de MUELLE BIANGULAR (fig. 58).

El dinamómetro de Joly (impropiamente llamado "balanza de Joly") es una modificacion de la romana.

Es muy cómodo para la determinación del peso específico, como tendremos ocasión de verlo en su lugar.



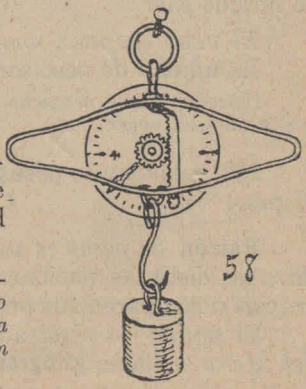
-56-



-57-

163. – GRADUACIÓN DE LOS DINAMÓMETROS. Se van colocando sucesivamente, diversas pesas en el gancho (fig. 57), y se va señalando mediante rayitas, la altura a donde llega el índice o *fiel* en cada caso.

164. – UNIDAD DE FUERZA. — La unidad práctica de medida adoptada en los dinamómetros es el KILOGRAMO y su submúltiplo el GRAMO.



58

Pero esta unidad tiene un inconveniente, puesto que ya dijimos que la gravedad varía según la latitud del globo terrestre.

De aquí que si graduáramos un dinamómetro en el Ecuador, por ej., y después lo lleváramos al Polo, notaríamos que una pesa de 1 Kg. llevaría el índice hasta la división correspondiente a 1005 gr. (fig. 59).

165. – Pero este inconveniente se subs na de dos maneras:

a) *Para los trabajos de* Laboratorio escolar *no nos interesa por nada saber si la que en Buenos Aires llamamos* "FUERZA DE UN KILOGRAMO" *es distinta de la que llaman así los estudiantes de Río Janeiro, de Madrid, de Dublín, etc.*

b) *Para las medidas universales, se ha adoptado como* KILOGRAMO-FUERZA, *el peso de 1 kilo en París, al nivel del mar y en el vacío.*

166. – Llamaremos **dinamómetro legal,** el que está graduado con respecto al peso de 1 Kilogramo–patrón en París, al nivel del mar y en el vacío.

Los dinamómetros legales dan en cualquier parte del globo la medida exacta del KILOGRAMO-PESO LEGAL.

167. – Llamaremos **peso legal** el que señala el dinamómetro legal; y **peso local,** el que tiene un cuerpo dado, en cada parte del mundo.

Así una pesa *de 1 kg., p. ej.:*

a) *Pesará 1* KILO-LEGAL, *solamente en París, al nivel del mar y en el vacío.*

b) *Pesará 1* KILO-LOCAL *en cualquier parte del mundo, a cualquier nivel y* en el aire.

4.° - Peso y masa.

168. – *Ya vimos que.*

Peso es la presión que ejerce un cuerpo sobre el sostén que le impide caer.

El PESO *es, pues, una fuerza.*

La unidad de peso será por lo tanto una unidad de fuerza.

Como unidades prácticas de fuerza se han adoptado el GRAMO-PESO *y el* KILOGRAMO-PESO.

169. – Llámanse **pesas** los cuerpos que se usan para medir el *peso.*

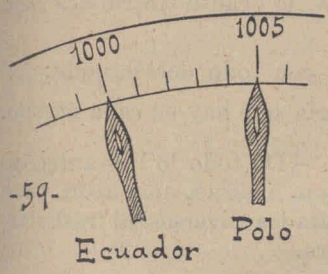
Patrón de pesas es una pesa construida en París, y enviada a las distintas naciones, para que basándose en ella construyan o comparen sus propias *pesas.*

El *patrón de pesas* adoptado por la *Comisión Internacional del Metro* se llama **kilogramo-patrón** o KILO-PATRÓN.

En Sévres hay un KILO-PATRON oficial, *que sirve de base para la construcción de los* KILO-PATRONES *que se envían a las distintas naciones.*

Aquél recibe el nombre de **patrón internacional**; y estos otros, el de **patrones nacionales.**

170. - Como la intensidad de la gravedad varía según los distintos lugares de nuestro globo, para medir con exactitud un GRAMO - PESO o un KILOGRAMO - PESO debemos valernos de los dinamómetros legales.



Ahora bien, si suspendemos de un dinamómetro un kilogramo patrón, obtendremos diversos resultados según que efectuemos la pesada en el Ecuador, en París, en Buenos Aires o en el Polo.

Si graduamos el dinamómetro en el ECUADOR, y luego lo llevamos al Polo..... (fig. 59).

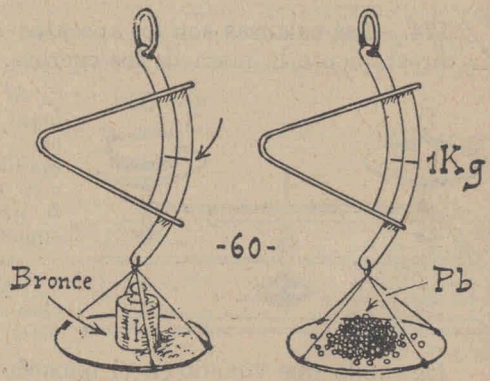
De lo cual se deduce que:

EL PESO DE UNA MISMA CANTIDAD DE MATERIA VARÍA SEGÚN LOS LUGARES EN QUE SE EFECTÚE LA PESADA.

Sin embargo, la cantidad de materia ha permanecido invariable.

171. - **Masa** es la cantidad de materia que hay en cada cuerpo.

Si en Buenos Aires colocamos en el platillo de un dinamómetro una pesa de hierro *de 1 kg., y señalamos el punto en que se detiene el fiel (fig. 60) podemos después colocar en el platillo otra sustancia, por ej.* plomo (*municiones*), *hasta que el fiel llegue a la misma señal.*



Se *supone* que, si una porción de plomo, p. ej., tiene en un lugar del globo el mismo *peso* que una porción determinada de hierro: AMBOS CONTIENEN LA MISMA CANTIDAD DE MATERIA, O SEA LA MISMA **masa.**

172. - Para aclarar la sentencia anterior diremos que:

1.° POSTULADO DE LA MATERIA ÚNICA. — Las diversas sustancias son diversos estados de una materia única originaria, que actualmente posee distintos grados de *concentración elemental.*

La hipótesis de los electrones y las experiencias correspondientes, dan cada vez más aspecto de certeza a este postulado.

2.° POSTULADO DE LA **masa-materia.** — Nada nos prohibe admitir que se llame MATERIA, la causa intrínseca del *peso* de cada cuerpo.

Por lo tanto, podremos decir, con todo derecho que:

Masa es la cantidad de materia que hay en cada cuerpo.

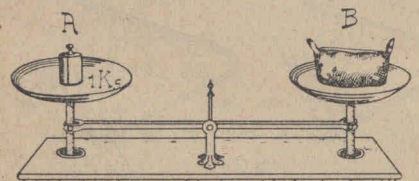
173. - MEDIDA DE LA MASA. - De todo lo que antecede resulta que los *dinamómetros no son instrumentos aptos para medir las masas*; porque dan resultados diversos, al trasladarlos de un lugar a otro de la Tierra.

Existe, sin embargo, un aparato seguro para medir las masas: es la BALANZA.

En otro lugar se estudiarán los diversos tipos de balanzas, y sus condiciones de sensibilidad y exactitud.

Aquí nos corresponde tan sólo advertir que:

174. - **Las balanzas** son los aparatos que sirven para medir directamente la masa de los cuerpos.



Si en un platillo de la balanza colocamos 1 kg. y en el otro colocamos azúcar hasta equilibrar (fig. 61) podremos decir que: SOBRE EL PLATILLO **B** HAY LA MISMA MASA QUE SOBRE EL PLATILLO **A**.

O sea que:

«El paquete de azúcar (incluso el papel) *posee la misma masa que la pesa de 1 kg.».*

De modo que cuando en el almacén nos venden 1 Kg. de azúcar, nos venden una MASA de azúcar correspondiente al KILO-MASA.

Y sería un error suponer que nos venden *1 kilo-peso* de azúcar.

175. – CONSECUENCIA. — Cuando decimos *"Kilogramo"*, unas veces nos referimos al PESO de 1 Kg. patrón y otras veces a la MASA de 1 Kg. patrón.

Para no confundir, pues, debemos decir KILOGRAMO – PESO y KILOGRAMO – MASA, según los casos.

Igualmente diremos: GRAMO-PESO *y* GRAMO-MASA.

176. - Como conclusión repetimos que:

a) Las mediciones efectuadas en los *dinamómetros*, dan GRAMOS – PESO y KILOS–PESO.

b) Las mediciones efectuadas en las *balanzas*, dan GRAMOS – MASA y KILOS – MASA.

5°. - Los tres conceptos de masa.

177. – La palabra **masa** en Física tiene un solo significado saber: CANTIDAD DE LA MATERIA ÚNICA DE QUE SE COMPONEN TODAS LAS SUSTANCIAS.

Pero como esa materia única debe ser medida mediante *alguna de sus manifestaciones*, se ha determinado medirla: a) *por medio del peso*, b) *por medio de la inercia.*

178.–Sin embargo, nada nos puede asegurar que la causa intrínseca del peso y de la inercia de cada cuerpo sea ÚNICA Y EXCLUSIVAMENTE la cantidad de materia que dicho cuerpo contiene.

Por lo tanto existen tres clases de **masa**: a) MASA FÍSICA b) MASA GRAVÍTICA, c) MASA DE INERCIA.

Advertimos desde ya que: ESTAS TRES CLASES DE MASAS puede ser que sean una misma cosa (1).

---

(1) Ciertos experimentos con los tubos de Crookes han demostrado que los ELECTRONES carecen de *masa material*, a no ser que sea tan exigua, que hasta ahora no se haya podido advertir su presencia, dada la magnitud de la *masa eléctrica* que contienen. En cambio los NÚCLEOS de los átomos tienen *masa material* (masa de inercia) que, sin embargo algunas experiencias, completadas con cálculos subsiguientes, llegan a insinuar que es una MASA APARENTE, o por lo menos que: *dicha masa de inercia* no depende tan sólo de la *cantidad de materia* que hay en los núcleos atómicos, sino también de ciertas condiciones relacionadas con la velocidad de traslación de dichos núcleos. — Véase: GRAETZ - *"La teoría Atómica"* (Cap. II: Los átomos de la electricidad); y GIANFRANCESCHI - "La Física de los Corpúsculos', (Cap. V: Los corpúsculos eléctricos).

Basándose en las mismas experiencias, ambos autores llegan a consecuencias opuestas: el primero niega la *realidad* de la masa material; y el segundo no sólo la afirma, sino que no dejándose ofuscar por el *frío raciocinio matemático*, entra en consideraciones que explican satisfactoriamente la COMPATIBILIDAD que puede existir entre la *masa real* y esas experiencias paradójicas. R. POINCARÉ y D. NIS hacen notar como han excedido los límites del raciocinio mesurado los que quisieron demostrar que la masa material del núcleo atómico es *aparente* como la de los electrones (D. NIS — *"Cosmologie"*: Tomo I, Libro V, § 2: "Les phénomènes de radioactivité").

179. – **Masa física** es la cantidad de materia que cada cuerpo contiene.

Masa gravitatoria es la causa intrínseca del peso de cada cuerpo.

Masa de inercia es la causa intrínseca de la inercia de cada cuerpo.

180. – Ya vimos como se mide la masa gravitatoria; a saber: comparando el peso local del cuerpo en referencia con el peso local del kilo – masa.

Y entonces tenemos que: $\frac{M}{m} = \frac{P}{p}$

M *(masa del cuerpo)* **m** *(masa del kilopatrón o de sus submúltiplos).*
P *(peso local del cuerpo)* **p** *(peso local del kilopatrón o de sus submúltiplos).*

181. — *Para entender* qué es MASA DE INERCIA, *hay que saber* qué es inercia:

Inercia es la pasividad de la materia.

A saber:

Es una propiedad por la cual los cuerpos no pueden modificar su estado de reposo o de movimiento libre.

1°. *El estado de reposo se modifica mediante el movimiento.*
2°. *El movimiento libre es rectilíneo y uniforme.*

Por lo tanto se modifica de dos maneras: a) acelerándolo, retardándolo o deteniéndolo; b) *desviando el cuerpo de su trayectoria rectilínea.*

182. — Ahora podemos aclarar el concepto de masa de inercia, diciendo que:

Masa de inercia es la causa del estorbo que hace cada cuerpo a las fuerzas que pretenden *moverlos*, o *detenerlos* o *desviarlos* en el movimiento que ya han adquirido.

Para simplificar el lenguaje, llamamos también MASA DE INERCIA el estorbo... Pero *en realidad la masa* NO ES EL ESTORBO, SINO LA CAUSA DE DICHO ESTORBO.

Está bien simplificar el lenguaje; pero está mal *olvidarse del significado propio* de las palabras con que expresamos nuestro raciocinio.

183. – Más adelante veremos COMO SE MIDE LA MASA DE INERCIA.

6.° – Concepto intuitivo de velocidad.

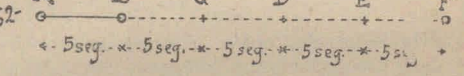
184. – **Velocidad** es la condición de un móvil que se traslada más o menos ligero.

Eso de "MÁS O MENOS LIGERO" *significa que:* para recorrer un espacio dado, emplea mucho o poco tiempo.

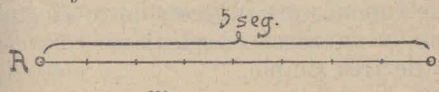
185. – La velocidad puede ser CONSTANTE O VARIABLE.

Se dice que un móvil tiene **velocidad constante** cuando con él se pueden efectuar las siguientes experiencias:

1.° *Si para recorrer el segmento* **AB**, (fig. 62) *emplea por ej. 5 segundos: para recorrer cada uno de los segmentos* **BC**, **CD**, *etc., iguales a* **AB**, *debe emplear también 5 segundos.*



62



-63-

2.° *Si para recorrer* **AB** (fig. 63) *emplea 5 seg., para recorrer cada una de las porciones* $m = 1/8$ **AB**, *deberá emplear* $5 \div 8 = 5/8$ *seg.*

Velocidad variable es la que no da los resultados anteriormente expuestos.

186. – Atendiendo a la velocidad, el movimiento puede ser UNIFORME y VARIADO.

Es **uniforme** el movimiento que tiene un móvil cuando está animado de *velocidad constante.*

En el movimiento uniforme se tiene como resultado que: A TIEMPOS IGUALES CORRESPONDEN ESPACIOS IGUALES.

LÉXICO.— *Aquí la palabra* **espacio** *significa:* ESPACIO LINEAL RECORRIDO.

Es **variado** el movimiento, cuando la velocidad no permanece constante.

En el movimiento variado se tiene como resultado que: A TIEMPOS IGUALES CORRESPONDEN ESPACIOS DESIGUALES.

187. – El movimiento variado puede ser IRREGULAR y REGULAR.

Como ejemplo de movimiento irregular podemos citar el de un hombre que camina: ahora se apura, ahora retarda la marcha, aquí se para, allá se pone a correr para alcanzar el ómnibus, etc.

Como ejemplos de movimiento regularmente *variado daremos dos:*

a) Una piedra que cae libremente: a medida que avanza, aumenta su velocidad.

b) Una piedra lanzada verticalmente al aire: a medida que avanza disminuye su velocidad.

188. – En Física no se estudia el movimiento IRREGULAR, sino considerándolo como si fuese regular; y a menudo se considera como si fuese movimiento uniforme.

Ej.: un hombre ha recorrido 50 cuadras en 70 minutos. ¿Cuál fué su velocidad media?

$$v = \frac{50}{70} = \frac{5}{7} \text{ cd.}$$

Ha recorrido, COMO TÉRMINO MEDIO $^5/_7$ cd. por minuto.

189. – VELOCIDAD MEDIA. — Cuando un móvil tiene movimiento irregular, se puede suponer que su recorrido se efectuó con movimiento uniforme; y entonces se calcula su *velocidad media* aplicando la regla de tres simple.

Ej: Si en 70 minutos recorrió 50 cd.
en 1 » » x

$$x = \frac{50}{70} = \frac{5}{7} \text{ cd.}$$

En el problema anterior, "$^5/_7$ cd. por minuto" es la **medida** *de la velocidad* media *del peatón.*

190. – Podemos, en consecuencia decir que:

Velocidad media de un recorrido con movimiento variado es la velocidad que debiera haber tenido el móvil para efectuar *con movimiento uniforme* el mismo recorrido en el mismo tiempo.

FISICA GENERAL

(CONTINUACIÓN)

III° — Metrología.

1.° — Objeto de la Metrología.

191. — **Metrología** es la parte de la *Física General* que estudia los métodos y aparatos de medición.

Esta parte de la Física está íntimamente relacionada con las Matemáticas en forma tal que se puede decir que forma parte integrante de ambas categorías de ciencias.

Metrotecnia es el arte de medir; o sea: es la práctica de la Metrología, y su estudio detallado pertenece a la *Física aplicada.*

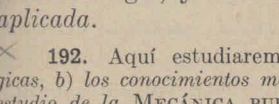
192. Aquí estudiaremos solamente: *a) las prenociones metrológicas, b) los conocimientos metrológicos necesarios para introducirnos en el estudio de la* MECÁNICA PURA.

2.° — Magnitud, medición, cantidad y número.

193. — **Magnitud** es todo lo que puede aumentar o disminuir.

El calor, el tamaño de un cuerpo, la alegría, la edad, etc.

194. — **Medir** una magnitud es compararla con otra de su especie, para ver cuántas veces una cabe en la otra.



Las líneas **a** *y* **b** (fig. 64) *son dos magnitudes.*

Puedo medir **b** por medio de **a**, obteniendo por resultado que:

$$b = 3a$$

195. — La palabra *"tres"* o su símbolo correspondiente *3* con que representamos la relación entre **a** y **b**, se llama NÚMERO.

Número es el resultado de la medición.

196. – **Cantidad** es toda magnitud que se puede medir.

El calor es cantidad, porque hemos logrado medirlo, aunque sea indirectamente.

La risa, *el* enojo, *etc. son magnitudes, pero no son cantidades.*

Es bueno advertir aquí que existe una verdadera anarquía entre los diversos autores, con respecto al significado que dan a las palabras MAGNITUD, y CANTIDAD. Pero todo esto es cuestión de palabras. Nosotros aquí haremos las divisiones y subdivisiones necesarias para conformarnos con los diversos criterios, no en la cuestión accesoria de las *palabras*, sino en la fundamental de las *ideas*.

197. – Atendiendo al modo cómo están constituidas las cantidades, se dividen en: DISCRETAS y CONTINUAS.

198. – **Discreta** es la cantidad que está constituida por una asociación de objetos que se consideran como mutuamente iguales.

Ej.: un montón de ladrillos, un conjunto de hombres, una caja de bolitas, una hilera de árboles.

199. – Una magnitud constituida por objetos desiguales no es cantidad, a no ser que se la considere como cantidad continua.

Así un montón de escombros, podrá ser medido, sólo como CANTIDAD CONTINUA.

200. – **Continua** es la cantidad que está formada de manera que no consta de partes que se distingan individualmente unas de otras.

Ej.: El agua de un vaso, una línea recta, el área de un terreno, etc.

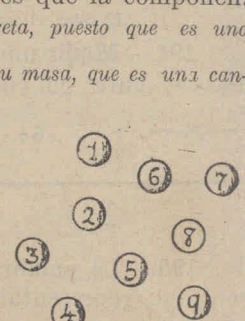
201. – Toda cantidad discreta pasa a ser continua, cuando la medimos sin tener en cuenta las partes que la componen.

Así una bolsa de trigo es una cantidad discreta, puesto que es una asociación de granitos de trigo.

Sin embargo, cuando la pesamos, *medimos su masa, que es una cantidad continua.*

202. – MODO DE MEDIR LAS CANTIDADES DISCRETAS. — Las medimos contando sus partes.

En el caso de la fig. 65, decimos que hay 9 bolitas, *porque hemos contado hasta* **9**.



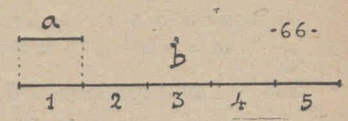
-65-

203. – MODO DE MEDIR LAS CANTIDADES CONTINUAS. — Tomaremos como ejemplo una línea recta.

1er. Caso. — Cuando una de las dos cantidades cabe justo en la otra (fig. 66).

Transportamos la línea **a** *sucesivamente sobre* **b**, *y contamos, por ej. hasta* **5**.

Entonces diremos que: **b = 5a**



-66-

Pero tambien podemos decir que: **a** = $^1/_5$ **b**

También en el caso de las bolitas hubiéramos podido decir que "Una bolita era $^1/_9$ del conjunto".

3.° – Unidad y número.

204. – **Unidad** es la cantidad que usamos para medir a otras de su especie.

Así, cuando dijimos que teníamos 9 bolitas, *tomamos por unidad la* BOLITA:

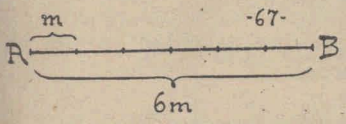
En el caso en que dijimos que la línea **b** equivalía a 5 líneas **a**, tomamos por unidad la línea **a**.

Pero cuando dijimos que la línea **a** correspondía a $^1/_5$ de la línea **b**, tomamos por unidad la línea **b**.

205. – En el caso de **b = 5a**, como resultado obtuvimos un número *entero*.

Y en el caso de **a** = $^1/_5$ **b**, obtuvimos una *fracción simple*.

206. – **Fracción simple** es el cociente que se obtiene descomponiendo la unidad en partes iguales.



-67-

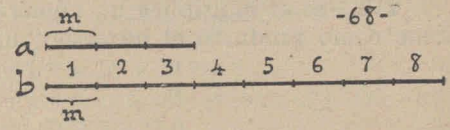
Si considero como unidad la recta **AB** (fig. 67), *y la divido en 6 partes iguales: cada porción* **m** *es una fracción simple de* **AB**.

Y tenemos que: **m** = $^1/_6$ **AB**

207. – MODO DE MEDIR LAS CANTIDADES CONTINUAS. — *2.° Caso.*— Cuando ninguna de las dos cantidades cabe justo en la otra.

Para medir a **b** *por medio de* **a**, *recurrimos a una fracción simple de* **a** *que es* **m**.

$m = \frac{1}{3}a$



-68-

Y medimos a **b** *por medio de* **m**, *obteniendo:*

$$b = 8m \quad \text{o sea} \quad b = {}^{8}/_{3}\, a$$

Si medimos a **a** *por medio de* **b**, *obtenemos:*

$$m = {}^{1}/_{3}\, b \quad y \quad a = 3m \quad o\ sea \quad a = {}^{3}/_{8}\, b$$

203. – Las expresiones 5, $^{1}/_{5}$, $^{8}/_{3}$ y $^{3}/_{8}$ son números.

5 es un número entero.

$^{1}/_{5}$, $^{8}/_{3}$ y $^{3}/_{8}$ *son fracciones o números fraccionarios.*

Número es la expresión que indica cuántas veces una cantidad contiene la *unidad elegida*, o una fracción simple de dicha unidad.

Entero *es el número que se obtiene contando unidades.*

Fraccionario *es el número que se obtiene contando fracciones simples de la unidad.*

209. – Los números 5 y $^{1}/_{5}$ son mutuamente recíprocos. Lo mismo dígase de $^{8}/_{3}$ y $^{3}/_{8}$.

Recíproco de un número es el que se obtiene invirtiendo el orden de la medición.

4.° – Propiedades importantes de los números recíprocos.

210. – Para obtener el recíproco de una fracción, basta invertirla:

$$\text{rec. de } {}^{9}/_{11} = {}^{11}/_{9}$$

Y como $5 = {}^{5}/_{1}$ *tendremos que:*

$$\text{rec. de } 5 = {}^{1}/_{5} = 0{,}2$$

211. – Es lo mismo multiplicar una cantidad por un número, que dividirla por su recíproco.

$$A \times 6 = A \div {}^{1}/_{6}$$
$$B \div 3 = B \times {}^{1}/_{3}$$
$$C \times {}^{4}/_{7} = C \div {}^{7}/_{4}$$
$$D \div {}^{3}/_{11} = D \times {}^{11}/_{3}$$

212. – Si se multiplica un número por su recíproco, se obtiene como producto el número "uno".

$$15 \times {}^{1}/_{15} = {}^{15}/_{15} = 1$$
$${}^{3}/_{10} \times {}^{10}/_{3} = {}^{30}/_{30} = 1$$
$$0{,}44 \times 2{,}2727\ldots = 1$$

213. – El cociente que se obtiene dividiendo un número por su recíproco, es siempre el cuadrado de dicho número.

$$6 \div \frac{1}{6} = 6 \times \frac{6}{1} = 6^2$$

$$\frac{4}{9} \div \frac{9}{4} = \frac{4 \times 4}{9 \times 9} = \frac{4^2}{9^2} = \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$$0{,}44 \div 2{,}2727.... = 0{,}44^2$$

$$2{,}2727.... \div 0{,}44 = 2{,}2727^2$$

214. – El recíproco de $\sqrt{n}$ es $\frac{\sqrt{n}}{n}$

$$\text{rec. de } \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

215. – Es importante conocer las propiedades de los recíprocos, porque con ellos a menudo se pueden abreviar los cálculos eliminando *divisores molestos.*

Así tenemos que: $5 \div {}^3/_4 = 5 \times {}^4/_3$ y · ${}^3/_5 \div {}^7/_2 = {}^3/_5 \times {}^2/_7$, *que es cosa que se estudia en Aritmética elemental.*

Pero también tenemos que:

$$2530 \div 2{,}2727... = 2530 \times 0{,}44$$

$$32 \div 25 = 32 \times 0{,}04 \qquad \frac{47}{\sqrt{3}} = \frac{47 \times \sqrt{3}}{3}$$

216. – Hemos querido insertar aquí los datos precedentes, porque en *Física matemática* se calcula mucho con multiplicaciones y divisiones, y hay que aprender a simplificar esos cálculos.

5.° – Dos clases de cantidades.

217. – Generalmente confundimos los dos conceptos de SUMA Y ADICIÓN, y aquí debemos deslindarlos.

Sumar ES REUNIR VARIAS CANTIDADES, PARA FORMAR CON ELLAS UNA CANTIDAD MAYOR.

Ej.: Tres socios aportan a una sociedad respectivamente $ 8.000, $ 3.500 y $ 1.750. Su capital social será:

$$8.000 + 3.500 + 1.750 = \mathbf{13.250}\ \$$$

Adición ES EL ACTO DE AÑADIR UN INCREMENTO A UNA CANTIDAD YA EXISTENTE.

Ej.: Hace 26 años yo tenía 17 años de edad. Mi edad actual es:
17 (edad inicial) + 26 (incremento) = **43** años. (edad actual).

218.– La SUSTRACCIÓN es operación inversa de la *adición*, más que de la *suma*.

Sustracción ES EL ACTO DE QUITAR A UNA CANTIDAD SU INCREMENTO, que en esta operación recibe el nombre de DECREMENTO.

Ej.: Tengo 43 años; pero hace 26 años tenía:
43 (edad actual) – 26 (decremento) = (17 edad inicial).

219. – No hay que confundir *sustracción*, con DIFERENCIACIÓN.

Diferenciar DOS CANTIDADES ES BUSCAR POR CUÁNTO UNA AVENTAJA A LA OTRA.

Tengo 43 años, y comencé a enseñar a los 17 años. Mi actuación en el magisterio corresponde a:
43 (edad actual) — 17 (edad inicial) = **26** años (diferencia)

220. – Propiedad **asociativa** es la que tienen varias cantidades, de poderse *sumar entre sí*.

Propiedad **aditiva** es la que tiene una cantidad, de *aceptar incremento*.

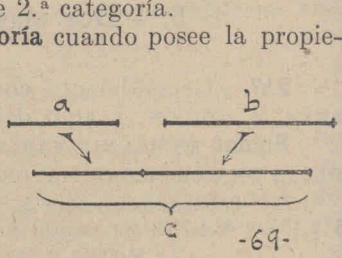
Por la misma definición de magnitud sabemos que toda cantidad posee la propiedad aditiva *y su inversa la* substractiva.

221. – Aquí nos desentendemos del significado que dan los neo – matemáticos a los términos "ASOCIATIVO" y "ADITIVO".
Adición, añadir y *aditivo* tienen un mismo significado básico.
Sumar, asociar, asociativo, ídem. Antes de introducir terminologías en un nuevo orden de cosas, estúdiese etimología.

222. – Atendiendo a las dos propiedades enumeradas, las cantidades pueden ser de 1.ª y de 2.ª categoría.

Una cantidad es de **1.ª categoría** cuando posee la propiedad *asociativa*.

Ej.: la línea **a** *y la línea* **b** (fig. 69) *pueden acercarse mutuamente, y sumarse, para formar la línea* **c**.



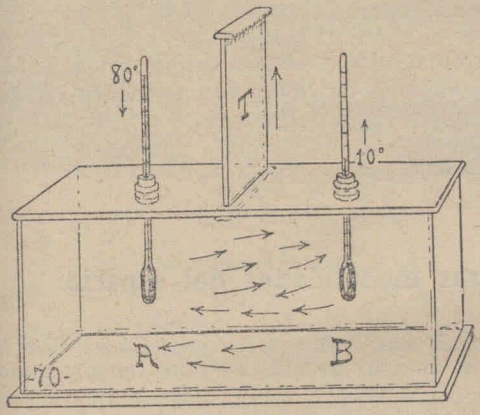
-69-

a + b = c

223. – Una cantidad es de **2ª. categoría,** cuando no puede ser asociada a otra de su especie.

Ej.: Juan tiene 14 años y Pedro 12 años.

Podremos decir, (POR DECIRLO), que *"entre los dos tienen 26 años"*. Pero es lo cierto que *la edad de Juan*, MÁS *la edad de Pedro* no dan una tercera edad.



En el dibujo hemos supuesto que se trata de una estufa de laboratorio, con paredes perfectamente aisladoras del calor.

Acaba de levantarse el tabique **T**: las flechas del interior indican el movimiento del aire de ambas cámaras.

Otro ejemplo: Dos aposentos contiguos (fig. 70) *tienen diferentes temperaturas: en uno hay* 15° *y en el otro hay* 23°.

Si abrimos la puerta que comunica a ambos, y movilizamos el aire, no obtendremos

$$15 + 23 = 38°$$

sino tan sólo: $^{38}/_{2} = 19°$ que es el término medio de ambas temperaturas.

Si los dos aposentos son iguales, obtendremos el resultado que acabamos de indicar; sino, obtendremos otros resultados; pero nunca obtendremos 38°.

6.° - Magnitudes físicas.

224. - Las magnitudes que entran en los cálculos físicos son de dos especies: PRIMITIVAS y DERIVADAS.

Por de pronto advertimos que toda cantidad PRIMITIVA *es de* 1ª categoría; *y que hay* DERIVADAS, *de una y de otra categoría.*

225. - Son magnitudes PRIMITIVAS:

1.° El ESPACIO en sus tres formas: *lineal, areal* y *volumétrico.*

2.° El TIEMPO.

3.° La MASA.

4.° La ENERGÍA en sus dos manifestaciones de presión y de tensión.

Aunque Chwolson (que es el que seguimos en esta clasificación) considere como cantidad primitiva la VELOCIDAD, no puede en forma alguna aceptarse este criterio, desde que la *velocidad* es una cantidad que llegamos a conocer en función del tiempo y del espacio; siendo además una cantidad de 2.ª categoría.

Hay otras magnitudes físicas primitivas *en cuanto a que tienen esencia propia, como el* calor, *del que la temperatura es una magnitud derivada.*

Pero, aunque de por sí sean primitivas, nosotros no llegamos a su conocimiento sino mediante las cuatro que acabamos de citar, las cuales pueden designarse como FUNDAMENTALES.

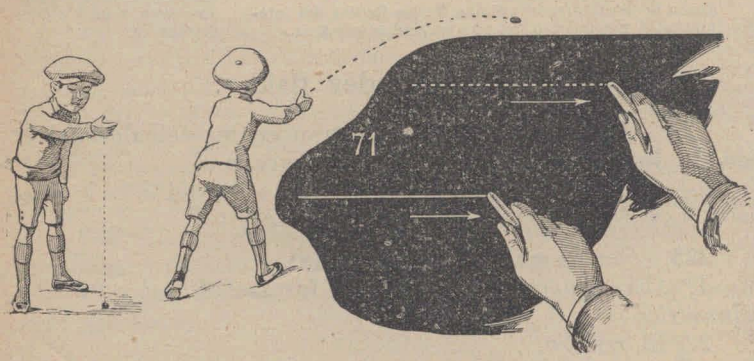
226. – Las cuatro magnitudes fundamentales *espacio, tiempo, masa* y *energía,* carecen de definición científica, y sólo aceptan definición explicativa o aclaratoria.

Esta definición o aclaración se ha dado en su debido lugar.

7.° – Las tres modalidades del espacio.

227. – *El espacio puede considerarse con tres modalidades distintas, a las que denominaremos:* ESPACIO LINEAL, ESPACIO AREAL *y* ESPACIO VOLUMÉTRICO.

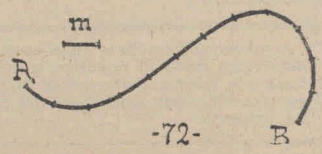
Espacio lineal es el recorrido posible o real de un punto material o de un cuerpo puntual (fig. 71).



El espacio lineal se llama también UNIDIMENSIONAL, *porque tiene una sola dimensión o sea porque:*

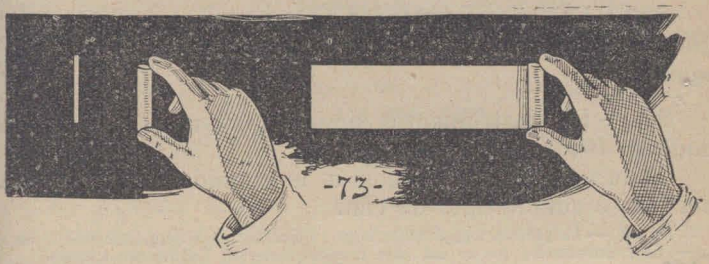
Puede ser medido solamente en una dirección (fig. 72).

AB = 12 m. de largo.



-72-

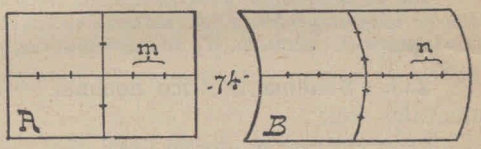
228. – **Espacio areal** es el recorrido posible o real de una línea material o de un cuerpo lineal (fig. 73).

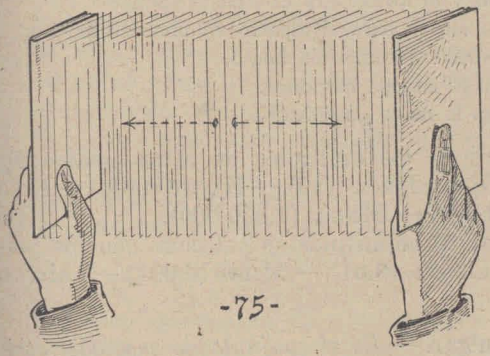


El espacio areal se llama también BIDIMENSIONAL, *porque tiene dos dimensiones; o sea porque:*

Puede ser medido en dos direcciones (fig. 74).

A = 6m *de largo*
4m *de ancho*
B = 7n *de largo*
5n *de ancho*



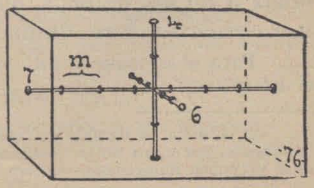


229. – **Espacio volumétrico** es el recorrido posible o real de una superficie material o de un cuerpo laminar (fig. 75).

El espacio volumétrico se llama también TRIDIMENSIONAL, *porque tiene tres dimensiones o sea porque:*

Puede ser medido en tres direcciones distintas (fig. 76).

(*ancho*) 6m (*alto*) 4m (*largo*) 7m



8.º - Unidades físicas.

230. - Se llaman **unidades físicas**, las magnitudes físicas que han elegido los metrólogos para medir a las demás de su especie.

231. - Los instrumentos simples que se usan para medir unidades físicas, se llaman **medidas**.

Toda MEDIDA corresponde a una unidad física o a un múltiplo o submúltiplo de ella.

NOTA. — La palabra *medida* es ambigua. Significa: a) MEDICIÓN o acción de medir.— b) INSTRUMENTO que se usa para la medición.— c) UNIDAD DE MEDIDA.

232. - **Sistema métrico** es un conjunto ordenado de medidas, dependientes unas de otras.

En la Metrología moderna existen cinco sistemas, que no son completamente independientes: a) EL SISTEMA DECIMAL, b) EL SISTEMA VULGAR, c) EL SISTEMA TÉCNICO, d) EL SISTEMA CEGESIMAL, e) EL M. T. S.

233. - **Sistema métrico decimal.** — Sus unidades fundamentales son:

El METRO para el espacio lineal.

El METRO CUADRADO y el ÁREA para el espacio areal.

El METRO CÚBICO o *estéreo* para el espacio volumétrico macizo.

El LITRO para el espacio volumétrico hueco.

El GRAMO-PESO para la energía mecánica.

El GRAMO-MASA para la masa gravitatoria.

234. - El nombre de los múltiplos de estas medidas se obtiene con los prefijos: DECA (10) — HECTO (100) — KILO (1.000) — MIRIA (10.000) — MEGA (1.000.000).

El nombre de los submúltiplos se obtiene con los prefijos: DECI (0,1) — CENTI (0,01) — MILI (0,001) — MICRO (0,000001).

235. - **Sistema vulgar.** — *Es el conjunto de medidas, derivadas o no del decimal, que se han vuelto más comunes en el uso ordinario.* Sus unidades más usuales son:

Para el espacio lineal: el METRO, el KILÓMETRO, el CENTÍMETRO y el MILÍMETRO. (1).

(1) Aún no ha decaído del todo el uso de la *milla*, la *legua*, la *cuadra*, la *vara* y la *pulgada*, por culpa de la inercia que muestra naturalmente el hombre, siempre que se le proponen innovaciones en sus costumbres rutinarias.

Para el espacio areal: el METRO CUADRADO o *centiárea*, el DECÁMETRO CUADRADO o ÁREA y el HECTÓMETRO CUADRADO o HECTÁREA.

Para el espacio volumétrico: el METRO CÚBICO o ESTÉREO, el DECÍMETRO CÚBICO o LITRO y el CENTÍMETRO CÚBICO o *mililitro*.

Para la energía mecánica: la TONELADA-PESO o *megagramo-peso*, el KILOGRAMO-PESO o *kilo-peso* y el GRAMO-PESO.

Para la masa gravitatoria: la TONELADA-MASA o *megagramo-masa*, el KILOGRAMO-MASA o *kilo-masa* y el gramo-masa.

Para el tiempo: el AÑO-TRÓPICO, el DÍA SOLAR MEDIO, la HORA, el MINUTO y el SEGUNDO.

236. – **Sistema técnico** o PRÁCTICO. — Se ha denominado así el sistema que ha tomado por base de todas las medidas, estas tres:

El METRO (**m**) para el espacio lineal.

El KILOGRAMO (**Kg**) para las fuerzas, comparadas con el peso local de 1 Kilo-masa.

El SEGUNDO (**s**) para el tiempo.

Todas las demás unidades se relacionan con estas tres, en forma tal, que podemos llegar a ellas aplicando fórmulas que dan su relación con las unidades fundamentales.

237. – Las unidades que por ahora citaremos de este sistema, son:

El METRO para el espacio lineal.

El METRO CUADRADO para el espacio areal.

El METRO CÚBICO para el espacio volumétrico.

El KILO-PESO para la fuerza.

La UNIDAD TÉCNICA DE MASA, que tiene valor local lo mismo que el kilo-peso.

La unidad técnica de masa, no tiene nombre especial. Pero en el texto, para comodidad, la llamaremos **tecnomasa**.

1 TECNOMASA	*en*	*Paris*	*vale*	9,81	KILOS-MASA.
«	«	« *el Polo*	«	9,83	« «
«	«	« *Bs. Aires*	«	9,80	« «
«	«	« *el Ecuador*	«	9,78	« «

Este número que varía entre 9,78 y 9,83, según los lugares del Globo, se llama *"aceleración de la gravedad"* y se representa con una **g** o con una γ (gamma).

238. – **Sistema cegesimal** o de *medidas absolutas*. — Se ha llamado así el sistema que ha tomado por base de todas las medidas estas tres:

El CENTÍMETRO (**c**) para el espacio lineal.

El GRAMO (**g**) para la masa gravitatoria y de inercia.

El SEGUNDO (**s**) para el tiempo.

El nombre de este sistema se abrevia **C. G. S.** *que se puede leer así: "centímetro, gramo, segundo".*

El **sistema M. T. S.**, del que hablaremos más tarde, es un complemento del *G. G. S.*

239. – Las unidades que por ahora citaremos del sistema *G. G. S.* son:

El CENTÍMETRO para el espacio lineal.

El CENTÍMETRO CUADRADO para el espacio areal.

El CENTIMETRO CÚBICO para el espacio volumétrico.

El GRAMO para la masa.

La DINA para la energía mecánica.

En su debido lugar definiremos la DINA, que es la única unidad desconocida para los alumnos.

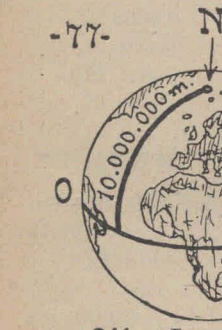
Aquí solamente diremos que

$$1 \text{ dina} = {}^{1}/_{9{,}8} \text{ gramo-peso}$$

9.º - El metro teórico y el metro tipo.

240. – Siendo el METRO la base de los tres sistemas, es necesario definirlo bien.

Existen dos metros: el TEÓRICO y el TIPO.



Metro teórico es una medida que corresponde a la *diezmillonésima parte* del cuadrante de meridiano terrestre (fig. 77).

El metro teórico fué propuesto en 1792 por la Academia de Ciencias *de París.*

241. – Los que fundaron el sistema métrico decimal, construyeron en 1796 un **metro tipo**, que se aproxima mucho al *metro teórico.*

*Dicho metro tipo es una barra de platino que se denomina "*METRO DE LOS ARCHIVOS*" y que se custodia en el* Conservatorio de Artes y Oficios *de París.*

242. – **Metros patrones** son las copias fieles del *metro de los Archivos.*

Hay dos clases de *metros patrones:*

a) El PATRÓN INTERNACIONAL, que fué controlado directamente con el metro de los Archivos.

b) Los PATRONES NACIONALES que fueron controlados con el internacional.

En 1875 se creó la Convención diplomática del metro *en la que había representantes de 18 naciones. Esta convención creó el* INSTITUTO INTERNACIONAL DE PESAS Y MEDIDAS *que comenzó a funcionar en 1876, instalándose en* Sèvres *(cerca de París).*

Este instituto construyó el METRO-PATRÓN INTERNACIONAL *que sirvió de base para la construcción de los demás metros patrones.*

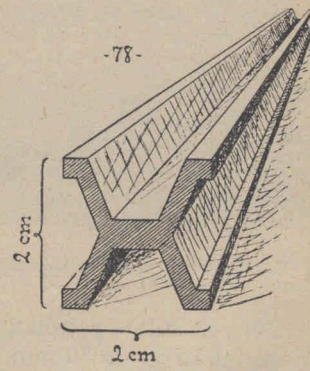
243. – El **Metro – Internacional** es una barra de platiniridio (platino con 10% de iridio) construida y custodiada por el *Instituto Internacional de Pesas y Medidas* radicado en Sèvres.

Los **patrones derivados** del INTERNACIONAL se llaman PATRONES NACIONALES, porque el Instituto de Sèvres ha enviado uno a cada nación de las que se han adherido a la Convención del metro.

Los patrones nacionales son también de platiniridio como el internacional; su sección tiene forma de una **H** *de 20 mm. de ancho y de alto.* (fig. 78).

Las extremidades de los patrones nacionales son redondas, correspondiendo a la superficie de una esfera de 1 m. de radio.

El patrón internacional se halla marcado con divisiones y subdivisiones hasta milímetros. En cambio los patrones nacionales no tienen divisiones.



244. – Trabajos posteriores a los que se hicieron para calcular la medida del *metro de los Archivos* dieron a conocer que éste tiene unas $^{2}/_{10}$ de mm. menos que el *metro teórico.*

De donde resulta que:

1 m. teórico = 1,0002 m. tipo.
1 m. tipo = 0,9998 m. teórico.

245. – *En cambio los patrones nacionales tienen un error* probable *de mm. 0,0002 (en más o en menos) con respecto al internacional.*

De lo cual resulta que todos los patrones nacionales difieren del teórico sensiblemente lo mismo que el metro internacional (1).

10.º - El kilogramo patrón.

246. - Con posterioridad a la construcción del METRO DE LOS ARCHIVOS se construyó el KILOGRAMO DE LOS ARCHIVOS, de platino como aquél.

Comparando en el vacío el peso del kilo de los Archivos, *se construyó el* **kilo - patrón internacional**.



El KILO-PATRÓN que se conserva en la "OFICINA TÉCNICA DE PATRONES" (Bureau of Standards) de Wáshington.

247.-El **kilo - patrón internacional** es un cilindro de platiniridio (al 10%) de 39 mm. de alto por 39 de ancho, y de bordes redondeados que se conserva en el *Instituto Internacional de pesas y medidas* de Sèvres..

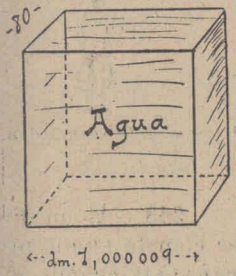
N. B.- Las ilustraciones señaladas con **L. N.** pertenecen a la revista "La Nature", de París.

(1) Para ampliar los conocimientos relativos al establecimiento del S. M. D. y a la creación del METRO - PATRÓN y KILO-PATRÓN, consúltese: ESPASA: Artícs.; MÉTRICO y MASA (2.ª parte: Física de las masas); y DICC. E. H. A.: Artícs.: METROLOGÍA (Metrología moderna) y METRO.

Los **kilos-patrones nacionales** *tienen la misma forma y sustancia que el internacional* (fig. 79), *y tienen a su respecto un error probable de mg. 0,002(en más o en menos).*

248. – El kilogramo teórico es la masa de 1 dm^3. o de 1 lt. de agua destilada a 4°.

Mediciones efectuadas con suma exactitud demostraron que el *kilo-patrón* tiene sobre el *kilo-teórico* un exceso de 0,000027.



De donde resulta que:
1 Kg. teórico = 0,999973 Kg. patrón.
1 Kg. patrón = 1,000027 Kg. teórico.

249.–De modo que el KILO-PATRÓN equivale a la masa de un cubo de agua de $\sqrt[3]{1,000027}$ = dm. 1,000009 de arista (fig. 80).

Es tan exiguo el error, que no vale la pena mentarlo.

11.° – Errores en la medición.

250. – En las mediciones pueden producirse dos clases de errores: SISTEMÁTICOS y FORTUITOS.

Errores sistemáticos *son los que proceden de causas que obran siempre en el mismo sentido.*

Errores fortuitos *son los que acontecen en forma completamente arbitraria.*

251. – Ambas clases de errores pueden ser: INSTRUMENTALES O DE APRECIACIÓN.

Los errores **instrumentales** dependen:

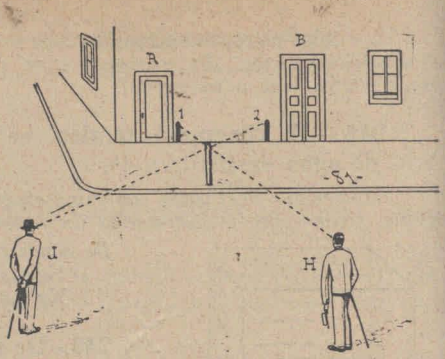
a) de la construcción más o menos imperfecta de todos los aparatos;

b) de su imperfecta instalación (mal nivelados, mal orientados, mal graduados, etc.).

Los errores de **apreciación** dependen:

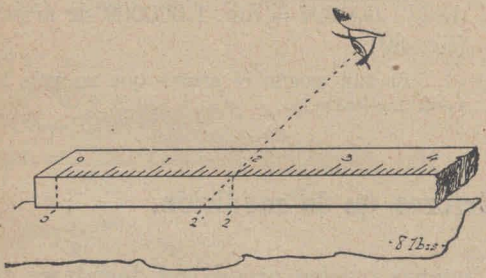
a) de las cualidades personales del observador (que puede retardarse en la apreciación del *instante* correspondiente al fenómeno que está midiendo; o puede errar al apreciar la manifestación característica que debe definir dicho instante); *b*) de los defectos de lectura, entre los que citaremos el *de paralaje.*

252. – Paralaje es el desvío aparente de la imagen de un objeto, cuando se le contempla refiriendo su posición a objetos que se hallan más o menos distantes de él (fig. 81).



H *y* **J** *contemplan el poste comparando su posición con respecto a las puertas* **A** *y* **B.**

H cree que el poste se halla cerca de **A.** En cambio **J** cree que se halla cerca de **B.**



253. – Al medir se comete ERROR DE PARALAJE cuando el observador se vale de *visuales oblicuas* (fig. 81 bis).

254. – Hay errores sistemáticos que pueden descubrirse; y entonces el observador puede fijar de antemano el ERROR RELATIVO correspondiente.

255. – Todo error de medición puede ser valuado de dos maneras: a) POR EL ERROR ABSOLUTO, b) POR EL ERROR RELATIVO.

Error **absoluto** es la diferencia que existe entre la verdadera medida y la que se ha obtenido.

Así, si midiendo una longitud real de 85 cm. obtenemos 87 cm., hemos cometido un error de:

$$87 - 85 = 2 \text{ cm.}$$

Error **relativo** es el cociente que se obtiene dividiendo el error absoluto por la medida real.

En el ejemplo anterior, el error relativo es:

$$^2/_{85} = 0{,}0235 \quad \text{o sea el } 23\,^1/_2\ {}^0/_{00}$$

El error absoluto es un número concreto, y el relativo es un número abstracto.

FÓRMULA $\varepsilon = \frac{e}{m}$

ε (*error relativo*) e (*error absoluto*) m (*magnitud real*)

256. – **Coeficiente de exactitud** es el número por el cual hay que multiplicar una medición inexacta para obtener la medida real buscada.

El coeficiente de exactitud se obtiene así: $K = \frac{1}{1+\varepsilon}$

K (*coeficiente de exactitud*)

En el ejemplo anterior: $K = \frac{1}{1{,}0235} = 0{,}977.$

257. – CORRECCIÓN DE UNA MEDIDA INEXACTA. Se multiplica dicha medida por el coeficiente de exactiud:

$$m = n \times K$$

m (*medida real*) n (*medida inexacta*)

En el ejemplo anterior, vemos que $87 \times 0{,}977 = 85$

258. – El error de las mediciones es POSITIVO cuando es *por exceso*, y es NEGATIVO cuando es *por defecto.*

Si la medida exacta es 85 cm., y la medición dió 87 cm., tenemos que

$e = +2$ cm $\qquad \varepsilon = +0{,}0235$

Si la medición hubiera dado 83 cm., tendríamos que

$e = -2$ cm $\qquad \varepsilon = -0{,}0235$

259.– Cuando el error, es positivo, el coeficiente de exactitud es menor que uno:

$$K < \textit{uno}$$

y cuando el error es negativo, el coeficiente de exactitud es mayor que uno:

$$K > \textit{uno}$$

Si $\varepsilon = +0{,}0235$ $\qquad K = \frac{1}{1{,}0235} = 0{,}977$

Si $\varepsilon = -0{,}0235$ $\qquad K = \frac{1}{0{,}9765} = 1{,}024$

MECANICA PURA

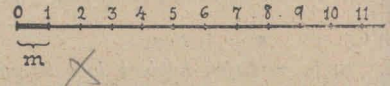
ESTATICA

I.° — Estática gráfica y experimental.

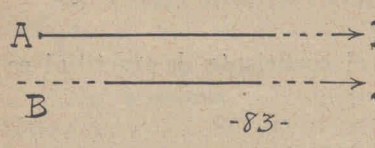
1.° – Escala y Vector.

260. – **Escala** es un segmento de línea, equidividido, cada una de cuyas partes representa por convenció una unidad cualquiera.

En la fig. 82, **m** *se llama* MÓDULO, *y representa una unidad cualquiera, por ej. 1 seg., 1 m., 1 cuadra, 1 litro, etc..*



261. – Como se ve, pues, en *Física matemática* CUALQUIER MAGNITUD PUEDE SER REPRESENTADA MEDIANTE UNA LÍNEA.



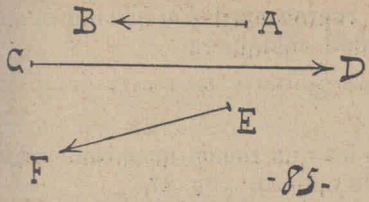
262. – Línea **dirigida** u ORIENTADA es aquella en la que conocemos cual es el sentido o rumbo de su punto generador (fig. 83).

263. – **Rayo** es toda línea dirigida que está limitada en uno de sus dos extremos (fig. 84).

Rayo INCIDENTE *es el que tiene limitado el extremo de avance.*

Rayo HUYENTE *es el que tiene limitado el extremo de origen.*





264. – Segmento de rayo o SEGMENTO DIRIGIDO es el segmento de línea orientada (fig. 85).

En todo segmento de rayo podemos considerar cuatro cosas distintas la DIRECCIÓN, el SENTIDO, LA MAGNITUD y el ORIGEN.

265. – Dirección es la posición que tiene el segmento como línea que es.

Así los segmentos **AB** *y* **CD** *tienen la misma dirección, porque son* paralelos.

Pero **EF** *tiene dirección distinta de la de* **AB** y **CD**.

266. – Sentido es el rumbo que tiene el punto generador del segmento.

El sentido se indica con una cabeza de flecha colocada en el extremo de avance del segmento.

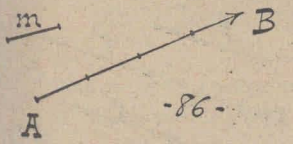
En la fig. 85, **AB** *y* **EF** *tienen el mismo sentido;* **AB** *y* **CD** *tienen sentido opuesto.*

267. – La **magnitud** del segmento es su longitud.

268. – Punto de origen es el lugar donde se inicia el movimiento del punto generador.

En nuestro ejemplo (fig. 85), *son puntos de origen* **A**, **C** *y* **E**.

269. – Para medir los segmentos dirigidos nos valemos del mismo procedimiento que en las escalas.



Vector es un segmento dirigido y medido.

En la fig. 86 podemos decir que **AB** = 4 **m**.

m (*módulo*)

270. – ELEMENTOS DE UN VECTOR. – Son los mismos que los de cualquier segmento orientado, a saber: la DIRECCIÓN, el SENTIDO, el ORIGEN y la MAGNITUD.

La magnitud se indica como en las escalas, mediante un módulo.

Así, si (fig. 86) **m** = 3 metros por segundo, *se tendrá que:*

AB <> 3×4 = 12 met./seg.

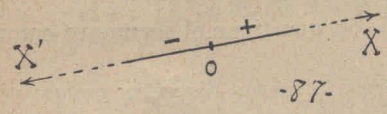
NOTA. — Usaremos el signo <> para indicar la función representativa de una escala o de un vector.

Arriba leeremos: **AB** *"representa"* 12 met/seg.

271. – Llámase **segmento representativo** el que indica mediante su longitud una cantidad cualquiera.

Hay dos clases de segmentos representativos: las ESCALAS *y los* VECTORES.

272. – **Rayos opuestos** son los que tienen un mismo origen y dirección, pero siguen sentido opuesto (fig. 87).



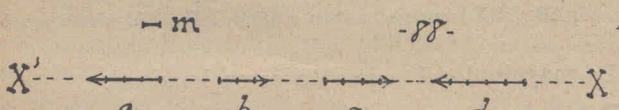
-87-

oX *opuesto a* **oX'**

Cuando dos rayos opuestos son horizontales, se acepta por convención *que el de la derecha es* positivo, *y el de la izquierda* negativo.

273. – La recta **XX'** formada por los dos rayos opuestos se llama **eje de vectores.**

Son vectores positivos los que tienen el sentido **oX**; *y vectores negativos los que tienen el sentido* **oX'**.



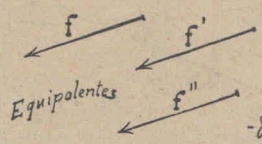
-88-

Así (fig. 88):
a = — 4m
b = + 3m
c = + 4m
d = — 5m

274. – Se llaman vectores **congruentes** los que se hallan sobre un mismo eje.

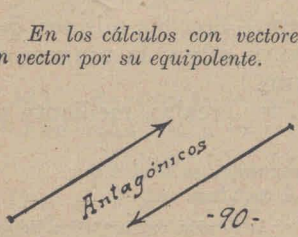
En la fig. 88, los cuatro vectores son congruentes.

275. – Vectores **equipolentes** son, los que tienen la misma *intensidad dirección* y *sentido* (fig. 89).



-89-

En los cálculos con vectores, a menudo se presenta el caso de sustituir un vector por su equipolente.



-90-

276. – Vectores **antagónicos** son los que tienen la misma *dirección* e *intensidad;* pero tienen *sentido opuesto* (fig. 90).

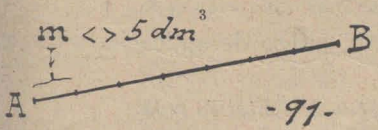
El conjunto de dos vectores antagónicos se llama PAR DE VECTORES.

2.° – Magnitudes escalares y vectoriales.

277. – Atendiendo al tipo de segmento representativo que exige cada magnitud, se han dividido las magnitudes en: ESCALARES y VECTORIALES.

278. – Magnitud **escalar** es la que puede ser *completamente* representada por medio de una simple escala.

Ej.: el volumen de un cuerpo.

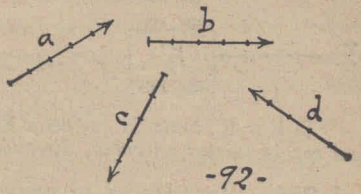


Si digo que **m** < > 5 dm³ *(fig. 91), podré representar* 35 dm³ *mediante el segmento* **AB**, *cuya dirección no afecta a nuestro intento.*

279. – Magnitud **vectorial** es la, que para ser representada íntegramente, requiere un vector.

Un empuje correspondiente a 5 Kg-peso se representará así (fig. 92).

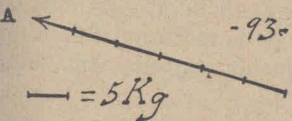
Las distintas actitudes representadas por los vectores **a, b, c** y **d** etc. nos indican la dirección y sentido en que se puede ejercer la fuerza de 5 Kg-peso.



3.° – Representación de las fuerzas.

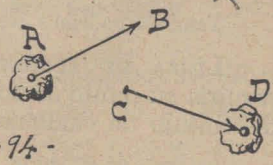
280. – Toda fuerza es una cantidad *vectorial.*

Se representará, pues, con un vector.



El vector **A** *(fig. 93) representa una fuerza de 5×6 = 30 Kg – peso, porque su módulo equivale a 5 Kg – peso y el segmento* **A** *equivale a* **6** módulos.

281. – En toda fuerza debemos distinguir cuatro elementos: la INTENSIDAD, la DIRECCIÓN, el SENTIDO y el PUNTO DE APLICACIÓN (fig. 94).



La INTENSIDAD *se representa mediante la* longitud *del vector.*
La DIRECCIÓN *se representa mediante la posición del segmento* **AB** *o* **CD**.
El SENTIDO *se representa mediante la cabeza de flecha que hay en el extremo de avance del vector.*

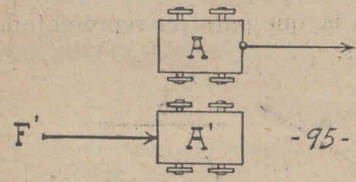
282. – Punto de aplicación es el lugar donde la fuerza actúa sobre el cuerpo que recibe su acción.

En las *fuerzas de tracción*, el punto de aplicación está en el *origen* del vector.

En la fuerza **AB** *(fig. 94), el punto de aplicación es* **A**.

En las *fuerzas de empuje*, el punto de aplicación está en el *avance* del vector.

En la fuerza **CD** *(fig. 94), el punto de aplicación es* **D**.



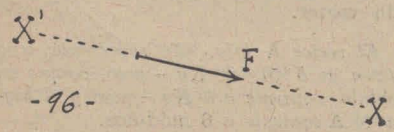
-95-

283. – 1er. Principio. — El mismo efecto se obtiene *empujando* con una fuerza, que ejerciendo *tracción* con otra igual y congruente a ella (fig. 95).

Si **F** = **F'**, *tanto da que actúe* **F** *como* **F'**, *puesto que el carro* **A** *se moverá con la misma velocidad, dirección y sentido.*

284. – Basados en el principio anterior, se ha determinado representar todas las fuerzas, como si fuesen de TRACCIÓN.

De este modo se simplifica el sistema de representarlas; puesto que así:
El punto de aplicación de toda fuerza, se *supone* que está en el origen del vector.



-96-

285. – Línea de acción o RECTA DE ACCIÓN de una fuerza es la recta indefinida que coincide con ella (fig. 96).

XX' es la línea de acción de **F**.

También podemos decir que:

LÍNEA DE ACCIÓN de una fuerza es la trayectoria que seguiría su punto de aplicación, si fuese un *punto material* libre del influjo de cualquier otra fuerza.

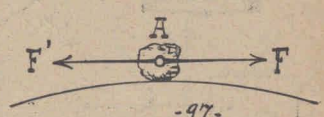
La línea de acción de cualquier fuerza es siempre una RECTA.

4.° – Equilibrio.

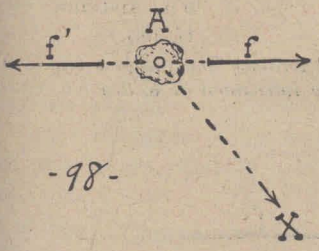
286. – Se dice que dos o más fuerzas **se equilibran**, cuando aplicadas a un cuerpo, no modifican su estado de reposo o movimiento.

a) *Si el cuerpo* **A** *(fig. 97) se halla en reposo, y se aplican a un mismo punto las fuerzas opuestas e iguales* **F** y **F'**, *el cuerpo seguirá en reposo.*

Por lo tanto el sistema **F, F'** está en equilibrio.



-97-



-98-

b) *Si* **A** *estaba en movimiento, trasladándose en sentido e intensidad del vector* **X** *(fig. 98); al aplicarle el sistema* **f, f'**, *seguirá moviéndose con la misma intensidad y sentido.*

287. – Se dice que un cuerpo está **en equilibrio**, cuando *está quieto*, a pesar de las fuerzas que están aplicadas a él.

En su debido lugar hablaremos de las diversas formas de equilibrio de los cuerpos.

Aquí solamente queremos advertir que:

No es lo mismo decir que *"dos o más fuerzas se equilibran"* y que *"el cuerpo al cual se aplican dichas fuerzas está en equilibrio."*

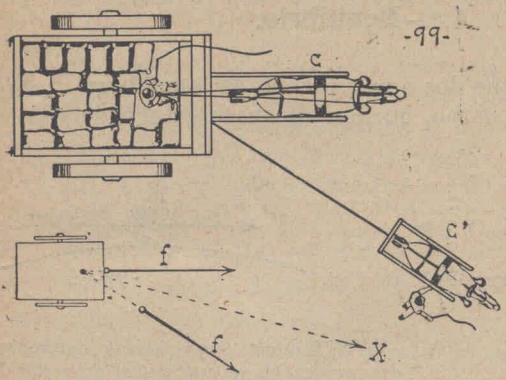
Efectivamente (fig. 98) el cuerpo **A** *se está moviendo, aunque las fuerzas* **f** *y* **f'** *se equilibren.*

288. – **Sistema** de fuerzas es un conjunto de dos o más fuerzas que actúan *simultáneamente* sobre un mismo cuerpo.

Los sistemas de fuerzas pueden ser: ESTÁTICOS y DINÁMICOS.

Sistema **estático** es un conjunto de fuerzas que se equilibran.

Sistema **dinámico** es un conjunto de fuerzas que aplicado a un cuerpo modificaría su estado de reposo o movimiento.

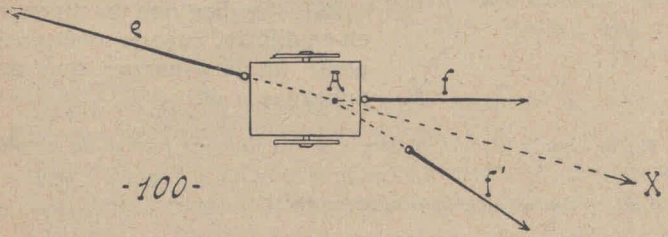


En el caso del caballo de vara y el de cuarta (fig. 99), el carro se moverá en el sentido del rayo **X**.

El sistema **f**, **f'** es, pues, dinámico.

289. – Fuerza **equilibrante** de un sistema dinámico, es la fuerza que hay que añadirle para convertirlo en sistema estático.

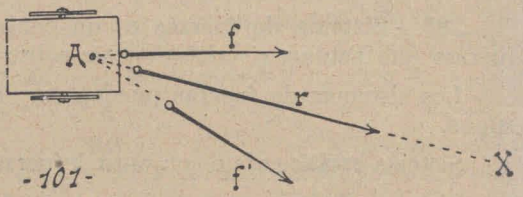
Si en el ejemplo anterior del carro, colocamos una fuerza **e** *(fig. 100) opuesta al rayo* **X**, *podremos, graduando la intensidad de* **e**, *llegar a equilibrar el carro.*



En este caso, **e** será la fuerza EQUILIBRANTE.

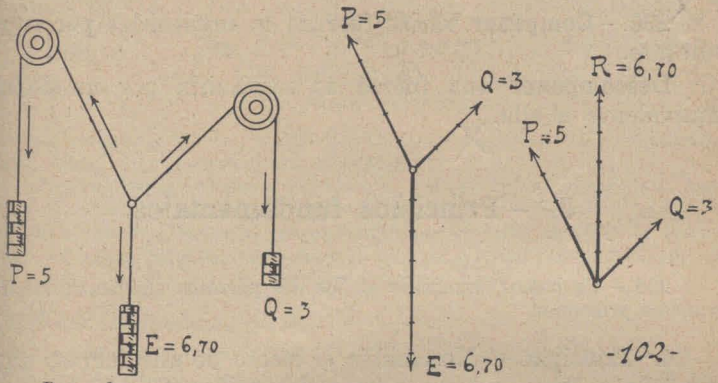
290. – **Resultante** de un sistema, es la fuerza única que puede producir el mismo efecto que el conjunto de fuerzas dadas.

En el caso del carro, retirando las fuerzas **f** *y* **f'**, *y colocando en su lugar una fuerza* **r** *(fig. 101) en dirección y sentido de* **X**, *podremos, graduando la intensidad de* **r**, *llegar a obtener el mismo efecto que producía el sistema* **f**, **f'**.



En este caso, **r** será la RESULTANTE del sistema.

291. – MÉTODO PRÁCTICO PARA CALCULAR LA RESULTANTE DE UN SISTEMA (fig. 102). – Se busca primero la EQUILIBRANTE y después se invierte su sentido.



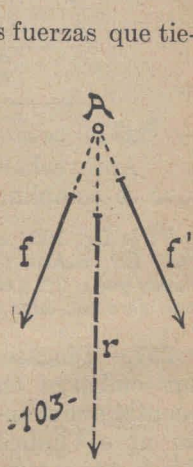
De modo que:

2.° Principio. — La RESULTANTE de un sistema de fuerzas es una fuerza opuesta a la *equilibrante*, y de igual intensidad que ella.

292. – **Componentes** de una fuerza son las fuerzas que tienen a ésta por resultante (fig. 103):

Si r = *result. de* f, f'.

f, f' = *componentes de* r.



293. – IMPORTANTE. — 1.° – La resultante de todo sistema estático vale CERO.

2.° Todo sistema estático se puede considerar como la suma de un sistema dinámico y su equilibrante.

Por lo tanto:

Un sistema dinámico se transforma en estático, añadiéndole su equilibrante.

De aquí se deduce el:

3er. Principio. — En todo sistema estático, una cualquiera de las fuerzas componentes se puede considerar como *equilibrante* de las demás.

294. – Dos sistemas son **equivalentes**, cuando tienen la misma resultante.

Para que la resultante de ambos sistemas sea una misma, *se requiere que ambas resultantes, coincidan en sus cuatro elementos:* intensidad, dirección, sentido *y* aplicación.

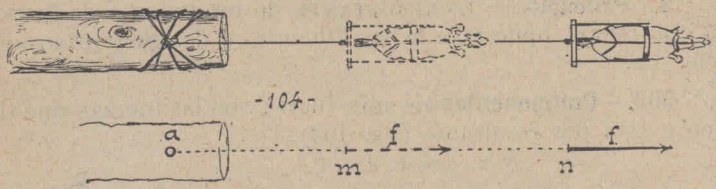
295. – **Componer** varias fuerzas es sustituirlas por su resultante.

Descomponer una fuerza es sustituirla por un sistema equivalente a ella.

5.° – Principios fundamentales.

296. – Ya hemos enunciado en los dos párrafos anteriores, los tres primeros principios.

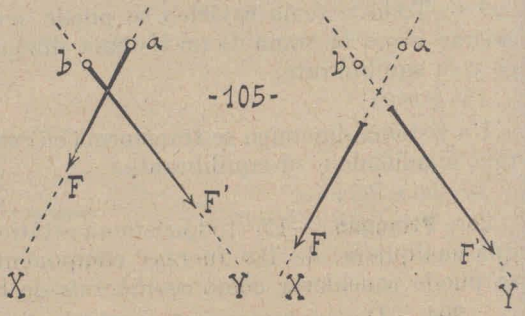
4.° Principio. — No cambia el efecto de una fuerza, aunque ésta se corra sobre su línea de acción (fig. 104).



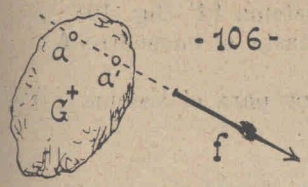
El cuerpo se mueve lo mismo cuando el balancín se aplica en **m** *o en* **n**.

Aprovecharemos esta propiedad, cuando queramos evitar que se complique una figura.

En la fig. 105, *el caso II° indica lo mismo que el I°, y es más claro que éste.*



297. – Téngase, sin embargo en cuenta, que cuando no se indica donde está el punto de aplicación de una fuerza, hay que entender que se halla en el origen del vector que la representa.



-106-

298. – 5.° Principio. — Si el punto de aplicación de la fuerza se corre sobre la línea de acción (fig. 106):

a) No cambia el efecto general dinámico. b) Cambia la orientación del cuerpo.

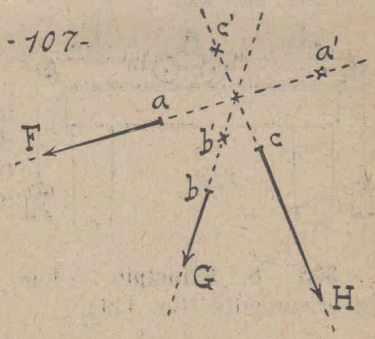
No cambia el efecto general dinámico, *porque el cuerpo se trasladará con la misma velocidad, dirección y sentido.*

Pero cambia la orientación *del cuerpo, porque éste al comenzar la traslación efectuará un movimiento de rotación hasta colocarse en equilibrio.*

Si el cambio de punto de aplicación se efectúa durante la traslación; no habrá rotación, por razones que se entenderán cuando se conozcan las condiciones de equilibrio de los cuerpos.

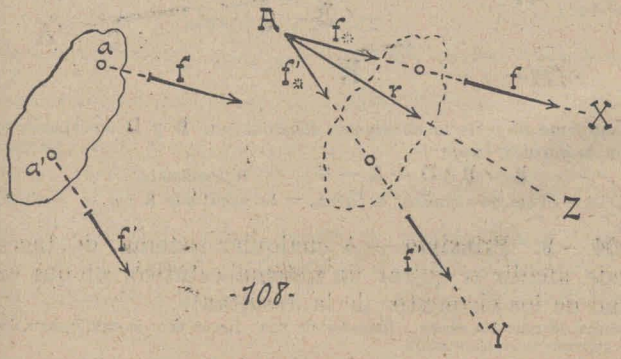
299.– 6.° Principio. — No cambia la *intensidad, línea de acción* y *sentido* de la resultante de un sistema, aunque una o varias o todas las componentes corran su punto de aplicación sobre su propia línea de acción (fig. 107).

Cambiando al sistema **F,G,H**, *sus aplicaciones* **a,b,c**, a **a'b'c'**, *lo único que cambia es la aplicación de la resultante, que se corre sobre su propia línea de acción.*



-107-

300. - Basados en el principio anterior:



-108-

Para buscar la resultante del sistema f,f' (fig. 108), correremos sus puntos de aplicación hasta el encuentro **A** de las dos líneas de acción.

La resultante **r** que obtendremos para el sistema f_*, f'_* será la misma que la del sistema f,f'.

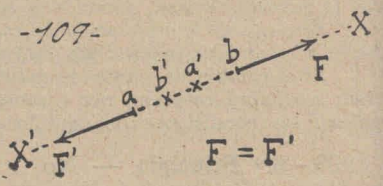
A Z *será la línea de acción de* **r**.

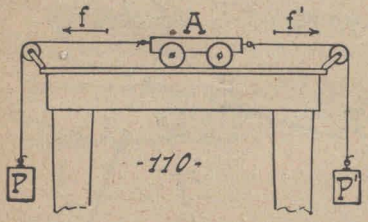
En este caso lo único que cambia es el punto de aplicación que no será **A**.

301.– 7.° Principio. — Dos fuerzas iguales y contrarias se equilibran (fig. 109).

Si **F = F'**, *su resultante es nula.*

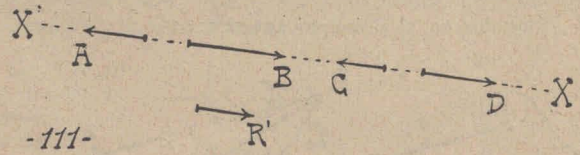
Lo mismo da que las aplicaciones sean **a,b** que **a',b'**, o cualesquiera otras, con tal que se hallen sobre **XX'**.





302. – Se demuestra experimentalmente este principio mediante un carro tirado en sentido contrario por dos pesas iguales (fig. 110).

303. – **8.° Principio.** — Las fuerzas congruentes se suman algébricamente (fig. 111).



Conforme al criterio de signos, tenemos que **B** *y* **D** *son positivos, y* **A** *y* **C** *son negativos; luego:*

$$\mathbf{R} = \mathbf{B} + \mathbf{D} - \mathbf{A} - \mathbf{C}$$ **R** *(resultante)*

NOTA. — Para no complicar la figura, se ha sustituido **R** por su equipolente **R'**.

304. – **9.° Principio.** — A cualquier sistema de fuerzas se le puede añadir o quitar un sistema estático, sin que cambie ninguno de los elementos de la resultante.

Recuérdese que: los *cuatro elementos* de una fuerza son: la INTENSIDAD, la DIRECCIÓN, el SENTIDO y la APLICACIÓN.

Este principio es evidente, porque la resultante de cualquier sistema estático vale cero.

305. – El principio 9.° se explota, añadiendo, en ciertos casos, *dos fuerzas iguales y opuestas*, para simplificar la solución de algunos problemas.

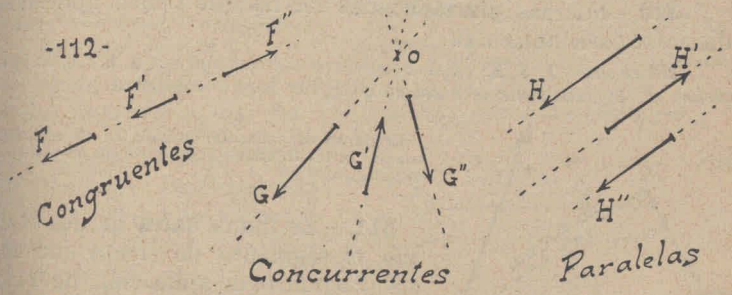
6.° – Composición de fuerzas.

306. – Para seguir un orden racional en el estudio de la composición de fuerzas, dividiremos los problemas en dos grupos: a) composición de SISTEMAS COPLANARES, b) composición de SISTEMAS HETEROPLANOS.

Fuerzas **coplanares** *o* ISOPLANAS *son las que se hallan en un mismo plano.*

Fuerzas **heteroplanas** *son las que no tienen un plano común.*

307. – Las fuerzas coplanares pueden ser: CONGRUENTES, CONCURRENTES y PARALELAS (fig. 112).



Congruentes *son las fuerzas que tienen una misma línea de acción* (**F**, **F'** y **F''**)

Concurrentes *son las fuerzas cuyas líneas de acción concurren a un punto* (**G**, **G'**, **G''**).

Paralelas *son las fuerzas que tienen una misma dirección* (**H**, **H'**, **H''**).

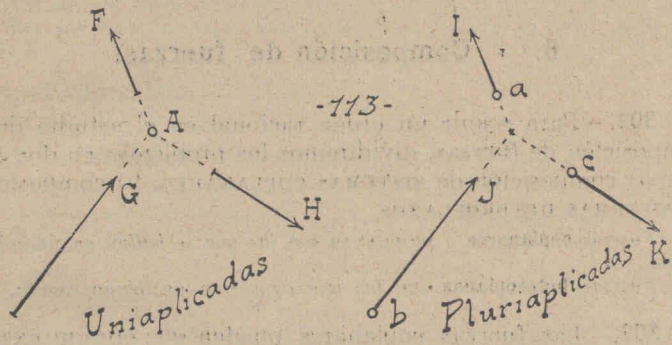
Las fuerzas CONGRUENTES forman un caso particular de las CONCURRENTES y de las PARALELAS; sin embargo se estudian primero, por razones de comodidad.

308. – Las fuerzas *concurrentes* (y por lo tanto también las *congruentes*) pueden presentar dos casos distintos: el de FUERZAS UNIAPLICADAS y el de FUERZAS PLURIAPLICADAS (fig. 113).

309. – Fuerzas **uniaplicadas** son las que tienen un punto común de aplicación.

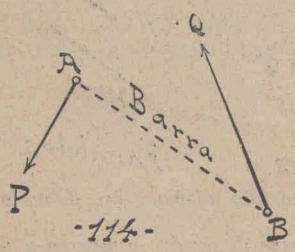
Si **A** *es el punto de aplicación de cada una de las componentes* **F**, **G**, **H**, *el punto* **A** *será también el punto de aplicación de su resultante.*

Las fuerzas uniaplicadas se representan casi siempre con vectores de origen único pero a veces conviene representarlos como se ve en la fig, 113.



310.– Fuerzas **pluriaplicadas** son las que tienen aplicación distinta para cada una.

En el caso **I**, **J**, **K**, *cuyas respectivas aplicaciones son* **a**, **b** y **c**, *la aplicación de la resultante se halla en cualquier lado, menos en* **A**.



El punto de aplicación se halla en **A** solamente cuando la resultante es nula; o sea, cuando el sistema es estático.

311. – Se llama **barra** de dos fuerzas, el segmento de recta que une sus dos puntos de aplicación (fig. 114).

AB *es la barra del sistema* **P**,**Q**.

312. – **10.° Principio.** — El punto de aplicación de la resultante de cualquier sistema de *dos fuerzas coplanares*, se halla siempre sobre su barra o sobre la prolongación de la barra (fig. 115).

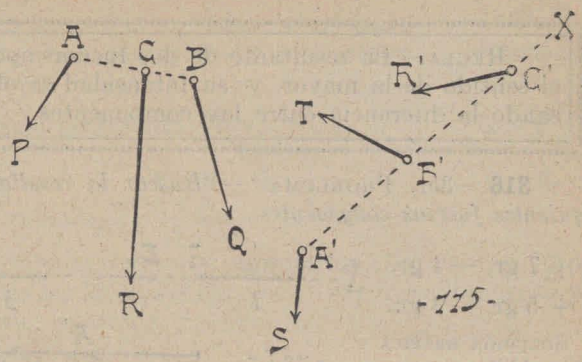
a) *Se halla sobre la barra, si las dos fuerzas tienen el mismo sentido.*

Ej.: Sistema **P**, **Q**, cuya resultante es **R**.

b) *Se halla sobre la prolongación de la barra, si las dos fuerzas tienen sentido opuesto.*

Ej.: El sistema **S, T,** tiene por resultante **R'** siendo **C'** su punto de aplicación, que se halla en la prolongación de la línea **AB**.

Este principio debe tenerse muy en cuenta siempre que se resuelven problemas de composición o descomposición de fuerzas.



7.° - Composición de fuerzas congruentes.

313. — Estos problemas se basan en los principios 4° y 8°.

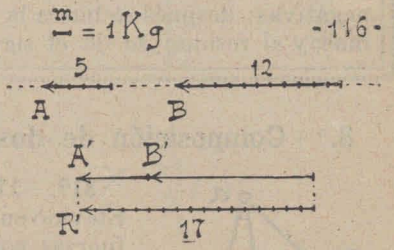
314. – 1er. PROBLEMA. — *¿Cuál es la resultante de un sistema de dos fuerzas congruentes, de igual sentido, cuyas intensidades son respectivamente:* — 5 Kg. y — 12 Kg.?

SOLUCIÓN GRÁFICA (fig. 116).

R se halla sobre **XX'**.

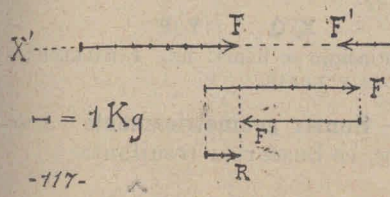
SOLUCIÓN ARITMÉTICA:

$R = -(5+12) = -17$ **Kg.**



> REGLA.— Dos fuerzas congruentes y del mismo sentido, suman sus intensidades.

315. – 2.° PROBLEMA. — *Buscar la resultante de dos fuerzas opuestas, cuyas respectivas intensidades son:* — 7 Kg. y 9 Kg.



SOLUCIÓN GRÁFICA (fig. 117).

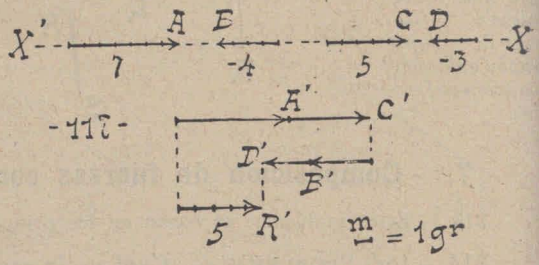
SOLUCIÓN ARITMÉTICA:

$R = 9 - 7 = 2$ **Kg.**

REGLA.—La resultante de dos fuerzas opuestas tiene el sentido de la mayor, y su intensidad se obtiene buscando la diferencia entre las componentes.

316. – 3er. PROBLEMA. — *Buscar la resultante de las siguientes fuerzas congruentes:*

+ 7 gr, — 4 gr,
+ 5 gr, — 3 gr.



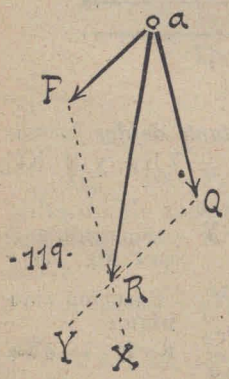
SOLUCIÓN GRÁFICA (fig. 118)

SOLUCIÓN ARITMÉTICA:

$R = (7+5) - (4+3)$
$= 5$ gr.

REGLA. — Para buscar la resultante de varias fuerzas congruentes, se suman aparte las positivas, y aparte las negativas; después se busca la diferencia entre ambas sumas, y al residuo se da el signo de la suma mayor.

8.° – Composición de dos fuerzas concurrentes



-119-

317. – **11.° Principio** (descubierto por Stevino en 1586). — La resultante de dos fuerzas concurrentes uniaplicadas es la diagonal del paralelogramo que se obtiene al trazar desde el extremo de cada fuerza, una paralela a la otra fuerza (fig. 119).

X//Q Y//P

Este principio se llama: DEL PARALELOGRAMO DE LAS FUERZAS.

318. – **Sumar geométricamente** varios vectores, es buscar su resultante.

De modo que: $\mathbf{R} = \mathbf{P} \overset{\wedge}{+} \mathbf{Q}$

El símbolo $\hat{+}$ se lee: *«sumado geométricamente con»*.

NOTA.—No hay que confundir las *sumas algébrica* y *aritmética* con la *suma geométrica*.

319. – Resta geométrica DE VECTORES. — Si $\mathbf{R} = \mathbf{P} \hat{+} \mathbf{Q}$

tendremos que: $\mathbf{P} = \mathbf{R} \hat{-} \mathbf{Q}$ y $\mathbf{Q} = \mathbf{R} \hat{-} \mathbf{P}$

El símbolo $\hat{-}$ se lee *«restándole geométricamente»*.

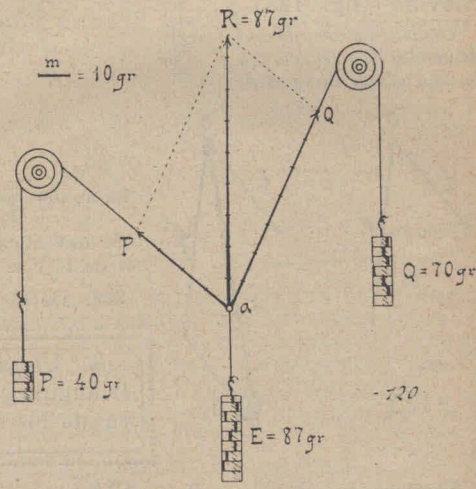
320. – COMPROBACIÓN DEL PRINCIPIO DE STEVINO.— El paralelogramo de las fuerzas se demuestra experimentalmente por medio de varios aparatos:

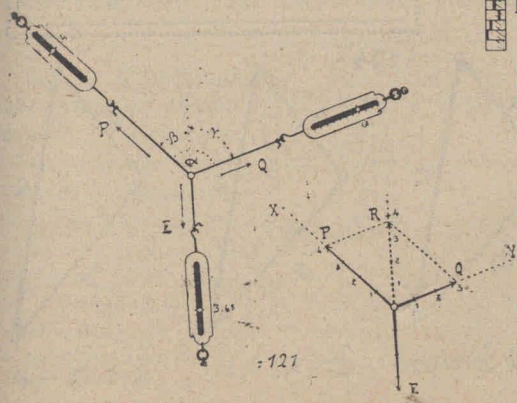
a) *El de la fig. 120 consta de una pizarra en la que hay dos poleas.*

De los extremos de un haz formado por tres hilos, se cuelgan tres pesos cualesquiera.

Dos de los hilos se adaptan a las poleas, y se suelta el sistema, dejándolo que se equilibre solo.

En la pizarra se calca el ángulo α, y a partir de **a** se trazan los vectores correspondientes (en nuestro caso **40** y **70**)

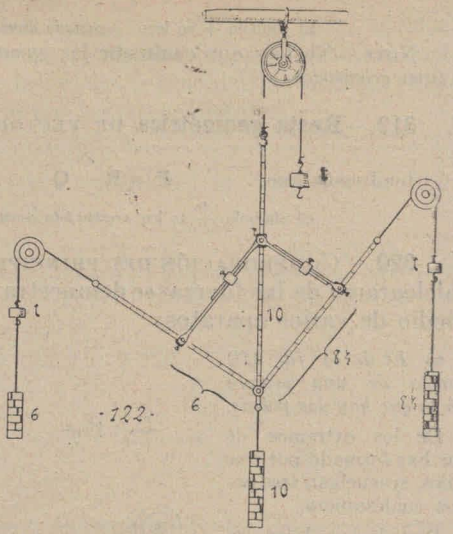




Se completa el paralelogramo, y al medir con el módulo la diagonal **R**, se verá que mide lo mismo que la equilibrante (en nuestro caso **87**).

b) *Mediante tres dinamómetros se modifica el experimento anterior, como se ve en la fig. 121.*

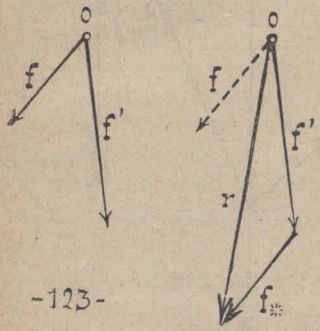
321. – Existe un aparato que no difiere mucho de los anteriores, y que da directamente la medida de la resultante valiéndose de un módulo constante (fig. 122).



-122-

322. – Triángulo de las fuerzas.—Este sistema es una modificación del de Stevino (fig. 123).

Desde el extremo de una de las dos fuerzas se traza la equipolente de la otra.



-123-

En nuestro ejemplo:

$f_* =$ equip. de f.

Se une el extremo de f_* con el extremo de f, y se obtiene r.

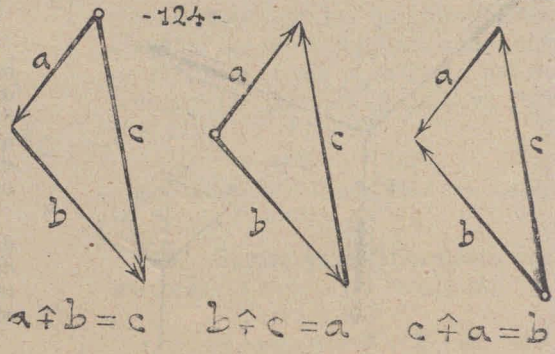
323. De lo anterior se deduce que:

1.° Un lado cualquiera de un triángulo es la suma geométrica de los otros dos (fig. 124).

Examinando bien la fig. 124, se verá que:

a) El segundo vector componente debe tener su origen donde termina el primero.

b) El vector resultante tiene su origen en el origen del primer vector componente.



-124-

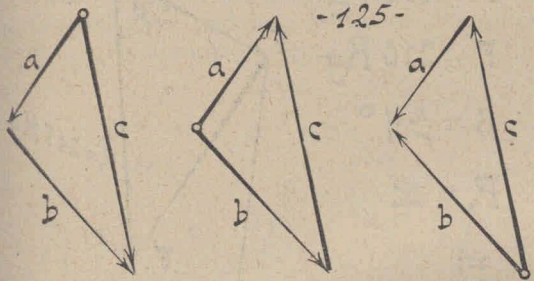
$a \hat{+} b = c$ $\quad b \hat{+} c = a$ $\quad c \hat{+} a = b$

BIBLIOTECA NACIONAL DE MAESTROS

2.° Un lado cualquiera de un triángulo es la diferencia geométrica entre los otros dos (fig. 125).

324. – OTRO MODO DE REPRESENTAR LOS VECTORES.

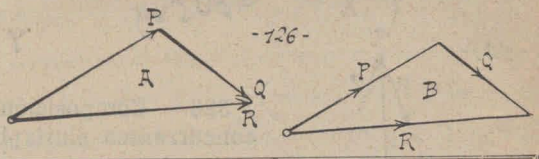
-125-



Cuando se construye el triángulo de vectores, es más conveniente colocar la cabeza de flecha en la mitad del segmento; así queda más clara la figura (fig. 126).

(**A**) *y* (**B**) *indican lo mismo; pero* (**B**) *es más práctico que* (**A**).

-126-



El alumno debe acostumbrarse a los diversos sistemas de representación y de notación, porque sino se hallará en la imposibilidad de *consultar autores*, siendo que son muy diversos los sistemas en boga.

Por eso nosotros vamos poco a poco enseñando los diversos sistemas; y no damos preferencia a ninguno. Por otra parte DETESTAMOS LA PEDANTERÍA DE LOS QUE EN EL EXAMEN NO DEJAN PLENA LIBERTAD AL ALUMNO EN EL USO DE LOS SISTEMAS REPRESENTATIVOS Y NOTATIVOS.

325. – Problemas sobre fuerzas concurrentes. 1.er EJEMPLO. *—Dos fuerzas uniaplicadas, respectivamente de* 16 gr. *y* 28 gr., *tienen la inclinación mutua de* 105°. *Buscar la resultante.*

Se resuelve por medio del paralelogramo de las fuerzas (fig. 127).

$F = 16\,gr$

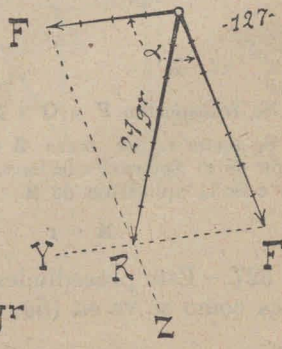
$F' = 28\,gr$

$\alpha = 105°$

$R = x$

$m \longmapsto = 4\,gr$

-127-



2.° EJEMPLO. — *Dos fuerzas uniaplicadas miden respectivamente* 150 Kg. *y* 210 Kg. – *La primera, forma con la resultante un ángulo de* 59°. *Búsquese la resultante.*

Se resuelve por medio del triángulo de las fuerzas (fig. 128).

Corresponde al siguiente problema geométrico: CONSTRUIR UN TRIÁNGULO, CONOCIENDO LOS LADOS Y EL ÁNGULO QUE UNO DE ELLOS FORMA CON EL TERCER LADO.

$F = 150$ Kg

$F' = 210$ Kg

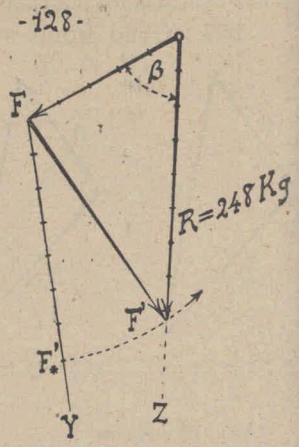
$\beta = 59°$

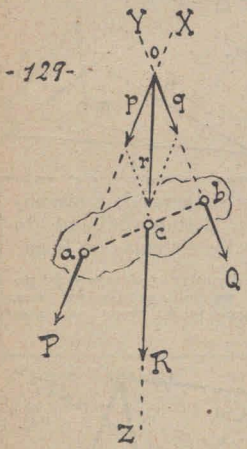
$R = x$

m

30 Kg

-128-





-127-

326. – Composición de dos fuerzas concurrentes pluriaplicadas (fig. 129).

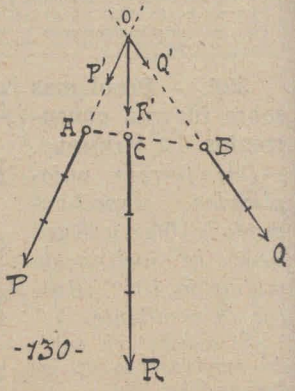
Se busca **o** (punto de concurrencia de **X** e **Y**).

X e **Y** (*líneas de acción de* **P** y **Q**).

Se transportan **P** y **Q** a **p** y **q**.

Se busca **r**. Se traza **Z** (línea de acción de **r**) Se traza la barra **ab**. El punto **c** es la aplicación de **R**.

$$R = r$$



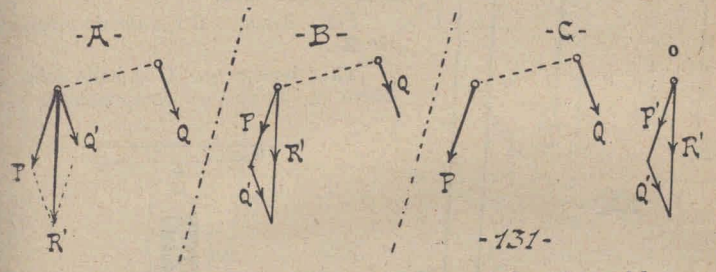
-130-

327. – Este procedimiento se modifica como se ve en (fig. 130).

Hemos hecho $P' = 1/3\ P$ y $Q' = 1/3\ Q$; por lo tanto ha resultado $R' = 1/3\ R$.

Se corrige el resultado haciendo $R = 3\ R'$.

328. – Cuando no nos interesa conocer la línea de acción de la resultante, podemos recurrir a cualquiera de los tres procedimientos siguientes (fig. 131).



(A) *Se traza* **Q'** (*equipolente de* **Q**), *y se completa el paralelogramo.*

(B) *A continuación de* **P** *se traza* **Q'**, *y se completa el triángulo.*

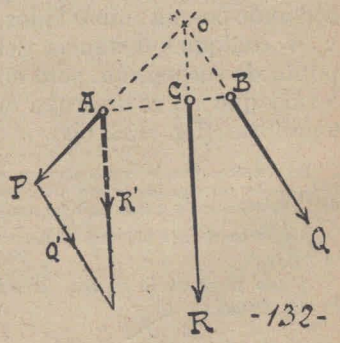
(C) *Desde un punto arbitrario* **o** *se trazan sucesivamente* **P'** *y* **Q'** (*equip. de* **P** *y* **Q**); *y se completa el triángulo.*

NOTAS. – 1.ª El mismo resultado se hubiera obtenido si se hubiese llevado **P'** a continuación de **Q**.

2.ª Con estos procedimientos no se obtiene la resultante, sino una de sus equipolentes.

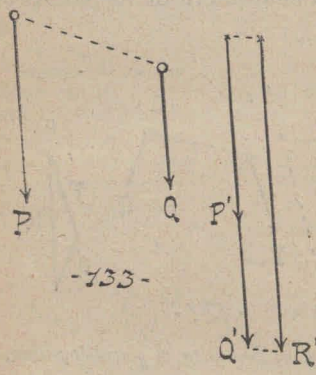
329. – Cuando hemos encontrado a **R'** con el procedimiento anterior, no cuesta nada colocarla en su lugar (fig. 132).

Se busca **o**, y luego se traza **oR** // **R'**, etc.



9.° – Composición de fuerzas paralelas.

330. – Composición de dos fuerzas paralelas, EN EL MISMO SENTIDO (fig. 133).



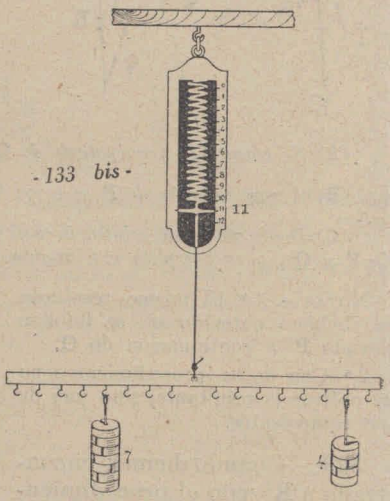
- 133 -

$$R = P + Q$$

R es paralela a **P** y **Q**, y en el mismo sentido que ellas.

Falta buscar a **C** (*punto de aplicación de* **R**).

Ya sabemos que **C** se halla sobre la barra de las fuerzas componentes.



- 133 bis -

Se comprueba experimentalmente el principio anterior suspendiendo de un dinamómetro una regla equilibrada y colgando pesas a ambos lados, y a cualquier distancia del punto de suspensión: pero en forma que no se destruya el equilibrio (fig. 133 bis).

En nuestro ejemplo suponemos que cada pesita corresponde a una división del dinamómetro, y que la regla no pesa.

Pero en el caso práctico, el dinamómetro marcará, además del peso de **R**, el de la regla.

Como se ve en la figura, siendo las componentes **4** *y* **7**, *la equilibrante es* **11**; *luego...* .

331. – Existen dos procedimientos gráficos para buscar el punto **C**.

1er. PROCEDIMIENTO (fig. 134). – En **A** y **B** se añaden las fuerzas opuestas e iguales **1** y **2**.

Siendo **1**, **2** *un sistema estático no se altera el efecto de* **P**, **Q**.

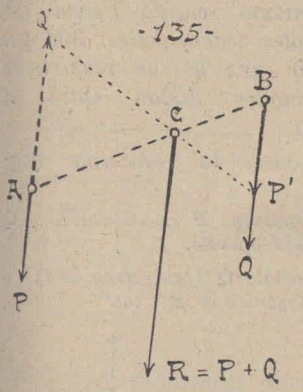
Se buscan **3** y **4** (resultantes respectivas de **P**, **1** y **Q**, **2**.

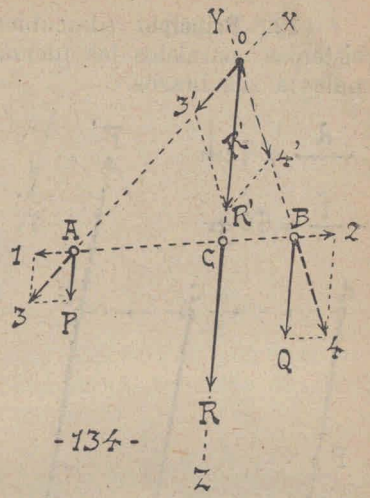
Se transportan **3** y **4** al punto **o** (encuentro de **X** e **Y**).

Se busca **R'**, (resultante de **3'**, **4'**).

Se traza **Z** (línea, de acción de **R'**)

C se halla en el encuentro de **Z** con la barra **AB**.





332. – 2.° PROCEDIMIENTO (fig. 135).

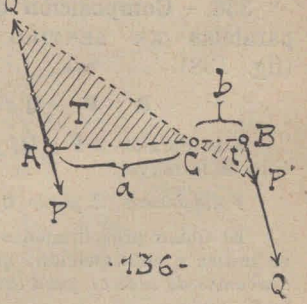
En **A** se traza el vector **Q'** (antagónico de **Q**); y en **B** se traza **P'** (equip. de **P**).

Uniendo el extremo de **P'** con el de **Q'** se determina el punto **C**.

El mismo resultado hubiéramos obtenido, si hubiésemos trazado **P''** (antagónico de **P**) y **Q''** (equipolente de **Q**).

333. – En los sistemas paralelos, se llama **brazo** de una fuerza el segmento comprendido entre su aplicación y el de la resultante (fig. 136).

a = *brazo de* **P**
b = *brazo de* **Q**



334. – Los dos triángulos **T** y **t** son semejantes.

Por lo tanto:

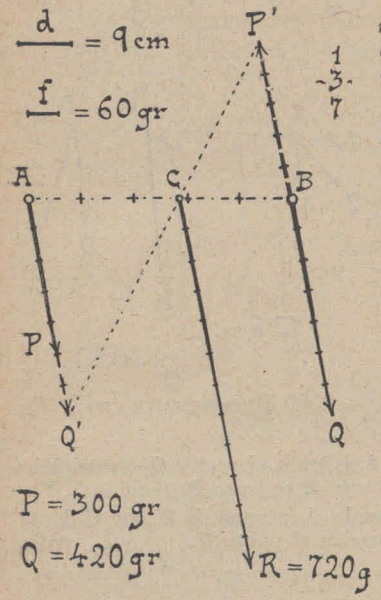
$$\frac{P'}{Q'} = \frac{b}{a}$$

Sustituyendo **P'** y **Q'** por sus equipolentes **P** y **Q**, obtenemos:

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$$

De lo cual resulta que:

12.° Principio (descubierto por Arquímedes). — En los sistemas paralelos las fuerzas, son inversamente proporcionales a sus brazos.



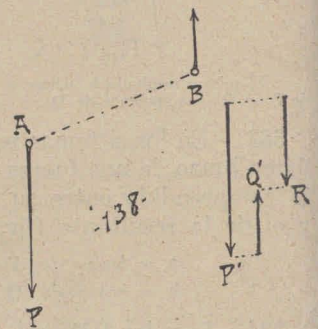
Este principio puede enunciarse de varias maneras. Aquí lo citamos solamente; dejando para otro lugar su explicación y demostración.

335. – EJEMPLO DE PROBLEMA. — *Dos fuerzas paralelas y del mismo sentido tienen las siguientes intensidades:* 300 gr. *y* 420 gr.; *y sus respectivas aplicaciones distan entre sí* 45 cm.

Búsquese la resultante (fig. 137).

Se prolonga **P** *en su sentido y* **Q** *en sentido opuesto.*

Se señala **Q'** (*equipolente de* **Q**) *y* **P'** (*antagónica de* **P**); *etc.*



336. – **Composición de fuerzas paralelas** EN SENTIDO OPUESTO (fig. 138).

$$R = P - Q$$

R es paralela a **P** y **Q**, y va en sentido de la mayor.

Falta buscar el punto **C** (*aplicación de* **R**).

El único procedimiento expedito para buscar el punto **C**, es el que se indica a continuación; *que es una adaptación del 2°. de los dos que acabamos de indicar para las paralelas de un mismo sentido.*

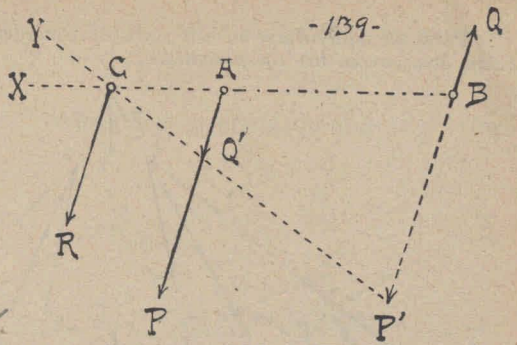
337. – MODO DE BUSCAR EL PUNTO **C**, cuando las paralelas tienen sentido opuesto (fig. 139).

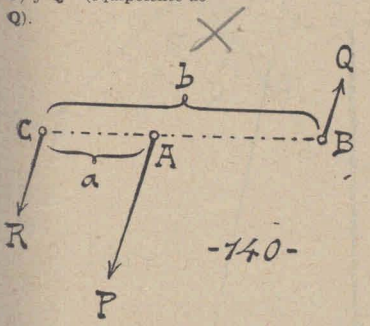
En **A** se traza el vector **Q'** (antagónico de **Q**); y en **B** se traza **P** (equipolente de **P**).

Se prolonga **BA** hacia **X**; y se traza **P'Q'**, prolongando hacia **Y**.

C se halla en el encuentro de **X** e **Y**.

El mismo resultado se habría obtenido trazando **P"** (antagónico de **P**) y **Q"** (equipolente de **Q**).





338. – También aquí se cumple el principio de Arquímedes (fig. 139):

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$$

PERO AQUÍ HAY QUE ESTAR BIEN ATENTOS PARA NO EQUIVOCARSE AL DETERMINAR CUALES SON LOS SEGMENTOS **a** Y **b** (fig. 140).

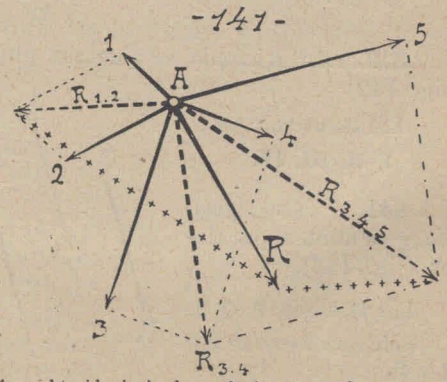
10.° – Composición de sistemas coplanares, de más de dos fuerzas.

339. – 1er. PROCEDIMIENTO: *"Por medio de composiciones sucesivas".*

1er. Ejemplo. — Fuerzas concurrentes uniaplicadas (fig. 141).

Se buscan por separado: $R_{1.2}$ (resultante del sistema **1, 2**), y $R_{3.4}$ (result. del sist. **3,4**)

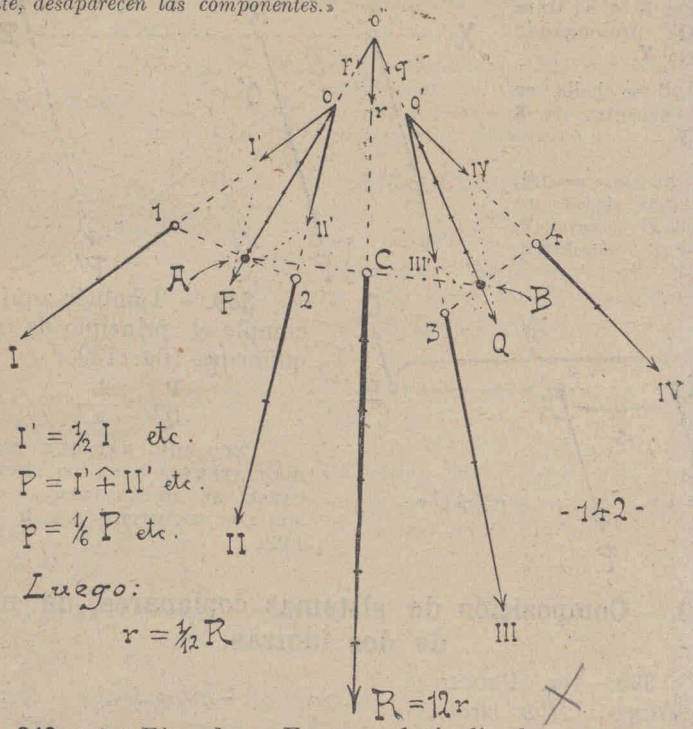
Luego se busca $R_{3.4.5}$ y por fin **R**, que es $R_{1.2...3.4.5}$.



El mismo resultado se hubiera obtenido siguiendo cualquier otro orden; **pero:**

CON TAL QUE NO SE USE DOS VECES UNA MISMA FUERZA, *como les acontece a los alumnos distraídos.*

Para no equivocarse en este trabajo, recuérdese que: «*puesta la resultante, desaparecen las componentes.*»



340. – *2.° Ejemplo.* — Fuerzas pluriaplicadas no paralelas (fig. 142).

Los datos son:

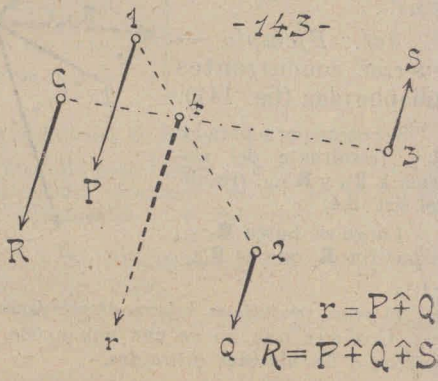
I, II, III, IV.

341. – *3er. Ejemplo.* — Fuerzas paralelas (fig. 143).

Los datos son: **P, Q, S**

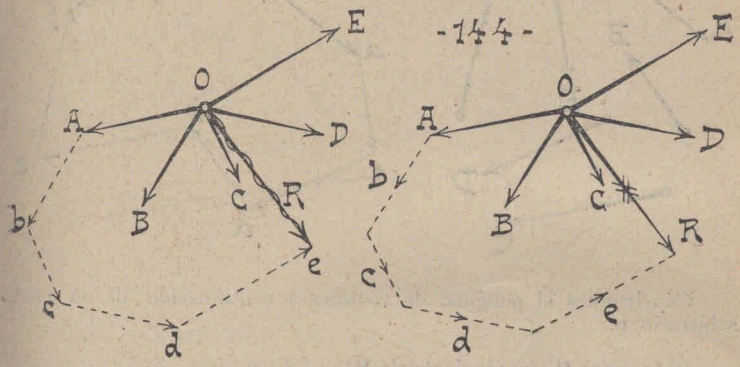
Solución: **r** = *result. de* **Q** *y* **P.**

R = *result. de* **r** *y* **S.**



342. – 2.º PROCEDIMIENTO. — *"Por medio del polígono de fuerzas".*

1er. Ejemplo. — Fuerzas concurrentes uniaplicadas (fig. 144).



A continuación de **A** se traza **b** (equip. de **B**).

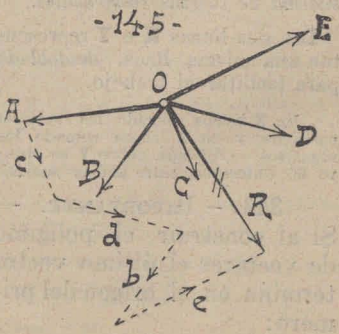
A continuación de **b** se traza **c** (equip. de **C**); y así sucesivamente.

Se une **o** con el extremo de la última equipolente, y se obtiene **R**.

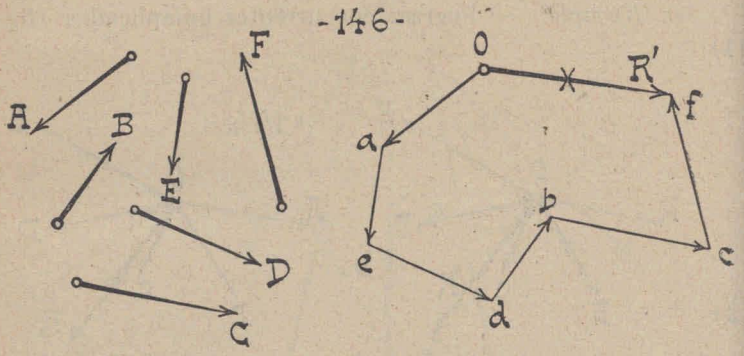
343. - NOTAS. 1.ª El POLÍGONO DE FUERZAS se llama también POLÍGONO DE VECTORES O POLÍGONO DE EQUIPOLENTES.

2.ª El polígono de vectores es la generalización del triángulo de vectores.

3.ª Cualquiera sea el orden que se siga en la sucesión de los vectores, siempre se obtiene el mismo resultado (fig. 145).



344. – *2º Ejemplo.* — Fuerzas pluriaplicadas, no paralelas (fig. 146).



Construimos el polígono de vectores a continuación de un punto arbitrario **o**.

Obtenemos **R'** (equipolente de **R**).

Falta conocer la línea de acción de **R**, *para buscar después su punto de aplicación.*

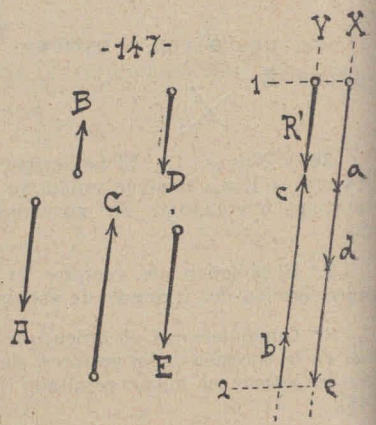
Más adelante veremos como se busca la línea de acción de **R**.

345. – *3er. Ejemplo.* — Fuerzas paralelas (fig. 147).

Como se ve, aquí el polígono de fuerzas se transforma en un sistema de fuerzas congruentes.

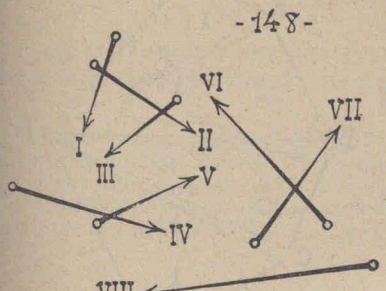
Las dos líneas **X** e **Y** representan una misma línea, *desdoblada* para facilitar el trabajo.

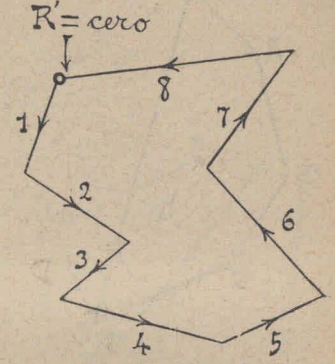
En **X** hemos sumado los vectores positivos; y en **Y** hemos sumado los negativos. — Además, sobre **Y** se obtuvo **R'** (diferencia entre ambas sumas).



346. – IMPORTANTE. — Si al construir el polígono de vectores el último vector termina en el origen del primero:

La resultante vale CERO; o sea, *el sistema es* ESTÁTICO, *o sino* GIRATORIO, *como lo veremos más adelante* (fig. 148).

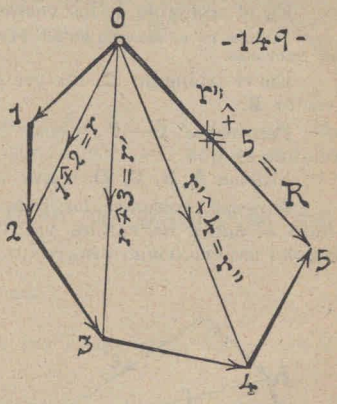




347. – POLÍGONO DE LAS RESULTANTES SUCESIVAS (fig. 149). — Se obtiene descomponiendo el polígono de equipolentes en triángulos, mediante vectores irradiantes de **o**.

Este polígono tiene la siguiente propiedad fundamental:

Siendo cada vector interno, el tercer lado de un triángulo de vectores, será la *resultante* de los dos vectores que lo abarcan.



Así: **r** es resultante del sistema **1, 2.**

r' es resultante del sistema **r, 3**; y por ende es resultante del sistema **1, 2, 3.**

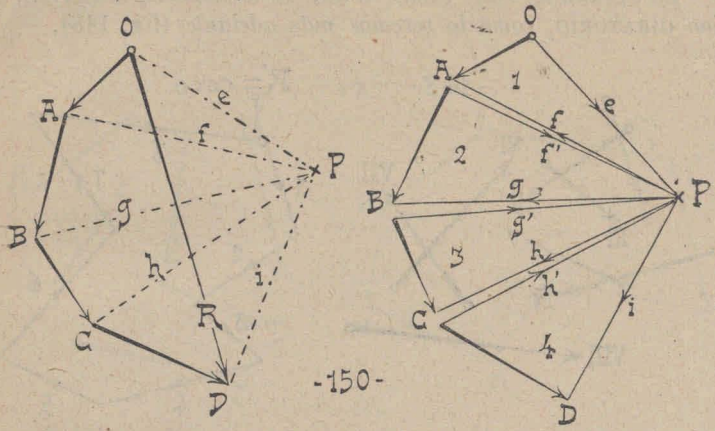
R es resultante de **r''**, **5**, y por lo tanto, del sistema **1, 2, 3, 4, 5.**

NOTA. — Al exponer la propiedad fundamental del *polígono de resultantes sucesivas*, hemos demostrado matemáticamente el *polígono de vectores.*

348. – HAZ DE RADIOS POLARES (fig. 150). — Se obtiene trazando desde un punto arbitrario **P**, los radios **e, f, g, h, i.**

El punto **P** se llama *polo.*

Este haz, tiene la siguiente propiedad fundamental:



(En esta figura hemos desdoblado los radios **f**, **g**, **h**, para que se pueda entender mejor)

En el triángulo **1**, los vectores **e** y **f** son los componentes de **A**.

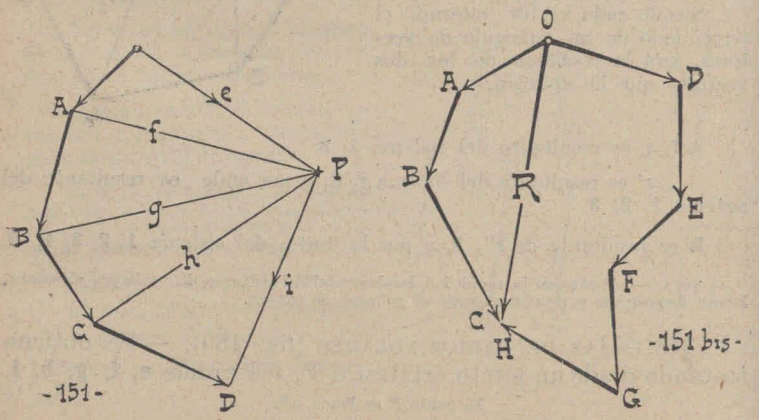
FIJARSE EN EL SENTIDO DE LAS FLECHAS, Y RECORDAR LA PROPIEDAD DEL TRIÁNGULO DE VECTORES.

En el triángulo **2**, los vectores **f'** y **g** son los componentes del vector **B**.

Pero como: **f — f'** = cero **g — g'** = cero **h — h'** = cero tendremos que:

Sistema **A, B, C, D** = *sistema* **e, i.**

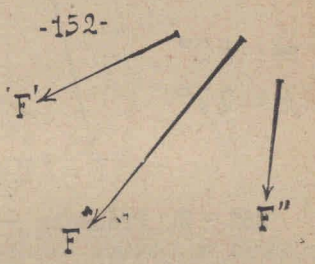
En rigor hablando, los radios internos no son nulos, como se demostrará al hablar del PAR DE VECTORES: *no tienen resultante, pero no forman sistema* ESTÁTICO sino GIRATORIO.



11°. - Descomposición de fuerzas.

349. – Descomponer una fuerza, es buscar un sistema de fuerzas que la sustituya en sus efectos.

Si tenemos la fuerza **F**, (fig. 152) y encontramos un sistema **F'**, **F''** que pueda sustituir completamente a aquélla, podremos decir que *hemos descompuesto la fuerza* **F** *en las dos fuerzas* **F'** *y* **F''**.



350. – Si **F'** y **F''** son las componentes de **F**:

F es la resultante del sistema **F'**, **F''**.

Por lo tanto:

TODO PROBLEMA DE DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS ES EL INVERSO DE OTRO PROBLEMA DE COMPOSICIÓN DE FUERZAS.

351. -- Descomponer una fuerza en un sistema de dos fuerzas concurrentes uniaplicadas.

Existen tres problemas, a este respecto:

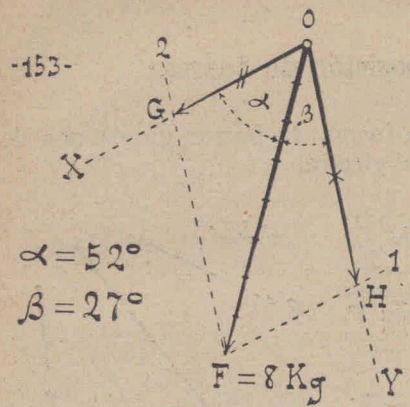
1.° *Dada una fuerza y la dirección de sus componentes, buscar dichas fuerzas.*

2.° *Dada una fuerza, una de sus componentes y la inclinación mutua de ambas, buscar la otra componente.*

3.° *Dada una fuerza y la magnitud de sus componentes, buscar la posición de éstas.*

En todos estos casos, se resuelve el problema, COMPLETANDO EL PARALELOGRAMO DE LAS FUERZAS.

352. – **1er. Problema.**— BUSCAR LAS COMPONENTES, CUANDO SE CONOCEN SUS DIRECCIONES.



Ejemplo: Descomponer una fuerza de 8 Kg. en dos fuerzas que tengan con ella respectivamente la inclinación de 52° y 27° fig. (153).

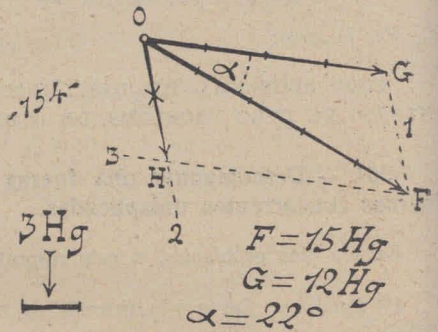
Desde el extremo de **F** se trazan

1 // X
2 // Y

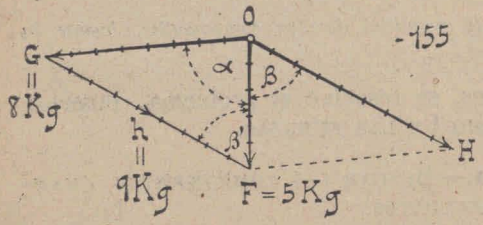
recuérdese que los tres vectores tienen el mismo origen, que es **O**.

353. – 2.° Problema — Buscar la segunda componente, cuando se conoce una de las componentes, la resultante y la mutua inclinación de estas dos fuerzas.

Ejemplo. Una fuerza de 15 Hg. tiene una componente de 12 Hg. que forma con ella un ángulo de 22°. ¿Búsquese la otra componente? (fig. 154).



354. – 3er. Problema. — Buscar la posición de las componentes, cuando se conoce su intensidad.

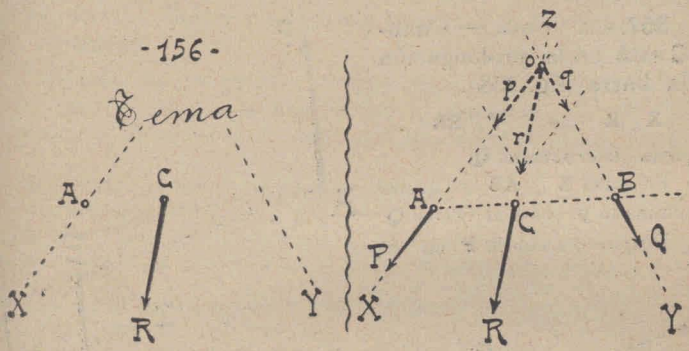


Ejemplo: Si **F** = 5 Kg. **G** = 8 Kg., y **H** = 9 Kg; ¿qué relación angular tienen las componentes **G** y **H** con la resultante **F**? (fig. 155).

Sobre la fuerza **F** se construye el triángulo **oFG**, cuyos otros dos lados valgan 8 y 9. Después se trazan **H // h**

355. – DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN OTRAS DOS CONCURRENTES, PLURIAPLICADAS.

Damos un solo ejemplo (fig. 156).



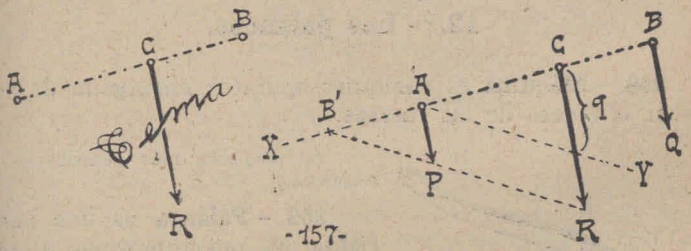
Se traslada **R** a **r**; se buscan **p** y **q**, y se trasladan a su lugar propio, **P** y **Q**.

356. – DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN UN SISTEMA DE DOS FUERZAS PARALELAS. —

Se pueden presentar varios problemas.

Daremos un ejemplo.

Problema. — DADA UNA FUERZA Y LA BARRA, BUSCAR SUS COMPONENTES PARALELAS.



1er. Caso — Cuando **C** está entre **A** y **B** (fig. 157).

Se señala **AB' = CB**.
Se traza **B'R**, y después: **AP // CR**.
Se traza **Y // B'R**, con lo cual se obtiene **q** (equipolente) de **Q**.

Esta solución se basa en el principio de Arquímedes:

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB}{CA}$$

Efectivamente hemos dividido el segmento **CR** en dos partes proporcionales a **b** y **a**.

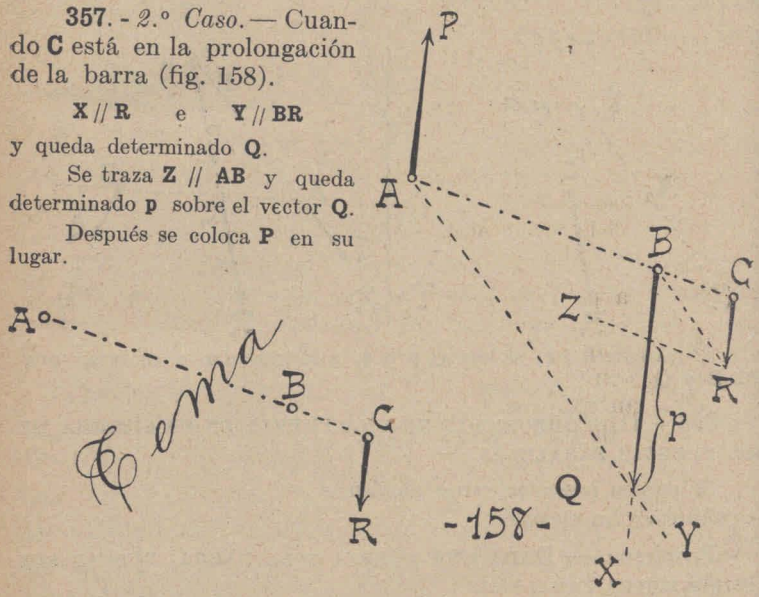
357. - *2.° Caso.* — Cuando **C** está en la prolongación de la barra (fig. 158).

X // R e **Y // BR**

y queda determinado **Q**.

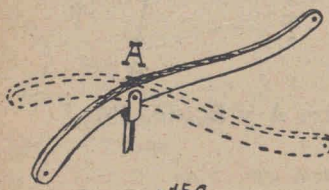
Se traza **Z // AB** y queda determinado **p** sobre el vector **Q**.

Después se coloca **P** en su lugar.



12.° - Las palancas.

358. – **Máquina** es cualquier aparato encargado de modificar el efecto de las fuerzas.



La máquina más sencilla *es la* PALANCA.

359. – **Palanca** es una barra rígida que puede moverse alrededor de un punto fijo, llamado **punto de apoyo** o PUNTO MUERTO (fig. 159).

A = punto de apoyo.

360. – Al estudiar la composición de fuerzas, hemos estudiado casos de fuerzas aplicadas a cuerpos SIN LIGADURAS. Al estudiar las máquinas, nos encontramos con fuerzas aplicadas a cuerpos CON LIGADURAS.

361. – Se dice que un cuerpo *no tiene ligaduras* cuando está libre en el espacio, pudiendo moverse en cualquier dirección y sentido.

Ligadura de un cuerpo es una *superficie, línea* o *punto*, que el cuerpo no puede abandonar al moverse.

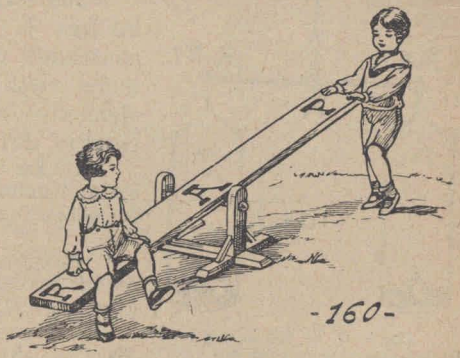
Los hombres al caminar, tienen por ligadura el suelo (*una superficie*).

El tranvía y el ferrocarril tienen por ligadura la vía (*que puede considerarse como una línea*).

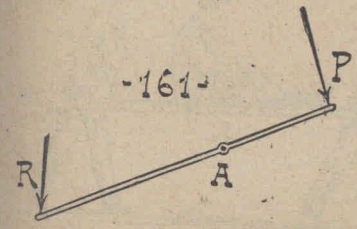
El burro de la noria al andar tiene por ligaduras (además del suelo) el lugar donde la vara asienta en el eje de la noria (*un punto*).

362. – La palanca tiene por ligadura el punto de apoyo.

363. – Cuando la palanca está en acción, se consideran en ella tres puntos distintos: el de APOYO **A**, el de POTENCIA **P** y el de RESISTENCIA **R** (fig. 160 y 161).



Potencia es la fuerza que tiende a hacer mover la palanca.



Resistencia es la fuerza que se opone a la acción de la potencia.

La POTENCIA se llama también **fuerza activa** o **fuerza motriz**, porque generalmente es la que el hombre aplica con intención de producir movimiento.

Y la RESISTENCIA se llama **fuerza resistente** o **fuerza de reacción**, porque es la que se opone al movimiento que pretendemos obtener con la potencia.

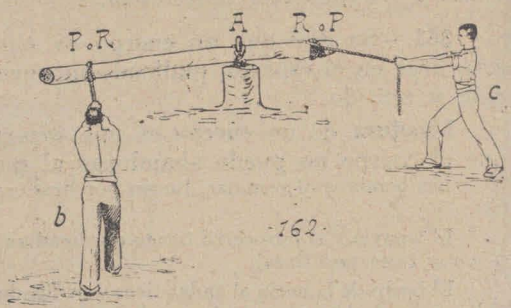
364. – Pero la distinción entre potencia y resistencia, a menudo es *nominal*, o sea: sin ningún significado real.

Si en la fig. 162, tiran dos hombres **b** *y* **c**:

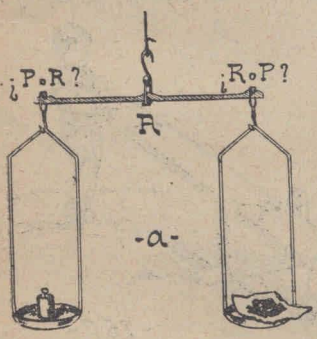
Para **b**, *su fuerza es la* POTENCIA *y la de* **c** *es la* RESISTENCIA.

Pero para **c**, *la suya es la* POTENCIA, *y la de* **b** *es la* RESISTENCIA.

En cambio, para una tercera persona que observe el experimento, ambas fuerzas son ACTIVAS, *y de consiguiente, son* potencias.



En una balanza (fig. *a*), tanto la pesa cuanto el objeto que pesamos produce sobre la cruz la misma categoría de fuerza, que podemos considerar como *potencia*.



Donde se ve que la angarilla nos ofrece el caso de dos palancas en una.

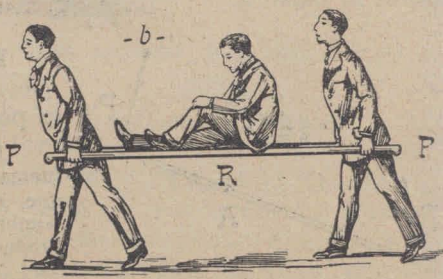
365. – Hay casos (como los de las figs. *b*, *c*, *d*, *e*) donde nos encontramos con palancas que a primera vista parece que tienen un elemento repetido, careciendo en cambio de otro:

1.° En el caso de la angarilla (fig. *b*) los hombres que la sostienen pueden considerarse como productores de POTENCIA.

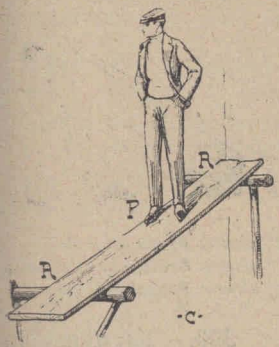
Pero para el que marcha adelante hacen de APOYO *las manos del de zaga; y viceversa.*

2.° En el caso del andamio (figs. *c* y *d*), si el hombre produce POTENCIA, ¿dónde está la resistencia? y viceversa,

Este caso comparado con el anterior nos enseña que LA RESISTENCIA ESTÁ EN CADA UNO DE LOS APOYOS.

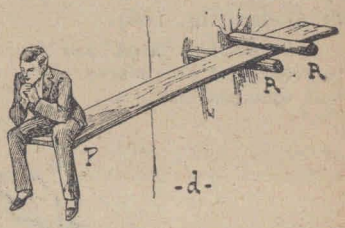


El caso del patinador a caballo del palo (fig. *e*) es el mismo que el de los andamios: el apoyo de los pies en el suelo se trasmite, mediante las piernas, a las rodillas donde asienta el travesaño del palo.

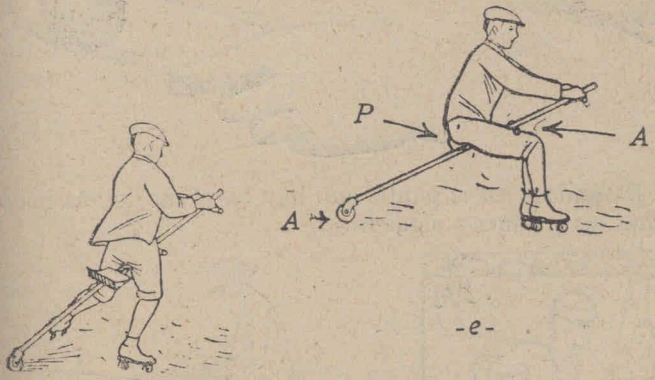


366. – *De lo que se acaba de observar se desprende la siguiente consideración:*

En toda palanca hay tres fuerzas, Y NO DOS, como generalmente se dice.



Estas tres fuerzas están aplicadas a tres puntos, que, PARA CLARIDAD DIDÁCTICA, *y no por razón científica,* reciben el nombre de **potencia, resistencia** y **apoyo,** *suponiendo que en el primero se aplica una* FUERZA ACTIVA, *en el segundo una* FUERZA RESISTENTE, *y en el tercero una* FUERZA DE LIGADURA.



En muchas palancas existen realmente tres fuerzas de diversa índole; pero en otras hay DOS FUERZAS ACTIVAS Y UNA RESISTENTE, y en otras hay UNA ACTIVA Y DOS RESISTENTES; y en este último caso las fuerzas resistentes se pueden considerar como fuerzas de ligadura.

367. – De lo que acabamos de ver, resulta que en toda ligadura existe una fuerza resistente DE REACCIÓN.

Más tarde explicaremos a qué se da el nombre de **reacción.**

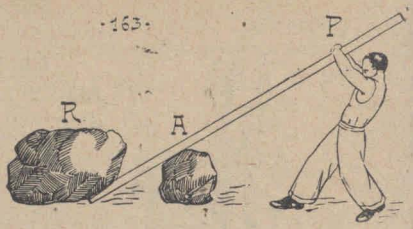
368. – Hay tres géneros de palanca:

Es de 1.er GÉNERO la palanca que tiene el *apoyo* en el medio (fig. 163).

Es de 2.º GÉNERO la que tiene la *resistencia* en el medio (fig. 164).

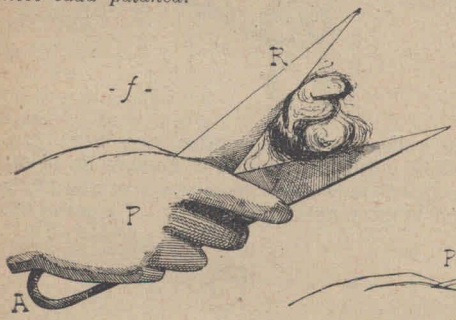
Es de 3.er GÉNERO la que tiene la *potencia* en el medio (fig. 165).

*La palabra "***arpa***" nos hará recordar a qué género pertenece cada palanca:*

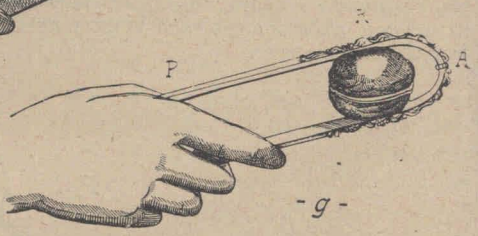


1er. género: Apoyo en el medio.
2.º género: Resistencia en el medio.
3er. género: Potencia en el medio.

A

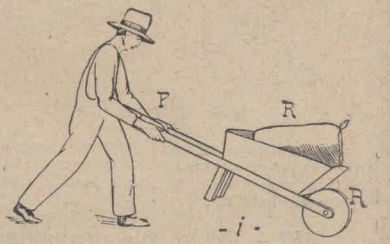


369. – EJEMPLOS DE PALANCAS DE CADA GÉNERO:



a) Basándose en el punto que hay en el medio, clasifique el alumno las palancas siguientes:





1.º Las de las figs. 160, 161, 162 y *a*.

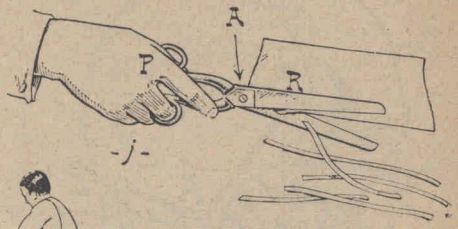
2.º Las de las figs. *b c, d* y *e* (en este último caso) deberá decir a qué género *no* pertenece, puesto que pertenece a dos géneros, según como se la considere).

3.º Las de las figs. *f, g, h, i*.

b) Dígase qué novedad hay en las palancas de las figs. *f, g* y *j*.

c) Explíquese qué condiciones debe cumplir el operador para que las palancas de las figs. *k*, *l* y *m* tengan la potencia en el medio.

370. - PALANCAS DEL CUERPO HUMANO. Los huesos de nuestro esqueleto son piezas de una maquinaria movida por los músculos.



-j-



-164-

Hay, pues, en nuestro cuerpo muchas palancas, abundando las de 3.er género.

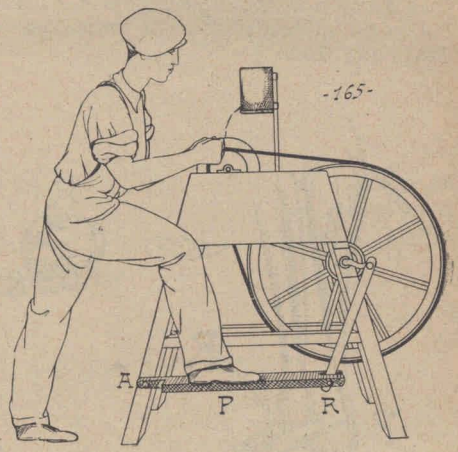
Las de 1.º y 2.º género, en nuestro cuerpo son escasas.

Como palanca de 1er. género se ha hecho de moda citar la que forma el cráneo, apoyado en la columna vertebral y movido por los músculos posteriores del cuello, entre los que figura en primer lugar el *trapecio* (fig. 166).

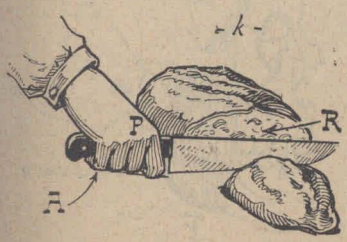
La resistencia **R** se halla en el centro de gravedad del cráneo.

Como palanca de 2.º género, todos los autores citan la que se forma cuando estamos en "*punta de pie*" (fig. 167).

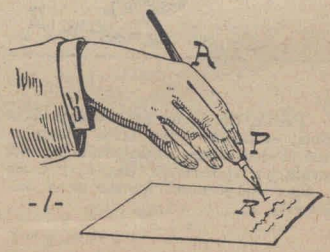
El peso del cuerpo se trasmite al pie mediante la *tibia* y el *peroné*, y representa la resistencia.



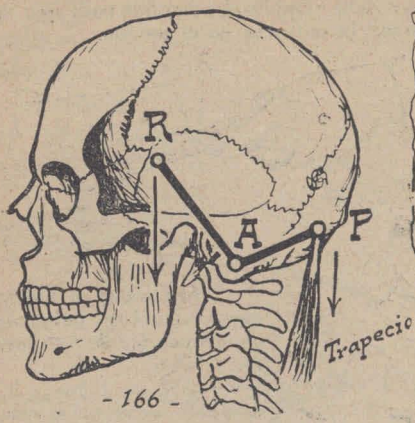
-165-

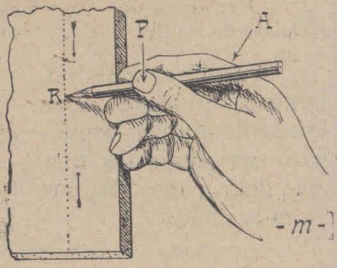


-k-



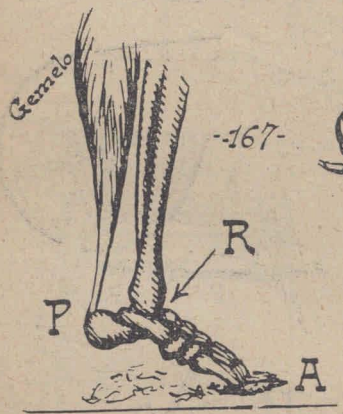
-l-

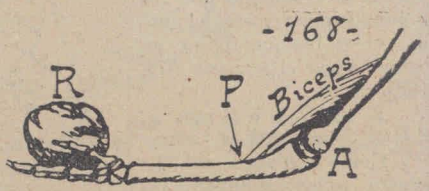




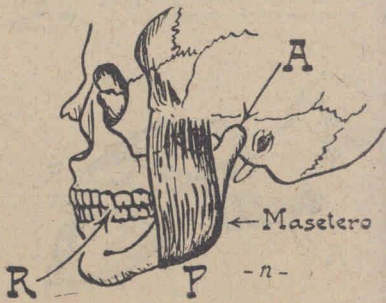
Los músculos *gemelos*, al encogerse, ejercen la potencia en el *talón* o hueso astrágalo, mediante el *tendón de Aquiles*.

Aunque en nuestro cuerpo son muchas las palancas de 3.er género, suelen los autores citar la que forma nuestro antebrazo con el músculo *bíceps* (fig. 168).

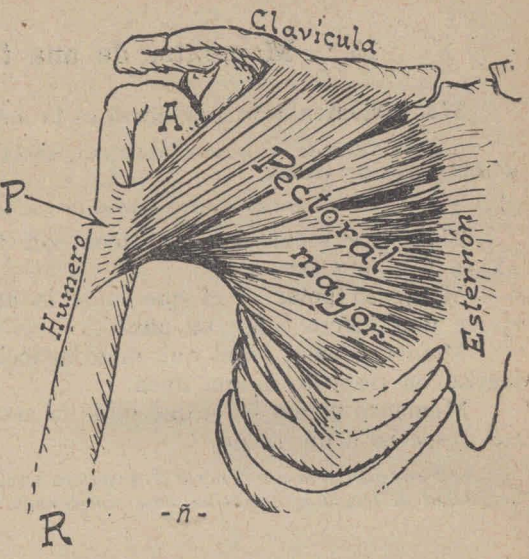




Pero a fin de no ser esclavos de la rutina, es bueno citar otros ejemplos, como el caso de nuestra *mandíbula inferior* movida por el *masetero* (fig. *n*) y como el caso del *pectoral* inserto en el *húmero* (fig. *ñ*).



371. – Brazo de la palanca es cada una de las distancias que hay entre su apoyo y los dos puntos de potencia y de resistencia (fig. 169).

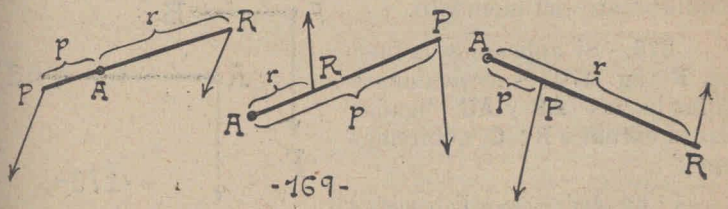


NOTA. *Más adelante corregiremos este concepto, restringiéndolo y completándolo.*

BRAZO DE POTENCIA es el segmento **AP**, que se representa con **p**.

BRAZO DE RESISTENCIA es el segmento **AR**, que se representa con **r**.

372. – Aunque las palancas y demás máquinas simples se usan para obtener equilibrio y para producir movimiento, su estudio pertenece a la ESTÁTICA, porque su efecto se calcula en base de sus *condiciones de equilibrio.*



Antes de estudiar las condiciones de equilibrio de las palancas hay que conocer la teoría de los momentos.

13.° – Momentos de una fuerza.

373. – **Momento** de una fuerza es la medida de su eficacia.

Hay dos clases de momentos: MOMENTOS ESTÁTICOS o de 1.° orden, y MOMENTOS DE 2.° ORDEN.

Aquí tomaremos en cuenta solamente los momentos estáticos.

374. – Los momentos estáticos son tres: el POLAR, el AXIAL y el PLANAR.

Momento **polar** es el que mide la acción giratoria que ejerce una fuerza sobre un punto.

Momento **axial** es el que mide la acción giratoria de una fuerza con respecto a una línea.

Momento **planar** es el que mide la acción de una fuerza con respecto a un plano.

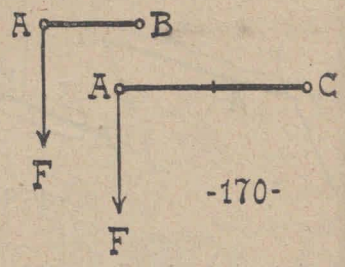
Aquí consideraremos solamente el MOMENTO ESTÁTICO POLAR, *que para comodidad de lenguaje, denominaremos simplemente* "MOMENTO".

14.° – Momento estático polar.

375. - Se conoce la función del momento de una fuerza, estudiando la función del ANTI-MOMENTO.

Anti-momento es el vector equilibrante del momento.

376. - Si aplicamos la fuerza **F** (fig. 170) sucesivamente a las barras **AB** y **AC**, ligadas en su extremo **B** o **C**, notaremos que:



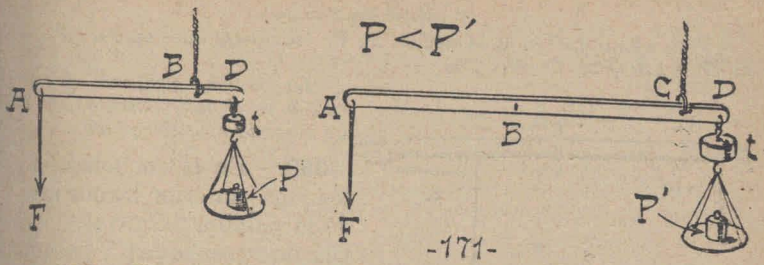
-170-

1.° En ambos casos **F** tiende a hacer girar la barra alrededor de **B** o **C**.

2.° Mayor será la acción giratoria de **F** sobre el punto **C**, que sobre el punto **B**.

Efectivamente, equilibremos la acción de **F** en ambos casos (fig. 171) colocando pesas en la prolongación **BD** = **CD**.

Y veremos que **P'** > **P**.



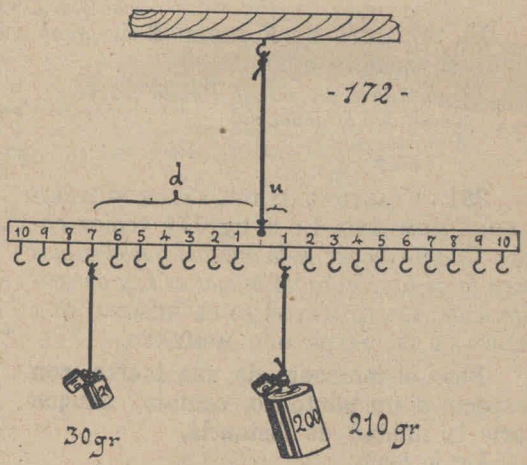
377. – Si en el experimento anterior, **BD** es una unidad lineal, tendremos que:

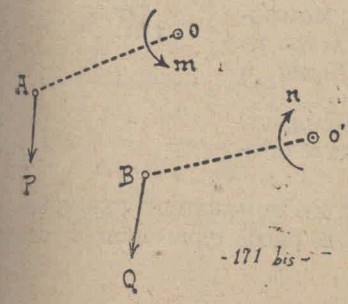
P y **P'** representan la medida de los ANTI-MOMENTOS polares de **F** con respecto a **B** y **C**.

378. – MODO DE REPRESENTAR LA FUNCIÓN DEL MOMENTO DE UNA FUERZA.— La forma más clara para representar la función del momento, es la que se indica en la fig. 171 bis.

m = *momento de* **P** *sobre* **o**.

n = *antimomento de* **Q** *sobre* **o'**.





379.-MEDIDA DEL MOMENTO.- Experimentando se ha descubierto que:

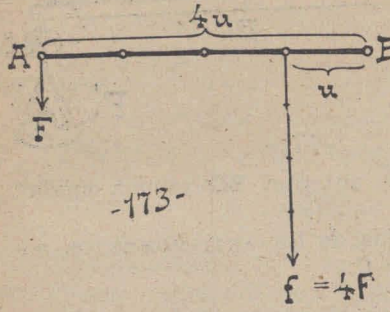
Teorema. — EL MOMENTO DE UNA FUERZA EQUIVALE AL PRODUCTO DE DICHA FUERZA POR LA DISTANCIA ENTRE ELLA Y EL PUNTO DE REFERENCIA.

Demostración experimental (fig. 172).

Hemos colocado 30 gr. a 7 **u** del punto **o**.

u (*unidad lineal adoptada*)

Para equilibrar en u la acción de F, tuvimos que aplicar F' = 30×7 = *210 gr.*



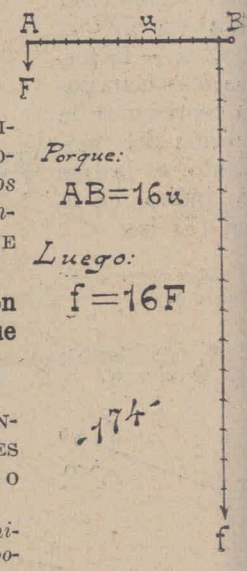
La acción giratoria de F' *sobre* o *es el anti-momento de* F *con respecto a dicho punto.*

380. - En el enunciado del teorema anterior hemos usado la palabra "EQUIVALE" en vez de "ES IGUAL", porque el momento no es una fuerza, sino *el efecto giratorio* de una fuerza.

Y se dice que "EQUIVALE"; *pero más claro y exacto sería decir que (fig. 173):*

EL MOMENTO DE **F** SOBRE **B** *es igual* AL MOMENTO DE f SOBRE **B**, siempre QUE:

f *paralela y del mismo sentido que* **F**.
u = *unidad de distancia.*
d = *distancia.*
y **f = F × d**.



381. - ELASTICIDAD DEL VALOR NUMÉRICO DEL MOMENTO. En la fig. 174 vemos como: *Cuanto menor es la unidad que elegimos para la distancia, tanto mayor es* **f**, *y de consiguiente*: TANTO MAYOR ES EL NÚMERO QUE INDICARÁ EL VALOR DEL MOMENTO.

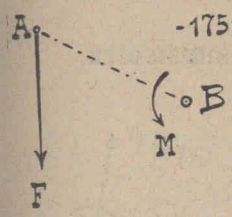
Pero el momento de una fuerza con respecto a un punto no cambia, aunque varíe la unidad de distancia.

Por lo tanto:

PARA DEFINIR EL VALOR DEL MOMENTO, NO BASTA UN NÚMERO ABSTRACTO: ES NECESARIO UN NÚMERO *especificado* O CONCRETO.

Por eso, es necesario elegir unidades determinadas para medir los momentos; cosa que se expone más adelante.

382. – MODO DE REPRESENTAR EL MOMENTO DE UNA FUERZA. — El momento de una fuerza se puede representar de dos maneras:



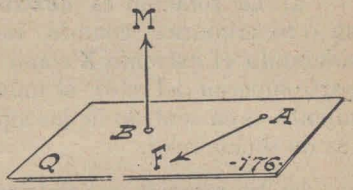
1.ª Mediante un *arco orientado*, cuyo centro se halla en el punto de referencia (fig. 175).

M=*mom. de* **F** *sobre* **B**.

Como se ve, no se da al arco-vector, medida real, sino una medida cualquiera.

El símbolo **M** es curvo, para indicar que la acción de **F** con respecto a **B** es giratoria.

2.° Cuando necesitamos dar al momento su medida gráfica, lo representamos mediante un vector que tenga por origen el POLO, y que sea perpendicular al plano **Q** (fig. 176).

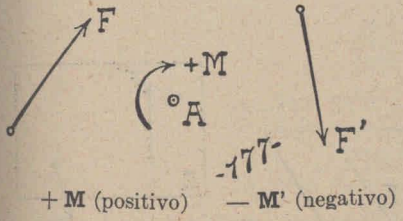


Q (*plano de* **F** *y de* **B**).

LÉXICO. – **Polo** *de un momento es el punto al cual él se refiere.*

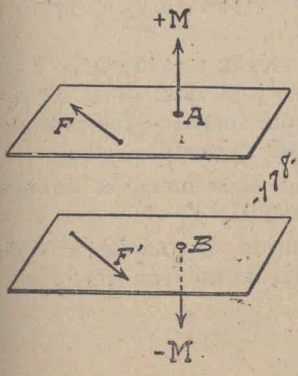
(*En nuestro caso el polo es* **B**).

Recuérdese sin embargo, que este 2.° sistema de representar el momento, aunque tenga sus ventajas, ES COMPLETAMENTE ARBITRARIO, *puesto que la dirección real es la que se indica en el primer sistema.*



+M (positivo) — **M'** (negativo)

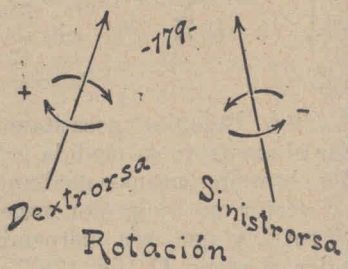
383. - SIGNO DEL MOMENTO. — Por convención, es positivo el momento que tiende a hacer girar al polo en el sentido de las agujas del reloj; y es negativo en caso contrario (fig. 177).



En el 2.° sistema representativo, el momento *positivo* se indica haciéndolo ir HACIA ARRIBA, y el momento *negativo*, haciéndolo ir PARA ABAJO (fig. 178).

15.ª – Rotaciones dextrorsa y sinistrorsa.

384. – Si un rayo **X** es eje de rotación de un móvil cualquiera (fig. 179), se dirá que:



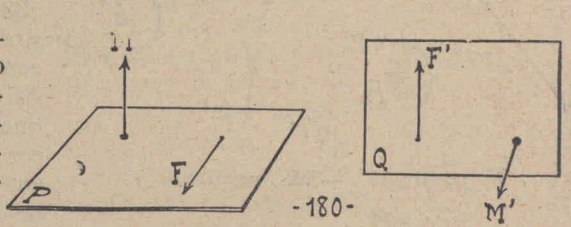
a) La rotación es **dextrorsa** o DEXTROGIRA, cuando, considerando el extremo **X** como la parte superior del reloj, el movimiento es en sentido de las agujas de dicho reloj.

b) La rotación es **sinistrorsa**, o LEVOGIRA, cuando en las condiciones anteriores, el movimiento es en sentido opuesto al de las agujas del reloj.

385. – La rotación *dextrorsa* se considera como POSITIVA; y la *sinistrorsa*, como NEGATIVA.

Podemos, pues, decir que:

El momento es POSITIVO cuando es dextrorso, y es NEGATIVO, cuando es sinistrorso.



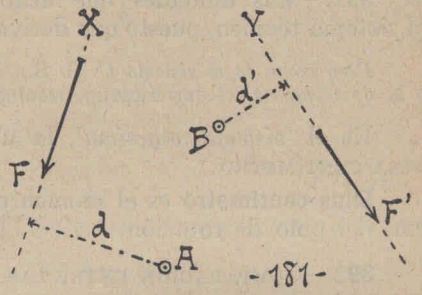
386. – RELACIÓN DE POSICIÓN ENTRE UNA FUERZA Y SU MOMENTO. Examinando la fig. 178, se verá que: *en el 2.º sistema representativo*, el momento de una fuerza se indica SIEMPRE mediante un vector dextrorso con respecto a ella.

Y por lo tanto, *en dicho sistema*, toda fuerza es un vector dextrorso con respecto a su momento.

De modo que la dirección y sentido de una fuerza y de su momento, *en el 2.º sistema representativo* son recíprocos. (fig. 180).

16.° – Definición práctica y medida del momento de una fuerza.

387. – **Momento** de una fuerza con respecto a un punto, es el producto de su intensidad por la distancia que existe entre la fuerza y el punto de referencia (fig. 181).



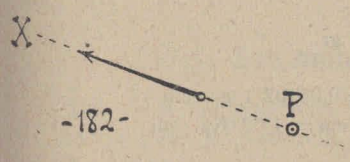
-181-

M de **F** (respecto a **A**) $= F \times d$

M de **F'** (respecto a **B**) $= F' \times d'$

IMPORTANTE. – *Téngase bien en cuenta que la distancia de un punto a una recta, se mide* POR LA PERPENDICUALR LLEVADA DESDE ESE PUNTO A LA RECTA O A SU PROLONGACIÓN.

388. – De la definición de momento se deduce que:



-182-

EL MOMENTO DE UNA FUERZA, CON RESPECTO A UN PUNTO SITUADO SOBRE SU LÍNEA DE ACCIÓN VALE CERO (fig. 182).

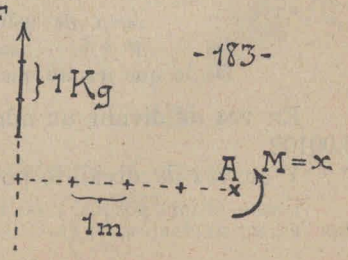
Si **P** se halla sobre **X**, la distancia de **P** a **X** vale cero.

P. l. t.: **M** (con resp. a **P**) $= F \times cero =$ CERO.

389. – Las unidades de medida del momento son el KILOGRAMO-METRO (Kg. m), el KILOGRAMO-CENTÍMETRO (Kg. cm.) o *kilo-centímetro*, el GRAMO-METRO (gr. m) y el GRAMO-CENTÍMETRO (gr. cm.) o GRA-CENTÍMETRO.

Kilogramo-metro (Kg. m.) es el momento de una fuerza de 1 Kg. con respecto a un punto que dista de ella 1 metro (fig. 183).

$M = 3 \times 4 = 12$ Kg. m.



-183-

A la derecha de la fig. está representado el momento conforme al primero de los dos sistemas indicados anteriormente.

390. – IMPORTANTE. – No hay que confundir "KILOGRAMO-METRO" (Kg. m.) con *kilográmetro* (Kgm.), que es otra cosa completamente distinta.

Hay, sin embargo autores que usan los términos KILOGRÁMETRO y GRÁMETRO para las unidades de momento; originando confusiones en los estudiantes bisoños.

391. – Las unidades que acabamos de citar pertenecen al sistema técnico, puesto que derivan de sus unidades.

Pero como en el sistema C. G. S., *la unidad de fuerza es la* DINA, *y la de espacio es el* CENTÍMETRO, *resulta que:*

En el *sistema cegesimal*, la unidad de momento es la DINA-CENTÍMETRO.

Dina-centímetro es el momento de una dina colocada a 1 cm. del polo de rotación.

392. – COMPARACIÓN ENTRE LAS UNIDADES TÉCNICAS Y LAS CEGESIMALES.

1 megadina = 1.000.000 dinas

luego 1 $\overline{M}$dn. cm = 1.000.000 dn. cm

NOTA. — En este libro adoptamos los siguientes símbolos:

$\overline{M}$ = mega, *o sea* 1.000.000

$\underline{m}$ = micro, *o sea* 0,000.001

Y como

1 dn = $^1/_{98}$ gr. = 0,00102 gr.

resulta que:

1 dn.cm = $^1/_{98}$ gr. cm = 0,00102 1 gr.-cm

1 $\overline{M}$dn. cm = 1.020 gr. cm = 1,02 Kg. cm

Y recíprocamente:

1 gr.cm = 980. dn.cm

1 Kg.cm. = 0,98 $\overline{M}$dn.cm

1 Kg.m = 98 $\overline{M}$dn.cm

393. – NOTA. — Para los cálculos de conversión de medidas *técnicas* a *cegesimales*, téngase presente que:

recíp. de 980 = 0,00102

p. l. t. $^1/_{980}$ = 0,00102

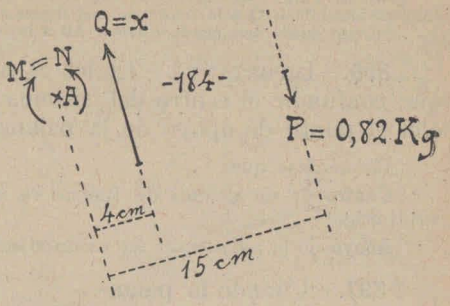
De lo que resulta que:

En vez de dividir un número por 980, se multiplica por 0,00102.

Y en vez de dividirlo por 9,8, se multiplica por 0,102.

Y esto último porque, CUANTO MENOR ES UN NÚMERO, TANTO MAYOR ES SU RECÍPROCO.

394. – PROBLEMA. – ¿Qué intensidad debe tener una fuerza **Q** colocada a 4 cm. del punto **A** para equilibrar la acción giratoria de la fuerza **P** = 0,82 Kg., que se halla a 15 cm. de **A**? (fig. 184).



Llamando **M** *el mom. de* **P**, *y* **N** *el mom. de* **Q** *(respecto de* **A***):*

N es el antimomento de **P**; por lo tanto tendrá su valor numérico, pero con signo contrario

$$\mathbf{M} = 0{,}82 \times 15 = 12{,}3 \text{ Kg. cm.}$$

pero $\mathbf{N} = x \times 4$

o sea $12{,}3 = x \times 4$

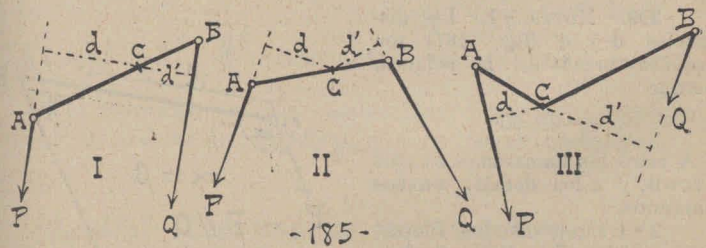
de donde $x = \dfrac{12{,}3}{4} = \mathbf{3{,}075\ Kg.}$

Como se ve: cuanto más cerca se halla la fuerza **Q** *del punto* **A**, *tanto más intensa debe ser para obtener el mismo efecto giratorio que* **P**.

17.° – Los momentos de la palanca.

395. - En las palancas, se llama **momento de potencia** el producto de la potencia por su distancia al punto de apoyo (fig. 185).

M (de pot.) = **P.d**



Y se llama **momento de resistencia** el producto de la resistencia por su distancia al punto de apoyo.

M (de resist.) = **Q. d'**.

NOTA. – Para relacionar el estudio de las palancas con el de la composición de fuerzas, llamaremos **Q** a la *resistencia;* así dejamos el símbolo **R** para la *resultante.* Además queda más práctico llamar **AB** a la barra.

396. – IMPORTANTE. – En los cálculos con palancas, no hay que confundir el centro del sistema **P,Q** que llamaremos **C**, con el punto de apoyo de la palanca, que llamaremos **o**.

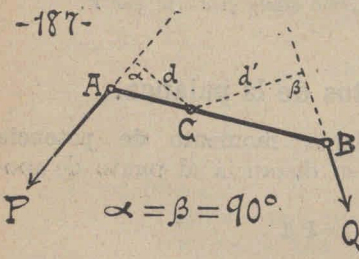
Recuérdese que:

Centro de un sistema de fuerzas es el punto de aplicación de su resultante.

Apoyo de la palanca es su *punto muerto* o su *ligadura puntual.*

397. – Cuando la palanca está equilibrada, su apoyo **o** coincide con el centro **C**.

Cuando no nos interesa hacer distinciones entre **o** *y* **C**, *usaremos indistintamente cualquiera de estas dos letras para indicar el polo de los momentos de* **P** *y* **Q**.



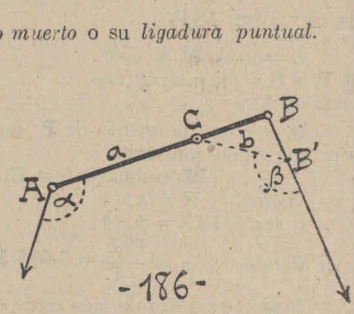
399. – NOTAS. – 1.ª Las distancias **d** y **d'** (fig. 187) son *también* brazos de la palanca, porque

$$\alpha = \beta = 90°$$

A estos los llamaremos BRAZOS RECTOS, y a los demás, BRAZOS OBLICUOS.

2.ª Cuando las dos fuerzas son paralelas (fig. 188), *también* son brazos de la palanca los segmentos **AC** y **BC**, porque

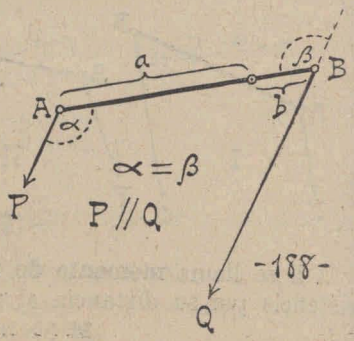
$$\alpha = \beta$$

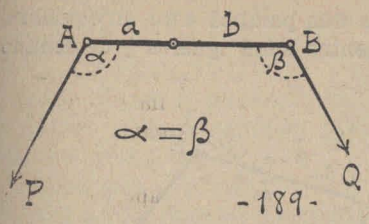


398. – **Brazos** de la palanca son los dos segmentos que se obtienen uniendo el punto de apoyo con las dos fuerzas, mediante rectas equi - inclinadas con ellas. (fig. 186).

Si $\alpha = \beta$

a y **b** = *brazos de la palanca* **AB**.





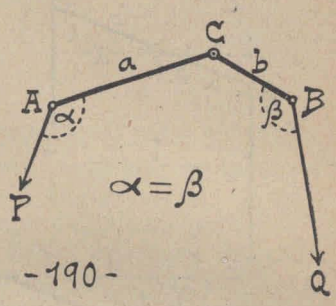
400. – Falsos momentos de la palanca, son los que se obtienen multiplicando cada fuerza por sus brazos oblicuos (fig. 190).

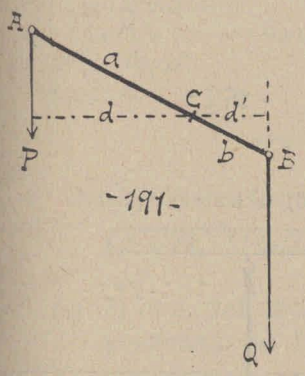
Si $\alpha = \beta$ **M** (*de pot.*) = **P.a**

M' (*de resist.*) = **Q.b**

3.ª Cuando las fuerzas concurrentes son equi-inclinadas con la barra (fig. 189), se cumple lo mismo que en el caso anterior, porque

$$\alpha = \beta$$





401. – LOS FALSOS MOMENTOS SON PROPORCIONALES A LOS MOMENTOS VERDADEROS (fig. 191 y 192).

Efectivamente los dos triángulos **t** y **t'** son semejantes, luego:

$$\frac{d}{d'} = \frac{a}{b}$$

Multiplicando ambos miembros por la razón $\frac{P}{Q}$

$$\frac{P.d}{Q.d'} = \frac{P.a}{Q.b}$$ L. Q. Q. D.

402. - *De aquí resulta que*:

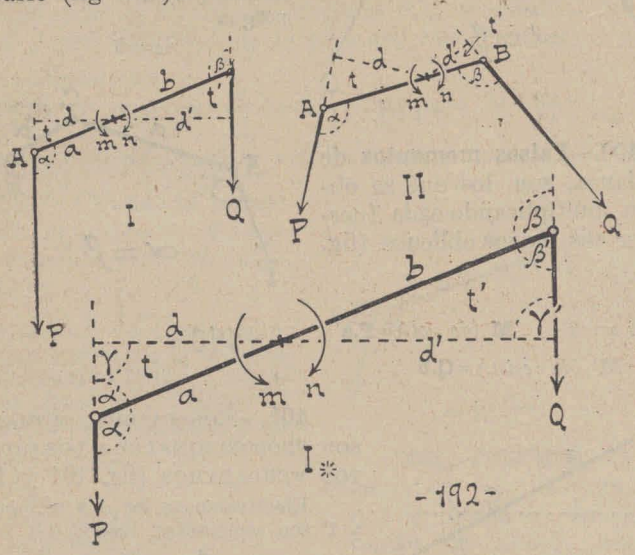
En el TEOREMA DE LOS MOMENTOS, que luego veremos, lo mismo da hablar de *verdaderos*, que de *falsos* momentos.

18.° – Teorema de los momentos.

403. – El célebre teorema de los momentos es el principio de Arquímedes generalizado.

(*Ver 12.° principio.....*)

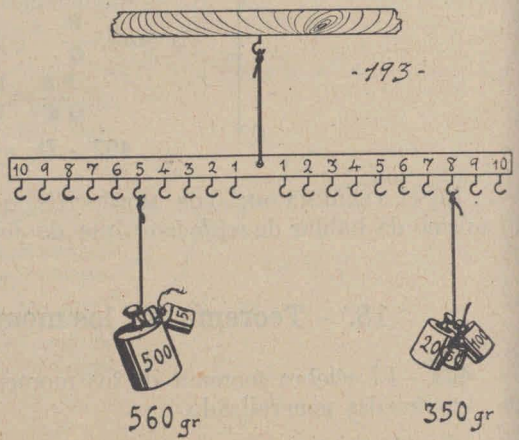
404. – TEOREMA. – **Para que una palanca esté en equilibrio se requiere que sus dos momentos sean iguales y de sentido contrario** (fig. 192).



Si $\overrightarrow{P.d} = \overleftarrow{Q.d}$: El sistema **P, Q, (C)** se halla en equilibrio.

405. – DEMOSTRACIÓN EXPERIMENTAL. – Al demostrar el valor del momento (Ver **379**) ya quedó demostrado este teorema.

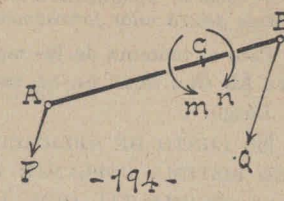
Pero, por si acaso, no conociéramos aquella demostración, he aquí su equivalente, aplicada directamente a este teorema (fig. 193).



$$\overrightarrow{560 \times 5} = \overleftarrow{350 \times 8}$$

$$2800 \text{ gr. cm} = 2800 \text{ gr. cm}$$

406. – El teorema de los momentos se aplica también a los FALSOS MOMENTOS.



-194-

Por lo tanto (fig. 194).

Si **P.a = Q.b** (*y de signo contrario*):

El sistema **P,Q,(C)** está equilibrado.

407. – *El teorema de los momentos se enuncia de varias maneras:*

"Para que una palanca esté en equilibrio se requiere:

1.° Que los dos momentos se equilibren".

2.° Que los dos momentos se anulen mutuamente".

3.° Que la suma algébrica de los dos momentos dé cero".

4.° Que el producto de una fuerza por su brazo sea igual al producto de la otra fuerza por su brazo (siendo ambos productos de signo contrario)".

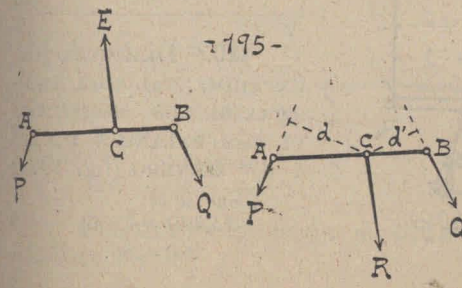
5.° Que las fuerzas sean inversamente proporcionales a sus brazos respectivos".

Efectivamente: *si* **P. a = Q. b**

resulta que $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$

6.° Que la primera fuerza sea a la segunda como el segundo brazo es al primero".

19.° – Aplicación del teorema de los momentos a los sistemas de fuerzas coplanares.



408. – Siendo que **C** en la palanca es el punto de equilibrio, cualquiera ve que en una barra suelta, será también **C** el lugar donde se aplica la equilibrante (fig. 195 y 196).

Y como la RESULTANTE *es la fuerza opuesta a la* EQUILIBRANTE, *la resultante deberá estar forzosamente aplicada en* **C**.

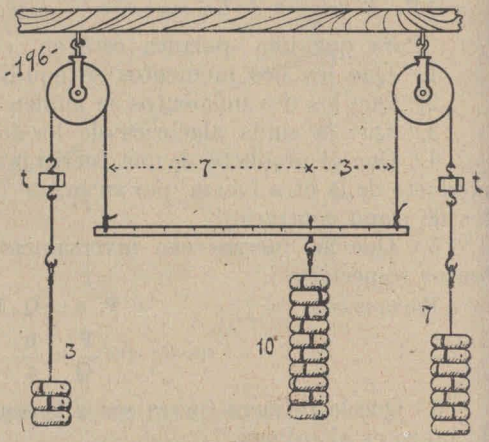
Pero el teorema de los momentos dice que: **C** ES EL PUNTO DE LA BARRA **AB** QUE GOZA DE LA PROPIEDAD SIGUIENTE: $\overrightarrow{F.d} = \overleftarrow{F.'d'}$.

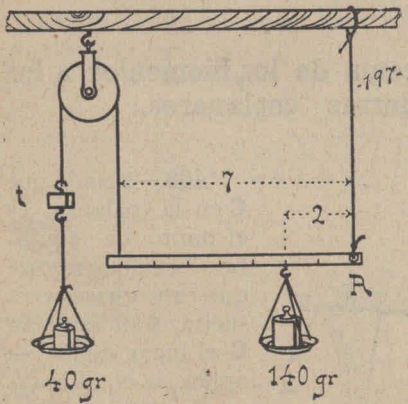
Luego:

EL PUNTO DE APLICACIÓN **C** DE LA RESULTANTE DE CUALQUIER SISTEMA COPLANAR DE DOS FUERZAS, SE HALLA SOBRE **AB** EN FORMA TAL QUE: LOS MOMENTOS DE AMBAS FUERZAS CON RESPECTO A **C** RESULTEN IGUALES Y DE SENTIDO OPUESTO.

409. – NOTA. — Las pesas señaladas con **t** en las figs. 196 y 197 sirven de TARA, para equilibrar el aparato antes de proceder a la experimentación.

Como la barra (de madera o de hierro) **AB** TIENE PESO, *y en el experimento necesitamos prescindir de dicha fuerza, la anulamos, equilibrándola con la tara.*





En la generalidad de los textos se supone que la palanca es *espiritual*, lo cual es simplemente un absurdo; y no creemos que sea pedagógico desentendernos de la realidad en la enseñanza de asuntos experimentales.

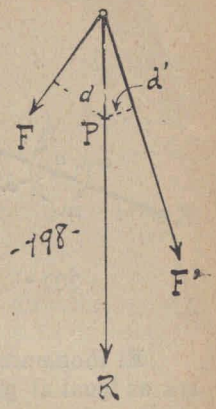
410. – DEMOSTRACIÓN EXPERIMENTAL DEL TEOREMA DE LOS MOMENTOS, EN LAS PALANCAS DE 2.° Y 3.er GÉNERO (fig. 197).

Como se ve:

$$2 \times 140 = 7 \times 40$$

$$280 = 280.$$

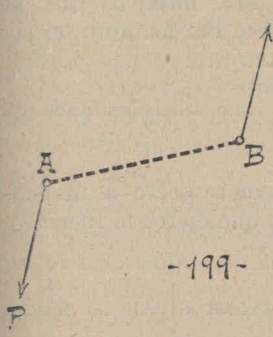
411. – TEOREMA DE LOS MOMENTOS EN EL CASO DE FUERZAS CONCURRENTES (fig. 198).



Porque **R** = resultante de **F**,**F'**, eligiendo sobre **R** un punto cualquiera **P**, se tendrá que:

$$F.d = F.'d'$$

20.° - Par de fuerzas.



412. – Si tenemos dos fuerzas ANTAGÓNICAS, o sea, iguales y opuestas (fig. 199), su resultante será:

$$R = P - Q = \text{cero}.$$

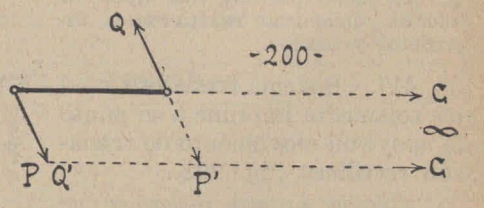
Este sistema no tiene resultante y se llama **par de fuerzas.**

El centro del sistema debe hallarse en la prolongación de la barra **AB**, por el lado de la fuerza mayor.

Y como **P** = **Q**, *consideraremos a cualquiera de las dos fuerzas como si fuera* «ALGO MAYOR» *que la otra, o sea, como si* (fig. 200):

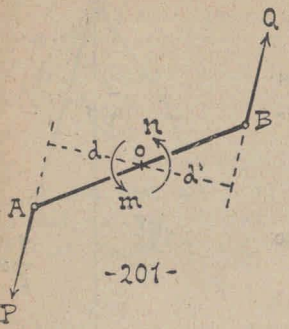
$$Q > P$$

Señalando **P'** (*equip. de* **Q**) *y* **Q'** (*antagónica de* **Q**); *y uniendo los extremos de* **Q'** *y* **P'**, *se verá que las prolongaciones de* **AB** *y* **Q' P'** SE ENCONTRARÁN SOLAMENTE EN EL INFINITO.



Esto significa que:

Ninguna fuerza puede suplir a un par, para producir su mismo efecto.



-201-

413. – Supongamos que el apoyo **o**, esté a mitad del segmento **AB**, y busquemos los momentos de **P** y **Q** con respecto a **o** (fig. 201).

$m = P.d$ } ambos en el mismo sentido.
$m' = Q.d'$ }

P. l. t. el momento resultante en **o** *es:*

$M = m + m' = 2m$ o sea $M = 2P.d$

pero $2d$ = segmento **AB**

luego $M = P \times AB$

De lo que se deduce que:

El momento de un par, con respecto al centro de su barra es igual al producto de una de las fuerzas por la distancia entre ambas.

414. – PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS SEA *estático* SE REQUIERE: a) QUE SU RESULTANTE SEA **nula**; b) QUE EL MOMENTO RESULTANTE, TAMBIÉN sea NULO. Por lo tanto, el par de fuerzas no es ESTÁTICO, sino DINÁMICO.

Pero ¿en qué consiste el dinamismo del par?

La respuesta es obvia: basta recordar cual es el significado del «MOMENTO ESTÁTICO».

415. – Ya vimos que:

Momento estático de una fuerza con respecto a un punto, es la medida de la ACCIÓN GIRATORIA que ejerce la fuerza sobre dicho punto.

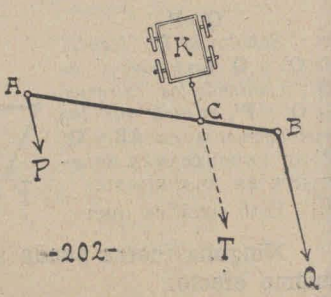
Por lo tanto:

EL ÚNICO EFECTO DE UN PAR ES HACER GIRAR LA BARRA **AB** AL REDEDOR DEL PUNTO **o**.

416. – *Todo par es, pues, un sistema giratorio.*

De modo que hay tres tipos de sistemas dinámicos: TRASLATORIOS, GIRATORIOS y MIXTOS.

417. – Sistema **traslatorio** es el que solamente imprime a su punto de apoyo un movimiento de traslación rectilínea (fig. 202).



-202-

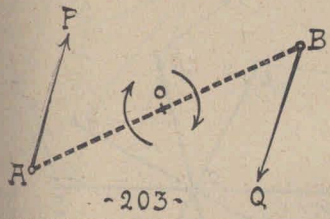
Todos los sistemas coplanares contemplados hasta ahora (con excepción del PAR DE FUERZAS) *son* traslatorios *cuando su apoyo está en el centro del sistema.*

418. – Téngase en cuenta que:

Centro de un sistema de fuerzas es el punto de aplicación de su resultante.

Punto de apoyo de un sistema de fuerzas, es el punto en el cual aplicamos una fuerza que contrarreste *total* o *parcialmente* la acción de dicho sistema.

419. – Cuando el APOYO se halla en el CENTRO del sistema, pueden darse dos casos: el de *equilibrio* y el de *traslación*; pero nunca habrá rotación.

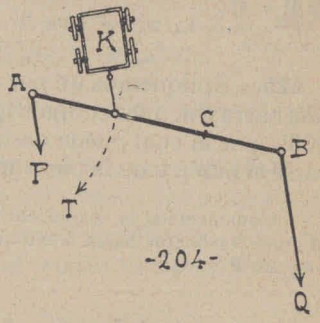


-203-

420. – Sistema **giratorio** es el que imprime a su punto de apoyo tan sólo un movimiento de rotación (fig. 203).

Existen muchos sistemas coplanares giratorios; pero el par es el ejemplo más simple.

SE PUEDE DEMOSTRAR QUE EN EL PAR, CUALQUIER PUNTO, QUE NO ESTÉ EN EL INFINITO, GOZA DE LA MISMA PROPIEDAD QUE O.



-204-

421. – Sistema **mixto** es el que imprime a su punto de apoyo un movimiento curvilíneo como resultado de un movimiento rectilíneo combinado con la rotación (fig. 204).

Cualquier sistema TRASLATORIO *se convierte en* MIXTO *si el punto de apoyo no se halla en* **C**.

422. – Condiciones para cada uno de los cuatro tipos de sistemas coplanares:

SISTEMAS COPLANARES			
RESULTANTE	MOMENTO RESULTANTE EN O	CARACTERÍSTICA DEL SISTEMA	
= cero	= cero	Sistema estático	
= cero	≦ cero	Sistema giratorio	Sistemas dinámicos
≧ cero	= cero	Sistema traslatorio	
≧ cero	≦ cero	Sistema mixto	

21.° – Efectos constante y variado.

423. – El efecto característico de un sistema de fuerzas puede ser: CONSTANTE O VARIADO.

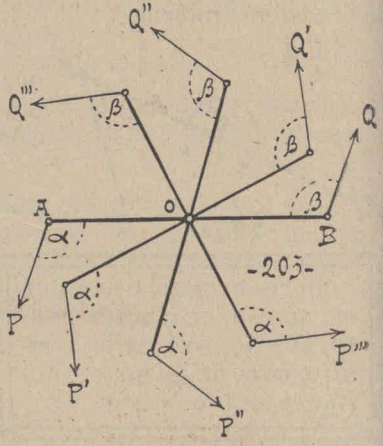
424. – Es **constante** el efecto cuando las fuerzas conservan continuamente su mutua relación, y la relación que tienen con su barra y con el punto de apoyo del sistema.

El par de fuerzas nos presenta el ejemplo más sencillo para explicar ambos tipos de efectos (fig. 205).

Si las fuerzas **P** y **Q** están ligadas en tal forma con **AB**, que los ángulos α y β no pueden modificarse, sucederá que:

La barra **AB** girará CONTINUAMENTE sobre **O**, en el sentido de **P** y **Q**.

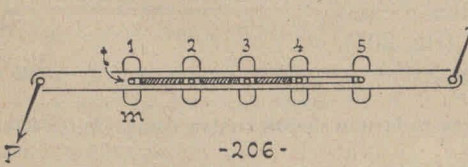
Pero en la fig. 205 se trata de un PAR LIBRE.



-205-

425. – Apliquemos un par a una barra con una rendija (fig. 206), por la cual puede deslizarse el piñón **t** de la pieza **m**.

Comencemos la experiencia cuando **m** está en **1**, e imprimamos a **m** una traslación hacia **5** mientras dejamos la barra a merced de las fuerzas **P** y **Q**.



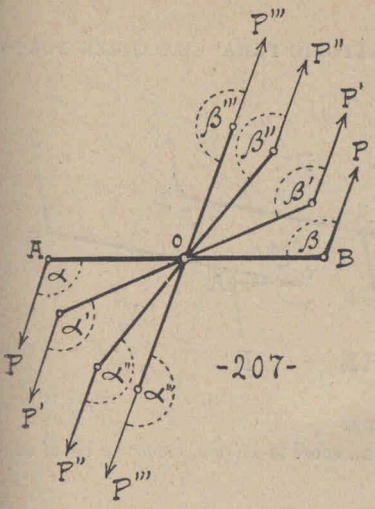
-206-

Ahora también el movimiento será giratorio; pero irá sucesivamente girando sobre **1**, **2**, **3**, **4**, y **5**.

Tenemos un efecto VARIADO.

426. – Efecto **variado** es el que se produce cuando las fuerzas durante su acción varían en una de estas tres relaciones: en su relación mutua, en su relación con la barra o en la relación con el punto de apoyo de su barra.

En el ejemplo anterior había *efecto variado* por cambio de la relación entre las fuerzas y el apoyo.



En la fig. 207, las fuerzas **P** *y* **Q** *se mantienen siempre paralelas a su posición inicial; por lo tanto:*

$\alpha < \alpha' < \alpha'' \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\beta < \beta' < \beta'' \ldots\ldots\ldots\ldots$

Y como consecuencia, el momento del par va disminuyendo continuamente hasta que en la posición **P'''** **Q'''** *se reduce a* **cero.**

En este caso hay rotación; pero la acción del sistema **PQ** se va haciendo cada vez más débil, hasta anularse en la posición **A'''** **B'''**.

22.° – Sistemas giratorios y mixtos.

427. – *El tipo más sencillo de sistema giratorio es el par de fuerzas; pero también:*

Es **giratorio** cualquier sistema cuya resultante sea CERO cuyo momento con respecto al apoyo del sistema sea > CERO.

Es **mixto** cualquier sistema cuya resultante sea > cero, y cuyo momento con respecto al punto de apoyo, sea > CERO.

428. – Los sistemas giratorios son casos particulares de los sistemas mixtos, difiriendo de ellos tan sólo en el valor de la resultante.

Deben, pues, llenar las mismas condiciones que éstos, con las modificaciones que se derivan del valor de su resultante.

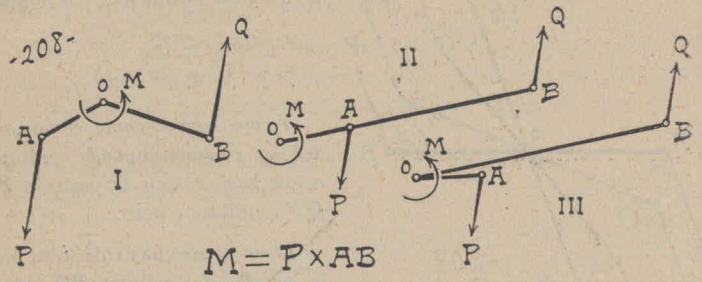
429. – La propiedad giratoria de un sistema mixto aparece desde que su punto de apoyo deja de coincidir con el centro del sistema.

En consecuencia:

Si un sistema coplanar es *simplemente giratorio*, lo será para cualquier punto que no esté en el infinito; porque su centro se halla forzosamente en el infinito.

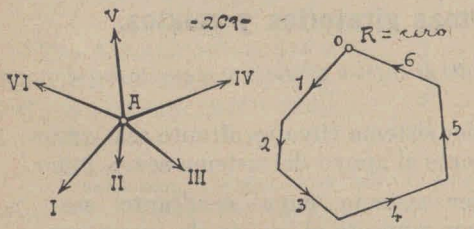
Por lo tanto:

EL PAR DE FUERZAS ES GIRATORIO PARA CUALQUIER PUNTO REAL (fig. 208).



En **I** *la barra* **AoB** *es* QUEBRADA.

En **II** *la barra* **AoB** *está* PLEGADA *sobre sí misma, como se ve al comparar este caso con el* **III**.

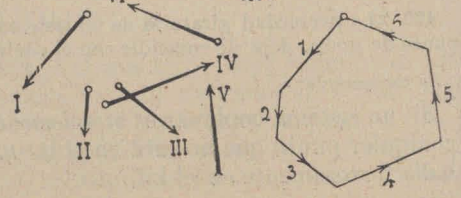


430. – Cuando al construir el polígono de fuerzas, obtenemos un polígono CERRADO:

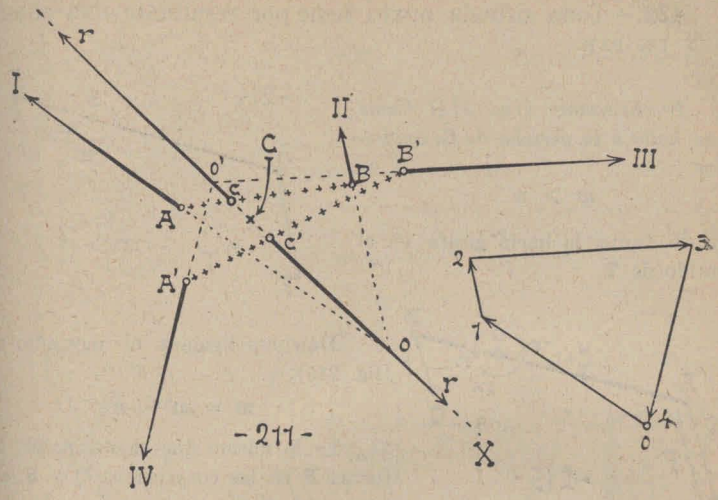
a) Si todas las fuerzas tienen un único punto de aplicación: EL SISTEMA ES ESTÁTICO (fig. 209).

b) Si las fuerzas tienen distintos puntos de aplicación no reducibles a uno sólo: EL SISTEMA ES GIRATORIO (fig. 210).

NOTA. – Hemos añadido «*no reducible a uno sólo*» porque a veces por composiciones sucesivas, se encuentra un *punto único* de aplicación; y entonces el sistema es estático (fig. 211).

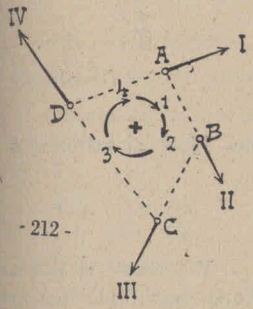


431. – Todo sistema giratorio tiene como resultante un PAR DE FUERZAS (figs. 212 y 213).

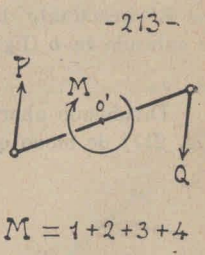


Si el sistema **I, II, III, IV**, (fig. 212) es giratorio, podemos sumar sus momentos *isopolares* **1, 2, 3, 4**, obteniendo:

$$\mathbf{M} = 1+2+3+4$$



Por lo tanto, podemos sustituir el sistema **I, II, III, IV**, por un par **P, Q**, cuyo momento sea **M** (fig. 213).



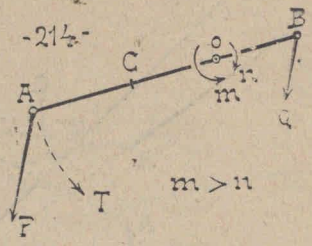
Basándose en este principio la mayoría de los autores estudian el **par** como si fuera el único sistema giratorio! *suponiendo que los alumnos suplirán espontáneamente las faltas de su inexactitud.*

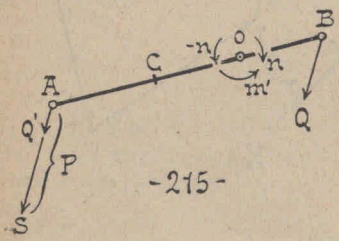
432. – Todo sistema mixto tiene por resultante UNA FUERZA Y UN PAR.

Efectivamente (fig. 214) Como **o** *se halla a la derecha de* **C**, *tendremos*

$$m > n$$

por lo tanto la barra girará en el sentido de **T**.





Descompongamos el momento **m** (fig. 215):

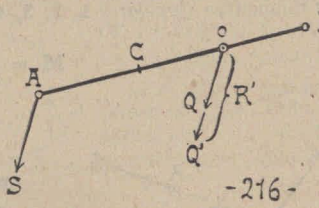
$$m = m' + (-n)$$

Es lo mismo que descomponer la fuerza **P** en las congruentes **Q** y **S**, en forma tal, que:

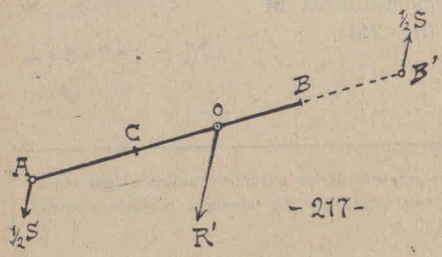
m' = momento de **S**

—n = momento de **Q'**

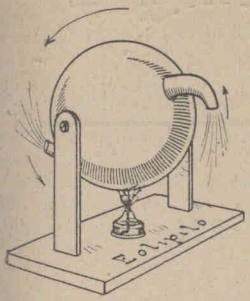
Los dos momentos **n** y **—n** por ser iguales y de sentido contrario se anulan; que es lo mismo que decir que **R'** (resultante de **Q**, **Q'**) se halla aplicada en **o** (fig. 216).



Dividiendo ahora **S** por mitad, trasportamos ½ **S** al extremo **B'** (fig. 217) de modo que **Ao** = **oB'**



Y tenemos el sistema **P,o,Q** sustituido por el sistema ½ **S**, **R'**, ½ **S'**, o sea, POR UN PAR Y UNA FUERZA.

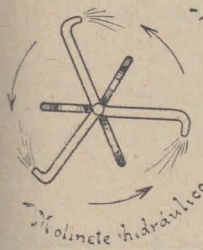


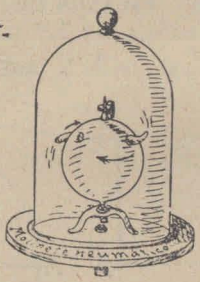
433. – APLICACIONES DE LOS SISTEMAS GIRATORIOS

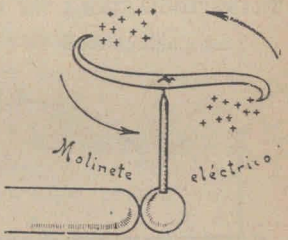
En su lugar correspondiente, se irán explicando los aparatos de la fig. 218.

Por ahora, basta solamente advertir que, si el molinete está bien equilbrado, su eje no recibe impulso alguno durante la rotación.

-218-







23.º – Sustitución de fuerzas en las palancas.

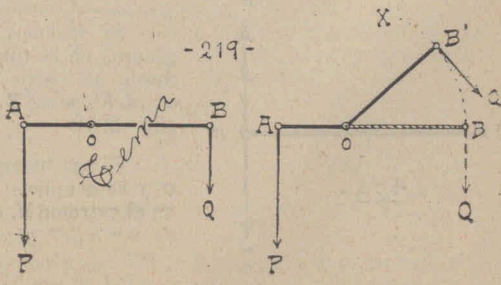
434. – En primer lugar debemos saber transformar una palanca en otra equivalente.

Para más claridad consideraremos solamente los casos en que las fuerzas son perpendiculares a la palanca.

435. – TRANSFORMAR UNA PALANCA RECTILÍNEA DE 1.er GÉNERO EN QUEBRADA (fig. 219).

La fuerza **Q** debe seguir siendo perpendicular a su brazo.

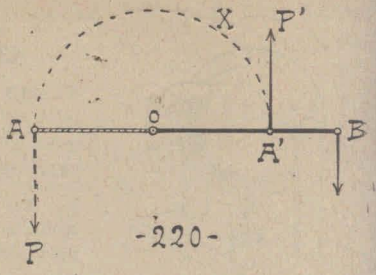
-219-



436. – DOBLAR UNA PALANCA DE 1.er GÉNERO, TRANSFORMÁNDOLA EN PALANCA DE 2.° O 3.er GÉNERO (fig. 220).

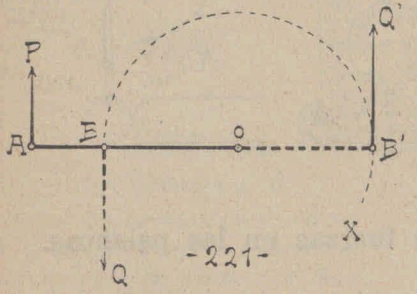
La palanca **A'oB** es equivalente de la **AoB**, porque:

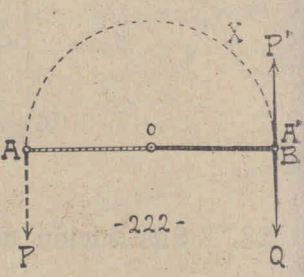
$$A'o = Ao$$



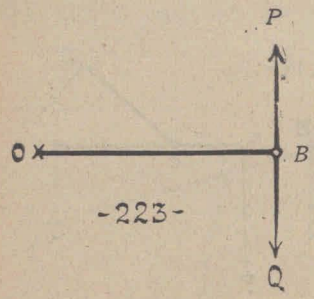
437. – DESDOBLAR UNA PALANCA DE 2.° O 3.er GÉNERO, TRANSFORMÁNDOLA EN PALANCA DE 1.er GÉNERO (fig. 221).

La palanca **AoB'** es equivalente de la **AoB**.





438. – PALANCA DE 2° O 3.er GÉNERO, DE BRAZOS IGUALES (fig. 222).



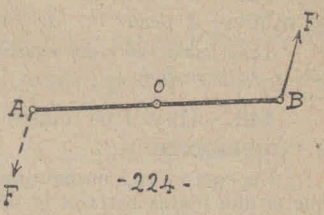
Si tenemos la palanca **AoB** de 1.er género, en la que **Ao** = **oB** al trasformarla en otra de 2.° o 3.er género, caerá **A'** sobre **B**. De aquí resulta que (fig. 223):

Si una barra **oB** tiene fijo el extremo **o** y se le aplican fuerzas perpendiculares en el extremo **B**, *obtendremos una palanca de 2.° o 3.er género de brazos iguales.*

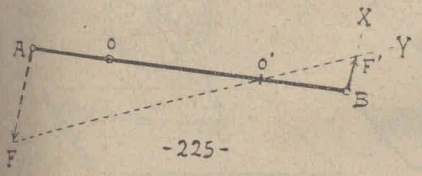
439. – SUSTITUIR FUERZAS DE UN EXTREMO, EN EL OTRO EXTREMO DE LA PALANCA DE 1.er GÉNERO.

1.er Caso. – Cuando los brazos son iguales (fig. 224).

Dada la fuerza **F** en el extremo **A**, basta colocar en **B** una fuerza **F'**, antagónica de **F**.



2.° Caso. – Cuando los brazos son desiguales (fig. 225).

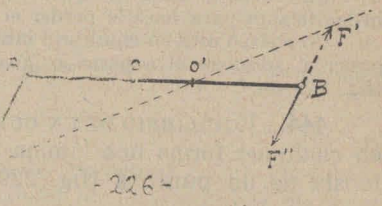


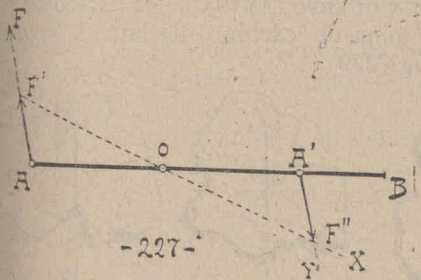
Se determina **Bo' = Ao.**

Se traza **FY** (pasando por **o'**.

Se traza **BX//AF** y se obtiene: *fuerza* **F'** = equivalente de *fuerza* **F**.

440. – La EQUIVALENTE de una fuerza, en un punto dado de la palanca, es la opuesta de la EQUILIBRANTE en dicho punto (fig. 226).





Si **F'** es la equivalente de **F**:

F'' es la equilibrante de **F**, porque es la equilibrante de **F'**.

441. – SUSTITUIR UNA FUERZA POR UN PAR (fig. 227).

Solamente es posible este problema en el caso de las palancas.

Se efectúa **F ÷ 2 = F'**.

Se traza **F'oX**; después se traza **A'Y // F**, y queda determinado **F''**.

El par **F'F''** es equivalente de la fuerza **F** con respecto a **o**.

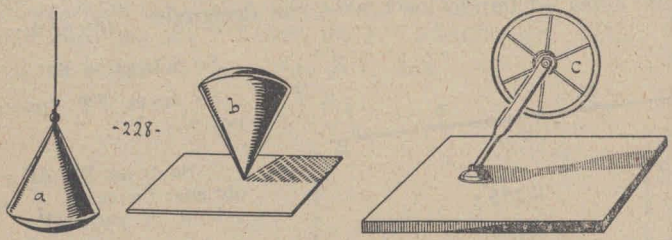
24.° – Equilibrio de los cuerpos.

442. – Se dice que un cuerpo está **en equilibrio,** cuando no se mueve, *a pesar de las fuerzas que están actuando en él.*

Aquí hablaremos del equilibrio de los cuerpos que están sujetos tan sólo a la gravedad.

443. – Hay tres clases de equilibrio: ESTABLE, INESTABLE e INDIFERENTE.

Un cuerpo está en equilibrio **estable** cuando se halla en forma tal, que si una fuerza exterior lo desviara de su posición, al desaparecer dicha fuerza, el cuerpo volvería a su posición primera (fig. 228-*a*).



-228-

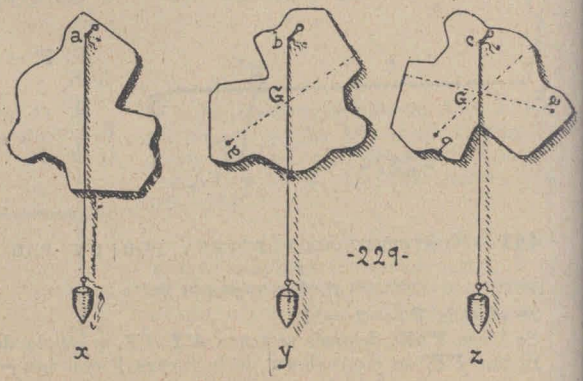
Un cuerpo se halla en equilibrio **inestable,** cuando basta una fuerza insignificante para hacerle perder el equilibrio (fig. 228-*b*).

Un cuerpo está en equilibrio **indiferente,** cuando si se le desvía de su posición, adquiere otra posición igualmente equilibrada que la anterior (fig. 228-*c*).

444. –EQUILIBRIO DE UN CUERPO LAMINAR. – 1.° Recortemos en cualquier forma una lámina de cartón o de lata y colguémosla de un punto **a** (fig. 229).

La lámina oscilará como un péndulo, hasta que quedará en equilibrio.

Marquemos entonces con la ayuda de una plomada, la dirección de la vertical **ax**.



-229-

2.° Repitamos la operación, colgando la lámina de **b**, y marquemos la dirección de la vertical **by**.

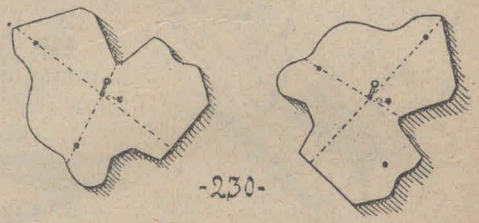
Las dos verticales se encontrarán en un punto, que denominaremos **G**.

3.° Colgándola de cualquier otro punto, por ej. **c**, la nueva vertical **cz** pasará también por **G**.

4.° Si la colgamos del punto **G**, la lámina no oscilará, y se quedará *quieta* en cualquier posición que le demos (fig. 230).

En este caso se halla en EQUILIBRIO INDIFERENTE.

445. – Centro de gravedad, baricentro o CENTRO DE MASA de un cuerpo, es el punto por donde hay que suspenderlo para que quede en *equilibrio indiferente*.

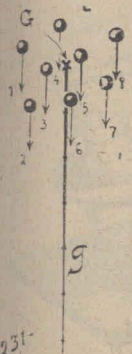


Equilibrio indiferente

En el ejemplo anterior, **G** *es el centro de gravedad.*

NOTA. – La definición que acabamos de dar, de *baricentro*, es una definición experimental. Es clara exacta y completa, cumpliendo con los tres requisitos de toda definición.

Veamos ahora la definición matemática.



446. – Centro de gravedad de un cuerpo es, el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan en cada una de las moléculas del cuerpo.

Si el cuerpo es homogéneo, todas las componentes de la fuerza gravítica resultante son iguales.

Ej.: Supongamos un cuerpo, constituido por 8 moléculas iguales (fig. 231).

Sus fuerzas gravíticas particulares son **1,2,....7,8**. La fuerza gravítica general es **g**, puesto que es la resultante del sistema **1,2,.... 7,8**.

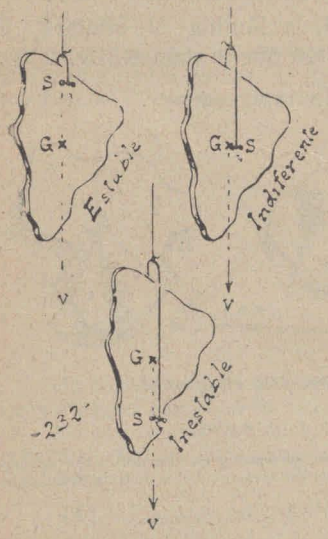
El punto **G** de aplicación de la resultante **g**, es el BARICENTRO del cuerpo dado.

NOTA. – Esta es la definición matemática del BARICENTRO. En muchos casos hay que tenerla en cuenta para entender cual es el verdadero papel que desempeña el punto **G**.

447. – Para estudiar el equilibrio de los cuerpos, hay que distinguir dos casos: a) *equilibrio de los cuerpos suspendidos*, b) *equilibrio de los cuerpos apoyados o asentados.*

448. – Equilibrio de los cuerpos suspendidos.

Como consecuencia del experimento anteriormente expuesto, queda demostrado el siguiente principio:



PARA QUÉ UN CUERPO SUSPENDIDO ESTÉ EN EQUILIBRIO, SE REQUIERE QUE *su punto de suspensión y su centro de gravedad se hallen sobre una misma vertical.*

449. – LAS TRES FORMAS DE EQUILIBRIO DE CUERPOS SUSPENDIDOS (fig. 232).

1.° Cuando **G** está por debajo del punto de suspensión, el equilibrio es ESTABLE.

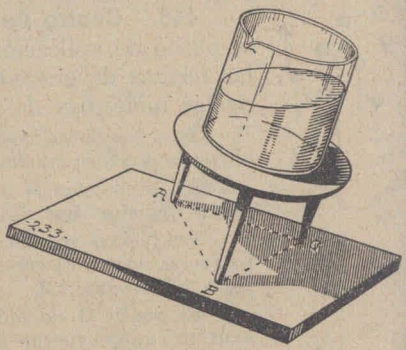
2.° Cuando **G** está por encima de punto de suspensión, el equilibrio es INESTABLE.

3.° Cuando **G** y **S** coinciden, el equilibrio es INDIFERENTE.

450. – De lo anterior se deduce que **G** tiende siempre a bajar.

PARECE COMO SI TODO EL PESO DEL CUERPO ESTUVIESE CONCENTRADO EN **G**, Y QUE LO RESTANTE DEL CUERPO FUESE UNA ATMÓSFERA VISIBLE E IMPENETRABLE, *pero inmaterial, o sea sin peso.*

G es, pues, el *núcleo mecánico* del cuerpo.



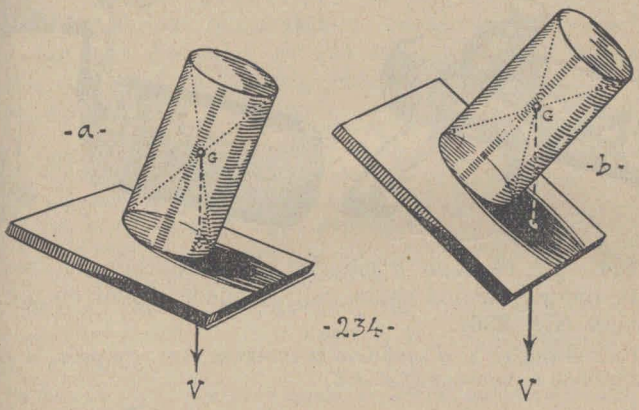
451. – *Para poder estudiar las condiciones de equilibrio de un cuerpo apoyado, hay que saber a qué se da el nombre de* BASE O ÁREA DE APOYO O DE SUSTENTACIÓN.

Area o base de apoyo de un cuerpo es el polígono que tiene por vértices todos sus puntos de apoyo (fig. 233).

En nuestro caso **ABC** es el *área de apoyo.*

452.– Equilibrio de los cuerpos asentados.

Para que un cuerpo asentado esté en equilibrio, se requiere que la vertical que sale de su baricentro pase por el área de apoyo (fig. 234).

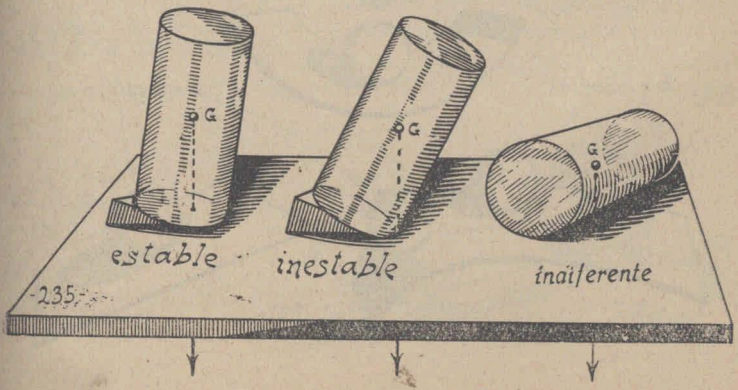


En **a** *hay equilibrio porque* **i** *se halla en la base.*

En **b** *el cuerpo* CAE, *porque* **i** *se halla fuera de la base.*

i (punto de incidencia del rayo **V** en el plano de sustentación).

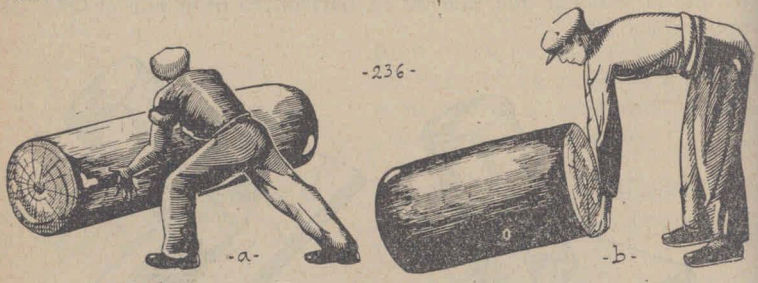
453. – LAS TRES FORMAS DE EQUILIBRIO EN CUERPOS APOYADOS (fig. 235).



1.° Cuando la vertical del baricentro pasa dentro del área de sustentación hay equilibrio ESTABLE.

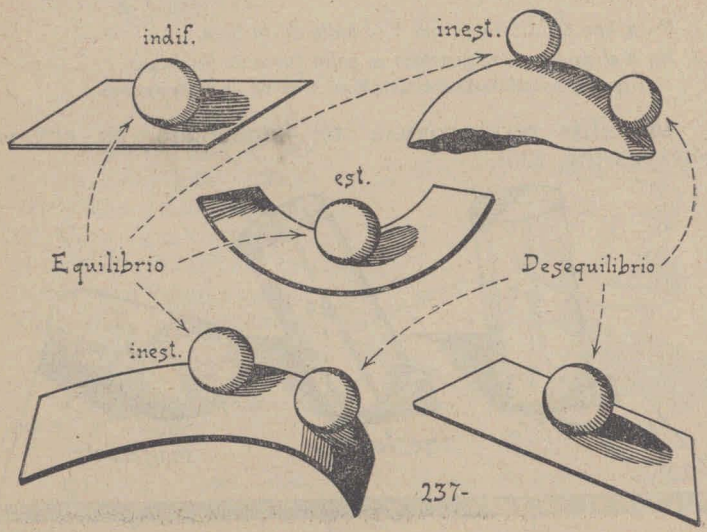
2.° Cuando la vertical pasa por la periferia de la base de apoyo, hay equilibrio INESTABLE.

3.° Los cuerpos de revolución, están en equilibrio INDIFERENTE cuando están apoyados en una generatriz de su superficie de revolución.



454. – En el cono y cilindro el equilibrio es en realidad MIXTO, porque cuando están CAÍDOS pueden rodar en una sola dirección (fig. 236).

Para el empuje **a**, *el equilibrio es* INDIFERENTE; *pero para el empuje* **b**, *el equilibrio es* ESTABLE (*fig. 236*).



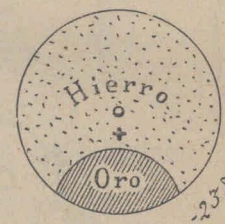
455. – El único cuerpo que apoyado, puede tener equilibrio indiferente en todas las direcciones, es la esfera (fig. 237).

Para que la esfera apoyada esté en equilibrio, se requiere que su sostén sea HORIZONTAL, pudiendo dicho sostén ser *plano, curvo* o *redondo*.

25.° - Baricentros aparente y real.

456. – CENTRO GEOMÉTRICO DE GRAVEDAD. — Como en Geometría se supone que todos los cuerpos son homogéneos, o sea *"que están formados de una sola sustancia"*, resulta que para los cuerpos heterogéneos existen dos centros de gravedad: el GEOMÉTRICO y el FÍSICO.

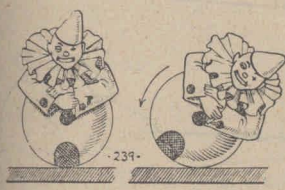
Si construímos un disco circular, de dos materias, ej., hierro y oro (fig. 238), tendrá dos centros de gravedad: el geométrico *(señalado en la figura con un cerito), y el* físico *(que hemos señalado con una cruz).*



-238-

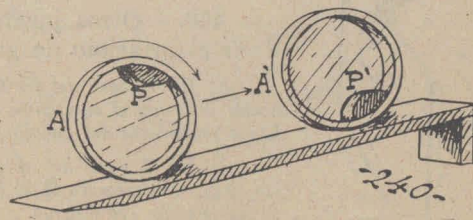
457. – Cuando en un cuerpo no coinciden los dos centros de gravedad, llamaremos "APARENTE" el *geométrico*, y "REAL" el *físico*.

En los cuerpos homogéneos macizos, los dos baricentros coinciden siempre; no hay, pues, en ellos baricentro aparente.


-239-

458. – Basándose en el engaño que producen ciertos cuerpos heterogéneos cuando uno ignora su constitución, se construyen ciertos juguetes como el *saltaperico*, el *disco ascendente*, el *acróbata alambrista*, etc., que a primera vista causan la impresión de que *contradicen el principio de gravedad* (fig. 239 h. 241).

En todos estos casos nos dejamos engañar, tomando como real el centro aparente **o**, *y no sospechando que el* centro real **g** *se halla por debajo de* **o**.



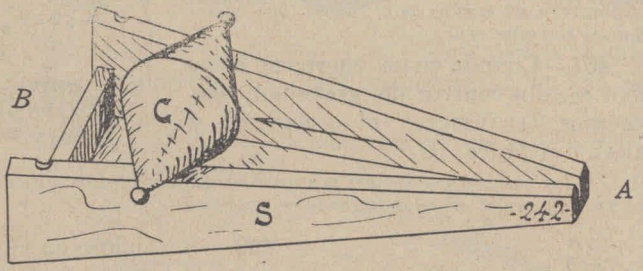
-240-

459. - PARADOJA ESTÁTICA. — Llámase así el experimento que se efectúa con un aparato compuesto de dos vías divergentes en el sentido ascendente y de un doble cono que se desliza sobre dichas vías (fig. 242).

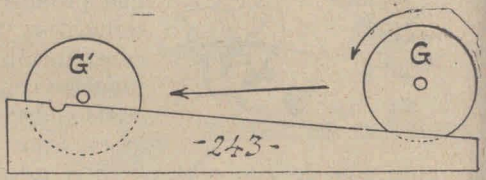
Colocando el doble cono en **A**, *rueda dirigiéndose hacia* **B**, *pareciendo a primera vista que el móvil* SUBE.



Examinando la fig. 243, se ve que en realidad el cono ha bajado, y su baricentro siguió la trayectoria *descendente* **GG'**.







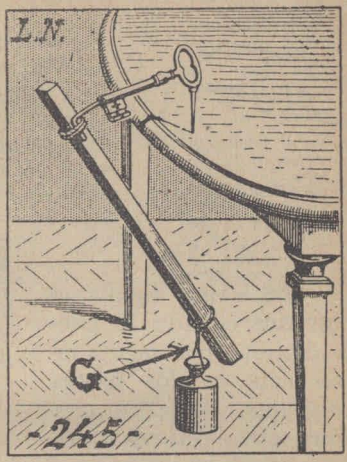
460. - Otros juegos que parecen contradecir el principio de gravedad.

a) En el caso del jinete (fig. 244), debido a la bocha inferior, el baricentro se halla por debajo de los basos posteriores del caballo.

b) En el caso de combinaciones como la de la fig. 245, el baricentro **G** *se halla por debajo del punto de suspensión del sistema.*

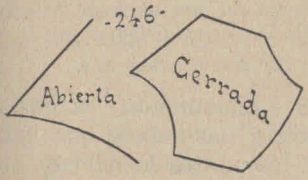
461. - Para saber buscar el *baricentro* de los cuerpos hay que saber buscar el *baricentro geométrico* de las líneas y figuras.

Y para entendernos en las indicaciones referentes a este asunto debemos prefijar algunos conocimientos relacionados con los centros geométricos.



26.° - Centro de las figuras geométricas.

462. - Las figuras geométricas pueden ser: ABIERTAS y CERRADAS (fig. 246).



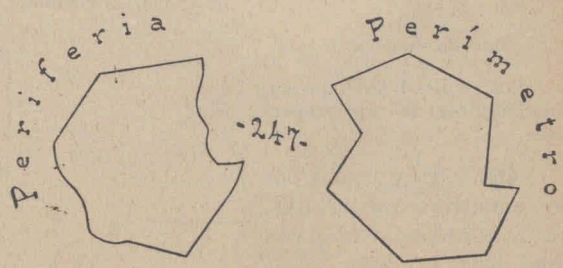
Polígonos son las figuras planas, cerradas y rectilíneas.

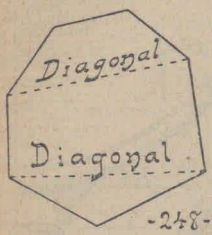
463. - **Periferia** es el contorno de las figuras cerradas.

La *periferia* de los polígonos se llama **perímetro** (fig. 247).

Todo perímetro es una línea quebrada.

Por eso la línea quebrada, se llama tambien LÍNEA POLIGONAL.



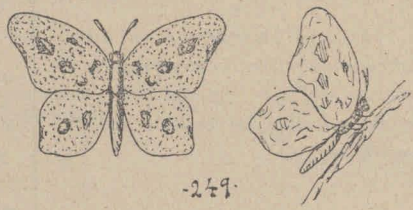


-248-

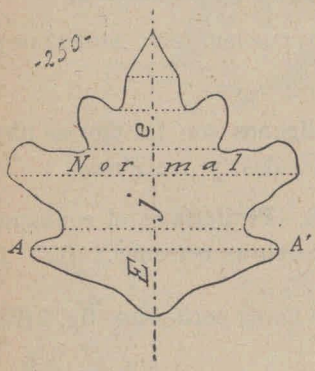
464. – **Diagonal** es la recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono (fig. 248).

465. – Para comodidad de lenguaje, llamaremos «polígonos **pares**», a los que tienen *número par de lados;* e «**impares**» a los que tienen *número impar de lados.*

466. – Una figura es **simétrica** cuando se puede dividir, por medio de una recta, en dos partes tales, que, dobladas una sobre otra, *coincidan* como cuando una mariposa pliega sus alas (fig. 249).


-249-

467. – Se llama **eje de simetría** la recta que divide las figuras simétricas en dos partes iguales (fig. 250).



-250-

En las figuras simétricas, se llaman **homólogos,** *los puntos, lados, ángulos, etc, que se corresponden a ambos lados del eje, en forma tal, que al plegar la figura sobre dicho eje, coincidirían.*

Ej: **A** es homólogo de **A'**

468. – Llamarenos "**normales de simetría**" las rectas que unen entre sí los puntos homólogos.

AA' = normal de simetría.

El eje de simetría es la *mediatriz* de todas las normales.

Esto significa que:

Los puntos homólogos son equidistantes del eje respectivo.

469. – Hay tres tipos de simetría: BILATERAL, RECTANGULAR y RADIADA (fig.s 251 h. 253).



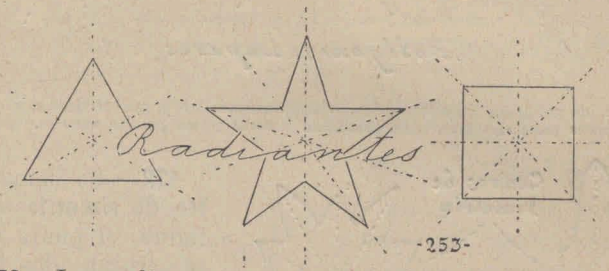
-251-



-252-

En la simetría **bilateral**, hay un solo eje; en la **rectangular** hay dos ejes; y en la **radiada** hay tres o más ejes.

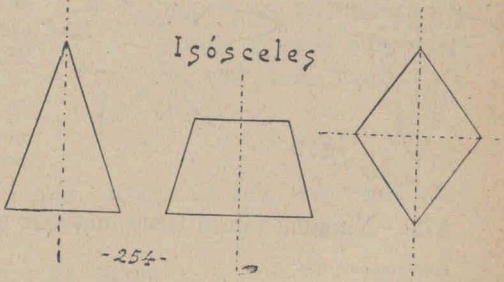
Las figuras según su simetría, se dividen en: MONOSIMÉTRICAS o *bilaterales*, BISIMÉTRICAS o *rectangulares* y RADIANTES o *radiadas*.



-253-

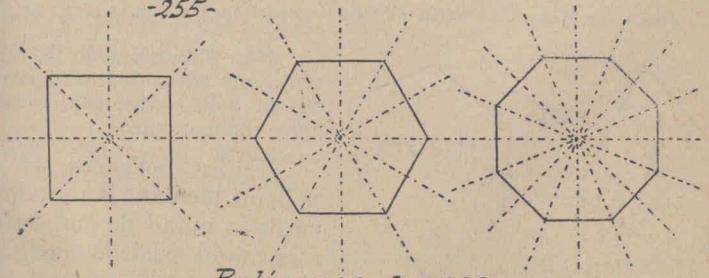
470. – Los polígonos *mono* y *bisimétricos* se dice que son **isósceles** (fig. 254).

471. – Todos los polígonos regulares son radiantes (fig. 255 y 256).

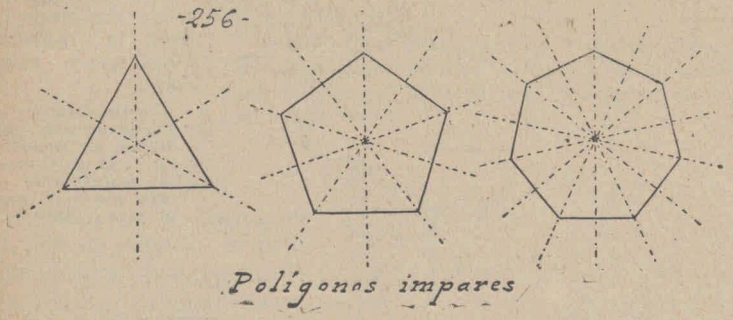


-254-

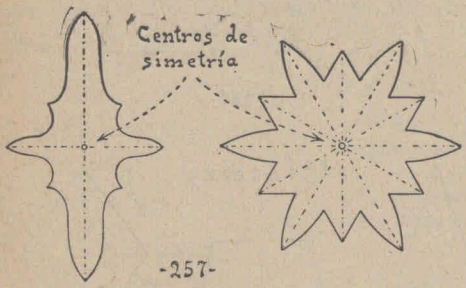
-255-



Los polígonos regulares tienen tantos ejes de simetría, cuantos son sus lados.



En los polígonos *impares*, cada eje atraviesa un lado y un vértice; y, en los polígonos *pares* unos ejes atraviesan los lados, y otros pasan por los vértices.



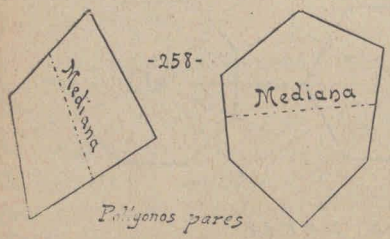
472. – Se llama **centro de simetría** de una figura, el punto donde se cruzan dos o más ejes de simetría (fig. 257).

Las figuras bilaterales no tienen centro de simetría, porque tienen un solo eje.

473. – Ninguna figura tiene más que un centro de simetría.

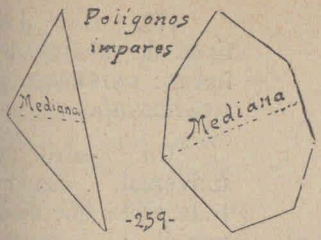
Esto significa que:

Todos los ejes de simetría de una figura tienen un encuentro único.



474. – Generalizando un concepto que en los textos argentinos se halla demasiado restringido, diremos que:

En los polígonos *pares*, se llama **mediana** la recta que va de la mitad de un lado, a la mitad del lado opuesto (fig. 258).



-259-

Y en los polígonos *impares*, se llama **mediana** la recta que va de un vértice a la mitad de su lado opuesto (fig. 259).

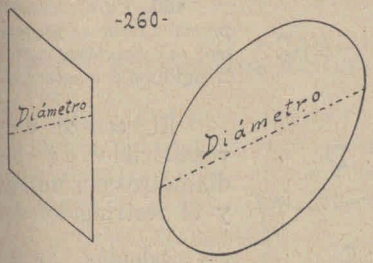
En los polígonos impares, *hay tantas medianas como lados: y en los* pares, *hay una mediana por cada dos lados.*

En los polígonos regulares, toda mediana es eje de simetría; y en los regulares que son pares, son ejes de simetría también las *macrodiagonales.*

Léxico – **Macrodiagonal** = *La diagonal más larga.*

475. – *Diámetro* de una figura es la recta que divide dicha figura en dos partes iguales (fig. 260).

Todo eje de simetría es diámetro; pero no viceversa.



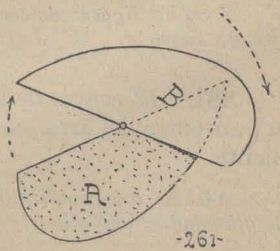
-260-

476. – CUANDO SE TRATA DE AVERIGUAR SI UNA RECTA ES SIMPLEMENTE DIÁMETRO, **se recurre a la virada** sobre el punto medio de dicha recta (fig. 261).

PARA AVERIGUAR SI UNA RECTA ES EJE DE SIMETRÍA, **se recurre al volteo** (fig. 262).

477. – Se llama **centro de figura** el punto donde se cruzan dos o más diámetros (figs. 263 y 264).

Todo centro de simetría es centro de figura; pero no viceversa.

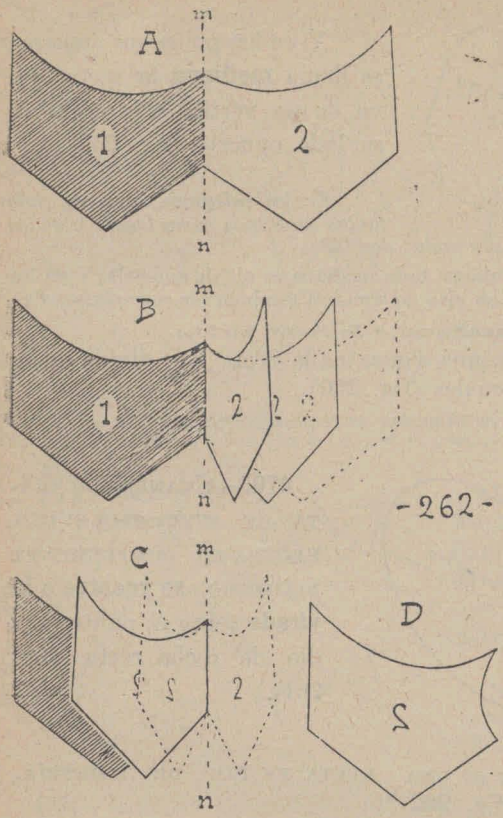


-261-

478. – NINGUNA FIGURA PUEDE TENER MÁS QUE UN CENTRO.

Por eso:

Todos los diámetros de una misma figura concurren a un solo punto, que es el CENTRO.



-262-

479. – Hay dos tipos de centro de figura: UNIVERSAL y RESTRINGIDO.

Un centro es **universal,** cuando toda recta que pasa por él, es *diámetro* (fig. 263).

Un centro es **restringido,** cuando por él pasan rectas que no son diámetros (fig. 264).

480.–*Para conocer a primera vista si un centro es* universal *o* restringido, *basta saber que:*

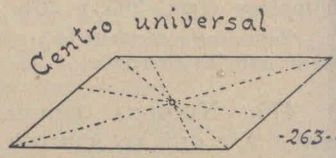
El centro universal divide los diámetros por mitad; y el restringido, no.

Además, solamente tienen centro restringido las figuras de simetría impar.

Y en las figuras de centro restringido, no hay más diámetros que los ejes de simetría.

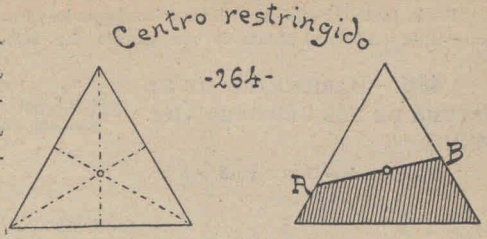
481. – El centro de figura es el baricentro del área correspondiente.

Además toda figura, tiene centro de gravedad, y uno solo.

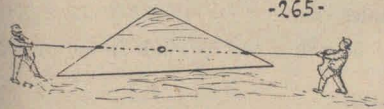


Por eso cuando decimos «**centro geométrico**» nos referimos al BARICENTRO GEOMÉTRICO DE UN ÁREA, sin fijarnos si es también centro de figura y de simetría.

482. – **Eje de gravedad** de una figura es la recta que sostiene a dicha figura en *equilibrio indiferente* (fig. 265).



Cualquier recta que pase por el baricentro de una figura, es eje de gravedad de la misma.



Por eso podemos decir también que:

EJE DE GRAVEDAD de un sistema es cualquier recta que contiene el centro de gravedad de dicho sistema

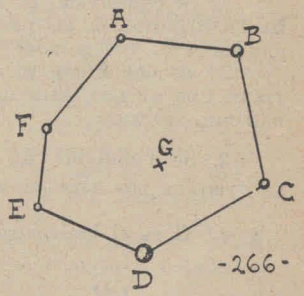
Todo diámetro es eje de gravedad; pero no viceversa.

27.° – Baricentros de los vértices de los polígonos.

483. – Podemos construir perímetros poligonales con varillas delgadas, colocando en sus JUNTURAS, *bolillas pesadas* (fig. 266).

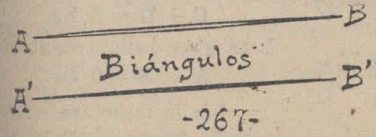
Si el peso de las varillas es despreciable, el baricentro **G** del sistema se hallará *sensiblemente* sobre el baricentro **G** de un sistema cuyas varillas no tuvieran peso alguno.

Ese baricentro ideal **G** se llama: «*baricentro de los vértices*» del polígono.



484. – En el cálculo de baricentros de vértices, pueden darse dos casos: a) *que todos los vértices pesen lo mismo,* b) *que cada vértice tenga un peso distinto del de los otros.*

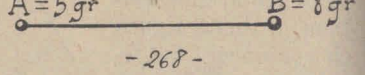
Sabiendo resolver el 2.° caso se sabrá resolver también el primero; por eso enseñamos antes, la teoría de la solución del 2.° caso,



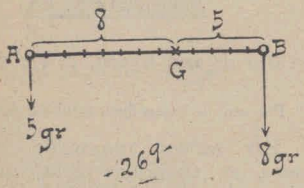
485. – Todo segmento de recta se puede considerar como si fuera un polígono de dos lados, o sea un «BIÁNGULO» (fig. 267).

Por lo tanto, el caso de bolillas colocadas en los extremos de una varilla "sin peso", corresponde también al asunto de este párrafo (fig. 268).

486. – BARICENTRO DE UN SISTEMA DE DOS VÉRTICES (fig. 268).



Ejemplo: **A** = 5 gr. y **B** = 8 gr.

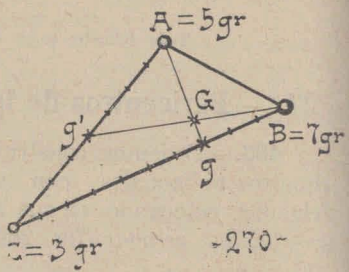


Se trata de buscar el centro de un sistema de dos fuerzas paralelas, de 5 y 8 gr. respectivamente (fig. 269).

G divide la barra en dos brazos **a** y **b**, tales que:

$5a = 8b$ o sea $5/8 = a/b$ (prop. inversa)

487. – BARICENTRO DE LOS VÉRTICES DE UN TRIÁNGULO (fig. 270).



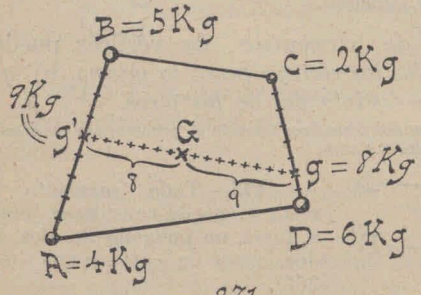
Ejemplo: **A** = 5 gr. **B** = 7 gr. **C** = 3 gr.

1.° Se equidivide el segmento **BC** en 10 partes, de las que 3 corresponden a **b**, y 7 a **c**.

2.° Se une **A** con **g**, Y SE OBTIENE UNO DE LOS EJES DE GRAVEDAD DEL SISTEMA.

3.° Se equidivide **AC** en 8 partes, etc.; y se obtiene **Bg'**, QUE ES OTRO DE LOS EJES DE GRAVEDAD.

4.° **G** es el baricentro del sistema **A,B,C**.



488. – BARICENTRO DE LOS VÉRTICES DE UN CUADRILÁTERO (fig. 271).

Ejemplo: **A** = 4 Kg. **B** = 5 Kg. **C** = 2 Kg. **D** = 6 Kg.

En **g** se halla la resultante:

$C + D = 8$ Kg.

Y en **g'** se halla la resultante:

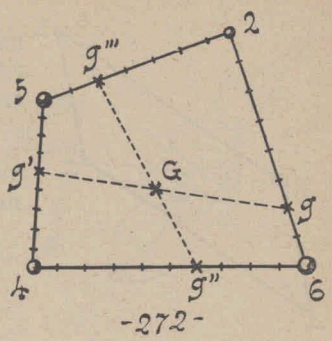
$A + B = 9$ Kg.

Por lo tanto, se divide la barra **gg'** en 17 partes, etc.

488. – 2.ª SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ANTERIOR (fig. 272).

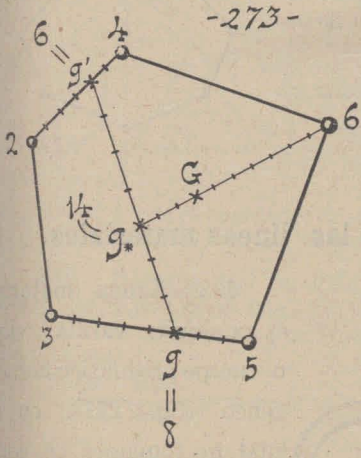
Esta solución se basa en el principio siguiente, que ya hemos expuesto en forma menos explícita:

EL CENTRO DE GRAVEDAD DE UN SISTEMA RÍGIDO DE PUNTOS, SE HALLA EN EL ENCUENTRO DE LAS RECTAS QUE UNEN LOS PARES DE BARICENTROS QUE SE OBTIENEN DESCOMPONIENDO DOS VECES EL SISTEMA EN OTROS DOS SISTEMAS CUALESQUIERA.



-272-

El par **g,g'** se obtuvo al descomponer el sistema **5.4.6.2** en los dos sistemas **5.4** y **2.6**.



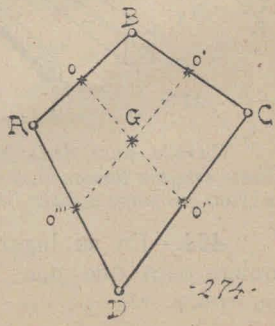
Y el par **g'',g'''** se obtuvo al descomponer el sistema **5.4.6.2** en los dos sistemas **4.6** y **5.2**.

489. – Con lo que hemos expuesto, queda generalizado el procedimiento gráfico para determinar el baricentro de los vértices de cualquier polígono.

Un ejemplo (*fig. 273*). Primero buscamos por separado el baricentro **g** del sistema **3.5** y el baricentro **g'** del sistema **2.4**.

El segmento **gg'** *es uno de los ejes de gravedad del sistema* **2.3.4.5.**

Sobre **gg'** se halla g_*, que actúa sobre la palanca g_*6 con 14 unidades de peso.



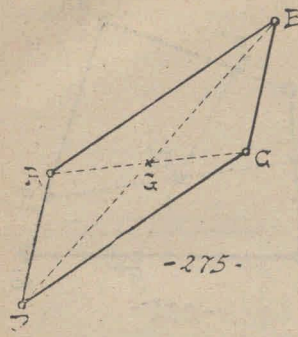
-274-

490. – BARICENTRO DE UN SISTEMA HOMOGÉNEO DE VÉRTICES.

O sea: cuando todos los vértices pesan lo mismo (*fig. 274*).

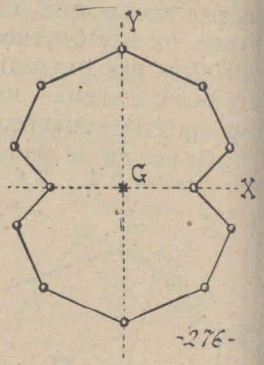
La única novedad se halla en que

Ao = oD, Bo' = o'C, etc.



491. – En el caso particular de los paralelogramos, el problema anterior se simplifica mediante el encuentro de diagonales (fig. 275).

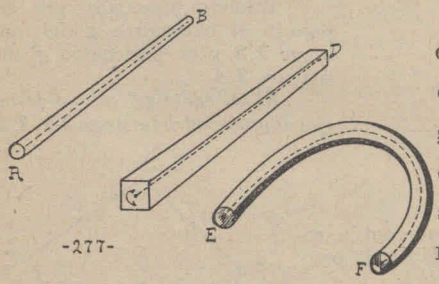
492. – BARICENTRO DE LOS VÉRTICES HOMOGÉNEOS DE LOS POLÍGONOS BI Y POLISIMÉTRICOS (fig. 276).



Sea cual fuere la forma de estos polígonos, siempre se hallará G en el CENTRO DE SIMETRÍA; o sea en el encuentro de dos ejes cualesquiera de simetría.

Y como todos los polígonos regulares son RADIANTES, *o sea* polisimétricos,....

28.° — Baricentro de las líneas materiales.



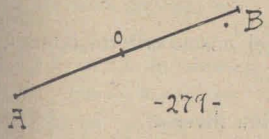
493. – **Línea material** es cualquier varilla, viga o cuerpo prismático homogéneo (fig. 277), en el cual no tomamos en consideración más que su LÍNEA GRAVITATORIA **AB.**

Cuando, pues, decimos que «buscamos el centro de gravedad de una línea» *estamos buscando el centro de gravedad de cualquier* CUERPO PRISMÁTICO *que tenga a dicha línea como gravitatoria.*

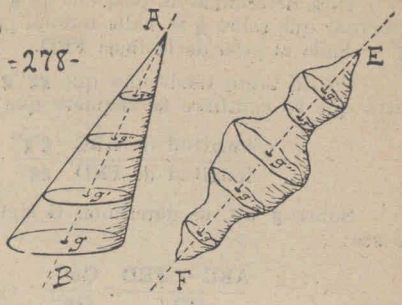
494. – En su lugar enunciaremos la condición que se requiere para que una línea *curva* sea la gravitatoria de un cuerpo.

Aquí sólo diremos que:

Una *recta* es la **gravitatoria** DE UN CUERPO (fig. 278) cuando todos sus puntos son baricentros de una serie de secciones planas mutuamente paralelas, efectuadas en el cuerpo.

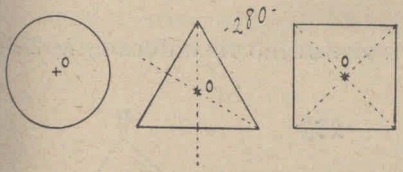


-279-



-278-

495. – El baricentro de una recta **AB**, es su punto medio **o** (fig. 279).



-280-

496. – El baricentro de una periferia regular, es el centro de su figura (fig. 280).

Si **o** es el centro geométrico de un círculo, de un triángulo equilátero o de un cuadrado, es también el baricentro de sus respectivas periferias.

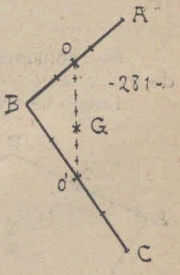
497. – BARICENTRO DE UNA LÍNEA POLIGONAL DE DOS LADOS (fig. 281).

G se halla sobre la línea de los centros **oo'**, y en forma tal que:

$$\frac{Go}{Go'} = \frac{BC}{AB}$$ (proporción inversa)

O sea que:

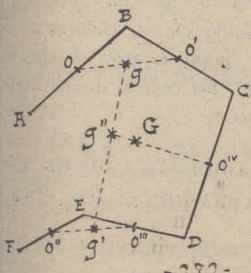
$$AB \times Go = BC \times Go'$$



-281-

498. – BARICENTRO DE UNA POLIGONAL CUALQUIERA.

Para buscarlo se puede seguir cualquier rumbo. Ej.: (fig. 282).



-282-

g = baricentro de **ABC**.
g' = baricentro de **FED**.
(**g** y **g'** se buscaron conforme al problema anterior).
g'' = *baricentro del sistema* **ABC**, **FED**

Para determinar la posición de **g''** sobre el segmento **gg'**, hay que recordar que sobre **g** se halla todo el peso de la línea **ABC**, y que sobre **g'** se halla el peso de la línea **FED.**

Por lo tanto tendremos que **gg''g'** es una palanca de 1.er género y para que se equilibre se requiere que:

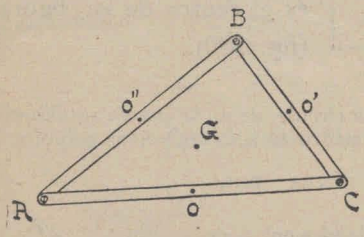
$$\frac{\text{longitud de ABC}}{\text{longitud de FED}} = \frac{g'g''}{gg''} \quad \text{(proporción inversa)}$$

Sobre **g''o**IV se determina **G** siguiendo el mismo criterio anterior, o sea:

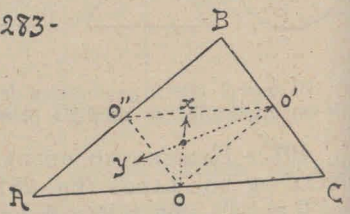
$$\frac{ABC + FED}{CD} = \frac{Go^{IV}}{Gg''} \quad \text{(proporción inversa)}$$

494. – Los baricentros de los perímetros se pueden hallar siguiendo el procedimiento anterior; pero para muchos perímetros, hay procedimientos más expeditos, como veremos a continuación.

500. – BARICENTRO DE UN PERÍMETRO TRIANGULAR (fig. 283).

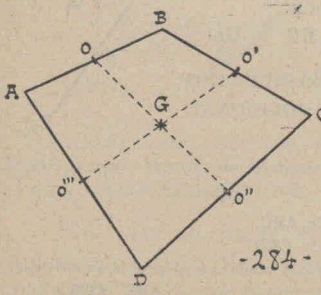


-283-



Se construye el triángulo **oo'o''** (siendo **o**, **o'** y **o''** los centros de los lados).

Luego se trazan las bisectrices **ox** y **o'y.**



-284-

El baricentro de un perímetro triangular se halla en el encuentro de bisectrices del triángulo que se obtiene uniendo entre sí los centros de los lados de dicho perímetro.

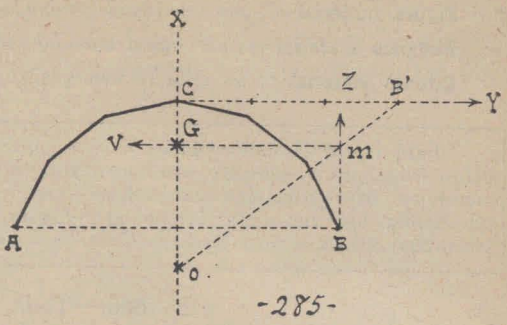
501. – BARICENTRO DE UN PERÍMETRO CUADRANGULAR (fig. 284).

Se halla en el encuentro de las medianas del cuadrilátero.

502. – BARICENTRO DE UNA LÍNEA POLIGONAL REGULAR (fig. 285).

Poligonal regular = porción de un perímetro regular

X es eje de simetría, y por lo mismo es uno de los ejes de gravedad de la poligonal.



-285-

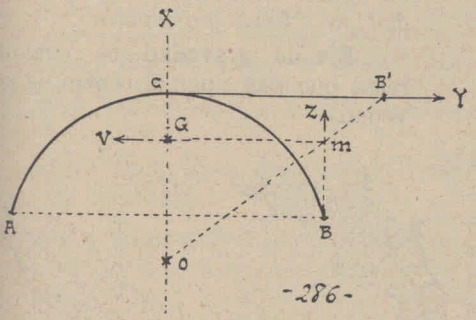
o = centro del perímetro total

Y ⊥ **X** **CB'** = semipoligonal

Se traza **oB'** y **AB**

Luego se traza **BZ** ⊥ **AB** o sea //**X**, obteniendo el punto **m**.

Después: **mV** // **AB**; y obtenemos el punto **G**.



-286-

503. – BARICENTRO DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA (fig. 286).

Se sigue un procedimiento análogo al anterior.

X = mediatr. de **AB**
CY // **AB**
CB' = arco **CB**
BZ ⊥ **AB**
mV // **AB**

29.° – Baricentro de las láminas homogéneas y planas.

504. – El epígrafe de este párrafo equivale a estos otros

a) Baricentro de las figuras materiales planas.

b) Baricentro de las áreas materiales planas

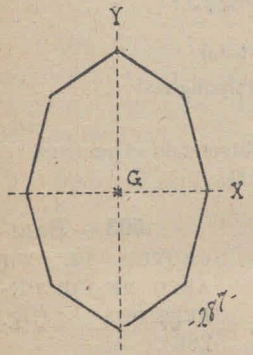
505. – **Superficie material** es una lámina real y homogénea, cuyo espesor no influye en la determinación de su baricentro.

Figura material *es una porción determinada de superficie material.*

Polígono material *es una figura material, plana y rectilínea.*

Círculo material *es un cilindro homogéneo, de altura exigua.*

Para evitar circunlocuciones inútiles, aquí hablaremos de *triángulos, trapecios, círculos*, etc, SOBREENTENDIENDO el epíteto «*material*» o cualquier otra expresión que pudiera sugerir la *escrupulosidad* con que hablan los «NEO-MATEMÁTICOS» al endilgarnos definiciones quilométricas cuajadas de *distinciones* y *sub-distinciones* ARCHI-SOBREENTENDIDAS.



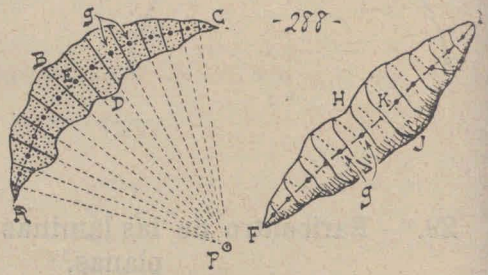
506. – Toda figura plana que tiene centro de simetría o "de figura", tiene en él su centro de gravedad.

Por lo tanto, el centro de graveda de un círculo....; y el de un paralelogramo.... y el de la fig. 287.....

507. – DOS CONCEPTOS QUE NO SE DEBEN CONFUNDIR: *"eje de gravedad"* y *"línea gravitatoria"*.

Eje de gravedad es cualquier recta que pase por el centro de gravedad.

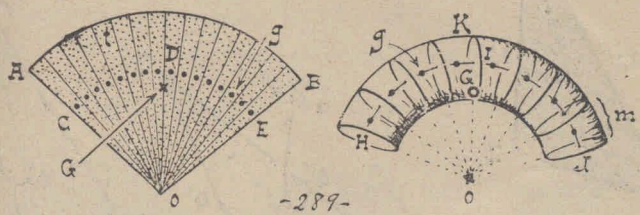
Línea gravitatoria es la que contiene todos los centros de gravedad de una serie de superficies o cuerpos *elementales* obtenidos al descomponer una superficie o cuerpo cualquiera (fig. 288).



a) *La curva* **AEC** *formada por la sucesión de los baricentros de los pequeños cuadriláteros en que se descompuso la superficie* **ABCD**, *es la* LÍNEA GRAVITATORIA *de dicha superficie.*

b) *Descomponiendo el cuerpo* **FHIJ** *en una sucesión de «rebanadas», y buscando los baricentros de todas ellas, se obtiene la línea* **FKI** *que es la* LÍNEA GRAVITATORIA *de dicho cuerpo.*

508. – Cuando todas las superficies o cuerpos elementales son iguales, el baricentro de la *línea gravitatoria* es también baricentro de la superficie o cuerpo correspondiente (fig. 289).



a) Descomponiendo el sector **ABo** *en triángulos elementales irradiantes de* **o**, *y buscando el baricentro de cada uno, se obtiene el arco* **CDE**, *que es la* LÍNEA GRAVITATORIA *del sector.*

Si **G** *es el baricentro de* **CDE**, *será también baricentro del sector* **ABo**.

b) Si **KHJ** *es una porción de aro de revolución; y*

XoX' ⊥ plano **HJo**

efectuando una serie de secciones equidistantes mediante planos asentados en **XX'**:

Si las secciones están muy cerca unas de otras, habremos descompuesto el cuerpo en porciones elementales **m**, *mutuamente iguales.*

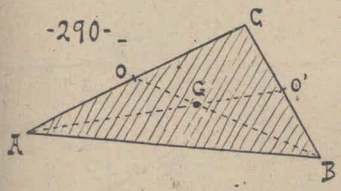
La línea **HIJ** *que contiene los baricentros de todas las* **m**, *es la* LÍNEA GRAVITATORIA *del cuerpo* **KHJ**.

Si **G** *es el baricentro de dicho eje, también será baricentro de dicho cuerpo.*

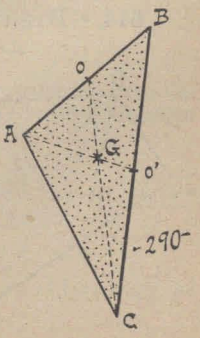
509. – Toda línea gravitatoria *recta*, es eje de gravedad; pero no viceversa.

510. – BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO (fig. 290).

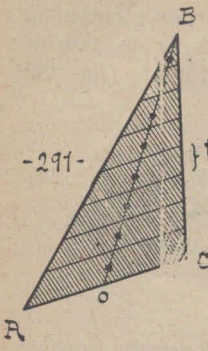
G se halla en el encuentro de medianas.



511. – Todo triángulo tiene tres rectas gravitatorias, que son sus medianas.



Descomponiendo el triángulo **ABC** *en los trapecios elementales* **t**, *la mediana* **Bo** *contiene todos los baricentros de dichos trapecios. (fig. 291).*

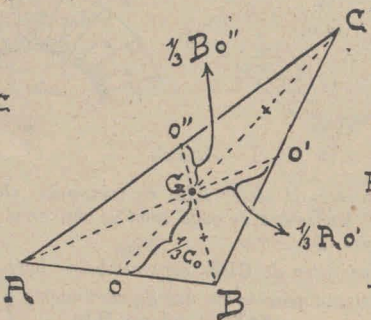


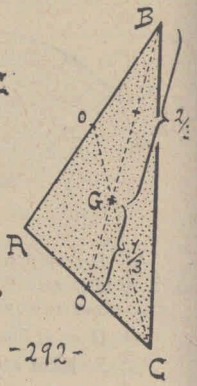
512. – El centro de gravedad de cualquier triángulo dista de cada vértice $^2/_3$ de la mediana respectiva (fig. 292).

$CG = {}^2/_3\ Co$

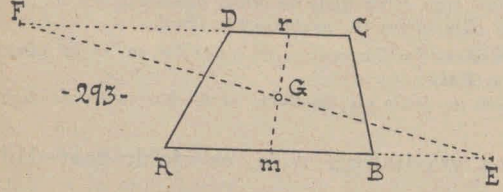
$AG = {}^2/_3\ Ao'$

$BG = {}^2/_3\ Bo''$





Este dato es interesante; porque a él se recurre para la solución de varios problemas.



513.–BARICENTRO DE UN TRAPECIO (fig. 293).

BE = CD

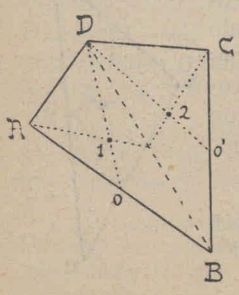
DF = AB

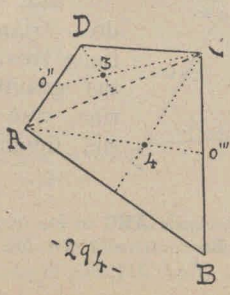
rm = mediana basilar.

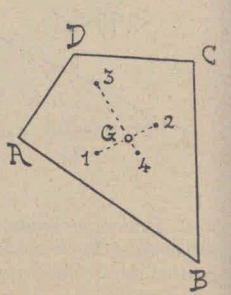
LÉXICO. — **Basilar** = *correspondiente a la base o a las bases.*

La mediana basilar de todo trapecio es su recta gravitatoria.

514. – BARICENTRO DE LOS TRAPEZOIDES (fig. 294).







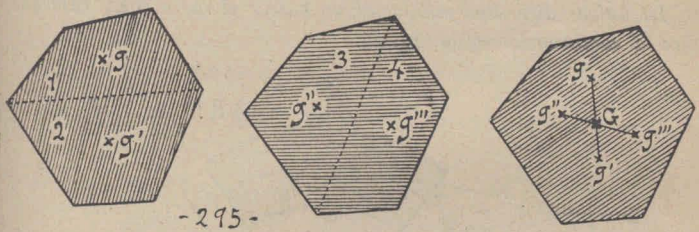
Se descompone el trapezoide en los triángulos **ABD** y **CBD**, cuyos baricentros son **1** y **2**.

Luego se descompone en los triángulos **ADC** y **ABC**, cuyos baricentros son **3** y **4**.

G se halla en el encuentro de **1.2** y **3.4**.

Los trapezoides no tienen recta gravitatoria.

515. – BARICENTRO DE UN POLÍGONO CUALQUIERA (fig. 295)

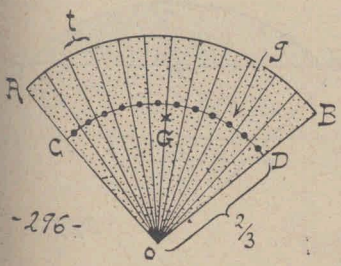


-295-

Se descompone en dos polígonos mediante una diagonal, y se buscan los baricentros parciales **g** y **g'**.

Luego, mediante otra diagonal se descompone en otros dos polígonos. y se buscan los baricentros parciales **g''** y **g'''**. Etc.

Si el polígono tiene más de 6 lados se sigue el mismo procedimiento; pero cualquiera entiende que su construcción sale complicada.



-296-

Por eso es necesario abandonar este sistema y adoptar el del POLÍGONO FUNICULAR, del que trataremos más adelante.

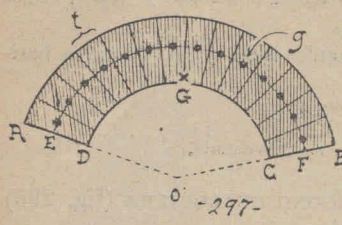
516. – BARICENTRO DE UN SECTOR CIRCULAR.

Ya vimos que existe un arco **CD** que es la línea gravitatoria del sector **AoB** (fig. 296).

Y, como el baricentro de cada triángulo **t** se halla a $^2/_3$ de la distancia **oA** (que es radio y mediana al mismo tiempo) resulta que:

$r' = {}^2/_3\, r$ **r'** (*radio del arco* **CD**).

Buscando pues, el baricentro del arco **CD**, *se obtiene el baricentro del sector* **AoB**.

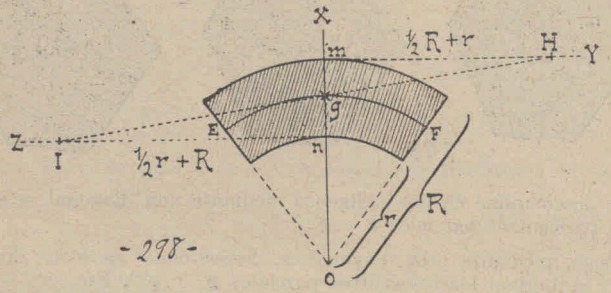


-297-

517. – BARICENTRO DE UN TRAPECIO AREOLAR.

Descomponiendo el trapecio areolar **ABCD** en sus trapecios elementales **t** (fig. 297), y uniendo los baricentros correspondientes se obtiene el arco **EF** que es la LÍNEA GRAVITATORIA del trapecio dado.

La única dificultad está, pues, en buscar el radio **oE**; *cosa que se indica a continuación (fig. 298).*



-298-

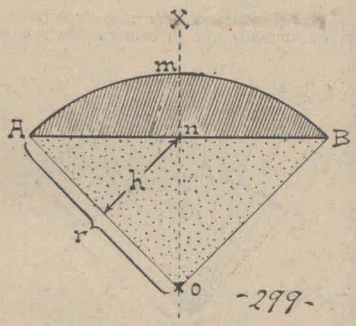
Se trazan **mY** y **nZ** $\perp$ **oX**.

Se marcan $\mathbf{mH} = \frac{1}{2}\mathbf{R} + \mathbf{r}$

$\mathbf{nI} = \frac{1}{2}\,\mathrm{r} + \mathbf{R}$

Uniendo **I** con **H** encontramos **g**, que es el baricentro del trapecio elemental **t**.

Por lo tanto **EF** pasa por **g**, o sea tiene por radio: $\mathbf{r'} = \mathbf{og}$.



-299-

518. – BARICENTRO DE UN SEGMENTO CIRCULAR (fig. 299 y 300).

Se busca por separado:

g (*baricentro del sector* **AmBo**)

g' (*baricentro del triángulo* **ABo**)

Como el área del segmento **AmB** equivale a:

Sector **AmBo** — triáng. **ABo**,

resulta que **G** es el centro de un sistema de fuerzas paralelas y opuestas **P** y **Q** aplicadas respectivamente en **g** y **g'**.

P (peso del sector **AmBo**).
Q (peso del triáng **ABo**).

Calculemos el valor de cada una de estas dos fuerzas (fig. 300 -- *a*):

1.° El área de un sector circular equivale al producto de su semiarco por el radio.

Si arco **AmB** = *L*, tenemos que

Area del sector **AmBo** = ½ *L*.**r** (que corresponde al peso **P**).

Si **r** vale «uno», tenemos que:

$$P <> \tfrac{1}{2} L$$

2.° Area de **ABo** = 2 **Aon**

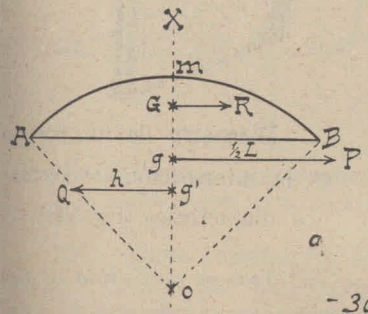
pero: Area de **Aon** = ½ **r.h**

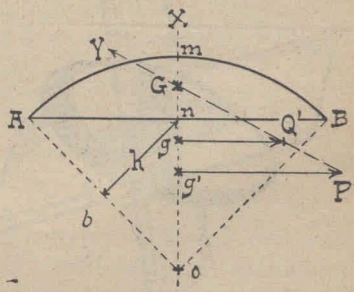
luego 2 **Aon** = **r.h** (que corresponde al peso **Q**)

Si **r** vale «*uno*» tenemos que:

$$Q <> h$$

De lo cual resulta que: $\frac{P}{Q} = \frac{\frac{1}{2}L}{h}$





-300-

Apliquemos a **g** el vector **Q'** (antagónico de **Q**), y apliquemos a **g'** el vector **P'** (equipolente de **P**). (fig. 300 -- *b*), Y ahora, uniendo los extremos de **P'** y **Q'**, y prolongando, encontraremos a **G** (centro de sistema **P,Q**, y en consecuencia: BARICENTRO BUSCADO).

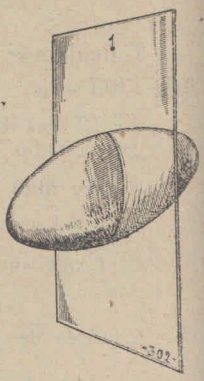
30.° – Baricentro de los sólidos.



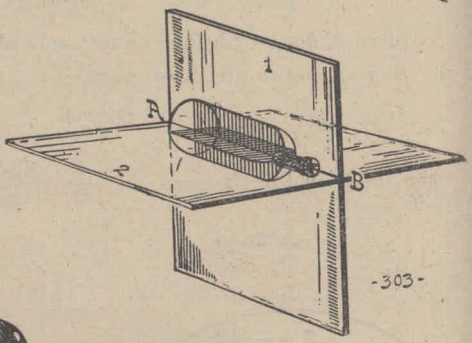
519. – Plano de simetría es el que divide un cuerpo en dos porciones simétricas (fig. 301).

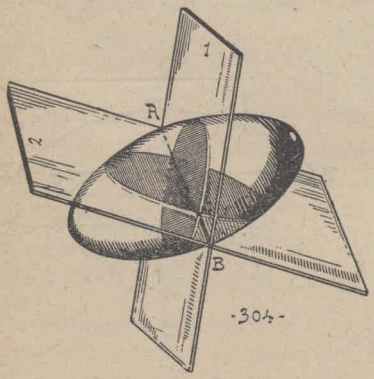
Plano diametral es el que divide un cuerpo en dos porciones iguales (fig. 302).

Todo plano de simetría es plano diametral; pero no viceversa.



520. – Eje de simetría es la intersección de dos planos de simetría (fig. 303).





Diámetro de un cuerpo es la intersección de dos planos diametrales (fig. 304).

Todo eje de simetría es diámetro, pero no viceversa.

521. – Centro de simetría planal es el punto que pertenece a tres o más planos de simetría (fig. 305).

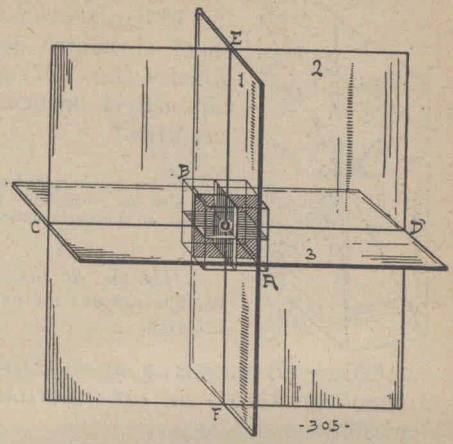
También se puede decir que:

Es la intersección de los ejes de simetría.

Centro geométrico de un cuerpo, es el punto común a tres planos diametrales (fig. 306).

También se puede decir que:

Es la intersección de los diámetros de un cuerpo.

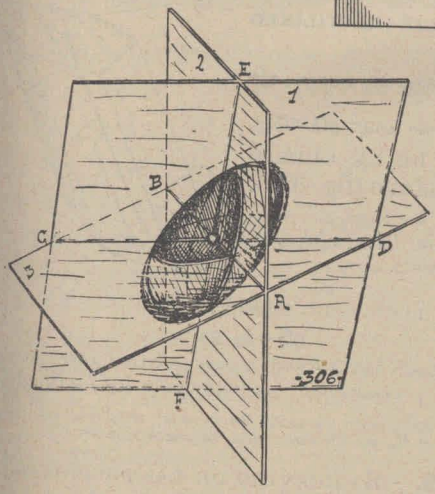


Todo centro de simetría es centro geométrico; pero no viceversa.

522. – Plano de gravedad es el que contiene el baricentro de un cuerpo.

Todo plano diametral es plano de gravedad; pero no viceversa.

523. – Eje de gravedad es la recta que contiene el baricentro de un cuerpo.



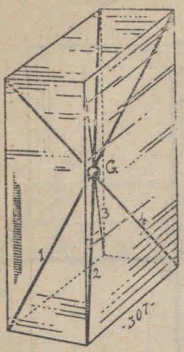
Todo diámetro es eje de gravedad pero no viceversa.

Todo centro geométrico es baricentro, pero no viceversa.

524. – Línea gravitatoria de un cuerpo es la que está formada por todos los baricentros de los cuerpos elementales obtenidos mediante una sucesión de secciones planas efectuadas en un cuerpo. (*Ver* **507**).

Toda recta gravitatoria es eje de gravedad; pero no viceversa.

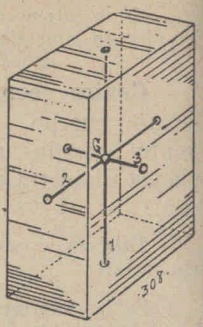
525. – BARICENTRO DE UN PARALEPÍPEDO CUALQUIERA.



El baricentro se halla en el encuentro de diagonales (fig. 307) que es también el encuentro de sus EJES.

En los paralelepípedos se llaman **ejes** las rectas que unen los centros de dos caras opuestas (fig. 308).

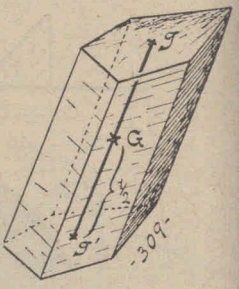
Los ejes de los paralelepípedos son sus rectas gravitatorias.



526. – BARICENTRO DE CUALQUIER CUERPO PRISMÁTICO DE EJE RECTILÍNEO (fig. 309).

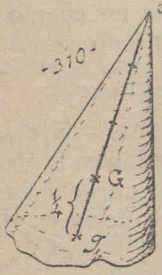
En los cuerpos prismáticos, se llama **eje** *su línea gravitatoria.*

En nuestro caso tenemos que: **gG = Gg'**,



527. – BARICENTRO DE UN CUERPO PIRAMIDAL DE EJE RECTILÍNEO (fig. 310).

En los cuerpos piramidales, se llama **eje** *su línea gravitatoria.*



En nuestro caso tenemos que:

$$gG = \frac{1}{4}\, go$$

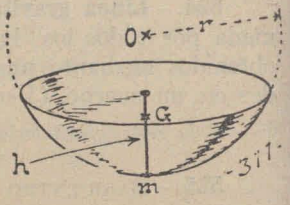
528. – NOTA. — Son casos particulares de los «*cuerpos prismáticos*»: los PRISMAS y los CILINDROS.

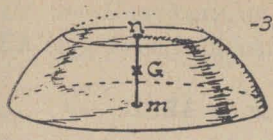
Y esto porque SIEMPRE las formas regulares son casos particulares de las formas menos regulares que ellas.

529. – BARICENTRO DE LAS PORCIONES DE ESFERA.

a) Del casquete, de los segmentos y de la esfera truncada (fig. 311 y 312)

Para buscar la posición de **G** sobre el eje **om**, procédase por cálculo algébrico o aritmético, valuando la diferencia entre la semiesfera y el segmento que le falta.

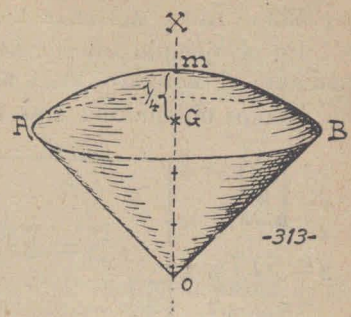




-312-

b) Del cono esférico, que otros llaman «sector esférico» (fig. 313).

$Gm = \frac{1}{4}om$



-313-

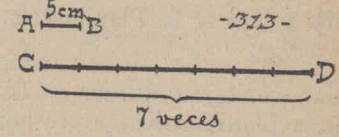
31.° - Representación gráfica de los momentos.

530. – Los productos se pueden representar de dos maneras

a) *Por medio de una sucesión de segmentos iguales* (fig. 313).

$$CD = AB \times 7 = 5 \times 7 = 35 \text{ cm.}$$

b) *Por medio del área de un rectángulo.*

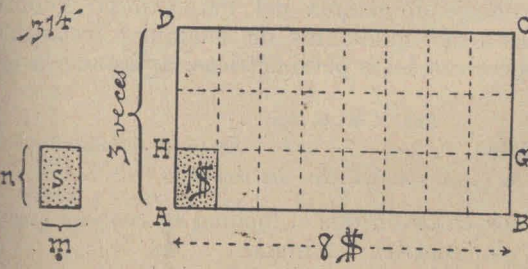


-313-

531. - REPRESENTACIÓN DE UN PRODUCTO MEDIANTE EL ÁREA DE UN RECTÁNGULO (fig. 314).

Si **AB** representa el salario de un obrero; y **AD** el número de obreros; el rectángulo **ABCD**, TENDRÁ ÁREA **numéricamente igual** AL SALARIO DEL CONJUNTO DE LOS TRES OBREROS.

Efectivamente, si cada rectángulito **s** representa 1 **$**; y la faja unitaria **ABGH** representa 8 **$**:



-314-

Siendo 3 las fajas, el sueldo global será:

8 $ × 3 = 24 $

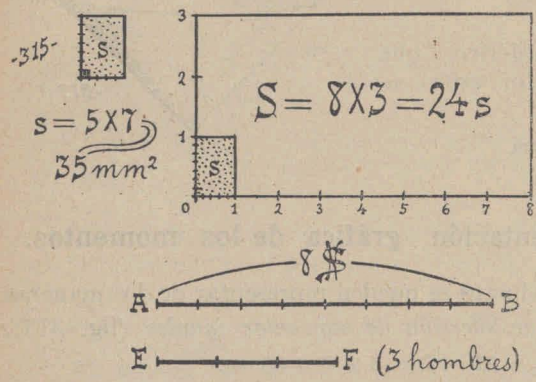
y el área del rectángulo **ABCD** será

8 s × 3 = 24 s

532 .– Área modular y área planimétrica.

En el ejemplo anterior hemos medido el rectángulo **ABCD** mediante el módulo areal **s**.

Hemos obtenido el **área modular** de **ABCD**.



Pero si medimos los lados de **s** obtenemos (fig. 315):

b = 5 mm.

h = 7 mm.

Por lo tanto **AB** = 5 × 8 = *40 mm.* y **AD** = 7 × 3 = *21 mm.*

De donde resulta que el área de **ABCD** es 40 × 21 = 840 mm².

Esta es el **área planimétrica**, o sea el área que nos enseña a buscar la Planimetría.

533. – Las áreas planimétricas son proporcionales a las áreas modulares.– Esto significa que: a doble o triple área planimétrica, corresponde doble o triple área modular y viceversa.

La demostración de este principio es obvia, por eso no la insertamos aquí.

534. - Como consecuencia del principio anterior se sigue que:

Conservando constantes los dos módulos (el de base y el de altura) y conociendo el área del rectángulo módulo, podemos medir las áreas modulares de cualquier rectángulo, mediante sus respectivas áreas planimétricas, aplicando la fórmula siguiente:

$$Am \times a = Ap$$

Am (*área modular*) **Ap** (*área planimétrica*)

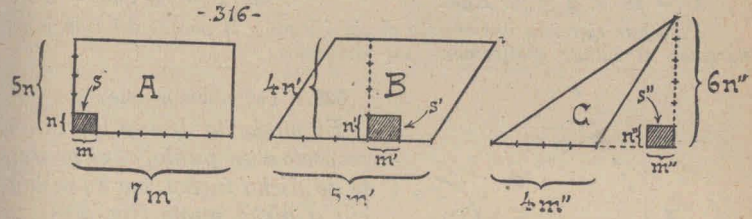
a (*área planimétrica del módulo*).

535. – Y en los casos en que el módulo se considere como unidad de área planimétrica tendremos:

$$Am = Ap$$

536.– El principio anterior es aplicable a todas las figuras; pero las únicas que se prestan a la representación gráfica de los productos, son aquellas cuya área se obtiene por la simple multiplicación de DOS LÍNEAS.

Las figuras que gozan de esta última propiedad son los PARALELOGRAMOS y los TRIÁNGULOS (fig. 316)

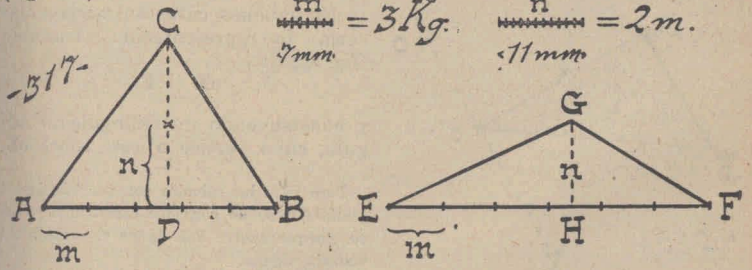


A = 7 × 5 = 35 **s**
B = 5 × 4 = 20 **s'**
C = 4 × 6/2 = 12 **s"**

537. – De lo anterior se sigue que:

Cuando queremos comparar gráficamente dos o más productos: los representamos con paralelogramos o con triángulos, luego buscamos el área planimétrica de dichas figuras, y después comparamos entre sí los números correspondientes a dichas áreas.

Ej: Búsquese la relación que existe entre el trabajo que corresponde a elevar 15 Kg. a 4 m. y el de 18 Kg. a 2 m. (fig 317).



Como **m** = 7 mm y **n** = 11 mm
AB = 7 × 5 = **35** mm
CD = 11 × 2 = **22** mm
luego **T** = 35 × 22/2 = **385** mm²
Por otra parte:
EF = 7 × 6 = 42 mm

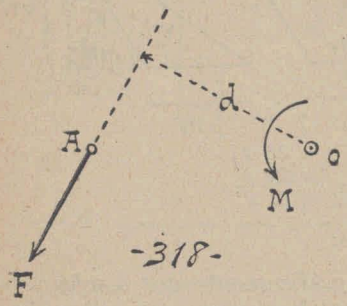
GH = 11 × 1 = 11 mm
luego **t** = 42 × 11/2 = **231** mm²
De donde resulta que
T/t = 385/231
o sea **T** = 385. **t**/231 = 5/3 **t**

538. – Del ejercicio anterior no sacaremos ninguna ventaja práctica cuando recurrimos al cálculo; porque más pronto hubiéramos resuelto el problema así:

$T = 15 \times 4 = 60$ *Kgrm.*
$t = 18 \times 2 = 36$ *Kgm.*

De donde $T/t = 60/36$
o sea $T = 60\ t/36 = 5/3\ t$

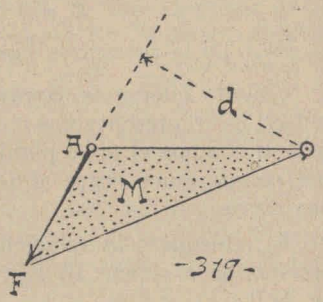
Pero este ejercicio nos enseña el significado y el porqué del trabajo que haremos al valuar gráficamente los momentos.



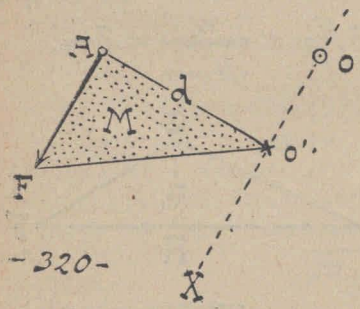
539. – Ya sabemos que:

El momento de una fuerza con respecto a un punto, es el producto de dicha fuerza por su distancia a dicho punto (fig. 318).

$$M = F \times d$$



540. – Y como el momento es un PRODUCTO, cuando lo queremos medir lo representaremos mediante un triángulo que tenga por base la fuerza, y por altura la distancia **d** (fig. 319).



En muchos casos se vuelve más clara la representación trazando (fig. 320):

$$oX \parallel F$$

y construyendo un triángulo rectángulo, cuyo vértice **o'** esté sobre **oX**.

Pero para los cálculos con procedimientos planimétricos no conviene este último recurso, porque vuelve más largo el trabajo sin ventaja alguna.

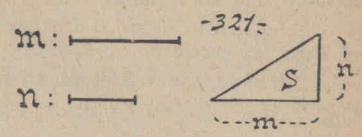
541. – VALUACIÓN MECÁNICA DE LAS ÁREAS. La representación de productos por medio de triángulos nos libra de hacer operaciones aritméticas, cuyos datos a menudo son desconocidos, y para buscarlos deberíamos efectuar operaciones largas o complicadas.

Basta para este objeto, valuar el área del triángulo correspondiente, mediante un PLANÍMETRO, *y luego aplicar la fórmula:*

$$P = A/a$$

P (producto) **A (área planimétrica)** **a** (área planimétrica del módulo)

Cuando los productos se representan con triángulos, el MÓDULO DE ÁREAS es un triángulo cuya base y altura son los módulos lineales (fig. 321).



Si **m** *y* **n** *son los módulos lineales adoptados en una representación gráfica, el* ÁREA PLANIMÉTRICA DE **S** *será;*

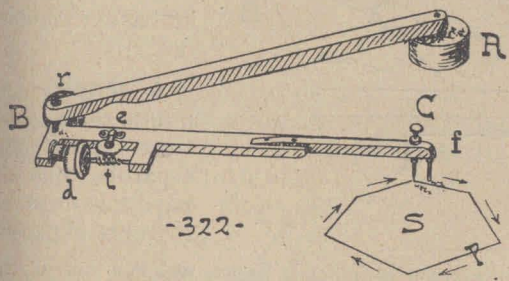
$$s = m \times n/2$$

542.–Los **planímetros** son aparatos que dan el área de una figura mediante el recorrido que hace una púa sobre la periferia de dicha figura.

Existen varios tipos de planímetro, siendo los más interesantes los de *Amsler* y el de *Prytz*.

543. – PLANÍMETROS DE AMSLER. – Los hay de formas variadas aunque no difieren esencialmente unos de otros.

El de la fig. 322, es uno de ellos.



Consta de dos reglas articuladas **AB** y **BC**.
A = POLO o punto fijo.
B = CODO.
C = aguja que recorre la periferia.
f = pie de punta roma, que impide que **C** raye el papel.
r = rueda de sostén del codo.
d = rodillo graduado.
t = tornillo sin fin
e = rueda contadora, que mide las vueltas que da **d**.

(Las fracciones de vuelta de **d** se leen sobre su mismo tambor, mediante un índice o un NONIO).

LÉXICO - **Nonio** *o* VERNIER *es una escala especial que sirve para valuar medidas muy pequeñas.*
En su debido lugar explicaremos la construcción y uso de esta escala

544. – MANEJO DEL PLANÍMETRO. Se coloca sobre la mesa afirmando con la mano izquierda el polo, a fin de que no cambie de lugar, y llevando con la derecha la púa **C** alrededor de la periferia **p**.

NOTAS *1.ª El polo* **A** *se coloca donde se quiere, con tal que deje que* **C** *efectúe su recorrido.*

1.ª Al comenzar **C** *su recorrido, las ruedas* **d** *y* **e** *deben marcar «cero»; en caso contrario, hay que anotar el número que ellas indican, para descontarlo al final de la medición.*

3.ª El recorrido de **C** *debe ser siempre en el mismo sentido; y termina al llegar al punto de partida.*

4.ª Si la figura **S** *es pequeña, conviene colocar el polo fuera de ella; pero si es demasiado grande, habrá que colocar el polo en su interior.*

545. – TRADUCCIÓN DEL NÚMERO DE VUELTAS DE **d**.

a) Si el polo estuvo fuera de **S**, tendremos:

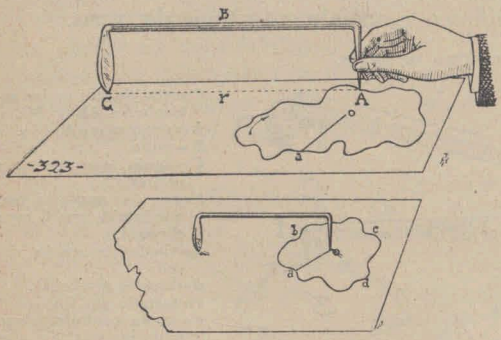
$$S = Kn$$

b) Si el polo estuvo dentro de **S**, tendremos:

$$S = K'n + i$$

K y **K'** son dos coeficientes invariables en cada aparato.
i es un incremento también invariable en cada aparato.

546. – PLANÍMETRO DE PRYTZ (fig. 323). Es un aparato maravilloso por su sencillez; siendo en cambio muy complicada la teoría a que obedece.



Consta de una varilla **ABC** de acero acodada en ambas extremidades.

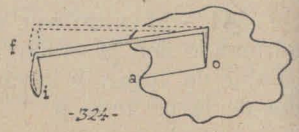
A termina en punta roma, y **C** tiene forma de espátula, que apoya sólo un punto sobre el papel.

Para usarlo se coloca como lo indica la figura, de modo que **o** sea un punto muy cercano al baricentro de la superficie que se debe valuar.

Teniéndolo con los dedos de la extremidad **A**, se le lleva a la periferia siguiendo una recta cualquiera **oa** y luego se le hace recorrer la periferia en cualquiera de los dos sentidos **abcda** o viceversa.

Desde **a** se vuelve nuevamente a **o**.

La extremidad **C** hace un recorrido del que nos no interesan más que sus dos posiciones, *inicial* **i** y la *final* **f** (fig. 324).



Llamando **r** *la distancia entre las extremos* **A** *y* **C**, *y* **m** *la medida* **if** *tenemos:*

$$S = rm$$

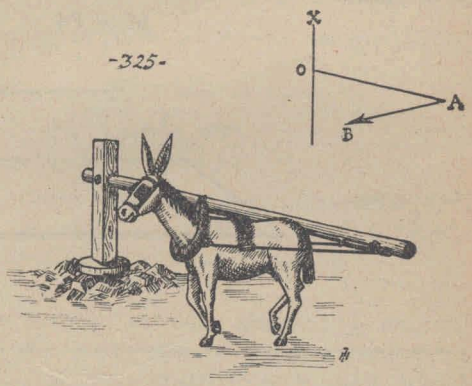
Para señalar los puntos i y f, basta presionar un poco la extremidad **C** sobre el papel, antes y después del recorrido.

32.º - Los tres momentos estáticos o de primer orden.

547. – Hasta ahora nos hemos referido solamente al momento polar, llamado simplemente MOMENTO. Réstanos hablar sobre los momentos AXIAL Y PLANAR.

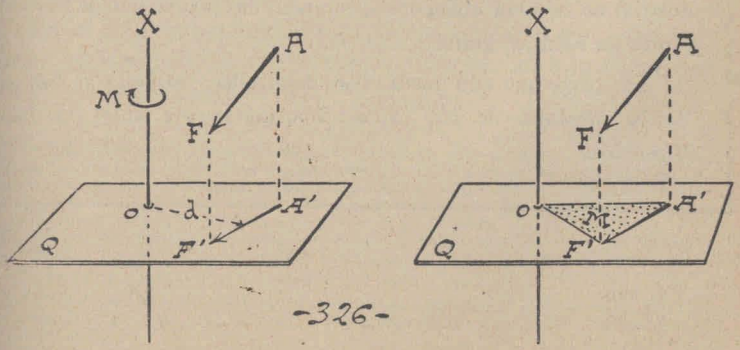
548. – Momento axial de una fuerza es la medida de su acción giratoria sobre una recta a la cual está unida mediante una ligadura cualquiera (fig. 325).

-325-



La acción giratoria de **B** sobre el eje **X** se mide *buscando el momento estático de* **B** *con respecto a* **X**.

549. – El momento de una fuerza con respecto a una recta equivale al momento de la proyección del sistema sobre un plano perpendicular a dicha recta (fig. 326).



-326-

Si $Q \perp X$

y $F' =$ proy. de **F** sobre **Q**

y $o =$ proy. de **X** sobre **Q**

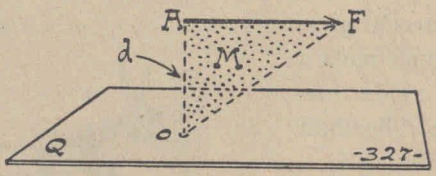
tendremos que:

$$M = F'd$$

M (momento de **F** sobre **X**

550. – Momento planal de una fuerza es una medida que pocas veces interesa conocer, y se obtiene multiplicando la fuerza por la distancia que hay entre su punto de aplicación y el plano.

$$M = Fd$$



Hemos dado a la ESTÁTICA GRÁFICA mucha más amplitud de la que se acostumbra en textos de Enseñanza Secundaria, porque hemos querido que los alumnos de 3er. Año de la Industrial no se vean obligados a comprar dos textos, uno de Física y otro de Estática gráfica.

La parte que aún queda por desarrollar, se halla al final de la *Mecánica de los sólidos*: inmediatamente antes de la *Hidráulica*.

II.° Estática aplicada

1.° - Las balanzas.[1]

551. – **Balanzas** son los aparatos que se usan para comparar las *masas* de los cuerpos.

En las balanzas, las masas se comparan mediante el peso local *de los cuerpos, basándose en el siguiente* postulado:

EN CADA LUGAR DEL GLOBO, EL PESO DE LOS CUERPOS ES PROPORCIONAL A SU MASA.

552. – NOTA. *La sentencia anterior puede considerarse como* POSTULADO *o como* PRINCIPIO EVIDENTE.

Es *postulado*, cuando por **masa** entendemos "CANTIDAD DE MATERIA".

Y es *principio evidente*, cuando nos referimos a la "MASA GRAVITATORIA", o sea: a *la causa intrínseca del peso de cada cuerpo*, que hasta ahora no se ha podido averiguar *experimentalmente* si es sólo la materia o si depende también del modo como se halla concentrada la materia en cada especie de átomos (2).

553. – DIFERENCIA ENTRE BALANZA Y DINAMÓMETRO. – 1.° Las balanzas funcionan mediante el equilibrio de dos pesos aplicados en sendos *extremos* de una palanca simple o compuesta.

En cambio los dinamómetros funcionan mediante la mayor o menor deformación o compresión que un peso o cualquier otra fuerza produce en un cuerpo elástico (resorte, aire comprimido, etc).

2.° En las balanzas comparamos entre sí dos PESOS LOCALES, con el fin de medir una de las dos masas correspondientes, mediante la otra.

En el dinamómetro medimos un peso local o cualquier otra fuerza, comparándola con el PESO LEGAL de un kilo–masa o de uno de sus submúltiplos (3).

---

(1) Hemos querido dar a este tema la forma de «*monografía*», cosa que haremos también con otros similares. Nos mueve a ello la convicción de que muchos se creen muy versados, porque han dado satisfactoriamente sus exámenes de Física; y en cambio tratando con ellos, se nota que NI SOSPECHAN SIQUIERA que lo que ellos saben no llega a ser un *borrador sistemático* de lo que se puede llegar a saber.

Para redactar esta monografía nos hemos basado especialmente en *Chwolson* "Instrumentos y métodos de medición" y en *Espasa:* arts. "Balanza y Microbalanza".

(2) Ya se ha explicado este asunto en su lugar.

(3) Recuérdese que PESO LEGAL es lo que pesa una masa determinada, en París y en el vacío. De modo que 1 KILO – PESO LEGAL es el peso de 1 KILO – MASA en París y en el vacío.

En otros términos:

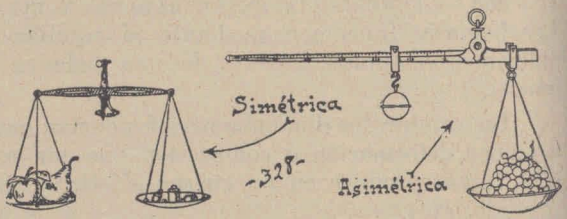
En la balanza el resultado de la medición indica el esfuerzo que una masa cualquiera efectúa, comparado con el esfuerzo que *en ese mismo lugar del Globo* efectúa un KILOGRAMO-MASA.

En el dinamómetro el resultado de la medición indica el esfuerzo que efectúa una masa cualquiera, comparado con el esfuerzo que *en París y en el vacío* ejerce el KILOGRAMO-MASA.

3.° – La balanza no tiene GRADUACIONES ABSOLUTAS, porque, cuando tiene graduaciones, éstas *se hallan relacionadas* con una MASA CORREDIZA, que ocupa distintas posiciones en la palanca.

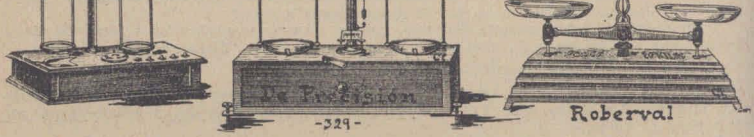
En cambio los dinamómetros tienen divisiones absolutas, recorridas por un *índice* o *manecilla* que señala la mayor o menor deformación del muelle o la mayor o menor compresión del aire (cuando el dinamómetro es neumático).

354. – Las balanzas se pueden clasificar en dos grupos esencialmente distintos: a) las balanzas DE BRAZOS IGUALES, que llamaremos **simétricas** b) las DE BRAZOS DESIGUALES, que llamaremos **asimétricas** (fig. 328).

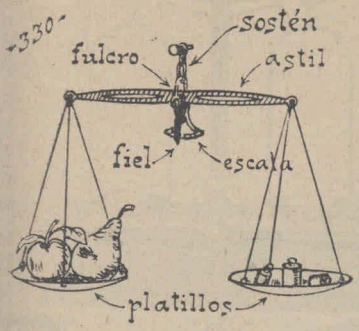


2.° – Balanzas simétricas.

555. – Estas balanzas pueden adquirir tres formas distintas: la BALANZA GRIEGA, la DE PRECISIÓN y la BALANZA DE ROBERVAL (fig. 329).



556. – BALANZA GRIEGA (fig. 330).



Sus partes esenciales son:

a) Una palanca de 1er. género y de brazos iguales, denominada ASTIL O CRUZ.

El punto de suspensión del astil se llama FULCRO (1).

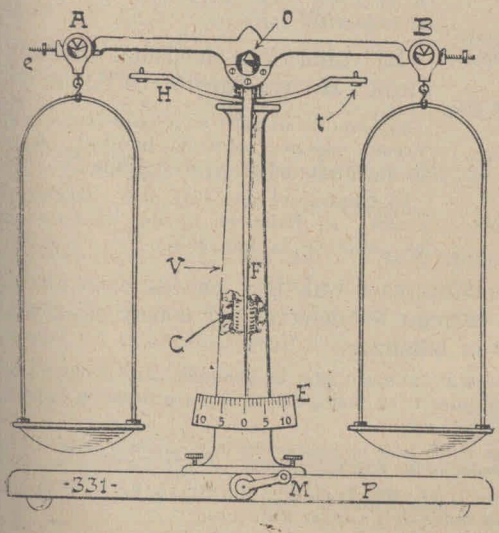
b) La PIEZA DE SOSTÉN de la balanza, que generalmente es un gancho o argolla, en cuya parte inferior asienta el fulcro.

c) El FIEL O ÍNDICE, que se halla soldado a la cruz para indicar si ésta se halla en posición horizontal.

d) La ESCALA del índice, en cuyo centro se halla el «*cero*» o punto de equilibrio de la balanza.

e) Los dos *platillos* con sus correspondientes hilos o cadenillas de suspensión.

557. – La BALANZA DE PRECISIÓN es una adaptación de la balanza griega (figs. 331 y 332).



En vez de un gancho de suspensión tiene una columna sobre la que apoya el astil.

En la fig. 331 ó 332 se ha representado un GRANATORIO o balanza de baja precisión.

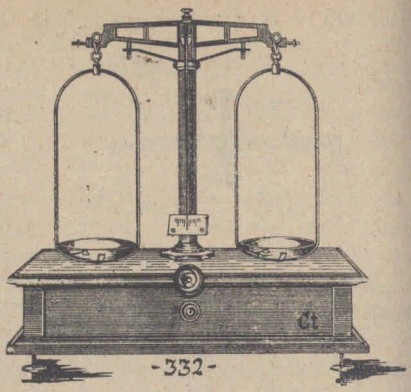
558. – PIEZAS ESPECIALES.– El FIEL es largo, y llega hasta el pie de la columna.

Al pie de la columna se halla la escala **E**, para comprobar si el vaivén del fiel es simétrico.

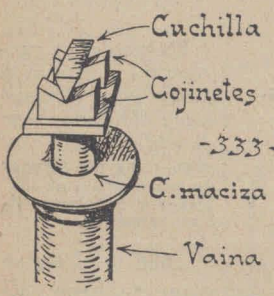
(1) La palabra FULCRO se aplica al punto de suspensión de cualquier palanca FIJA.

La COLUMNA consta de dos partes: a) un tubo exterior o VAINA **V** que se halla entornillado en la tabla o PEANA de la balanza. b) un cilindro interno macizo **C** que juega dentro de la vaina, subiendo o bajando, a voluntad del operador.

En la peana hay una MANIJA **M** *que sirve para subir o bajar el cilindro macizo.*



El cilindro interno remata por su parte superior en un SOPORTE que contiene los cojinetes del fulcro (fig. 333), y sirve para subir o bajar el astil, mediante la manija **M**, que hay en la peana.



Cuando baja el astil, los platillos asientan en la peana, dejando de hacer presión sobre los respectivos cojinetes.

La vaina tiene en su cima una HORQUILLA **H** cuya función es doble:

a) Cuando el astil está bajo (*balanza en reposo*), asienta sobre la horquilla, dejando de presionar sobre su cojinete.

b) Cuando el astil está alto (*balanza en acción*), su balanceo queda limitado por las astas de la horquilla.

Los dos EQUILIBRADORES **e** que hay en los extremos de la cruz sirven para corregir los defectos de construcción y las fallas posteriores de la balanza.

Se demuestra matemáticamente que la posición asimétrica de los equilibradores o de cualquier otra pieza del astil no influye en la precisión de las pesadas.

De modo que muy bien puede estar un equilibrador muy enroscado cuando el otro se halla en el extremo posterior de su tornillo.

La peana tiene como pies, tres o cuatro TORNILLOS DE REGULACIÓN *que sirven para nivelarla antes de proceder a su uso.*

N.B. — Las ilustraciones marcadas con **Ct**, han sido sacadas del catálogo la FÁBRICA DE BALANZAS) *de Juan Cuttica* (Buenos Aires).

559. – Las balanzas de precisión varían mucho en los detalles de construcción que tienden a asegurar su *exactitud, sensibilidad* y *conservación*, y a *facilitar las manipulaciones* del operador.

Atendiendo a estas condiciones, y especialmente a las dos primeras, se pueden clasificar en balanzas: de BAJA, *de* MEDIANA *y de* ALTA PRECISIÓN.

560. – SISTEMA DE SUSPENSIÓN. Se halla constituído por tres EJES y por sendos pares de COJINETES.

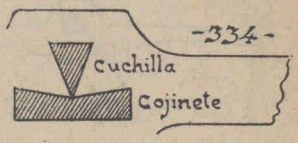
Los *ejes* o CUCHILLAS son prismas triangulares de acero templado, que se hallan soldados al astil.

La CUCHILLA CENTRAL **O** es el *fulcro*.

Las cuchillas extremas **A** y **B** son los *ejes de suspensión de los platillos*.

Los *cojinetes* son de acero, de cuarzo o de ágata y tienen una abertura angular en la que encaja la cuchilla correspondiente.

561. – El sistema de cuchillas y cojinetes tiene por objeto disminuir en cuanto es posible el roce.



A este fin el filo de las cuchillas está constituido por un ÁNGULO AGUDO; *mientras que la abertura de los cojinetes es un* ÁNGULO OBTUSO (fig. 334).

3.° – Condiciones que deben llenar las balanzas de precisión.

562. – Las balanzas de precisión deben llenar cuatro condiciones principales: 1.° deben ser EXACTAS; 2.° deben ser SENSIBLES; 3.° deben poseer MEDIOS DE CONSERVACIÓN para las piezas; 4.ª deben ser PRÁCTICAS, o sea, de manejo expedito.

Además, a las balanzas de alta precisión se les exige otras condiciones propias del fin a que se las destina.

4.° – Condiciones necesarias para la exactitud de las balanzas.

563. – Una balanza es **exacta**, cuando *no miente* en las pesadas.

Para que una balanza sea exacta, se requieren las siguientes condiciones:

1.° LOS DOS BRAZOS DE LA CRUZ DEBEN SER ESTRICTAMENTE IGUALES.

Para comprobar esta condición:

a) Se quitan los platillos y su piezas de suspensión, y se averigua si el fiel marca CERO.

b) Se miden las distancias **Ao** y **Bo**.

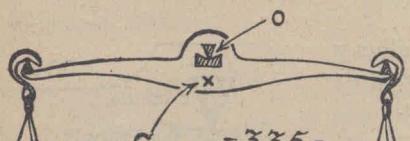
Debe dar: **Ao = Bo.**

c) Se comprueba si el fiel es estrictamente perpendicular al astil.

Ninguna de estas tres condiciones por separado nos puede asegurar de la SIMETRÍA FÍSICA *del astil.*

Con a frase "**simetría física**", entendemos referirnos a la simetría GEOMÉTRICA y de SUSTANCIA. No basta la simple SIMETRÍA GEOMÉTRICA para asegurarnos de la distribución homogénea de las sustancias que entran en la composición de un cuerpo o de un sistema de cuerpos.

2.° EL BARICENTRO DE LA CRUZ DEBE HALLARSE POR DEBAJO DEL FULCRO (fig. 335).

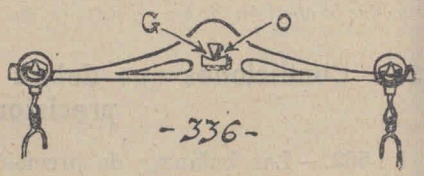


En otros términos:

El astil, *libre de las piezas movibles,* **debe conservar equilibrio estable.**

Por eso ésta se llama: CONDICIÓN DE ESTABILIDAD.

Si **G** coincidiera con el fulcro, habría equilibrio indiferente, y la balanza no se equilibraría en el *cero*, sino en cualquier parte (fig. 336).





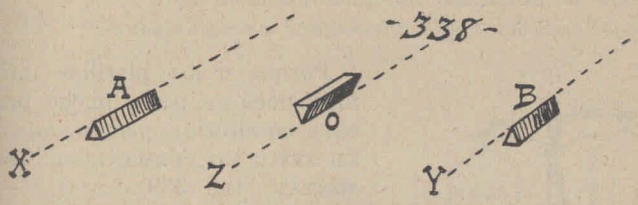
Cuando **G** está por encima del fulcro, el astil no admite más equilibrio que el INESTABLE (fig. 337).

En estos dos últimos casos se dice que tenemos una *"balanza loca"*.

3.° LAS ARISTAS DE LAS TRES CUCHILLAS DEBEN SER RIGUROSAMENTE PARALELAS (fig. 338).

a // c // b

Existe un aparato especial para comprobar el paralelismo de las tres aristas. Su inventor fué *G. K. Brauer*, de Petrogrado.



4.° CUANDO LA BALANZA ESTÁ DESCARGADA, EL FIEL DEBE MARCAR CERO.

Aquí se entiende hablar de la balanza completa, a saber *con sus platillos*.

NOTA. — Decir que *"el fiel marca cero"* es lo mismo que decir que LA CRUZ ESTÁ EN POSICIÓN HORIZONTAL.

Esta condición se puede expresar también así:

Los dos platillos, *con sus respectivas piezas de suspensión,* **deben tener el mismo peso.**

Cualquiera entiende que la simetría física del astil no es suficiente, si los platillos destruyen la SIMETRÍA GRAVÍTICA *del conjunto.*

Hemos dicho SIMETRÍA GRAVÍTICA y no *física*, porque no importa que los platillos sean GEOMÉTRICA O SUSTANCIALMENTE distintos: lo único que interesa es que actúen por igual sobre los brazos del astil.

5.° LA FLEXIBILIDAD DEL ASTIL DEBE SER IGUAL EN AMBOS BRAZOS.

Veremos al hablar de las condiciones de sensibilidad, que EL ASTIL IDEAL *debiera ser completamente rígido.*

Pero para la EXACTITUD *de la pesada, basta que la flexión producida por la* PESA *y el* objeto que pesamos, *sea la misma; porque, sino,* SE DISLOCA LATERALMENTE EL BARICENTRO *del astil.*

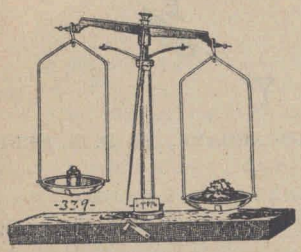
Al exponer la 1.ª condición de exactitud dijimos que: LA CRUZ DEBE SER FÍSICAMENTE SIMÉTRICA.

La SIMETRÍA DE FLEXIÓN *es una consecuencia directa de la* SIMETRÍA FÍSICA.

Condiciones de exactitud
1ª Los dos brazos deben ser iguales.
2ª El astil debe tener equilibrio estable.
3ª Los filos de las tres cuchillas deben ser mutuamente paralelos.
4ª Cuando la balanza está descargada, el astil debe estar horizontal.
5ª La flexibilidad del astil debe ser igual en ambos brazos.

564. UNA ADVERTENCIA IMPORTANTE. Al expresar la *4.ª condición de exactitud*, no quisimos decir así:

La balanza descargada debe hallarse EN EQUILIBRIO».



Porque si los platillos difieren muy poco en peso, puede producirse equilibrio; *pero en tal caso*, EL ASTIL NO PERMANECERÁ HORIZONTAL (fig. 339).

Y la razón es: porque el centro de gravedad del astil se halla por debajo del de suspensión (1).

La única balanza que MEDIANTE EL DESEQUILIBRIO acusaría las mínimas diferencias de peso entre ambos platillos sería la que tuviese el baricentro de la cruz concidiendo con el fulcro.

565. – COMPROBACIÓN PRÁCTICA DE LA EXACTITUD DE UNA BALANZA:

1.º Se colocan en ambos platillos masas iguales (cuya igualdad se debe haber comprobado antes, con otra balanza segura).

2.º Se aplica el método de *Gauss* o de *trasposición de pesos*, como veremos luego.

5.º – Sensibilidad de las balanzas.

566. – Se dice que UNA BALANZA ES SENSIBLE, cuando bastan cargas ligerísimas para producir en ella desvíos notables.

567. – La sensibilidad de una balanza se puede expresar de dos maneras, una EMPÍRICA, y otra MATEMÁTICA.

LÉXICO. – Aquí **empírico** significa: «*como se acostumbra en la práctica*».

568. – VALUACIÓN EMPÍRICA DE LA SENSIBILIDAD.

Expresamos **empíricamente** la sensibilidad de una balanza cuando decimos cuál es la sobrecarga mínima que hay que colocar en uno de sus platillos para que su fiel marque una desviación sensible.

---

(1) Sin embargo es castizo decir "BALANZA EQUILIBRADA" refiriéndose a la que tiene su fiel en el cero. – Nosotros, para evitar confusiones, no usaremos esta frase, y diremos «*que el fiel está en cero*», o «*marca cero*».

En cambio diremos "BALANZA EN EQUILIBRIO", cuando queremos expresar que "*no hay balanceo.*"

Así se acostumbra decir que tal o cual balanza es sensible **«al centigramo»**; tal otra **"a dos miligramos"**; etc.

569. – Se demuestra *matemáticamente* que la mayor o menor carga no influye en la sensibilidad de la balanza.

Sin embargo el roce del fulcro en su cojinete aumenta con la carga; y además la carga hace flexionar el astil, de modo que baja su baricentro y cambia la relación mutua de las tres aristas de las cuchillas.

De lo cual resulta que:

DE HECHO, **la sensibilidad de la balanza varía con la carga.**

570. – De lo anterior se deduce que para que el sistema empírico fuese verdaderamente práctico, debería dar para cada balanza una clave en la que se anotara la sensibilidad para varias pesadas, por ej.:

Carga	*Sobrecarga*
0 gr.	gr. 0,0002
5 gr.	gr. 0,0021
10 gr.	gr. 0,0022
50 gr.	gr. 0,0035
100 gr.	gr. 0,0040
500 gr.	gr. 0,0120
700 gr.	gr. 0,0160
1000 gr.	gr. 0,0200

Para las operaciones de laboratorio, por delicadas que sean, basta conocer la sensibilidad para las cargas MÁXIMA *y* MÍNIMA.

Carga máxima – la mayor que tolera la balanza, o la mayor que uno piensa usar.
Carga mínima – la de los platillos.

571. – La medida de la sensibilidad empírica de una balanza nos da a conocer cual es el error probable de las pesadas.

Efectivamente, si sabemos que una balanza es sensible *al miligramo*, podemos decir que el ERROR ABSOLUTO *probable es menor que 1 miligramo.*

572. – Conocido el ERROR ABSOLUTO *probable,* se calcula el ERROR RELATIVO *probable,* aplicando la fórmula:

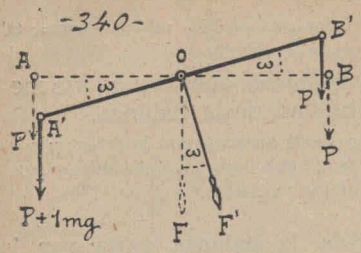
$$e = \frac{E}{P} \quad \text{que es lo mismo que} \quad e < \frac{p}{P}$$

e (error relativo) **E** (error absoluto) **P** = (peso valuado) **p** (sobrecarga mínima)

573. – PROBLEMA. ¿Cuál es el ERROR RELATIVO *probable* en una pesada de 7 Kg. efectuada en una balanza sensible al centimiligramo?

FÓRMULA $e < \frac{p}{P}$

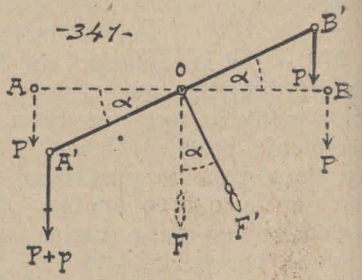
APLICACIÓN $e < \frac{0{,}00001}{7} = 0{,}0000014$



574. – VALUACIÓN MATEMÁTICA DE LA SENSIBILIDAD DE UNA BALANZA. Matemáticamente se mide la sensibilidad de una balanza por el ángulo ω de desviación que produce en ella la sobrecarga de gr. 0,001 (fig. 340).

Pero como no siempre es práctico recurrir a la sobrecarga de 1 miligramo; podemos calcular el ángulo ω valiéndonos de cualquier sobrecarga (fig. 341) y aplicando luego la fórmula siguiente:

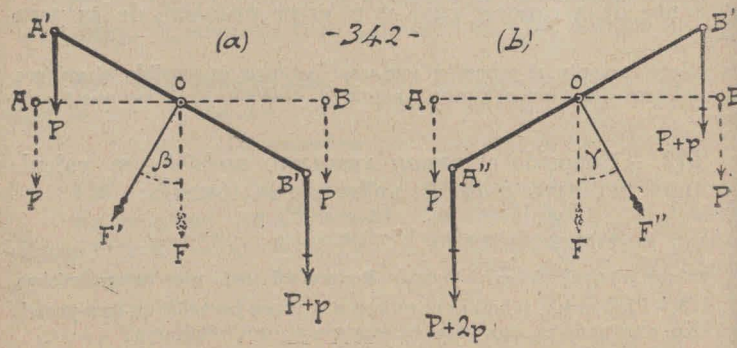
$$\omega = \frac{\alpha}{p}$$



575. – Es fácil demostrar que α no es proporcional a **p**.

De consiguiente debe elegirse como sobrecarga, la pesa más cercana al miligramo, si se quiere dar a ω un valor muy cercano al real.

576. – MODO PRÁCTICO DE VALUAR EL ÁNGULO α (fig. 342).



Se coloca la carga, repartida en los platillos de modo que se equilibre sensiblemente en cero.

Se añade en un platillo la sobrecarga **p**, y se anota la desviación β que ella produce.

Después se coloca en el otro platillo el duplo de la sobrecarga anterior y se anota el nuevo desvío y luego se aplica la fórmula:

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

Esta forma indirecta de valuar α *, trae la ventaja de que al colocar la carga no nos preocupa averiguar* si la balanza se equilibra justo en cero.

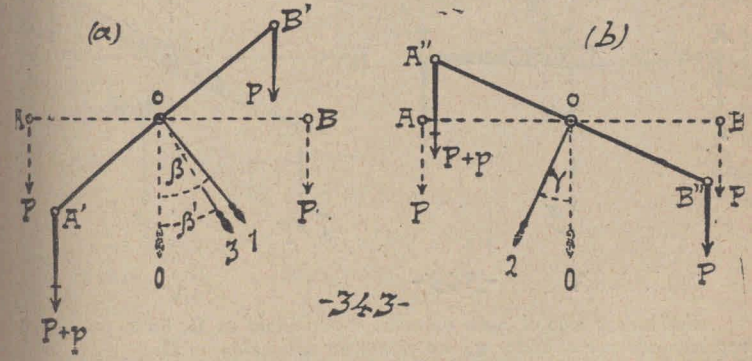
577. – En la práctica se considera que una balanza es muy sensible, cuando:

$$\omega = 1°$$

UN GRADO *generalmente corresponde a 4 ó 5 divisiones de la escala del fiel.*

578. – Modo de conocer el desvío del fiel. Para ello, no es necesario esperar que la cruz deje de oscilar; puesto que sino en las buenas balanzas las pesadas tardarían varios minutos, trayendo como consecuencia defectos de exactitud y de sensibilidad (1).

Basta anotar tres desvíos sucesivos del fiel mientras dura el balanceo (fig. 343): β, γ, β'.



De estos desvíos, β y β' se hallan a la derecha del *cero* (fig. 343-a), y γ a la izquierda, (fig. 343-b) o viceversa.

Después se aplica la fórmula:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\beta+\beta'}{2} + \gamma\right)$$

que es lo mismo que $\alpha = \tfrac{1}{4}(\beta + 2\gamma + \beta')$

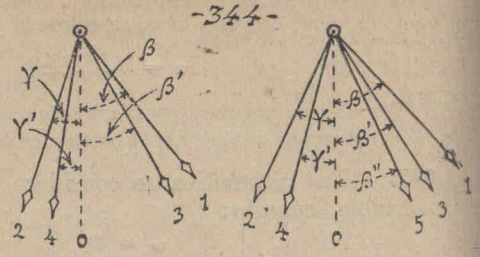
(α *desvío, en la posición de equilibrio*)

(1) Las inexactitudes se producirían por cambiar las condiciones del ambie especialmente cuando se recurre a la *doble pesada*.

n_{t_e}

579. – Cuando se quiere obtener más exactitud, se observan más desvíos, por ej. 4, 5, 6, etc. (fig. 344); y entonces se aplica la fórmula general.

-344-

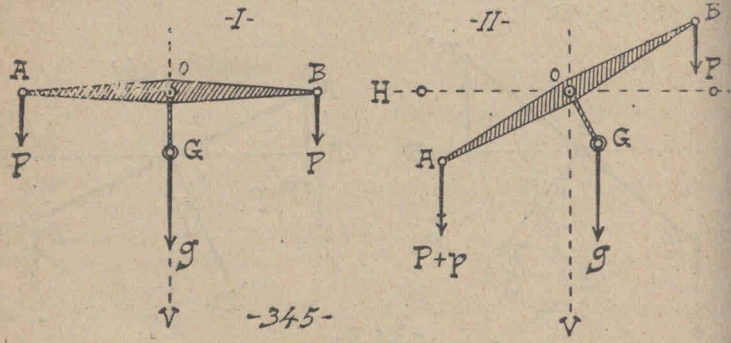


$$\alpha = {}^1/_2 \left(\frac{\beta+\beta'+\beta''\ldots}{n} + \frac{\gamma+\gamma'+\gamma''\ldots}{m} \right)$$

n (*número de desviaciones observadas a a derecha*)
m (*ídem a la izquierda*)

580. – LOS TRES MOMENTOS DE LA BALANZA.

El desvío α, correspondiente a la sobrecarga, es efecto del equilibrio de tres momentos (fig. 345).



-345-

Hallándose todo el peso del astil centralizado en **G**, *dicho peso estará representado por el vector* **g**, *con punto de aplicación en* **G**.

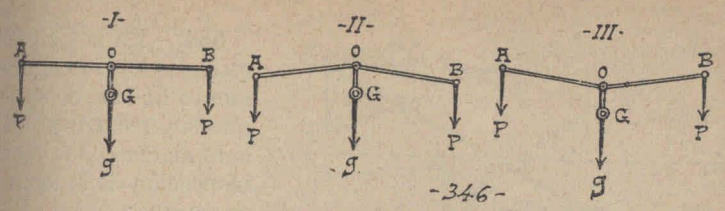
En **A** y **B**, *extremos del astil, se hallan aplicadas las fuerzas* **P** *y* **(P+p)** *que constituyen la carga total.*

Los tres momentos de la balanza son los que corresponden a estas tres fuerzas:

g, P y **(P+p)**

581. – Para estudiar los momentos de la balanza hay que suponer tres casos (fig. 346):

a) QUE LAS TRES ARISTAS DE LAS CUCHILLAS SEAN COPLANARES.
b) QUE EL FULCRO ESTÉ MÁS ALTO QUE LAS OTRAS DOS ARISTAS.
c) QUE EL FULCRO ESTÉ MÁS BAJO QUE LAS OTRAS DOS ARISTAS.



En las figs. 346, 348 y 349 hemos exagerado la inclinación mutua de los brazos Ao y Bo para mayor claridad de la ilustración.

582. – *Primer caso:* **Astil recto** (fig. 347).

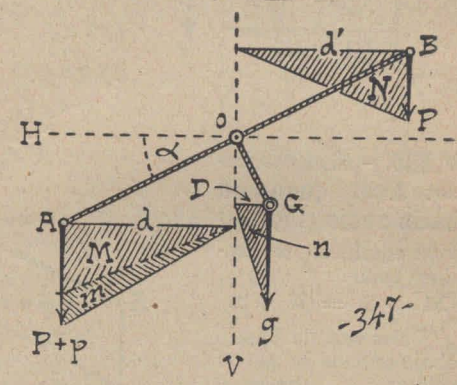
En cualquier inclinación del astil tendremos que

$$d = d'$$

En la posición de equilibrio, los momentos de las cuatro fuerzas serán

$$\left.\begin{aligned} M &= Pd \\ m &= pd \end{aligned}\right\} \text{(negativos)}$$

$$\left.\begin{aligned} N &= Pd' \\ n &= gD \end{aligned}\right\} \text{(positivos)}$$



Luego el equilibrio se produce cuando

$$M + m = N + n \quad (1)$$

o sea cuando $Pd + pd = Pd' + gD$

pero $Pd = Pd'$

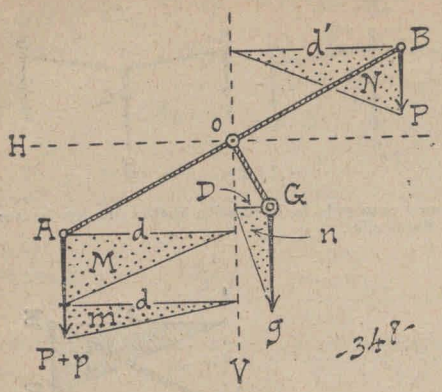
luego $pd = gD$

583. – La última igualdad nos demuestra que:

Cuando las aristas de las tres cuchillas están en un mismo plano, para el equilibrio de la balanza se requiere que el momento de gravedad del astil sea igual al momento de la sobrecarga.

Con esto queda también demostrado que desde el punto de vista matemático, la carga (**2P**) *no influye en la sensibilidad de la balanza.*

(1) Aunque antes habíamos hablado de «*tres fuerzas*», aquí consideramos «*cuatro*» porque (**P+p**) es un conjunto de dos fuerzas.



584. – En la fig. 348 está desdoblado el momento **M+m**; de modo que sin recurrir al cálculo algébrico, a simple inspección de la figura, se ve que:

M y **N** se anulan.

quedando efectivos solamente **m** y **n**, que, cuando se anulan, producen equilibrio.

585. – *Segundo caso*: **Astil quebrado hacia abajo** (fig.349)

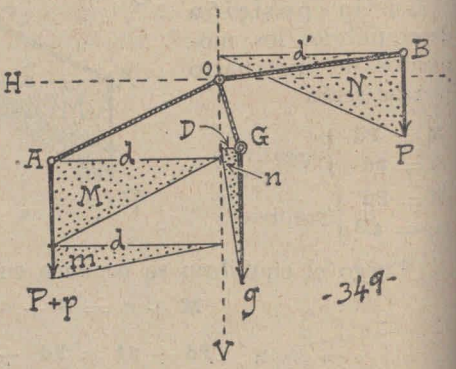
El equilibrio se produce cuando

$$M + m = N + n$$

Y el envión de **A** hacia abajo se debe a que al colocar la sobrecarga se tiene

$$M + m > N + n$$

Y como al comenzar el descenso de **A** teníamos $d = d'$



y a medida que **A** baja, se van alejando entre sí los valores de **d** y **d'**

$$d < d'$$

resulta, pues, que:

En el caso del astil *quebrado hacia abajo*,

a) Los momentos de la carga son desiguales fuera de la posición de cero.

b) La diferencia entre los momentos de carga se opone al momento de la sobrecarga.

c) Y como consecuencia: LA SENSIBILIDAD DE LA BALANZA DISMINUYE A MEDIDA QUE AUMENTA LA CARGA.

586. – *Tercer caso:* **Astil quebrado hacia arriba** (fig. 350).

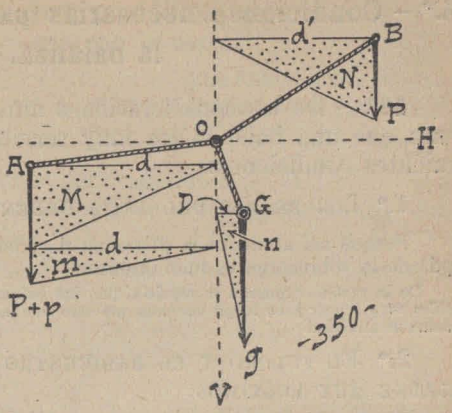
Comparando este caso con el anterior, se ve que a medida que A baja, se va haciendo más franca la desigualdad

$$d > d'$$

de donde

$$M > N$$

Por lo tanto;



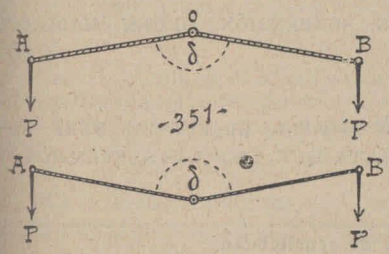
En el caso del astil quebrado hacia arriba;

a) Los momentos de carga son desiguales fuera de la posición de cero.

b) La diferencia entre los momentos de carga, se suma al momento de la sobrecarga.

c) Y como consecuencia: LA SENSIBILIDAD DE LA BALANZA AUMENTA A MEDIDA QUE AUMENTA LA CARGA.

587. – CONCLUSIONES a) La balanza de astil recto tiene sensibilidad constante, cualquiera sea la carga.



b) En la balanza de astil quebrado hacia abajo, la sensibilidad DISMINUYE a medida que disminuye el ángulo δ (fig. 351) y a medida que aumenta la carga.

c) En la balanza de astil quebrado hacia arriba, la sensibilidad AUMENTA a medida que disminuye el ángulo δ y a medida que aumenta la carga.

6.° – Condiciones necesarias para la sensibilidad de la balanza.

588. – De las consideraciones anteriores se desprende que para que una balanza sea muy sensible se requieren las siguientes condiciones:

1.° LOS BRAZOS DEL ASTIL DEBEN SER LARGOS.

Porque así aumenta la distancia **d**, y en consecuencia, el momento (**pd**) de la sobrecarga es más intenso.

De la razón expuesta, se seguiría que, las balanzas de alta precisión *debieran tener astiles muy largos;* pero luego veremos que esto trae inconvenientes que se oponen a la misma sensibilidad.

2.° EL FULCRO Y EL BARICENTRO DEL ASTIL, DEBEN HALLARSE MUY PRÓXIMOS.

Porque, cuanto más próximos estén, tanto menor es el momento (**gD**).

3.° LA CRUZ DEBE SER LIVIANA.

Porque así disminuye la intensidad de **g**, y como consecuencia, disminuye el momento (**gD**).

4.° LA CRUZ DEBE SER INFLEXIBLE.

Porque al bajar los puntos **A** y **B** con la carga, aumentaría el momento (**Pd'**) y disminuiría el momento (**Pd**).

Pero como no hay ningún cuerpo de rigidez absoluta, se procura dar a los astiles el máximum de rigidez posible, sin exagerar su peso; sino se quebrantaría la 3ª condición.

5.° LAS TRES ARISTAS DE SUSPENSIÓN DEBEN HALLARSE SOBRE UN MISMO PLANO.

O, mejor aún:

Cuando la balanza está descargada, EL FULCRO DEBE HALLARSE POR DEBAJO DE LA RECTA QUE UNE LAS SUSPENSIONES DE LOS PLATILLOS.

Condiciones de sensibilidad
1.° – Los brazos del astil deben ser largos.
2.° – El baricentro debe hallarse muy cerca del fulcro.
3.° – La cruz debe ser liviana.
4.° – La cruz debe ser inflexible.
5.° – Las tres aristas de suspensión deben ser coplanares.

Astil ideal. El astil ideal es el recto, porque tiene sensibilidad constante, cualquiera sea la carga.

Pero como todo astil es flexible, las balanzas de media y alta precisión tienen el astil quebrado hacia arriba, lo suficiente como para que con la carga máxima queden rectos.

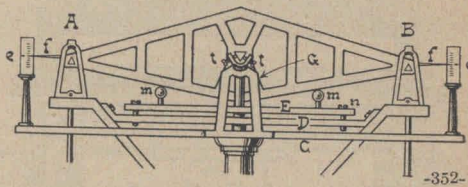
589. – Tres condiciones incompatibles. — El astil *debe ser largo* (1ª condición), *debe ser liviano* (3ª condición), *debe ser inflexible* (4ª condición).

Cuanto más largo es el astil, más pesa. Además si al alargarlo dejamos constante su masa, disminuimos su rigidez.

Como se ve, en la construcción de los astiles, hay que recurrir a un término medio prudencial entre estas tres condiciones.

590. – FORMA DE LOS ASTILES. — El término medio a que nos acabamos de referir, se obtiene dando a la cruz la forma de un rombo calado, que presenta en su interior travesaños como los de las cabriadas o de los puentes metálicos (fig. 352).

Pero entiéndase que el borde del rombo, y los travesaños FORMAN UNA SOLA PIEZA; *porque si hubiese ensambles o junturas ajustadas con tornillos, el astil se desvencijaría con el uso,* por más sólidas que fuesen las uniones.



-352-

También se aligera el astil, haciéndolo a manera de chapa relativamente delgada; pero exámenes minuciosos han demostrado que en los astiles delgados, las cargas producen flexiones laterales que son perniciosas a la exactitud.

591. – MATERIA PRIMA DE LOS ASTILES. — En algunas balanzas destinadas a pequeñas cargas se ha recurrido al aluminio o aluminio platinado.

Pero en las demás se requiere material resistente, siendo el más común el bronce que después se barniza o niquela para evitar su corrosión por los agentes atmosféricos.

Presentemente hay establecimientos que construyen cruces de bronce fosforoso y de magnalio.

El magnalio es una aleación de magnesio y aluminio: muy resistente a la flexión y más liviano que el aluminio.

592. – MODO DE AUMENTAR LA SENSIBILIDAD DE LA BALANZA. — Sin cambiar el índice de sensibilidad mecánica de una balanza, se puede aumentar prácticamente su sensibilidad sustituyendo el fiel por un espejo, o valiéndose de anteojos que hagan perceptibles sus pequeños desvíos.

Al describir las balanzas especiales llamaremos la atención sobre estos recursos.

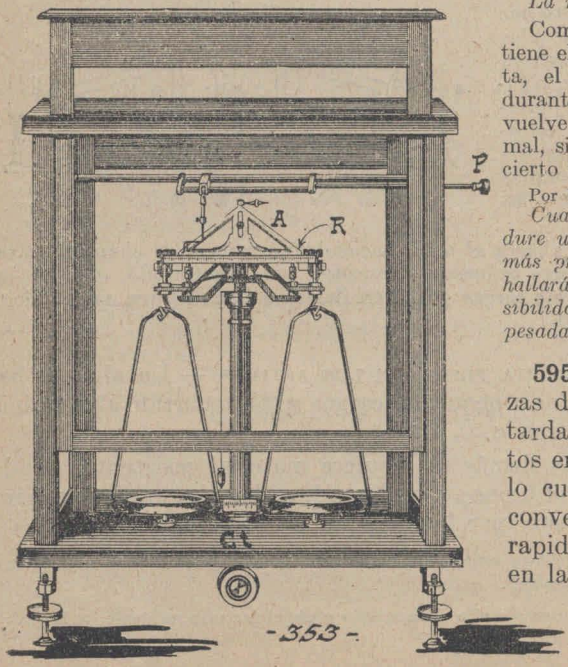
7.° – Condiciones de practicidad en la balanza.

593. – Entre las condiciones de practicidad se halla la siguiente:

LA BALANZA DEBE PRESTARSE A MANEJOS EXPEDITOS.

Y esto porque:

594. – Se ha notado que la sensibilidad de la balanza es distinta si se mide antes de la pesada o inmediatamente después de ella.



La razón es obvia:

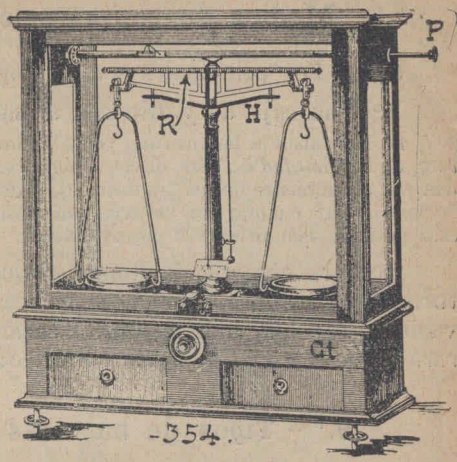
Como ningún cuerpo tiene elasticidad perfecta, el astil se flexiona durante la pesada, y no vuelve a su forma normal, sino después de un cierto tiempo.

Por lo tanto:

Cuanto menos tiempo dure una pesada, tanto más próximo al REAL *se hallará el índice de sensibilidad* NOMINAL *de la pesada.*

595. – Las balanzas de brazos largos tardan varios minutos en equilibrarse; lo cual es grave inconveniente para la rapidez que se exige en las pesadas.

Por eso Mendeléieff ha demostrado que la balanza ideal es la de BRAZOS RELATIVAMENTE CORTOS, *condición que se ha puesto en práctica en varios tipos de balanzas como la de Sartorius (fig. 353). La fig. 354 representa una balanza de brazos semilargos.*



-354.

596. – Para amortiguar el balanceo se ha recurrido a varios expedientes:

a) Pinceles de pelo suave, colocados debajo de los platillos.

Por medio de una palanca se levantan para disminuir la amplitud del balanceo.

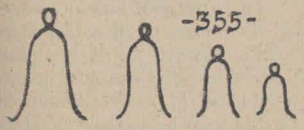
b) *Amortiguador de P. Curie o* DE AIRE.

Debajo de cada platillo cuelga una campana metálica que juega dentro de un vaso, de diámetro mayor, fijo en la peana.

c) *Amortiguador de Collot o* DE ACEITE.

El fiel termina en una paleta que se halla sumergida en un pequeño recipiente de vaselina líquida, fijo en la columna o en la peana.

Este sistema no es propio para las balanzas de alta precisión; pero es muy práctico para las de media precisión.


-355-

597. – Otro recurso de practicidad es el de los JINETILLOS o *réiteres*, ideados por Berzelius (fig. 355).

El réiter común es una pesa filiforme, de gr. 0,01, que se va corriendo sobre uno de los brazos de la cruz, *en una barra ad hoc*, la cual tiene dividida en 10 o 100 partes iguales los brazos del astil.

De aquí resulta que, en el caso de división en 10 partes iguales cuando el jinetillo está, p. ej., en la división 6, marcará gr. 0,006.

El funcionamiento del jinetillo es idéntico al del PILÓN de la romana, del que luego hablaremos.

En las figs. 353 y 354, la regla donde se colocan los réiteres está señalada con **R**.

P es la perilla terminal de la varilla que remata en el gancho con que se colocan o se corren los jinetillos.

8.° – Medios de conservación de la balanza.

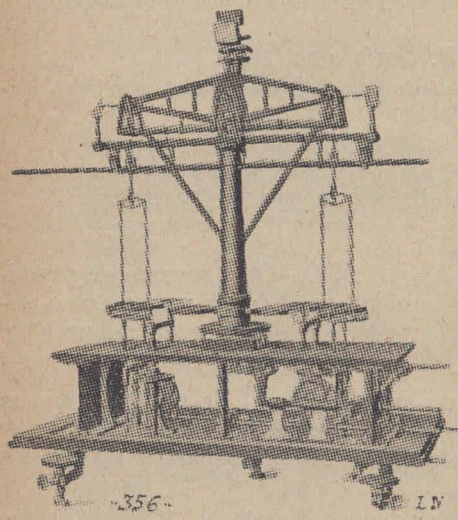
598. – Los principales son los siguientes:

1.° Una caja de vidrio con armazón de madera o metal.

La caja aisla la balanza del *polvo*, de los *cambios bruscos de temperatura*, de la *humedad del aire*, de los *vapores corrosivos* que a veces se difunden por el ambiente de los laboratorios, y de las *ráfagas de viento* que la harían oscilar cuando no estuviera en posición de reposo, y que aún en esta posición sacudirían sus piezas móviles.

2.° Para absorber la humedad que penetra en los momentos en que se abre la caja, se coloca dentro de ésta, en un vasito o cápsula, una sustancia secante, como por ej. el *cloruro de calcio:* Cl_2Ca, ácido sulfúrico: SO_4H_2 o cal viva: CaO

9.° – Tipos de balanzas de precisión



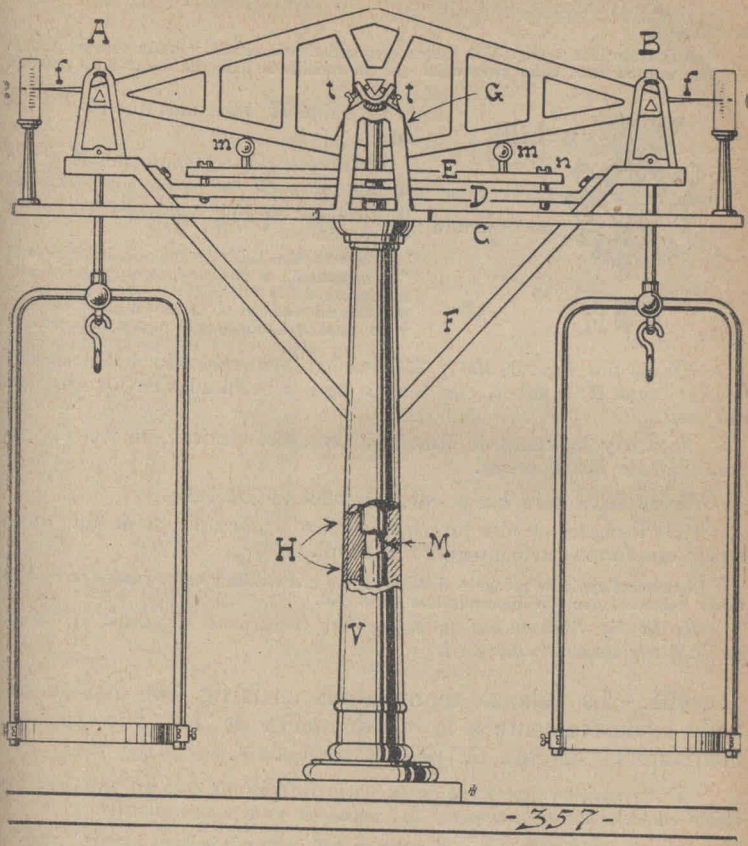
Este párrafo tiène por fin ejemplificar el tema del párrafo anterior.

Nos pareció que daría lugar a confusiones en la mente de los alumnos la intercalación de muchos ejemplos en la exposición de las condiciones de las balanzas. Pero por otra parte hubiera sido demasiado teórico, y de consiguiente estéril aquel estudio, si no estuviese acompañado de la correspondiente aplicación a casos concretos.

Por eso la LECTURA (y no "el estudio") de este párrafo será un buen repaso y afianzamiento de los conceptos que el alumno hubiere asimilado en el párrafo anterior.

599. – Los principales tipos de balanzas de media y alta precisión, son las de RUEPRECHT, de SARTORIUS y de BUNGE.

600. – BALANZA DE RUEPRECHT (fig. 356 y 357). Es de astil largo y rombal, generalmente de bronce.



Aunque ya no se cronstruyen de estas balanzas, por ser de brazos largos, son comunes en muchos laboratorios, puesto que representaría un buen presupuesto sustituirlas por las de brazos cortos.

Los cojinetes de las cuchillas son de ágata.

La ágata tiene sobre el acero dos ventajas: no se herrumbra y no se imana ni sufre la atracción de los imanes.

La columna consta de dos cilindros huecos o VAINAS **V** y **H**; y de un cilindro central macizo **M**.

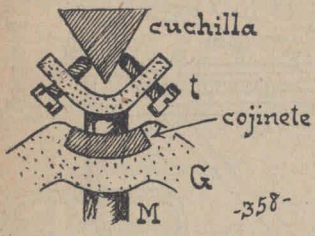
La vaina **V** es fija, y soporta el *caballete* **G** que remata en el cojinete del fulcro.

El travesaño **C** es la prolongación de la base del caballete.

La vaina **H** y el cilindro **M**, tienen movimiento independiente uno de otro. El cilindro **M** remata en su parte superior en el travesaño **E**, el cual

al elevarse levanta el astil mediante los dos tornillos **t** y las dos perillas esféricas **m**.

Los dos tornillos **t** (fig. 358) tienen extremidad redondeada, y están suficientemente alejados uno de otro, como para dejar que la cuchilla se balancee durante las pesadas.



La vaina **H**, sube más que el cilindro **M**.

El travesaño **D** sostenido por **H** y por la horquèta **FF** que está soldada a **H**, levanta los platillos mediante las piezas extremas.

Con esta disposición, cuando la balanza está **"en descanso"**; se obtiene que el peso del astil no embote el filo del fulcro; y que el peso de los platillos no embote el filo de las otras cuchillas y no produzca inútilmente flexión en la cruz.

En las dos figuras 356 y 357 se han representado balanzas con *fiel horizontal* **ff**; a saber, con sendas agujas colocadas en los extremos del astil.

Pero hay balanzas de Rueprecht con fiel vertical como en la generalidad de las balanzas.

El fiel sirve para las pesadas de relativa precisión.

Para los casos de alta precisión se hace incidir un rayo de luz en un espejo que forma parte integrante del astil.

El rayo reflejado se recoge a distancia sobre una escala; y así se pueden percibir y medir balanceos que son imperceptibles en el fiel.

En la fig. 356, en vez de espejo hay un prisma de doble reflexión, en la parte superior del astil.

601. – La balanza representada en la fig. 356 está destinada exclusivamente a la comparación de los *kilos-patrones* mediante el sistema de pesada de Gauss.

El mecanismo que se ve en la parte inferior de esta balanza tiene por objeto cambiar automáticamente las pesas de uno a otro platillo.

De este modo se evita que el operador esté junto a la balanza durante la pesada; precaución necesaria para evitar corrientes de aire y cambios en la temperatura del ambiente.

602. – Hay balanzas de Rueprecht cuya carga máxima es de 5 Kg. y que son sensibles a gr. 0,0001; de modo que su error probable es menor que

$$\frac{0{,}0001}{5.000} = 0{,}000.000.02$$

O sea 2 centimillonésimas de la carga.

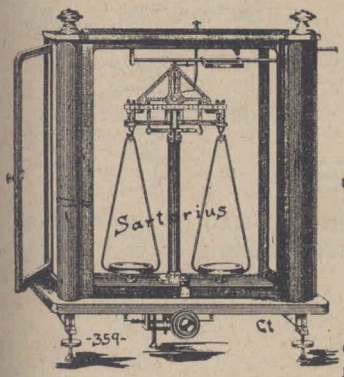
La balanza Rueprecht destinada a comparar entre sí los KILOS-PATRONES es sensible a gr. 0,000015.

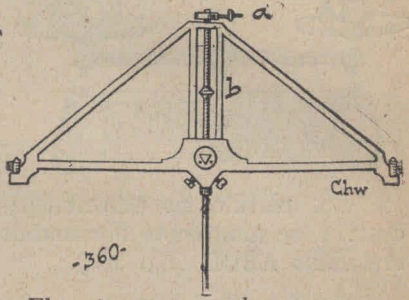
De aquí resulta que los kilos-patrones pueden ser rectificados con un error relativo menor que

$$\frac{0{,}000015}{1.000} = 0{,}000.000.015$$

quince milimillonésimos con respecto al *kilogramo internacional.*

603. – BALANZA DE SARTORIUS (fig. 353 y 359). Es de brazos cortos, como todas las balanzas modernas de alta precisión; y se caracteriza por la forma triangular de su astil y por los dos contrapesos movibles **a** y **b** que éste lleva (fig. 360).





El contrapeso **a** puede correrse a derecha o izquierda del plano de simetría del astil.

El contrapeso **b** puede bajar o subir para disminuir o aumentar la sensibilidad de la balanza.

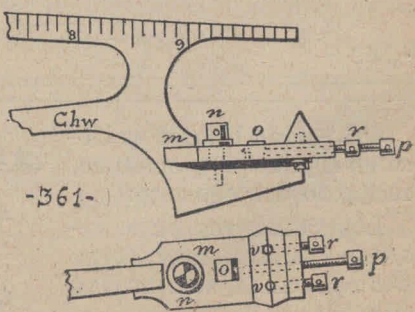
Bajando **b**, baja el centro de gravedad de la balanza, y disminuye por lo tanto la amplitud de ω.

Otra novedad en la balanza de Sartorius, es la disposición de las cuchillas extremas que son movibles (fig. 361).

La plancha de acero **m** se hace correr aflojando el tornillo **n** y maniobrando con el tornillo **p**.

Los tornillos **r** sirven para hacer virar la cuchilla, a fin de colocar su filo paralelo al fulcro.

De este modo se corrige cualquier desvío que pudiera producirse en el centro de gravedad con respecto al eje de simetría astil.



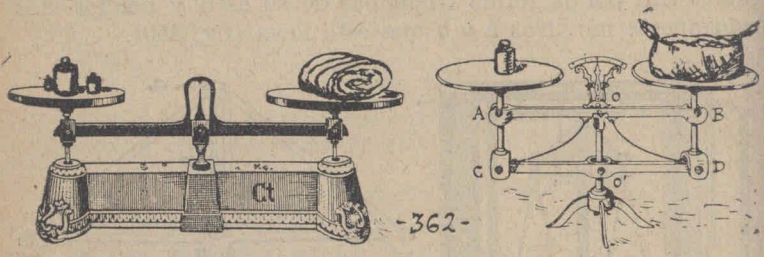
N.B. – Las ilustraciones señaladas con **Chw** pertenecen al texto de Chwolson (Edición española – Feliú y Susana – Barcelona).

10.° – Balanza de Roberval.

604. – Habíamos clasificado las balanzas de brazos iguales en tres tipos: BALANZA GRIEGA, BALANZA DE PRECISIÓN Y BALANZA DE ROBERVAL.

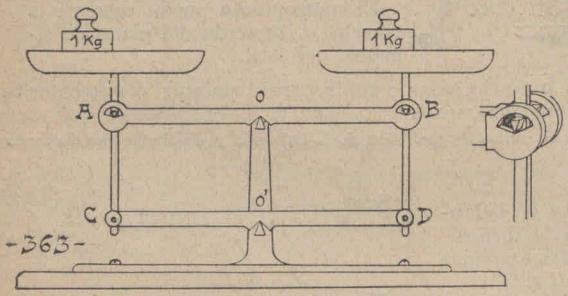
Estudiemos el tercer tipo.

605. – La balanza de ROBERVAL difiere mucho de las balanzas *griega* y de *precisión* (fig. 362).



-362-

Los platillos no están suspendidos, sino *apoyados* sobre la cruz. Y se mantienen horizontales, mediante el *paralelogramo articulado* **ABCD** (fig. 363).

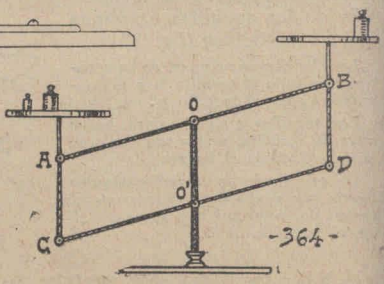


-363-

Como se ve, podemos decir que es ésta una balanza de dos astiles paralelos: **AoB** *y* **Co'D** *acoplados mediante las bridas* **AC**, **oo'** *y* **BD**.

606. – Esta balanza se basa en el principio geométrico, recíproco del siguiente:

LOS SEGMENTOS DE PARALELAS COMPRENDIDOS ENTRE DOS PARALELAS, SON IGUALES (fig. 364).



-364-

Porque **AC = oo' = BD** y **AB = CD** luego **AC // oo' // BD** y **AB // CD**

Esta balanza no se presta a pesadas de precisión; pero es suficientemente exacta y sensible para las mediciones que se efectúan en las ventas de comestibles y en los otros negocios similares.

11.° – Modo de asegurar la precisión de las pesadas.

607. – Hay tres métodos para obtener pesadas precisas:

1.° MÉTODO DE BORDA o de la TARA.

2.° MÉTODO DE GAUSS o de TRANSPOSICIÓN.

3.° MÉTODO DE MENDÉLÉIEFF o de la CARGA CONSTANTE.

Los dos primeros métodos sirven para asegurar la EXACTITUD de la pesada; y el tercero sirve para asegurar la SENSIBILIDAD,.

Los dos primeros métodos se llaman "DE DOBLE PESADA"; pero hay autores que llaman así, solamente el de Borda, y otros sólo el de Gauss.

Por eso el alumno en el examen debe evitar el uso de dicha expresión para no exponerse a correcciones motivadas por la intransigencia del examinador.

Los que llaman "DE DOBLE PESADA" el método de Borda se basan en que *antes se pesa el objeto por medio de la tara*, y después se pesa la tara

Los que llaman "DE DOBLE PESADA" el método de Gauss, se basan en que *primero se pesa el cuerpo en un platillo, y después en otro.*

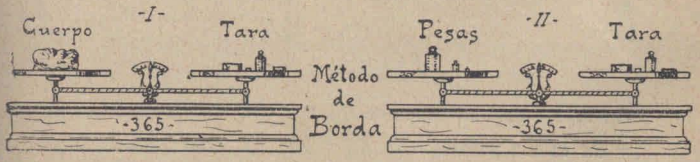
El metodo de Borda es más antiguo que el de Gauss, y fué el primero que llevó el nombre "**de doble pesada**".

En cambio el de Gauss merece tal nombre porque el cuerpo se pesa dos veces.

Murani y *Chwolson* llaman así el de Borda; en cambio *Kleiber - Karsten* llama así el de Gauss.

608. – Método de Borda o de la tara (fig. 365).

Se coloca el cuerpo en un platillo, y en el otro se equilibra con *cualquier cosa*, por ej., con municiones.



Luego se retira el cuerpo, y se colocan en su lugar pesas. Etc. (1).

(1). Llámase **tara**, cualquier cuerpo o pesa que se use para equilibrar, sin que nos interese conocer el peso correspondiente.

609. – Método de Gauss o de transposición (fig. 366).

Se coloca el cuerpo en un platillo y las pesas en el otro, y se anota el valor **P** de las pesas.



Luego se retiran las pesas y se cambia de platillo el cuerpo volviéndolo a pesar y anotando el nuevo resultado **Q**.

Si la balanza es exacta, se obtiene:

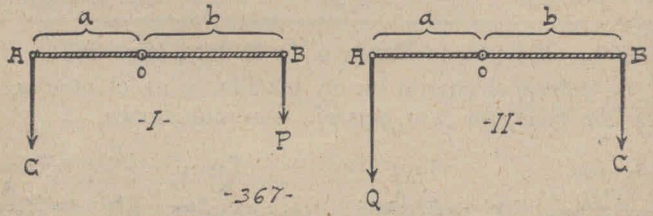
$$P = Q$$

De modo que es este un buen procedimiento para comprobar la exactitud de una balanza.

610. – Si los dos valores obtenidos en el método de Gauss son distintos, la balanza es inexacta y se obtiene el verdadero peso aplicando la fórmula siguiente:

$$C = \sqrt{P \times Q}$$ **C** (*peso del cuerpo*)

611. – Demostración de la fórmula anterior (fig. 367).



En la 1.ª pesada tenemos que: $C \times a = P \times b$

y en la 2.ª pesada: $C \times b = Q \times a$

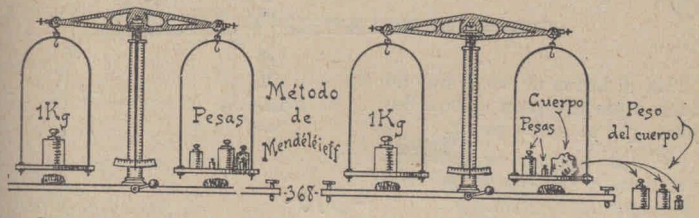
Multiplicando ordenadamente: $C^2 . a . b = P . Q . a . b$

Eliminando el factor **a.b**, común a ambos miembros, obtenemos:

$$C^2 = P . Q$$

o sea $C = \sqrt{P . Q}$ L. Q. Q. D.

612. – Método de Mendéléieff o de la carga constante, llamado también: DE LA SENSIBILIDAD CONSTANTE. (fig. 368). — Ya sabemos como variando la carga, varía de hecho la sensibilidad de la balanza; de consiguiente el único medio para conservar constante la sensibilidad en las pesadas, es el de dar a la balanza siempre la misma carga.



-368-

Supongamos que la carga máxima de una balanza es 2 kilos (uno en cada platillo):

Colocamos en **A** una pesa de *1 kilo*, y en **B** equilibramos con un juego de pesas cuya suma llegue a un kilo.

Si el fiel no marca cero, añádase la sobrecarga necesaria.

Equilibrada la balanza, se coloca en **B** el objeto que se quiere pesar, y se retiran del platillo las pesas necesarias para restablecer el equilibrio.

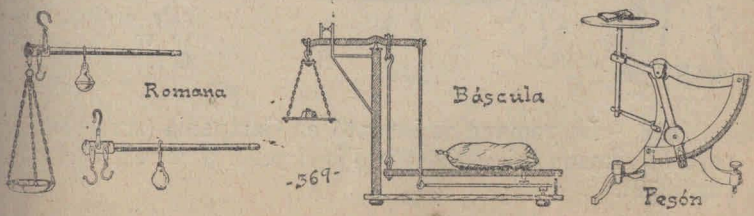
Las pesas que se retiran de **B** *marcan el peso del cuerpo dado.*

613. – Cualquiera entiende que si la balanza usada en este trabajo es sensible al centigramo, su sensibilidad relativa es:

$$S = \frac{0{,}01}{1000} = 0{,}00001$$

12.° - Balanzas asimétricas.

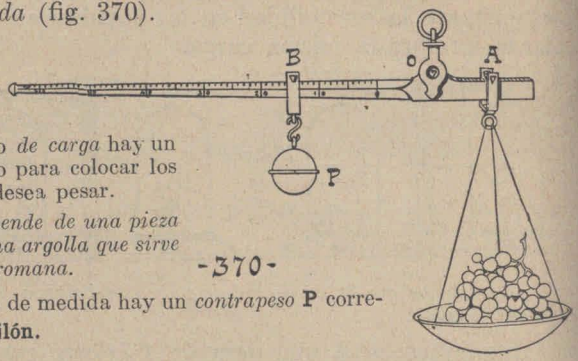
614. – Hay tres tipos fundamentales de balanzas de brazos desiguales: la ROMANA, la BÁSCULA y el PESÓN (fig. 369).



-369-

Existen balanzas asimétricas de precisión; pero su teoría es la de las balanzas simétricas o la de la romana: forman, pues, *tipos derivados* que aquí no tomamos en cuenta.

615. – La **romana** es una palanca de brazos desiguales. El brazo de resistencia o *de carga* es menor, que el brazo de potencia o *de medida* (fig. 370).



-370-

En el brazo *de carga* hay un gancho o platillo para colocar los objetos que se desea pesar.

El fulcro pende de una pieza que remata en una argolla que sirve para colgar la romana.

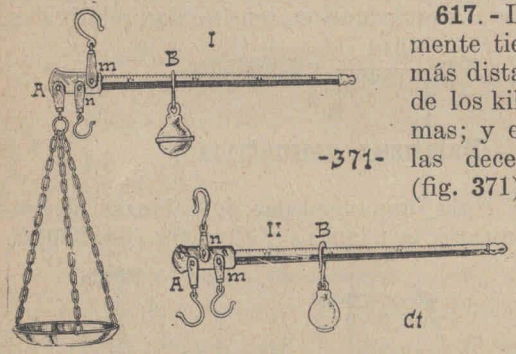
En el brazo de medida hay un *contrapeso* **P** corredizo, llamado **pilón.**

616. – **Graduación de la romana.** El cero se halla donde el pilón la equilibra cuando está descargada.

Para graduarla, se coloca 1 Kg. como carga, y se corre el pilón hasta equilibrarla.

Allí se marca **1**, y se equidivide en 10 partes la distancia de **O** a **1**.

La escala así hallada se prolonga hasta el extremo de la barra de medida.



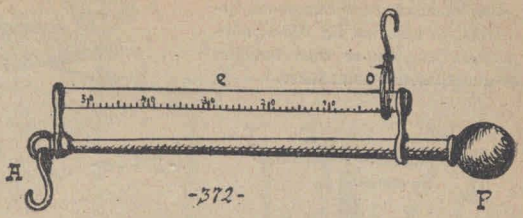
-371-

617. - Las romanas generalmente tienen dos fulcros: el más distante de la carga mide los kilogramos y sus décimas; y el más cercano mide las decenas de kilogramos (fig. **371**).

A cada fulcro le corresponde una escala distinta, como se ve en la figura 371.

618. – La romana se inventó en Campania (sur de Italia); pero la romana original tenía *fijo el pilón y corredizo el fulcro* (fig. 372).

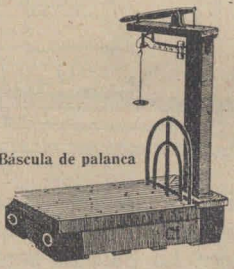
La introducción de la balanza griega en Italia fué causa de la inversión de las dos piezas, dando como resultado la romana actual.

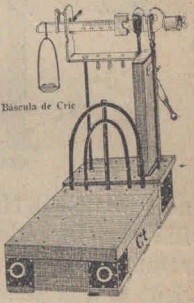


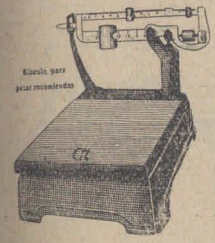
-372-

619. – La *báscula* es una balanza formada por una combinación ingeniosa de palancas.

Sirve especialmente para cargas pesadas y de manejo incómodo; pero se usa también en los despachos de comestibles al menudeo (almacenes, panaderías y carnicerías), adquiriendo diversas formas según los usos (fig. 373).



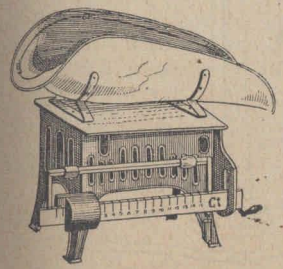




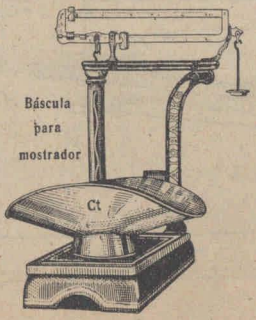


-373-

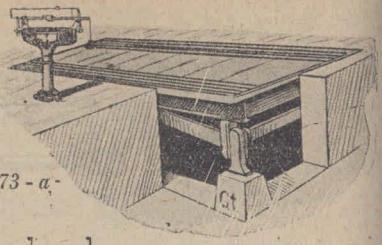




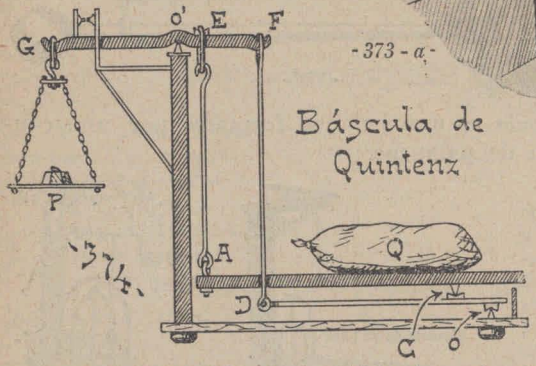
Báscula para bebés



Las balanzas pesa-carros son generalmente básculas fig. 373-a; aunque para este fin se usan también los **dinamómetros neumáticos.**



-373-a-

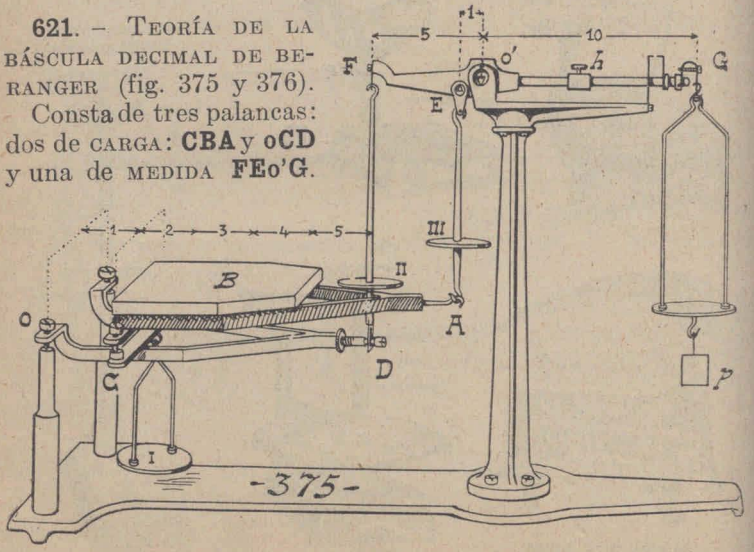


-374-

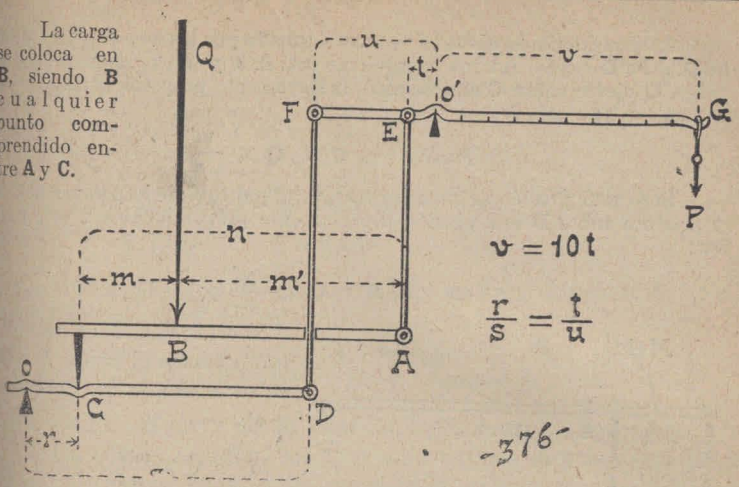
Báscula de Quintenz

620. – Parece que la báscula fué inventada por *Sanctorio* ! (hacia el año 1600); pero el que la modificó y dió a publicidad fué *Quintenz* en 1821. Habiendo recibido después otras modificaciones, fué por fin adaptada al sistema decimal y combinada con la romana por *Beranger*. La **báscula centesimal o moderna**, obedece a una teoría muy diversa de las anteriores.

621. – TEORÍA DE LA BÁSCULA DECIMAL DE BERANGER (fig. 375 y 376). Consta de tres palancas: dos de CARGA: **CBA** y **oCD** y una de MEDIDA **FEo'G**.



-375-



Para simplificar la explicación, supondremos que las piezas de las básculas no tienen peso, puesto que basándonos en la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, no cuesta nada demostrar que EN UN SISTEMA DE PALANCAS EN EQUILIBRIO NO SE DESTRUYE EL EQUILIBRIO, AL AÑADIRLE CUALQUIER SISTEMA DE FUERZAS QUE HUBIERA SIDO SUFICIENTE POR SÍ SOLO PARA PRODUCIR EQUILIBRIO EN DICHO CONJUNTO.

1.° En la báscula de Beranger tenemos que:

$$Q = 10\ P$$

O sea, que:

El VALOR NOMINAL de las pesas es diez veces mayor que el REAL.

2.° Para obtener la condición anterior se requiere que:

$v = 10\ t$ y que $\frac{r}{s} = \frac{t}{u}$

622. – RELACIÓN DE LOS BRAZOS DE PALANCA Y DE LAS FUERZAS (fig. 376).

Considerando sólo el sistema de las dos palancas **CBA** y **Eo'G** cuyos fulcros respectivos son **C** y **o'** tendremos que la carga **Q** ejerce sobre **A** una presión inversamente proporcional a los brazos **m** y **n**; a saber:

$$\textit{Presión en } A = Q \times \frac{m}{n}$$

Pero esta presión se trasmite íntegra al punto **E** de la palanca de medida.

Llamando **M** el momento de dicha presión con respecto al fulcro **o'** tenemos:

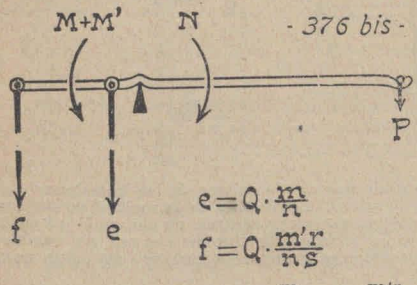
$$M = Q \times \frac{m}{n} \times t$$

2.° Considerando ahora el sistema formado por las tres palancas **CBA**, **oCD** y **Fo'G** cuyos fulcros respectivos son **A**, **o** y **o'**, tendremos que la carga **Q** ejerce sobre **C** una presión inversamente proporcional a los brazos **m'** y **n**; a saber:

$$\textit{Presión en } \mathbf{C} = \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{m'}}{\mathbf{n}}$$

Pero esta presión se trasmite íntegra al punto **C** de la palanca **o' C D** y produce sobre **D** una presión inversamente proporcional a **r** y **s**; a saber:

$$\textit{Presión sobre } \mathbf{D} = \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{m'}}{\mathbf{n}} \times \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}$$



Y esta presión se trasmite íntegramente al punto **F** siendo su momento con respecto a **o'**:

$$\mathbf{M'} = \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{m'.r}}{\mathbf{n.s}} \times \mathbf{u}$$

Ambos momentos **M** y **M'** tienen el mismo sentido; luego se suman (fig. 376 bis):

$$\mathbf{M}+\mathbf{M'} = \mathbf{Q}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}\mathbf{t} + \mathbf{Q}\,\frac{\mathbf{m'r}}{\mathbf{ns}}\mathbf{u} = \mathbf{Q}\,\frac{\mathbf{mst}+\mathbf{m'ru}}{\mathbf{ns}}$$

3.° En **G** actúa **P**, cuyo momento respecto a **o'** es:

$$\mathbf{N} = \mathbf{Pv}$$

4.° Cuando hay equilibrio se tiene $\mathbf{M} + \mathbf{M'} = \mathbf{N}$

o sea $$\mathbf{Q}\,\frac{\mathbf{mst} + \mathbf{m'ru}}{\mathbf{ns}} = \mathbf{Pv}$$

Esta fórmula es aplicable a cualquier báscula: apliquémosla, pues, a la decimal.

623. – DEMOSTRACIÓN DE LAS DOS CONDICIONES DE LA BÁSCULA DECIMAL.— Debemos demostrar que para obtener que:

$$\mathbf{Q} = 10\ \mathbf{P}$$

se requiere que se cumplan las dos condiciones:

$$\mathbf{v} = 10\,\mathbf{t} \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{u}}$$

En efecto, llamando *1* (uno) el valor de **t**, se obtiene:

$$\mathbf{v} = 10 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{s} = \mathbf{ru}$$

Teníamos la fórmula: $$\mathbf{Q}\,\frac{\mathbf{mst} + \mathbf{m'ru}}{\mathbf{ns}} = \mathbf{Pv}$$

sustituyendo en ella los valores que acabamos de obtener, resulta:

$$Q\,\frac{mru + m'ru}{nru} = 10P$$

de donde

$$Q\,\frac{m + m'}{n} = 10P$$

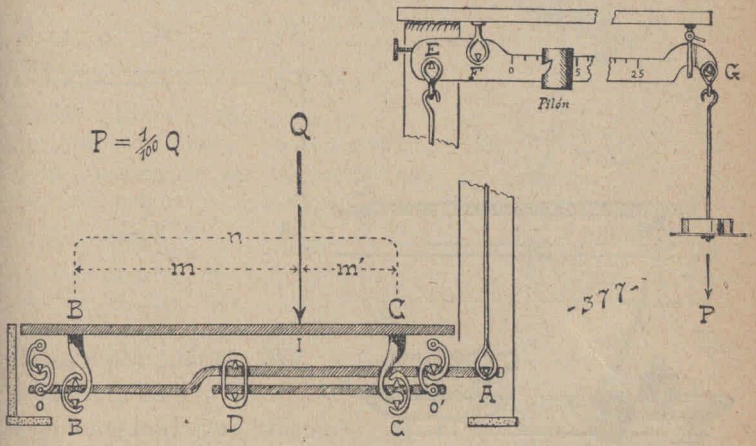
pero $m + m' = n$ luego $\dfrac{m + m'}{n} = 1$

p. l. t. $Q = 10\ P$ L. Q. Q. D.

624. - El funcionamiento del PILÓN del brazo de medida es idéntico al de la romana.

De modo que las básculas de Beranger son mixtas, hallándose constituidas por la asociación de una báscula de Quintenz y una romana.

625. - Teoría de la báscula centesimal o moderna (fig. 377). - Esta báscula, aunque más complicada en su mecanismo de carga, es más práctica, y al mismo tiempo su teoría es mucho más sencilla que la de Beranger.



Considerando en la palanca **BIC** como fulcro el punto **B**, resultará que la acción de **Q** en **C** es:

$$R = \frac{Q.m}{n}$$

Pero si consideramos **C** como fulcro, la acción de **Q** sobre el punto **B** es:

$$R' = \frac{Q.m'}{n}$$

Mediante la palanca **o'CD** se trasporta la acción **R** al punto **D** con la misma intensidad que le correspondería si actuara sobre el punto **B**.

De modo que en la palanca **oBA** podemos considerar que **R** se halla sobre el punto **B**, sumada con **R'**.

Tendremos, pues, en **B**:

$$R + R' = \frac{Q.m}{n} + \frac{Q.m'}{n} = \frac{Q(m+m')}{n} = \frac{Q.n}{n} = Q$$

Con esto queda demostrado que:

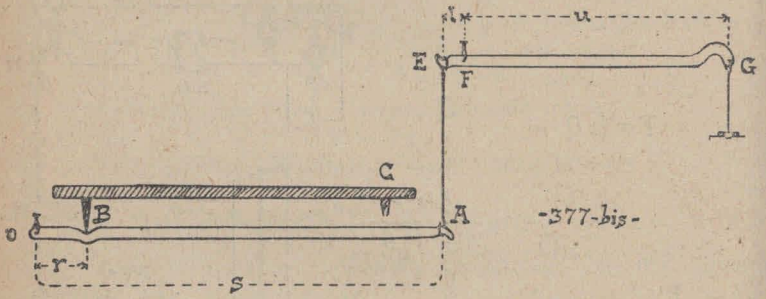
CUALQUIERA SEA LA POSICIÓN DE **Q** SOBRE LA PLANCHA **BIC**, SIEMPRE ACTUARÁ SOBRE LA PALANCA **oBA** COMO SI ESTUVIESE APLICADA DIRECTAMENTE EN **B**.

Ahora bien, para que la báscula se equilibre cuando

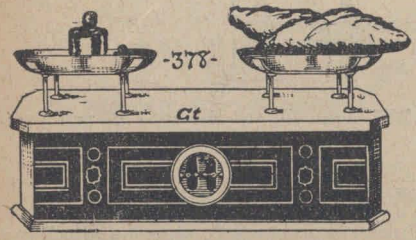
$$Q = 100\ P$$

se requiere que (fig. 377 bis).

$$\frac{r}{s} \times \frac{t}{u} = \frac{1}{100}$$



-377-bis-

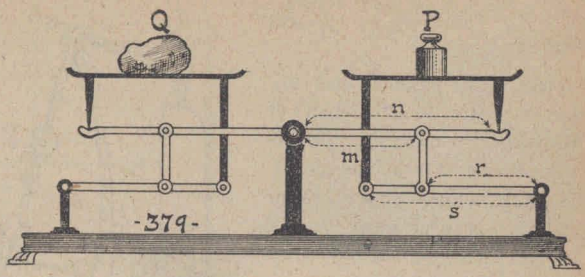


626. - DOBLE BÁSCULA (fig. 378). Se usa en muchos negocios, y exteriormente puede confundirse con la balanza de Roberval, de la que se distingue por tener cuatro varillas de soporte para cada platillo.

El croquis de la fig. 379 da idea exacta de su construcción y funcionamiento.

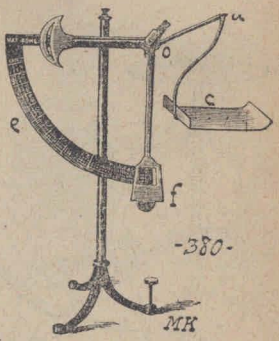
En su conjunto, esta balanza es SIMÉTRICA; pero las palancas de que se compone son ASIMÉTRICAS.

Además, no es un tipo fundamental de balanza, sino un tipo derivado.



Por eso queda comprendida entre las básculas, a pesar de su semejanza externa con la de Roberval.

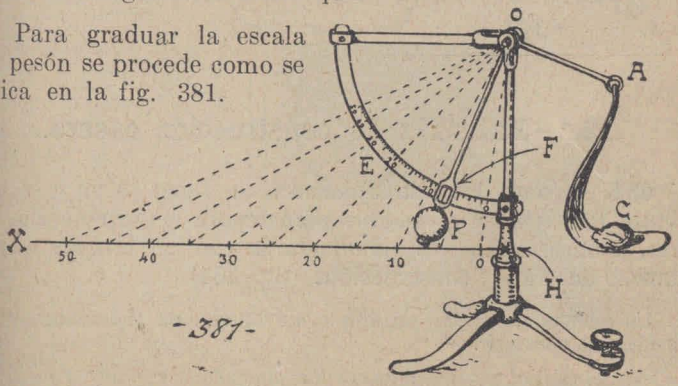
627. - Pesón o BALANZA RÁPIDA ALEMANA, (fig. 380) que se llama también PESA-CARTAS, sirve para cargas pequeñas, y está constituida por una palanca quebrada, de 1.er género **PoA**. (fig. 381).



De un extremo pende el *platillo de la carga;* el otro extremo lleva el *contrapeso* **P** y el fiel **F**, el cual recorre las graduaciones de una escala circular **E**, menor que un cuadrante.

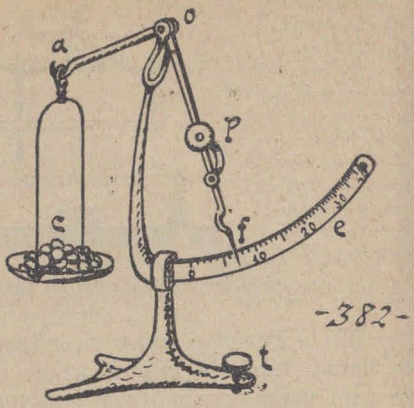
628. - TEORÍA DEL PESÓN. Con poco que se razone, se entenderá que las divisiones de la escala del pesón son desiguales de modo que:

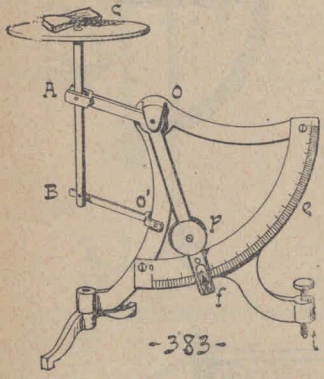
Para graduar la escala del pesón se procede como se dinica en la fig. 381.



N. B. — Las ilustraciones marcadas con **MK** han sido copiadas del Catálogo de la Casa MAX KOHL, de aparatos de Física y Química (Chemnitz – Alemania).

629. – Los pesones más minuciosos (fig. 382) tienen el contrapeso **p** movible; pudiéndosele dar dos posiciones en la palanca, a fin de que en la segunda, las divisiones de la escala correspondan a decenas con respecto al valor que les corresponde en la 1.ª posición.





630. - En los pesones, de platillo superior (fig. 383), se obtiene la estabilidad del platillo, mediante un romboide articulado **AoóB**

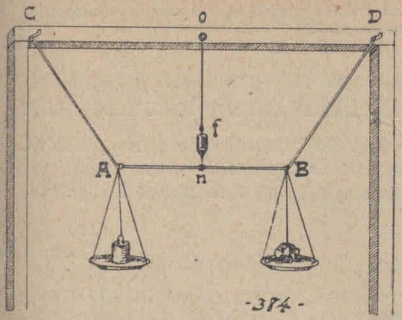
En algunos de estos pesones se deja fijo el fiel, y se hace movible la escala.

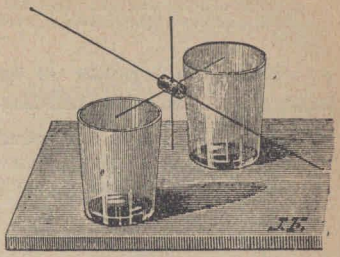
13.° – Balanzas de construcción casera.

631. – Como los alumnos necesitan tener en su casa una balanza relativamente sensible para repetir las experiencias de clase, acompañamos esta monografía con el croquis de tres balanzas de fácil construcción. (fig. 384)

La primera no es tan sensible como la segunda y tercera; pero es más fácil de construir.

Su fiel es fijo, consistiendo en una plomada; y el índice **n** puede obtenerse mediante un nudo, y no es necesario que esté en el centro del segmento **AB**.

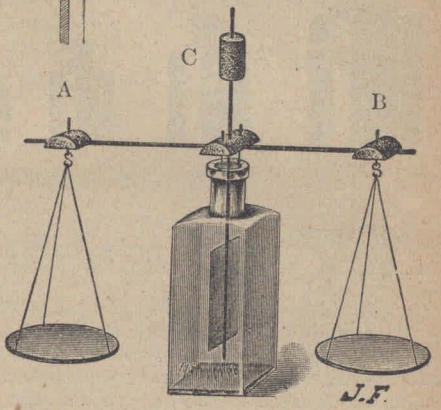




La segunda y tercera son muy sensibles, y se amortigua su balanceo, mediante una cartulina colocada ne el extremo del fiel.

Para equilibrarlas en el cero se recurre a alfileres aplicados a los corchos **A** y **B**.

Se aumenta su sensibilidad subiendo el corcho **C**.



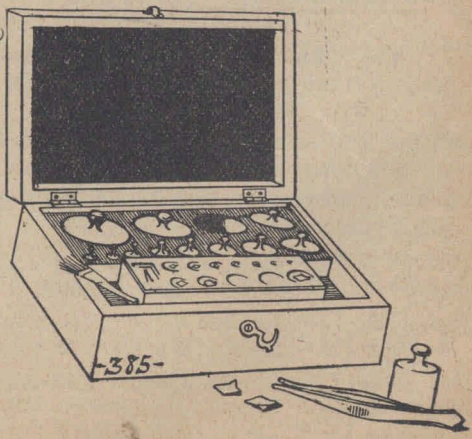
N. B.-Las ilustraciones marcadas con **J. F.** han sido copiadas del libro PHYSIKALISCHE TECHNIK de los Dres. J. Fricks y Otto Lehmann (Ed. F. Vieweg) *Brunswick:* Alemania.

14.° – Caja de pesas

632.– Caja de pesas es la caja que contiene la colección de pesas de una balanza (fig. 385).

Acompañan a las pesas unas pinzas de Bruxelas.

Estas pinzas, cuyas extremidades son de hueso u otra sustancia más blanda que el bronce, sirven para colocar y quitar las pesas.



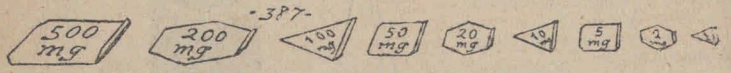
No se deben tocar las pesas con las manos, porque su grasitud y humedad las oxida, afeándolas y cambiando su verdadero peso.

633. – Las pesas de una caja de precisión son de tres categorías: las CILÍNDRICAS, las LAMINARES y los JINETILLOS.

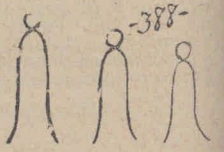
Las *cilíndricas* son de bronce (fig. 386); pero las de alta precisión son de platiniridio o de cuarzo, y sirven para valuar desde *1 gramo* hasta varios kilos, variando el límite superior según la carga máxima de la balanza.



Las *laminares* son generalmente de platino (fig. 387), y sirven para medir las *fracciones de gramo* hasta el miligramo.



Los **jinetillos** o RÉITERES son alambrecitos de platino (fig. 388), doblados en forma de horqueta de honda, a propósito como para colocarlos a caballo de la *regla de jinetillos* ya descrita.



El ojal superior sirve para colocar, cambiar o movilizar los jinetillos mediante una varilla terminada en un gancho, ya descrita en su lugar.

634. – Las magnitudes adoptadas para las colecciones de pesas forman escalas constituidas por los siguientes números:

1 – 2 – 5 – 10 – 20 – 50 – 100 – 200 – 500...

en las que se repiten unas pesas, a fin de que, yendo de menor a mayor, cualquiera de las pesas (exceptuando las dos primeras) puede ser sustituida por un grupo formado por pesas que le preceden.

a) 1 – 2 – **2** – 5 – 10 – **10** – 20 – 50 – 100 – **100** – 200 – 500 – 1000 – **1000**....

b) 1 – 1 – **1** – **1** – 2 – 5 – etc. (como el anterior)

c) 1 – 2 – **2** – 5 – 10 – 20 – **20** – 50 – 100 – 200 – **200** – 500

Mendeléiéff propuso este otro sistema que es matemáticamente exacto, puesto que no repite pesas, y es más práctico:

1 - 2 - 3 - 4 - 10 - 20 - 30 - 40 - 100 - 200 - 300 - 400 - 1000 ....

A pesar de las innegables ventajas de este sistema, aún no se ha generalizado, habiendo salido victoriosa la rutina, en esto como en otras muchas cosas.

15.º – Manejo del granatorio.

635. – El alumno de Física debe aprender a manejar la balanza en debida forma; y el *granatorio*, con su sistema de inmovilización simultánea de astil y platillos, se presta a una manipulación sencilla, que elimina el balanceo.

636. – PROCEDIMIENTO –

1.º El granatorio se carga y descarga en la posición de "DESCANSO".

El astil se eleva SOLAMENTE PARA PROBAR si hay equilibrio, o para ver EN QUÉ PLATILLO HAY MÁS CARGA.

2.º El astil se levanta y baja suavemente y lo menos posible.

El granatorio no es un juguete, sino un aparato de precisión, y para él ningún cuidado es nimio.

3.º Se comienza probando con una pesa mayor que la que se supone necesaria para equilibrar el objeto que se está pesando.

Se prueba, y si pesa más que el cuerpo, se sustituye por la inmediatamente inferior.

Se vuelve a probar, etc.

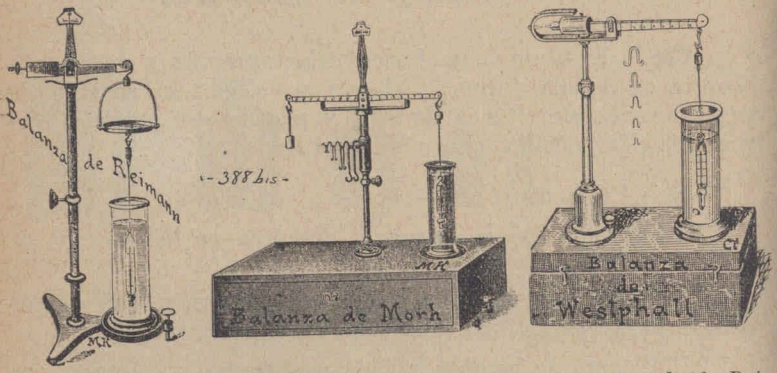
4.º – Encontrada la pesa inmediatamente inferior al peso del cuerpo, se añade la pesa que sigue en orden descendente.

Se prueba, y si el cuerpo pesa menos que el conjunto de pesas, se sustituye la última pesa por la que le sigue, etc.

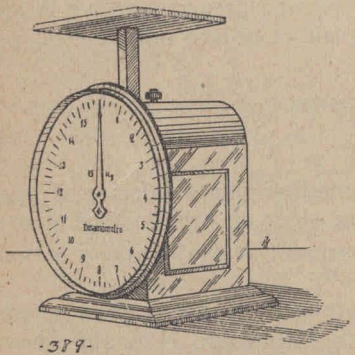
5.º – Procediendo así *ordenadamente*, desde la pesa mayor, se llega forzosamente al equilibrio empleando el menor tiempo posible.

16.º – Otras clases de balanzas.

637. – Además de los tipos fundamentales descritos, existen otras *balanzas derivadas*; las cuales se construyen para fines determinados, tales como el de determinar el peso específico de los cuerpos.



En su lugar las describiremos, limitándonos aquí a citar la de Reimann, la de Morh y la de Wespphall (fig. 388 bis), siendo la primera de ellas, una balanza de sustitución, *mientras que las dos últimas son aplicación del sistema de jinetillos.*



-389-

638.– Fuera de las BALANZAS DE PALANCA, existen otros instrumentos de medida llamados impropiamente BALANZAS, pues que en rigor son DINAMÓMETROS.

639. – En primer lugar se hallan los DINAMÓMETROS comunes, de los cuales algunos tienen aspecto externo de balanza. (fig. 389).

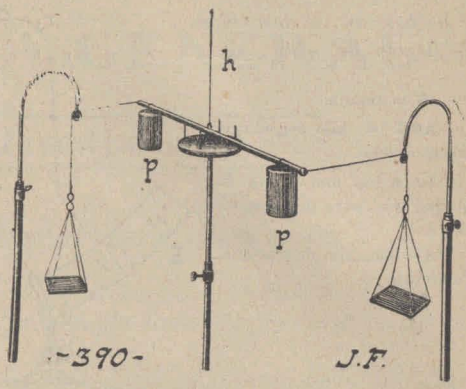
640.– Siguen las BALANZAS DE TORSIÓN, que son *dinamómetros* basados en la torsión de los hilos (fig. 390).

Un ejemplo lo tenemos en la BALANZA DE COULOMB que sirve para medir la fuerza de atracción o repulsión que ejercen mutuamente dos esferitas electrizadas.

641. – Las **micro-balanzas** son dinamómetros destinados a medir pesos muy pequeños con suma exactitud.

Las principales micro-balanzas, llamadas también *balanzas microquímicas* son la de NERNST Y RIESENFELD y la de SALVIONI.

La primera es un *dinamómetro de torsión* y la segunda es un *dinamómetro de flexión*.



642. – MICROBALANZA DE NERNST Y RIESENFELD (fig. 391 y 392).

Fué inventada en 1903.

mn = hilo de cuarzo de unos 5 cm. de largo y de 12 μ de grueso, Es el *fulcro*.

BoAF = hilo de cristal de ½ mm. de espesor = *astil y fiel*.

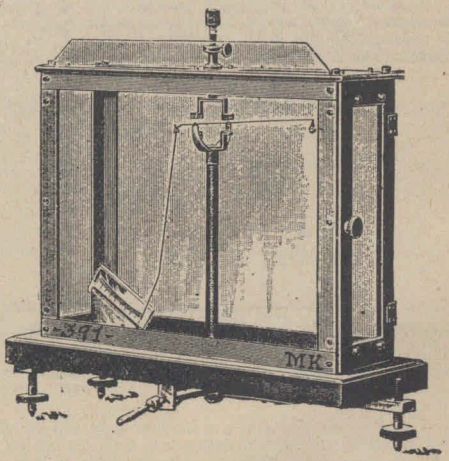
r = réiter fijo, para equilibrar el astil.

E = escala del fiel.

h = horquilla para limitar el movimiento del astil.

El astil puede ser también de platino.

El astil está soldado al fulcro **mn**, de modo que el equilibrio se obtiene mediante la elasticidad de torsión de dicho eje.



La escala **E** *debe ser corregida antes de cada pesada, lo cual se obtiene corriéndola a derecha o izquierda e inclinándola lo suficiente como para que coincidan los dos puntos extremos con las medidas reales.*

El índice de sensibilidad de estas balanzas ha llegado hasta gr. 0,000.000.03.

643. – Microbalanza de Salvioni (fig. 393).

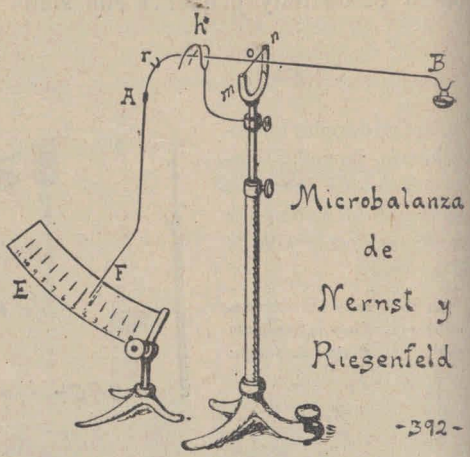
Se basa en la elasticidad de flexión del astil

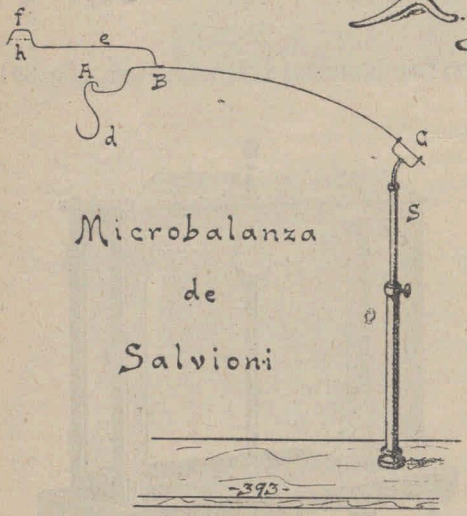
S = soporte.

ABC = hilo delgado de cristal = astil.

En **A** hay una punta de platino que sirve de suspensión a **d**.

d = ganchito de platino = *portacarga*.





ef = hilo rígido de cristal (es el *fiel*).

h = hebra de telaraña.

El fiel se adapta poco antes de la pesada *valiéndose para ello de una porción muy pequeña de lacre.*

Para apreciar el descenso de **h** se recurre a un microscopio horizontal.

FISICA GENERAL

IV.º — Investigación Física [1]

1.º – Métodos de investigación.

644. – La Física, como todas las Ciencias Naturales, tiene un plan de investigación completamente opuesto al de las Matemáticas puras.

Éstas plantean POSTULADOS *o* suposiciones más o menos probables; *y basándose en ellas, por simple raciocinio van creando todo un sistema de conocimientos, que son tan ciertos como los postulados que los originaron.*

En cambio las Ciencias Naturales, máxime las especulativas tienen como base de su estudio el MÉTODO EXPERIMENTAL.

Este método no es exclusivo de las Ciencias Naturales, ni es el único adoptado por ellas, puesto que en Matemáticas, especialmente en Geometría, recurrimos a la experimentación más a menudo de lo que sospechamos. En cambio, muchas de las conquistas de la Física y la Química se han obtenido por medio de procedimientos puramente matemáticos.

645. – Toda **investigación** científica se propone DESCUBRIR, ESTUDIAR y EXPLICAR cosas y hechos.

En la Física se obtiene este fin practicando los tres métodos siguientes: INDUCCIÓN EXPERIMENTAL, HIPÓTESIS y CÁLCULO MATEMÁTICO.

Estos tres medios, se adoptan por separado, o combinados entre sí, según los casos.

---

(1) Nos vemos obligados a desarrollar este tema, aunque no figure completo en ningún programa; y esto por tres razones:

a) Porque en el programa de la Escuela Superior de comercio hay toda una bolilla correspondiente a él; sin contar con que en el de Química de 3er. Año se exige también mucho a este respecto.

b) Porque parte del material que aquí incluímos a menudo forma *tema ocasional* de preguntas de examen, que no porque sean inoportunas, dejan de desconcertar a los alumnos al mismo tiempo que dan a ciertos profesores quisquillosos, ocasión de *hacer filosofía*, a despecho del interés de los examinados.

c) Porque en el curso del texto queremos andar sin empachos, hablando con la terminología que adoptamos, sin tener que hacer a cada paso aclaraciones que nos libren de las malas interpretaciones que podrían ocurrírseles a los que no saben ser prudentes y exactos en el manejo del léxico científico.

2.° – Inducción experimental.

Inducir es pasar de la observación de varios casos particulares semejantes, a una regla general que comprenda dichos casos y otros muchos casos posibles, análogos a los primeros.

Así, si veo que una liebre come hierbas y se niega a comer carne, y contemplo el mismo hecho en otras muchas liebres, sin serme posible dar con una excepción, concluiré planteando la siguiente sentencia: «Las liebres son herbívoras».

La *inducción física* es EXPERIMENTAL porque se basa en casos reales, o sea en el caudal de conocimientos que nos puede procurar la *experiencia*.

646. – Proceso de la inducción experimental. —

La inducción experimental consta de los siguientes trabajos: OBSERVACIÓN, EXPERIMENTACIÓN, planteo de una SENTENCIA PROVISORIA, COMPROBACIÓN y CORRECCIÓN de la sentencia.

Decimos que **observamos** cuando examinamos un fenómeno que se produce *libremente* en el mundo exterior.

La palabra "libremente" *significa que para que haya* OBSERVACIÓN *se requiere que el fenómeno sea espontáneo, sin que nosotros le añadamos, quitemos o modifiquemos condiciones.*

Ej: Galileo en la catedral de Pisa vió que una lámpara, debido al golpe inadvertido del sacristán, oscilaba.

OBSERVABA el vaivén de ese péndulo improvisado.

647. – Decimos que **experimentamos** cuando colocamos un objeto en condiciones semejantes a las que tenía en el momento de la observación, y examinamos los fenómenos que allí se producen, para compararlos con los que se produjeron en el momento de la OBSERVACIÓN.

Ej: Galileo en su laboratorio desvió *a propósito* péndulos, de tamaños y pesos diversos.

El tamaño, la sustancia y el peso en este caso no fueron condiciones casuales, sino *intencionales*.

NO SIEMPRE ES NECESARIO QUE PRECEDA LA OBSERVACIÓN A LA EXPERIMENTACIÓN.

En muchos casos a los sabios se les han ocurrido preguntas como ésta: «¿Qué sucedería si al tal objeto se le colocara en este sistema de condiciones?»

Y de la pregunta pasaron a la experimentación, preparando fenómenos que jamás habían tenido lugar en la naturaleza.

Como ejemplo: el descubrimiento de sinnúmero de sustancias químicas, especialmente entre las colorantes.

648. – Como consecuencia de la observación y la experimentación, se llega al PLANTEO DE UNA REGLA O LEY.

Pero esta regla o ley no puede plantearse de inmediato, en forma definitiva; porque al principio el investigador desconoce suficientemente las relaciones que existen entre el fenómeno y las condiciones necesarias para que se produzca.

Las condiciones que acompañan un fenómeno pueden ser: a) *esencialmente necesarias*, b) *de necesidad relativa* (en cuanto que pueden ser sustituidas por otras sin modificar el fenómeno, por lo menos en su aspecto fundamental), c) *concomitantes* (que acompañan a otras condiciones, sin influir en el fenómeno que estamos estudiando).

Además las condiciones necesarias pueden serlo: a) como *iniciadoras* (en cuanto que deciden a que comience el fenómeno), b) como *conservadoras* (en cuanto que contribuyen a que se complete o prolongue el fenómeno comenzado), c) *estorbadoras* (en cuanto que coartan la producción del fenómeno desviando su rumbo normal o disminuyendo su alcance).

Ej.: Galileo en la Catedral midió con el reloj, el tiempo que tardaba el vaivén del péndulo al comenzar las oscilaciones; y volvió a medirlo más tarde, *cuando ya el péndulo se movía con menos amplitud.*

Y descubrió....

QUE EL *"período"* DE OSCILACIÓN HABÍA PERMANECIDO CONSTANTE.

LÉXICO — **Período** = *tiempo que transcurre durante un vaivén del péndulo o de cualquier otro objeto que oscila.*

Un sólo ejemplo pudo bastar *a Galileo para plantear la* LEY PROVISORIA *del* isocronismo del movimiento pendular; *que se expresa así:*

«EL PERÍODO DE LA OSCILACIÓN ES CONSTANTE EN CADA PÉNDULO».

649. – Como se ve por el ejemplo de Galileo:

Para plantear reglas o leyes provisorias, hay que valerse de los recursos que nos presta la inteligencia que son: el RACIOCINIO y la INTUICIÓN.

Raciocinio *es un trabajo sistemático de la inteligencia, que consiste en llegar al conocimiento de verdades desconocidas, mediante la comparación de otras verdades ya descubiertas.*

Intuición *es un trabajo más o menos inconsciente de la inteligencia, por cuyo medio se llega a suponer de improviso una verdad, sin que uno pueda saber a ciencia cierta, qué razones lo movieron a plantear esa suposición.*

La intuición, como aquí la explicamos, es lo que en criollo denominamos «PÁLPITO», y que en español se llama «CORAZONADA». Es esa «CHISPA» que encendió la musa de la ciencia, a su momento oportuno, en el cerebro de muchos sabios desde que se escuchó el «*eureka*» de Arquímedes hasta que sonó el clarín revolucionario de Einstein.

650. – Planteada la regla o ley provisoria, el investigador procede a **comprobarla.**

Para ello se vale nuevamente de la observación y experimentación, que le llevarán a una de las siguientes conclusiones:

a) La ley es totalmente cierta (*plena comprobación*).

b) La ley es fundamentalmente cierta, pero es inexacta (*comprobación acompañada de correcciones que amplían o restringen la letra de la ley provisoria*).

c) La ley se cumple sólo en algunos casos particulares (*es una forma inexacta de otra ley más amplia*).

d) La ley está equivocada (*abandono de la ley propuesta*).

e) No se ha podido comprobar la verdad o error que puede encerrar la ley (*es una ley dudosa, que no se puede explotar*).

651. – Comprobada una ley, pasa a formar parte de las conquistas científicas, y se explota científica o técnicamente, según que se aplique al estudio teórico o a los trabajos de la vida práctica.

Y hay muchas leyes que se explotan en ambos órdenes de la actividad humana.

652. – Para terminar con el ejemplo de Galileo, diremos que:

La comprobación corrigió la ley del isocronismo en la forma siguiente: En cada péndulo las oscilaciones son sensiblemente isócronas cuando la amplitud no excede de los 4° ó 6°.

Y las experiencias que se efectuaron para comprobar el isocronismo del péndulo, sirvieron para descubrir estas otras leyes.

Ley de las masas. – No cambia el período de las oscilaciones de un péndulo, aunque se cambie la materia o el peso de su lenteja.

Ley de las longitudes. – Los períodos de las oscilaciones de varios péndulos son inversamente proporcionales a las raíces cuadradas de sus longitudes.

3.° - Definición, regla, ley.

653. – **Definir** es: decir *lo que es* una cosa.

Así si un niño pregunta a su padre: «*Qué es un lapiz*», y éste le contesta: «*Es lo que usa Miguel cuando escribe*»; la respuesta del padre será una definición

654. – Condiciones de una definición. — Debe ser *clara, exacta, completa y concisa.*

La mayoría de los autores modernos se distinguen por desentenderse de una o varias de estas condiciones, y por dar exagerado valor a las restantes.

a) Primera condición: la **claridad**. — El que define, tiene derecho a usar cualquier juego de palabras, con tal que se haga entender bien.

LA HABILIDAD ESTÁ EN ENCONTRAR EL JUEGO MÁS CLARO.

PERO HAY QUE ENTENDERLO BIEN: LO QUE ES CLARO PARA UN CIENTÍFICO, A MENUDO ES MUY OSCURO PARA UN PRINCIPIANTE.

Por eso se equivocan los que pretenden que un alumno de los Cursos Secundarios, defina como un estudiante universitario; y que éste defina como Poincaré, Einstein, Rey Pastor, etc., que son SABIOS y no ESTUDIANTES.

b) Para que una definición sea **exacta** se requiere que sirva para distinguir el objeto definido, de todos los demás.

Así no sería exacta la definición que dió el papá a su hijo (en el ejemplo precedente), si Miguel acostumbrara escribir con lápiz y con péñola.

c) Una definición es **completa**, cuando contempla todos los casos posibles en forma tal, que no pueda haber casos particulares del objeto definido, que queden eliminados por la definición.

Así, si digo que: «MESA *es una tabla sostenida por cuatro patas, y que se usa para colocarle encima las vajillas y alimentos»; doy una pésima definición, porque* hay mesas de tres y de cinco patas (*y aun de menos, y de más*), *y porque* hay mesas que se usan para otras muchas cosas *en nada relacionadas con la comida.*

d) Para que una definición sea **concisa** se requieren tres cosas:

1.° Que conste de las palabras estrictamente necesarias para su enunciado (numérica y cualitativamente).

Entre estas dos definiciones: «*Adjetivo es la parte de la oración que....*» y «*Adjetivo es la palabra que ....*», debemos quedarnos con la segunda, aun cuando más tarde debamos sustituir el término "*palabra*" por el término "*expresión*" para que la definición sea completa.

2.° Que no encierre más ideas que las que se necesitan para distinguir el objeto definido, de los demás.

Entre estas dos definiciones: «*Adjetivo es la palabra variable que....*» y «*Adjetivo es la palabra que....*», es más propia la segunda, porque no está la esencia del adjetivo en ser *variable* o *invariable*, sino en lo que se dirá luego.

3.° No debe ser DESCRIPTIVA, perdiéndose en enumerar una serie de cualidades particulares, que pueden ser suplidas por una cualidad general que comprenda a las particulares, o que sea causante de ellas.

Si decimos «*Adjetivo es la expresión que* CALIFICA, DETERMINA O ACLARA *el significado del sustantivo*» en vez de decir «*Adjetivo es la expresión que* **modifica** *el significado del sustantivo*», tenemos que reconocer que NO SABEMOS DEFINIR.

655. – Para que una definición sea EXACTA y COMPLETA sin dejar de ser CLARA y CONCISA debe ir acompañada de una serie de *definiciones transitorias*, QUE DETERMINEN BIEN cual es el significado de cada una de las palabras de la definición.

Si decimos que: «EXPRESIÓN *es toda palabra, frase u oración*», y que «MODIFICANTE *es la expresión que amplía, restringe o explica el significado de otra expresión*»; llegamos forzosamente a la única definición aceptable de ADJETIVO, diciendo que «*Es el modificante del sustantivo*».

Compárese este sistema *racional* de definir con el *ridículo* que pretenden introducir los gramáticos y matemáticos de la ESCUELA NEO-DEFINICIONISTA.

Aun cuando nos expongamos a malquistarnos con los NEO-DEFINICIONISTAS (gramáticos y matemáticos), es nuestro deber protestar contra la falta de criterio pedagógico o contra el abuso de los que desconociendo por completo la psicología de los alumnos de los cursos secundarios, y atropellando los dictámenes de la lógica natural, han pretendido suplantar los enunciados concisos, mediante descripciones kilométricas llenas de SUTILEZAS, con las que pretenden evadir el peligro de dar margen a INTERPRETACIONES ERRÓNEAS.

La definición no es la ciencia; es el memorándum de ella.

JAMÁS UNA DEFINICIÓN, LOGRARÁ POR SÍ, ASENTAR UN CONOCIMIENTO CIENTÍFICO.

La definición es un simple recurso para declarar que *suponemos* o *aceptamos como cierto* un conjunto más o menos numeroso de hechos o condiciones relacionadas entre sí.

EL INVESTIGADOR DEFINE PARA DECLARAR QUE DA POR TERMINADO DEFINITIVA O MOMENTÁNEAMENTE SU TRABAJO.

El investigador, además, recurre a definiciones anteriores, para hacer memoria de los resultados de otras investigaciones.

El técnico recurre a las definiciones para bosquejar en su cerebro una serie de conocimientos que le servirán para dar rumbo más o menos preciso a su trabajo.

El maestro define para hacer que el alumno vaya de poco a poco recorriendo el camino del investigador, ya sea haciéndole investigar, o ya simplemente haciéndole sabedor de las conclusiones a que se ha llegado con la investigación.

Y el alumno define para dar así al que le examina, una prueba de que ha llegado a entender y retener *suficientemente* lo que se le ha enseñado.

Ni el investigador, ni el técnico, ni el maestro, ni el alumno tolerarán el molesto andador que le proporcionan ESOS JUEGOS DE PALABRAS **plagados de considerandos y distinciones que supo dictar** EL RIDÍCULO MIEDO DE DAR LUGAR A FALSAS INTERPRETACIONES.

Los neodefinicionistas **creen** que han llegado al ideal de la definición EXACTA Y COMPLETA, cosa que aún no está demostrada; pero lo que no necesita demostración, porque es evidente, es que sus definiciones no son ni CLARAS, ni CONCISAS; y por lo tanto no son PRÁCTICAS. *No siendo prácticas, no son* ÚTILES.

¿Y entonces, para qué se devanan los sesos estos *vanguardistas* de la ciencia, si toda la trabazón de sus disquisiciones sintácticas y lexicológicas no ha vertido más claridad, y ha en cambio torturado infructuosamente el cerebro de los pobres alumnos, que son los únicos que se ven obligados (*ante el atropello de programas, textos y profesores*) A APRENDER **ad litteram** ESOS "DOGMAS" QUE DEBERÁN RECITAR EN LOS EXÁMENES PARA NO SER TILDADOS DE HEREJES POR LOS MIEMBROS DE LA INQUISICIÓN NEO-DEFINICIONISTA?

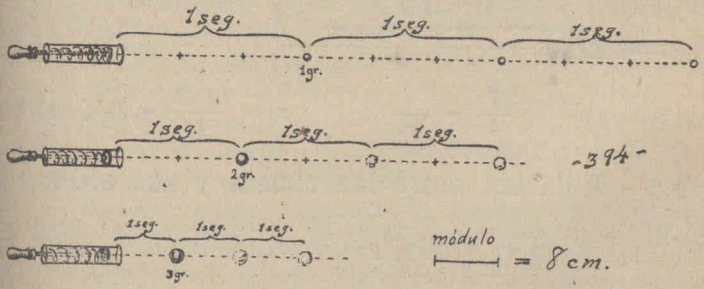
656. – Cuando expresamos la forma y condiciones con que se efctúa un fenómeno, estamos dando su **regla.**

Si decimos que, «Cuando se quita el soporte de un objeto, éste cae» *o que* «La caída de un objeto es rectilínea y vertical», *estamos dando* **reglas.**

Podemos pues decir que:

Regla es la *definición* de las condiciones o de la forma de un fenómeno.

657. – **Ley** es una regla que expresa la relación que hay entre un fenómeno y sus causas.



Así (fig. 394) si experimentando vemos que, dando UN MISMO EMPUJE *a tres bolitas cuyos pesos sean respectivamente 1 gr, 2 gr, 3 gr, las bolitas adquieren respectivamente las velocidades de 24 cm. por seg., 12 cm. seg. y 8 cm. seg.; plantearemos la* LEY *provisoria:*

«LAS VELOCIDADES QUE EL EMPUJE MOMENTÁNEO DE UNA MISMA FUERZA IMPRIME A DIVERSOS MÓVILES, SON INVERSAMENTE PROPORCIONALES A LA MASA DE DICHOS MÓVILES».

Hemos dicho «*provisoria*», porque una simple experiencia no puede servir para plantear una ley.

658. – Las leyes pueden ser de dos clases: CUALITATIVAS y CUANTITATIVAS.

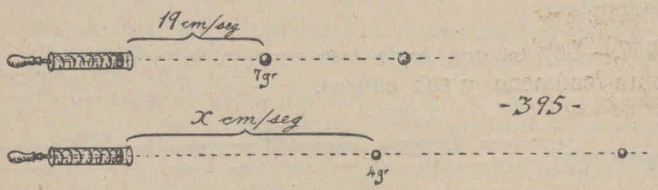
Es **cualitativa** la ley que declara que existe tal o cual relación entre la causa y su efecto, sin que nos enseñe a medir dicha relación.

Así, si decimos que "*Al empujar un cuerpo liviano, lo hacemos correr más ligero, que cuando empujamos un cuerpo pesado*", hemos enunciado una LEY CUALITATIVA.

659. – Es **cuantitativa** la ley que da la relación matemática que existe entre un fenómeno y las causas que lo producen.

Así, si decimos que: "*A igualdad de empuje, las velocidades adquiridas por el móvil son inversamante proporcionales a su masa*"; hemos enunciado una LEY CUANTITATIVA, porque podemos con ella resolver el siguiente problema:

PROBLEMA. – Empujando durante 2 segundos una bolita de 7 gramos, le imprimimos la velocidad de 19 cm. por segundo (fig. 395). ¿Qué velocidad imprimiremos a una bolita de 4 gr., si permanecen constantes la fuerza y el tiempo de empuje?



-395-

SOLUCIÓN $\frac{7}{4} = \frac{x}{19}$ $\quad x = \frac{19 \times 7}{4} = 33\frac{1}{4}$ cm/seg

4.° - Relación entre las causas y sus efectos

En este párrafo resumimos parte de los conceptos que figuran en la Introducción del TRATADO DE FÍSICA de *O. D. Chwolson*, referentes al tema que vamos desarrollando en esta parte de nuestro texto.

Importándonos más que la originalidad, la claridad, transcribimos las palabras del mismo autor, siempre que sea posible dentro del plan que nos hemos prefijado.

Y no siendo prudente ir molestando la vista del lector con continuas comillas que deslinden lo nuestro de lo de Chwolson, remitimos a la obra

citada a los que deseen conocer en su integridad el pensamiento del sabio profesor petrogradense.

660. – El conjunto de los fenómenos físicos, que caracterizan el mundo externo en un momento dado, resulta necesariamente del conjunto de fenómenos que tenían lugar en el momento precedente.

O sea: UN FENÓMENO **B** AISLADAMENTE, PROVIENE DE UN GRUPO DE FENÓMENOS **A**, QUE LE PRECEDEN.

En la relación que existe entre el fenómeno **B** y el grupo **A**, diremos que **A** es la *causa* de **B**, y que **B** es el *efecto* de **A**.

Nótese que acabamos de dar una definición CLARA y EXACTA de «CAUSA» y «EFECTO»; sin que nos interese averiguar si es *completa;* y advirtiendo desde ¡ya que es CONCISA *como explicación,* pero NO ES CONCISA *como enunciado.*

661. – Al considerar el fenómeno **B**, podemos proponernos el descubriniento del grupo de fenómenos **A**, o sea, podemos propornernos investigar la CAUSA de **B**.

Y designando el grupo **A** como causa del fenómeno **B**, admitimos que los demás fenómenos del mundo exterior (que suceden al mismo tiempo que el fenómeno **A**) forman un grupo de fenómenos **C** que no tiene relación alguna con el fenómeno **B**.

662. – Aquí debemos plantear dos sentencias que la experiencia asociada a la razón nos insinúa que son absolutamente CIERTAS:

1.° - Si un grupo de fenómenos *A* ha sido una causa de un fenómeno *B*, siempre que vuelvan a hallarse reunidos en igualdad de condiciones todos los fenómenos *A*, tendrá que reproducirse forzosamente el fenómeno *B*.

Pero esto no quiere decir que no puedan existir, además de **B**, *una serie de otros efectos simultáneos causados por el grupo* **A**.

La sentencia anterior, significa solamente que:

Si conocemos el grupo **A** y las relaciones necesarias, podemos predecir con absoluta certeza el fenómeno **B**.

2.° - Pero un mismo fenómeno *B*, puede en una ocasión ser efecto de un grupo *A* de fenómenos, y en otra ocasión ser efecto de otro grupo *A'*, diverso del primero.

Esto significa que:

Si basándonos en la existencia del grupo **A**, podemos con seguridad predecir la existencia del fenómeno **B**; en cambio, cuando presenciamos la existencia de **B**, no sabremos si está causado por el grupo **A**, o por otros grupos **A'**, **A''**, **A'''**, etc. que llamaremos EQUIVALENTES.

La Física, al estudiar los fenómenos y descubrir sus leyes, indaga:

1.° Cuáles son los únicos fenómenos **B** que pueden ser EFECTOS de un grupo dado de fenómenos **A**.

2.° Cuáles son los grupos **A** que pueden ser CAUSAS de un fenómeno **B**.

3.° De todos los grupos **A**, posibles como CAUSAS del fenómeno **B**, cuál es el grupo *más probable* para el caso particular que estamos estudiando.

663. – MEDIDA DE LA RELACIÓN ENTRE CAUSA Y EFECTO. — Todo fenómeno es una magnitud, porque puede producirse con mayor o menor intensidad.

Recuerde el alumno que:

Magnitud es todo lo que puede aumentar o disminuir.

664. – Si a un fenómeno **B** le corresponde una causa **A**, y esta causa es un grupo de fenómenos; podremos dejar inalterados todos los fenómenos **A**, menos uno, para ver como se modifica el fenómeno **B**.

En lo que sigue, llamaremos magnitud *B* el fenómeno **B**, y magnitud *A* el fenómeno que variará en el grupo **A**.

665. – El descubrimiento y valuación de una ley cuantitativa se hace del siguiente modo:

Para averiguar la relación cuantitativa entre *A* y *B*, es necesario experimentar de tal modo que la magnitud *A* pueda tomar sucesivamente una serie de valores diferentes, a consecuencia de los cuales la magnitud *B* también variará.

Además, *es necesario poder medir cada vez las magnitudes A y B*, es decir, determinar sus valores numéricos, que llamaremos *a*, *a'*, *a''*, *a'''*.. y *b*, *b'*, *b''* *b'''*.... respectivamente.

Para comodidad de expresión, y desentendiéndonos de las trabas del Algebra escolar, llamaremos «números *a*,» a los números, *a'*, *a''*, etc. y «números *b*,» a los números *b*, *b'*, *b''*, etc.

666. – Valuando en cada caso las dos magnitudes *A* y *B* obtendremos dos series de NÚMEROS CONJUGADOS.

EJEMPLO: En el caso de un empuje invariable, dado a móviles de distinta masa:

Números *a* (Masa del móvil)	5 gr.	7 gr.	10 gr.	15 gr.	22 gr.	45 gr.	60 gr.
Números *b* (Velocidad adquirida)	48 cm/seg	34,3 cm/seg	24 cm/seg	16 cm/seg	11 cm/seg	9,33 cm/seg	4 cm/seg

NOTA. – 16 cm/seg. se lee "16 CENTÍMETROS POR SEGUNDO", y significa que: **el móvil recorre *16* cm. por segundo.**

667. – Se dice que dos series de números son **conjugadas,** cuando a cada número de la serie *A* le corresponde un solo número de la serie *B*, y viceversa.

La serie es CRECIENTE *cuando va de mayor a menor; y* DECRECIENTE, *en caso contrario.*

668. – Dos series conjugadas tienen RELACIÓN DIRECTA, cuando ambas son crecientes o ambas decrecientes.

EJEMPLO. – En el caso de una fuerza aplicada a un móvil durante un tiempo más o menos largo:

Números *a* (Duración del empuje)	2 seg.	5 seg.	10 seg.	12 seg.	30 seg.	47 seg.	80 seg.
Números *b* (Velocidad adquirida)	6 cm/seg.	15 cm/seg.	30 cm/seg.	36 cm/seg.	90 cm/seg.	141 cm/seg.	240 cm/seg.

669. – Dos series conjugadas tienen RELACIÓN INVERSA cuando al crecer una, decrece la otra, y viceversa.

Como ejemplo, el de la relación entre la masa y la velocidad adquirida (**666**).

670. – Toda ley cuantitativa es la consecuencia del descubrimiento de un par de series conjugadas en las que todos los números *b* pueden deducirse de sus correspondientes números *a* POR MEDIO DE UNA SOLA Y ÚNICA OPERACIÓN ARITMÉTICA, que será la misma para cuando queramos pasar del número a' al número b', que cuando quisiéramos pasar del número a^{IV} al número b^{IV}.

En Matemáticas esto se expresa diciendo que *b* es una FUNCIÓN de *a*, y se representa así

$$b = f(a)$$

Pero entendamos bien: **f** *no es un factor que multiplica* a *a;* **f** significa solamente que:

Podemos pasar de cualquier número *a* a su conjugado *b*, mediante una misma operación, que puede ser sencilla como la siguiente:

$$b = 5 + a$$

o complicada como la siguiente:

$$b = \left[\left(\frac{7 + \sqrt{2a}}{3}\right) + 6a\right]^8 - 3$$

Más adelante ampliaremos el concepto de FUNCIÓN, *cuyo conocimiento es de suma importancia en la Física.*

5.° - Relación entre los co-efectos.

671. – A veces no conocemos si entre un fenómeno **B** y un grupo de fenómenos **A** existe la relación de causa a efecto; o si más bien **B** y los fenómenos **A** son CO-EFECTOS o *efectos colaterales* de una misma causa **X**, *desconocida*.

672. – *Llamando* **B'** *a los co-efectos de* **B**, *y dando a* **X** *el nombre de* **A** *para conservar a esta letra el valor simbólico de "causa", diremos que:*

Aun en el caso de co-efectos, la experimentación puede hacernos descubrir leyes que relacionen los fenómenos **B'** con el co-efecto **B** que estamos estudiando.

673. – De lo anterior se desprende que hay dos clases de leyes: PRIMARIAS Y SECUNDARIAS.

Primarias son las leyes que relacionan las causas con sus efectos.

Secundarias o DERIVADAS son las que relacionan entre sí los efectos de una misma causa.

6.° - Inmutabilidad de las leyes físicas.

674. – Hay sabios como Poincaré que han creído demostrar que las leyes son inconstantes; pero los mismos argumentos de que ellos se valen para demostrar que *las leyes no son rigurosas*, son argumentos que demuestran que *en sí son rigurosamente constantes*, aunque en cada caso los fenómenos quieren presentárnoslas como *algo inconstantes*.

Veamos el razonamiento de Chwolson, del que se desprende que la inconstancia de hecho no es más que consecuencia de nuestra incapacidad de medir *todas* las causas **A**, que contribuyen a producir cada fenómeno **B**.

675. – LAS LEYES FÍSICAS SON *leyes de la naturaleza*, Y COMO TALES, CUANDO ESTÁN FORMULADAS CORRECTAMENTE DEBEN CUMPLIRSE CON RIGOR MATEMÁTICO.

De las leyes de la naturaleza decimos que son INMUTABLES, *y que si en alguna ocasión presenciáramos su derogación, diríamos que* SE HA EFECTUADO UN MILAGRO.

676. – Pero si estudiamos de más cerca los fenómenos físicos, podemos convencernos que NO HAY CASI NINGUNA LEY FÍSICA QUE SE VERIFIQUE EXACTAMENTE.

En casi todos los casos presenciamos desviaciones *más o menos grandes en lo relativo a estas leyes.*

Además estudiando los fenómenos, encontramos un gran número de leyes que nunca se han verificado más que con una aproximación grosera, de manera que serán REGLAS, pero no verdaderas *leyes*.

¿Y POR QUÉ SUCEDE ASÍ?

La razón es la siguiente.

A pesar de la sencillez incontestable de las causas de todos los fenómenos físicos, éstos son muy complicados en el conjunto de fenómenos **A** que intervienen en la producción de cada fenómeno **B**.

LAS LEYES FÍSICAS SE REFIEREN AL CASO IDEAL, POR EL QUE EN LA PRODUCCIÓN DE UN FENÓMENO **B** INTERVINIERA UN SOLO FENÓMENO **A** VARIABLE, ACOMPAÑADO DE OTROS FENÓMENOS **A'**, QUE FUERAN CONSTANTES.

677. – Por lo tanto, en cada caso particular, la ley correspondiente sufre *desviaciones*, que unas veces son INSIGNIFICANTES y otras veces adquieren GRANDES PROPORCIONES:

1.° - Cuando las desviaciones son *insignificantes*, nos hallamos frente a un fenómeno **B** en cuya producción interviene un fenómeno **A** *predominante*, el cual está acompañado de un grupo de fenómenos **A'**, que al lado del fenómeno **A** juegan un papel insignificante.

Esta es la explicación de Chwolson; pero también puede acontecer que en la producción del fenómeno **B**, *concurran fenómenos* **A'** *y fenómenos* **A''**, *que se compensan mutuamente. Su influencia no se notará cuando*

$$A' \text{ es sensiblemente igual a } A''.$$

Pero cuando $A' \gtrless A''$ (en forma extraordinaria) *presenciaremos* DESVIACIONES ENORMES.

2.° - Cuando las desviaciones son *enormes*, nos hallamos frente a un fenómeno **B** en el que los fenómenos **A'**, tienen magnitudes extraordinarias en comparación con el fenómeno fundamental **A**.

678. – Podemos por consiguiente corregir el concepto que habíamos emitido al decir, que "todo fenómeno se rige por una ley *que determina la relación existente entre él y sus causas*" diciendo que:

PARA TODO FENÓMENO **B** EXISTE UN SISTEMA DE LEYES QUE DETERMINAN POR SEPARADO LA RELACIÓN QUE **B** TIENE CON CADA UNA DE SUS CAUSAS INDEPENDIENTES **A**.

Cuanto mayor es el número de fenómenos **A** independientes, tanto más complicado es el sistema de leyes que rigen al fenómeno **B**. Por eso muchas veces lo que llamamos LEY de un fenómeno es simplemente una *regla* que podemos seguir para calcular el fenómeno **B** con alguna aproximación.

7.° – División de las leyes.

679. – Ya las hemos dividido en: CUALITATIVAS y CUANTITATIVAS **(658.)**

Otros autores llaman CAUSALES *a las que nosotros hemos denominado* cualitativas; *y* MODALES *a las* cuantitativas.

Esta clasificación de las leyes en *causales* y *modales* no tiene rigor científico, porque hay leyes que estudian la relación de causa a efecto y leyes que estudian la de los coefecto; y tanto las unas como las otras pueden ser más o menos indeterminadas (leyes cualitativas), o matemáticamente calculadas (leyes cuantitativas).

Por otra parte, si bien se tiene en cuenta, hay leyes modales indecisas (meramente cualitativas), y las hay bien definidas (netamente cuantitativas).

680. – OTRA CLASIFICACIÓN IMPORTANTE. – Las leyes son de dos categorías: GENERALES o *primarias* y PARTICULARES o *derivadas.*

Las **primarias** (*generales* o *fundamentales*) no se deducen de otras leyes, y reciben por ello el nombre de **principios.**

Los PRINCIPIOS *son deducciones directas de la experimentación.*

Las leyes **derivadas** (*particulares*) son deducciones de una o más leyes generales, y son las que se refieren a fenómenos determinados.

En toda ciencia los principios son muy pocos en proporción con el número de leyes particulares.

8.° - Hipótesis y teorías.

681. – Dijimos que el plan general de la Física se sintetizaba en estas tres palabras: DESCUBRIR, ESTUDIAR y EXPLICAR.

Todo lo que hemos expuesto hasta aquí se refiere al trabajo de DESCUBRIR y ESTUDIAR. Veamos lo que se refiere a lo tercero.

682. – Cuando queremos explicar un fenómeno **B**, en primer lugar buscamos *cuáles son los grupos* **A** *de causas posibles*; y en segundo lugar *procuramos averiguar cuál de todos los grupos* **A** *es el más probable.*

Este trabajo concluirá con una o más sentencias, que reciben el nombre de HIPÓTESIS.

Advertimos aquí, que a menudo con la palabra "**hipótesis**" designamos lo que en otro lugar hemos denominado LEY TRANSITORIA. Tendrá pues, la palabra **hipótesis** varios significados algo semejantes, y que exponemos a continuación.

683. – Etimológicamente, **hipótesis** significa SUPOSICIÓN.

En Lógica y en Matémáticas conserva este significado general, y se aplica especialmente a la primera parte de un juicio o teorema.

En Lógica y en Matemáticas son sinónimos de **hipótesis,** las palabras "**premisa**" y "**antecedente**".

684. – En Física y Química, la palabra *hipótesis* tiene dos significados: uno ACOMODATICIO y otro CLÁSICO:

Significado acomodaticio. – **Hipótesis** es una ley provisoria que se plantea durante la experimentación para comprobarla, corregirla o suplirla por la ley real.

A esta categoría de suposiciones, la llamaremos HIPÓTESIS DE ESTUDIO.

Significado clásico. – **Hipótesis** es la suposición de la existencia de una ENTIDAD FÍSICA que determina la producción de una o más clases de fenómenos.

A esta segunda categoría de suposiciones la denominaremos HIPÓTESIS CIENTÍFICAS o simplemente HIPÓTESIS.

685. – La frase ENTIDAD FÍSICA requiere explicación, y diremos que: *Para abreviar el lenguaje, llamaremos* **entidades** *a las sustancias o a los fenómenos, o a los grupos de fenómenos, o a la relación existente entre varios fenómenos.*

EJEMPLOS: *Los físicos supusieron que existe el* ÉTER, *como causa, soporte o vehículo de muchos fenómenos.*

En este caso la **hipótesis** supone la existencia de una sustancia.

En otros casos se supone la existencia de un fenómeno **A**, causante del fenómeno **B**.

Otras veces se supone la existencia de un sistema de fenómenos **A**, que dan por resultado el fenómeno **B**.

Por fin en otros casos se supone la existencia de una ley o relación entre el grupo **A** y su consecuente fenómeno **B**.

686. – Cuando hablamos de hipótesis, generalmente nos referimos a las HIPÓTESIS CIENTÍFICAS, con exclusión de las HIPÓTESIS DE ESTUDIO; pero los mismos autores que declaran referirse a aquéllas, se olvidan más tarde de ello, y hacen confusiones de las que se derivan sus criterios incoherentes en asunto de tanta importancia.

En los renglones que siguen a continuación, nos referimos tan sólo a las hipótesis científicas.

687. – CONDICIONES QUE DEBE LLENAR UNA HIPÓTESIS.

1.° Debe ser POSIBLE, que es lo mismo que decir *verosímil.*

No puede, por lo tanto, hallarse en contradicción con los hechos comprobados.

2.° Debe ser GENERAL; o sea, debe abarcar el mayor número posible de fenómenos.

3.° Debe ser SENCILLA, porque en la conciencia humana está profundamente arraigada la convicción de que las causas fundamentales de los fenómenos son en extremo sencillas.

Y además, porque uno de los fines primordiales de las hipótesis es el de poder reducir a pocos casos generales el sinnúmero de casos particulares que se ofrecen a nuestra experimentación.

4.° Debe ser COMPROBABLE; o sea, es necesario que podamos sacar de ella un gran número de consecuencias *reales*.

688. – PAPEL DE LAS HIPÓTESIS EN LA CIENCIA. — Sin hipótesis, *en el sentido amplio de la palabra*, es decir, sin suposiciones, no puede concebirse ningún progreso en la Ciencia.

Cuanto mayor es el número de hipótesis en una ciencia, tanto mayor es el progreso de la misma.

Claudio Bernard dijo: «Una idea anticipada o una hipótesis, es el punto de partida necesario para todo razonamiento experimental; y sin ella no se podría hacer ninguna investigación, ni instruirse».

689. – Pero cada hipótesis debe tener una acción pasajera y cuanto antes desaparezca, tanto mejor.

La aparición de una hipótesis buena, puede hacer progresar considerablemente la Ciencia; pero la desaparición de una hipótesis tiene mucha mayor importancia.

690. – CÓMO DESAPARECEN LAS HIPÓTESIS. — Una hipótesis puede desaparecer de tres maneras: 1.° demostrándose su *certeza*, 2.° demostrándose su *falsedad* o su *inverosimilitud* 3.° sustituyéndose por otra hipótesis más práctica.

1°. – Cuando se demuestra que una hipótesis es CIERTA, *deja de ser hipótesis y pasa a la categoría de las* VERDADES CONQUISTADAS.

2.°–Se demuestra la falsedad de una hipótesis, cuando se descubren contradicciones entre ella y los fenómenos que se estudian con más rigor que cuando se formuló la hipótesis.

En otros casos la contradicción aparece cuando se descubren nuevos fenómenos que hacen inadmisible la hipótesis en cuestión.

3.°--En la evolución de las hipótesis, se busca la practicidad de dos maneras:

a) Sustituyendo hipótesis complicadas, por otras más sencillas.

b) Tratando de refundir varias hipótesis en una sola, puesto que a menudo la complicación de un estudio resulta de la *falta de intuición*, que hace que se atribuyan a causas diversas, efectos que brotan de una misma causa fundamental.

691. – HIPÓTESIS METAFÓRICAS. — Llamamos así a las comparaciones que se hacen para poder explicar en forma más expedita fenómenos cuya naturaleza íntima desconocemos o que nos cuesta explicar en forma práctica.

Ej.: Suponemos que en el circuito eléctrico hay una *corriente* en todo comparable a la del agua en las cañerías.

692. – Las HIPÓTESIS METAFÓRICAS son muy cómodas; máxime desde el punto de vista didáctico; pero no debe dárseles más valor que el que tienen las metáforas en la conversación.

Hay examinadores que se creen con derecho de fallar sobre esta clase de hipótesis, aceptando unas y estigmatizando otras.

Los recursos didácticos de un profesor, y aún los que se les ocurren a los mismos alumnos, deben ser respetados por los que no quieren exteriorizar su ignorancia que les hace desconocer el verdadero valor de las hipótesis.

Leyendo a Poincaré, acabamos con que TODA HIPÓTESIS ES UNA METÁFORA CUYA ÚNICA FUNCIÓN ES LA DE PERMITIRNOS QUE HABLEMOS CON SOLTURA AL REFERIRNOS A ENTIDADES DESCONOCIDAS O DIFÍCILES DE DEFINIR.

¡Un alumno fué descalificado, porque dijo que la electricidad dinámica era un flúido!

¿Y quién nos asegura que no lo es? – ¿No podría ser un flujo de electrones?

¿Y aun cuando supiéramos a ciencia cierta que **no es flúido**; ¿puede privarse al alumno del derecho de recurrir a metáforas como recurrimos todos, aun en las conversaciones más serias?

¡Cuántas pedanterías se han ocultado bajo el disfraz de **escrupulosidad científica**!

693. – **Teoría** es un sistema de conocimientos que se desprende de una o más hipótesis relacionadas con los hechos reales.

Ej.: La **teoría atómica**, *tiene por base la hipótesis de la existencia de los átomos y moléculas, acompañada de un conjunto ordenado de hipótesis sobre las relaciones mutuas de los átomos y de éstos con los fenómenos a que ellos dan origen.*

694. – En toda teoría deben distinguirse dos clases de conocimientos: a) los que se refieren a la experimentación y al cálculo matemático, y son los que forman la CIENCIA CIERTA; b) los que se refieren a las hipótesis que sirven de eslabón o de ropaje a la ciencia cierta, y constituyen la CIENCIA PROBABLE.

La *ciencia probable* podrá variar con el andar del tiempo; pero la *cierta*, no.

A medida que evoluciona la *ciencia probable*, los investigadores se ven obligados a ir modificando el lenguaje con que exponen la *ciencia cierta*.

Por eso **nunca podrá darse el caso en que una teoría rigurosamente establecida** *se derrumbe. A lo más se modificará todo su lenguaje al despojarse de las hipótesis que modelaban su esqueleto, para revestirse de un nuevo sistema de hipótesis más concordes con la experimentación.*

Lo que aquí advertimos, quita razones a la ignorancia de los que aun hoy día hacen eco a expresiones anticuadas como ésta: «El día que caiga la hipótesis de la existencia de los átomos y moléculas se derrumbará todo el castillo de la teoría atómica»

LO ÚNICO QUE DESAPARECERÁ SON LAS PALABRAS *átomos*, *moléculas* Y SÍMILES, QUE SERÁN SUSTITUIDAS POR OTRAS PARA PODER SEGUIR HABLANDO.

9.° – Los postulados en la Física.

695. – **Postulado** es un principio que se da por cierto aun cuando no tenga a su favor más que razones de congruencia.

Ej.: el célebre POSTULADO DE EUCLIDES *por el que se supone que...*

696. – *Los varios significados de la palabra* POSTULADO.

1.° ETIMOLÓGICAMENTE, viene del verbo latino *postulare* (pedir, solicitar), y significa que una sentencia encierra algo que DESEAMOS QUE SEA ASÍ COMO LO HEMOS EXPRESADO.

Según este significado, al plantear un postulado declaramos nuestra impotencia para demostrar algo que la intuición nos indica que debe ser así.

2.° SIGNIFICADO ANTIGUO. — Es el mismo que le sugiere el etimológico.

Antiguamente se consideraba a los postulados como verdades semi-evidentes, de las que el sentido común nos impedía prescindir en la investigación científica.

3.° SIGNIFICADO MODERNO. — Para los modernos el postulado es un recurso especioso para salir del paso donde la investigación declara que no se puede averiguar nada.

Los modernos al dar este nuevo valor al postulado, han asentado las bases del escepticismo científico, el cual a pesar de sus inconvenientes desde el punto de vista filosófico, ha reportado mucha utilidad a la investigación positiva, puesto que ha eliminado la causa de interminables polémicas entre los que consideraban los postulados como axiomas, y los que los consideraban como teoremas que aun no se habían demostrado.

LÉXICO. – **Axioma** = Verdad evidente, que es innecesario demostrar.
Teorema = Sentencia que no aceptamos como cierta, sino en base de una demostración.

697. – Los postulados son para las Matemáticas, lo que las hipótesis para las Ciencias Naturales.

Toda la ciencia matemática se basa en un sistema de postulados.

Pero es un error suponer que no hay postulados en las Ciencias Naturales, y por ende en la Física.

Los modernos estamos demasiado pagados del POSITIVISMO a que nos conduce la experimentación. Pero no advertimos que muchas sentencias que se derivan del examen de los hechos, SON MERAS SUPOSICIONES INDEMOSTRABLES, a las que a menudo nos adherimos con un sincero "AMÉN" arrastrados por la osadía del que nos asegura que «NO DA COMO CIERTO SINO LO QUE ESTÁ COMPLETAMENTE PROBADO».

V°. — ABC de la Física matemática

1.° – Fórmulas y problemas.

698. – Toda ley cuantitativa se puede expresar mediante una fórmula.

Siempre que llegamos a saber valuar los números de la serie B *mediante el valor de sus conjugados de la serie* A, *conocemos la operación o conjunto de operaciones aritméticas que nos llevan de una* **a** *a su correspondiente* **b**.

Así en el caso del "*marginal* **668**":

Tiempo	Nros. *a*	2 seg.	5 seg.	10 seg.	12 seg.	30 seg.	47 seg.	80 seg.
Velocidad	Nros. *b*	6 c/seg.	15 c/seg.	30 c/seg.	36 c/seg.	90 c/seg.	141 c/seg.	240 c/seg.

después de varios ensayos con sumas, restas, multiplicaciones, etc., llegamos a descubrir que

$$6 = 2\times3$$
$$15 = 5\times3$$
$$30 = 10\times3 \text{ etc.}$$

de lo que colegimos que

$$\mathbf{b} = 3\,\mathbf{a}$$

Esta expresión general **b** = 3 **a**, que nos enseña a buscar el valor de cualquier número *b* en virtud del valor de su conjugado *a* es una FÓRMULA.

699. – **Fórmula** es una igualdad que nos enseña a buscar el valor de una cantidad basándonos en el valor de otras que se hallan numéricamente relacionadas con ella.

En otros términos, podemos decir que:

Fórmula es la representación de una ley cuantitativa mediante una igualdad.

700. – Las letras que hay en las fórmulas son *símbolos* que indican EL VALOR NUMÉRICO de las magnitudes que quisimos representar con ellas.

Para facilitar el trabajo mnemónico, se recurre generalmente a las iniciales del nombre de las magnitudes por ellas representadas.

Así en el ejemplo anterior, en vez de

$$b = 3a$$

queda mejor

$$v = 3t$$

v = (velocidad) t (tiempo).

701. – Las fórmulas pueden ser: PARTICULARES y GENERALES.

Es **particular** la fórmula que se aplica sólo a un conjunto de problemas en los que dejamos constantes una o más condiciones que admiten variación.

Así la fórmula $v=3t$ es particular, porque pertenece a problemas donde la MASA DEL MÓVIL y la FUERZA DE EMPUJE se han supuesto que son tales como para producir 3 cm./seg. de velocidad por cada segundo de empuje.

Pero aumentando la fuerza de empuje, o disminuyendo la masa del móvil, aumenta el número **3**; y viceversa; de modo que, llamando ACELERACIÓN la velocidad que se adquiere después de 1 seg. de empuje, la fórmula anterior, queda transformada en la siguiente:

$$v = a \times t$$

Donde el **3** de la fórmula particular queda sustituido por **a** (*aceleración*).

702. – Fórmula **general** es la que se refiere a todos los problemas de una misma *índole*.

Ej.: $v = a \times t$

Para simplificar el lenguaje, llamamos problemas "DE UNA MISMA ÍNDOLE" a todos los que difieren entre sí tan sólo por el valor numérico de las magnitudes que se expresan en su enunciado.

703. – Fórmula **directa** o PRIMARIA es la que nos enseña a medir la magnitud de un fenómeno **B**, en virtud de los fenómenos **A** que son sus causas.

Ej.: $v = at$

Fórmula **inversa** o DERIVADA es la que nos enseña a buscar el valor de un fenómeno **A**, en virtud de los valores de **B** y de los otros fenómenos **A**.

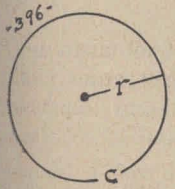
Ej.: $$t = \frac{v}{a}$$

$$a = \frac{v}{t}$$

Los problemas son DIRECTOS *o* INVERSOS, *según que sean directas o inversas las fórmulas que los resuelven.*

2.° – Cantidades constantes y variables.

704. – Las cantidades que entran en las fórmulas pueden ser de dos clases: CONSTANTES Y VARIABLES.

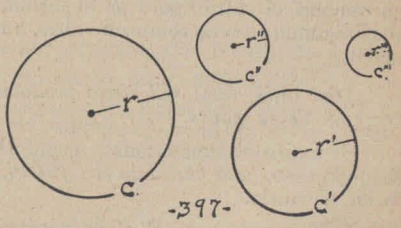


En el caso de **c** = 2 π**r** (fig. 396), la cantidad 2π ó 6,2832.... es *constante*, porque no varía, sea cualfuere el caso práctico en que tuvieramos que valuar la circunferencia mediante la medida del radio.

En cambio **c** y **r** son *variables*, porque pueden adquirir infinidad de valores.

705. – Las variables son de dos especies: a) VARIABLES INDEPENDIENTES, b) FUNCIONES DE LAS INDEPENDIENTES.

Si suponemos que para trazar distintas circunferencias, hemos dado al compás diversas aberturas, excogidas exprofeso (fig. 397):



La variable *independiente* será **r**, porque varió con independencia de otra cantidad.

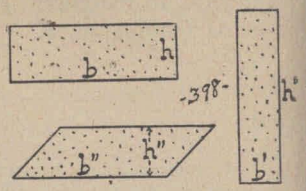
En cambio **c** varió *a consecuencia* de las variaciones de **r**.

706. – Entre la *independiente* y su *función* existe la relación de CAUSA Y EFECTO.

Aunque esta relación en muchos casos no es real, sino simplemente ficticia.

707. – FÓRMULAS CON VARIAS INDEPENDIENTES.

Ej.: la de las áreas de los paralelogramos (fig. 398):



-398-

$$A = bh$$

A (*área*) b (*base*) h (*altura*).

A *es función de* **b** *y de* **h**
b *y* **h** *son las variables independientes*
A *es efecto del sistema* **b,h**.

708. – Las funciones pueden ser de dos clases: DEFINIDAS e INDEFINIDAS.

Una función es **definida,** cuando puede ser planteada por una fórmula algébrica, porque conocemos la relación que existe entre ella y sus independientes.

Como ejemplo: los casos anteriores.

Una función es **indefinida,** cuando sabemos que existe una relación entre ella y sus independientes; pero ignoramos cual es esa relación, porque no hemos logrado medirla, ni tenemos noticia de que otro la haya medido.

Así, si con el mismo esfuerzo arrojo contra un mismo vidrio, primero una piedrecilla y después una piedra algo grande; en el primer caso no romperé el vidrio, pero en el segundo puede ser que sí. Y aún cuando en el segundo caso no rompa el vidrio, noto por el ruido que el efecto ha sido mayor.

Diré pués, que: «*El efecto producido en el vidrio por el proyectil es* FUNCIÓN *de su masa*».

Si repito el experimento, usando la misma piedra en el primero y segundo caso, pero variando el *esfuerzo,* notaré que también varía el efecto en el vidrio.

Diré, pues, que: «*El efecto producido al chocar un proyectil, es* FUNCIÓN *de la fuerza con que fué arrojado*».

Pero como aun no he medido la relación entre el choque del proyectil y las dos causas (masa y fuerza impulsiva) no podré escribir así:

$$E = m \times f$$

Y me veré obligado a escribir así:

$$E = f\,(m,f)$$

que se lee: «EL EFECTO DEL CHOQUE ES FUNCIÓN DE LA MASA DEL PROYECTIL Y DE LA FUERZA QUE LO PUSO EN MOVIMIENTO».

3.° – Cantidades unitarias y globales.

709. – Antes de satisfacer a este epígrafe, daremos la sinonimia de INDEPENDIENTE y FUNCIÓN, a fin de que se nos permita hablar con más libertad.

1.° – La INDEPENDIENTE se llama también **argumento** de la función.

2.° – La FUNCIÓN se llama también VARIABLE DEPENDIENTE (*término que nunca usaremos, porque da origen a confusiones*); pero se llama también **relativa** de la independiente (*que es un término muy significativo que usaremos a menudo*).

710. – Cantidad **unitaria** es la que tiene por relativa o por argumento la unidad.

Si 5 hombres emplean 1 día para hacer un trabajo, la independiente vale 5 y su relativa vale 1.

Por lo tanto, *5 hombres* en este problema es una CANTIDAD UNITARIA.

En el mismo problema, 1 hombre emplea 5 días para el mismo trabajo. Ahora la relativa vale 5, y su argumento vale 1.

P. l. t., *5 días*, en el mismo problema, es una cantidad unitaria.

711. – Cantidad **global** es la que tiene por relativa o por argumento una cantidad que no es unidad.

En el mismo problema anterior, se tendrá que 8 hombres emplearán $^5/_8$ *de día.*

8 hombres y $^5/_8$ *de día* son dos cantidades GLOBALES.

712. – Una cantidad puede ser unitaria con respecto a una de sus relativas o argumentos sin serlo para las demás.

De modo que siempre que se indica que una cantidad *es unitaria*, hay que, añadir "*con respecto a tal cantidad*", a no ser que esto último se sobreentienda como consecuencia de las palabras que hayan antecedido.

Ejemplo:

UN COCHE CORRE A RAZÓN DE 30 Km. POR HORA.

30 Km. es el espacio; 1 hora es el tiempo, que le sirve de argumento. P. l. t. 30 Km. es una CANTIDAD UNITARIA.

Pero como a *30 Km. por hora* lo llamamos VELOCIDAD, diremos que en el lenguaje matemático:

Velocidad es el espacio unitario con respecto al tiempo.

4.° – Funciones crecientes y decrecientes.

713. – Atendiendo a la relación que existe entre la independiente y su función, ésta puede ser: CRECIENTE y DECRECIENTE.

714. – Función **creciente** o DIRECTA es la que crece cuando crece su independiente; y decrece cuando su independiente decrece (ver **668**).

La circunferencia es función creciente del radio. El efecto de un proyectil es función creciente de su masa y de la fuerza que lo empujó.

715. – Función **decreciente** o INVERSA es la que decrece cuando crece su independiente; y crece cuando decrece su independiente (ver **669**.)

Así, si una máquina tarda 35 días para hacer una cantidad de zapatos; 7 máquinas tardarán 7 veces menos.

Aquí la cantidad de máquinas constituyen la *independiente*, y los días son su función.

Máquinas		Días	Máquinas		Días
1		35	7		5
crece		decrece	decrece		crece
7		5	2		$\frac{5\times7}{2}$

Como esta es una función definida, la representaremos mediante su operación, que es una división:

$$T = \frac{t}{a}$$

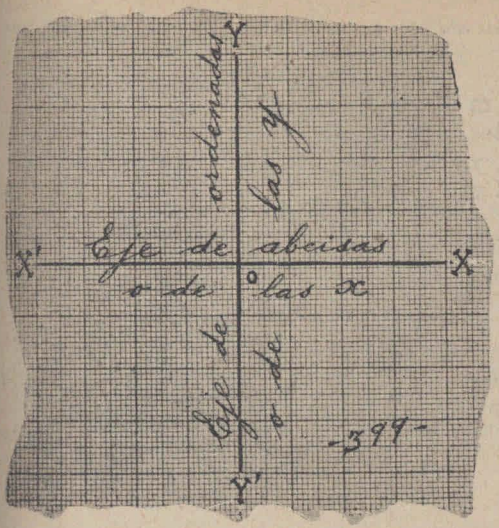
T (tiempo global) t (tiempo unitario) a (agente).

5.° - Representación gráfica de una función.

716. – En la teoría de las funciones, toda *variable* se considera como cantidad VECTORIAL, que puede crecer desde cero hasta el infinito.

Al sabio Descartes debemos el sistema de representación gráfica que se llama de las COORDENADAS CARTESIANAS.

717. – El sistema cartesiano se aplica a casos *bi* y *tridimensionales;* en el primer caso constará de dos ejes de vectores, y en el segundo de tres.



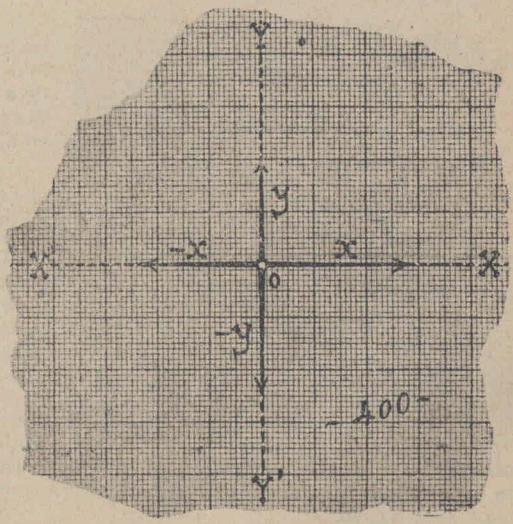
Nosotros estudiaremos solamente el de dos ejes, que llamaremos sistema PLANO; *y para comodidad usaremos ejes mutuamente perpendiculares (fig. 399).*

o = punto de origen, de los cuatro rayos que salen hacia **X**, **X'**, **Y** e **Y'**.

718. – Los vectores que tienen su origen en **o** y están sobre **XX'** se llaman ABSCISAS; y se representan algébricamente con la letra **x** (fig. 400).

719. – Los vectores que tienen su origen en **o** y que están sobre **YY'** se llaman ORDENADAS y se representan algébricamente con la letra **y**.

Las ABSCISAS *y las* ORDENADAS *reciben el nombre general de* **coordenadas**.



720. – Las porciones **oX** y **oY** son positivas, *por convención.*

Y las porciones **oX'** y **oY'** son negativas, *también por convención.*

Serán pues positivas las abscisas que están sobre **oX** *y las ordenadas que están sobre* **oY**.

Y serán negativas: las abscisas que están sobre **oX'** *y las ordenadas que están sobre* **oY'**.

721. –Si desde **m** y desde **n**, trazamos los ejes secundarios nX_* y mY_*, paralelos a **oX** y **oY** respectivamente (fig. 401), obtendremos los vectores **a** y **b**, que son *equipolentes* de **x** e **y** respective.

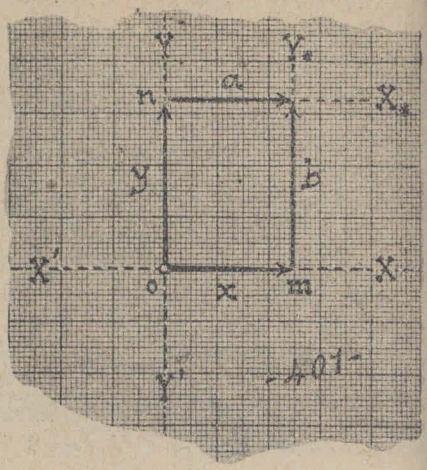


Fig. 401

Por ser equipolentes, pueden sustituirse mutuamente, y podemos decir que

a = x **b = y**

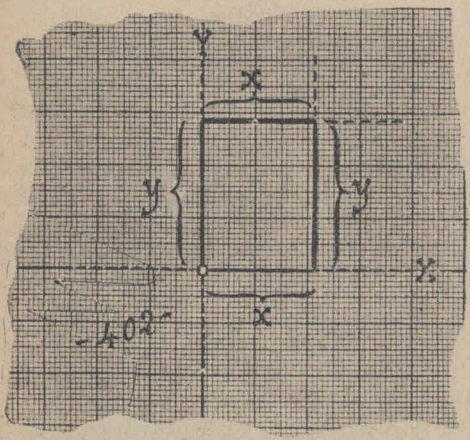


Fig. 402

Para comodidad en el trabajo, se acostumbra dar indistintamente el nombre de **x** al vector **x** y a todos sus equipolentes que nacen en el eje **YY'** (fig. 402).

Lo mismo sucede con el vector **y** y sus equipolentes, que nacen en **XX'**.

722. – Al representar las funciones en el sistema cartesiano plano, pueden presentarse tres casos: a) REPRESENTAR LAS VARIACIONES DEL ARGUMENTO Y DE SU FUNCIÓN; b) REPRESENTAR LAS VARIACIONES DE DOS ARGUMENTOS QUE CONTRIBUYEN A UNA MISMA FUNCIÓN; c) REPRESENTAR LAS VARIACIONES DE DOS FUNCIONES QUE DEPENDEN MUTUAMENTE COMO COEFECTOS DE UN MISMO ARGUMENTO.

6.° – Representación gráfica de un argumento y su función.

723. – A este caso generalmente se le llama: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

724 – Las diversas dimensiones que corresponde al *argumento*, se representan mediante ABSCISAS; y las dimensiones correspondientes a la *función* se representan con ORDENADAS.

725. – EJEMPLO. – Representar la función siguiente:

Un móvil tiene la velocidad que corresponde a 3m. *por segundo.*

Fórmula $e = v \times t$

APLICACIÓN DE LA FÓRMULA:

$$e = 3t$$

En nuestro ejemplo la velocidad es una cantidad *constante;* por lo tanto t es la *independiente*, que representaremos con **x**; y **e** es la función que representaremos con **y**.

Nuestro caso se generalizará, pues, con la fórmula abstracta:

$$y = 3x$$

CLAVE DE LOS VALORES DE **y** Y DE **x**.

	x	y
A	0	0
B	2	6
C	5	15
D	9	27
E	etc.	etc.

Damos a la **x** distintos valores arbitrarios, ej.: 0, 2, 5 y 9.

Sustituimos en la fórmula general a **x** por sus valores; y efectuamos la operación que resulta:

$y = 3 \times x$
$y = 3 \times 0 = 0$
$y = 3 \times 2 = 6$
$y = 3 \times 5 = 15$
$y = 3 \times 9 = 27$

En una tabla con dos columnas asentamos estos valores, a la derecha de los respectivos valores de **x** (*fig. 403*).

403

REPRESENTACIÓN (fig. 404). — En el eje de abscisas y en el de ordenadas se determinan sendos MÓDULOS, que representan en nuestro caso:

m = *1 segundo*
n = *1 metro*

Siendo los valores que hemos elegido para **x**: 0, 2, 5, 9, levantamos perpendiculares a **oX** en los puntos 0,2, 5 y 9.

Y correspondiendo a dichos números, para **y**: 0, 6, 15 y 27, levantamos a **oY** perpendiculares en los puntos correspondientes.

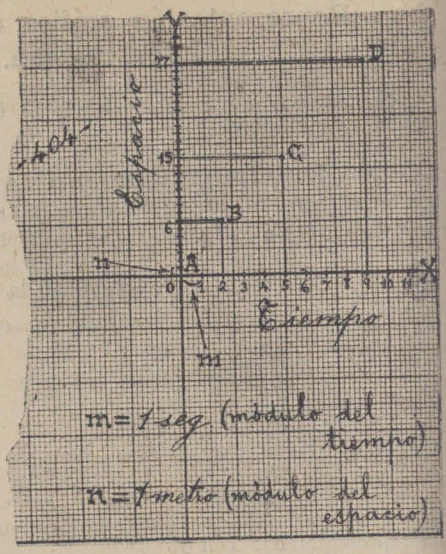
Los lugares de encuentro de cada **x** *con su respectiva* **y**, *se señalan con una letra*, **A**, **B**, **C**, **D**, etc.

	x	y
A	0	0
	1/4	3/4
	1/2	1 1/2
	3/4	2 1/4
	etc.	
	8	24
	8 1/4	24 3/4
	8 1/2	25 1/2
	8 3/4	26 1/4
D	9	27

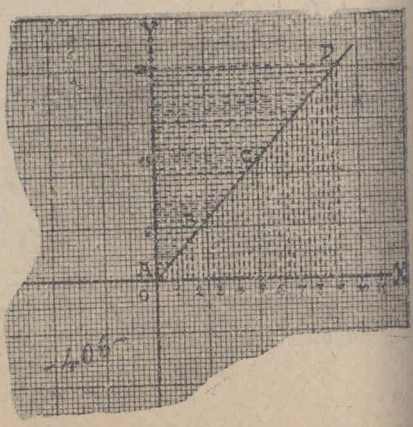
-405-

Y la representación gráfica, hubiera dado por resultado una infinidad de puntos entre **A** y **D** (fig. 406), cuyo conjunto hubiera constituido la línea **AD**.

Esta línea **AD** *es la* GRÁFICA *de la función que estamos representando.*



726. – GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN. Si en vez de dar a **x** algunos de los valores posibles entre 0 y 9, le hubiéramos asignado todos los valores imaginables, hubiéramos obtenido una clave mucho más detallada que la señalada en la fig. 405.



727.–Gráfica de una función es el lugar geométrico de los puntos de encuentro de las **x** con sus respectivas **y**.

NOTA. **Lugar geométrico** *es la figura formada por la sucesión de todos los elementos geométricos que gozan de una misma propiedad.*

LÉXICO. - Aquí por **figura** entendemos un cuerpo, superficie o línea determinada; y por **elemento geométrico** entendemos una superficie, línea o punto.

728.–Las gráficas de una función de 1er grado son siempre líneas rectas.

Las demás gráficas son líneas curvas.

NOTA. – *Función de* **1er. grado** *es aquella cuyo argumento está elevado a la potencia* "UNO" (*positivo*).

de 1er. grado: $y = 5 + 3x$
de 2do. grado: $y = 4 + 8x^2$
de 3er. grado: $y = 9 - 5x^3$

7.° – Representación gráfica de dos co-argumentos o de dos co-funciones.

729.–Co-argumentos son dos causas que contribuyen a un mismo efecto.

Y **co-funciones** son dos efectos de una misma causa.

EJEMPLO. – *¿Cuáles son los valores que pueden adquirir la* base *y la* altura, *para que el área de un rectángulo sea igual a 18 dm².?*

FÓRMULA: $A = b \times h$

A (área) **b** (base) **h** (altura)

FÓRMULA APLICADA: $18 = b \times h$

Como se ve aquí las variables son dos co-argumentos, puesto que su función *"área"* es una cantidad constante.

730.–Para representar gráficamente la relación entre dos CO-ARGUMENTOS, se considera uno de ellos como FUNCIÓN del otro.

Así una de las dos fórmulas inversas de la anterior es:

$$h = \frac{18}{b}$$

Si suponemos que dicha fórmula es directa, tenemos:

b = *variable independiente*
h = *función de la* **b**

731. – REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN ANTERIOR.

Generalizando la fórmula:

$$h = \frac{18}{b}$$

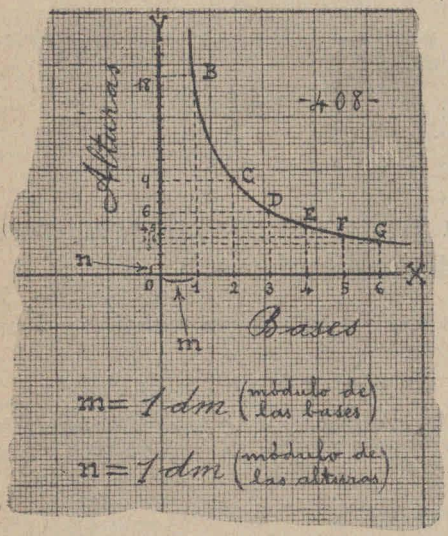
obtenemos:

$$y = \frac{18}{x}$$

La clave será (fig. 407):

	x	y
A	0	∞
B	1	18
C	2	9
D	3	6
E	4	4,5
F	5	3,6
G	6	3

-407-



Como esta ecuación no es de primer grado, no basta buscar dos puntos cualesquiera, hay que señalar la posición de todos, o por lo menos de muchos puntos cercanos (fig. 408).

No hemos señalado la posición de **A**, porque se halla en el INFINITO, sobre el eje **Y**.

732. – NOTA. – Aprovechamos la oportunidad que nos ofrece la gráfica anterior, para definir lo que es ASÍNTOTA de una curva.

Asíntota de una línea curva indefinida, es una recta a la cual la curva se va continuamente acercando, logrando alcanzarla solamente en el infinito.

En el ejemplo anterior, las dos rectas **X** *e* **Y** *son las asíntotas de la curva* **BCD** etc.

733. – Para representar dos co-funciones, se considera una de ellas como argumento de la otra.

De modo que este es un caso completamente análogo al de representar dos co-argumentos.

734. – Ejemplo. – *Con* $ 3,60 *quiero comprar azúcar de* $ 0,40 el kilo *y café* de 0,90. *¿Cuánto podré comprar de cada mercadería?*

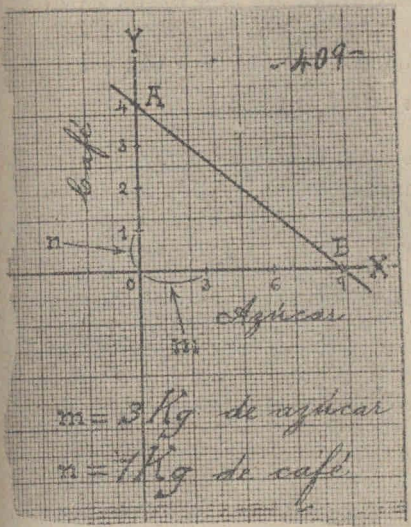
Fórmula: $0{,}40 \times a + 0{,}90 \times c = 3{,}60.$

a (kilos de azúcar) c (kilos de café)

Suponiendo que **a** *es la independiente, tenemos:*

$$0{,}90\ c = 3{,}60 - 0{,}40\ a$$

$$c = \frac{3{,}60 - 0{,}40\ a}{0{,}90}$$



Nota. – Para simplificar, calculemos con décimas de peso, o sea con "deci - pesos", así tendremos:

$$c = \frac{36 - 4a}{9}$$

Y generalizando:

$$y = \frac{36 - 4x}{9}$$

735. – Gráfica de la función anterior (fig. 409).

Como la ecuación es de 1er. grado, la gráfica es una recta; por lo tanto buscaremos la posición de dos puntos solamente:

Para	A:	$x = 0$	tenemos	$y = 4$
»	B:	$x = 9$	«	$y = 0$

8.° – ¿Qué significado tiene una gráfica?

736. – De por sí la recta o curva que obtenemos como último trabajo de la representación gráfica, **no significa magnitud alguna.**

Su único significado es el de ser el lugar geométrico de los encuentros de coordenadas.

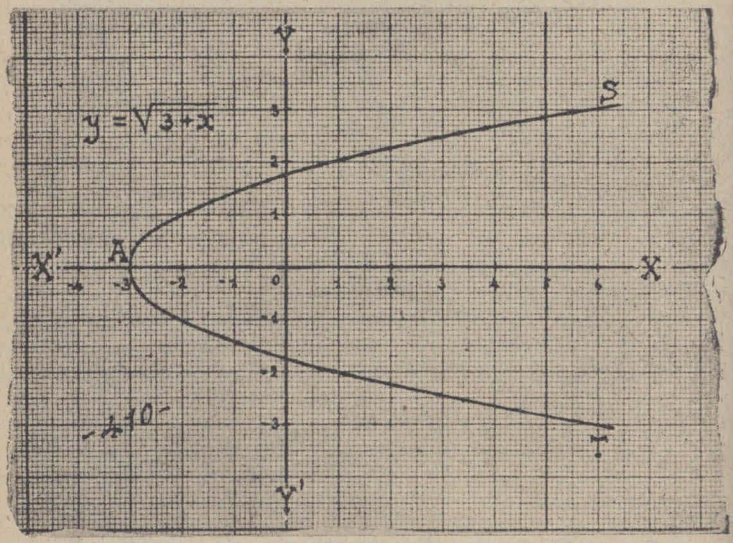
737. – Pero en dicho significado descubriremos su valor desde el punto de vista práctico:

1.° Toda gráfica nos enseña a resolver ecuaciones por medio del compás y la regla.

2.° Las gráficas nos hacen comprender visualmente la serie de variaciones que se producen en la FUNCIÓN, como consecuencia de las variaciones de la INDEPENDIENTE.

738. - PROBLEMA. — DADA LA GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN; RESOLVER UNO CUALQUIERA DE SUS CASOS PARTICULARES.

Ejemplo. — La ecuación $y = \pm\sqrt{3+x}$ tiene por gráfica la curva **SAT** (fig. 410).



	x	y
A	...	0
B	-2	...
C	0	...
D	...	2,5
E	6	...

411

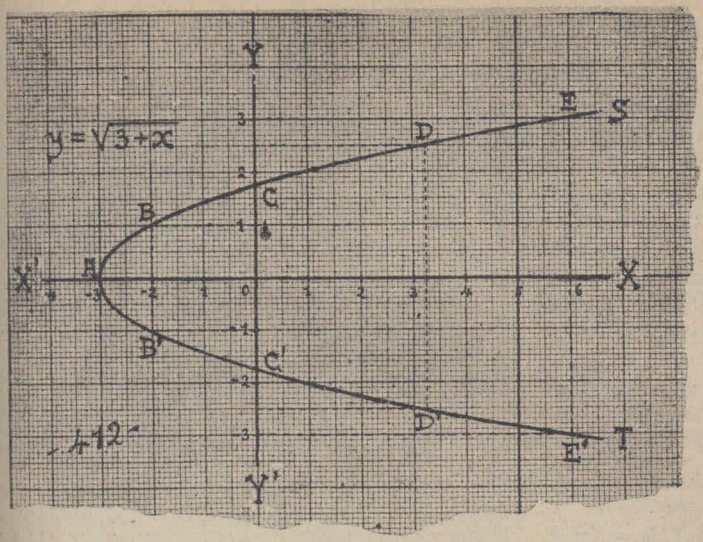
Complétese con ella la clave siguiente (fig. 411):

SOLUCIÓN (fig. 412). Sobre los ejes correspondientes, y partiendo de **o**, se marcan las medidas que conocemos.

En los puntos señalados se levantan perpendiculares al eje que contiene dichos puntos; y los segmentos **aA**, **bB**, etc. serán las incógnitas buscadas.

Hemos llamado **a**, **b**, **c**, *etc. los orígenes respectivos de dichas perpendiculares.*

En los casos de los puntos **A** y **C**, la perpendicular vale **cero**; por eso no está dibujada en la figura.



	x	y
A	-3	0
B	-2	±1
C	0	±1,73
D	3,25	2,5
E	6	±3

-413-

La clave completada, queda así (fig. 413).

NOTA.- Como la curva tiene dos ramas; una por debajo y otra por encima del eje X, resulta que para cada valor de x, hay dos valores de y, uno positivo y otro negativo.

739. - *De la nota anterior se desprende que:*

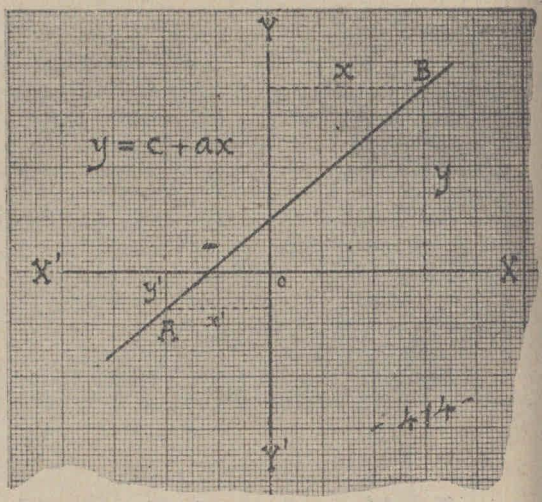
Toda ecuación cuyo argumento está afectado por el signo radical de índice par, tendrá como solución una gráfica de dos ramas

9.º - Interpretación de las gráficas.

740. - En el párrafo anterior dijimos que:

Las gráficas nos muestran con un simple examen visual cuál es la índole de cualquier serie de problemas homólogos.

Explicaremos varias gráficas para que el alumno entienda prácticamente lo que acabamos de exponer.



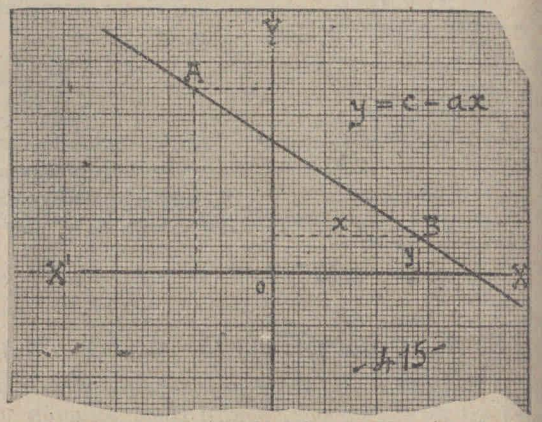
741. - (Fig. 414). Por ser **AB** una recta, la ecuación es de primer grado.

Tendrá forzosamente la formula siguiente :

$$y = c + a\,x$$

c y a son dos cantidades constantes.

Como vemos, al crecer **x**, crece **y** (función creciente).

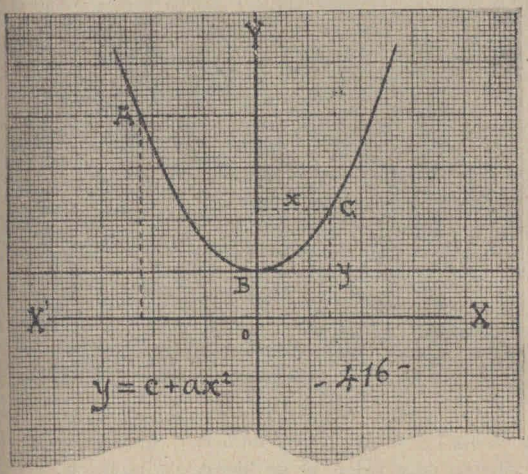


En estos problemas no puede darse el caso de que **x** sea positiva mientras **y** es negativa, o viceversa.

742. - (Fig. 415). Difiere del caso anterior en que:

$$y = c - a\,x$$

De donde resulta que, a medida que crece **x**, decrece **y** (función decreciente).



743. – (Fig. 416.) Si la curva **ABC** es una parábola, su fórmula es

$$y = c + ax^2$$

y entonces es una ecuación de 2º grado.

Si no es parábola, puede responder a una función más complicada.

Pero siempre sucede que:

a) Mientras **x** es negativa, la función es decreciente.

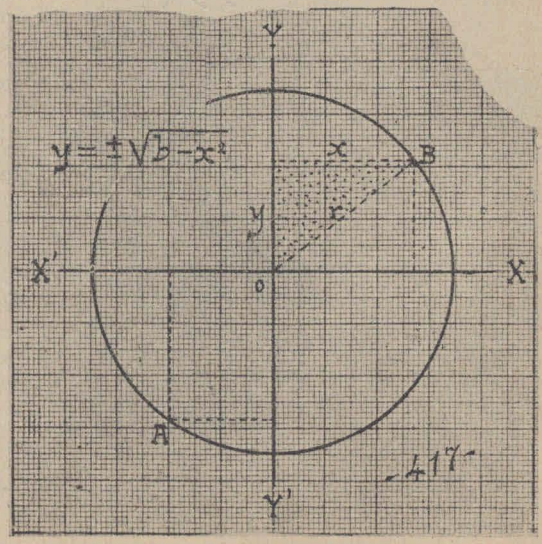
b) Mientras **x** es positiva, la función es creciente.

744. – (Fig. 417.) Si la curva es una circunferencia, el triángulo rectángulo **rxy** nos enseña que la ecuación representada es la siguiente:

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

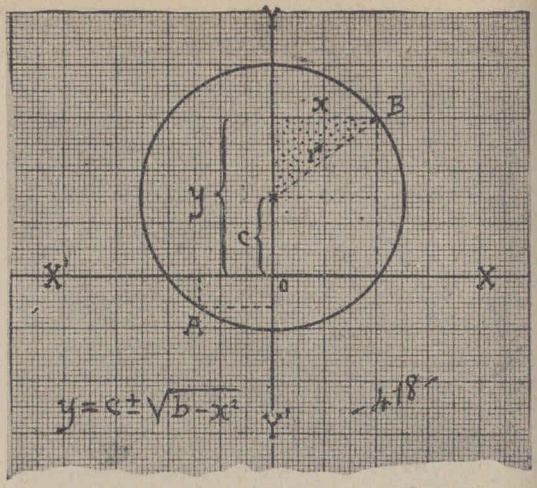
Donde r^2 es una constante que podemos representar por b

$$y = \sqrt{b - x^2}$$



745. – (Fig. 418.) Difiere de la anterior en que existe el sumando constante c que hay que añadir a la fórmula de Pitágoras:

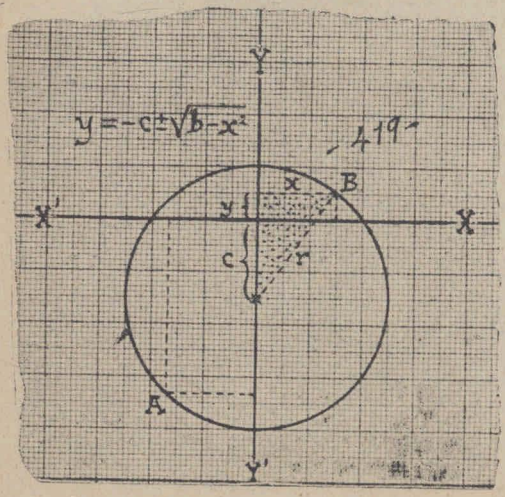
$$y = c \pm \sqrt{b - x^2}$$



Como se ve en la fig., el mayor valor numérico que puede tener x es $\sqrt{b}$, o sea r. Pasado este valor, el problema es imposible.

Efectivamente, cuando

$$x > \sqrt{b}$$



tenemos

$$x^2 > b$$

de donde

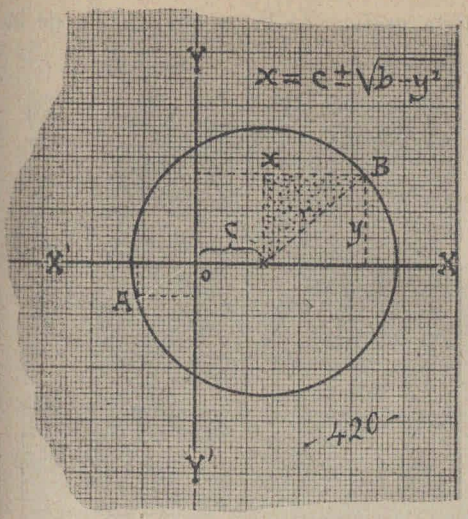
$$\sqrt{b - x^2} = \sqrt{-n}$$

n (cualquier resultado positivo).

Pero $\sqrt{-n}$ no tiene valor aritmético.

(Fig. 419). – Aquí c debe ser restado:

$$y = -c \pm \sqrt{b - x^2}$$



746. – (Fig. 420). Esta gráfica es la misma que la de la fig. 418 en la que se han invertido los papeles de **x** y de **y**.

Por lo tanto, la fórmula

$$y = c \pm \sqrt{b - x^2}$$

se cambia por esta otra

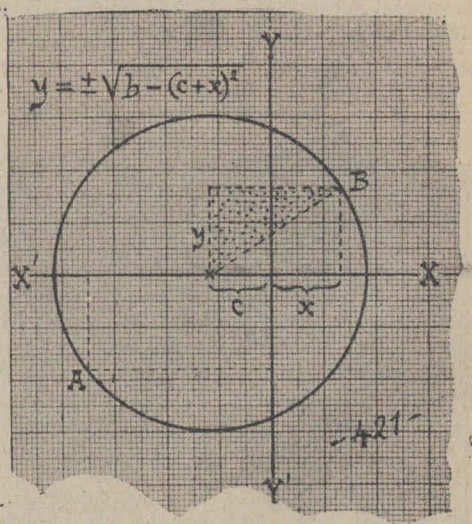
$$x = c \pm \sqrt{b - y^2}$$

de donde

$$y = \pm \sqrt{b + (x-c)^2}$$

747. – (Fig. 421.) Esta gráfica difiere de la anterior por el signo de c:

$$y = \pm \sqrt{b + (x+c)^2}$$



748. - De la comparación de las cinco gráficas anteriores (**744 h. 747**), se desprende que:

Muchas fórmulas complicadas representan casos dislocados de su origen natural.

La habilidad del matemático consiste en saber transformar las fórmulas complicadas en fórmulas simples, cambiando el punto de partida de su cálculo.

749. – (Fig. 422). Esta gráfica es la generalización de la (fig. 408).

Allá teníamos esta fórmula:

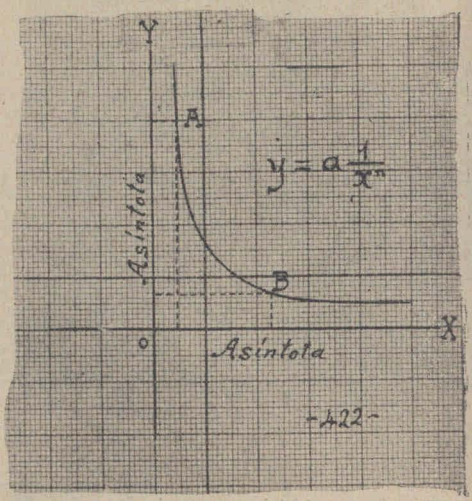
$$y = \frac{a}{x}$$

que puede representarse también así:

$$y = a \frac{1}{x}$$

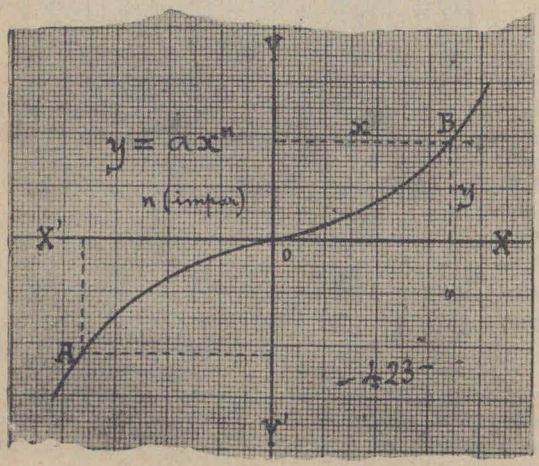
Esta es la fórmula general de todo problema de PROPORCIÓN INVERSA.

Podemos, pues, decir que cualquiera sea la forma de la curva de la fig. 422, siempre obedecerá a esta fórmula, más general aún que la anterior:



$$y = a \frac{1}{x^n} \quad \text{o sino} \quad y = a\, x^{-n}$$

n (según los casos) vale 1 o más que uno.



750. – Los casos correspondientes a las figs. 423 h. 431 se refieren a la fórmula general

$$y = ax^m$$

donde el exponente **m**, representa cualquiera de los valores siguientes:

$$n \qquad -n$$

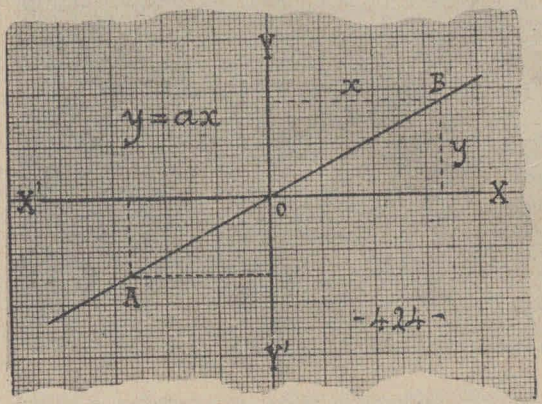
$$\frac{1}{n} \qquad -\frac{1}{n}$$

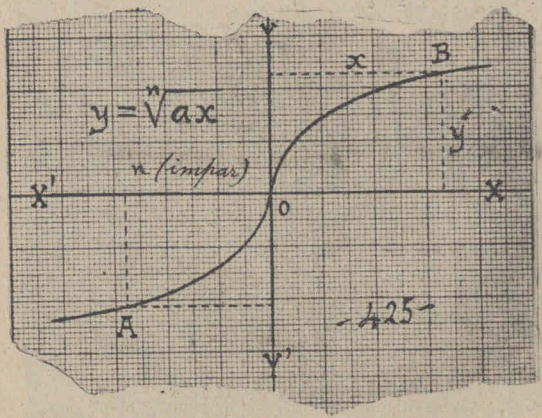
751. – (Fig. 423 h. 425). Representan funciones crecientes que corresponden a la fórmula general:

$$y = a\,x^n$$

En la fig. 423: **n** *es un exponente entero positivo impar.*

En la fig. 424: **n** = 1



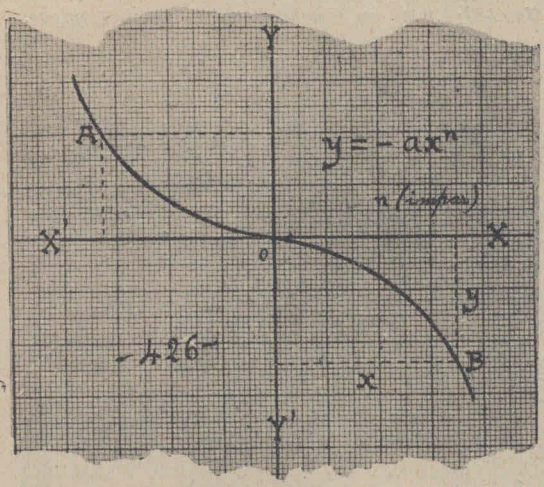


En la fig. 425: **n** = fracción propia recíproca de un entero impar.

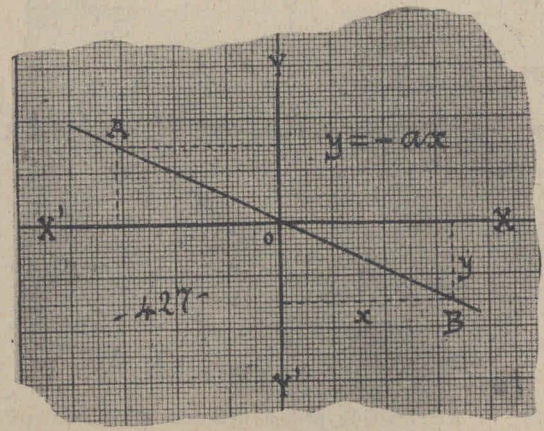
n = fracción propia Ej. $a^{1/5} = \sqrt[5]{a}$

752. – (Figs. 426 h. 428). Difieren de los tres casos anteriores en que a es negativo.

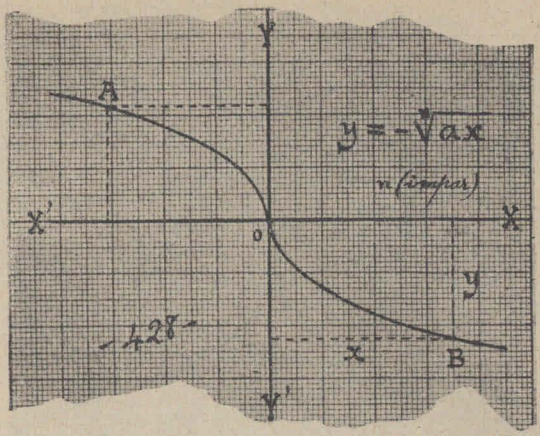
$$y = -a x^n$$



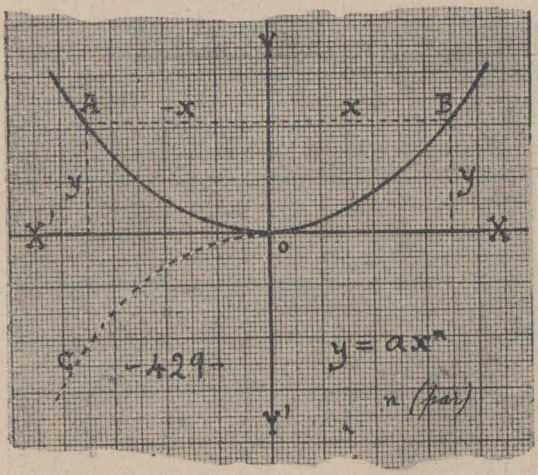
En la fig. 426: **n** *es exponente entero impar.*
En la fig. 427: **n** $= 1$

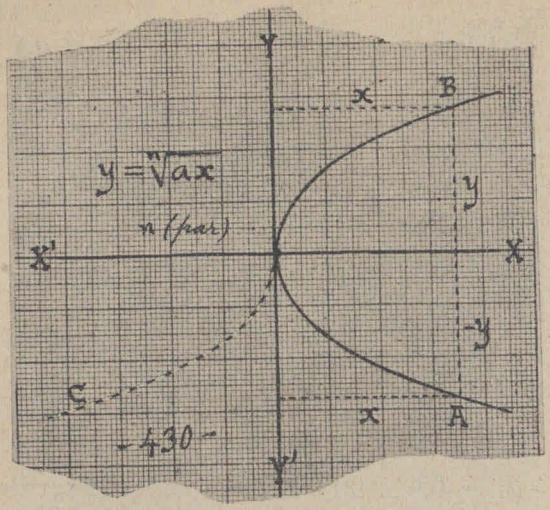


En la fig. 428: **n** $=$ *fracción propia, recíproca de un entero impar.*

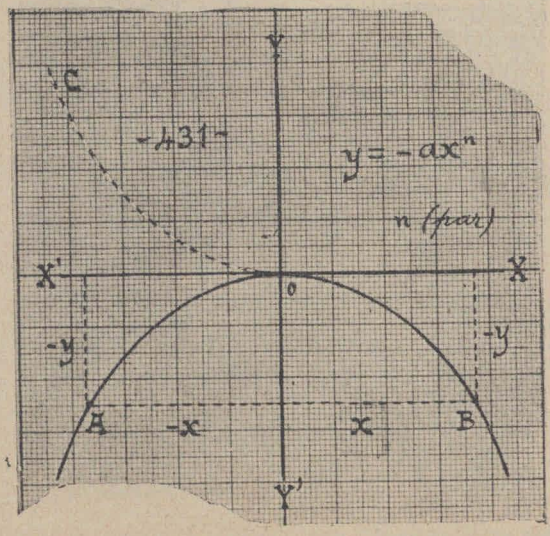


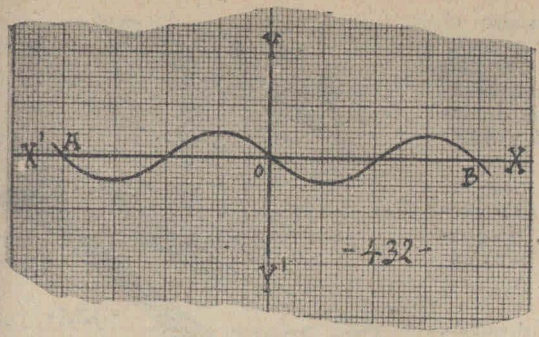
753. – (Figs. 429 h. 431). Difieren de los seis casos anteriores, en que **n** es par.





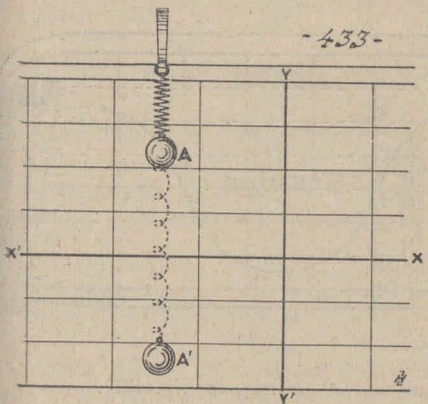
La porción **Co** que está punteada en las tres figuras, es la que corresponde al mismo caso cuando el exponente es impar.





754. – (Fig. 432). Representa una función que a intervalos constantes va creciendo y decreciendo, a pesar de que su argumento siga siempre creciendo.

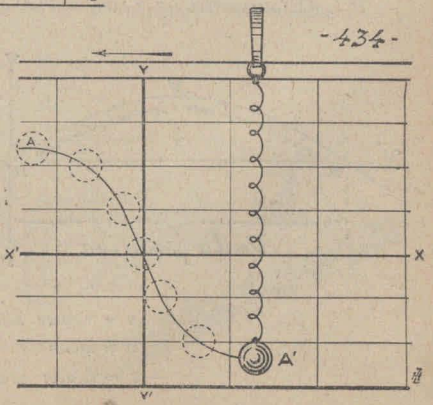
10.° – Casos prácticos.



755. – En el movimiento pendular se puede presentar entre otras, esta pregunta:

¿DÓNDE SE HALLA LA LENTEJA EN UN INSTANTE DADO (fig. 433)?

NOTA. – Hemos elegido el caso del péndulo de oscilación rectilínea y vertical, porque vierte mucha claridad en el asunto.

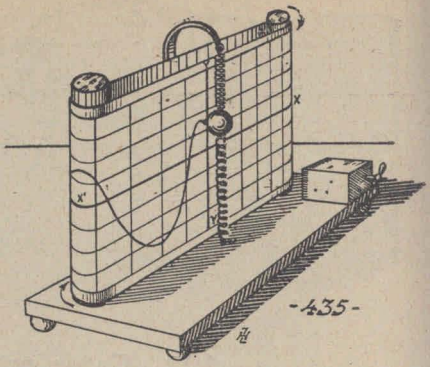


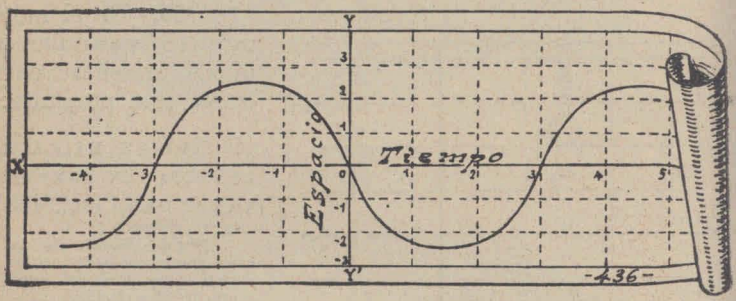
756. – SOLUCIÓN: Marquemos como eje de abscisas **XX'** la mediatriz del segmento **AA'**, y como eje de ordenadas una perpendicular cualquiera colocada a derecha de **AA'**.

Hagamos oscilar el péndulo rozando un papel cuadriculado, y traslademos el papel *con movimiento uniforme*, hacia la izquierda (fig. 434 y 435).

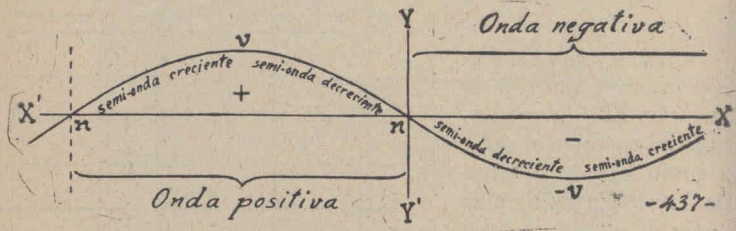
Si la lenteja tiene un lápiz que marque su trayectoria en el papel, recogeremos la siguiente curva ondulada (fig. 436).

Para simplificar el ejemplo, hemos supuesto que el origen o se halla en uno de los NODOS.





757. – ELEMENTOS DE LAS CURVAS ONDULADAS (fig. 437).

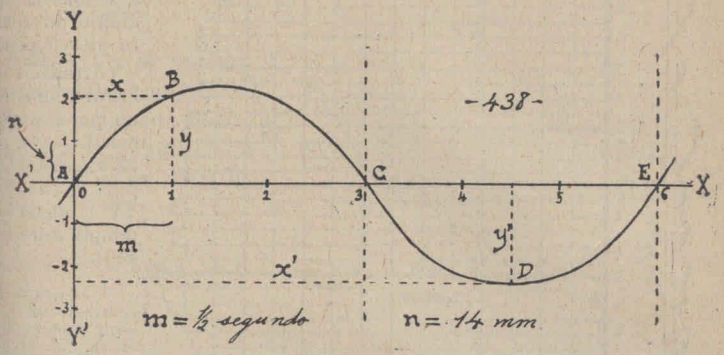


v = vientre positivo

n = nodos

— v = vientre negativo

758. - INTERPRETACIÓN DE LA CURVA ONDULADA (fig. 438). En nuestro ejemplo (fig. 436) las medidas tomadas sobre **oX** indican el TIEMPO que transcurrió desde que la lenteja pasó por **YY'**.



Los segmentos comprendidos entre **oX** y la curva indican lo que DISTABA la lenteja del eje **oX** en cada instante.

Si suponemos que la lenteja efectuaba, su "TIC-TAC" u *oscilación* en 3 segundos, cada una de las divisiones 1, 2, 3... del eje **oX** representa ½ segundo.

De modo que p. ej.:

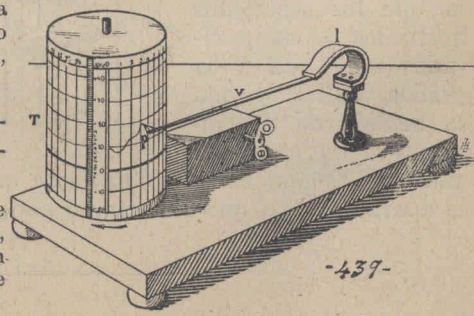
RESPUESTA: 1.° La lenteja distaba 0 mm. en los siguientes instantes correspondientes a los nodos **n**, **n'**, **n''**, etc.:

0 seg., 1½ seg., 3 seg., etc.

2.° La lenteja había llegado a su MÁXIMO de alejamiento positivo o sea, a 2½ cm., en los siguientes instantes correspondientes a los vientres v, v'', v,''' etc.

¾seg., 3¾seg., etc.

3.° La lenteja había llegado a sus MÍNIMOS, o sea a los vientres negativos, v', v'''...

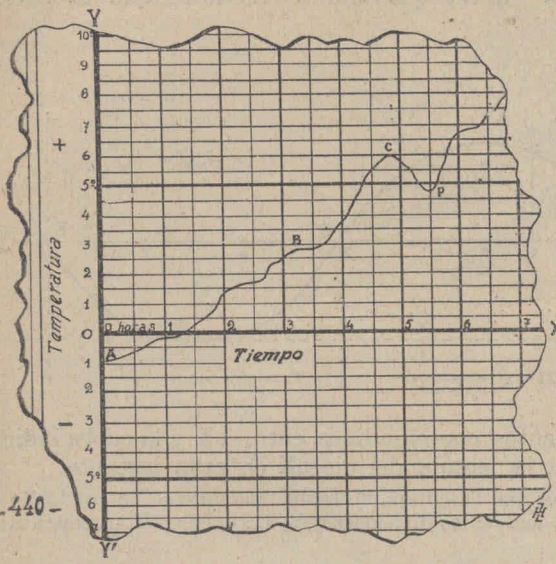


759. - OTRO EJEMPLO: Gráfica de la temperatura.

Hay termómetros que se llaman REGISTRADORES, porque dejan anotado en un papel el DIAGRAMA de la temperatura.

LÉXICO. — **Diagrama** significa lo mismo que REPRESENTACIÓN GRÁFICA.
Termógrafo = termómetro registrador.

Veamos un termógrafo (fig. 439).



-440-

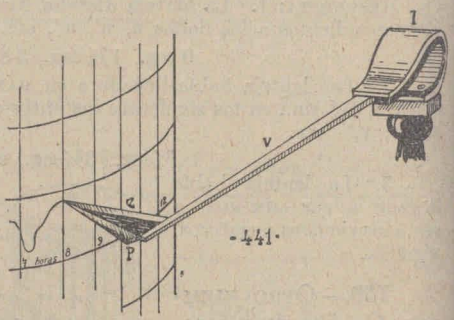
El tambor **T** gira de derecha a izquierda mediante un aparato de relojería.

Arrollado sobre el tambor hay un papel cuadriculado cuyo eje **oX** señala el tiempo; y cuyo eje **YY'** señala la temperatura (fig. 440).

La lámina *l* se endereza con el calor, y se encurva con el frío (fig. 441).

De este modo la varilla **v** sube con el calor, y baja con el frío.

En el extremo de **v** hay una pluma especial **p**, que contiene tinta, y cuya extremidad **e** asienta suavemente sobre el papel cuadriculado (fig. 441).



-441-

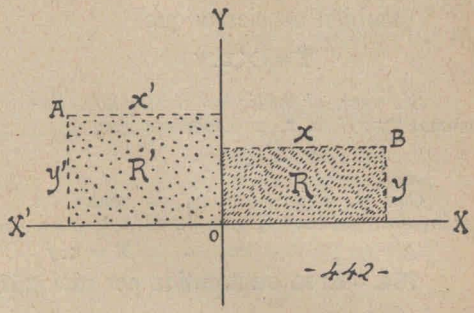
Examinando la fig. 440, cualquiera entiende que los segmentos verticales y comprendidos entre **oX** y la gráfica **ABCD**..., dan la medida de la temperatura en cada instante de tiempo transcurrido desde que comenzó a funcionar el aparato, hasta que se retira el papel del tambor.

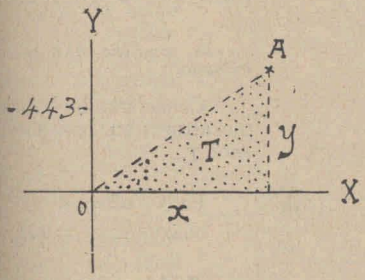
11.° – Representación gráfica de los productos.

760. - En el párrafo 31 de Estática Gráfica (pág. 177) vimos que los productos se pueden representar mediante paralelogramos o triángulos.

761. – En el sistema de coordenadas perpendiculares, los productos quedan representados por RECTÁNGULOS (fig. 442).

$$R = x \times y$$
$$R' = x' y'$$





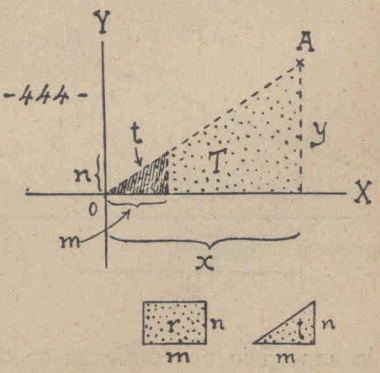
Pero a veces conviene representarlos con TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS (fig. 443).

$$T = \frac{x \times y}{2}$$

762. – Es necesario advertir aquí que: cuando representamos un producto mediante un *triángulo*, la fórmula práctica es

$$T = \frac{x\,y}{2}$$

Y ahora veremos porque (fig. 444):



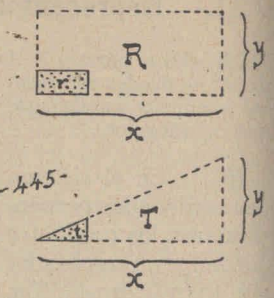
763. – En vez de usar como módulo de áreas el rectangulito r, usamos el triángulito t.

Cualquiera entiende ahora que (fig. 445) si es verdad que

$$R = r \times x.y$$

también es cierto que

$$T = t \times x.y$$



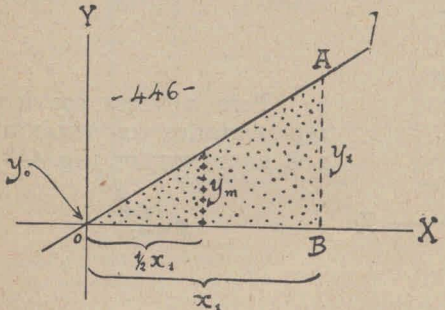
Si, pues, al medir los rectángulos, llamamos "UNO" a r, *y obtenemos que*

$$R = x.y$$

Con el mismo derecho, al medir los triángulos, podemos llamar "UNO" a t, *para obtener*

$$T = x.y$$

764. – Área subtendida por una gráfica. – 1er CASO. – La gráfica es una recta que pasa por o (fig. 446).



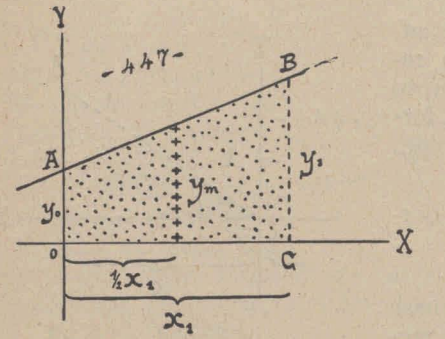
La superficie oAB *es un triángulo.*

Considerando oB como altura; su base media será y_m.

Pero $oB = x$

luego ÁREA $= x.y_m$

765. – 2° CASO. – La gráfica es una recta que no pasa por o (fig. 447).



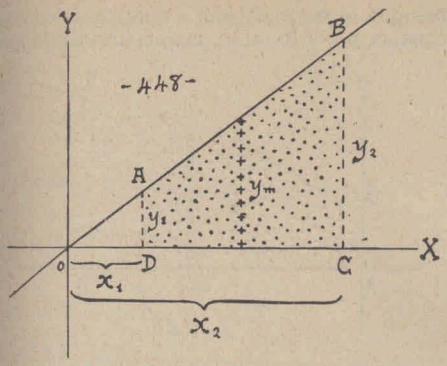
La superficie oABC *es un trapecio.*

oC (altura) $= x$

y_m = base media

luego ÁREA $= x.y_m$

766. – 3er CASO. – Difiere de los dos casos anteriores en que la superficie no comienza en o (fig. 448).



ABCD = *Trapecio*

DC (altura) $= x_2 - x_1$

luego ÁREA $= (x_2 - x_1) \cdot y_m$

4º CASO. – La gráfica es cualquier línea (fig. 449).

Se divide la porción **oG** en partes iguales **m**, *tan pequeñas* como para que las **y** que corresponden a estas divisiones, dividan la gráfica **oAB...F** en SEGMENTOS DE RECTA.

De este modo la superficie **oCFG**, *queda descompuesta en pequeños trapecios cuya altura es* **m** (*1*).

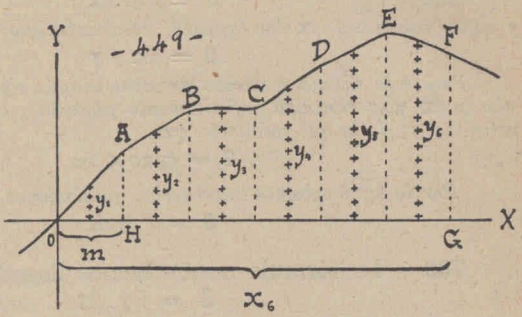
Eligiendo como y_1, y_2, etc. las bases medias de cada trapecio tendremos que, cada uno de ellos tiene por área:

$$s_1 = m.y_1$$

$$s_2 = m.y_2 \text{ etc.}$$

De donde resulta que el área total será

$$S = \Sigma s$$



o sea $S = \Sigma\, m.y$

El símbolo Σ *se lee* «SUMA DE TODAS LAS». *De consiguiente:*

Σ **my** *se lee* «SUMA DE TODAS LAS **my**»

Pero $\Sigma my = my_1 + my_2 + my_3 ... + my_n$

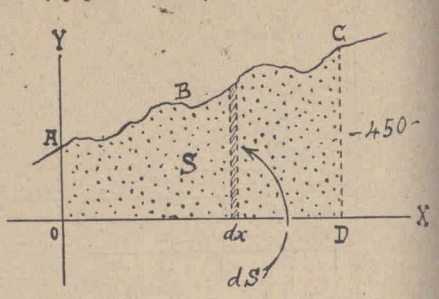
de donde $\Sigma my = m(y_1 + y_2 + y_3 ... + y_n)$

767. – Cualquiera entiende que este procedimiento no es extrictamente exacto, porque las curvas y las líneas irregulares no se pueden descomponer en segmentos de recta por pequeños que ellos sean.

(1) Téngase en cuenta que todo triángulo es un trapecio, cuya base menor se ha reducido a «CERO». Por eso hemos considerado como *trapecio*, también el *triángulo* **oAH**

Por eso cuando queremos que el error debido a nuestro sistema de cálculo sea infinitamente pequeño, y por lo tanto, matemáticamente *nulo* debemos recurrir a la división de la **x** en porciones infinitamente pequeñas, denominadas *dx* (fig. 450).

dx se lee «*diferencial de x*».



768. – Cuando descomponemos la **x** en sus «*diferenciales*», cada trapecio es una *d***S**.

*d***S** se lee: «*diferencial de S*»

De donde se sigue que

$$S = dS \quad (1)$$

pero $dS = y.\,dx$

luego $S = \int y.\,dx$

y como todas las *dx* son iguales, resultaría que:

$$S = dx.\int y$$

Pero esta última ecuación no tiene ningún significado práctico, porque siendo **dx** *una cantidad infinitamente pequeña, existirán entre* **Ao** *y* **CD** infinitas **y**; *de lo que resultaría que*

$$S = \text{CERO} \times \infty$$

Por lo tanto debemos volver atrás, quedándonos con la fórmula anterior:

$$S = \int y.dx$$

769. – La fórmula a que hemos llegado

$$S = \int y.dx$$

no puede resolverse algebraicamente; pero el *Cálculo infinitesimal* nos enseña a resolverla.

En lugar oportuno explicaremos cómo se resuelve.

Ahora lo único que nos interesa es llamar la atención del alumno sobre la existencia de medios para calcular las áreas subtendidas por curvas, sin necesidad de recurrir al planímetro.

Coeficiente angular y ordenada de origen

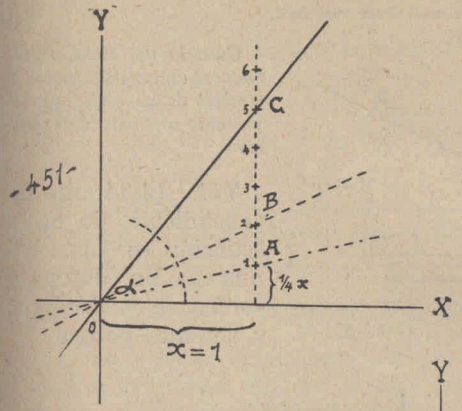
770. – Si representamos la función siguiente:

$$y = ax$$

(1). El símbolo $\int$ se lee "*integral de*" y significa lo mismo que "*suma de todas las*", lo mismo que $\sum$. La única diferencia en el significado de ambos símbolos, está en que $\sum$ se usa en el cálculo algebraico, y $\int$ se usa en el cálculo infinitesimal.

dando a la constante a diversos valores, p. ej: 1/4, 2/4, 5/4; o sea, dando a la ecuación general, las formas particulares siguientes:

$$y = 1/4\ x$$
$$y = 2/4\ x$$
$$y = 5/4\ x$$



Notaremos (fig. 451 que:

EL ÚNICO CAUSANTE DEL CRECIMIENTO DEL ÁNGULO α es el coeficiente a.

Cuando a *valga* "UNO" *tendremos* (*fig. 452*):

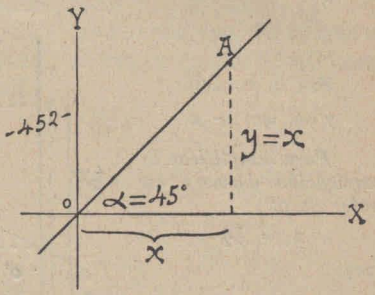
$\alpha = 45°$

Cuando $a = o$

también $\alpha = o$

Cuando $a = \infty$

entonces $\alpha = 90°$



771. – El coeficiente **a**, recibe por este motivo el nombre de **coeficiente angular.**

772. – En las ecuaciones de función explícita reciben el nombre de **términos independientes** los que no contienen cantidades variables:

En $y = 3a^2 - \sqrt{3b} + 4\sqrt{x^3}$

son términos independientes:

$3a^2 \qquad -\sqrt{3b}$

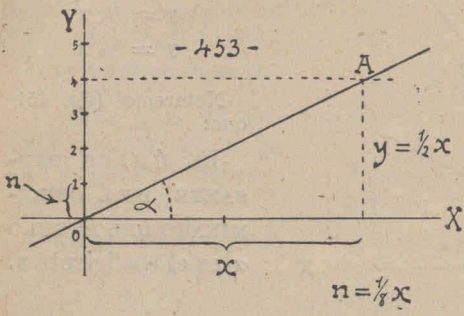
773. – Cualquier caso posible en las ecuaciones explícitas con argumento único se puede representar así:

de 1er. grado: $y = ax + b$
de 2do. grado: $y = ax^2 + bx + c$
de 3er. grado: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
de enésimo grado: $y = ax^n + b\,x^{n-1} \ldots + px^2 + qx + r$

En estas ecuaciones, el término independiente ha sido colocado en el último lugar

Los símbolos *a*, *b*, *c*, *d*,... *p*, *q*, *r*, representan los COEFICIENTES de los distintos términos.

Cuando falta un término, su coeficiente vale cero.



Cuando un término debe restarse en vez de sumarse, el símbolo de su coeficiente representa una cantidad negativa.

774. – El término independiente de cada ecuación se llama ORDENADA DE ORIGEN u «*ordenada en el origen*»; y veremos porque.

Sea la ecuación

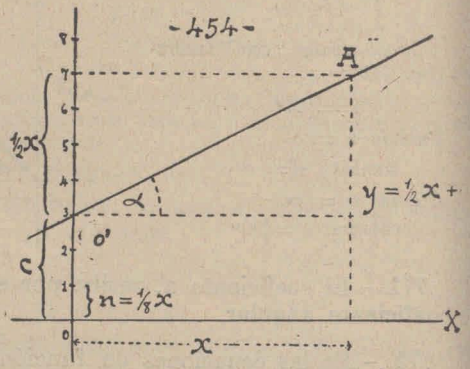
$$y = ax + c$$

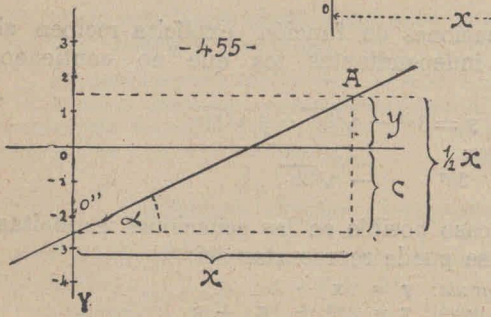
Para simplificar la explicación demos un valor a a:

$$a = \tfrac{1}{2}$$

luego

$$y = \tfrac{1}{2}x + c$$





Demos ahora a c diversos valores, construyendo los diagramas respectivos.

P. ej.:

c = CERO (fig. 453).
c = 3 (fig. 454).
c = —3 (fig. 455).

Del examen de estos tres diagramas se deduce que:

Ao, Ao' y Ao'' difieren entre sí, tan sólo porque sus puntos c de intersección con **YY'** tienen por ordenada:

En 1ler. caso: $y_o = 0$
« « *2do.* « $y_o = 3$
« « *3er.* « $y_o = -3$

Hemos llamado y_0 la ordenada de los puntos o, o' o'' según el caso.

Y como la y_o es la ordenada que tiene su pie en el *origen* del sistema; de aquí que

$$\text{ORDENADA DE ORIGEN} = y_o = \text{ORDENADA DE ORIGEN}$$

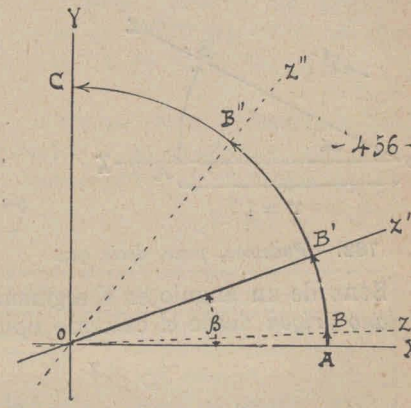
III.° -- Rudimentos de Trigonometría.

1.° -- Líneas trigonométricas.

775. – Dado un ángulo cualquiera β (fig. 456), podemos considerar que es una de las infinitas formas que va adquiriendo sucesivamente el ángulo **XoZ** MIENTRAS CRECE PARA TRANSFORMARSE EN EL ÁNGULO **XoY**.

776. – *Si trazamos con centro en* o *el arco* **AB**, *veremos que él también crece a medida que crece el ángulo, tratando de llegar a las dimensiones del arco* **ABC**.

777. – Cuando hablando de un ángulo, decimos «SU ARCO» nos referimos a un arco cualquiera, trazado con centro en o, y limitado por los dos lados del ángulo.



En la fig. 456, el arco de **XoZ** *es* **AB**, *el de* β *es* **AB'**, *etc.*

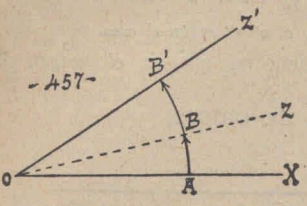
Lo que hemos llamado ARCO DE UN ÁNGULO, se acostumbra llamar también, ARCO CORRESPONDIENTE A UN ÁNGULO.

778. – En Geometría elemental, ya se ha estudiado que: LOS ÁNGULOS SON PROPORCIONALES A SUS ARCOS.

Esto significa que (fig. 457):

$$\frac{\text{XoZ}}{\text{XoZ'}} = \frac{\text{AB}}{\text{AB'}}$$

779. – Volviendo a la fig. 456, llamaremos **origen** del arco **ABC** el punto **A** donde suponemos que comenzó su trazado.



Y llamaremos **lado origen**, la recta **oX**, que es el origen de las dimensiones que puede adquirir α (fig. 457).

780. – Llamaremos **arco unitario** de un ángulo, el que tiene por radio una unidad cualquiera. (fig. 458)

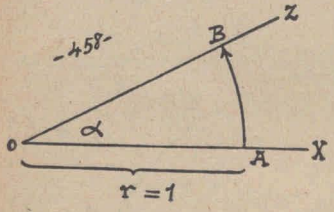
Esta unidad puede ser *1mm.*, *1dm.*, *1m.*, *1km.*, *1 cuadra*, etc. — La unidad elegida poco importa.

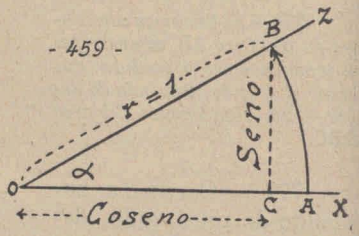
781. – Si del extremo **B** del *arco unitario* de α (fig. 459), bajamos el segmento

BC ⊥ oX

obtendremos las dos líneas trigonométricas siguientes:

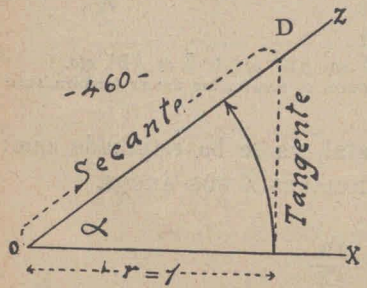
BC = SENO de α
oC = COSENO de α





782. – *Podemos, pues, decir que:*

Seno de un ángulo es el segmento de perpendicular, bajado al *lado origen* desde el extremo opuesto del arco unitario.



Coseno de un ángulo es el segmento de recta comprendido entre el vértice del ángulo y el pie de su seno.

783. – Si desde el origen **A** del *arco unitario* de α (fig. 460) levantamos el segmento

AD ⊥ oX

obtendremos las dos líneas trigonométricas siguientes:

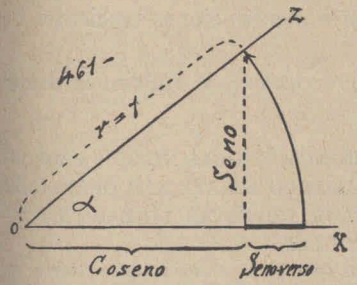
AD = TANGENTE de α

oD = SECANTE de α

784. – *Podemos, pues, decir que:*

Tangente de un ángulo es el segmento de perpendicular levantado sobre el *lado origen* desde el origen del arco unitario hasta el lado opuesto.

Secante de un ángulo es el segmento de recta comprendido entre el vértice del ángulo y el extremo de su tangente.



785. – Existe además otra línea trigonométrica, poco usada, pero cuyo conocimiento nos ayudará en algunos casos a simplificar el lenguaje.

Es ésta el SENO-VERSO (*fig. 461*).

Seno–verso de un ángulo es la diferencia entre su radio y su coseno.

786. – Así como al *seno* le corresponde un COSENO, a las otras *líneas* también les corresponden otras CO-LÍNEAS, que son: la *cotangente*, la *cosecante* y el *coseno–verso*, de las que luego nos ocuparemos.

De modo que:

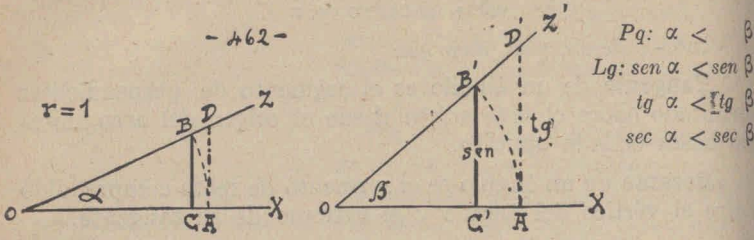
Elementos trigonométricos		
BÁSICOS	LÍNEAS	CO-LÍNEAS
Angulo	Seno	Coseno
Arco unitario	Tangente	Cotangente
Radio = 1	Secante	Cosecante
	Seno-verso	Coseno-verso

787. – Abreviaciones:

ángα se lee «ángulo α»
arc α « « «arco unitario de α»
r o R « « «radio»
sen α « « «seno de α»
cos α « « «coseno de α»
tg α « « «tangente de α»

cotg α se lee «cotangente de α»
sec α « « «secante de α»
cosec α « « «cosecante de α»
senov α « « «senoverso de α»
cosenov α « « «cosenoverso de α»

788. – Las líneas y colíneas son funciones de los ángulos (fig. 462).



Los *senos*, *tangentes* y *secantes* son funciones crecientes de sus ángulos.

Los *cosenos*, *cotangentes* y *cosecantes* son funciones decrecientes de sus ángulos.

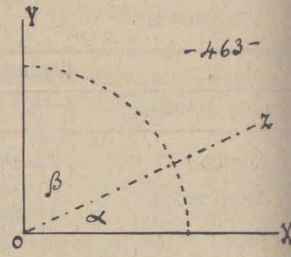
789. – Pero las líneas trigonométricas no son proporcionales a sus ángulos; ni tampoco existe una operación aritmética que nos dé el valor de estas líneas en función de la medida de sus ángulos.

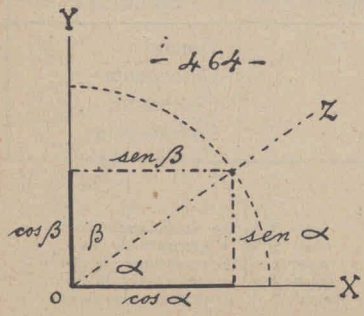
De modo que el único recurso para conocer el valor de estas líneas, es el de consultar las tablas que lo contienen.

2.° - Colíneas y líneas negativas.

790. – Dos ángulos son *complementarios* si juntos, suman un recto (fig. 463).

α y β son *complem.*





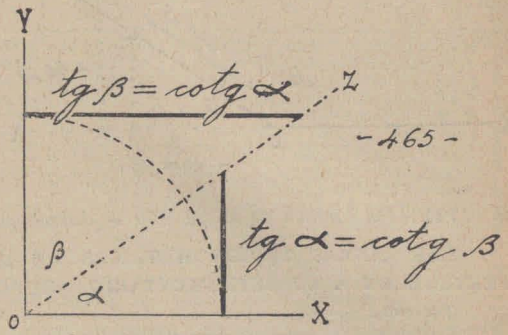
791. – Las líneas trigonométricas de un ángulo son *co-líneas* de su ángulo complementario, y viceversa. (fig. 464, h. fig. 467).

De modo que:

a) COSENO de un ángulo es el *seno* de su ángulo complementario.

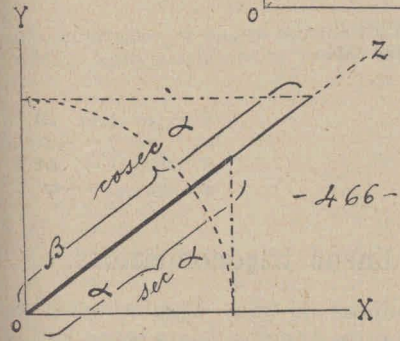
Del simple examen de la fig. 464, se deduce que;

$\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta$
$\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha$



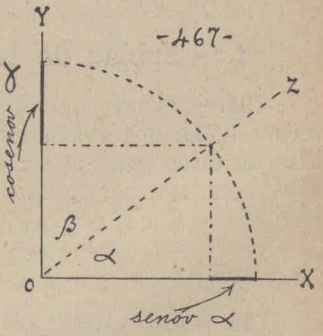
b) COTANGENTE de un ángulo es la *tangente* de su ángulo complementario (fig. 465)

$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$
$\operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$



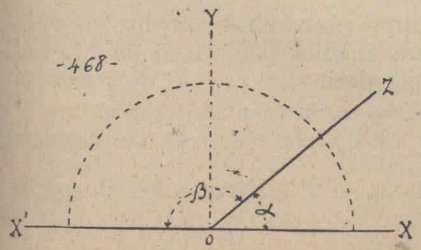
c) COSECANTE de un ángulo es la *secante* de su complemento (fig. 466).

$\operatorname{cosec} \alpha = \sec \beta$
$\operatorname{cosec} \beta = \sec \alpha$



d) COSENO-VERSO de un ángulo es el *seno-verso* de su complemento (fig. 467).

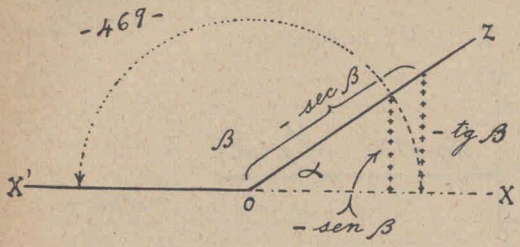
$\text{cosenov } \alpha = \text{senov } \beta$
$\text{cosenov } \beta = \text{senov } \alpha$



792. – Angulos suplementarios son los que, juntos suman dos rectos (fig. 468).

α y β son *suplem.*

793. - Fuera del caso de $\alpha = \beta = 90°$, en todo *par de suplementarios* hay un ángulo agudo y un obtuso.



LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS OBTUSOS SON LAS MISMAS QUE LAS DE SUS AGUDOS SUPLEMENTARIOS (fig. 469).

794. - *Del examen de la fig. 469 se deduce que:*

LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO OBTUSO, PERTENECEN A SU SUPLEMENTARIO AGUDO.

Por eso:

Las líneas trigonométricas de los ángulos *agudos* se consideran como POSITIVAS (+), y las de los ángulos *obtusos* se consideran como NEGATIVAS (1).

Ej:	si	*sen* α	= BC		si	*sec* α	= oD
	lg.	*sen* β	= −BC		lg.	*sec* β	= −oD
	si	*tg* α	= AD		si	*senov* α	= AC
	lg.	*tg* β	= −AD		lg.	*senov* β	= −AC

3.° - Tablas de las líneas trigonométricas.

795. - Siendo que las colíneas de unos ángulos tienen e mismo valor que las líneas de otros ángulos, basta tener las tablas de éstas para poder buscar también las de aquéllas, con sólo recordar que, p. ej.:

$$cos\ 40° = sen\ 50°$$
$$cotg\ 12° = tg\ 78°$$

NOTA. *Cos* 40^0 se lee «COSENO DE 40^0» y debe entenderse «*coseno del ángulo de* 40^0»

796. - Las tablas que aquí insertamos dan los VALORES NATURALES de las líneas para ángulos que varían de *15 en 15 minutos*, que es lo mismo que decir *de* $^1/_4$ *en* $^1/_4$ *de grado.*

Llámase **valor natural** de una línea, su VERDADERO VALOR.

La generalidad de las tablas dan el VALOR LOGARÍTMICO de las líneas.

797. - USO DE LAS TABLAS. — *1er Ejemplo.* — Buscar el valor natural del *sen* 38^0.

Tabla N.º 1

Valores naturales del seno de α

Seno de α = $/_2$ cuerda de 2α

α	$^0/_4$	$^1/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$	α	$^0/_4$	$^1/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$
0°	0,000000	0,004363	0,008726	0,013090	45°	0,707107	0,710185	0,713250	0,716302
1	0,017452	0,021815	0,026177	0,030538	46	0,719340	0,722364	0,725374	0,728371
2	0,034899	0,039260	0,043619	0,047978	47	0,731354	0,734322	0,737277	0,740218
3	0,052336	0,056693	0,061048	0,065403	48	0,743145	0,746057	0,748956	0,751840
4	0,069756	0,074108	0,078459	0,082808	49	0,754710	0,757565	0,760406	0,763232
5	0,087156	0,091502	0,095846	0,100188	50	0,766044	0,768842	0,771625	0,774393
6	0,104528	0,108867	0,113203	0,117537	51	0,777146	0,779885	0,782608	0,785317
7	0,121869	0,126199	0,130526	0,134851	52	0,788011	0,790690	0,793353	0,796002
8	0,139173	0,143493	0,147809	0,152123	53	0,798635	0,801254	0,803857	0,806445
9	0,156434	0,160743	0,165048	0,169349	54	0,809017	0,811574	0,814115	0,816641
10	0,173648	0,177943	0,182235	0,186524	55	0,819152	0,821647	0,824126	0,826590
11	0,190809	0,195090	0,199368	0,203642	56	0,829038	0,831470	0,833886	0,836286
12	0,207912	0,212178	0,216440	0,220697	57	0,838671	0,841039	0,843391	0,845728
13	0,224951	0,229200	0,233445	0,237686	58	0,848048	0,850352	0,852640	0,854912
14	0,241922	0,246153	0,250380	0,254602	59	0,857167	0,859406	0,861629	0,863835
15	0,258819	0,263031	0,267238	0,271440	60	0,866025	0,868199	0,870356	0,872496
16	0,275637	0,279829	0,284015	0,288196	61	0,874620	0,876727	0,878817	0,880891
17	0,292372	0,296542	0,300706	0,304864	62	0,882948	0,884988	0,887011	0,889017
18	0,309017	0,313164	0,317305	0,321439	63	0,891006	0,892979	0,894934	0,896873
19	0,325568	0,329691	0,333807	0,337917	64	0,898794	0,900698	0,902585	0,904455
20	0,342020	0,346117	0,350207	0,354291	65	0,906308	0,908143	0,909961	0,911762
21	0,358368	0,362438	0,366501	0,370557	66	0,913545	0,915311	0,917060	0,918791
22	0,374607	0,378649	0,382683	0,386711	67	0,920505	0,922201	0,923879	0,925540
23	0,390731	0,394744	0,398749	0,402747	68	0,927184	0,928809	0,930417	0,932008
24	0,406737	0,410719	0,414693	0,418660	69	0,933580	0,935135	0,936672	0,938191
25	0,422618	0,426569	0,430511	0,434445	70	0,939693	0,941176	0,942641	0,944089
26	0,438371	0,442289	0,446198	0,450098	71	0,945518	0,946930	0,948324	0,949699
27	0,453990	0,457874	0,461749	0,465614	72	0,951056	0,952396	0,953717	0,955020
28	0,469472	0,473320	0,477159	0,480989	73	0,956305	0,957571	0,958820	0,960050
29	0,484810	0,488621	0,492424	0,496216	74	0,961262	0,962455	0,963630	0,964787
30	0,500000	0,503774	0,507538	0,511293	75	0,965926	0,967046	0,968148	0,969231
31	0,515038	0,518773	0,522499	0,526214	76	0,970296	0,971342	0,972370	0,973379
32	0,529919	0,533614	0,537300	0,540974	77	0,974370	0,975342	0,976296	0,977231
33	0,544639	0,548293	0,551937	0,555570	78	0,978148	0,979045	0,979925	0,980785
34	0,559195	0,562805	0,566406	0,569997	79	0,981627	0,982450	0,983255	0,984041
35	0,573576	0,577145	0,580703	0,584250	80	0,984808	0,985556	0,986286	0,986996
36	0,587785	0,591310	0,594823	0,598325	81	0,987688	0,988361	0,989016	0,989651
37	0,601815	0,605294	0,608761	0,612217	82	0,990268	0,990866	0,991445	0,992005
38	0,615661	0,619094	0,622515	0,625923	83	0,992546	0,993068	0,993572	0,994056
39	0,629320	0,632705	0,636078	0,639439	84	0,994522	0,994968	0,995396	0,995805
40	0,642788	0,646124	0,649448	0,652760	85	0,996195	0,996565	0,996917	0,997250
41	0,656059	0,659346	0,66262$_0$	0,665882	86	0,997564	0,997859	0,998135	0,998392
42	0,669131	0,672367	0,67559$_0$	0,678801	87	0,998629	0,998848	0,999048	0,999229
43	0,681998	0,685183	0,688354	0,691513	88	0,999391	0,999534	0,999657	0,999762
44	0,694658	0,697790	0,700909	0,704015	89	0,999848	0,999914	0,999962	0,999990
45	0,707107	0,710185	0,71325$_0$	0,716302	90	1,000000	———	———	———

SOLUCIÓN. En la TABLA N.º 1, donde dice «α» buscamos el número 38, y junto a él, *en la columna* $^0/_4$ *leemos:* 0,615661.

Luego: *sen* 38° = 0,615661.

Esto significa que: Si R = 1 dm *sen* 38° = dm 0,615661

Si R = 1 cuadra *sen* 38° = cd 0,615661

Tabla N.° 2

Valores naturales de la tangente de α

α	$^0/_4$	$^1/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$	α	$^0/_4$	$^1/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$
0	0,000000	0,004363	0,008727	0,013091	45	1,000000	1,008765	1,017607	1,026529
1	0,017455	0,021820	0,026186	0,030553	46	1,035530	1,044614	1,053780	1,063031
2	0,034921	0,039290	0,043661	0,048033	47	1,072369	1,081794	1,091308	1,100914
3	0,052408	0,056784	0,061163	0,065543	48	1,110612	1,120405	1,130294	1,140281
4	0,069927	0,074313	0,078702	0,083094	49	1,150368	1,160557	1,170850	1,181248
5	0,087489	0,091887	0,096289	0,100695	50	1,191754	1,202369	1,213097	1,223939
6	0,105104	0,109518	0,113936	0,118358	51	1,234897	1,245974	1,257172	1,268494
7	0,122785	0,127216	0,131652	0,136094	52	1,279942	1,291518	1,303225	1,315067
8	0,140541	0,144993	0,149451	0,153915	53	1,327045	1,339162	1,351422	1,363828
9	0,158384	0,162860	0,167343	0,171831	54	1,376382	1,389088	1,401948	1,414967
10	0,176327	0,180829	0,185339	0,189856	55	1,428148	1,441494	1,455009	1,468697
11	0,194380	0,198912	0,203452	0,208000	56	1,482561	1,496606	1,510835	1,525253
12	0,212556	0,217121	0,221695	0,226277	57	1,539865	1,554674	1,569686	1,584904
13	0,230868	0,235469	0,240079	0,244698	58	1,600334	1,615982	1,631852	1,647949
14	0,249328	0,253968	0,258618	0,263278	59	1,664279	1,680849	1,697663	1,714728
15	0,267949	0,272631	0,277324	0,282029	60	1,732051	1,749637	1,767494	1,785628
16	0,286745	0,291473	0,296213	0,300966	61	1,804048	1,822759	1,841771	1,861090
17	0,305731	0,310508	0,315299	0,320102	62	1,880726	1,900687	1,920982	1,941620
18	0,324920	0,329750	0,334595	0,339454	63	1,962610	1,983964	2,005690	2,027799
19	0,344328	0,349216	0,354119	0,359037	64	2,050304	2,073215	2,096544	2,120303
20	0,363970	0,368919	0,373885	0,378866	65	2,144507	2,169168	2,194300	2,219918
21	0,383864	0,388879	0,393910	0,398960	66	2,246037	2,272673	2,299842	2,327563
22	0,404026	0,409111	0,414214	0,419335	67	2,355852	2,384729	2,414214	2,444326
23	0,424475	0,429634	0,434812	0,440011	68	2,475087	2,506520	2,538648	2,571496
24	0,445229	0,450467	0,455726	0,461006	69	2,605089	2,639455	2,674621	2,710619
25	0,466308	0,471631	0,476975	0,482343	70	2,747477	2,785231	2,823913	2,863560
26	0,487733	0,493145	0,498582	0,504041	71	2,904211	2,945905	2,988685	3,032595
27	0,509525	0,515034	0,520567	0,526125	72	3,077683	3,123999	3,171595	3,220526
28	0,531709	0,537319	0,542956	0,548619	73	3,270853	3,322636	3,375943	3,430845
29	0,554309	0,560027	0,565773	0,571547	74	3,487414	3,545732	3,605883	3,667957
30	0,577350	0,583183	0,589045	0,594937	75	3,732051	3,798266	3,866713	3,937509
31	0,600861	0,606815	0,612801	0,618819	76	4,010781	4,086663	4,165300	4,246848
32	0,624869	0,630953	0,637070	0,643222	77	4,331476	4,419364	4,510708	4,605721
33	0,649408	0,655629	0,661886	0,668179	78	4,704630	4,807685	4,915157	5,027339
34	0,674508	0,680876	0,687281	0,693725	79	5,144554	5,267152	5,395517	5,530072
35	0,700207	0,706730	0,713293	0,719897	80	5,671282	5,819657	5,975764	6,140230
36	0,726543	0,733230	0,739961	0,746735	81	6,313751	6,497104	6,691156	6,896880
37	0,753554	0,760418	0,767327	0,774283	82	7,115370	7,347861	7,595754	7,860642
38	0,781286	0,788336	0,795436	0,802585	83	8,144346	8,448957	8,776887	9,130935
39	0,809784	0,817034	0,824336	0,831691	84	9,514364	9,931009	10,385397	10,882921
40	0,839100	0,846562	0,854081	0,861655	85	11,430052	12,034622	12,706205	13,456625
41	0,869287	0,876976	0,884725	0,892534	86	14,300666	15,257052	16,349856	17,610559
42	0,900404	0,908336	0,916331	0,924390	87	19,081137	20,818828	22,903765	25,451700
43	0,932515	0,940706	0,948965	0,957292	88	28,636253	32,730264	38,188459	45,829351
44	0,965689	0,974157	0,982697	0,991311	89	57,289962	76,390009	114,588650	229,181660
45	1,000000	1,008765	1,017607	1,026529	90	∞	—	—	—

798. – *2° Ejemplo.* — Buscar el valor natural del *cos* 27°.

SOLUCIÓN: $\cos 27° = \operatorname{sen} 63°$

Buscando como en el caso anterior, encontramos:

$$\operatorname{sen} 63° = 0{,}891006$$

luego

$$\cos 27° = 0{,}891006$$

799. – *3er. Ejemplo.* — Buscar el valor natural de la *tg* 17° 30'.

SOLUCIÓN: 17° 30' = $17^{2}/_{4}$ °

En la TABLA N° 2, buscamos en la columna «α» el núm. 17.

En ese *renglón*, debajo del título $^{2}/_{4}$ leemos: 0,315299.

Luego: *tg* 17° 30' = 0,315299

800. – *4° Ejemplo.* — Buscar el valor natural de la *sec* 72° 45'.

SOLUCIÓN: 72° 45' = $72^{3}/_{4}$ °

En la TABLA N° 3, buscamos en la columna «α» el núm. 72.

En ese *renglón*, debajo del título $^{3}/_{4}$ leemos: 3,372208.

Luego: *sec* 72° 45' = 3,372208.

801. – Cuando la fracción de grado, no corresponde a «*cuartos*» se recurre a la interpolación, la cual es suficientemente exacta si trabajamos con 2 ó 3 cifras decimales.

La siguiente tabla nos indica con cuantas cifras decimales podemos trabajar en las interpolaciones, cuando usamos estas tablas.

En las interpolaciones		
Para senos, tangentes y secantes	*Se pueden usar*	*Para seno versos*
hasta 5°	6 cifras decimales	hasta los 85°
» 35°	5 » »	» » 80°
» 60°	4 » »	» » 70°
» 70°	2 » »	» » 60°
» 80°	3 » »	» » 35°
» 85°	1 » »	» » 5°
» 90°	0 » »	» » 0°

802. Como se puede ver en el encabezamiento de la TABLA N.° 1 y como se puede comprobar con un simple croquis geométrico:

LAS TABLAS DE LOS SENOS, CONTIENEN TAMBIÉN EL VALOR DE LAS CUERDAS..

Para buscar dicho valor, basta saber que:

$$sen\ \alpha = {}^{1}/_{2}\ cd\ 2\alpha \qquad \text{o sea} \qquad cd\ \beta = 2\ sen\ {}^{1}/_{2}\ \beta$$

303. –*Ejemplo.* — ¿Cuánto mide la *cd* 89°?

SOLUCIÓN: $89 \div 2 = 44^{2}/_{4}$

Buscando en la TABLA N.° 1: *sen* $44^{2}/_{4}° = 0{,}700909$

luego $cd89° = 0{,}700909 \times 2 = 1{,}401818$

Tabla N.° 3

Valores naturales de la secante de α

α	0/4	1/4	2/4	3/4	α	0/4	1/4	2/4	3/4
0	1,000000	1,000009	1,000038	1,000086	45	1,414214	1,420425	1,426718	1,433095
1	1,000152	1,000238	1,000343	1,000467	46	1,439556	1,446104	1,452740	1,459464
2	1,000609	1,000772	1,000953	1,001153	47	1,466279	1,473186	1,480187	1,487283
3	1,001372	1,001611	1,001869	1,002146	48	1,494476	1,501768	1,509160	1,516655
4	1,002442	1,002757	1,003092	1,003446	49	1,524253	1,531957	1,539760	1,547691
5	1,003820	1,004213	1,004625	1,005057	50	1,555724	1,563871	1,572134	1,580515
6	1,005508	1,005979	1,006470	1,006980	51	1,589016	1,597639	1,606388	1,615264
7	1,007510	1,008059	1,008629	1,009218	52	1,624269	1,633407	1,642680	1,652090
8	1,009828	1,010457	1,011106	1,011776	53	1,661640	1,671334	1,681173	1,691161
9	1,012465	1,013175	1,013905	1,014656	54	1,701302	1,711597	1,722051	1,732666
10	1,015427	1,016218	1,017030	1,017863	55	1,743447	1,754396	1,765517	1,776814
11	1,018717	1,019591	1,020487	1,021403	56	1,788292	1,799752	1,811801	1,823842
12	1,022341	1,023299	1,024279	1,025281	57	1,836078	1,848516	1,861159	1,874012
13	1,026304	1,027349	1,028415	1,029503	58	1,887080	1,900368	1,913881	1,927624
14	1,030613	1,031746	1,032900	1,034077	59	1,941604	1,955825	1,970294	1,985017
15	1,035276	1,036498	1,037742	1,039009	60	2,000000	2,015249	2,030772	2,046575
16	1,040299	1,041613	1,042949	1,044309	61	2,062665	2,079051	2,095738	2,112737
17	1,045692	1,047099	1,048529	1,049984	62	2,130054	2,147699	2,165681	2,184007
18	1,051462	1,052965	1,054492	1,056044	63	2,202689	2,221736	2,241158	2,260967
19	1,057621	1,059222	1,060849	1,062500	64	2,281172	2,301786	2,322820	2,244288
20	1,064178	1,065881	1,067609	1,069364	65	2,366202	2,388575	2,411421	2,434755
21	1,071145	1,072952	1,074786	1,076647	66	2,458593	2,482950	2,507843	2,533288
22	1,078535	1,080450	1,082392	1,084362	67	2,559305	2,585911	2,613126	2,640971
23	1,086360	1,088387	1,090441	1,092524	68	2,669467	2,698637	2,728504	2,759092
24	1,094636	1,096777	1,098948	1,101148	69	2,790428	2,822538	2,855451	2,889196
25	1,103378	1,105638	1,107928	1,110250	70	2,923804	2,959309	2,995744	3,033146
26	1,112602	1,114985	1,117400	1,119847	71	3,071553	3,111006	3,151545	3,193217
27	1,122326	1,124838	1,127382	1,129959	72	3,236068	3,280148	3,325509	3,372208
28	1,132570	1,135215	1,137893	1,140606	73	3,420304	2,469858	3,520936	3,573611
29	1,143354	1,146137	1,148955	1,151810	74	3,627955	3,684049	3,741977	3,801830
30	1,154700	1,157628	1,160592	1,163594	75	3,863703	3,927700	3,993929	4,062509
31	1,166633	1,169711	1,172828	1,175983	76	4,133565	4,207233	4,283658	4,362994
32	1,179178	1,182416	1,185689	1,189005	77	4,445411	4,531090	4,620226	4,713031
33	1,192363	1,195763	1,199205	1,202690	78	4,809734	4,910584	5,015852	5,125831
34	1,206218	1,209790	1,213406	1,217068	79	5,240843	5,361239	5,487404	5,619760
35	1,220775	1,224527	1,228327	1,232174	80	5,758770	5,904948	6,058858	6,221127
36	1,236068	1,240011	1,244003	1,248044	81	6,392453	6,573611	6,765469	6,968999
37	1,252136	1,256278	1,260472	1,264719	82	7,185296	7,415596	7,661298	7,923995
38	1,269018	1,273371	1,277779	1,282241	83	8,205509	8,507930	8,833671	9,185530
39	1,286760	1,291335	1,295967	1,300658	84	9,566772	9,981229	10,433430	10,928768
40	1,305407	1,310217	1,315087	1,320019	85	11,473713	12,076098	12,745495	13,493731
41	1,325013	1,330071	1,335192	1,340379	86	14,335587	15,289788	16,380408	17,638928
42	1,345633	1,350953	1,356342	1,361799	87	19,107322	20,842830	22,925586	25,471337
43	1,367327	1,372927	1,378598	1,384344	88	28,653708	32,745536	38,201550	45,840260
44	1,390164	1,396059	1,402032	1,408083	89	57,298689	76,396554	114,59301	229,18385
45	1,414214	1,420425	1,426718	1,433095	90	∞	—	—	—

804.– Como se puede ver en el encabezamiento de la TABLA N.° 4, y como se comprueba con un simple croquis.

LA TABLA DE LOS SENO–VERSOS, CONTIENE TAMBIÉN EL VALOR DE LAS FLECHAS.

Tabla N°. 4

Valores naturales del seno-verso de α

Senoverso de α = Flecha 2 α

α	$0/4$	$1/4$	$2/4$	$3/4$	α	$0/4$	$1/4$	$2/4$	$3/4$
0°	0,000000	0,000010	0,000038	0,000086	45°	0,292893	0,295985	0,299091	0,302210
1	0,000152	0,000238	0,000343	0,000466	46	0,305342	0,308487	0,311646	0,314817
2	0,000609	0,000771	0,000952	0,001152	47	0,318002	0,321199	0,324410	0,327633
3	0,001371	0,001608	0,001865	0,002141	48	0,330869	0,334118	0,337380	0,340654
4	0,002436	0,002750	0,003083	0,003435	49	0,343941	0,347240	0,350552	0,353876
5	0,003805	0,004195	0,004604	0,005032	50	0,357212	0,360561	0,363922	0,367295
6	0,005478	0,005944	0,006428	0,006932	51	0,370680	0,374077	0,377485	0,380906
7	0,007454	0,007995	0,008555	0,009134	52	0,384339	0,387783	0,391239	0,394706
8	0,009732	0,010349	0,010984	0,011639	53	0,398185	0,401675	0,405177	0,408690
9	0,012312	0,013004	0,013714	0,014444	54	0,412215	0,415750	0,419297	0,422855
10	0,015192	0,015959	0,016745	0,017550	55	0,426424	0,430003	0,433594	0,437195
11	0,018373	0,019215	0,020075	0,020955	56	0,440807	0,444430	0,448063	9,451707
12	0,021852	0,022769	0,023704	0,024658	57	0,455361	0,459026	0,462700	0,466386
13	0,025630	0,026621	0,027630	0,028658	68	0,470081	0,473786	0,477501	0,481227
14	0,029704	0,030769	0,031852	0,032954	59	0,484962	0,488707	0,492462	0,496226
15	0,034074	0,035213	0,036370	0,037545	60	0,500000	0,503784	0,507576	0,511379
16	0,038738	0,039950	0,041180	0 042429	61	0,515190	0,519011	0,522841	0,526680
17	0,043695	0,044980	0,046283	0,047604	62	0,530528	0,534386	0,538251	0,542126
18	0,048944	0,050301	0,051676	0,053070	63	0,546010	0,549902	0,553802	0,557711
19	0,054482	0,055911	0,057359	0,058824	64	0,561629	0,565555	0,569489	0,573431
20	0,060307	0,061809	0,063328	0,064865	65	0,577382	0,581340	0,585307	0,589281
21	0,066420	0,067992	0,069583	0,071191	66	0,593263	0,597253	0,601251	0,605256
22	0,072816	0,074460	0,076121	0,077799	67	0,609269	9,613289	0,617317	0,621351
23	0,079495	0,081209	0,082940	0,084689	68	0,625393	0;629443	0,633499	0,637562
24	0,086455	0,088238	0,090039	0,091857	69	0,641632	0,645709	0,649793	0,653883
25	0,093692	0,095545	0,097415	0,099302	70	0,657980	0,662083	0,666193	0,670309
26	0,101206	0,103127	0,105066	0,107021	71	0,674432	0,678561	0,682695	0,686836
27	0,108994	0,110983	0,112989	0,115012	72	0,690983	0,695136	0,699294	0,703458
28	0,117052	0,119109	0,121183	0,123273	73	0,707628	9,711804	0,715985	0,720171
29	0,125380	0,127504	0,129644	0,131801	74	0,724363	0,728560	0;732762	0,736969
30	0,133975	0,136165	0,138371	0,140594	75	0,741181	0,745398	0,749620	0,753847
31	0,142833	0,145088	0,147360	0,149648	76	0,758078	0,762314	0,766555	0,770800
32	0,151952	0,154272	0,156609	0,158961	77	0,775049	0,779303	0,783560	0,787822
33	0,161329	0,163714	0,166114	0,168530	78	0,792088	0,796358	0,800632	0,804910
34	0,170962	0,173410	0,175874	0,178353	79	0,809191	0,813476	0,817765	0,822057
35	0,180848	0,183359	0,185885	0,188426	80	0,826352	0,830651	0,834952	0,839257
36	0,190983	0,193555	0,196143	0,198746	81	0,843566	0,847877	0,852191	0,856507
37	0,201365	0,203998	0,206647	0,209310	82	0,860827	0,865149	0,869474	0,873801
38	0,211989	0,214683	0,217392	0,220115	83	0,878131	0,882463	0,886797	0,891133
39	0,222854	0,225607	0,228375	0,231158	84	0,895472	0,899812	0,904154	0,908498
40	0,233956	0,236768	0,239594	0,242435	85	0,912844	0,917192	0,921541	0,925892
41	0,245290	0,248160	0,251044	0,253943	86	0,930244	0,934597	0,938952	0,943307
42	0,256855	0,259782	0,262723	0,265678	87	0,947664	0,952022	0,956381	0,960740
43	0,268646	0,271629	0,274626	0,277636	88	0,965101	0,969462	0,973823	0,978185
44	0,280660	0,283698	0,286750	0,289815	89	0,982548	0,986910	0,991274	0,995637
45	0,292893	0,295985	0,299091	0,302210	90	1,000000	———	———	———

Para buscar dicho valor, basta saber que:

$$senv\ \alpha = fl\ 2\alpha$$

o sea

$$fl\ \beta = senv\ \tfrac{1}{2}\beta$$

805. – *Ejemplo.* — ¿Cuánto mide la *fl* 63°30'.

SOLUCIÓN: $63\ ^1/_2 \div 2 = 31\ ^3/_4$

Buscando en la TABLA N°4:

$$sen\,v\ 31\ ^3/_4{}^\circ = 0{,}149648$$

luego: $$fl\ 63°30' = 0{,}149648 \quad (1)$$

806. – *Porción útil de una fracción.* — Los valores que figuran en estas tablas, contienen 6 cifras decimales; pero en los cálculos escolares aconsejamos usar *una o dos cifras* decimales, despreciando las demás.

La porción decimal *suficiente* para un cálculo, la denominaremos **porción útil**, y la restante se considerará como PORCIÓN DESPRECIABLE o **inútil**.

Cuando la porción despreciable comienza por 5 o cifra mayor, debe añadirse una unidad a la porción útil.

Ej.: 0,279351 <> 0,27935 <> 0, 2794 <> 0,279 <> 0,28 <>0,3

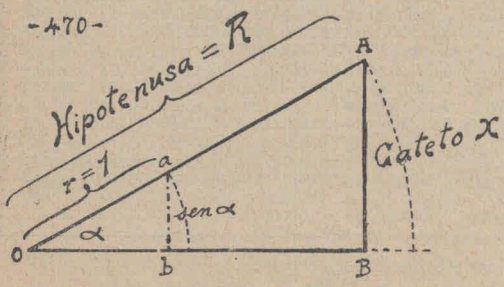
4.° - Valor de los lados de un triángulo.

807. – Los valores trigonométricos sirven para medir los lados de los triángulos en función de un ángulo y uno de los otros dos lados.

En los triángulos rectángulos se pueden presentar cuatro problemas directos:

808. – *1er. Problema.* VALUAR UN CATETO, CONOCIENDO SU ÁNGULO OPUESTO Y LA HIPOTENUSA (fig. 470).

Valuar **BA** en función de α y **oA**.



Del simple examen de la figura se deduce que:

$$\mathbf{AB} \ /\!/ \ \mathbf{ab}$$

pero si $\mathbf{r} = 1$ (*uno*)

$$\mathbf{ab} = sen\,\alpha$$

p. l. t. $\mathbf{AB} \ /\!/ \ sen\,\alpha$

Siendo semejantes

$$\triangle \mathbf{oab} \text{ y } \triangle \mathbf{oAB}$$

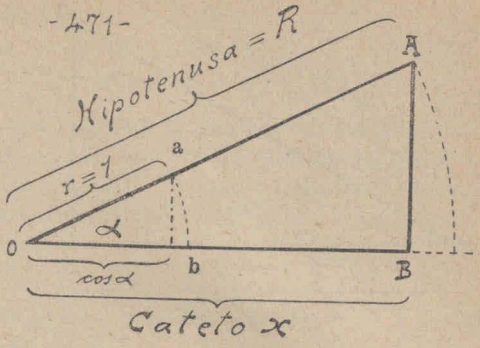
tendremos que

$$\frac{\mathbf{AB}}{sen\,\alpha} = \frac{\mathbf{R}}{1}$$

(1). A los que para trabajos delicados necesitaran tablas más completas, les aconsejamos las «TABLES POUR LE TRACÉ DE COURBES» de JULIO GAUNIN, (Editor: DUNOD, París).

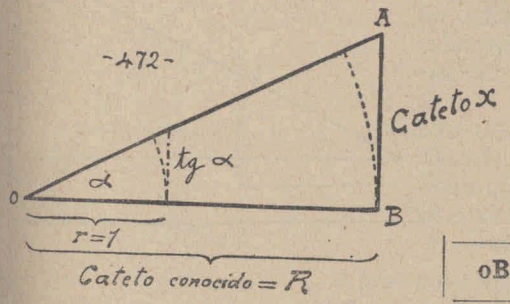
de donde

$$\mathbf{AB} = \mathbf{R} \times sen\ \alpha$$



809. – *2.° Problema. — Valuar un cateto en función de su ángulo contiguo y la hipotenusa* (fig. 471).

Valuar **oB** en función de α y **oA**.



De la semejanza de $\triangle$**oab** y $\triangle$**oAB** se deduce que

$$\frac{\mathbf{oB}}{cos\alpha} = \frac{\mathbf{R}}{1}$$

de donde

$$\mathbf{oB} = \mathbf{R} \times cos\ \alpha$$

810. – *3er. Problema.* — VALUAR UN CATETO EN FUNCIÓN DE SU ÁNGULO OPUESTO Y DEL OTRO CATETO (fig. 472).

Valuar **AB** en función de α y **oB**

Ahora el radio no es la hipotenusa, sino *el otro cateto;* por eso cambia la relación y se tiene:

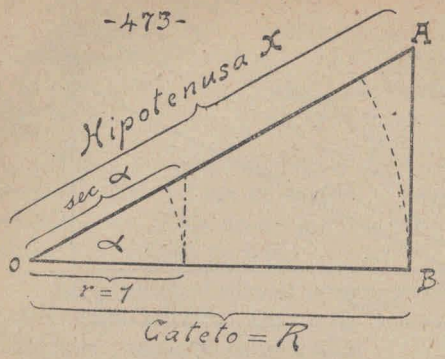
$$\frac{\mathbf{AB}}{tg\alpha} = \frac{\mathbf{R}}{1}$$

de donde

$$\mathbf{AB} = \mathbf{R} \times tg\ \alpha$$

811. – *4.° Problema.* — VALUAR LA HIPOTENUSA EN FUNCIÓN DE UN ÁNGULO Y DEL CATETO CONTIGUO A DICHO ÁNGULO (fig. 473).

Valuar **oA** en función de α y **oB**.



$$\frac{oA}{sec\,\alpha} = \frac{R}{1}$$

de donde

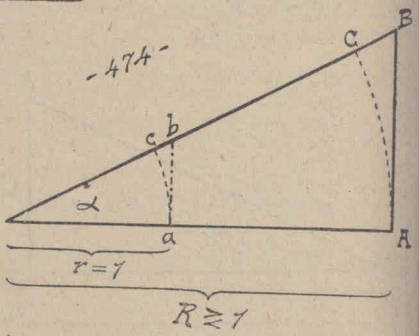
$$oA = R \times sec\ \alpha$$

812. – Como se deduce de los cuatro problemas anteriores:

TODO EL TRABAJO DE PLANTEO DE LAS *fórmulas directas* CONSISTE EN SABER BUSCAR:

a) CUÁL ES EL LADO QUE HARÁ EL PAPEL DE **R**.

b) QUÉ FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA LE CORRESPONDE AL LADO INCÓGNITO.



La fórmula general será siempre

$$y = R \times x$$

R = lado que tiene función de radio

y = lado incógnito

x = línea trigonométrica homóloga de **y**, y perteneciente al ángulo que se halla en el centro de **R**

813. – Explicaremos una frase usada en el aparte anterior.

Función trigonométrica DE UN SEGMENTO CUALQUIERA (fig. 474). – Si $R \neq 1$ existe un $r = 1$

P. l. t. a) $AC = f$ (**R, ac**)

Léase: «**AC** es función de **R** y de **ac**»

Si consideramos a **R** como magnitud constante, p. ej. $R = 3$ *Hm*, tendremos

$$AC = f\ (ac)$$

Léase: «**AC** es función de **ac**»

Pero **ac** es el arco unitario de α

luego $AC = f\ (arc\ \alpha)$

Léase: «**AC** es función del arco de α»

b) Con el mismo raciocinio obtenemos que

$$AB = f\ (\text{tg}\ \alpha)$$

$$oB = f\ (\text{sec}\ \alpha)$$

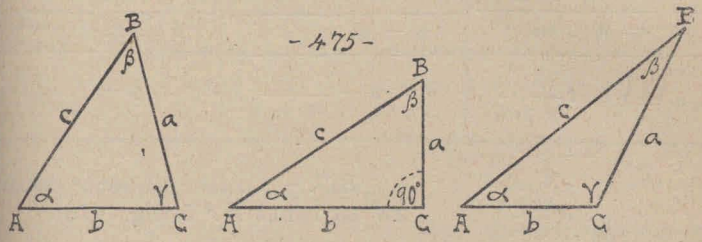
814. – De lo dicho resulta que:

LOS LADOS DE TODO TRIÁNGULO RECTÁNGULO SON FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DEL TRIÁNGULO.

815. – Como no siempre está un alumno dispuesto a *razonar* para descubrir la fórmula que le conviene adoptar en su trabajo, damos a continuación las tablas de fórmulas prácticas para la solución de los problemas trigonométricos.

Para entender las fórmulas, hay que conocer la notación *que adoptamos en el simbolismo de los elementos del triángulo.*

816. – NOTACIÓN ADOPTADA PARA LAS TABLAS N.°5 Y N.° 6 (fig. 475.)



A, B, C = vértices

Cuando el triángulo es *rectángulo*: **C** = vértice del áng. recto.

α, β, γ = ángulos que corresponden *respectivamente* a los vértices **A, B y C.**

a, b, c = lados que se oponen *respectivamente* a los vértices **A, B y C.**

Completando la notación, aunque no nos valdremos de esto último, añadiremos que:

a) A veces se nombran los ángulos por el nombre de sus vértices, de modo que en tal caso:

$$A = \alpha \qquad B = \beta \qquad C = \gamma$$

b) Como los segmentos de recta se nombran mediante las letras de sus vértices, resulta que:

$$a = BC \qquad b = AC \qquad c = AB$$

Tabla N.° 5

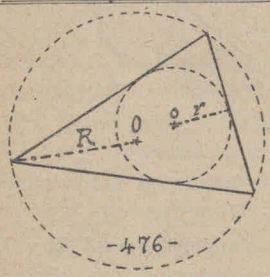
VALORES TRIGONOMÉTRICOS DE LOS LADOS DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO.			
$a = c \times sen\ \alpha$	$a = b \times tg\ \alpha$	$b = c \times cos\ \alpha$	$c = b \times sec\ \alpha$
$b = c \times sen\ \beta$	$b = a \times tg\ \beta$	$a = c \times cos\ \beta$	$c = a \times sec\ \beta$

En la tabla anterior no se dan fórmulas con COSECANTES *y* COTANGENTES, *porque estas líneas no son tan usables como el* COSENO.

Tabla N.° 6

VALORES TRIGONOMÉTRICOS DE LOS LADOS DE CUALQUIER TRIÁNGULO.

$a = b.\ cos\ \gamma + c.\ cos\beta$	$b = a.\ cos\ \gamma + c.\ cos\ \alpha$	$c = a.\ cos\ \beta + b.\ cos\ \alpha$
$a = p \times \frac{sen\ \frac{1}{2}\ \alpha}{cos\ \frac{1}{2}\beta.\ cos\ \frac{1}{2}\ \gamma}$	$b = p \times \frac{sen\ \frac{1}{2}\ \beta}{cos\ \alpha.\ cos\ \frac{1}{2}\ \gamma}$	$c = p \times \frac{sen\ \frac{1}{2}\ \gamma}{cos\ \frac{1}{2}\ \alpha.\ cos\ \frac{1}{2}\beta}$
$a = p.\ sen\ \frac{1}{2}\ \alpha.\ sec\ \frac{1}{2}\ \beta.\ sec\ \frac{1}{2}\ \gamma$	$b = p.\ sen\ \frac{1}{2}\ \beta.\ sec\ \frac{1}{2}\ \alpha.\ sec\ \frac{1}{2}\ \gamma$	$c = p.\ sen\ \frac{1}{2}\ \gamma.\ sec\ \frac{1}{2}\ \alpha.\ sec\ \frac{1}{2}\ \beta$
$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,bc.\ cos\alpha}$	$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac.\ cos\beta}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.cos\gamma}$
$a = R.\ 2\ sen\ \alpha$	$b = R.\ 2\ sen\ \beta$	$c = R.\ 2\ sen\ \gamma$
$a = p - \varepsilon \frac{r}{tg\ \frac{1}{2}\alpha}$	$b = p - \frac{r}{tg\ \frac{1}{2}\ \beta}$	$c = p - \frac{r}{tg\ \frac{1}{2}\ \gamma}$



817. – OTROS SÍMBOLOS USADOS EN LA TABLA N.° 5 (fig. 476).

p = perímetro del triángulo

R radio del círculo circunscrito

r = radio del círculo inscrito

sen $\frac{1}{2}\alpha$ = seno de la mitad de α (que se puede leer así: «seno de medio α»)

5.° – Correlación de las líneas trigonométricas.

818. – A menudo en las fórmulas nos vemos obligados a sustituir una expresión trigonométrica por otra más simple o más comoda.

Las relaciones que se insertan a continuación, simplificarán el trabajo.

819.–VALORES RECÍPROCOS. Ya vimos que: DOS NÚMEROS SON **recíprocos** CUANDO, SI UNO DE ELLOS VALE **n**, EL OTRO VALE $\frac{1}{n}$

Esto es lo mismo que decir que: n = recípr. $\frac{1}{n}$ o sino $\frac{n}{m}$ = recípr. $\frac{m}{n}$

Véase en su lugar (pág. 70) las propiedades de los números recíprocos.

820.–En Trigonometría, son recíprocos los siguientes valores:

$sec\ \alpha$ = recípr. $cos\ \alpha$ $\qquad$ $sen\ \alpha$ = recípr. $cosec\ \alpha$

$tg\ \alpha$ = recípr. $cotg\ \alpha$ $\qquad$ $cos\ \alpha$ = recípr. $\sqrt{1+tg^2\alpha}$

De donde se deduce que:

$$sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} \qquad cos\alpha = \frac{1}{sec\ \alpha}$$

$$sen\ \alpha = \frac{1}{cosec\ \alpha} \qquad cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

$$tg\ \alpha = \frac{1}{cotg\ \alpha} \qquad cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

$$cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \qquad \sqrt{1+tg^2\alpha} = \frac{1}{cos\ \alpha}$$

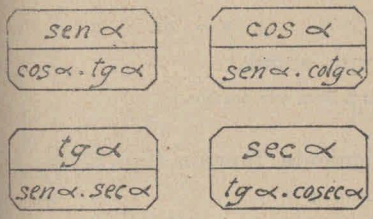
821.– Relaciones de suma y resta.

$$senov\ \alpha + cos\ \alpha = 1 \qquad cosenov\ \alpha + sen\ \alpha = 1$$

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$$

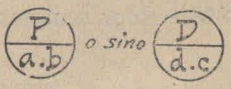
$$sec^2\alpha - tg^2\alpha = 1 \qquad cosec^2\alpha - cotg^2\alpha = 1$$

822.– Relaciones por cociente.

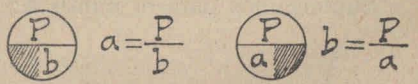


Las fórmulas adjuntas son sintéticas, y son muy cómodas para deducir de ellas las fórmulas comunes.

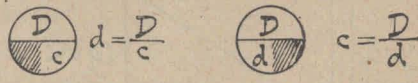
Basta saber que:

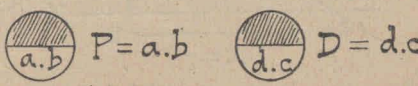


P (*producto*)
a y b (*factores de* P)
D (*dividendo*)
d (*divisor*) c (*cociente*)



823.– Para usar estas fórmulas se tapa la cantidad que consideramos como función y lo que queda descubierto es su valor.





EN EL TEXTO ABREVIAREMOS LAS EXPLICACIONES, VALIÉNDONOS DE LAS FÓRMULAS SINTÉTICAS.

824. – Las fórmulas sintéticas son abreviaciones de igualdades en las que uno de los miembros se redujo a la unidad.

Ej.: $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha . tg\ \alpha}$ significa $1 = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha . tg\ \alpha}$

Para leer estas fórmulas, considérese cada casilla como miembro de una igualdad.

La fórmula anterior se leerá, pues:

$$sen\ \alpha = cos\ \alpha . tg\ \alpha$$

Como se ve, ESTAS FÓRMULAS SON RIGUROSAMENTE MATEMÁTICAS.

6.° – Valor trigonométrico del coeficiente angular.

825. – Ya vimos que en $y = ax + b$

a = coeficiente angular.

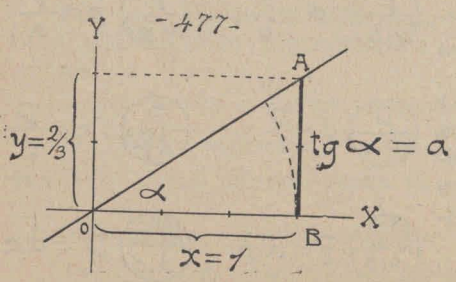
Véase en (770) porque a lleva este nombre.

826. – Representemos la siguiente función (fig. 377).

$$y = \tfrac{2}{3} x$$

(cuyo coeficiente angular es $\frac{2}{3}$.)

Supongamos para el punto **A**: $x = 1$



En tal caso:

$y = \frac{2}{3}$

Tracemos el arco de α

Siendo $oB = 1$

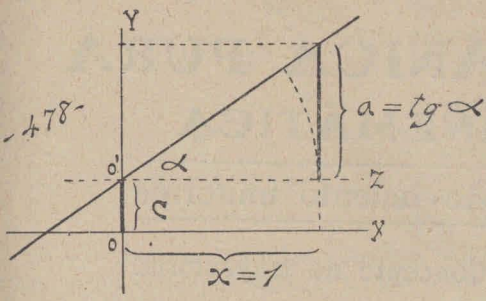
tendremos que

$AB = tg\ \alpha$

que es lo mismo que decir que $\frac{2}{3} = tg\ \alpha$

Y como $^2/_3$ = **a** (coeficiente angular), resulta que:

EL COEFICIENTE ANGULAR ES LA TANGENTE DEL ÁNGULO.



827. – Cuando la gráfica corresponde a la ecuación:

$$y = ax + c$$

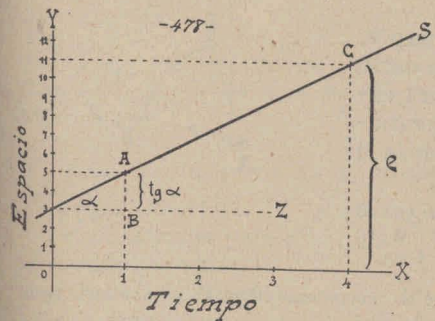
si damos a **x** el valor de *1* y trazamos

o'Z // oX

vemos que también aquí:

$$a = tg\ \alpha$$

828. – PROBLEMA. – *Un móvil ahora dista* **3 m.** *de un punto de referencia, y se está alejando de él a razón de* **2 m. por seg.** *Búsquese gráficamente su distancia al punto de referencia dentro de* **4 seg.**



FÓRMULA

$$e = c + vt$$

e (espacio o distancia actual)
v (velocidad)
c (distancia inicial)
t (tiempo)

APLICACIÓN

$$e = 3 + 2t$$

SOLUCIÓN (fig. 478 bis). — **o3** = *c* = 3

3Z // oX

Se busca **A** (**x**=1, **y**=2)

La porción **AB** es la *tg* α

Luego. **3S** es la gráfica buscada

El segmento **4C** da la medida de **e**

MECÁNICA PURA

CINEMÁTICA

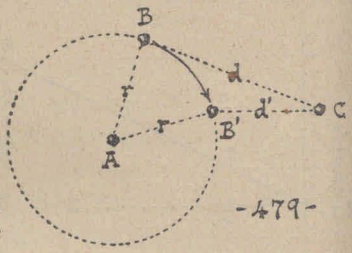
I°.-Movimiento uniforme

1.° -- Concepto de trayectoria.

829. – Se dice que un cuerpo está **quieto** o EN REPOSO con respecto a otros cuerpos, cuando no cambian las relaciones de *distancia* que tiene con ellos.

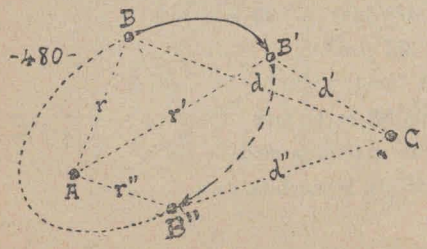
Y se dice que un cuerpo está **moviéndose** con respecto a otros cuerpos, cuando cambia alguna de las relaciones de *distancia* que tiene con ellos.

830. – Dados tres cuerpos, **A**, **B** y **C** (fig. 479), puede darse el caso de que la distancia **r** entre **B** y **A**, permanezca invariable, a pesar de que la distancia **d** entre **B** y **C**, esté variando.

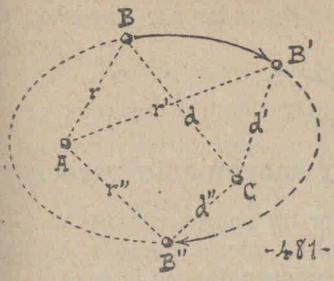


Por lo tanto, para saber que **B** *se mueve, basta advertir que* **d** *va variando de dimensión.*

Pero para saber qué clase de movimiento tiene **B**, *es necesario conocer también cuáles son las variaciones de* **r**.



En la fig. 480, varían las dos distancias **r** y **d**; pero este caso es homólogo del anterior, porque en ambos podemos decir que **B** SE TRASLADA ALREDEDOR DE **A**.

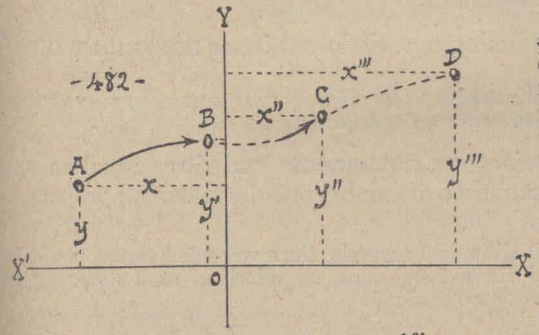


En la fig. 481 tenemos TRASLACIÓN de **B** al rededor de **A** y **C**.

831. – Trayectoria es la línea engendrada por el núcleo puntual de un móvil cualquiera.

Ya vimos que en cualquier cuerpo podemos determinar un punto cualquiera de referencia, al que consideramos como NÚCLEO *de dicho cuerpo, a fin de estudiar su relación geométrica con los núcleos de los demás cuerpos.*

832. – Las trayectorias pueden ser RECTILÍNEAS O CURVILÍNEAS; y éstas pueden ser PLANAS O SÓLIDAS.



Para conocer, a simple observación, la forma de una trayectoria nos valemos de la vista, pero si queremos estudiar con exactitud dicha forma, debemos recurrir al sistema de coordenadas cartesianas (fig. 482).

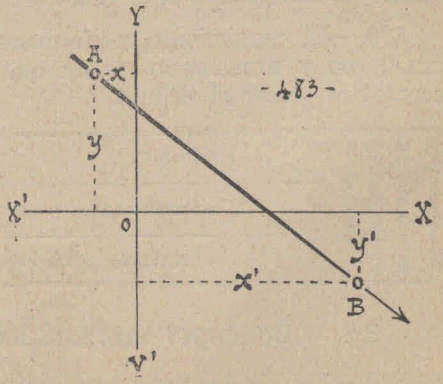
833. – Como se ve:

TODA TRAYECTORIA ES LA **gráfica** DE UNA FUNCIÓN.

Y recíprocamente:

Toda gráfica se puede considerar como la trayectoria de un punto cuyas coordenadas con respecto a dos o tres ejes van variando conforme a una función.

Si la trayectoria es plana, tiene dos variables; si es sólida tiene tres.



834. – TRAYECTORIA RECTILÍNEA (fig. 483) es aquella que obedece a la función general: $y = a + bx$ $\quad a \gtrless \text{cero} \quad b \gtrless \text{cero}$

835. – TRAYECTORIAS CURVILÍNEAS son las que obedecen a la función general

$$y = (a + b\ x^n)^m$$

a $\gtrless$ cero **b** $\gtrless$ cero **m** *y* **n** cualquier número, menos *cero* o + 1.

2°. – Movimiento uniforme y movimiento variado.

836. – El movimiento puede ser UNIFORME Y VARIADO..

Movimiento **uniforme**, es aquel en que a tiempos iguales corresponden espacios iguales, *por pequeña que sea la porción de tiempo elegida para su observación.*

Movimiento **variado** es aquel en que a tiempos iguales corresponden espacios desiguales.

837. – El movimiento variado puede ser IRREGULAR O REGULAR.

Entre los movimientos regulares existe el UNIFORMEMENTE VARIADO, *que es el único que tomaremos en consideración.*

838. – Movimiento **uniformemente variado** es aquel en que el móvil va aumentando o disminuyendo de velocidad *proporcionalmente al tiempo.*

Así, si un móvil al fin de 1 segundo tiene velocidad correspondiente a 3 m. por seg., y al fin de 2 segundos, su velocidad es 6 m./seg., y al fin de **n** segundos tiene por velocidad,

$$v = 3n$$

diremos, que está animado de movimiento uniformamente variado.

839. – El movimiento uniformemente variado, puede ser ACELERADO Y RETARDADO, según que la velocidad crezca o decrezca al crecer el tiempo.

Movimiento estudiado en la Física elemental	Uniforme
	Uniformemente acelerado
	Uniformente retardado

3°. – Concepto matemático de velocidad.

840. – La velocidad es una magnitud de segunda categoría, puesto que CARECE DE LA PROPIEDAD ASOCIATIVA.

Las magnitudes de segunda categoría *no pueden medirse directamente* Necesitamos recurrir a otras magnitudes más accesibles a nuestra experimentación.

Mediremos, pues, la velocidad, por uno de sus efectos.

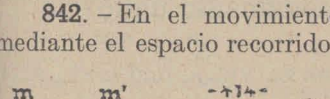
841. – *Hubiéramos podido medir la velocidad de un móvil*, midiendo la presión que produce dicho móvil AL CHOCAR, Y RELACIONÁNDOLA CON LA MASA DEL MÓVIL. *Pero no hubiéramos contado con un método muy práctico.*

Por convención se ha determinado medir la velocidad EN FUNCIÓN DEL ESPACIO RECORRIDO EN UNA UNIDAD DE TIEMPO.

Pero para poder aplicar este procedimiento se requiere distinguir entre movimiento UNIFORME y VARIADO.

AQUÍ TRATAREMOS SOLAMENTE DE LA VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO UNIFORME.

842. – En el movimiento uniforme, medimos la velocidad mediante el espacio recorrido en una unidad de tiempo.



Así (fig. 484), si el móvil **m** recorre en 1 segundo el espacio ε, diremos que su velocidad es la *de* ε *por segundo* (1).

843. – Para comodidad, podemos pues, decir que:

$$v = \varepsilon$$

Pero entiéndase que esta fórmula es una simplificación de conceptos; puesto que una velocidad no es un espacio, y **v** es *velocidad*, mientras que ε es *espacio unitario.*

El único significado admisible para la fórmula anterior es el siguiente:

EL NÚMERO QUE INDICA LA VELOCIDAD DE UN MÓVIL ES EL MISMO NÚMERO QUE INDICA SU ESPACIO UNITARIO CON RESPECTO AL TIEMPO.

844. – Mas, como en la práctica no podemos recurrir continuamente a esta explicación, debemos olvidarnos de ella y dar por asentado que:

Para el cálculo matemático:

Velocidad del movimiento uniforme es el espacio unitario con respecto al tiempo.

Esta es la definición práctica de velocidad; y es la única que interesa recordar en los cálculos.

(1) ε (e griega, denominada épsilon).

845.– Si decimos que un vehículo con movimiento uniforme recorre 82 Km. por hora; 82 Km. es la velocidad del vehículo.

Si decimos que dicho vehículo, recorre 820 Km. en 10 hs.; 820 Km. es un espacio global.

PROBLEMA DIRECTO. ¿Cuánto recorre en 7 segundos, un móvil que recorre 5 cm. por segundo?

FÓRMULA: $e = vt$

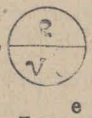
APLICACIÓN: $x = 5 \times 7 = 35$ cm.

FÓRMULA SINTÉTICA:



4.° - Problemas sobre movimiento uniforme.

846. – LAS TRES FÓRMULAS DE LA VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO UNIFORME:

De la fórmula sintética  se deducen las tres fórmulas siguientes:

$$e = vt \qquad v = \frac{e}{t} \qquad t = \frac{e}{v}$$

Toda fórmula corresponde a un problema simple.

Por lo tanto en los cálculos de movimiento uniforme, existen tres problemas simples, cuya incógnita es respectivamente el ESPACIO, la VELOCIDAD o el TIEMPO.

847. – PROBLEMA. 1.° ¿Cuántos kilómetros recorre en **14 horas** un tren que anda a razón de **60 Km. h**?.

Términos: $e = x$ $v = 60$ Km./h. $t = 14$ h.

Fórmula: $e = vt$ *Aplicación:* $x = 60 \times 14$

Ejecución: $x = 840$ Km.

848. – PROBLEMA 2°. Una liebre recorrió **7 cd.** en **84 segundos.** ¿Cuál fué la velocidad media de su carrera?

Términos: $e = 7$ cd $v = x$ $t = 84$ seg.

Fórmula: $v = \frac{e}{t}$ *Aplicación:* $x = \frac{7}{84}$

Ejecución: $x = \frac{1}{12}$ cd/seg.

849. – *Problema* 3°. – ¿Cuánto tarda en recorrer **200 m.** un peatón que anda a razón de **50 m. por minuto**?

Términos: e = 200 m. v = 50 m/min. t = x

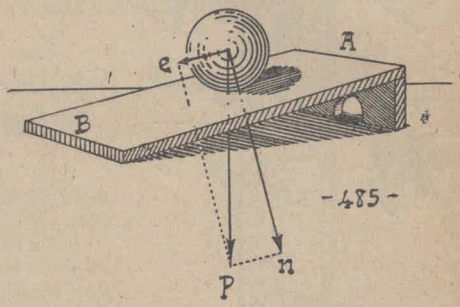
Fórmula: $t = \frac{e}{v}$

Aplicación: $x = \frac{200}{50}$ *Ejecución:* $x = 4$ min.

5.° – Aparatos para estudiar el movimiento.

850. – Los aparatos más prácticos para estudiar el movimiento son los que se basan en la GRAVEDAD que es la forma de energía más fácil de explotar, y que tiene sobre las otras la ventaja de ser constante en cada parte del Globo terrestre.

Los más importantes son: el PLANO DE GALILEO, la MÁQUINA DE ATWOOD y el APARATO DE MORÍN.



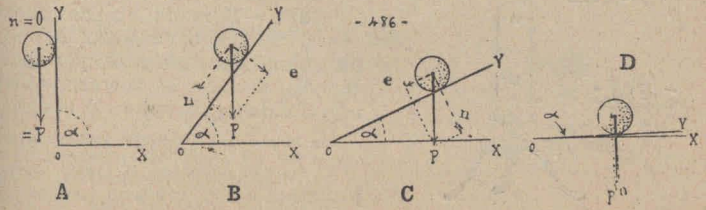
851. – PLANO DE GALILEO (fig. 485) – En su forma más sencilla, consta de un plano inclinado y un cuerpo o rueda que resbala sobre su superficie.

El peso **p** del cuerpo queda descompuesto en otras dos fuerzas n y e, que son sus componentes.

n = componente normal o estática.
e = » efectiva o dinámica.

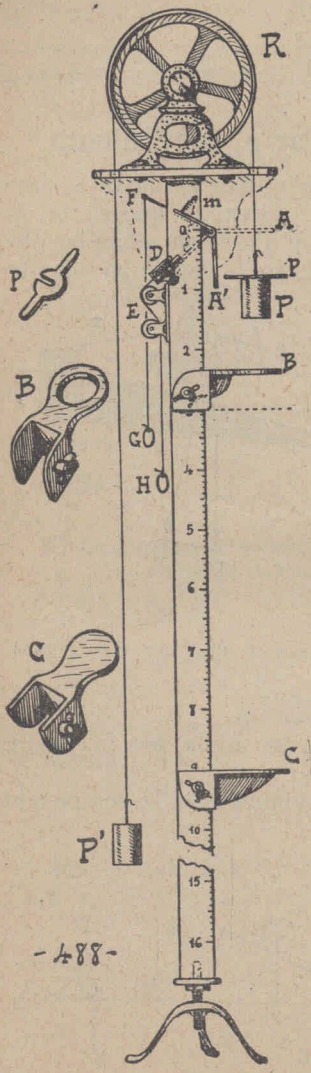
852. – La componente NORMAL se anula por la *reacción* que opone el plano al móvil.

La única fuerza que produce movimiento es la componente DINÁMICA.



Examinando la fig. 486 se ve que:

1.° Cuando el plano es vertical (caso **A**):



$$n = \text{cero} \qquad e = p$$

2.° A medida que decrece α (casos **B** y **C**):

e va decreciendo
n va creciendo

3.° Cuando el plano es horizontal (caso **C**):

$$n = p \qquad e = \text{cero}$$

853. – MÁQUINA DE ATWOOD (fig. 488).

Consta de una regla graduada, en posición vertical.

En su parte superior hay una roldana liviana, cuyo eje tiene muy poco roce en los cojinetes.

Un hilo de seda adaptado a la ranura de la roldana tiene en sus extremos dos pesas iguales **P** y **P'**, cuyo conjunto llamaremos **2P**.

Cuando se quiere mover el sistema **2P**, se coloca sobre **P** una pesa adicional **p**.

Acompañan al aparato tres soportes, uno FIJO Y LEVADIZO **A** y los otros dos CORREDIZOS, de los cuales, uno es hueco **B** y el otro MACIZO **C**.

854. – FUNCIÓN DE LOS SOPORTES.

a) El soporte LEVADIZO, **A**, tiene un mecanismo que accionado por los hilos **H** y **G**, permite al operador colocarlo horizontalmente, o voltearlo con rapidez.

En la posición horizontal sostiene la pesa **P**.

Al caer el soporte, la pesa adicional **p** arrastra en su caída el sistema **2P**.

b) La corredera HUECA **B**, tiene forma de argolla, y su agujero es de dimensión tal, que deja pasar la pesa **P**, pero detiene la pesita **p**.

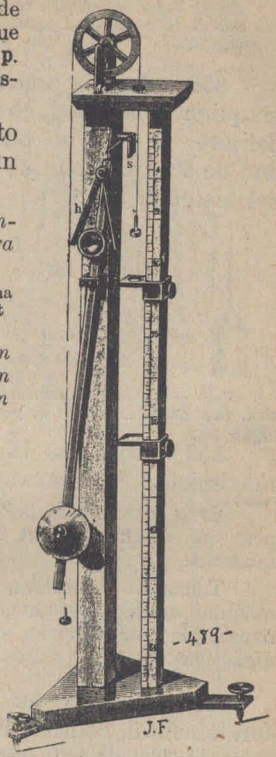
c) La corredera MACIZA **C**, en forma de disco, detiene a **P** en su marcha.

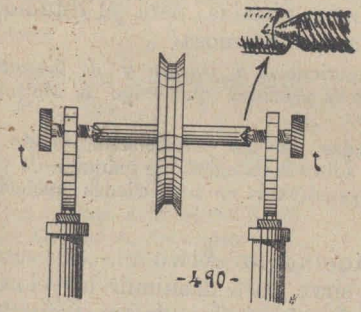
855. – Para estudiar el movimiento con la máquina de Atwood se requiere un metrónomo. **(129)**

Pero las máquinas más perfectas van acompañadas de un péndulo, cuyo vaivén sirve para medir el tiempo (*fig. 489*).

La varilla del péndulo está combinada con una pieza que al ser empujada por ésta, hace caer el soporte levadizo,

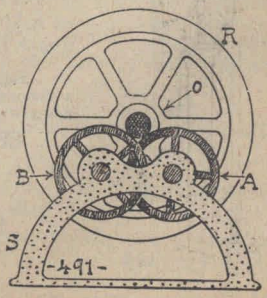
Hay otras máquinas cuyo péndulo da un contacto eléctrico, mediante el cual un electroimán remueve la palanquita que sostiene el soporte en posición horizontal.





856. – Para disminuir lo más que se puede el roce del eje de la roldana, las máquinas de mediana precisión tienen los extremos del eje ahuecados en forma cónica (fig. 490), quedando sostenido por dos tornillos de punta aguda.

En las máquinas de alta precisión sirven de cojinetes dos pares de ruedas **AB** y **CD** (fig. 491) en que descansan.



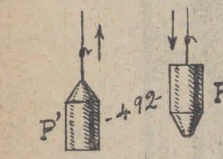
857. – Pero como siempre hay algo de roce, puede destruirse su efecto, haciendo

$$P' < P$$

Esta desigualdad debe ser tal que, *dando a* **P** *un débil envión*, se obtenga en el sistema **2P** una velocidad constante.

En su lugar se indicará cómo se comprueba cuando la velocidad es constante; aunque esto de la "velocidad constante" es muy relativo, como explicaremos al estudiar el rozamiento.

858. – Para la precisión en las mediciones efectuadas con la máquina de Atwood, es necesario eliminar también la resistencia del aire, la cual no puede ser corregida mediante la desigualdad de **P** y **P'**, porque la resistencia aumenta con la velocidad del sistema.



La máquina ideal, debería, pues, funcionar en el vacío:

Sin embargo, se disminuye en parte la resistencia del aire dando a las pesas la forma cónico-cilíndrica (fig. 492).

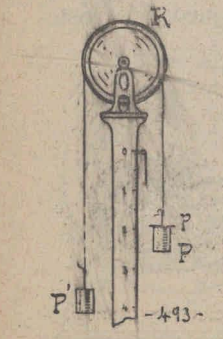
Pero esto trae el inconveniente de que con los golpes de **P** sobre la corredera maciza, vase dañando ésta y la punta de **P**.

859. – De todas las máquinas ideadas para el estudio del movimiento, la de Atwood es la más ingeniosa.

Es muy práctica para las experiencias *de cátedra* y *de laboratorio;* pero no sirve para los trabajos *de precisión* que exige la Metrología moderna.

Todas las tentativas ensayadas por los perfeccionadores de esta máquina, no han logrado elevarla sobre la categoría de máquina de enseñanza. En cambio, no ha sido aun sustituida en sus variadas aplicaciones didácticas.

860. – Teoría de la máquina de Atwood. – Su ventaja fundamental, consiste en que sirve para disminuir la velocidad de la caída de los cuerpos sin desviarlos de su trayectoria natural, que es la *vertical hacia abajo.*



Veamos porque la caída es más lenta:

Para simplificar la explicación supongamos que la roldana tiene toda su masa **R** concentrada en la llanta (fig. 493).

En cualquier roldana por medio del cálculo podemos llegar a conocer el valor de la masa ficticia **R**, en función de su masa real r, distribuida entre la llanta, rayos y cubos.

861. – Llamando **M** la masa de 2**P**, y **m** la masa de **p**, tenemos:

a) En la máquina de Atwood:

p = potencia o fuerza motora

M + **R** + **m** = masa inerte que debe ser arrastrada por **p**.

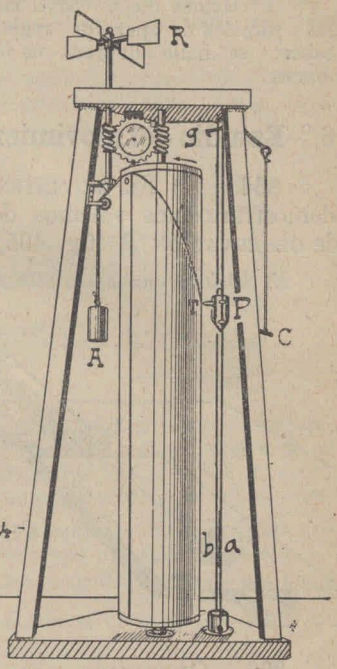
b) En cambio, cuando **p** cayera sola tendríamos:
p = potencia o fuerza motora
m = masa inerte que es arrastrada por **p**.

Cualquiera entiende que: Siendo la masa un estorbo a la adquisición de velocidad, se moverá mucho más lentamente el sistema **M + R + m** que la sola masa **m**.

Y como **m** en el 1er segundo habría recorrido m. 4,90, el sistema **M + R + m**, en el 1er segundo recorrerá tan sólo:

$$4{,}90 \times \frac{m}{M + R + m}$$

Volveremos sobre este asunto al estudiar las relaciones entre velocidad, fuerza y masa.



862. – MÁQUINA DE MORÍN (fig. 494). –

Consta de un cilindro vertical, sobre el que se adapta una hoja de *papel cuadriculado*.

Un aparato de relojería movido por la pesa **A**, hace girar el cilindro con movimiento sincrónico, debido al regulador **R**.

Dos hilos verticales **a** y **b** sirven de guía a una pesa **P** que es la que se hará caer al efectuar el experimento.

La pesa **P** tiene una púa o lápiz **T** que dejará trazada sobre el papel la trayectoria de **P** con respecto al cilindro.

El hilo **C** levanta el gancho **g** cuando hay que soltar la pesa **P**.
En la fig. 560 se ve otra pieza **f** que aquí no se indica, la cual sirve para soltar el freno del engranaje que hace girar el rodillo.

P puede caer libremente: pero mejor es dejarle caer con lentitud, lo cual se obtiene suspendiéndolo de un hilo y colocándole un contrapeso como en la máquina de Atwood (ver fig. 512).

863. – OBSERVACIONES RESPECTO AL SISTEMA DE INSCRIPCIÓN EN LOS APARATOS REGISTRADORES.

1.° Ya vimos al describir el termógrafo **(759)** que en él se trazaba una *gráfica*, mediante una pluma especial cargada de tinta.

2.° En la máquina de Morín, acabamos de decir que la inscripción se efectúa mediante un lápiz o una púa.

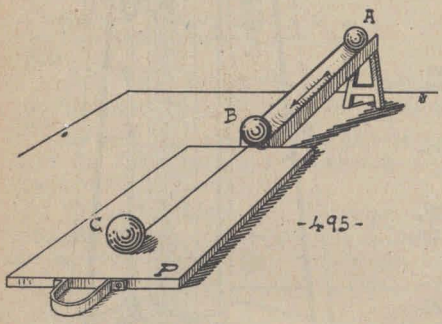
3.° Cuando se usa púa, el papel está AHUMADO; de modo que la trayectoria de **P** queda marcada mediante una línea blanca.

4.° Hemos dicho *"papel cuadriculado"*; pero debe entenderse que en los papeles de aparatos registradores, LA CUADRÍCULA ES ESPECIAL, a saber: se halla adaptada *en forma y tamaño* a la gráfica que se quiere obtener.

6.°–Estudio del movimiento libre en el plano de Galileo

864. – 1.° EL MOVIMIENTO LIBRE ES RECTILÍNEO. – Para demostrarlo nos valemos de dos planos: el de ENVIÓN **AB** y el de OBSERVACIÓN **P** (fig. 495).

El móvil es una esfera bien calibrada.



Para este fin viene muy bien una bolilla de cojinete de automóvil.

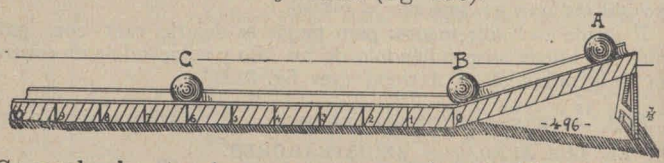
865. – El plano **P** debe ser extrictamente horizontal; y sobre él se adapta un papel ahumado.

El papel ahumado se puede sustituir por dos hojas de papel sobrepuestas, siendo entonces la inferior, blanca; y la superior, de papel carbónico, con la cara teñida, hacia abajo.

866. – OPERACIÓN. – Se suelta la bolilla desde **A**, y en el papel quedará marcada una trayectoria rectilínea. L.Q.Q.D.

867. – 2.° EL MOVIMIENTO LIBRE ES UNIFORME. – Para demostrarlo podemos dar al plano de Galileo dos disposiciones distintas.

1.° *Aparato de canaleta y bolilla* (fig. 496).



Se regula el metronómo como para que después del envión **AB**, la bolilla recorra el espacio **0–1** en un *tic–tac*.

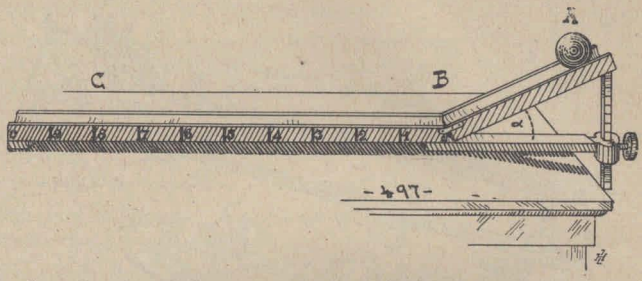
Y se notará que . . . . .

«A tiempos iguales corresponden. . . . . .

868. - NOTAS - 1.ª El tiempo que tarda la bolilla en recorrer el espacio **AB** no nos interesa en esta experiencia.

Lo que sí, necesitamos que la llegada de la bolilla al punto **B** coincida con el comienzo de un *tic - tac*, lo cual se obtiene acercando o alejando el punto **A** del **B**.

2.ª En vez de regular el metrónomo, se puede dejar constante el tiempo cuando se dispone de un aparato que deje graduar el ángulo α (fig. 497).

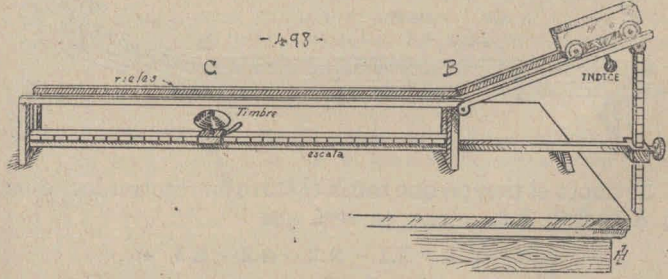


3.ª Cuando ni α ni el metrónomo son graduables, hay que contentarse con graduar la distancia **AB** hasta obtener que la bolilla llegue a **B** al comenzar un *tic - tac*. Y entonces si el espacio **BC** está dividido en centímetros, se medirán cuántos son los centímetros recorridos en un *tic - tac*.

4.ª En vez de elegir como unidad de tiempo la distancia entre dos golpes homólogos del metrónomo, es bueno elegir una distancia mayor.

Y a este fin los metrónomos tienen un timbre, que puede sonar cada dos, tres o cuatro golpes.

En las experiencias, pues, es bueno elegir como unidad de tiempo la distancia entre dos golpes sucesivos de timbre.



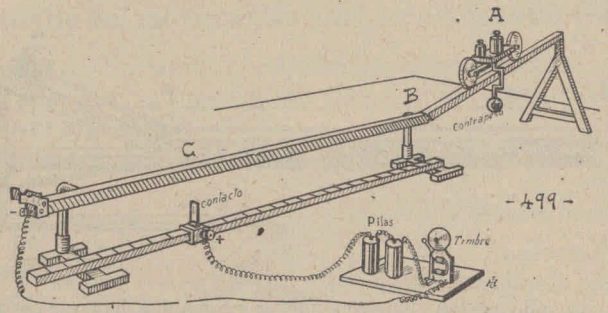
869. -2.° *Aparatos de carro y vía.*- Los hay de cuatro ruedas o sea de dos vías (fig. 498); y de dos ruedas solamente, o sea de una vía (fig. 499).

En este último caso el equilibrio del biciclo se obtiene mediante un contrapeso inferior, que sirve de ÍNDICE.

870. – En los aparatos de carro y vía, podemos recurrir a varios procedimientos para señalar el momento de llegada.

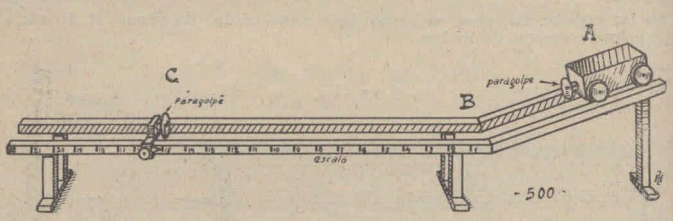
1.° El carro lleva un índice y el operador observa cuando pasa dicho índice frente a las distintas divisiones de la vía.

2.° El índice en las diversas divisiones, va dando contactos mecánicos o eléctricos que hacen sonar un timbre (figs. 498 y 499).



3.° El carro tiene un tope, y en la vía hay un paragolpe corredizo que está a la misma altura que el tope (fig. 500).

Se va colocando el paragolpe sucesivamente en los puntos *0, 1, 2, 3* etc., y soltando cada vez el carro *de un mismo punto fijo* **A.**



Se anota el tiempo que tarda el carro en recorrer los espacios **A.0, A.1, A.2, A.3,** etc. y se verá que

$$A.0 - A.1 = A.1 - A.2 = A.2 - A.3 \text{ etc.}$$

Los experimentos anteriores llevan a la conclusión siguiente:

$$e = vt$$

Explíquelo el alumno recordando que

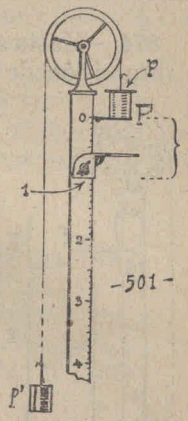
v (velocidad) = espacio unitario.

7.º – Estudio del movimiento uniforme en la máquina de Atwood.

871. – PREPARACIÓN DEL APARATO (fig. 501).

Asentamos en el puente la pesa **P** cargada con **p**. Colocamos en **1** la corredera hueca.

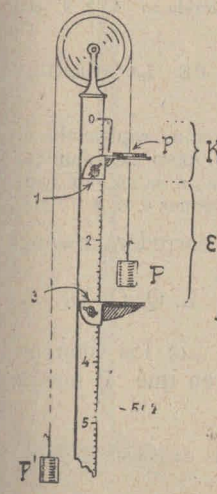
> Téngase bien entendido que "COLOCAR EN UN LUGAR LA CORREDERA HUECA" es *colocarla de tal modo que detenga la adicional* **p**, *en el justo momento en que la base de* **P** *pasa por el lugar en referencia.*



Soltamos el levadizo, y dejamos correr el sistema hasta que **p** quede detenido.

Repitiendo varias veces este trabajo, y graduando el métronomo, *lograremos obtener que* **P** *haga el recorrido* **O.1** *en una unidad de tiempo.*

Se nota que el metrónomo está bien graduado, observando si son simultáneos los dos golpes: el del timbre del metrónomo y el de la pesita **p**, sobre el soporte hueco.



872. – NOTAS. — 1.ª En vez de graduar el metrónomo, podemos cambiar de lugar la corredera hueca, hasta que coincidan el golpe del timbre con el de la pesita.

2.ª Téngase en cuenta que lo que aquí llamamos "UNIDAD DE TIEMPO" *no es ni un segundo, ni varios segundos.* Es simplemente UNA PORCIÓN ARBITRARIA DE TIEMPO, que puede variar para cada experiencia "a gusto del operador" o "conforme a la necesidad del momento".

3.ª **El operador debe adiestrarse en tirar del hilo en el preciso instante en que oye un golpe del timbre.**

873. – COLOCACIÓN DE LA CORREDERA MACIZA.

Preparado el aparato como acabamos de indicar, se coloca la corredera maciza en la división N.º 3 (fig. 502).

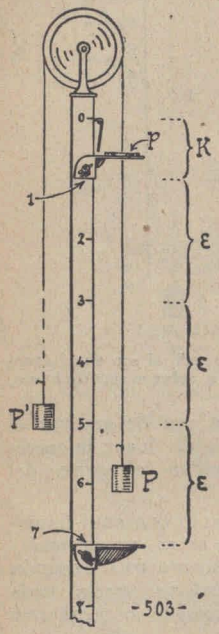
No explicamos aquí porque se colocará la corredera en el Nro. 3.

Más tarde sabremos porque.

Volvemos a soltar el levadizo en combinación con los golpes del metrónomo, y advertiremos que:

EL SISTEMA 2P RECORRE EL ESPACIO ε EN UNA UNIDAD DE TIEMPO.

874. – Hasta aquí no hemos aprendido nada; pero ya estamos en dispocisión de comprobar la fórmula



$$e = vt$$

Sin embargo, para ello necesitamos tener en cuenta que

ε = espacio unitario

por lo tanto ε = v

En nuestro caso, si cada división de la escala de la máquina vale *1 dm.*, tendremos que:

v = 2 dm.

Si, pues, "EL MOVIMIENTO LIBRE ES UNIFORME" tendremos que en nuestro experimento:

$$e = \varepsilon . t$$

Lo cual equivale a decir que:

$e_1 = \varepsilon \quad e_2 = 2\varepsilon \quad e_3 = 3\varepsilon \quad e = \varepsilon . t$

e_1, e_2, e_3 ... e = espacio recorrido en 1, 2, 3, etc. unidades de tiempo.

875. – COMPROBACIÓN DE LA FÓRMULA ANTERIOR (fig. 503).

Seguimos la experimentación, repitiendo el trabajo indicado en (871 h. 873) pero cambiando la posición de la corredera maciza; a saber, colocándola sucesivamente en las divisiones 4, 6, 8, 10 etc.

Y observaremos que la pesa **P** alcanza la corredera maciza respectivamente en los tiempos 2, 3, 4, 5, etc.

L. Q. Q. D.

876. – IMPORTANTE. – Téngase en cuenta que los tiempos 2, 3, 4, etc. se cuentan a partir del instante en que **P** queda libre de la adicional p.

877. – UNA OBSERVACIÓN. – Hemos dicho que la experiencia anterior nos enseña que:

EL MOVIMENTO LIBRE ES UNIFORME.

Falta, sin embargo, llamar la atención del alumno sobre el significado de la frase "MOVIMIENTO LIBRE":

a) En las figs. 501 h. 503 se señala con **k** el espacio que el sistema 2P+ **p** recorre EMPUJADO por la pesa **p**.

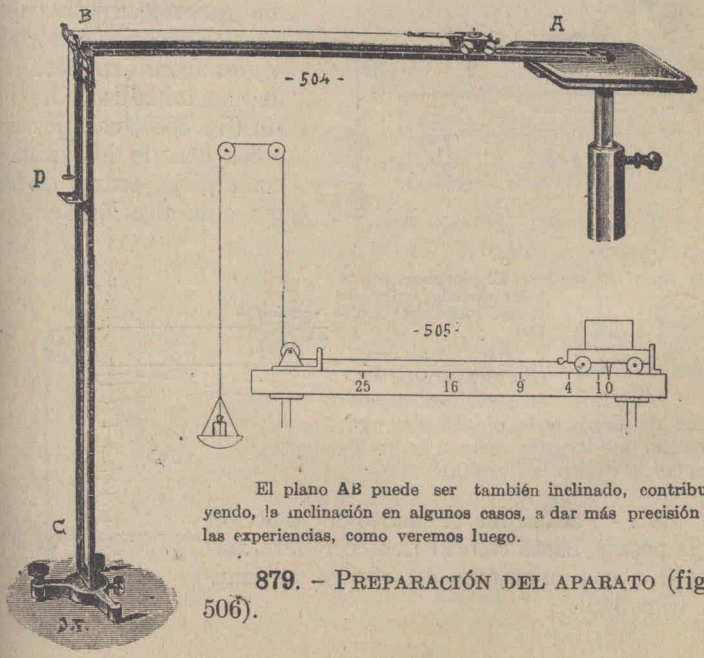
Aquí el movimiento *no es libre*, porque hay una fuerza **p** que lo *inicia* y *acrecienta*.

b) En cambio, hemos señalado con $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \ldots$ el espacio recorrido por el sistema **2P**, una vez que quedó libre del empuje de **p**.

Aquí el movimiento ES LIBRE, porque el sistema **2P** se mueve *por simple inercia*, sin que exista una fuerza externa QUE ALIMENTE SU VELOCIDAD.

8.º – Modificación de la máquina de Atwood.

878. – Nos permitimos considerar como *variedad* de máquina de Atwood la que consta de un carro que, arrastrado por un peso **p** se desliza sobre un plano horizontal (figs. 504 y 505).

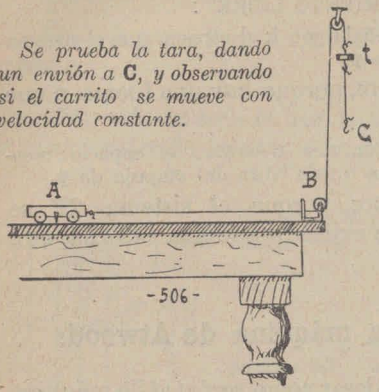


El plano AB puede ser también inclinado, contribuyendo, la inclinación en algunos casos, a dar más precisión a las experiencias, como veremos luego.

879. – PREPARACIÓN DEL APARATO (fig. 506).

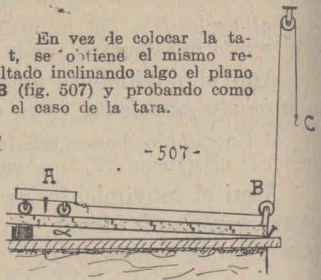
Se prepara colocando una tara t que se oponga al efecto del roce.

Se prueba la tara, dando un envión a **C**, *y observando si el carrito se mueve con velocidad constante.*



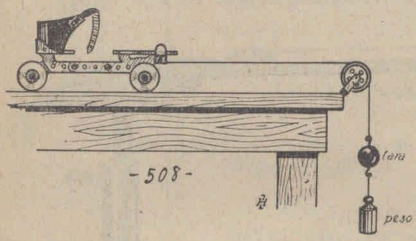
-506-

En vez de colocar la tara t, se obtiene el mismo resultado inclinando algo el plano **AB** (fig. 507) y probando como en el caso de la tara.



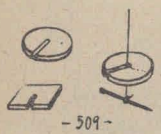
-507-

Para señalar los puntos de llegada, se puede recurrir a cualquiera de los medios indicados al describir el funcionamiento del plano de Galileo. § 6º



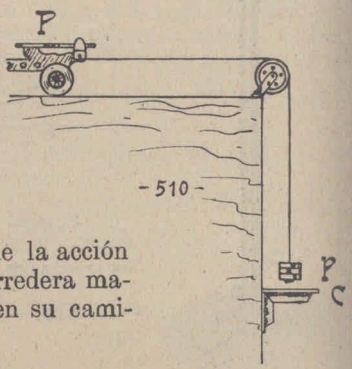
-508-

880. – A los alumnos que quieran repetir en su casa las experiencias de clase, les aconsejamos valerse de una tabla lisa y un patín (fig. 508), usando como polea una de Meccano, y como pesas, trozos de plomo o de aleación de tipos.


-509-

El plomo se presta a ser cortado, aplastado y agujereado con facilidad.

Para obtener varias pesas iguales y de fácil uso, déseles forma de discos o de planchuelas agujereadas, que luegose cuelgan de un hilo como lo indica la fig. 509.



-510-

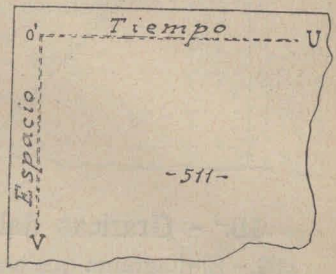
881. - Para librar el carrito de la acción de la pesa **p**, basta colocar una corredera maciza **C** o cualquier otro estorbo en su camino (fig. 510).

9.º- Estudio del movimiento uniforme en el aparato de Morín.

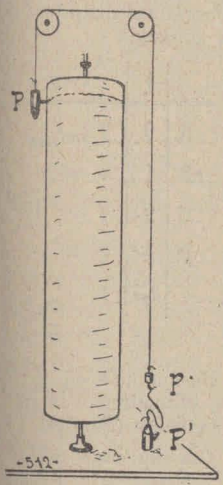
882. – PREPARACIÓN DEL APARATO. – Se adapta al cilindro una hoja cuadriculada, cuyo eje de abscisas **o'U** marcará el tiempo; y cuyo eje de ordenadas **o'V** marcará el espacio recorrido por la pesa **P**. (fig. 511)

En este experimento se eligen como módulos de tiempo y de espacio, cualquier medida, sin tener en cuenta la velocidad de rotación del tambor, ni la velocidad de caída de la pesa **P**.

De modo que se adoptan como unidades de tiempo y de espacio, DOS MAGNITUDES ARBITRARIAS, que no son ni el *segundo* ni el *centímetro*.



883. – Para este experimento, la pesa **P** debe estar contrapesada por una pesita **p** mucho menor que ella; y a continuación de **p**, con hilo flojo debe hallarse **P'** (fig. 512).



La porción de hilo flojo debe ser corta.

Las masas de las tres pesas deben ser tales, como para que

$$P = P' + p$$

En rigor **P** *debe ser un poco mayor que* **P'+p**, *a saber, tanto cuanto se requiere para vencer el roce.*

884. – EXPERIENCIA. Simultáneamente se deja andar el tambor y se suelta la pesa **P**, la cual caerá al principio con movimiento acelerado.

Pero inmediatamente recibirá el contrapeso **P'**; y desde ese instante su movimiento será *libre*, y por lo tanto uniforme.

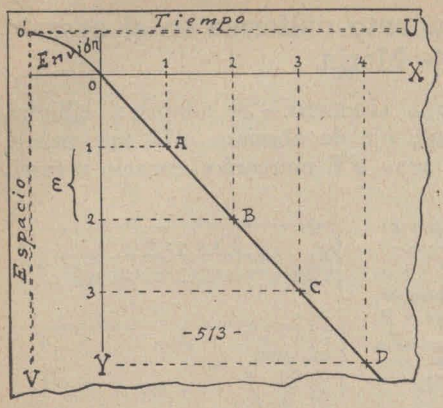
Terminado el descenso de **P** se quita del tambor la hoja de papel, y se examina la gráfica que el lápiz ha descrito en ella (fig. 513).

Esta gráfica está invertida, en cuanto que **Y** se halla por debajo de **X**.

Figuran, pues, como negativos los espacios que en realidad son positivos.

885. – EXAMEN DE LA GRÁFICA ANTERIOR.

La trayectoria o'o corresponde al movimiento acelerado, *que ahora no tomamos en cuenta.*



Desde o hasta D hay una línea recta.

Por lo tanto, considerando como eje de ordenadas oY, tendremos que

$$y = a.x$$

donde $y = e$

$a = \varepsilon$

$x = t$

e (*espacio recorrido en un tiempo cualquiera* t)

ε (*espacio unitario*) = v

De donde se deduce la fórmula.

$$e = vt$$

10.º - Gráficas del movimiento uniforme.

886. – El diagrama que acabamos de recoger en la experiencia del aparato de Morín (fig. 513), nos explica en forma evidente el significado de la *gráfica de los espacios*.

La gráfica de los espacios, generalmente se llama GRÁFICA DEL MOVIMIENTO; pero en realidad el movimiento tiene dos gráficas distintas: la GRÁFICA DE LAS VELOCIDADES y la GRÁFICA DE LOS ESPACIOS.

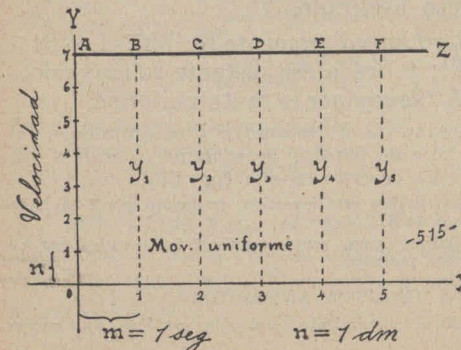
887. – GRÁFICA DE LAS VELOCIDADES (en el moviento uniforme).

El eje de abscisas indica el tiempo, y el eje de ordenadas indica la velocidad.

Y como en el movimiento uniforme la *velocidad es constante*, resulta que por ej. (fig. 514):

	t	v
A	0	7 dm/seg.
B	1	7 " "
C	2	7 " "
D	3	7 " "
...	∞	7 " "

-514-



Basándonos en dicha clave, obtendremos la gráfica siguiente (fig. 515).

Con esto queda comprobado ocasionalmente lo que ya debíamos haber dicho en otro lugar: que cuando y es constante, su gráfica es una recta paralela a XX'.

888. – GRÁFICA DE LOS ESPACIOS. – Pueden darse dos casos: a) *que el movimiento se considere a partir de un punto de referencia;* b) *que el movimiento se considere comenzando a distancia de un punto de referencia.*

889. – 1er CASO. – *Ejemplo.* – Diséñese la gráfica de los espacios recorridos por un móvil desde que pasa por un punto o de origen.

Supongamos que su velocidad sea 5 dm/seg.

Aplicando la fórmula $e = vt$

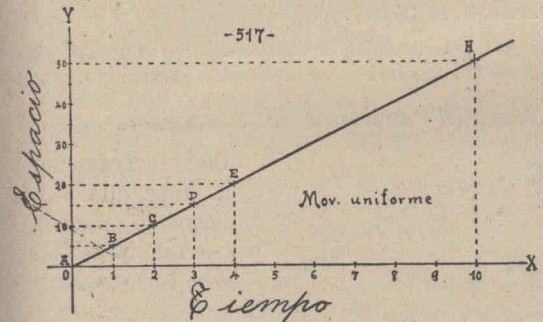
obtenemos $e = 5t$

Su clave será (fig. 516):

	t	e
A	0	0
B	1	5
C	2	10
D	3	15
E	4	20
...	...	...
H	10	50

-516-

Su gráfica será (fig .517):



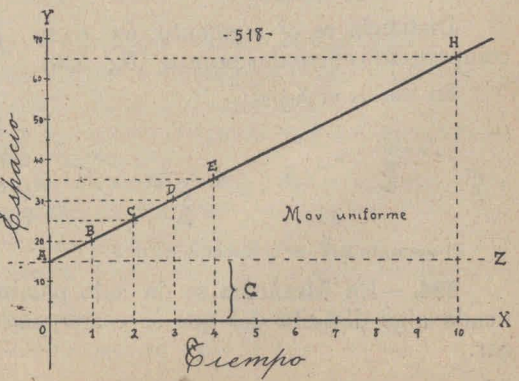
Como $e = 5t$ es una ecuación de 1er grado, AH debía forzosamente resultar siendo una LÍNEA RECTA.

Por eso nos hubieran bastado dos puntos cualesquiera, por ej. A y E, para determinar la gráfica.

890. – 2º CASO. – Cuando el punto de referencia no se halla en el origen del movimiento.

Ejemplo. Trácese la gráfica de los espacios recorridos con movimiento uniforme, desde el instante en que el móvil dista 15 m. del punto que elegimos como referencia.

Supongamos $v = 5$ m/seg.



Para este cálculo, la fórmula general es:

$$e = 15 + v.t$$

y como en nuestro caso v = 5 m/seg tendremos $e = 15 + 9t$

Siendo una ecuación de 1er grado, elegiremos sólo dos puntos:

A (t = cero) (e = 15)

E (t = 4) (e = 35)

Su gráfica será (fig. 518).

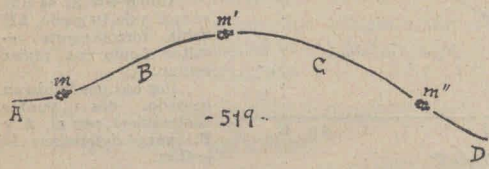
La porción (c = 15m) es el espacio que separa el origen A del movimiento del origen o del cálculo de dicho movimiento.

11.º - Sinónimos de «espacio».

891. – Ya hemos advertido que en Mecánica la palabra **espacio** significa "ESPACIO LINEAL".

Ahora bien, según los lugares donde se usa, esta palabra puede tener por sinónimas las expresiones siguientes: TRAYECTORIA, DISTANCIA, CAMINO, RECORRIDO.

El término general es ESPACIO; y sus sinónimos tienen acepciones particulares.



- 519 -

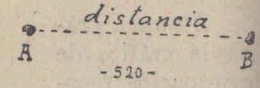
892. – **Trayectoria** es la línea que indica el espacio recorrido por un móvil (fig. 519).

ABCD es la trayectoria del móvil **m**.

893. – La palabra DISTANCIA tiene dos significados, uno *estático* y otro *cinemático*.

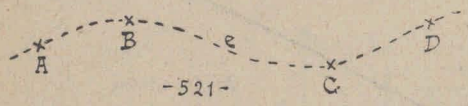
En sentido *estático:*

Distancia es el segmento de recta comprendido entre dos puntos (fig. 520).



- 520 -

En sentido *dinámico*:



- 521 -

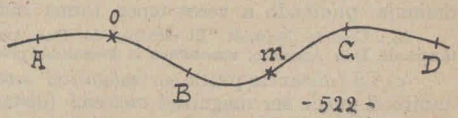
Distancia es la porción de trayectoria comprendida entre dos de sus puntos (fig. 521).

El segmento **BeC** es la distancia entre **B** y **C**.

894. – En Mecánica se da a la palabra CAMINO un significado algo distinto del que le corresponde en el lenguaje vulgar.

Si en la fig. 522, consideramos como *trayectoria posible* de **m** la línea **ABCD**; podemos señalar como ORIGEN de nuestro cálculo un punto cualquiera **o**.

Y entonces tendremos que el segmento **oBm** *es el* CAMINO *de* **m**, *aun cuando* **m** *nunca haya estado en* **o**.



- 522 -

Ej: Considerando la calle Rivadavia como origen del cálculo de los movimientos que se pueden efectuar en la calle Solís (fig. 523), un edificio construido en **A** tiene 2½ cuadras de camino.



- 523 -

Los habitantes de ese edificio, pueden haber ido a vivir en él sin pasar por la calle Rivadavia; y esto no obstante, decimos que su CAMINO desde Rivadavia es de 2½ cd.

895. – De lo dicho resulta que:

distancia que media entre un el punto origen del cálculo de sus posibles movim

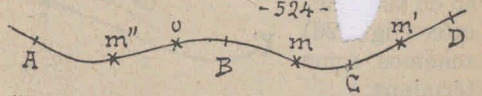
896. – La palabra recorrido a veces se aplica al CAMI cam- bién como adjetivo: *"camino recorrido"*.

Nosotros lo usaremos con su significado propio.

Diremos, pues, que:

Recorrido o ESPACIO RECORRIDO es la distan ce dos posiciones sucesivas de un móvil en su trayectoria.

Si sobre **ABCD** (fig. 524), un móvil va desde **m** hasta **m'** su RECORRIDO será la distancia **mCm'**.



- 524 -

Si después va hasta **m''**, su nuevo recorrido será **m'CBom''**.

897. – En las trayectorias se consideran como POSITIVOS:

a) Los caminos que salen hacia la derecha de **o**.

b) Los recorridos que se efectúan de izquierda a derecha, sin tener en cuenta su posición con respecto a **o**.

En la fig. anterior, **om** y **om'** son *caminos positivos;* y **mm'** es un *recorrido positivo.*

Y se consideran como NEGATIVOS:

a) Los caminos que salen hacia la izquierda de **o**.

b) Los recorridos efectuados de derecha a izquierda, sin tener en cuenta la relación que tienen con **o**.

En la misma fig., **om''** es un *camino negativo;* y **m'm''** es un *recorrido negativo.*

898. – De todo lo expuesto se sigue que:

a) La *trayectoria* es un espacio que tiene forma definida; pero su magnitud es generalmente indefinida.

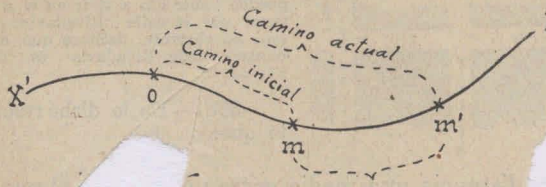
b) La *distancia*, el *camino*, y el *recorrido* son espacios de magnitud definida, pudiendo a veces tener forma indefinida.

Ej.: Cuando decimos: "El almacén de Don Anastasio *dista* media legua de la estancia de Don Anacleto, conocemos la magnitud, pero ignoramos la forma del camino.

c) La *distancia* puede ser magnitud *escalar* (distancia estática). Pero tambien puede ser magnitud *vectorial* (distancia cinemática).

d) El *camino* y el *recorrido* son siempre magnitudes *vectoriales*.

899. – Todo problema de caminos es un problema de ADICIÓN O SUSTRACCIÓN.



a) En el caso de ADICIÓN (fig. 525) tenemos como términos siguientes:

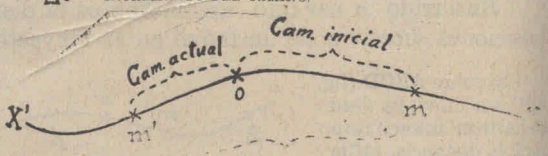
Δc

= CAMINO INICIAL (que llamaremos C_0)
= RECORRIDO (que llamaremos Δc) (1)
= CAMINO ACTUAL (que llamaremos C_1)

será: $C_1 = Co + \Delta c$

Δc = INCREMENTO DEL CAMINO.

b) El caso de SUSTRACCIÓN (fig. 526) tenemos como términos:



om = CAMINO INICIAL (que llamaremos C_0)
mm' = RECORRIDO (que llamaremos $-\Delta c$)
om' = CAMINO ACTUAL (que llamaremos C_1)

Su fórmula será: $C_1 = C_0 - \Delta c$

$-\Delta c$ = DECREMENTO DEL CAMINO.

900. – Los caminos son magnitudes de 2.ª categoría, porque no admiten la propiedad asociativa (2).

(1) El símbolo Δ (delta) se usa en Matemáticas para representar el ADICTAMENTO o INCREMENTO de una cantidad variable cualquiera.

(2) Téngase en cuenta que aquí damos al término ASOCIATIVO un significado algo diverso del que le asignaron los autores de la escuela neo-matemática. (Ver observación en el aparte 221).

Un camino puede CRECER o DECRECER (propiedades aditiva) pero no puede sumarse a otro camino.

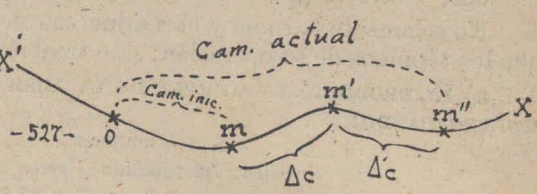
901. – Los recorridos en cambio, son magnitudes de 1.ª categoría, porque pueden sumarse (propiedad asociativa).

Ej: (fig. 527)
Si un móvil pasó primero de m a m' y después pasó a m'' tendremos:

$R = mm' + m'm''$

$R = \Delta c + \Delta' c$

R (recorrido total).



12.° - Ecuaciones dimensionales.

902.–Se llama **ecuación dimensional** de una magnitud, la FÓRMULA que nos enseña a valuarla *en concreto*, dándonos su medida en base de una unidad determinada.

Ej.: La fórmula o *ecuación abstracta* del volumen de una pirámide es:

$$V = {}^1/_3 \; B.H$$

V (*volumen*) B (*base de la pirámide*) H (*altura de la pirámide*)

Sus fórmulas dimensionales son:

$$m^3 = {}^1/_3 \; m^2.m \qquad dm^3 = {}^1/_3 \; dm^2.dm$$

$$cm^3 = {}^1/_3 \; cm^2.cm \qquad Hm^3 = {}^1/_3 \; Hm^2.Hm \qquad \text{etc.}$$

Estas ecuaciones indican, p. ej., que: «Para valuar el volumen de la pirámide en **dm**, hay que multiplicar $^1/_3$ de los dm^2 de su base por los **dm** de su altura».

903.–CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD o *coeficiente específico* es un número constante por el que hay que multiplicar el resultado de una *operación general*, para que nos dé el valor que estamos buscando.

En el ej. anterior, esta constante es $^1/_3$ o **0,333**, y la operación general es **B×H**.

904.–A menudo después de haber descubierto una fórmula se nos presenta la dificultad siguiente: «¿Cómo traducimos esta fórmula a ecuación dimensional? — ¿Bastará cambiar sus símbolos por los de las unidades correspondientes, o habrá que añadirle un coeficiente específico?»

De hecho, siempre existe el coeficiente específico; y si no figura en la mayoría de las fórmulas es porque vale «uno», o porque queremos simplificar la expresión, desentendiéndonos de él.

905. – Pero téngase bien entendido que:

No solamente la suma y el residuo son de la misma especie que los términos de su operación; sino también:

a) EL PRODUCTO ES SIEMPRE DE LA MISMA ESPECIE QUE EL MULTIPLICANDO:

$$7\ \$ \times 5 \text{ hombres}$$

significa: 7 $ repetido *5 veces*

de modo que $7\ \$ \times 5 = 35\ \$$

b) Cuando usamos la división para *«descomponer una cantidad en partes iguales»*, EL COCIENTE ES DE LA MISMA ESPECIE QUE EL DIVIDENDO:

$$35\ \$ \div 5 \text{ hombres}$$

significa: 35 $ descompuesto en *5 partes iguales*

resulta, pues, que $35\ \$ \div 5 = 7\ \$$

Este caso de la división debería llamarse **equidivisión**, *para distinguirlo del otro, que explicamos a continuación.*

c) Cuando usamos la división para *«ver cuántas veces una cantidad cabe en otra»*, EL DIVIDENDO Y DIVISOR SON HOMOGÉNEOS; Y EL COCIENTE INDICA *«veces»*:

$$35\ \$ \div 7\$$$

significa: 35 $ contiene a 7 $ ...

luego $35\ \$ \div 7\ \$ = 5$ veces

Como se ve, en este caso, el resultado de la operación no queda definido por las magnitudes que lo formaron; pudiendo ser *hombres*, lo mismo que *baúles*, *carros*, o lo que sea.

Este caso de la división es el que se denomina **razón** entre dos cantidades.

906. – De lo anterior resulta que:

Cuando una función es de distinta especie que todos sus argumentos, en su ECUACIÓN COMPLETA **debe figurar un coeficiente que sirva para traducir su resultado al valor que buscamos.**

En el caso de

$$35\ \$ \div 7\ \$ = 5 \text{ hombres}$$

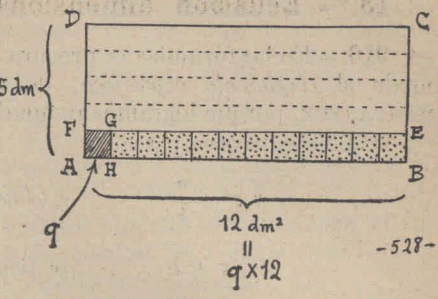
lo lógico es decir así:

$$35\ \$ \div 7\ \$ = \mathbf{1\ hombre} \times 5$$

o sino así:

$$\textit{hombres} = \mathbf{1\ hombre} \times (35 \div 7)$$

907. – En la valuación de áreas, (p. ej.: área del rectángulo **ABCD**) (fig. 528): ESTAMOS MUY MAL ACOSTUMBRADOS, pues decimos:



-528-

R = **b**. **h** o sea **R** = *12 dm.* × *5 dm.*

R (área del rectángulo)

Deberíamos decir: **R** = **ABEF** × 5

y como **ABEF** = 12 **q** = *12 dm²*

resulta que **R** = *12 dm²* × *5*

o sea **R** = *12 dm²* repetido *5 veces*

908. – De aquí que la fórmula completa para este último caso sería:

$$\mathbf{R} = \mathbf{q} \times (b.\ h)$$

donde **q** es el multiplicando verdadero; y **b** y **h** son dos factores de una sucesión de multiplicaciones.

Aquí **q** sería el cuadradito **AHGF**, el cual queda repetido *12 veces*, cuando buscamos el área del *rectángulo unitario* **ABEF** que denominaremos **r**.

De modo que: $\mathbf{R} = \mathbf{r} \times 5$

pero $\mathbf{r} = \mathbf{q} \times 12$

luego $\mathbf{R} = (\mathbf{q} \times 12) \times 5 = \mathbf{q} \times 12 \times 5$

909. – Esta aberración en el uso de las operaciones, trae consigo dos pésimas consecuencias:

a) Los alumnos inteligentes se preguntan a menudo: «¿Por qué sumando vacas, obtenemos pesos? — ¿Por qué repitiendo baldosas obtenemos horas? — ¿Por qué partiendo a hachazos un tronco de árbol, obtenemos kilos de azúcar? etc.».

b) Hombres MECANIZADOS en el cálculo; que a veces descuellan en inteligencia, quedan inhabilitados para hacer filosofía sobre ciertas conclusiones matemáticas, confundiendo el concepto de PRODUCIR, o sea de *causa y efecto*, con el de *verdadera igualdad*.

Si medimos la *velocidad* mediante el *espacio unitario*, podremos decir para comodidad que

$$\mathbf{v} = \varepsilon$$

Pero no debemos olvidarnos que ese «IGUA A» ignifica «CORRESPONDE A».

13.° - Ecuación dimensional de la velocidad.

910. – En las fórmulas se procura simplificar lo más que se puede el *coeficiente específico*; de modo que GENERALMENTE DESAPARECE, porque logramos reducirlo a "UNO".

De allí resulta que , por ej. en

$$v = v_1 \cdot \frac{e}{t} \qquad v_1 \text{ (coeficiente específico)}$$

si $v = 1$ se tiene $v = \frac{e}{t}$

911. – REGLA. – *Las ecuaciones dimensionales deben ser tales que:* SI LOS ARGUMENTOS VALEN «UNO», LA FUNCIÓN VALGA TAMBIÉN «UNO».

Por lo tanto:

La ecuación dimensional de la velocidad deberá darnos:

$$\text{unidad de velocidad} = \frac{\text{unidad de espacio}}{\text{unidad de tiempo}}$$

912. – De aquí resulta que:

a) Habrá tantas unidades de velocidad, cuantas combinaciones se pueda hacer entre las diversas unidades de ESPACIO y las diversas unidades de TIEMPO.

b) Habrá tantas ecuaciones dimensionales de la velocidad, cuantas son sus unidades:

$v = \frac{m}{h}$ (*metros* sobre *horas*) $\qquad v = \frac{m}{min}$ (*metros* sobre *minutos*)

$[v] = \frac{cm}{seg}$ (*centímetros* sobre *segundos*) $\qquad v = \frac{cd}{d}$ (*cuadras* so re *días*)

$$v = \frac{Km}{h} \quad (\textit{kilómetros} \text{ sobre } \textit{horas})$$

913. – NOMBRE DE LAS UNIDADES DE VELOCIDAD. – No existen nombres especiales para estas unidades. Se las designa mediante frases que contengan el nombre de las unidades de espacio y de tiempo, que figuran en la ecuación dimensional adoptada.

$$\text{m/h} = \frac{m}{h} \text{ (metros por hora)}$$

$$\text{m/seg} = \frac{m}{seg} \text{ (metros por segundo)}$$

*Hase querido denominar «**cel**» la unidad correspondiente a* **cm/seg** *(centímetros por segundo); pero esta propuesta no ha tenido mucha aceptación.*

914. – SÍMBOLOS DE ESTAS UNIDADES. — Se representan de tres maneras

$$5 \text{ Km}^{\text{seg}} = 5 \text{ Km/seg.} = 5 \text{ Km}_{\text{seg}}$$

Aconsejamos, sin embargo, eliminar la 1ª de estas formas; puesto que *seg* es un divisor, y es bueno que figure por debajo de *Km.* que es su dividendo.

915. – UNIDAD CEGESIMAL DE VELOCIDAD. – Como en el sistema de unidades absolutas, la *unidad de espacio* es el *cm.* y la *unidad de tiempo* es el *seg*, resulta forzosamente que :

La unidad C.G.S de velocidad es el **cm** POR **seg**, denominado "CEL".

La ecuación dimensional unitaria será pues: $1\ cel = \frac{1cm.}{1seg.}$

y la ecuación dimensional general, será: $cel = \frac{cm}{seg}$

II°— Movimiento uniformemente variado

1.° – Concepto de aceleración.

(Estudiado en el plano de Galileo).

916. – Ya vimos que:

EL MOVIMIENTO LIBRE ES RECTILÍNEO Y UNIFORME.

Esto significa que, si un cuerpo en reposo recibe durante un cierto tiempo el empuje de una fuerza, adquirirá una cierta velocidad creciente, la cual se volverá RECTILÍNEA y CONSTANTE, *solamente cuando la fuerza deje de obrar sobre el cuerpo.*

Es ésta una consecuencia directa del principio de inercia:

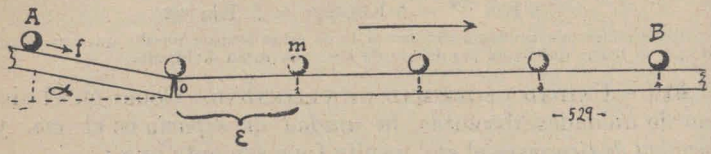
UN CUERPO NO PUEDE MODIFICAR POR SÍ MISMO SU ESTADO DE REPOSO O DE MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME.

917. - Incremento de la velocidad es la velocidad que una fuerza imprime a un cuerpo después de haber actuado sobre él durante un tiempo cualquiera.

EXPERIENCIA. – Con los planos de Galileo: de envión **Ao** y de observación **oB** (fig. 529), y el metrónomo para marcar el tiempo.

Soltando el móvil **m** de varias alturas, se encontrará, *después de varios ensayos*, un punto **A** desde donde debe partir **m** para que desde el punto **o** recorra un espacio ε por cada unidad de tiempo.

El mismo efecto se obtiene prefijando **A** y variando la inclinación del plano de envión, o sino, la graduación del metrónomo.



La porción ε es la velocidad adquirida por **m** como consecuencia de la componente dinámica **f** que estuvo actuando sobre él durante el tiempo transcurrido en el camino **Ao.**

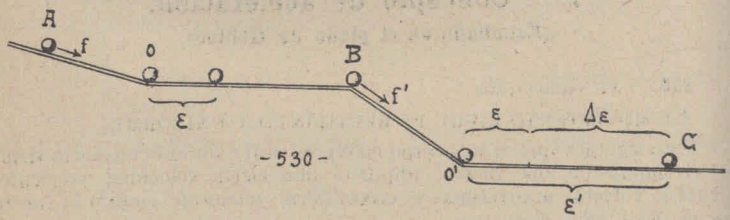
Efectivamente en **A** el móvil tenía: $v = \text{cero}$

y ahora tiene: $v = \varepsilon$

918. - Esta velocidad adquirida es el INCREMENTO DE LA VELOCIDAD, y se representa así Δv.

En nuestro caso $\Delta v = \varepsilon$

919 – Compliquemos el aparato añadiéndole otro plano de envión, **Bo'** seguido de otro de observación **o'C** (fig. 530):



Soltando de nuevo **A**, el móvil recorrerá el camino **oB** con velocidad constante:

$$v = \varepsilon$$

Pero al llegar a **B**, la nueva componente dinámica **f'** actuará sobre él, dándole un nuevo impulso.

Variando la inclinación del plano **Bo'** podremos obtener distintas velocidades en el plano **o'C.**

Supongamos que el nuevo espacio unitario sea ε'.

Tendremos que:

$$v' = \varepsilon'$$

Se pregunta ahora: ¿Cuál fué el *incremento de la velocidad* como consecuencia del impulso que dió f' al móvil durante el tiempo que actuó sobre él?

Respuesta $\Delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon$ (fig. 530)

Léase: "Incremento de la velocidad = velocidad actual, *menos* velocidad inicial".

Luego $\Delta v = v' - v$

920. – Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo que estaba en reposo:

$v = cero$

p. l. t. $\Delta v = v' - cero = v'$

v (*velocidad inicial*) v' (velocidad actual).

NOTA. – *Al decir* "VELOCIDAD ACTUAL" *entendemos decir:* "'velocidad que tiene el móvil en el momento en que lo observamos".

921. – **Aceleración** es el incremento de velocidad que una fuerza imprime a un móvil *después de haber actuado sobre él durante* UNA UNIDAD DE TIEMPO.

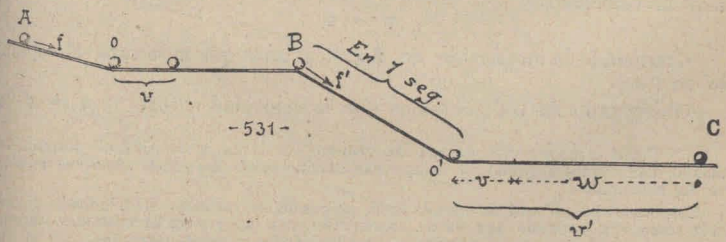
En términos más llanos:

Aceleración es el incremento unitario de la velocidad con respecto al tiempo de envión.

NOTA. — Aunque ya hemos indicado el valor de la palabra "*unitario*", añadimos aquí que, pudiendo variar el incremento de la velocidad en función del tiempo, de la fuerza y de la masa del móvil, como luego veremos, no basta decir que "LA ACELERACIÓN ES INCREMENTO UNITARIO DE LA VELOCIDAD": falta saber con respecto a cuál de sus tres argumentos es unitario dicho incremento.

Sin embargo, para evitar circunlocuciones, en el curso del texto nos permitimos no especificar el término UNITARIO, cuando su especificante es evidente.

922. – EXPERIENCIA. – El mismo aparato anteriormente usado. (fig. 531):



Dando cualquier inclinación al plano **Ao**, determinamos (ayudado del metrónomo) el espacio unitario **v**.

El móvil, pues, recorre el camino **oB** con velocidad **v**.

Variando la inclinación de **Bo'**, logramos que el móvil baje de **B** a **o'** en *1 seg.* (1).

Observando en el plano **o'C**, vemos que:

$$v' > v \qquad \text{o sea} \qquad v' = v + \Delta v$$

En la fig. hemos representado Δv con el símbolo **w**, por razones que a continuación se expresan.

Pero Δv es el efecto del impulso que **f** dió a **m** actuando sobre él durante *1 seg.*

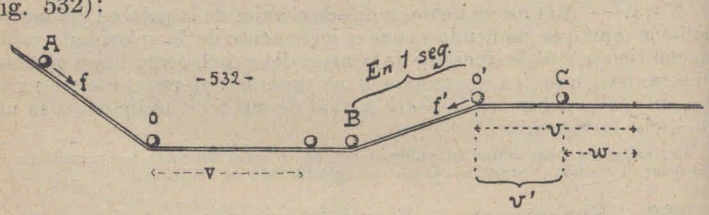
P. l. t. aquí: Δv = ACELERACIÓN

923. – Varios son los símbolos que se usan para la aceleración: **a**, α, γ Y, en verdad que ninguna de estas letras es práctica, porque *son tras gastadas*, puesto que se usan con otros valores simbólicos que pueden concurrir con el símbolo de aceleración en una misma expresión algébrica.

A fin, pues, de evitar ambigüedades perniciosas para los alumnos, usaremos como símbolo de la aceleración la **w** ya adoptada por algunos autores.

De modo que: **v** = *velocidad* **w** = *aceleración*

924. – **Aceleración negativa.** – APARATO: "la montaña rusa" (fig. 532):



Soltando **m** desde un punto arbitrario **A**, notaremos que en **oB** tiene la velocidad:

$$v = \varepsilon$$

Graduando la inclinación de **Bo'**, logramos que **m** recorra el espacio **Bo'** en *1 seg.*

Observando en **o'C**, notamos que la velocidad actual $v' = v - w$

(1) Como la frase «UNA UNIDAD DE TIEMPO» es larga, y despista al alumno; en adelante llamaremos **segundo**, el tiempo transcurrido entre dos golpes sucesivos del timbre del metrónomo.

Este SEGUNDO no será el *segundo legal*, pero será *su sustituto;* pudiéndosele considerar como «UN SEGUNDO QUE SE HA AUMENTADO, CON EL FIN DE ESCUCHARLO MEJOR» así como aumentamos con el microscopio las longitudes y áreas pequeñas, con el fin de observarlas mejor.

Si algún escrupuloso no se somete a este desvío del significado del término «SEGUNDO», podrá decir «*pseudo-segundo*», «*pro-segundo*»; o sino «*tic-tac*»; a no ser que le parezca más lógico recurrir a algún compuesto griego.

es menor que la inicial:

$$v' < v$$

La razón es evidente, puesto que **f'** *ha estado obrando en sentido opuesto a la velocidad inicial de* **m**.

Apliquemos la fórmula: $w = v' - v$

y obtendremos $w < cero$

Léase: «**w** es menor que *cero*».

925. — NOTA. — Por si acaso algún alumno lo tiene olvidado:

Se dice que una cantidad ES MENOR QUE CERO, cuando tiene valor negativo.

En nuestro caso tenemos, p. ej.: $w = -8$.

926. — Ahora podemos decir que:

Movimiento **uniforme** es el que tiene un cuerpo cuando su *aceleración* es igual a CERO.

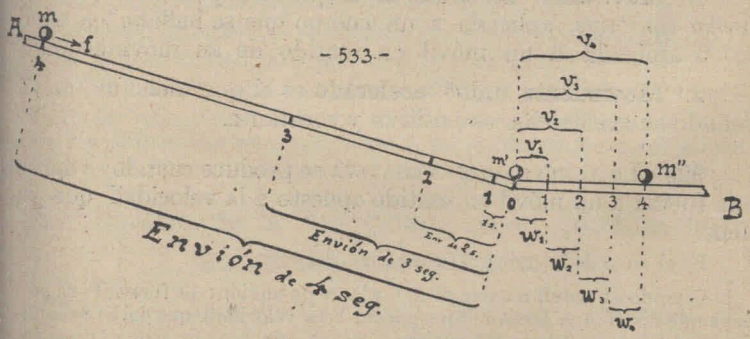
Movimiento **acelerado** es el que tiene un móvil cuya *aceleración* es POSITIVA.

Movimiento **retardado** es el que tiene un móvil cuya *aceleración* es NEGATIVA.

2.° — Movimiento uniformemente variado.

927. — Cuando la fuerza que actúa sobre un móvil, es constante, la aceleración también es constante.

EXPERIENCIA. — Planos de Galileo: de envión y de observación (fig. 533).



Por medio de repetidos ensayos logramos marcar en el plano **Ao** los puntos 1, 2, 3, 4.... desde donde hay que soltar el móvil **m** para que llegue al punto **o** en 1, 2, 3, 4... *seg* respectivamente.

Así preparado el aparato, soltemos el móvil sucesivamente, desde 1, 2, 3, etc., marcando cada vez en **oB** el punto adonde llega **m** al terminar el *primer segundo* de movimiento libre.

Llamando v_1 la velocidad adquirida en *1 seg.* de envión, tendremos

$$v_1 = w_1$$

Llamando v_2 la velocidad adquirida en *2 seg.* de envión, tendremos

$$v_2 = v_1 + w_2$$

o sea

$$v_2 = w_1 + w_2$$

Y así sucesivamente, tendremos

$$v_3 = v_2 + w_3$$

de donde

$$v_3 = w_1 + w_2 + w_3 \text{ etc.}$$

Y generalizando

$$v_t = w_1 + w_2 + w_3 ... + w_t \quad (1)$$

Pero como

$$w_1 = w_2 = w_3 = ... = w_t = w$$

resulta que

$$v_t = w.t$$

Pero a v_t le corresponde el símbolo simple **v**

De lo que se deduce que

$$v = w.t$$



928. - Esta conclusión nos da derecho para definir el MOV. UNIFORM. ACELERADO de dos maneras, que aunque difieren entre sí esencialmente, son sin embargo equivalentes mutuas:

1.° **Mov. unifm acelerado** es el que está producido por una *fuerza constante*, aplicada a un cuerpo que se hallaba en reposo, o aplicada a un móvil en sentido de su movimiento.

2.° **Movimiento unifm acelerado** es el que tiene un móvil cuando su aceleración es positiva y constante.

929. - La ACELERACIÓN NEGATIVA se produce cuando se aplica una fuerza a un móvil en sentido opuesto a la velocidad que ya tiene.

Es el caso de la montaña rusa (fig. 532).

Cuando el móvil recorre el 2.° plano de envión: la fuerza **f'** va produciendo en él una aceleración opuesta a la velocidad que había adquirido en el primer plano de envión.

(1) El símbolo v_t (**v** sub **t**) significa «*velocidad correspondiente a un envión de* **t** *segundos*»

930. - Cuando la aceleración es negativa, el movimiento es RETARDADO; y si la fuerza que la produce es constante, también es constante la aceleración.

En tal caso tendremos MOVIMIENTO UNIFM. RETARDADO, *el cual se puede definir así:*

1.° **Mov. unifm. retardado** es el que produce una *fuerza constante*, aplicada a un móvil en sentido opuesto a su movimiento.

2.° **Mov. unifm retardado** es el que tiene un móvil cuando la aceleración es negativa y constante.

931. - *Un ejemplo muy común de* MOV. UNIFM. VARIADO:

Lanzamos un proyectil al aire (fig. 534):

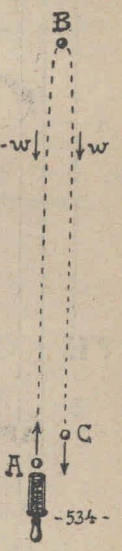
a) En el camino **AB** tiene *mov. retardado*, porque su aceleración es: — w

b) En **B** su velocidad se reduce a CERO, y el proyectil comienza a descender.

c) En el recorrido **BC** tiene *mov. acelerado*, porque su aceleración es: +w

d) Tanto al subir como al bajar, su movimiento es UNIFORMEMENTE variado, porque la causa de la aceleración es la GRAVEDAD, *que para cada cuerpo en un lugar determinado del globo, es una fuerza constante.*

Y siendo constante la fuerza, será constante la aceleración producida en el proyectil.



932. - Las mismas leyes aplicables al *mov. unifm. acelerado*, son aplicables al *unifm. retardado*, con tal que se apliquen teniendo en cuenta que

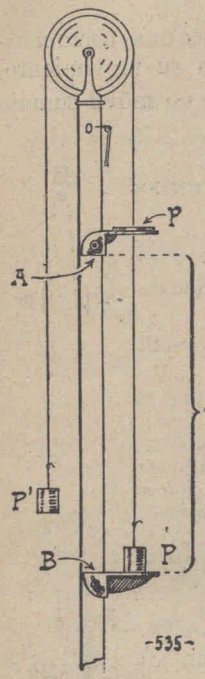
+ w debe sustituirse por — w

Por eso no nos detendremos a estudiar *ex-profeso* el segundo; y solamente le aplicaremos las conclusiones a que lleguemos en el estudio del primero.

3°. - Gráfica de la Velocidad, en el Movimiento uniformemente variado.

933. - En el movimiento VARIADO, llamamos **velocidad** del móvil en un instante dado, la que tendría con *movim. rectilíneo y uniforme*, a partir de ese instante, si se eliminaran las causas de su aceleración.

Hasta ahora hemos estudiado sólo el movimiento rectilíneo; pero la definición anterior es aplicable también al curvilíneo y al irregular.



Ej.: Para conocer qué velocidad tiene el sistema **2P** en el punto **A** (fig. 535), colocamos la corredera hueca, de modo que detenga la pesa adicional **p** cuando **P** llega a **A**.

A partir de **A**, el sistema **2P** tiene movimiento libre, que en consecuencia será UNIFORME, y seguirá siendo rectilíneo como antes.

La velocidad que manifieste **2P** en el trayecto de **A** hacia **B**, es la que tenía en el instante en que perdió la causa de la aceleración, que era **p**.

Si **P** se detiene en **B** al fin del *1er. seg.* de movim. libre, su velocidad será

$$v = AB$$

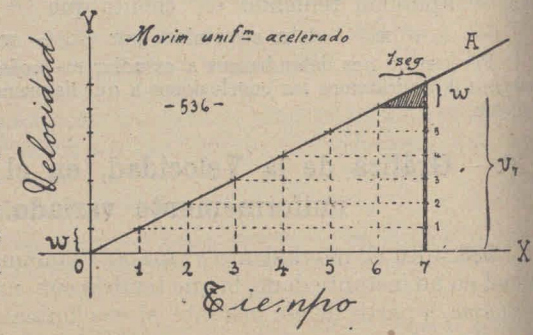
934. - Esto sentado, y teniendo en cuenta que *cuando la fuerza es constante, permanece constante la aceleración*, construyamos la gráfica de las velocidades, recordando que si el móvil parte de la posición de reposo, su velocidad inicial es *cero*.

935. - GRÁFICA DE LAS VELOCIDADES, CUANDO v_0 ES "CERO".

Tengamos en cuenta que:

a) Por el *principio de inercia*, LAS ACELERACIONES ADQUIRIDAS SE CONSERVAN INDEFINIDAMENTE.

b) Por lo tanto, la velocidad que un móvil tiene en cada instante es igual a la suma de las aceleraciones que adquirió desde que dejó de estar en reposo.



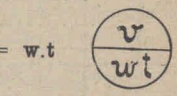
Construyamos el diagrama en base del principio anterior (fig. 536.)

De su examen se deduce la siguiente clave (fig. 537):

Tiempo	0	1	2	3	4	5	6	...	t
Velocidad	0	w	2w	3w	4w	5w	6w	...	wt

-537-

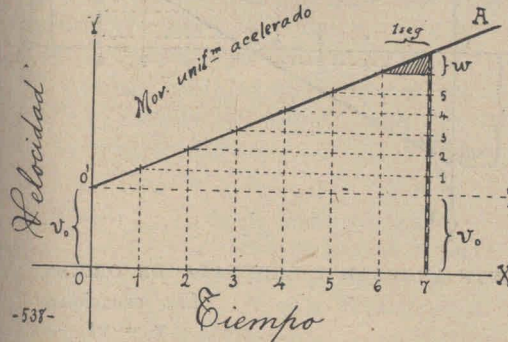
De esta clave deducimos la fórmula general: $v = wt$



De este modo queda demostrada matemáticamente la fórmula que habíamos descubierto mediante la experimentación (**927**).

936. – La fórmula $v = wt$ es la expresión algébrica de la siguiente ley:

LEY DE LAS VELOCIDADES. – **En el movim. unifm. variado,** (QUE SE INICIÓ DESDE EL REPOSO) **la velocidad que tiene el móvil en cada instante es proporcional al tiempo transcurrido desde que comenzó dicho movimiento.**



-537-

937. – GRÁFICA DE LAS VELOCIDADES, CUANDO v_o ES IGUAL c (fig. 538).

c es una constante.

Cuando un móvil tiene una velocidad inicial v_o; se suman algebraicamente dos movimientos: el uniforme que ya tenía, con el acelerado que va adquiriendo.

De modo que su gráfica difiere de la del caso anterior en que corta el eje de las **y** a una distancia v_o del origen de los ejes.

Del simple examen de esta gráfica se deduce la fórmula

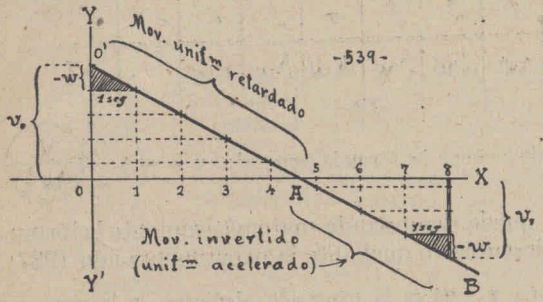
$$v = v_o + wt$$

que invertiremos así: $v = wt + v_o$

Las cantidades w y v_o son las constantes de la ecuación.

938. - En la gráfica anterior hemos supuesto que la aceleración era positiva.

Cuando la aceleración es negativa, la gráfica es la siguiente (fig. 539):

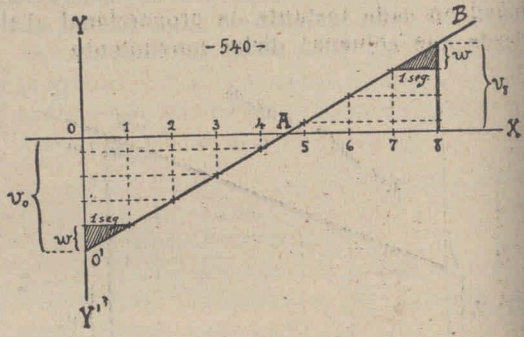


Donde se ve que **w**, se va restando a v_0 hasta dar un movimiento acelerado en sentido opuesto al anterior.

La fórmula es:

$$v = v_0 - w.t$$

939. - Y como esta fórmula no nos conviene para ciertos trabajos, invertiremos la gráfica, razonando así (fig. 540).

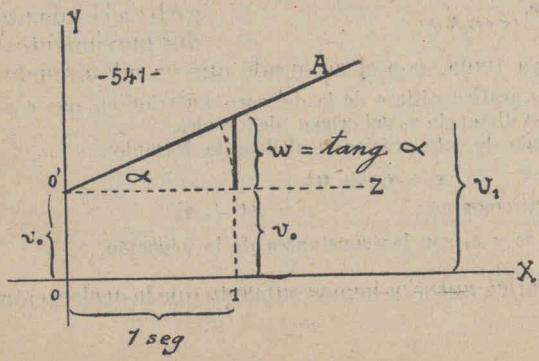


Suponemos que la aceleración es positiva; y que la velocidad inicial es negativa.

De modo que la nueva fórmula será:

$$v = w.t - v_0$$

940. – COEFICIENTE ANGULAR Y ORDENADA DE ORIGEN.



Las ecuaciones

$$v = wt + v_0$$

$$y = ax + c$$

son homólogas.

De ello se desprende que

$w = a$ $\quad v_0 = c$

O sea que (fig. 541):

w = coeficiente angular = $tg\ \alpha$

v_0 = ordenada de origen

El alumno debe releer el § 12° (Cap. V° de "Física General") (pág. 276); donde se halla explicado todo lo que se refiere al significado geométrico de las constantes **a** *y* **c**.

4.° – Aceleración infinitesimal.

Para aclarar el concepto de ACELERACIÓN y para poder entender ciertos textos de consulta es necesaria la explicación que incluimos en este párrafo.

Por otra parte, con lo que ya hemos expuesto en las págs. 275 y 276, con lo que aquí se añade, vamos administrando al alumno *en pequeñas dosis* el caudal de conocimientos indispensables para entender las demostraciones matemáticas de varias leyes de Física.

941. – Ya sabemos que en la ecuación

$$y = ax + c$$

a y c son dos cantidades *invariables* para cada problema, llamadas por tal razón: CANTIDADES CONSTANTES.

x es una cantidad que varía *"por su propia cuenta"*, o sea *sin permiso de nadie*; y se llama, por lo mismo: VARIABLE INDEPENDIENTE, aunque más cómodo es llamarla **argumento**.

y es una cantidad que varía *en consecuencia de las variaciones de* **x**; y recibe por esto el nombre de **función** de la **x**.

La ecuación anterior es GENERAL, y uno de sus casos particulares es:

$$v = wt + v_0$$

donde tendremos que:

w y v_0 son las CONSTANTES
t es el ARGUMENTO
v es la FUNCIÓN de **t**.

942. – La gráfica adjunta (fig. 542), corresponde al caso en que:

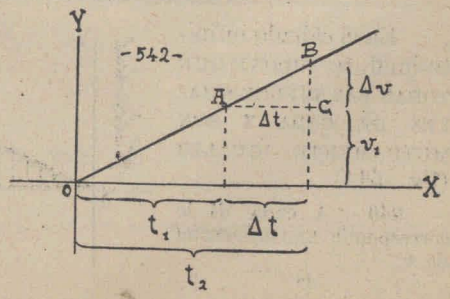
v_0 = CERO

En ella hemos dado a t dos valores:

t_1 y t_2

y en consecuencia, **v** adquirió también dos valores:

v_1 y v_2



943. – Para pasar de t_1 a t_2, tuvimos que añadir a t_1 un incremento: Δt.

Δt se lee *"incremento de t"*

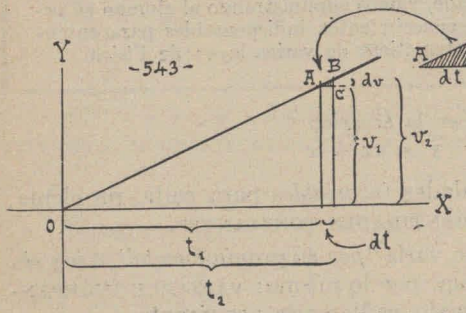
Al incremento de **t**, le corresponde un incremento de **v**: Δv.

Pero cuando $\Delta t = 1$

entonces Δv = *incremento unitario* = ACELERACIÓN

De donde deducimos que:

Aceleración ES EL INCREMENTO UNITARIO DE LA VELOCIDAD.



944. – Si hacemos Δt tan pequeño que, NO PODAMOS PRÁCTICAMENTE OBTENER UNA FRACCIÓN MÁS PEQUEÑA DE TIEMPO, habremos obtenido **un instante** (fig. 543).

En *Matemáticas superiores*, el instante se denomina: **diferencial de tiempo** y se representa así: *dt*

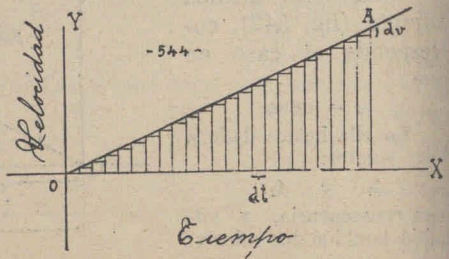
Y en general:

Se llama **diferencial** de una variable cualquiera, la porción menor que *suponemos* se pueda obtener de dicha magnitud:

$$dx = \frac{x}{\infty}$$

Aquí el INFINITO se supone que es una cantidad *sumamente* grande; y no realmente infinita.

En el cálculo infinitesimal, se SUPONE QUE TODAS LAS DIFERENCIALES DE CADA **x** SON MUTUAMENTE IGUALES (fig. 544).



945 – A cada *dt* le corresponde una *diferencial* de **v**:

dv

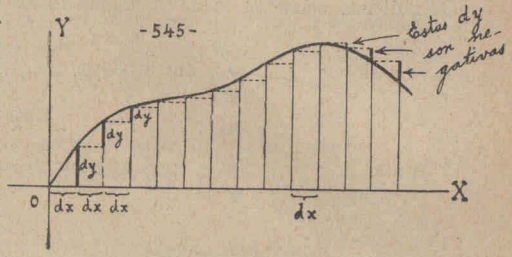
Llámase **aceleración infinitesimal** LA DIFERENCIAL DE LA VELOCIDAD:

$$dv = w$$

946. – Pero, aunque *en cada caso* las **dx** son mutuamente iguales, no sucede lo mismo con las *dy*, que PUEDEN SER IGUALES O DESIGUALES.

Por lo visto, tendremos que en unos casos las **w** *son mutuamente iguales* como en el ejemplo anterior; y en otros casos *son desiguales* (fig. 545).

En esta fig. hemos dado a las **dx** una dimensión *exageradamente grande*, para que se puedan notar las diversas dimensiones de la aceleración **dy**.

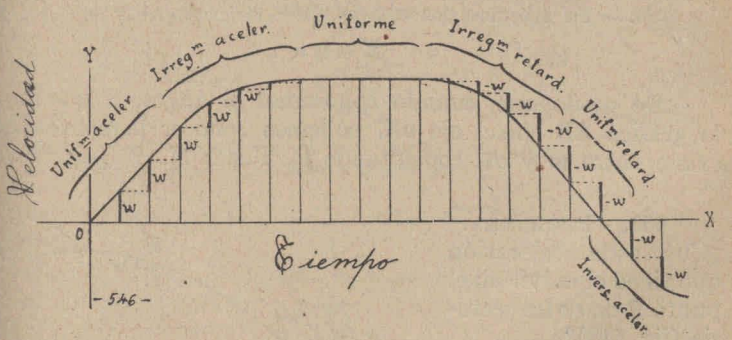


947. – Atendiendo a lo que acabamos de exponer, resulta que: (fig. 546):

En el *movimiento uniforme:* **w** = cero

» » » *unif.m variado:* **w** ≠ cero (cantidad constante).

» » » *irregular:* **w** cantidad variable, que puede oscilar desde (+ **dy**) hasta (— **dy**) pasando por CERO.



948. – La razón *dy* / *dx* recibe el nombre de "DERIVADA DE y"; y su valor es un número muy interesante en los cálculos.

La derivada de **y** se llama también COEFICIENTE DIFERENCIAL; y se representa también así: **y'**.

La derivada de la velocidad es, pues: $\frac{dv}{dt} = \frac{w}{dt} = v'$

949. – De la ecuación $\frac{w}{dt} = v'$

se deduce esta otra $w = v' . dt$

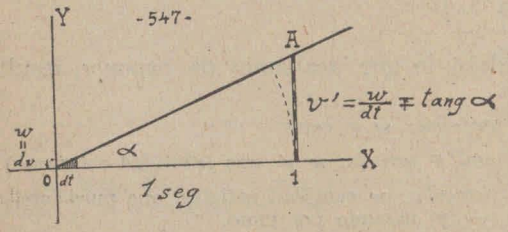
Léase: «aceleración infinitesimal = derivada de la velocidad × diferencial del tiempo».

Esta última ecuación tiene la misma forma que:

$$y = ax$$

donde w corresponde a y
v' » » a
dt » » x

Y como a = coef. angular de α
luego $v' =$ » » » α



ESTA ES LA RAZÓN PORQUE A LA **derivada** DE UNA FUNCIÓN SE LA LLAMA **coeficiente diferencial** de dicha función.

950. – Ya sabemos por trigonometría que $a = tg\ \alpha$

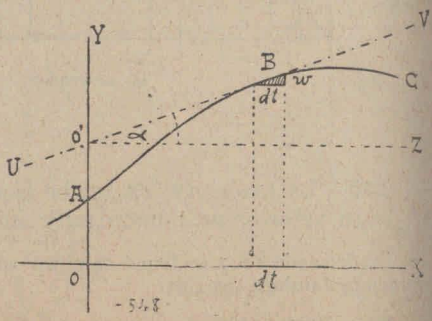
luego $\frac{w}{dt} = tg\ \alpha$

De modo que, cuando conocemos el ángulo α que forma la gráfica **AB** con el eje **oX**, podemos conocer la relación que existe entre w y dt, consultando la TABLA N.º 2 (pág. 286).

951. - PROBLEMA.– ¿Cuál es la aceleración que tiene el móvil en el punto **B** de su trayectoria (fig. 548)?

Solución. – Trazamos **UV**, tangente geométrtica de **ABC** en el punto **B**.

Luego trazamos **o'Z // oX**



Medimos el ángulo α, obteniendo en nuestro caso: $\alpha = 20°$

Buscando en la TABLA N.° 2 (pág. 286), vemos que:

$$tg\ 20° = 0{,}364$$

luego w en el punto **B** = 0,364

Si el módulo de la velocidad indica *cm|seg*, la respuesta concreta será:

w (en el punto **B**) = 0,364 cm|seg.

952. – IMPORTANTE. – No hay que confundir *"tangente geométrica"* (que es simplemente cuestión de forma) con *"tangente trigonométrica"* (que es cuestión de forma y magnitud).

En el problema anterior:

UV = *tang. geom.* de **ABC** en el punto **B**

w = *tang. trigonom.* de α

5.° – Ley de las velocidades.

953. – El movimiento unif^{m}. acelerado está sujeto a tres leyes (dos de ellas *fundamentales*, y una *auxiliar*).

Aquí estudiaremos la primera:

LEY DE LAS VELOCIDADES. – **En el movimiento unif^{m}. acelerado que se inició a partir del estado de reposo, la velocidad que el móvil tiene en cualquier instante, es proporcional al tiempo que transcurrió desde que comenzó dicho movimiento.**

$$v = w.t$$



Esta ley ya ha quedado demostrada en el estudio de la aceleración. Aquí no haremos más que completar la demostración.

954. – DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DE LA LEY DE LAS VELOCIDADES.

Todo el § 3.° (pág. 331) está dedicado a esta demostración

En el aparte (**937**) y siguientes se completa la fórmula

$$v = w.t$$

para el caso en que el móvil comenzó a acelerar el movimiento, partiendo de una velocidad inicial v_0.

$$v = v_0 + w.t$$

Y si la aceleración es opuesta a v_0, tenemos el MOVIMIENTO UNIF^{m}. RETARDADO, cuya fórmula es

$$v = v_0 - w.t$$

el cual puede considerarse como *movimiento acelerado inverso*, y entonces la fórmula es

$$v = w.t - v_0$$

955. – DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LAS VELOCIDADES EN EL PLANO DE GALILEO.

La primera parte del § 2.° (pág. 329) está dedicado a esta demostración.

956. – DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LAS VELOCIDADES EN EL APARATO DE MORÍN.

Repitiendo varias veces la experiencia de la fig. 512 (pág. 315), y variando para cada caso la longitud de la porción floja de hilo, se obtienen varios diagramas como el de la fig. 513.

Comparando dichos diagramas se verá que

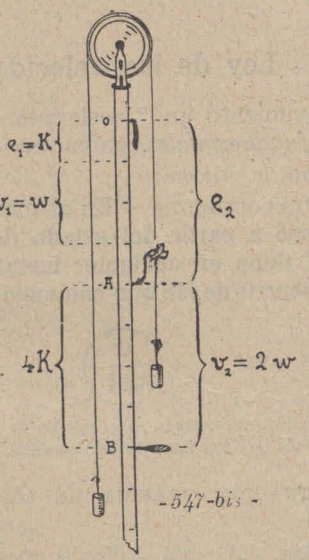
$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{t}{t'}$$

Aquí t y t' indican el tiempo que duró cada envión.

Y ε y ε' son los espacios unitarios con respecto al tiempo de recorrido

Pero ε y ε' son la medida de las velocidades v y v' de donde

$$\frac{v}{v'} = \frac{t}{t'}$$



-547-bis-

957. – DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LAS VELOCIDADES EN LA MÁQUINA DE ATWOOD (fig. 547 – bis).

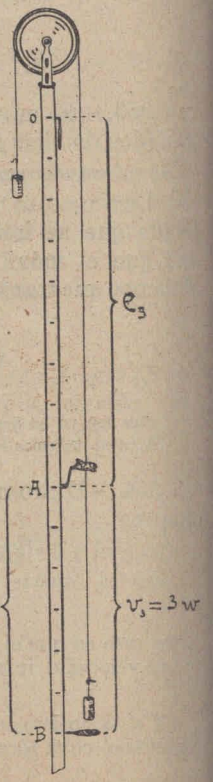
Preparada la máquina como se indica en el § 7.° del movim. uniforme (pág. 311), obtenemos que:

Para $e_1 = k$

la velocidad es $v_1 = w$

Repitiendo la experiencia con enviones mayores, vemos que

para e_2 $v_2 = 2w$



para e_3 $v_3 = 3\,w$

para e_t $v_t = w.t$

Pero e_1, e_2, e_3 etc. indican enviones de *1 seg*, *2 seg*, *3 seg*, etc. De donde v_1, v_2, v_3, etc., son las velocidades adquiridas después de *1 seg*, *2 seg*, *3 seg*, etc. de envión

y llamando v a v_t

resulta que $v = w.t$

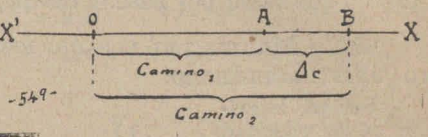
6.°-Valor del camino, en el movim. unif^{m}. acelerado.

958. – Recuerde el alumno que:

Camino es el ESPACIO comprendido entre el origen del movimiento y la posición del móvil (fig. 549.)

Cuando el móvil está en A, su camino es **oA**. y cuando está en **B**, su camino es **oB**.

La diferencia **AB** entre dos caminos, es e INCREMENTO DEL CAMINO: **Δc**.



-549-

959. – Si el móvil comenzó a trasladarse desde **o**, todo el camino es ESPACIO RECORRIDO; y entonces **Δc** es un RECORRIDO PARCIAL.

Si el movimiento se inició en **A**, entonces **Δc** es el RECORRIDO TOTAL; y **oA** es la DISTANCIA INICIAL.

La palabra ESPACIO sirve para indicar lo mismo un *camino*, que una *distancia* o un *recorrido* cualquiera.

Por eso en la mayoría de los textos figura con el nombre de ESPACIO lo que con más propiedad debiera llamarse "CAMINO".

> Los principiantes se embrollan con suma facilidad al estudiar la ley de los espacios, porque en su mente traducen "ESPACIO" por "*incremento unitario del camino*", donde debieran entender "*camino*".
>
> Para evitarles esta confusión, llamaremos a menudo su atención a este respecto.

960. – La gráfica de la velocidad contiene implícitamente la medida del espacio recorrido por el móvil.

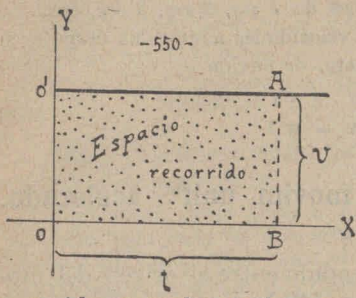
Para estudiar este asunto, debemos considerar tres casos:

a) Movimiento uniforme.

b) Movimiento unif^{m}. acelerado.

c) Movimiento irregular.

961. – MEDIDA DEL ESPACIO RECORRIDO, EN EL MOVIMIENTO UNIFORME.



Sea **o'A** la gráfica de la velocidad (fig. 550). La abscisa **t** indica el TIEMPO; y la ordenada **v** indica la velocidad.

El área del rectángulo **oBAo'** es:

$$v.t$$

Pero ya sabemos que en el movimiento uniforme:

$$e = v.t$$ *Luego:*

La medida del espacio recorrido por el móvil es *numéricamente* igual al área del rectángu que tiene por base el *tiempo*, y por altura la *velocidad*.

962. – MEDIDA DEL ESPACIO RECORRIDO, EN EL MOVIMIENTO UNIF^{m}. ACELERADO.

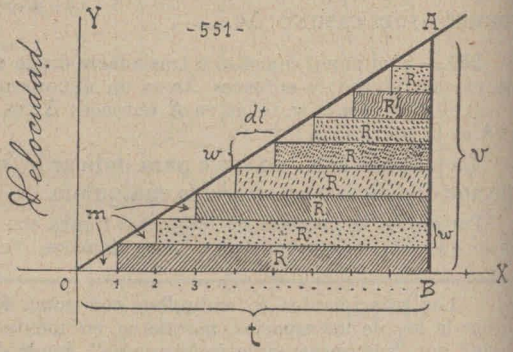
Sea **oA** la gráfica de la velocidad (fig. 551).

Descompongamos la abscisa **t** en sus diferenciales: $dt = 0\text{-}1 = 1\text{-}2$ etc.

La ordenada **v** quedará descompuesta en sus diferenciales:

$$dv = w$$

Siendo dt y w infinitivamente pequeños, podemos considerar *prácticamente* como NULOS los triangulitos **m**.



De esta consideración resulta que el triángulo **oAB** está constituido por una suma de rectángulos **R**, sobrepuestos.

Demostraremos ahora, como:

CADA RECTÁNGULO **R** TIENE ÁREA NUMÉRICAMENTE IGUAL AL RECORRIDO DEL MÓVIL COMO CONSECUENCIA DE CADA UNA DE LAS (w) QUE INTEGRAN LA VELOCIDAD ACTUAL **v**.

963. – *Demostración de la sentencia anterior.* – Al terminar la primera dt (a saber **0-1**) el móvil tiene

$$v_1 = w$$

Por el PRINCIPIO DE INERCIA:

DICHA VELOCIDAD NO SE PIERDE MÁS, e irá sustentando continuamente en el móvil *un movimiento uniforme*, cuyo recorrido al fin del tiempo **t**, será:

$$e_1 = w.t$$

Pero R_1 tiene por área: $w.t$

Luego $e_1 = R_1$

En forma análoga se demuestra que

$$e_2 = R_2$$

$$e_3 = R_3$$

etc. L. Q. Q. D.

964. - NOTA. — En el raciocinio anterior, al decir que: $e_1 = w.t$ hemos supuesto que $t = 1\_R$ cuando en realidad $t = 0\_R$

Pero como 0-1 puede considerarse prácticamente como NULO, queda justificada nuestra suposición.

965. - Consecuencia.

Por todo lo que acabamos de demostrar queda asentado que siendo $oAB = \int R$ (1)

y siendo por otra parte

$$e = e_1 + e_2 + e_3 \ldots + e_t = \int de \quad (2)$$

resulta forzosamente que

área de oAB = e L. Q. Q. D.

e = espacio que el móvil tiene andado al fin del tiempo t.

966. – MEDIDA DEL ESPACIO RECORRIDO, EN EL MOVIMIENTO IRREGULAR (fig. 552).

Todo movimiento irregular se puede considerar como una sucesión de pequeños movimientos uniformes y unif.^{m} variados.

-552-



(1) El símbolo $\int R$ se lee: «*integral de las* R», y debe entenderse: «*suma de todas las* R».

(2) El símbolo $\int de$ se lee: "*integral de las diferenciales de* e", y debe entenderse «*suma de todas las diferenciales del espacio medido*»

Por lo tanto, si en cada caso el espacio recorrido *es numéricamente igual al área subtendida por la* GRÁFICA DE LA VELOCIDAD, *en el movimiento irregular sucederá lo mismo.*

Tendremos, pues, en la fig. 552: e = área de **oCBAo'**

REGLA. – Para medir en la gráfica de la velocidad el espacio que en cualquier momento tiene recorrido el móvil, se planimetra (**541 h 546**) el área que tiene por periferia la VELOCIDAD INICIAL, el TIEMPO, la VELOCIDAD ACTUAL y la PORCIÓN DE GRÁFICA comprendida entre dichas velocidades.

En nuestro caso (fig. 552) dicha área es **oCBAo'.**

967.– La conclusión a que acabamos de llegar, sirve de base para demostrar matemáticamente las otras dos leyes del movimiento unif.^{m} acelerado:

LEY AUXILIAR. – **En el movim. unif^{m} acelerado, el espacio recorrido en la 1ª unidad de tiempo, equivale a la mitad de la aceleración:**

$$k = \tfrac{1}{2} w$$

Ya habrá advertido el alumno, que *en este texto*, el espacio recorrido en el primer segundo de movimiento unif^{m}. acelerado se indica con el símbolo **k**.

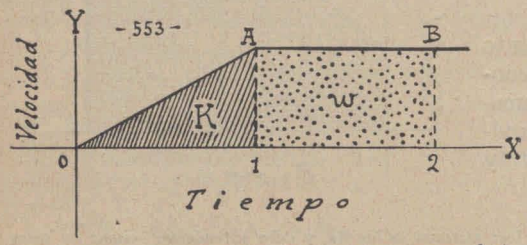
LEY DE LOS ESPACIOS. – **En el movimiento unif.^{m} acelerado iniciado en el estado de reposo, el camino del móvil es, en cualquier instante, proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido desde que se comenzó dicho movimiento.**

$$e = k.t^2$$

¡Al explicar esta segunda ley, diremos porque a (e) lo llamamos camino.

968.– Demostración gráfica de la ley auxiliar.

Acabamos de ver como en el movim. unif.^{m} acelerado: EL ÁREA DEL TRIÁNGULO SUBTENDIDO POR LA GRÁFICA DE LA VELOCIDAD ES *numéricamente* IGUAL AL ESPACIO RECORRIDO DURANTE EL TIEMPO CORRESPONDIENTE.



En la fig 553, si o-1 = UNIDAD DE TIEMPO, tendremos que *área de* oA1 = k pero *área de* oA1 = ½ o-1×A-1 o sea k = ½ o-1×A-1

donde o-1 = t_1 = *1* y A-1 = v_1 = w

p. l. t. k = ½w L. Q. Q. D.

969. – NOTA. — Cuando decimos que un ESPACIO (**k**) es igual a una ACELERACIÓN ($\frac{1}{2}$**w**), tenemos que entender que "es *numéricamente* igual".

¡Cualquiera entiende que cada magnitud se mide mediante magnitudes de su misma especie; y sería una sinrazón decir que "MEDIMOS UN ESPACIO, MEDIANTE UNA ACELERACIÓN", o viceversa.

970. – Otro modo de demostrar gráficamente la ley auxiliar.

Si en la máquina de Atwood (ver fig. 535) retiramos la adicional p al fin de t_1, a partir de ese instante el movimiento será *uniforme*.

En tal caso la gráfica de la velocidad será la línea quebrada **oAB**... (fig. 553), en la que la porción **oA** pertenece a la fase de envión; y la porción **AB**... pertenece a la fase de movimiento libre.

Representando la porción **1-2** de abscisa, otro t_1, resultará que la porción *e* (espacio recorrido durante ese tiempo) será *numéricamente* igual al área de **1-2-BA**.

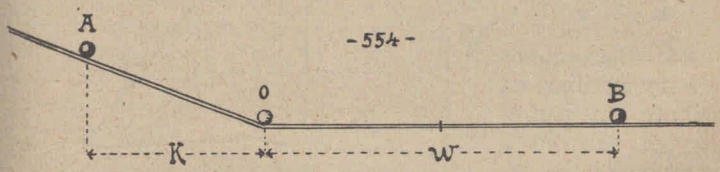
Pero en el movim. uniforme el espacio recorrido en una unidad de tiempo es la medida de la velocidad; p. l. t **1-2-BA** = v_1

Y como aquí el movim. unif^{m}. acelerado comenzó con velocidad "cero", la velocidad que se obtuvo después de un envión de *1 seg.* es la aceleración;

p. l. t. v_1 = **w** de donde resulta que **1-2-BA** = **w**

Y ahora a simple vista se advierte en la fig. 553 que **k** = $\frac{1}{2}$ **w**

971. – DEMOSTRACIÓN DE LA LEY AUXILIAR, EN LOS PLANOS DE GALILEO (fig. 554).



Ensayando como se indicó en otro lugar (**916**), damos con un punto **A**, desde donde debe soltarse la bolilla, para que llegue al punto (**o**) al fin de *1 seg.*

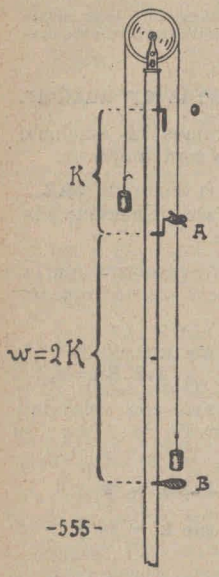
Marquemos con **B** el punto a donde llega la bolilla al fin del *1er. seg.* de movimiento libre.

Tendremos **k** = proyección horizontal de **Ac** y **w** = **oB**

Y midiendo, veremos que **k** = $\frac{1}{2}$ **w**

¡En su lugar explicaremos porque no tomamos como **k** la medida **Ao**, y porque tomamos su *proyección horizontal*.

972. - DEMOSTRACIÓN DE LA LEY AUXILIAR, EN LA MÁQUINA DE ATWOOD (fig. 555).



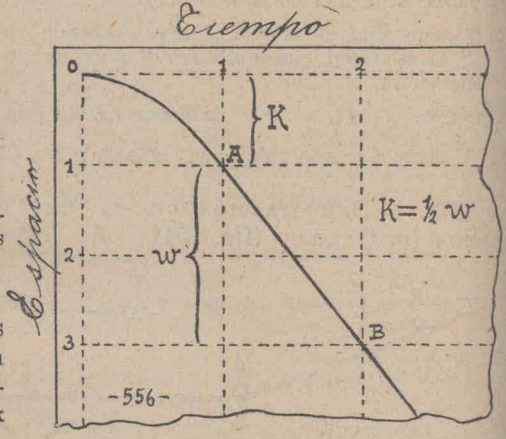
Repitiendo la experiencia indicada en (871), y colocando la corredera maciza de modo que detenga a **P** al fin del *1er seg.* de movim. libre, tendremos $oA = k$ y $AB = w$

Examinando la graduación del soporte de la máquina, veremos que

$$k = \tfrac{1}{2} w \qquad \text{L. Q. Q. D.}$$

973. – DEMOSTRACIÓN DE LA LEY AUXILIAR, EN EL APARATO DE MORÍN.

Repitiendo la experiencia indicada en (882 h 885), recogemos el diagrama de la fig. 556.



Examinando el diagrama, comprobaremos que:

$$k = \tfrac{1}{2} w$$

974. - Basándonos en la ley auxiliar, en adelante sustituiremos el símbolo **k** por su valor $\tfrac{1}{2}$ **w**.

¡El símbolo **k** es, pues, un SÍMBOLO DE TRANSICIÓN, que sólo se debe usar mientras no se conozca la ley auxiliar del movimiento unif.m. acelerado.

975. – LEY DE LOS ESPACIOS (o *ley de los caminos*). — **En el movimiento unif.m acelerado,** *partiendo del estado de reposo,* **el camino del móvil es continuamente proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido desde que se inició dicho movimiento.**

$$e = k.\, t^2$$

o sea

$$e = \tfrac{1}{2} w.t^2$$



Para entender este enunciado el alumno debe tener muy en cuenta lo siguiente:

1.° Aquí suponemos que el punto **o** de referencia coincide con el punto donde se hallaba el móvil ANTES DE INICIAR SU MOVIMIENTO UNIF.M ACELERADO.

2.° Comenzamos a contar el tiempo, *desde que comenzó dicho movimiento.*

3.° Usamos la palabra CAMINO, y no la palabra ESPACIO, y mucho menos la palabra RECORRIDO, para que el alumno entienda que no hablamos de INCREMENTOS DE ESPACIO, sino de ESPACIOS INTEGRALES, *medidos a partir del origen del movimiento.*

A pesar de ello usaremos como símbolo del camino, la letra **e**, puesto que *el camino es un espacio.*

Y para acostumbrar al alumno al lenguaje de los otros textos, usaremos también la palabra ESPACIO, acompañándola del especificante INTEGRAL.

976. – DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DE LA LEY DE LOS ESPACIOS INTEGRALES.

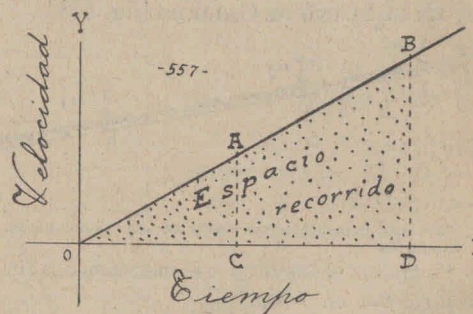
En la gráfica de las velocidades (fig. 557): para el tiempo **oC**, el espacio integral recorrido, es

e_1 = *área de* **oCA**

y para el tiempo **oD**, el espacio integral recorrido, es

e_2 = *área de* **oDB**

Pero por Geometría sabemos que:



Las áreas de las figuras semejantes son proporcionales a los cuadrados de cualquiera de sus líneas homólogas.

P. l. t. $$\frac{\text{oCA}}{\text{oDB}} = \frac{(\text{oC})^2}{(\text{oD})^2}$$

de donde $$\frac{e_1}{e_2} = \frac{(\text{oC})^2}{(\text{oD})^2}$$

pero $\text{oC} = t_1$ y $\text{oD} = t_2$

luego $$\frac{e_1}{e_2} = \frac{(t_1)^2}{(t_2)^2}$$ L. Q. Q. D.

977. – Importante. – Cuando decimos que ENTRE DOS VARIABLES EXISTE CIERTA PROPORCIÓN, podemos representar dicha proporción de dos maneras diversas:

1ª. forma $\frac{e_1}{e_2} = \frac{(t_1)^2}{(t_2)^2}$

2ª. forma $e = k.\ t^2$.

k (primer espacio unitario en el movimiento unif.m acelerado)

De la primera forma pasamos a la segunda, dando a uno de los dos valores del argumento la magnitud *1*.

En el ej. anterior, el argumento es el tiempo.

Si $t_1 = 1$ entonces $e_1 = k$

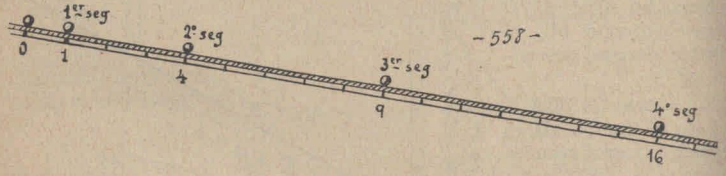
de donde $e_2 = e$ y $t_2 = t$

p. l. t. $\frac{k}{e} = \frac{1}{t^2}$

y de aquí resulta que $e = k.\ t^2$

que es lo mismo que $e = \frac{1}{2}\ w.\ t^2$

978. – DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LOS ESPACIOS INTEGRALES, EN EL PLANO DE GALILEO (fig. 558).



Para esta experiencia nos basta un solo plano, que es al mismo tiempo "*de envión* y "*de observación*".

Se gradúa el ángulo α o el metrónomo, a fin de que la bolilla recorra el espacio **0-1** en *1 seg.*

Y se verá que:

Al *2.° seg* la bolilla llega al N.° 4

Al *3.er seg.* la bolilla llega al N.° 9

Al *4.° seg.* la bolilla llega al N.° 16 etc.

Pero $1 = 1^2$ $4 = 2^2$ $9 = 3^2$ etc.

luego ..... L. Q. Q. D.

979. – DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LOS ESPACIOS INTEGRALES, EN EL APARATO DE MORÍN (fig. 559).

Dispuesto el aparato como se indicó en (862), y dejando caer el peso **P** libremente, se recogerá el diagrama de la (fig. 560).

Examinando el diagrama, se descubrirá que:

t	e
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

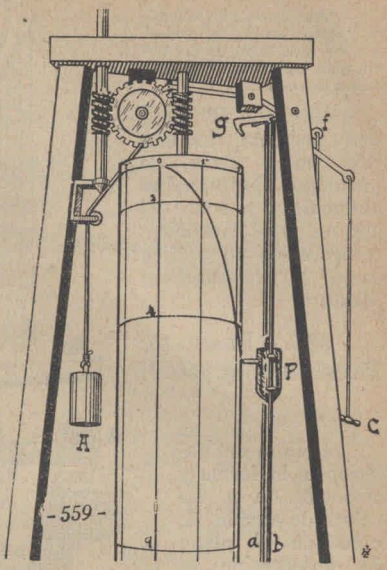
L. Q. Q. D.

980. – La curva **oAB...E** del diagrama anterior corresponde a la ecuación particular

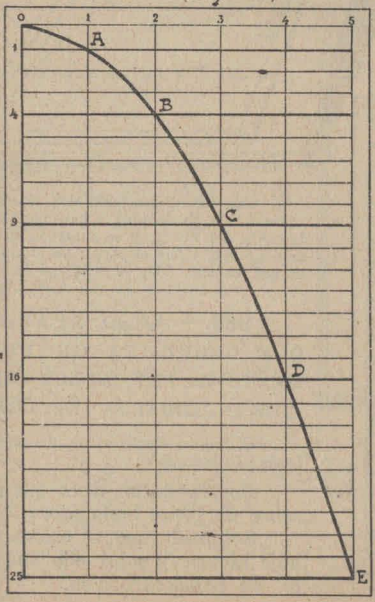
$$e = \tfrac{1}{2} w.t^2$$

donde $\frac{1}{2}w$ corresponde al coeficiente a de la fórmula general

$$y = a\ x^2$$



-560- Tiempo,



La curva en referencia es, pues, una PARÁBOLA.

981. – APARATOS QUE DEMUESTRAN LA LEY DE LOS ESPACIOS MEDIANTE UNA GRÁFICA (fig. 561).

La canaleta **m** es la que da el envión horizontal a la bolilla.

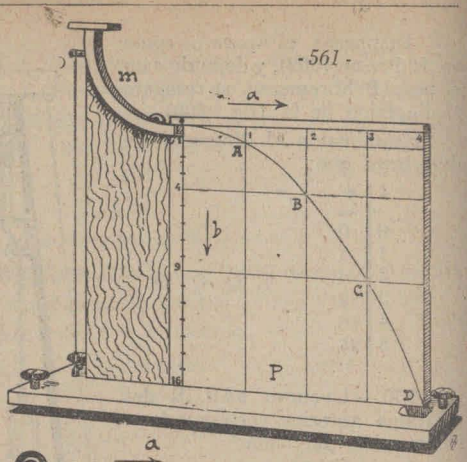
En virtud de este envión el móvil, a partir de **o**, tendrá movimiento libre (o sea *uniforme*) en dirección de la flecha **a**.

Por lo tanto los espacios medidos sobre el eje **oX** indicarán el tiempo.

A partir de **o** el móvil va cayendo en dirección de la flecha **b**, con movimiento unif^{m}. acelerado.

Este otro movimiento es efecto de la gravedad, que en cada lugar de la tierra para cada cuerpo es una *fuerza constante*.

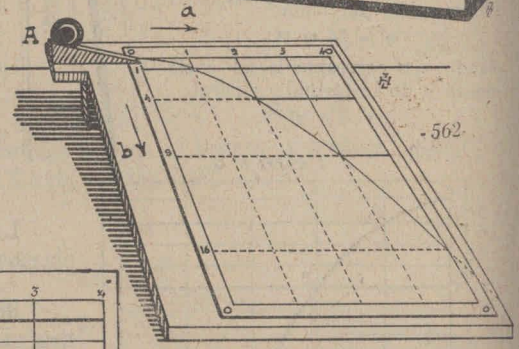
El plano **P** tiene una pequeña inclinación hacia atrás, de modo que, si el papel es ahumado, o si sobre él hay un papel carbónico, recogeremos un gráfica como la del aparato Morín.



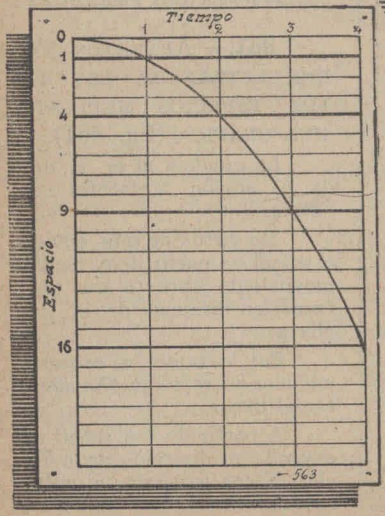
-561-

982. – PLANO DE PACKARD (fig. 562).

Defiere del anterior en la forma y dispoción de la canaleta de envión **A**; y en que el plano de observación es muy inclinado, (casi horizontal).



-562-



-563-

Con esta disposición del plano de observación, se disminuye la velocidad de la caída del móvil, y se aumenta la presión de éste sobre el papel; de modo que la gráfica (fig. 563) es más visible.

983. – OTRO APARATO QUE DEMUESTRA GRÁFICAMENTE LA LEY DE LOS ESPACIOS INTEGRALES (fig. 564).

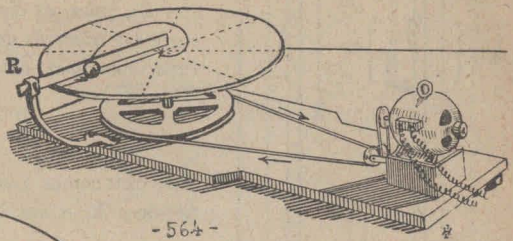
El mismo efecto se obtiene con un fonógrafo inclinado.

Consta de un disco que gira sobre un plano inclinado.

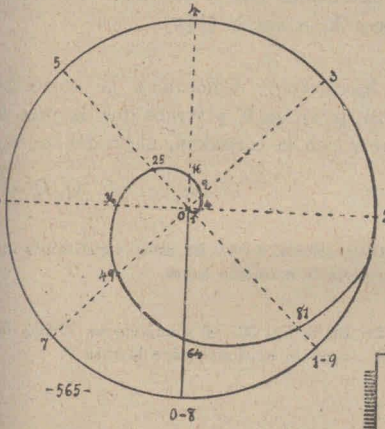
Sobre el disco se coloca una hoja blanca, y sobre ella una hoja de papel carbónico.

El papel blanco debe estar marcado con varios EJES RADIALES EQUIDISTANTES **(1, 2, 3...)**, *cuyo centro* **o** *debe concidir con el centro del disco.*

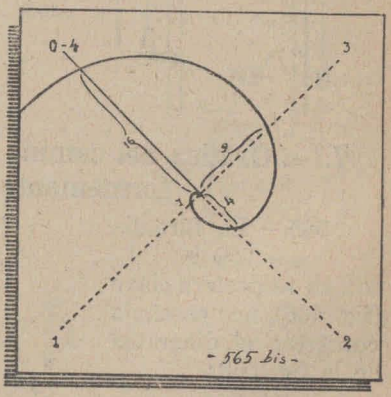
Se suelta una bolilla desde el centro de rotación del disco; y la regla **R** le sirve de *guía* obligándole a recorrer una trayectoria rectilínea.



-564-



En el diagrama obtenido (fig. 565 o 565 bis), la variable TIEMPO está representada porel ángulo que forma el radio inicial **0,0** con los otros radios. Y la variable ESPACIO está representada en cada radio por la distancia **0-1,0-4,0-9**, etc.



984. – Demostración de la ley de los espacios en la máquina de Atwood.

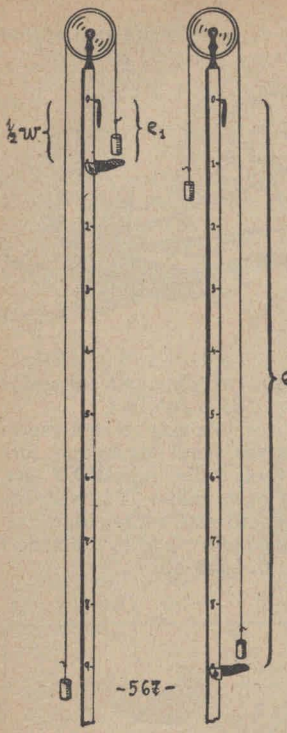
Para simplificar el trabajo, deduzcamos de la fórmula

$$e = k.t^2$$

la clave correspondiente (fig. 566):

-566-

	o	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Espacio	0	K	4K	9K	16K	25K	36K	49K	64K	81K



Si, pues, es cierta la ley, deberán obtenerse los números de la clave anterior, cuando experimentamos con la máquina de Atwood (fig. 567).

Preparación— Graduado el metrónomo, obtenemos que el espacio **0—1** corresponde a **k**, o sea a ($\frac{1}{2}$w).

Ejecución— Colocamos la corredera maciza, p. ej. en **9**, y vemos que la pesa **P** tropieza con la corredera, al fin del *3er seg.*

L. Q. Q. D.

Observaciones. — 1ª. En este experimento no es necesaria la corredera hueca.

2ª. En la fig. 567, el dibujante se olvidó de colocar la pesita adicional sobre la pesa **P**.

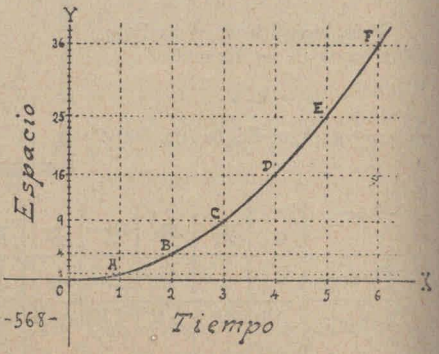
7.º - Gráfica del camino en el movimiento uniformemente acelerado.

385. – La fórmula

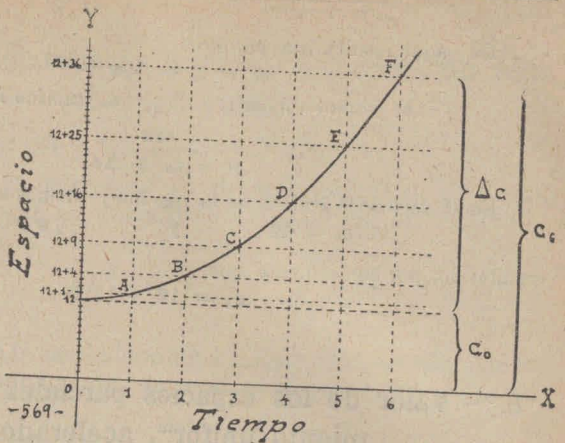
$$e = \frac{1}{2} w . t^2$$

con su respectiva clave (fig. 566), nos enseña a construir el diagrama de la fig. 568:

Este diagrama difiere del que se obtiene en el aparato de Morín y en el plano de Packard, en cuanto que en aquéllos la parábola va hacia abajo, y aquí va hacia arriba.



986. – La fórmula anterior, con su respectivo diagrama corresponde al caso en que el camino tiene su ORIGEN en el origen del movimiento.



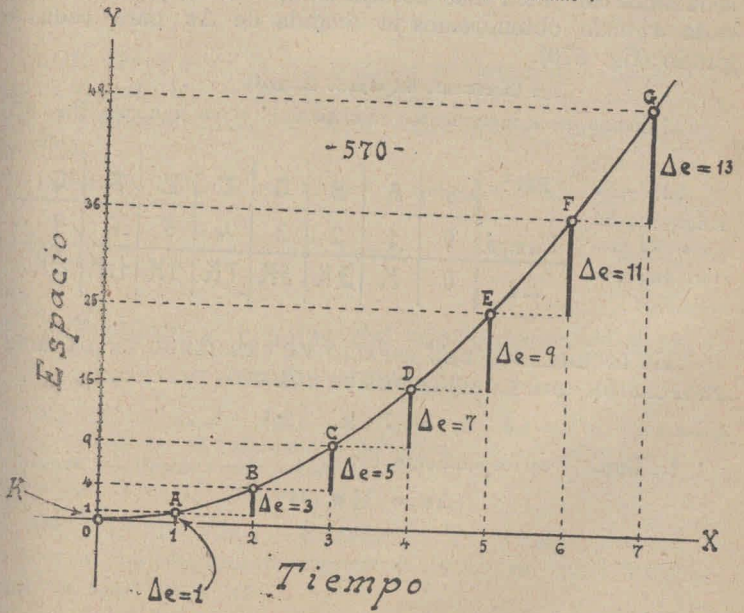
Pero (fig. 569) cuando ambos orígenes distan entre sí una porción:

c_o = *camino inicial*

entonces el recorrido del móvil es:

$$e = \Delta c$$

Léase *"espacio integral recorrido"* = *"incremento del camino"*.



De aquí resulta que entonces

$$c_t = c_o + \tfrac{1}{2}w.t^2$$

c_t (*camino actual*) c_o (*camino inicial*)

o sea

$$c_t = c_o + \Delta c$$

En el caso de la gráfica de la fig. 569, hemos supuesto que:

$$c_o = 12 \qquad y \qquad \tfrac{1}{2}w = 1$$

resultando, por consiguiente que:

$$c_6 = 12 + 1 \times 6^2$$

8.° – Valor de los espacios parciales en el movimiento uniform. acelerado.

987. – Si en una gráfica cualquiera del espacio integral señalamos con línea más notoria lo que el móvil recorrió en cada *segundo*, obtendremos la medida de Δe para cada segundo (fig. 570).

Δe (incremento del espacio integral).

Midiendo estos incrementos se obtiene la clave siguiente (fig. 571):

988. – *De donde resulta que en el movim. uniform. acelerado:*

-571-

Tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7
Δe	0	K	3K	5K	7K	9K	11K	13K

EL INCREMENTO DEL ESPACIO VA CRECIENDO EN LA MISMA PROPORCIÓN QUE LA SERIE DE LOS NÚMEROS IMPARES:

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \ldots \quad (2t - 1)$$

La fórmula correspondiente es:

$$\Delta e = \tfrac{1}{2}w\,(2t - 1)$$

9.° – Valor del espacio integral, con relación a la velocidad actual.

989. – Las figs. 551 y 557 nos enseñan que:

EN CUALQUIER INSTANTE EL ESPACIO INTEGRAL ES IGUAL AL SEMIPRODUCTO DE LA VELOCIDAD ACTUAL, POR EL TIEMPO.

$$e = \tfrac{1}{2} v \,.\, t$$



990. – Esta es la verdadera ley auxiliar; más amplia que la que hemos denominado así, la cual es un caso particular de ésta.

Efectivamente, cuando $t = 1$ tenemos que

$$e = k \qquad \text{y} \qquad v = w$$

de donde forzosamente resulta que:

$$k = \tfrac{1}{2} w$$

991. – Pero como la ley auxiliar se demuestra con prescindencia de esta ley, y en cambio ésta puede deducirse de las que ya hemos demostrado, debe considerarse como corolario de ellas.

Ejercítese el alumno en deducir la fórmula $e = \tfrac{1}{2} v.\ t$

de estas otras $e = \tfrac{1}{2} w.t^2$ y



10.° – Problemas propios del movimiento uniformemente retardado.

992. – En el movim. unif.^{m} retardado, además de los problemas generales comunes al ratardado y al acelerado, se presentan varios problemas particulares relacionados con el PUNTO DE RETROCESO de la trayectoria.

993. – 1.er *Problema.* – AVERIGUAR EL TIEMPO NECESARIO PARA QUE LA VELOCIDAD INICIAL DE UN MOVIM. UNIF.^{m} RETARDADO SE REDUZCA A *"cero"*.

Supongamos un caso práctico, homólogo del de la fig. 534, en el que el emisor del proyectil es un máuser:

El proyectil sale en dirección vertical ascendente con una velocidad inicial de 400 m./seg.

Suponiendo que fuese nulo el estorbo del aire; ¿cuánto tardaría para invertir el sentido de su trayectoria?

SOLUCIÓN. — La causa de su retardo es la *gravedad*, cuya aceleración es: $\gamma = 9{,}8$ m./seg (1)

En Buenos Aires $\gamma = m\ 9{,}8$.

La velocidad que la bala adquiriría hacia abajo al fin del tiempo t, si partiera de la posición de reposo, sería:

$$v = 9{,}8\ t$$

Pero esta velocidad se opone a la velocidad inicial:

$$v_o = 400 \text{ m./seg.}$$

P. l. t. v_o se reducirá a *cero*, cuando $v = v_o$ o sea cuando

$$v = 400 \qquad \text{de donde } 9{,}8\ t = 400 \qquad t = \boxed{\frac{400}{9{,}8}} = \textit{seg. } 40{,}82$$

RESPUESTA. — *La bala de máuser invertirá su curso a los* 40,82 seg. *de recorrido.*

994. – Generalizando la última igualdad, obtenemos la siguiente fórmula:

$$t = \frac{v_o}{w}$$

t (*tiempo necesario para que la velocidad inicial se reduzca a* "CERO").

995. – *2º Problema.* – AVERIGUAR EL ESPACIO NECESARIO PARA QUE LA VELOCIDAD INICIAL DE UN MOVIM. UNIFOR m. RETARDADO SE REDUZCA A *"cero"*.

Suponemos el mismo caso anterior.

Solución. — Consideremos como origen del camino la boca del fusil.

La fórmula del espacio será: $e = v_o.t - \frac{1}{2}\ w.t^2$

pero $w.t = v$ luego $e = v_o.t - \frac{1}{2}\ v.t$

Mas, para que dos velocidades opuestas se reduzcan a CERO, es necesario que tengan la misma magnitud; de donde:

$$v_o = v$$

o sea $e = v_o.t - \frac{1}{2}\ v_o.t$

p. l. t. $e = \frac{1}{2}\ v_o\ t$ (*)

Aplicando la fórmula deducida del problema anterior:

$$t = \frac{v_o}{w}$$

se obtiene $e = \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{w} = \frac{v_o^2}{2w}$

La letra γ es el símbolo con que se indica la aceleración que produce la gravedad.

Apliquemos ahora esta fórmula a nuestro caso:

$$e = \frac{400^2}{2 \times 9{,}8} = 8163{,}27 m$$

RESPUESTA. – *La bala de mauser invertirá su curso a los* 8163,27 m de *altura.*

996. – NOTA. – La ecuación (*) nos dice que el proyectil comenzará a descender CUANDO HAYA RECORRIDO UN ESPACIO IGUAL A LA MITAD DEL QUE LE TOCABA RECORRER *en igualdad de tiempo,* SI NO HUBIESE MEDIADO LA ACELERACIÓN NEGATIVA.

997. – *3er Problema.* – EN EL EJEMPLO ANTERIOR, SUPONIENDO SIEMPRE NULO EL ESTORBO DEL AIRE ¿CUÁNTO TARDARÁ EL PROYECTIL EN VOLVER AL SUELO?

Respuesta. – Por razones obvias, que no explicaremos: TARDARÁ LO MISMO QUE TARDÓ EN SUBIR.

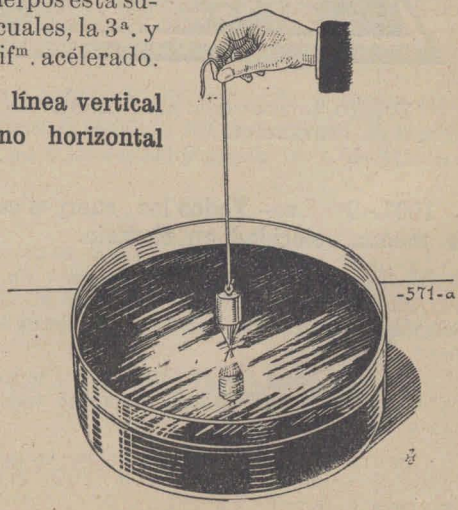
Pero en el caso real del estorbo del aire, tanto en el ascenso, cuanto en el descenso, el problema se complica algo.

Sólo diremos que, debido al estorbo del aire, el proyectil al llegar al suelo tendrá una velocidad bastante inferior a la inicial.

Y como el efecto del choque es función de la masa del proyectil y de su velocidad: cualquiera colegirá que una bala que cae después de un ascenso vertical tiene "*menos fuerza*" que cuando salió del fusil.

11.° – Leyes de la caída de los cuerpos.

998.–La caída de los cuerpos está sujeta a cuatro leyes de las cuales, la 3ª. y 4ª pertenecen la mov. unifm. acelerado.



999. – 1ª. LEY. – **Toda línea vertical es perpendicular al plano horizontal correspondiente.**

Para entender este enunciado hay que saber lo que sigue:

1° **Vertical** es la trayectoria de cualquier cuerpo que cae (**149** y **150**).

2°. **Horizontal** es la dirección que marca la superficie libre, de un líquido en reposo.

3°. La superficie libre de un líquido en reposo, no es plana, sino esferoidal; pero co-

mo su radio es enorme (el de la Tierra), en cada lugar puede considerarse como plana.

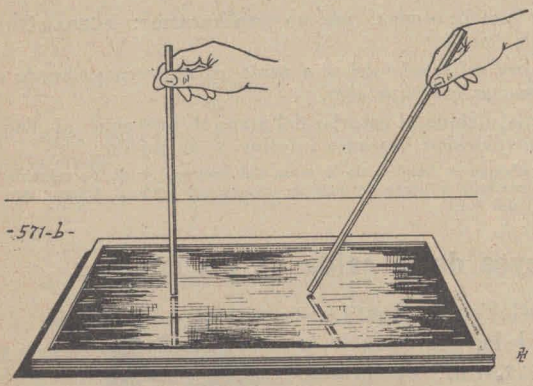
4º. Hablando con exactitud: en cada punto del Globo el plano horizontal es tangente a la superficie libre de un líquido en reposo.

1000. – DEMOSTRACIÓN DE LA LEY ANTERIOR (fig. 571-a).

Se vacía mercurio en una cubeta algo amplia, y se coloca por encima de ella una plomada, en forma que el plomo llegue apenas a tocar la superficie libre.

Esta superficie es un espejo; de modo que a continuación de la plomada, se verá su imagen.

Observando desde cualquier punto de vista, notaremos que el hilo de la plomada y su imagen se prolongan mutuamente.



-571-b-

Y ESTO NO ACONTECE SINO CUANDO UNA LÍNEA RECTA ES PERPENDICULAR A LA CARA DEL ESPEJO (fig. 271-b). L. Q. Q. D.

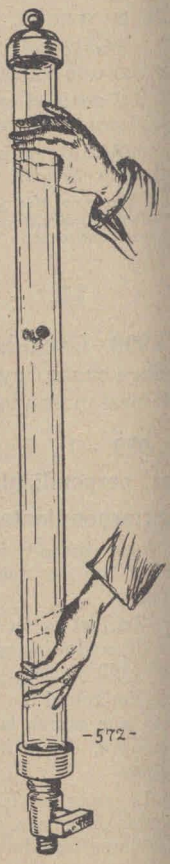
1001.–2ª. LEY- Todos los cuerpos caen con la misma velocidad en el vacío.

Se demuestra con el tubo de Newton (fig. 572)

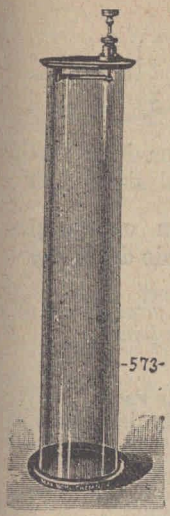
Es un tubo de paredes resistentes, en cuyos extremos hay piezas de bronce que le sirven de tapones.

Destornillando uno de los tapones se introducen en el tubo, objetos varios, de distinto tamaño, forma y densidad.

Se repone el tapón, se aplica la boquilla a la máquina neumática, se enrarece el aire del tubo y se cierra la llave.



-572-


-573-

Así preparando el tubo, colocándolo verticalmente, se invierte con rapidez su posición, y se verá que todos los objetos internos llegan al mismo tiempo al fondo.

L. Q. Q. D.

1002. – Para esta demostración es más cómodo el cilindro de Weinhold (fig. 573), que posee en su parte superior un mecanismo sencillo para volcar juntos todo los cuerpos que allí se colocan.

1003. – Algunos autores, para comprobar esta ley, aconsejan la siguiente experiencia. (fig. 574).



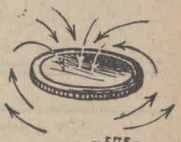
-574-

Cortar una rodaja de papel con diámetro algo menor que el de una moneda cualquiera.

Colocar el papel sobre la moneda (ambos en posición horizontal); y dejar caer el conjunto....

AMBOS OBJETOS LLEGAN JUNTOS AL SUELO.

¿Pero quién nos asegura que no es esto debido a la presión del viento o torbellino provocado por la traslación de la moneda (fig. 575)?


-575-

Las experiencias científicas no deben dar lugar a dudas como ésta; por lo tanto.....

1004. – 3.ª LEY – **La velocidad que en cada instante tiene un cuerpo que cae, habiendo partido de la posición de reposo, es proporcional al tiempo transcurrido desde que comenzó a caer.**

$$v = \gamma t$$

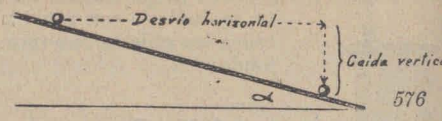
γ = aceleración debida a la gravedad.

Esta ley ha quedado experimental y matemáticamente demostrada al demostrarse la LEY DE LAS VELOCIDADES en el movim. unif^m^. acelerado.

La comprobación más conveniente es la del aparato Morín; y después la de la máquina de Atwood.

1005. – El mismo plano inclinado demuestra esta ley; porque allí el móvil CAE, aunque se desvíe en sentido horizontal (fig. 576).

Si la caída es más lenta, porque parte de la fuerza de gravedad se anula debido a la reacción del plano de sostén; también en la máquina de Atwood, parte de la fuerza de **p** se pierde para dar impulso al sistema **2P**.

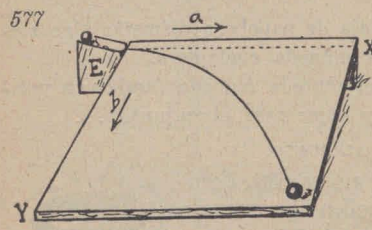


1006. – 4.ª LEY- **El camino recorrido por un cuerpo que cae, es proporcional, en cada instante, al cuadrado del tiempo transcurrido en la caída.**

Esta ley ha quedado demostrada en las experiencias y raciocinios que demostraron la LEY DE LOS ESPACIOS *en el movim. unif^m. acelerado.*

Elijamos un ejemplo cualquiera.

577



En el plano de Packard, p. ej: (fig. 577), la caída del cuerpo se efectúa en dirección de la flecha **b**.

Descontemos el *desvío horizontal*, como se indicó en la fig. anterior, y obtendremos la CAÍDA VERTICAL, la cual, **aunque es más lenta que la caída libre, es sin embargo, proporcional a ella.**

No sabemos porque en la mayoría de los textos y programas se desdobla inútilmente un conocimiento que desde el punto de vista histórico, experimental y pedagógico merece ser estudiado simultáneamente en toda su integridad.

Nos referimos al MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO y a su caso particular: la CAÍDA LIBRE.

Los alumnos se ven obligados a estudiar dos veces un mismo tema con procedimientos distintos, netamente divorciados, en forma que en vez de ayudarse mutuamente, contribuyen a producir confusión en *el cerebro* de los mismos.

1007. – Aquí suspendemos el estudio de la *Cinemática*, para volver a él cuando hayamos estudiado una parte muy interesante de *Dinámica*, que es la que nos enseña las relaciones existentes entre energía, masa, espacio, tiempo, velocidad, trabajo e impulso.

DINAMICA

I.° Leyes fundamentales

1.° – Las tres leyes fundamentales de la Dinámica.

1008. – Todos los conocimientos de Dinámica giran alrededor de tres leyes fundamentales, que fueron formuladas por Newton. a) LA LEY DE INERCIA b) LA LEY DE LA FUERZA. MASA Y ACELERACIÓN, c) LA LEY DE LA ACCIÓN Y LA REACCIÓN

A estas tres leyes se debe añadir una ley complementaria: LA DE LA INDEPENDENCIA DEL MOVIMIENTO.

1009. – LEY DE INERCIA (descubierta por Galileo). — **Un cuerpo abandonado a sí mismo, permanece en reposo o se traslada con movimiento rectilíneo uniforme.**

. « ABANDONADO A SÍ MISMO » significa: « *libre de la acción de fuerzas externas* ».

En otros términos:

a) LOS CUERPOS NO PUEDEN MODIFICAR POR SÍ MISMOS SU ESTADO DE REPOSO O DE MOVIMIENTO LIBRE.

b) EL MOVIMIENTO LIBRE ES RECTILÍNEO Y UNIFORME.

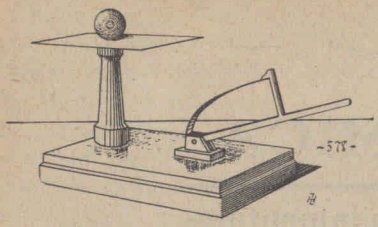
1010. – **Enunciado de Newton.** — Newton enunció la ley de inercia en los términos siguientes:

Un cuerpo cualquiera conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, en tanto que la acción de una fuerza no le obligue a modificar su estado.

1011. – La LEY DE INERCIA se comprueba continuamente en la vida práctica lo mismo que en las experiencias de laboratorio.

La comprobación exige cuatro categorías distintas de experiencias, correspondientes a las cuatro partes en que podemos descomponer este principio:

a) UN CUERPO EN REPOSO, NO SE MUEVE HASTA QUE NO ACTÚE UNA FUERZA SOBRE ÉL; Y SE OPONE EN PROPORCIÓN A SU MASA AL MOVIMIENTO QUE LE QUEREMOS IMPRIMIR.



Al hablar en detalle de las propiedades de la materia, tendremos ocasión de ilustrar este tema con variados ejemplos.

Nos contentamos ahora con citar la experiencia de la tarjeta y la bolilla (fig. 578).

b) UN CUERPO EN MOVIMIENTO, NO PUEDE DETENERSE SOLO; Y SE OPONE EN PROPORCIÓN A SU MASA Y AL CUADRADO DE LA VELOCIDAD, A LAS FUERZAS QUE LO QUIEREN DETENER.

Al estudiar la inercia como propiedad de la materia, entraremos en detalles sobre la primera parte de esta sentencia.

La segunda se tratará al estudiar la FUERZA VIVA.

c) EL MOVIMIENTO LIBRE ES RECTILÍNEO.

Ya ha sido demostrado este principio en (**864** h. **866**).

d) EL MOVIMIENTO LIBRE ES UNIFORME.

Este principio ha sido demostrado en (**867** h. **870**).

1012. – LEY DE LA FUERZA, MASA Y ACELERACIÓN.

La aceleración es directamente proporcional a la fuerza motriz e inversamente proporcional a la masa del móvil; y tiene la misma dirección y sentido que la fuerza motriz:

$$w = \frac{f}{m} \qquad \left(\frac{f}{wm}\right)$$

1013. – **Enunciado de Newton.** La ley de fuerza, masa y aceleración fué enunciada por Newton en estos términos:

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz, y tiene la misma dirección que ésta.

Como se ve, NEWTON NO HIZO MENCIÓN DE LA PROPORCIONALIDAD EXISTENTE ENTRE LA MASA Y LA ACELERACIÓN.

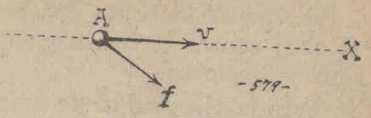
Sin embargo, se basó en esta ley cuando ideó la fórmula que nos enseña a medir la *masa* del móvil en función de la *aceleración* y de la *fuerza* que le pone en movimiento:

$$m = \frac{f}{w}$$

1014. – LEY DE INDEPENDENCIA DEL MOVIMIENTO.

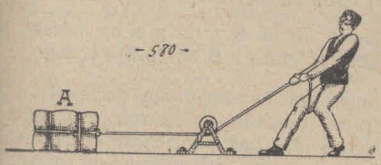
El efecto dinámico producido por la fuerza que actúa sobre un cuerpo, es independiente del estado dinámico del cuerpo y del efecto que producen las otras fuerzas que tuvieran acción sobre dicho cuerpo.

Si el cuerpo **A** se traslada conforme lo indica el vector **v**; (fig. 579)la fuerza **f** producirá en **A** el mismo desvío del eje **XX'**, que produciría en caso de haber estado **A** en reposo sobre dicho eje.



Esta ley queda comprobada en los diagramas que resultan de las experiencias con el plano del Packard, el aparato Morín (979 h. 984).

1015. – LEY DE ACCIÓN Y REACCIÓN. – **Toda fuerza aplicada a un cuerpo, engendra en él una fuerza opuesta y de igual intensidad.**

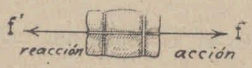


Al aplicarse la fuerza **f** al cuerpo **A** (fig. 580), éste engendra la fuerza **f'**, en forma tal que:

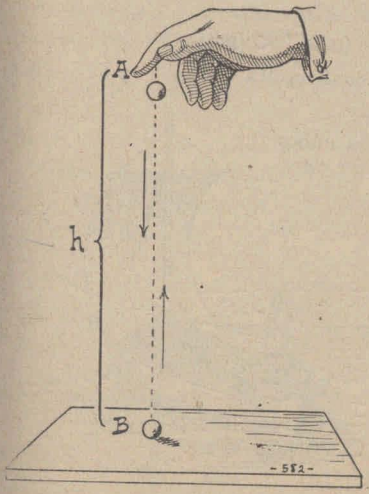
f (positiva) **f'** (negativa)

ambas congruentes

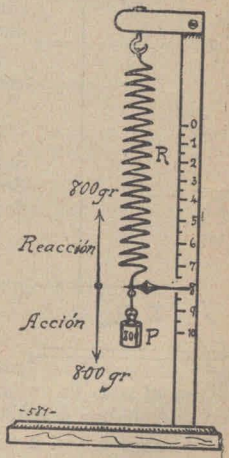
$f = f'$



1016. – En este principio se basa la construcción de los dinamómetros (fig. 581): Si la pesa **P** produce una tracción de



800 gr - peso



la elasticidad del resorte lucha contra la acción de **P** mediante otra fuerza, que también es de

800 gr - peso

1017. –La bolita de marfil al caer (fig. 582), adquiere una cierta energía:

p.h

Al chocar la bolita con la plancha de acero, dicha energía **p.h** obra contra la bolita y contra la plancha, *"abollándolas"* momentáneamente.

Pero la elasticidad de ambos cuerpos produce una fuerza de REACCIÓN que imprime en la bolita una energía

$$-\mathbf{p.h}$$

que la hace volver al punto de partida.

p (peso de la bolita) **h** (altura de la caída)

1018. – OBSERVACIÓN. – En realidad la bolita no vuelve justo al punto de partida, por dos motivos:

a) Al bajar la bolita, pierde parte de la energía **p.h**, en vencer el estorbo del aire; de modo que su ACCIÓN contra **B** es $(\mathbf{p.h})' < \mathbf{p.h}$.



b) Ni el marfil ni el acero son perfectamente elásticos: hay, pues, pérdida de energía gastada en la deformación: y además hay pérdida de energía mecánica, que se transforma en calor, como en todos los choques.

La REACCIÓN produce en la bolilla una fuerza ascensional:

$$(\mathbf{p.h})'' < (\mathbf{p.h})'$$

c) Al remontarse la bolita, se ve obligada a perder nueva energía, puesto que subsiste el estorbo del aire; de modo que la fuerza de ascensión se reduce a

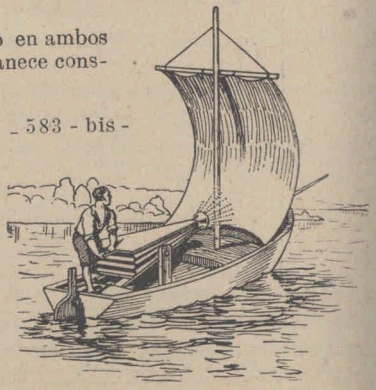
$$(\mathbf{p.h})''' < (\mathbf{p.h})'$$

De todo lo cual resulta que $(\mathbf{p.h})''' < \mathbf{p.h}$

Pero como en ambos productos permanece constante el peso de la bolita, lo único que habrá cambiado es **h**.

Luego $\mathbf{h}''' < \mathbf{h}$ (fig. 583)

L. Q. Q. D.



1019.- Por ignorar el principio de "ACCIÓN Y REACCIÓN", hubo quien consideró posible *dar impulso a una barca inflando su vela con un fuelle instalado en la misma barca.* (fig. 583 - bis)

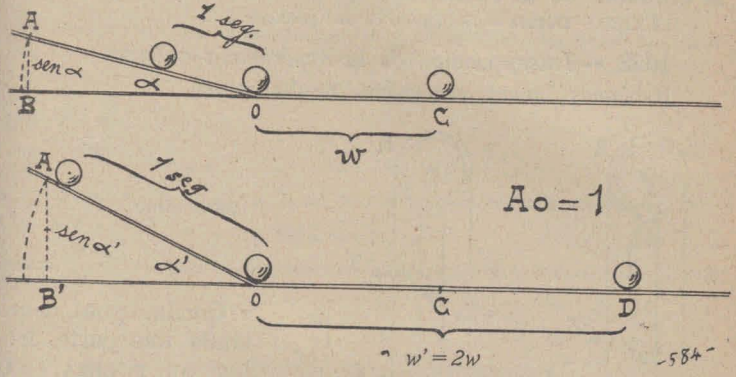
El mismo error cometen los que suponen que podrá obtenerse un aparato que aproveche la gravedad produciendo movimiento *por el continuo bajar y subir automático de un sistema más o menos complicado de pesas.*

2.° – Comprobación de la ley de fuerza, masa y aceleración.

1020. – COMPROBACIÓN EN EL PLANO DE GALILEO (fig. 584). Considerando como unidad la longitud **Ao**, tendremos que

$$\mathbf{AB} = sen\ \alpha$$

$$\mathbf{AB'} = sen\ \alpha'$$



Dando a α y α' la abertura necesaria como para que

$$\mathbf{AB'} = \mathbf{2AB}$$

Se notará que, soltando la bolita desde **A**, las dos aceleraciones w y w' son tales que:

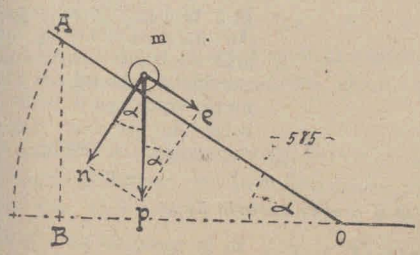
$$\mathbf{w'} = \mathbf{2w}$$

Variando las dimensiones de **AB** y **AB'** se verá que siempre

$$\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{w'}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AB'}} = \frac{sen\ \alpha}{sen\ \alpha'}$$

Para interpretar esta experiencia necesitamos conocer el siguiente teorema:

1021. -- **Teorema.** -- VALOR DE LA COMPONENTE DINÁMICA. (fig. 585).



De la igualdad de los ángulos α, teniendo en cuenta que los $\triangle$ **ABo** y $\triangle$ **mep** *son rectángulos*, se deduce que AMBOS TRIÁNGULOS SON SEMEJANTES.

De donde resulta que

$$\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{oA}}{\mathbf{AB}}$$

pero si $Ao = 1$ entonces $AB = sen\ \alpha$

luego $\frac{p}{e} = \frac{1}{sen\ \alpha}$ o sea $e = p.\ sen\ \alpha$

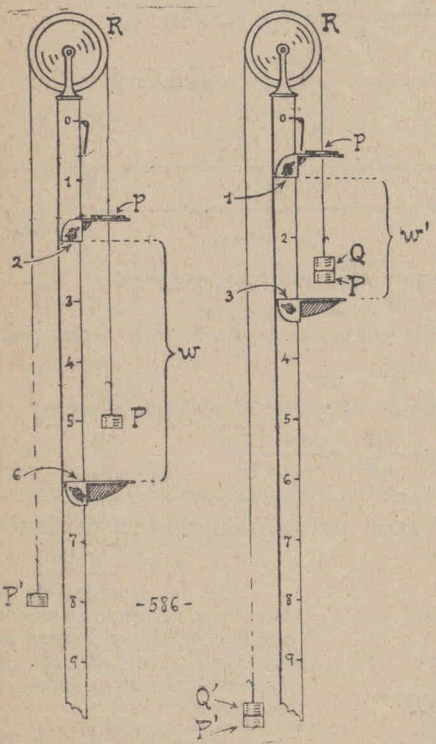
Lo cual se enuncia así:

En el plano de Galileo, la componente dinámica es igual al producto de la fuerza real por el seno del declive.

LÉXICO. – **Declive** = *Inclinación de una pendiente.*

1022. -- *Interpretación de la experiencia anterior.*

Habíamos obtenido el siguiente resultado:



$$\frac{w}{w'} = \frac{sen\ \alpha}{sen\ \alpha'}$$

pero como $\frac{sen\ \alpha}{sen\ \alpha'} = \frac{e}{e'}$

luego $\frac{w}{w'} = \frac{e}{e'}$

Queda, pues, demostrada una parte de la ley DE FUERZA, MASA Y ACELERACIÓN, a saber que:

Las aceleraciones son proporcionales a las fuerzas que las producen.

1023. COMPROBACIÓN EN LA MÁQUINA DE ATWOOD. (fig. 586).

a) Pesando la rueda **R**, y multiplicando su peso por un coeficiente **q**, que más adelante enseñaremos a calcular, obtendremos un número que nos indicará el valor de su *masa ficticia concentrada en la llanta.*

$$r = R.q$$

r (*masa ficticia de* **R** *concentrada en la llanta*).

b) Llamando **M** la masa de **2P** y **m** la masa de **p**

busquemos la aceleración **w** conforme se ha indicado en (**871** h. **873**, y **972**)

Como consecuencia tendremos que:

w es la aceleración que **p** produce sobre **M+m+r**

c) Añadamos a **P** y **P'** las dos cargas **Q** y **Q'**, tales que

$$Q = Q' \qquad \text{y} \qquad 2Q = M+m+r$$

Busquemos la nueva aceleración **w'** y veremos que

$$w' = \tfrac{1}{2}w$$

CONSECUENCIA.-- La fuerza motriz **p** no cambió. Lo único que cambió es la *masa movida*, la cual se ha duplicado, puesto que ahora es

$$M+m+r+2Q = 2(M+m+r)$$

lo cual nos demuestra que:

A DOBLE MASA, MEDIA ACELERACIÓN.

d) Variando la masa 2 **Q**, de modo que sumada a **M+m+r**, dé

$$n\,(M+m+r)$$

veremos que las nuevas aceleraciones tendrán con **w** la relación siguiente:

$$w_n = \frac{w}{n}$$

o sea $w_n = {}^1/n.\ w$ (proporción inversa)

Queda, pues, demostrada la parte de la ley de FUERZA, MASA Y ACELERACIÓN que dice:

Las aceleraciones son inversamente proporcionales a las masas movidas.

1024. -- La primera parte de la ley se demuestra en la máquina de Atwood, variando la pesa adicional **p** sin cambiar la masa **M + m + r**.

Lo cual se obtiene sustituyendo la pesita **p** por **p'** y **p''**, tales que

$$p = p' + p \quad \text{y} \quad p' > p''$$

p' se coloca sobre **P**; y **p''** sobre **P'**.

De modo que la masa movida conserva la misma magnitud.

En cambio la fuerza motriz, ahora es

$$p' - p''$$

1025. -- OBSERVACIÓN.-- Por más cuidados que pongamos al experimentar con la máquina de Atwood, siempre obtendremos resultados SUFICIENTEMENTE exactos; pero nunca ESTRICTAMENTE exactos.

El inconveniente se halla radicado en el ROCE del eje de la rueda, que varía en función del peso del sistema $2P+R+p$ y en función de la velocidad del mismo.

Este es el motivo porque la máquina de Atwood, a pesar de seguir siendo un excelente aparato escolar, es un pésimo aparato de investigación.

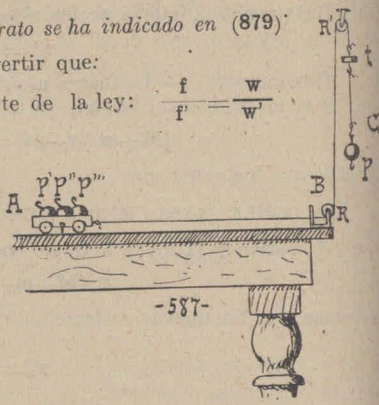
1026.-- COMPROBACIÓN POR MEDIO DEL CARRETÓN (fig. 587)

El funcionamiento de este aparato se ha indicado en (879)

Aquí nos toca solamente advertir que:

a) Para comprobar la 1ª parte de la ley: $\frac{f}{f'} = \frac{w}{w'}$

hay que disponer de varias pesas motrices **p**, **p'**, **p''**,...; las cuales mientras no se usan como fuerza motriz, deben colocarse sobre el carretón.



De este modo la masa queda invariable, equivaliendo a

$$M+m+m'+m''...+r$$

M (*masa del carretón*)

$m + m' + m''$ (*masa de las pesas motrices*)

r (*masa ficticia de las ruedas* **R** y **R'**)

b) La tara **t** debería modificarse en cada cambio de pesas adicionales. Pero si éstas son livianas en comparación del peso del carretón, se puede despreciar la diferencia de roce.

c) Al comprobar la 2ª parte de la ley, la pesa motriz permanece constante; y lo que cambia es la carga del carretón.

d) En este aparato las poleas **R** y **R'** tienen menos roce que la de la máquina de Atwood. En cambio, se añade a dicho roce el del carretón (ruedas, vía y ejes).

La tara corrige el roce. Pero, como el roce disminuye con la velocidad: resulta que para experiencias delicadas habría que recurrir a diversas taras, según la velocidad que adquiere el sistema.

II°. -- Magnitudes mecánicas.

1.° – Definición algébrica de masa.

1027. – Damos la definición algébrica de una magnitud cuando enunciamos la fórmula que nos enseña a medirla en función de otras magnitudes.

Así cuando decimos que: «**Velocidad** es el espacio unitario con respecto al tiempo», estamos enunciando la siguiente fórmula:

$$v = \frac{e}{t}$$

que podría enunciarse también así: «**Velocidad** es el cociente que se obtiene dividiendo el *espacio* que recorre un móvil con movimiento uniforme, por el *tiempo* que emplea en dicho recorrido».

O sino así: «**Velocidad** es la razón que existe entre el espacio global y el tiempo correspondiente».

1028. -- Las definiciones algébricas no son *definiciones lógicas:* son DEFINICIONES PRÁCTICAS.

Una definición algébrica no nos da idea de la naturaleza de la magnitud en referencia; pero en cambio NOS ENSEÑA A MEDIRLA.

Es, pues, un contrasentido querer sacar consecuencias extra-matemáticas de dichas definiciones; aberraciones en que caen de vez en cuando los sabios, y a menudo los pseudo-sabios.

1029. -- DEFINICIÓN ALGÉBRICA DE MASA. -- Newton se basó en la fórmula de *"masa, fuerza y aceleración"* para sancionar la definición algébrica de masa:



La fórmula $m = \frac{f}{w}$ nos dice que:

Masa ES LA RAZÓN ENTRE LA FUERZA MOTRIZ Y LA ACELERACIÓN PRODUCIDA POR DICHA FUERZA.

Esta es en realidad: *la medida de la masa de inercia* (179 h. 133).

2.º – Los tres sistemas métricos adoptados en Física.

1030. – Ya hemos hecho mención de los diversos sistemas métricos **(230 h. 239)**. Aquí nos referimos sólo a los que están sancionados por los físicos.

Son tres: el **C.G.S.**, el **M.T.S.** el **M.K.S.**

1031. – Los sistemas **C.G.S.** y **M.T.S.**: convienen entre sí, en que consideran como magnitudes primitivas, estas únicas tres:

espacio – masa – tiempo

considerando todas las demás magnitudes como derivadas de éstas.

En estos dos sistemas, la **fuerza** *se mide basándose en la fórmula:*

$$f = m.w$$

1032. – Sistema **M.K.S.** (llamado TÉCNICO o PRÁCTICO): considera como magnitudes primitivas, estas únicas tres:

espacio – fuerza – tiempo

considerando todas las demás magnitudes como derivadas de éstas.

En este sistema, la **masa** *se mide basándose en la fórmula:*

$$m = \frac{f}{w}$$

1033. – SISTEMA **C.G.S** (llamado también CEGESIMAL): sus unidades básicas son:

de espacio	*de masa*	*de tiempo*
el **centímetro**	el **gramo**	el **segundo**

De allí le viene el nombre **C.G.S**:

CENTÍMETRO (c), GRAMO-MASA (g), SEGUNDO (s).

1034. – Su primera unidad derivada es la de **fuerza**, que se llama DINA.

Dina es la unidad de fuerza correspondiente a la ecuación dimensional:

$$1 \text{ DINA} = 1 \textit{ gramo-masa} \times 1 \textit{ cm./seg.}$$

1035. – DEFINICIÓN LEGAL DE DINA. – **Dina** es la fuerza que aplicada durante *1 seg.* a la masa de *1 gr.*, le imprime la aceleración de *1 cm/seg.*

1036. – Para entender esta definición recurramos a una máquina de Atwood diminuta (fig. 588 - *tamaño natural*).

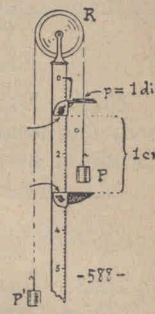
Si tenemos que

$$M + m + r = 1 \text{ GRAMO-MASA}$$

M (*masa de* 2P) m (*masa de* p) r (masa ficticia de R)

y obtenemos $w = 1$ cm.

entonces $p = 1$ DINA



1037. – En París la fuerza de *1 gramo* da a la masa de *1 gramo* la aceleración:

$$\gamma = 9{,}81 \text{ m.} = 981 \text{ cm.}$$

γ (*aceleración de la gravedad*).

P. l. t. 1 *gramo-peso-legal* = 981 *dinas*

1 DINA = $^1/_{981}$ *gr.-peso-legal*

Pero como γ varía en los distintos lugares del globo terrestre, la fórmula general que nos da el valor directo de la DINA es:

1 GR. PESO = 100γ *dinas*

1 DINA = $^1/_{100}\gamma$ *gr. peso*

1038. – En Buenos Aires γ vale aproximadamente 9,8; de modo que en adelante representaremos;

γ por 9,8

100γ por 980

En el Polo γ vale 9,83 y en el Ecuador vale 9,78.

1039. – Múltiplos de la *dina* son: la MEGADINA y el ESTENO.

1 MEGADINA = 1.000.000 *dinas*

1 ESTENO = 100 *megadinas*

1040. – SISTEMA **M. T. S** (que podríamos denominar METESIMAL).– Fué sancionado en 1919; y aunque no se ha generalizado aún, es más cómodo que el *cegesimal*, porque sus unidades tienen dimensiones más prácticas. Estas son:

para el espacio	*para la masa*	*para el tiempo*
el **metro**	la **tonelada**	el **segundo**

Los dos sistemas C.G.S. y M.T.S. no se estorban; antes se completan, porque todas las unidades del 2º son MÚLTIPLOS DECIMALES *de las del* 1.º.

Ambos reciben el nombre de "SISTEMAS DE UNIDADES ABSOLUTAS".

1041. – La primera unidad derivada (en el sistema M.T.S) es el ESTENO.

Esteno es la unidad de fuerza correspondiente a la ecuación dimensional:

$$1 \text{ ESTENO} = 1 \textit{ tonelada-masa} \times 1 \textit{ m/seg}$$

1042. – DEFINICIÓN LEGAL DE ESTENO. – **Esteno** es la fuerza que aplicada durante *1 seg* a la masa de *1 tonelada*, le imprime la aceleración de *1 m./seg.*

Submúltiplos del esteno son la MEGADINA y la DINA.

$$1 \text{ MEGADINA} = 0{,}01 \textit{ esteno}$$
$$1 \text{ DINA} = 0{,}000001 \textit{ megadina}$$

1043. – SISTEMA **técnico** o *práctico* (M. K. S): sus unidades básicas son:

de espacio	*de fuerza*	*de tiempo*
el **metro**	el **kilogramo**	el **segundo**

1044. – En este sistema, la primera unidad derivada es la TECNOMASA o *unidad técnica de masa*.

Tecnomasa es la unidad de masa correspondiente a la ecuación dimensional:

$$1 \text{ TECNOMASA} = \frac{1 \textit{ Kg. - peso}}{1 \textit{ m./seg}}$$

1045. – DEFINICIÓN LEGAL DE TECNOMASA. – **Tecnomasa** es la masa que, sometida durante *1 seg.* a la acción de *1 Kg-peso*, adquiere la aceleración de *1 m./seg.*

1 gr – peso	da a 1 *gr-masa*	la aceleración de 980 *cm/seg*
1 Kg - peso	« « *1 Kg-masa*	« « « «
1 Kg - peso	« « *1 tecnomasa*	« « « *1 m/seg*

1046. – La comparación anterior nos muestra como:

$$1 \text{ TECNOMASA} = \frac{980}{100} \textit{ Kg.-masa} = 9{,}8 \textit{ Kg-masa}$$

1047. – Son submúltiplos de la *tecnomasa:* el KILO-MASA y el GRAMO-MASA.

$$1\text{KG} - \text{MASA} = {}^{1}/_{9{,}8} \textit{ tecnomasa}$$
$$1\text{GR} - \text{MASA} = 0{,}001 \textit{ Kg - masa}$$

1048. – RECÍPROCO DE 9,8. — Como a menudo en los cálculos de Mecánica entra el divisor 9,8, es necesario conocer su recíproco, a fin de convertir dicho divisor en factor.

rec. de 9,8 = 0,1020408

Para nuestros cálculos usaremos *0,102*

P. l. t., para Buenos Aires:

$\gamma = 9{,}8$ $\qquad$ $1/\gamma = 0{,}102$

$100\gamma = 980$ $\qquad$ $1/100\gamma = 0{,}00102$

3.° – Problemas de fuerza, masa y aceleración.

1049. – IMPORTANTE. – En todos los problemas de Mecánica debe recurrirse al cálculo más expedito; de modo que según las unidades adoptadas en el enunciado de los problemas, deberemos decidirnos a recurrir a uno de los tres sistemas: **c.g.s., m.t.s.** o **m.k.s.**

Hasta no familiarizarse con estos tres sistemas, el alumno debe consultar siempre la siguiente tabla antes de proceder a la solución de cualquier problema:

Tabla N.° 7

UNIDADES	DE ESPACIO	DE FUERZA	DE MASA	DE TIEMPO
Sistema **c. g. s**	cm	dina	gr-masa	seg
Sistema **m. t. s**	m	esteno	tonelada-masa	seg
Sistema **técnico**	m	Kg-peso	tecnomasa	seg

1050. – Una vez elegido el sistema que parece más cómodo, se procede a la CONVERSIÓN de todos los datos a unidades de dicho sistema.

Luego sigue la solución. Y *si el resultado corresponde a una unidad poco usada*, recurrimos a una nueva conversión para que el resultado pertenezca al SISTEMA VULGAR (**235**).

1051. – Y como en las conversiones, no siempre estamos dispuestos a razonar, debemos consultar la siguiente tabla que nos facilitará el trabajo mnemónico referente a la relación de las distintas unidades:

Tabla N.° 8

Espacio	
1 CM. = 0,01 m	1 M = 100 cm
Fuerza	
1 DINA = 0,000.001 *megdn* = 0,000.000.01 *est* = 1×0,001.02 *gr - p* = 1×0,000.001.02 *Kg - p*	
1 MEGADINA = 1.000.000 *dn* = 0,01 *est* = 1×1.020 *gr - p* = 1×1,02 *Kg - p*	
1 ESTENO = 100.000.000 *dn* = 100 *megdn* = 1×102.000 *gr - p* = 1×102 *Kg - p*	
1 GRAMO - PESO = 1×980 *dn* = 1×0,000.98 *megdn* = 1×0,000.009.8 *est* = 0,001 *Kg - p*	
1 KG - PESO = 1×980.000 *dn* = 1×0,98 *megdn* = 1×0,0098 *est* = 1.000 *gr - p*	
Masa	
1 GRAMO - MASA = 0,001 *Kg - masa* = 0,000.001 *ton - masa* = 1×0,000.102 *tecnom*	
1 KILO - MASA = 1.000 *gr - masa* = 0,001 *ton - masa* = 1×0,102 *tecnom*	
1 TONELADA - MASA = 1.000.000 *gr - masa* = 1.000 *Kg - masa* = 102 *tecnom*	
1 TECNOMASA = 9.800 *gr-masa* = 1×9,8 *Kg-masa* = 1×0,0098 *ton-masa*	
Tiempo	
1 SEGUNDO = 1/60 *min* = 1/3600 *h* = 1/(24×3600) *d*	
1 MINUTO = 1×60 *seg* = 1/60 *h* = 1/(24×60) *d*	
1 HORA = 1×3600 *seg* = 1×60 *min* = 1/24 *d*	
1 DÍA 1×24×3600 *seg* = 1×24×60 *min* = 24 *h*	

ABREVIACIONES ADOPTADAS. — **cm** (*centímetro*) — **m** (*metro*) — **dn** (*dina*) — **megdn** (*megadina*) — **est** (*esteno*) — **gr – p** (*gramo – peso*) — **Kg – p** (*kilo – peso*) — **gr – masa** (*gramo – masa*) — **Kg – masa** (*kilo – masa*) — **ton – masa** (*tonelada – masa*) — **tecnmo** (*tecnomasa*) — **seg** (*segundo*) — **min** (*minuto*) — **h** (*hora*) — **d** (*día*).

Evitamos usar abreviaciones muy sintéticas, para que los alumnos no las confundan.

1052. – PROBLEMA 1.° – *¿Qué fuerza es necesaria para dar a un cuerpo de* **80 gr.** *la aceleración de* **15 cm./seg**?

Como los datos son *gramos-masa* y *centímetros;* la incógnita se refiere a *dinas.*

SOLUCIÓN  $f = m.w$

$f = 80 \times 15 = \mathbf{1200\ dinas}$

PROBLEMA 2.° – *¿Qué fuerza es necesaria para dar a* **50 Kg-masa** *la aceleración de* **20 m/seg**?

Aquí conviene convertir *Kg.-masa* a *tecnomasa;* y el resultado corresponderá a *Kg-p.*

CONVERSIÓN 50 *Kg-masa* $= 50 \times 0{,}102$ *tecnom.*

SOLUCIÓN  $f = m.w$

$f = 50 \times 0{,}102 \times 20 = \mathbf{102\ Kg\text{-}p}$

1053. – PROBLEMA 3.° – *¿Qué fuerza es necesaria para dar la aceleración de* **17 m/seg** *a un cuerpo de* **4 toneladas**?

Siendo las unidades de los datos, *ton-masa* y *m\seg,* el resultado se referirá a *estenos.*

SOLUCIÓN  $f = m.w$

$f = 4 \times 17 = 68$ *est*

CONVERSIÓN 68 est $= 68 \times 102 = \mathbf{6.936\ Kg\text{-}p}$

1054. – PROBLEMA 4.° – *Un cuerpo, bajo el influjo de* **10 gr-peso** *adquirió* **22 cm/seg** *de aceleración. ¿Cuál es su masa?*

Aquí conviene convertir *gr-p* a *dinas;* y el resultado se obtendrá en *gr-masa*

CONVERSIÓN 10 *gr. p* $= 9800$ *dn*

SOLUCIÓN  $m = \frac{f}{w}$

$m = \frac{9800}{22} = \mathbf{445\ gr\text{-}masa}$

1055. – PROBLEMA 5.° – *¿Qué masa tendrá un móvil que adquirió* **18 m/seg** *de aceleración bajo el influjo de* **24 Kg-p**?

El resultado se referirá a tecnomasa.

SOLUCIÓN  $m = \frac{f}{w}$

$$m = \frac{24}{18} = 1{,}33 \text{ } tecnom$$

CONVERSIÓN 1,33 *tecnon* = 1,33×9,8 = **13,034 Kg-masa**

1056. – PROBLEMA 6.° — *Un cuerpo, bajo el influjo de* **204 Kg-p** *adquirió* **500 m/seg** *de aceleración. ¿Cuál es su masa?*

Dada la coincidencia del número *204 = 102×2*, conviene convertir los *Kg-p* a *estenos*.

CONVERSIÓN 204 *Kg-p* = 2 *est*

SOLUCIÓN  $m = \frac{f}{w}$

$$m = \frac{2}{500} = 0{,}004 \text{ } ton\text{-}masa$$

CONVERSIÓN 0,004 *ton-masa* = **4 Kg-masa**

1057. – PROBLEMA 7.° – *¿Qué aceleración producirán* **7 gr-p** *aplicados a* **0,4 gr-masa**?

Hay que convertir *gr-p* a *dinas*.

CONVERSIÓN 7 *gr-p* = 7 × 980 *dinas*

SOLUCIÓN  $w = \frac{f}{m}$

$$w = \frac{7 \times 980}{0{,}4} = 17.150 \text{ } cm/seg$$

CONVERSIÓN 17.150 *cm/seg* = **171½ m/seg**

1058. – PROBLEMA 8.° – *¿Qué aceleración obtendrán* **80 Kg-masa** *bajo el influjo de* **4 Kg-p**?

Conviene convertir *Kg-masa* a *tecnomasas*.

CONVERSIÓN 80 *Kg-masa* = 80 × 0,102 *tecnom*

SOLUCIÓN 

$$w = \frac{f}{m}$$

$$w = \frac{4 \times 9{,}8}{80} = 0{,}49 \text{ m/seg}$$

1059. – PROBLEMA 9.° – *Un cuerpo de* **30 toneladas** *empujado por* **270 Kg-peso**, *¿qué aceleración obtiene?*

CONVERSIÓN 270 *Kg-p* = 270×0,0098 *est*

SOLUCIÓN 

$$w = \frac{f}{m}$$

$$w = \frac{270 \times 0{,}0098}{30} = 0{,}0882 \text{ m/seg}$$

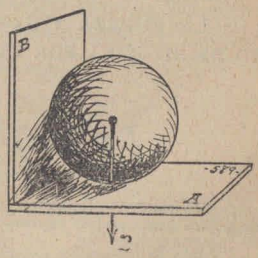
4.° – Las dos formas de energía mecánica.

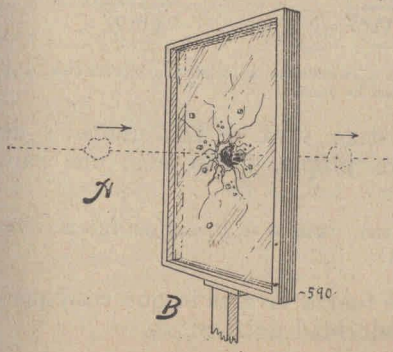
1060. – La energía mecánica se puede presentar en los cuerpos bajo dos formas completamente distintas: a) la de PESO, b) la de ENERGÍA DE MOVIMIENTO.

El PESO es una *energía estática*, que subsiste en la materia en forma constante, *sea que esté en reposo, sea que esté en movimiento.*

Su dirección es siempre vertical, hacia abajo.

1061. – Un cuerpo en reposo (fig. 589), presiona su soporte *A*; pero no empuja los otros cuerpos que como *B* están en contacto con él.





En cambio, si arrojamos el cuerpo *A* contra *B* (fig. 590), producirá en él presión de *choque*, y podrá romperlo.

Esto nos demuestra que un cuerpo en movimiento, posee energía mecánica, distinta del peso

Esta nueva energía que manifestó el cuerpo en referencia, es una *energía dinámica*, que recibe los nombres siguientes: ENERGÍA DE MOVIMIENTO, ENERGÍA CINÉTICA, ENERGÍA ACTUAL, FUERZA VIVA.

1062. – Las FUERZAS ESTÁTICAS se miden por alguno de sus efectos.

Así ya vimos que las fuerzas estáticas se pueden medir por la mayor o menor deformación que producen en los muelles de los dinamómetros (**160** y **167**), o por la mayor o menor aceleración que imprimen a una masa (**1026** y **1028**).

En cambio la ENERGÍA CINEMÁTICA se mide atendiendo a sus causas que son dos; la MASA del móvil y la VELOCIDAD de que está animado.

1063 – Se ha comprobado que:

LA ENERGÍA CINÉTICA ES PROPORCIONAL A LA MASA DEL MÓVIL Y AL CUADRADO DE SU VELOCIDAD.

$$F = a.m.v^2$$

F (*fuerza viva*) *a* (*constante de proporcionalidad*) **m** (*masa del móvil*) **v** (*velocidad*)

1064. – Para relacionar esta fórmula con otras afines, hay que dar a *a* el valor de ½.

Luego:

LA FUERZA VIVA DE UN MÓVIL ES IGUAL AL SEMIPRODUCTO DE SU MASA POR EL CUADRADO DE SU VELOCIDAD.

$$F = \tfrac{1}{2}m.v^2 \qquad \frac{2F}{mv^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{F}{\frac{1}{2}mv^2}$$

Generalmente llamamos **fuerza viva** a la *medida de la* ENERGÍA CINÉTICA; pero en ciertos casos ambas expresiones significan lo mismo.

1065. – UNIDADES DE FUERZA VIVA. — Las unidades de fuerza viva no tienen nombre propio, y son tres: una para cada sistema:

UNIDAD C. G. S. (de fuerza viva), UNIDAD M. T. S. (de fuerza viva) y UNIDAD TÉCNICA (de fuerza viva).

1066. – **Unidad c. g. s.** de fuerza viva es la que corresponde a *1 gr-masa* que tiene la velocidad de *1 cm/seg.*

Su ecuación dimensional es:

$$1 \text{ unid c. g. s.} = \tfrac{1}{2}\ gr\text{-}masa \times 1^2\ cm/seg$$

1067. – **Unidad m. t. s.** de fuerza viva es la que corresponde a *1 ton-masa* que tiene la velocidad de *1 m/seg.*

Su ecuación dimensional es:

$$1 \text{ UNID. M. T. S.} = \tfrac{1}{2}\ ton\text{-}masa \times 1^2\ m/seg$$

1068. – **Unidad técnica** de fuerza viva es la que corresponde a *1 tecnomasa* que tiene la velocidad de *1 m/seg.*

Su ecuación dimensional es:

$$1\ unid.\ técnica = \tfrac{1}{2}\ tecnom \times 1^2\ m/seg$$

1069. – PROBLEMA 1.° – *¿Cuál es la fuerza viva de un móvil de* **25 gr-masa**, *animado de* **30 cm./seg.** *de velocidad*

SOLUCIÓN: $\left(\frac{F}{\frac{1}{2}mv^2}\right)$ $F = \tfrac{1}{2}\ m.v^2$

$$F = \tfrac{1}{2} \times 25 \times 900 = \mathbf{11.250\ unids.\ c.\ g.\ s.}$$

1070. – PROBLEMA 2.° – *Calcúlese la fuerza viva de un móvil de* **4 Kg-masa**, *que se traslada a razón de* **3 m/seg.**

CONVERSIÓN $4\ Kg\text{-}masa = 4 \times 0{,}102\ tecnom$

SOLUCIÓN $\left(\frac{F}{\frac{1}{2}mv^2}\right)$ $F = \tfrac{1}{2}\ m.v^2$

$$F = \tfrac{1}{2} \times 4 \times 0{,}102 \times 9 = \mathbf{1.836\ unid.\ técnicas.}$$

1071. – PROBLEMA 3.° – *¿Qué fuerza viva tiene un bloque de* **250 ton**, *que baja por la cuesta a razón de* **60 Km/hora**?

CONVERSIÓN $60\ Km/hora = 60 \times 1000 \times 3600\ m/seg$

SOLUCIÓN $\left(\frac{F}{\frac{1}{2}mv^2}\right)$ $F = \tfrac{1}{2}\ m.v^2$

$$F = \tfrac{1}{2} \times 250 \times (60 \times 1000 \times 3600)^2 = \mathbf{47.256 \times 10^6\ unids.\ m.\ t.\ s.}$$

1072 – NOTA. – Para simplificar la representación de los números terminados en CEROS, se acostumbra escribirlos en forma de productos así:

$$7.534 \times 10^5 = 753.400.000$$

$$12 \times 10^n = 120000\ldots\ldots0000 \quad (n \text{ ceros})$$

1073. – PROBLEMA 4.° — *¿Qué velocidad se requiere en un móvil de* **25 Kg.** *para que posea* **72 unidades técnicas** *de fuerza viva?*

SOLUCIÓN



$$v^2 = \frac{2F}{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{2F}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 72}{25}} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ mt/seg}$$

5.° – Impulso y cantidad de movimiento.

1074. – **Impulso** o IMPULSIÓN es la medida del *empuje* de una fuerza estática constante, aplicada a un cuerpo *que no ofrece más estorbo que su propia masa.*

EL IMPULSO ES PROPORCIONAL A LA FUERZA Y AL TIEMPO QUE DURA EL EMPUJE.

$$i = f.t$$



1075. – Las unidades de impulso no tienen nombre propio, y son tres: una para cada sistema.

La **unidad c. g. s.** de impulso corresponde a *1 dina* actuando durante *1 seg.*

1 UNID. C. G. S. (de impulso) = 1 *dn* × 1 *seg*

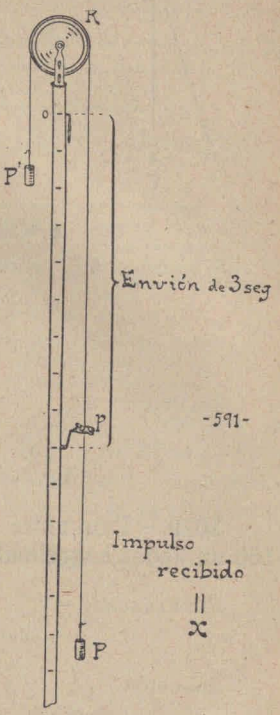
La **unidad m. t. s.** de impulso corresponde a *1 esteno* actuando durante *1 seg.*

1 UNID. M. T. S. (de impulso) = 1 *est* × 1 *seg*

La **unidad técnica** de impulso corresponde a 1 *Kg-peso* actuando durante *1 seg.*

1 UNID. TÉCNICA (de imp) = 1 *Kg-p* × 1 *seg*

1076. – PROBLEMA 1.° — *Suponiendo nulo el estorbo del aire y el roce de la rueda* (fig. 591), *¿qué impulso da al sitema* **2P + R + p**, *la pesa adicional* **p**, *aplicada a él durante* **3 seg**?



Supongamos **p** = 17 gr

CONVERSIÓN

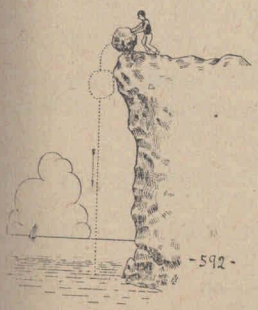
17 gr = 17 × 980 = 16.660 *dn*

SOLUCIÓN



i = f.t

i = 16.660 × 3 = 49.980 unid. c.g.s.



1077. – PROBLEMA 2.° – *Una piedra de* **480 Kg** *cae de cierta altura* (*fig. 592*). *¿Qué impulso habrá recibido de su propio peso al fin de* **5 seg**?

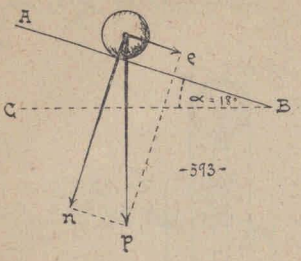
CONVERSIÓN 480 *Kg-p* = 480 × 0,0098 *est*

SOLUCIÓN



i = f.t

i = 480 × 0,0098 × 5 = 23,52 unid m. t. s.



1078. – PROBLEMA 3.° — *Una bocha de* **80 Kg.** *baja por una pendiente de* **18.°** *Se desea saber qué impulso tendrá al fin de* **20 seg.** *si suponemos que el* **5%** *de la fuerza efectiva se gasta en el roce contra el soporte.*

PREPARACIÓN.– Valor de **e** (ver 1019):

$$e = p.\ sen\ \alpha$$

(búsquese *sen* α en la Tabla N°1)

$$e = 80 \times 0{,}309 = 24{,}72\ \ Kg.\ p$$

Si pierde el 5%, conserva el 95%, luego

$$e' = \frac{24{,}72 \times 95}{100} = 23{,}48\ \ Kg.\ p$$

SOLUCIÓN



$$i = f.t$$

$$i = 23{,}48 \times 20 = \mathbf{468\ unids.\ técns.}$$

1079. – PROBLEMA 4.° — *¿Qué fuerza se necesita para dar* **139 unidades cegesimales** *de impulso en* ½ **minuto?**

PREPARACIÓN. – ½ min = 30 seg.

SOLUCIÓN



$$f = \frac{i}{t}$$

$$f = \frac{139}{30} = \mathbf{4{,}96\ dn}$$

1080. – **Cantidad de movimiento** es la medida del *empuje* o *tracción* que debe oponerse a un móvil para *reducir a cero su velocidad.*

LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ES PROPORCIONAL A LA MASA DEL MÓVIL Y A SU VELOCIDAD.

$$c = m.v$$



1081. – Lo mismo que para el impulso, existen tres unidades de cantidad de movimiento.

La **unidad c. g. s.** de cantidad de movim. corresponde a *1 gr-masa* con la velocidad de *1 cm/seg.*

1 UNID. C. G. S. (de **c**) = 1 *gr. masa* × 1 *cm/seg*

La **unidad m. t. s.** de cantidad de movim. corresponde a *1 ton-masa* con la velocidad de *1 m/seg.*

1 UNID. M. T. S. (de **c**) = 1 *ton-masa* × 1 *m/seg*

La **unidad técnica** de cantidad de movim. corresponde a *1 tecnomasa* con la velocidad de 1 *m/seg.*

1 UNID. TÉCN. (de **c**) = 1 *tecnom* × 1 *m./seg.*

1082. – PROBLEMA. — *Una piedra de* **60 gr.** *choca con un vidrio en el instante en que tiene* **14 m./seg.** *de velocidad. Para conocer el efecto del choque, necesitamos averiguar la* CANTIDAD DE MOVIMIENTO *correspondiente al instante en que la piedra choca.*

CONVERSIÓN 60 *gr-masa* = 0,06 *Kg-masa*

SOLUCIÓN



c = m.v

c = 0,06 × 14 = 0,84 unid. técnicas

1083. — RELACIÓN ENTRE EL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

De las dos definiciones, de impulso y cantidad de movim., se deduce que

i = c

o sea, que **f.t = m.v**

Esto significa que:

n unids. de impulso PRODUCEN *n* unids. de cant. de mov.

y que

n unids. de cant. de mov. SE ANULAN CON *n* unids. de impulso.

1084. – PROBLEMA 1.° — *¿Con qué impulso daremos la velocidad de* **15 m./seg** *a un cuerpo de* **50 Kg**?

SOLUCIÓN 

$$c = m.v$$

$$c = 50 \times 0{,}102 \times 15 = 76{,}5 \text{ unids. técn.}$$

Pero $c = i$,

luego **i = 76,5 unids. técn.**

1085. – PROBLEMA 2.° – *Supuesto que, en el mismo caso anterior, el cuerpo deba darse a sí mismo dicho impulso en una caída libre, se desea saber en cuanto tiempo obtendrá el impulso en referencia.*

SOLUCIÓN 

$$t = \frac{i}{f}$$

$$t = \frac{76{,}5}{50} = 1{,}53 \text{ seg} = 1\tfrac{1}{2} \textbf{ seg.}$$

1086. – OBSERVACIÓN. – El último problema podría haberse resuelto también de otro modo; sin tener en cuenta los conceptos de impulso y de cantidad de movim.

Su enunciado, en tal caso hubiera sido:

¿Cuánto tiempo tarda en adquirir la velocidad de **15 m./seg**, *en* caída libre, *un cuerpo que pesa* **50 Kg.**?

SOLUCIÓN 

$$t = \frac{v}{w}$$

Esta fórmula en la *caída libre* se cambia por

$$t = \frac{v}{\gamma} \qquad \gamma = 9{,}8 \text{ m./seg}$$

$$t = \frac{15}{9{,}8} = 1{,}53 \text{ seg.} = 1\tfrac{1}{2} \textbf{ seg.}$$

Como se ve, en este problema el peso o masa del cuerpo es un dato inútil, porque:

EN LA CAÍDA LIBRE, CUALQUIER CUERPO SE DA A SÍ MISMO LA ACELERACIÓN γ.

1087. – PROBLEMA 3.° – *¿Cuántas dinas son necesarias para anular en* **10 seg.** *la velocidad de* **8 cm./seg.** *que posee un móvil de* **25 gr.**?

SOLUCIÓN  $c = m.v$

$$c = 25 \times 8 = 200 \text{ unids. absol.}$$

luego $i = 200$ *unids. absol.*

 $f = \frac{i}{t}$

$$f = \frac{200}{10} = \mathbf{20 \text{ dinas}}$$

1088. – RELACIÓN ENTRE IMPULSO Y FUERZA VIVA.— De las fórmulas

$c = m.v$ y $F = \frac{1}{2}\, m.v^2$

se deduce que $F = \frac{1}{2}\, c.v$

pero $c = i = f.t$

p. l. t. $F = \frac{1}{2}\, f.t.v$  o 

1089. – PROBLEMA 1.° – *¿Qué fuerza viva tendrá un móvil, que adquirió* **12 cm./seg.** *de velocidad bajo el influjo de* **5 dinas** *que actuaron sobre él durante* **14 seg.**

SOLUCIÓN  $F = \frac{1}{2}\, f.t.v$

$$F = \tfrac{1}{2} \times 5 \times 14 \times 12 = \mathbf{420 \text{ unids. c. g. s.}}$$

1090. – PROBLEMA 2.° – *¿En cuánto tiempo un cuerpo adquirirá* **180 unids. técnicas** *de fuerza viva, bajo el empuje de* **28 Kg-peso** *y adquiriendo la velocidad de* **30 m./seg**?

NOTA. - Advertimos que para que este problema no sea absurdo, hay que suponer que el cuerpo tiene la masa necesaria como para que cuando se desplace a razón de *30 m./seg.* posea la fuerza viva de *180 unidades técnicas.*

SOLUCIÓN  $t = \frac{2F}{f.v}$

$$t = \frac{2 \times 180}{28 \times 30} = {}^{3}/_{7} \text{ seg}$$

1091. – PROBLEMA. 3. –*En el problema anterior, ¿cuál debe ser la masa del móvil para que el caso no sea absurdo?*

SOLUCIÓN  $m = \frac{c}{v}$

pero $c = i = f.t$

luego $m = \frac{f.t}{v}$

$$m = \frac{28 \times 3}{7 \times 30} = 0{,}4 \text{ tecnomasas}$$

CONVERSIÓN $0{,}4 \text{ tecnom} = 0{,}4 \times 9{,}8 = 3{,}92$ *Kg-masa*

6.° - Trabajo mecánico.

1092. – En mecánica se llama **trabajo** el desgaste de la fuerza que se invierte en la producción o conservación del movimiento.

Siempre que movemos un cuerpo, usamos parte de nuestra fuerza en darle impulso, y lo restante lo gastamos *equilibrando las fuerzas* de roce, de resistencia del aire, y cualesquiera otras fuerzas opuestas a nuestro intento.

1093. – *Oigamos a Chwolson:*

Es necesario distinguir dos casos en la producción del trabajo: a) En el primero, el trabajo consiste *en vencer la resistencia exterior al movimiento*, y se efectúa sin que aumente la velocidad del cuerpo.

b) En el segundo, el trabajo consiste *en vencer la inercia del cuerpo*, es decir, su resistencia al cambio de movimiento, y tiene por resultado *un aumento algébrico de la velocidad*, o lo que es lo mismo, *una aceleración*.

En el primer caso, las resistencias son externas: roce, resistencia del aire, gravedad.

En el segundo caso la resistencia es interna: la inercia de la materia.

En el primer caso, la *fuerza motriz* lucha contra fuerzas más o menos activas; y en el segundo caso, lucha contra la inercia de la masa, que es una fuerza meramente pasiva.

1094. – Para comodidad de expresión, llamaremos TRABAJO DE OBVIACIÓN, la primera categoría de trabajo; y TRABAJO DE IMPULSO, la segunda.

El **trabajo de obviación** o **estático** es el caso general del equilibrio de fuerzas iguales y opuestas.

El equilibrio de fuerzas, que estudiamos en Estática, es un caso particular del trabajo estático, al que los físicos han denominado TRABAJO VIRTUAL.

El **trabajo de impulso** o **Dinámico** es el único que produce movimiento.

En otros términos, podemos decir que: el TRABAJO DINÁMICO engendra el movimiento, y el ESTÁTICO lo conserva.

1095. – A veces es tanta la resistencia que opone el roce, el aire o la gravedad, que gastamos la mayor parte de nuestra fuerza en vencer estos obstáculos.

Entonces acontece que cuando dejamos libre el cuerpo, tiene una velocidad adquirida, muy inferior a la que resultaría de las fórmulas

$$v = w.t \qquad y \qquad w = \frac{f}{m}$$

Ej.: Cuando lanzamos al aire una hoja de papel con mucha fuerza, vemos que al desprenderse de nuestra mano tiene poquísima velocidad.

En estos casos casi toda nuestra fuerza se gastó en TRABAJO ESTÁTICO, y muy poca se aprovechó en TRABAJO DE IMPULSO.

1096. – En otros casos la resistencia que oponen los obstáculos externos es tanta, que cuando dejamos libre el cuerpo que estábamos movilizando, se detiene *ipso facto*.

Entonces hay que aceptar que una ínfima parte de nuestro trabajo dió IMPULSO al cuerpo; mientras que todo nuestro esfuerzo se aplicó a remover los estorbos.

1097. – Podemos representar la teoría anterior en forma matemática así:

$$f_m = f_e + f_i$$

f_m = *fuerza motriz total (o sea: fuerza gastada en la producción de un movimiento)*

f_e = *fuerza gastada en vencer resistencias externas.*

f_i = *fuerza gastada en dar impulso.*

De donde se deduce que:

$$T_m = T_e + T_i$$

T_m (*trabajo motor total*) T_e (*trabajo estático*) T (*trabajo de impulso*)

1098. – Para los principiantes es de suma importancia tener en cuenta las observaciones anteriores; sino, les será imposible orientarse en la comprensión de ciertas deducciones que se desprenden del concepto que tienen los físicos de «TRABAJO».

Tanto más, cuanto que la mayoría de los textos de enseñanza secundarias son muy superficiales en este asunto, y después de definir el trabajo en forma incompleta, CAEN EN LA ABIERTA CONTRADICCIÓN *de suponer deducciones que resultarían de una definición como la que da Chwolson.*

Para no citar algunos autores argentinos que adolecen de este defecto, llamamos la atención sobre Kleiber y Karsten, que, a pesar de que en el fondo piensa como Chwolson puesto que llega a las mismas deducciones, sin embargo no parte de una definición que dé derecho a llegar a ellas.

Autores argentinos bastante recientes, expresan en forma absoluta la teoría: «Trabajo motor = trabajo resistente», recurriendo a ejemplos estáticos; con lo que insinúan que no consideran como trabajo el *de impulso*. Y esos mismos autores después nos hablan de «*relación entre energía cinética y trabajo*» mostrándonos como «*el trabajo motor es equivalente a la fuerza viva que engendra*».

1099. – CASOS PRÁCTICOS. 1.° Cuando levantamos un cuerpo del suelo, efectuamos *trabajo estático*, porque gastamos parte de nuestra fuerza en contrarrestar el PESO del cuerpo.

2.° Si levantamos dicho cuerpo de tal manera, que al detener la mano se detiene también el cuerpo, *el impulso* que le hemos dado *es ínfimo*. Luego la casi totalidad de nuestro trabajo se aplicó a *remover obstáculos*.

3.° Si, en vez, al detener la mano, el cuerpo sigue ascendiendo, es porque adquirió velocidad. Por lo tanto, parte del trabajo, se invirtió en *dar impulso*; y lo restante se invirtió en remover obstáculos.

4.° En un mundo imaginario, DONDE NO EXISTIESE GRAVEDAD NI ATMÓSFERA, al levantar un cuerpo del suelo, *lucharíamos solamente con la inercia de su masa.*

En tal caso el movimiento de los cuerpos se efectuaría SIN RESISTENCIAS EXTERNAS. *Todo nuestro esfuerzo se aplicaría a* LA PRODUCCIÓN DE TRABAJO DINÁMICO.

Esto no significa que "NO NOS CANSARÍAMOS". Lo mismo cansa la producción de impulso que la remoción de estorbos; porque en ambos casos gastamos energía.

1100. – Si en la producción de un movimiento, toda la fuerza motriz se gastara en remover obstáculos; al suspenderse la acción de dicha fuerza, se tendría:

$$v = \text{CERO}$$

En cambio, si en la producción de un movimiento, toda la fuerza motriz se gastara en dar impulso, al suspenderse la acción de dicha fuerza, se tendría

$$v = w.t$$

pero

$$w = \frac{f}{m}$$

p. l. t.

$$v = \frac{f.t}{m}$$

1101. – Consecuencias. —

En un mundo sin gravedad, sin roce y sin atmósfera, todo el trabajo se invertiría en dar impulso.

En un mundo sin inercia, sería un mito el trabajo de impulso.

En un mundo sin gravedad, sin roce, sin atmósfera y sin inercia, no habría trabajo mecánico. Y en tal caso, las FUERZAS, *así como las concebimos nosotros, serían completamente inútiles.*

1102. – En un mundo como el nuestro, toda producción o modificación de movimiento exige trabajo estático y trabajo de impulso.

Si, pues, a veces nos expresamos en forma tal, que damos a entender que toda la fuerza motriz se invierte en trabajo estático o en trabajo de impulso, el lector debe entender que uno de los dos trabajos tiene valor ínfimo, el cual en la práctica debe considerarse como nulo.

1103. – IMPULSO INICIAL Y TRABAJO DE CONSERVACIÓN.—

Cuando un cuerpo arrastrado por una fuerza, tiene al principio velocidad creciente, y llega *poco a poco* a tener velocidad constante; debemos distinguir en su movimiento dos fases; a) LA DEL IMPULSO INICIAL, *acompañado de trabajo estático;* b) LA DEL TRABAJO CONSERVADOR DE LA VELOCIDAD, *que es simplemente estático,*

Ej.: a) La locomotora comienza a poner el tren en marcha: parte de su fuerza motriz se invierte en impulso inicial, y la otra parte, en la producción del trabajo de anular las fuerzas de roce de ejes, ruedas y vías, y la de resistencia del aire.

b) Llega un momento en que la velocidad es uniforme, p. ej. *60 Km-hora:* ENTONCES YA NO HAY IMPULSO, Y TODA LA FUERZA MOTRIZ SE INVIERTE EN REMOVER LOS ESTORBOS (roce, atmósfera) QUE TIENDEN A RETARDAR EL MOVIMIENTO.

7.° - Trabajo motor y trabajo resistente.

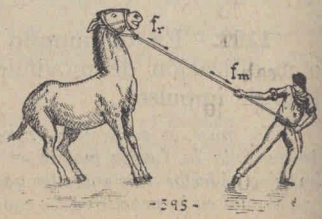
1104. – Para aclarar las explicaciones subsiguientes, podemos considerar que existen tres clases de trabajo estático, según la clase de fuerzas que hay que vencer: a) TRABAJO CONTRA UNA FUERZA ACTIVA, b) TRABAJO CONTRA EL ROCE, c) TRABAJO CONTRA EL MEDIO.



-594-

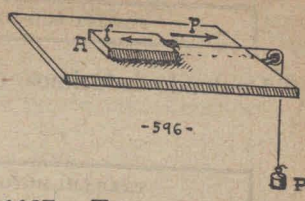
1105. – TRABAJO CONTRA UNA FUERZA ACTIVA. — Cuando levantamos el cuerpo **A**, (fig. 594) la fuerza motriz f_m lucha contra el peso **p** del cuerpo.

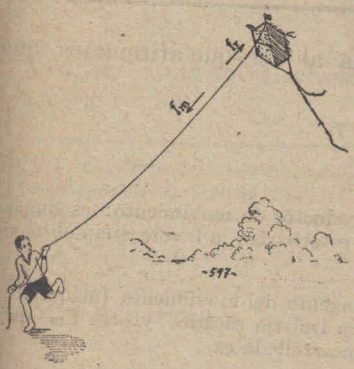
Cuando un hombre se esfuerza por conducir un animal encaprichado (fig. 595), su fuerza motriz f_m lucha contra la fuerza f_r que opone el bruto en sentido contrario.



-595-

1106. – TRABAJO CONTRA EL ROCE. La fuerza activa **p** al arrastrar al cuerpo **A** (fig. 596), lucha contra la fuerza de roce **f**, que se origina en el instante en que comienza la tracción efectuada por **p**.





1107. – TRABAJO CONTRA EL MEDIO.— Cuando un niño corre para *«remontar»* su barrilete (fig. 597), su fuerza motriz f_m lucha contra la fuerza f_r engendrada por la resistencia del aire.

1108. – De los ejemplos anteriores, se desprende que siempre que hay trabajo estático, existen dos fuerzas opuestas: la FUERZA MOTRIZ y la FUERZA RESISTENTE.

Al arrastrar el hombre la bolsa (fig. 598), la fuerza del hombre es la MOTRIZ; y la fuerza que le opone la bolsa es la RESISTENTE.



1109. – Y como toda fuerza que durante el movimiento lucha contra otra fuerza, produce trabajo; habrá, pues, en cada caso dos trabajos opuestos: TRABAJO MOTOR y el TRABAJO RESISTENTE.

Trabajo motor ES EL QUE EFECTÚA LA FUERZA MOTRIZ.

Trabajo resistente ES EL QUE EFECTÚA LA FUERZA RESISTENTE.

1110. – En todos los casos de trabajo estático tenemos que

$$m = f_r$$

FUERZA MOTRIZ = FUERZA RESISTENTE.

De donde deducimos que:

$$T_m = T_r$$

TRABAJO MOTOR = TRABAJO RESISTENTE

1111. – Si alguien se extraña al ver que afirmamos que en la *producción de movimiento:*

$$T_m = T_r$$

es porque se olvida que:

a) El trabajo estático no es el productor de movimiento: es simplemente el anulador de las fuerzas que estorbarían o favorecerían el movimiento.

b) En todo caso de trabajo, el agente del movimiento (máquina hombre) desarrolla una f_m que produce trabajo estático y otra f'_m qu produce impulso. Su fuerza total desarrollada es

$$F_m = f_m + f'_m > f_r$$

De donde se deduce que:

$$T_m \textit{ total} = T_m + T'_m > T_r$$

c) Si el agente del movimiento no desarrollara más fuerza que

$$f_m = f_r$$

tendríamos equilibrio, y entonces no habría movimiento, o sea: no EXISTIRÍA TRABAJO MECÁNICO.

1112. – Para ciertos cálculos se ha introducido en Dinámica el concepto de TRABAJO VIRTUAL, que es el que corresponde al caso de equilibrio entre la *fuerza motriz* y la *fuerza resistente.*

De ello resulta que:

La ESTÁTICA es la parte de la *Mecánica pura* que estudia las condiciones necesarias para que haya *trabajo virtual.*

8.°- Valor del trabajo.

1113. – El trabajo es proporcional a la intensidad de la fuerza y al espacio recorrido por su punto de aplicación.

$$T = f.e$$

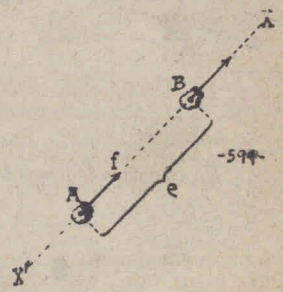


1114. – Cuando calculamos un trabajo debemos tener muy en cuenta que:

> EL TRABAJO TIENE LA MISMA DIRECCIÓN Y SENTIDO QUE LA FUERZA QUE LO PRODUCE.

En consecuencia, al valuar el espacio correspondiente a cada trabajo, *debemos medirlo sobre la línea de acción de la fuerza, o paralelamente a ella.*

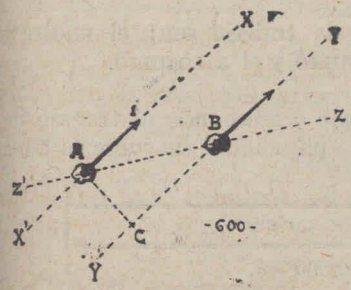
1115. – 1er CASO. — Cuando el movimiento se efectúa sobre la línea de acción de la fuerza, medimos el espacio sobre dicha línea (fig. 599).



El móvil recorre el segmento **AB**, perteneciente a **XX'** (línea de acción de **f**).

En este caso $e = AB$

de donde $T = f.e$



1116. – 2° CASO. — Cuando el movimiento se produce con desplazamiento oblicuo, respecto de la línea de acción, medimos el espacio mediante una distancia paralela a la línea de acción de la fuerza (fig. 600).

El móvil **m** rrecorre el segmento **AB**, oblicuo a la línea de acción de **f**.

Trazamos $Y // X$ $AC \perp X$

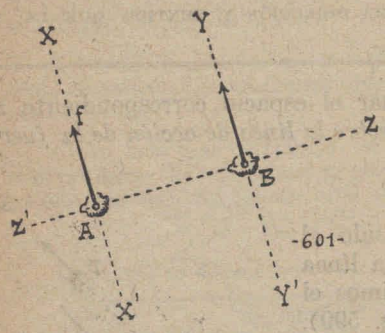
y tomamos como espacio: $e = CB$

Luego $T = f \cdot e$

1117. – NOTA.— Alguien dirá: ¿Cómo puede el móvil recorrer el segmento **AB**, que no se halla sobre la línea de acción de **f**?

Respondemos:

En la fig. 600 se ha representado sólo una de las fuerzas componentes de un sistema, y hemos estudiado solamente el trabajo de **f** sin atender al trabajo de la resultante.



1118. – 3*er.* CASO. — Cuando el movimiento se produce perpendicularmente a la línea de acción de una fuerza, el espacio que debemos considerar vale *cero*, y entonces no hay trabajo mecánico (fig. 601)

El móvil recorre el segmento $AB \perp X$

Luego $e = cero$

p. l. t. $T = f \times 0 = cero$

En este caso tenemos lo que se llama TRABAJO VIRTUAL.

9.º- Medida del trabajo

1119. – Las unidades **c.g.s.** de trabajo son: el ERGIO y sus múltiplos, el MEGAERGIO, el JULIO y el KILOJULIO.

1120. – **Ergio** es la unidad que corresponde al trabajo de *1 dina* que desplaza su punto de aplicación 1 *cm* sobre su línea de acción o paralelamente a ella.

1 ERGIO = 1 *dn* × 1 *cm*

1 MEGAERGIO = 1.000·000 *erg.*
1 JULIO = 10 *megaerg* = 10.000.000 *erg.*
1 KILOJULIO = 1000 *j* = 10.000 megaerg.

1121. – La unidad **m. t. s.** de trabajo es el KILOJULIO. Sus submúltiplos, el JULIO, el MEGAERGIO y el ERGIO.

Kilojulio es el trabajo correspondiente a *1 esteno* que desplaza su punto de aplicación *1 m* sobre su línea de acción o paralelamente a ella.

$$1 \text{ KILOJULIO} = 1\ est \times 1m$$

$$1 \text{ JULIO} = 0{,}001\ Kj$$

$$1 \text{ MEGAERGIO} = 0{,}0001\ Kj$$

$$1 \text{ ERGIO} = \frac{1}{10^7}\ Kj$$

1122. – La unidad técnica de trabajo es el KILOGRÁMETRO.

Kilográmetro es la unidad que corresponde al trabajo de *1 Kg – peso* que desplaza su punto de aplicación *1 m.* sobre su línea de acción o paralelamente a ella.

$$1 \text{ KILOGRÁMETRO} = 1\ Kg \times 1\ m$$

Tabla N.º 9

UNIDADES MECÁNICAS					
SISTEMA	ESPACIO	FUERZA	MASA	TIEMPO	TRABAJO
C. G. S.	cm	dina	gr – masa	seg	ergio
M. T .S.	m	esteno	ton– masa	seg	kilojulio
Técnico	m	Kg – peso	tecnomasa	seg	Kgm

Tabla N.º 10

CORRELACIÓN DE LAS UNIDADES DE TRABAJO
1 ERGIO = 0,000.001 *megaerg* = 0,000.000.1 *j* = 0,000.000.000.1 *Kj* = 1 × 0,000.000.010.2 *Kgm*
1 MEGAERGIO = 1.000.000 *erg* = 0,1 *j* = 0,000.1 *Kj* = 1 × 0,0102 *Kgm*
1 JULIO = 10.000.000 *erg.* = 10 *megaerg.* = 0,1 *Kj* = 1 × 0,102 *Kgm.*
1 KILOJULIO = 1 × 10^7 *erg.* = 10.000 *megaerg.* = 1.000 *j* = 1 × 102 *Kgm.*
1 KGM = 1 × 98.000.000 *erg.* = 1 × 98 *megaerg.* = 1 × 9,8 *j* = 1 × 0,0098 *Kj.*

1123. – PROBLEMA 1.° *¿Qué trabajo efectúa el que levanta un cuerpo de* **300 gr.** *a* **5 cm.** *de altura?*

CONVERSIÓN $300\,gr = 300 \times 980\ dn$

SOLUCIÓN  $T = f.e$

$T = 300 \times 980 \times 5 = 1.470.000$ ergios $=$ **0,147 julios**

1124. – PROBLEMA 2.° *¿Qué espacio debe recorrer una fuerza de* **18 Kg** *para efectuar el trabajo de* **270 Kgm**?

SOLUCIÓN  $e = \frac{T}{f}$

$e = \frac{270}{18} =$ **15 m**

1125. – PROBLEMA 3.° *¿Qué fuerza es necesaria para producir* **20 kilojulios** *al recorrer* **12 m**?

SOLUCIÓN  $= \frac{T}{e}$

$f = \frac{20}{12} = 1{,}6667$ *estenos* $=$ **166,67 megdn**

1126. – PROBLEMA 4.° *¿Cuántos* **cm** *debe recorrer un cuerpo de* **25 dg** *que cae, para efectuar el trabajo de* **0,000.072 Kgm**?

CONVERSIÓN $25\ dg = 2{,}5\ g$

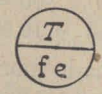
$0{,}000.072\ Kgm = 0{,}000.072 \times 98.000.000 = 7.056\ erg$

SOLUCIÓN  $e = \frac{T}{f}$

$e = \frac{7.056}{2{,}5} =$ **1.764 cm.**

1127. – PROBLEMA 5.° *¿Cuál es la fuerza que aplicada a un cuerpo cualquiera efectúa* **1.500 megaerg.** *al desplazarlo* **80 Hm.**?

CONVERSIÓN 1.500 *megaerg.* = 1.500×0,0102 = 15,30 *Kgm.*
80 *Hm.* = 8.000 m.

SOLUCIÓN  $f = \frac{T}{e}$

$$f = \frac{15{,}30}{8.000} = 0{,}0019\ Kg = 1{,}9\ gr$$

10.° — Trabajo y fuerza viva.

1128. – No sólo produce trabajo la fuerza estática, sino también la fuerza viva.

Y viceversa:

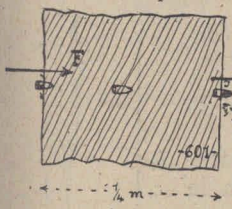
El trabajo que da impulso, produce necesariamente fuerza viva, puesto que ésta es el efecto directo del impulso.

PARA LOS CÁLCULOS ES, PUES, NECESARIO CONOCER LA RELACIÓN ENTRE UNA UNIDAD DE TRABAJO Y UNA UNIDAD DE FUERZA VIVA.

El trabajo es numéricamente igual a la fuerza viva que puede originar: $T = F$

o sea $f.e = \frac{1}{2} m.\ v^2$  o sino 

Este principio es de suma importancia en Mecánica, puesto que nos enseña a resolver problemas como los siguientes.



1129. – PROBLEMA 1.° *Un proyectil atravesó una pared de* ¼ **m.** *¿Qué trabajo le opuso la pared, si la masa del proyectil es de* **10 gr**, *y si al chocar con la pared tenía la velocidad de* **20 m|seg**, *y al salir de ella tenía sólo* **8 m|seg** *de velocidad?*

SOLUCIÓN  $F = \frac{1}{2} m.v^2$

Lo resolveremos con unidades **c. g. s.**

F (inicial) $= \frac{1}{2} \times 10 \times 2000^2 = 20.000.000$ *unid c.g.s*

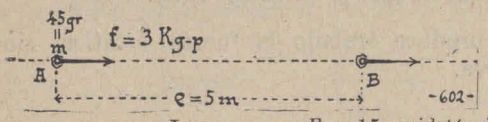
F' (final) $= \frac{1}{2} \times 10 \times 800^2 = 3.200.000$ *unid c.g.s*

ΔF (decremento) $= 16.800.000$ *unid c.g.s*

Luego: T (efectuado por la pared) $= 16.800.000$ *erg*

Conversión $16.800.000 \times 0{,}000.000.010.2 = 0{,}171$ *Kgm.*

1130. – Problema 2°. — *¿Qué velocidad adquirirá un cuerpo de* **45 gr.** *bajo el impulso de una fuerza de* **3 Kg-p** *que actúa sobre él en el espacio de* **5 m**?



Solución

$T = f.e$

$T = 3 \times 5 = 15$ *Kgm*

Luego $F = 15$ *unid técnicas*

Pero $\frac{2F}{mv^2}$ $\qquad v^2 = \frac{2F}{m}$

45 *gr.* $= 45 \times 0{,}000.102$ tecnom

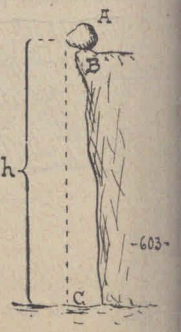
$$v^2 = \frac{2 \times 15}{45 \times 0{,}000102} = 653.333 \qquad v = \sqrt{653.333.} = \mathbf{808\ m\ seg}$$

11.° – Energía potencial.

1131. – Se dice que un sistema de cuerpos tiene **energía potencial,** cuando existe entre ellos atracción o rechazo, aunque se hallen en reposo debido a los estorbos que impiden su movimiento.

El ejemplo más común es el de la Tierra con relación a los cuerpos sostenidos fuera de su superficie (fig. 603).

El cuerpo **A,** debe desprenderse del sostén **B,** para poder caer sobre la superficie **C**.



1132. – Todo cuerpo que cae, efectúa trabajo (de obviación o de impulso o ambos a la vez).

Por lo tanto, en el caso anterior, **A** puede efectuar el trabajo:

$$T = p.h$$

p (*peso de* **A**) **h** (*altura de la caída*)

Para el estudio de la energía potencial, tomaremos en consideración solamente el caso de la caída de los cuerpos.

1133. – Un cuerpo tiene **energía potencial** o ENERGÍA DE POSICIÓN, cuando tiene la facultad de poder efectuar trabajo.

La energía potencial de los cuerpos se mide, pues, por el trabajo que pueden efectuar en su caída:

$$E = T \qquad E \text{ (energía potencial)}$$

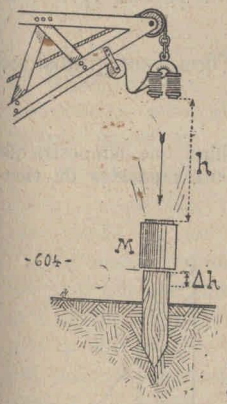
P. l. t. $E = f.e$



que para nuestro caso es lo mismo que

$$E = p.h$$





1134. – PROBLEMA. — *¿Cuánto se hundirá en el suelo la estaca, al caer la maza* **M** *que pesa* **80 Kg**, *si* **h** = 5 *m*?

Dejamos provisoriamente dos incógnitas:

f = fuerza de reacción que se opone al avance de la estaca.

Δh = incremento de la altura (es la porción de estaca que se hunde en el suelo).

SOLUCIÓN $E = p.h$

$E = 80 \times 5 = 400$ *Kgm.*

Luego $f.\Delta h = 400$ *Kgm.*

De aquí resulta que efectivamente hay dos incógnitas: la fuerza de reacción: **f**; y el avance de la estaca: **Δh**.

Para resolver el problema, supongamos que

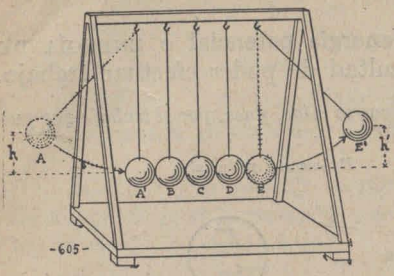
$$f = 3.000 \text{ Kg.}$$

En tal caso, tendremos que:

$$\Delta h = \frac{400}{3.000} = 0{,}13 \text{ m}$$

1135. – EL TRABAJO QUE NO SE PIERDE EN RESISTENCIAS EXTERNAS, SE CONVIERTE ÍNTEGRO EN FUERZA VIVA.

Las bochas de repercusión nos lo comprueban (fig. 605).



La bocha **A** antes de caer tiene la energía potencial:

$$E = p.h$$

Si la soltamos, adquirirá al llegar a **A'** la fuerza viva correspondiente al trabajo

$$T = p.h$$

Si *masa de* **A** = *masa de* **B** **A** se detendrá en **A'**, pasando a **B** toda su fuerza viva.

Y si las demás bochas tienen la misma masa, irán pasándose una a otra su fuerza viva, hasta la bocha **E**.

Como esta última no tiene obstáculo que le impida moverse, se levantará hasta **h'**.

La experiencia nos enseña que

h (es sensiblemente igual a) **h'**

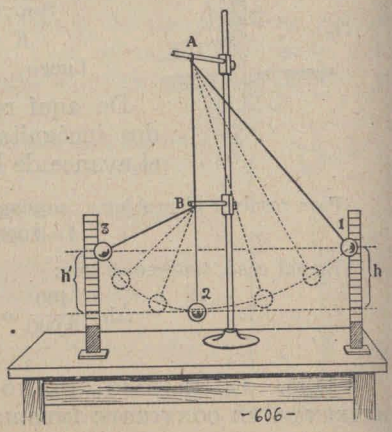
con lo que se comprueba que **A** pasó toda su fuerza viva a **B**; ésta a **C**, etc. hasta **E**.

1136. – OBSERVACIÓN. — Si medimos con escrupulosidad vemos que en la experiencia anterior:

$$h' < h$$

En (**1018**) se explicó la causa de esta desigualdad, que demuestra que una parte de la fuerza viva de **A** se transformó en otras suertes de energía (térmica, elástica, etc.)

1137. – La *Experiencia de Galileo*, que exponemos a continuación nos lleva a la misma conclusión que la de las bochas de repercusión, aventajándole en exactitud.



EXPERIENCIA DE GALILEO. — El péndulo, que sale de la posición *1*, al llegar a *2* tiene adquirida la fuerza viva correspondiente a

$$T = p.h$$

Esta fuerza viva se anula con un trabajo igual y opuesto.

Efectivamente, se anula por completo cuando

$$h' = h$$

1138. – De las experiencias anteriores y de otras muchas similares se deduce que

> **La energía potencial de un cuerpo es igual al trabajo que sería necesario efectuar para volverlo a su lugar después de la caída.**

12°. – Potencia de los generadores de energía.

1139. – Ya dijimos que:

Máquina es un modificador del efecto de una fuerza.

Y ahora podemos decir que:

Máquina es un transformador de trabajo.

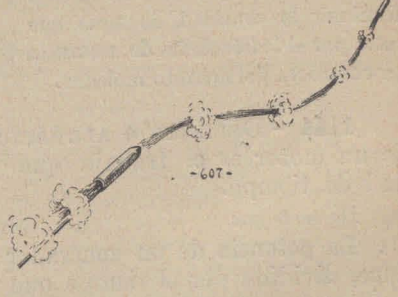
Este es el significado que se da en Mecánica a la palabra MÁQUINA.

Pero en el lenguaje vulgar también se llaman MÁQUINAS muchos aparatos *generadores de energía.*

1140. – GENERADOR DE ENERGÍA MECÁNICA O MOTOR es cualquier cuerpo o conjunto de cuerpos que convierten *energía potencial* en *energía actual,* o convierten *energías no mecánicas* en *energía mecánica.*

El cohete volador es un generador de energía mecánica: es un «auto-móvil» (fig. 607).

La energía química que hace combinar entre sí los elementos de la pólvora, se traduce en expansión de los gases producidos; y esta fuerza de expansión pone en movimiento el cohete.



1141. – Si la boca de desahogo del cohete es grande, éste adquiere de inmediato mucha fuerza viva; pero la expansión se termina pronto y la fuerza viva se anula inmediatamente con la resistencia del aire.

En cambio, si el agujero de desahogo es pequeño, aunque la fuerza expansiva es menor, dura, sin embargo, más tiempo, y el cohete puede avanzar con regularidad.

En el caso de las *máquinas a vapor*, la energía se produce por la expansión del agua que pasa al estado de vapor.

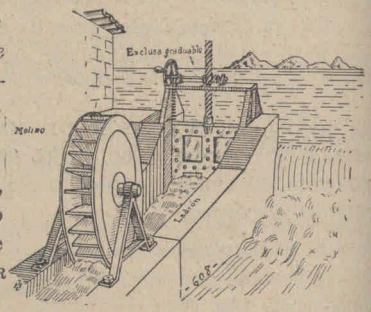
El agujero de desahogo y la disposición del émbolo impide que la tensión del vapor de agua se «*gaste de golpe*».

1142. – Si en el cohete volador la expansión pudiera producirse de a poco, p. ej., con una sucesión sincrónica de explosiones, y además pudiéramos ir añadiendo explosivo a medida que comenzara a mermar, tendríamos un generador ideal de energía mecánica.

Es lo que se ha obtenido en los motores a nafta (motores de automóvil) llamados «DE EXPLOSIÓN».

1143. – **Potencia** de un generador es la facultad de poder suministrar *constantemente* una cantidad más o menos grande de energía.

Todos los generadores industriales tienen sus reguladores, a fin de que suministren la cantidad de energía necesaria para los trabajos a que se destinan.



Ej: Las *esclusas* de los molinos, (fig. 608) tienen por fin aumentar o disminuir la cantidad de agua que entra por el *ladrón*, a fin de REGULAR LA POTENCIA del aparato moledor.

1144. – DEFINICIÓN ALGÉBRICA DE POTENCIA. — **Potencia** de un motor es el trabajo que puede producir en una unidad de tiempo.

De modo que

La **potencia** de un generador es igual al trabajo que produce, dividido por el tiempo que tarda en producirlo.

$$P = \frac{T}{t}$$

$$\frac{T}{Pt}$$

1145. – Las unidades de potencia de los sistemas *C.G.S.* y *M.T.S.* son: el ERGIO SEGUNDO, y sus múltiplos, el VATIO (**w**), el HECTOVATIO (**Hw**) y el KILOVATIO (**Kw**).

$$1 \text{ ERGIO/SEG} = \frac{1\ erg}{seg}$$

1146. – Esta unidad «*erg/seg*» no se usa por ser muy pequeña. Pero debe conocerse, para cuando hay que calcular con fórmulas en las que entran unidades *c.g.s.*

Para dichos casos debe saberse que:

$$1 \text{ ERG/SEG} = {}^1/_{10^7}\ w \qquad 1 \text{ VATIO} = 10^7\ erg/seg$$

1 VATIO = 1 *jul/seg*
1 HECTOVATIO = 100 jul/seg
1 KILOVATIO = 1000 *jul/seg*

El *kilovatio* es la unidad fundamental del sistema *M.T.S.*

1147. – Las unidades *técnicas* de potencia son: el KILOGRÁMETRO-SEGUNDO **(Kgm/seg)** y su múltiplo el CABALLO VAPOR **(C. V.)**

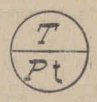
$$1 \text{ KGM/SEG} = \frac{1\ Kgm}{1\ seg} \qquad 1 \text{ C.V.} = 75\ Kgm/seg\ (^1)$$

Tabla N°. 11

CORRELACIÓN DE LAS UNIDADES DE POTENCIA
1 ERGIO/SEG = $1/10^7$ w
1 VATIO = 1/100 Hw = 1/1000 Kw = 1 × 0,102 Kgm/seg = 1 × 0,00136 $C.V.$
1 HECTOVATIO = 1 × 100 w = 1/10 Kw = 1 × 10,2 Kgm/seg = 1 × 0,136 $C.V.$
1 KILOVATIO = 1 × 1000 w = 1 × 10 Hw = 1 × 102 Kgm/seg = 1 × 1,36 $C.V.$
1 KGM/SEG = 1 × 9,8 w = 1 × 0,098 Hw = 1 × 0,0098 Kw = 1 × 0,0133 $C.V.$
1 CAB – VAP. = 1 × 735 w = 1 × 7,35 Hw = 1 × 0,735 Kw = 1 × 75 Kgm/seg.

(1) Es bueno advertir que generalmente el *C. V.* se representa con *H. P.* (*horse power*). Pero este símbolo representa en Inglaterra una medida igual a 75,9 *Kgm/seg.* De modo que es necesario cerciorarse del verdadero significado de este símbolo, en cada caso.

1148. – PROBLEMA 1.° — *¿Un motor produjo* **217 Kgm** *en* **7 seg.** *¿Cuál es su potencia?.*

SOLUCIÓN 

$$P = \frac{T}{t}$$

$$P = \frac{217}{7} = \mathbf{31\ Kgm/seg}$$

1149. – PROBLEMA 2.° — *Un motor de* **25 w** *¿qué trabajo produce en* **15 mín**?

CONVERSIÓN $15\ min = 15 \times 60\ seg$

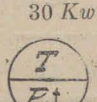
SOLUCIÓN 

$$T = P.t$$

$$T = 25 \times 15 \times 60 = 7500\ jul = \mathbf{7\,1/2\ Kj}$$

1150. – PROBLEMA 3.° — *¿Cuánto tiempo requiere un motor de* **30 Kw** *para producir* **500 Kgm** *de trabajo?*

CONVERSIÓN $30\ Kw = 30 \times 102\ Kgm/seg$

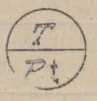
SOLUCIÓN 

$$t = \frac{T}{P}$$

$$t = \frac{500}{30 \times 102} = \frac{500 \times 0{,}0098}{30} = \mathbf{0{,}16\ seg}$$

1151. – PROBLEMA 4.° — *En* **9 seg,** *a qué altura levantará un peso de* **450 Kg** *una máquina de* **32 Hw**?

CONVERSIÓN $32\ Hw = 32 \times 10{,}2\ Kgm/seg$

SOLUCIÓN 

$$T = P.t$$

$$T = 32 \times 10{,}2 \times 9$$



$$e = \frac{T}{f}$$

$$e = \frac{32 \times 10{,}2 \times 9}{450} = \mathbf{6{,}53\ m}$$

1152. – PROBLEMA **5.°** — *¿Qué masa tiene un cuerpo que adquiere* **12 m/seg** *de velocidad en* **5 seg** *de empuje que le imprime un motor de* **27 Kgm/seg**?

SOLUCIÓN



$T = P.t$

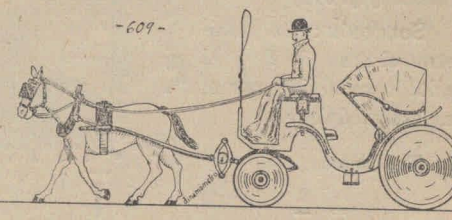
$T = 27 \times 5$ luego $F = 27 \times 5$

pero $F = {}^1/_2\, m.v^2$ p. l. t. ${}^1/_2\, m.v^2 = 27 \times 5$

$$m = \frac{2 \times 27 \times 5}{v^2} = \frac{2 \times 27 \times 5}{12^2} = \mathbf{8{,}875\ tecnomasas}$$

13°. - Trabajo de las fuerzas variables.

1153. – Si unimos un coche a sus varas mediante un dinamómetro (fig. 609), pueden presentarse dos problemas distintos, según que queramos medir el trabajo efectuado en un período de marcha uniforme o en uno de marcha variada.



1154. – 1.er PROBLEMA. —*¿Qué trabajo efectuó el caballo arrastrando el coche (fig. 609) por espacio de* **20 cd** *mientras el dinamómetro se mantuvo constante marcando* **52 Kg**?

CONVERSIÓN $= 20\,cd = 20 \times 130 = 2600\ m$

SOLUCIÓN $T = \mathbf{f.e}$

$T = 52 \times 2600 = \mathbf{135.200\ Kgm}$

1155. – 2.° PROBLEMA.— ¿En el mismo caso anterior, ¿qué trabajo efectuó el caballo en el espacio de **45 m.** que necesitó para adquirir la marcha constante, partiendo del estado de reposo?

Pueden presentarse dos casos:

1.er *Caso:* Si suponemos que la aguja del dinamómetro fué corriéndose de «*cero*» a 52 Kg. con movimiento uniforme.

En tal caso, la fuerza fué creciendo uniformemente desde «*cero*» hasta 52 Kg.

Y entonces el caballo efectuó el mismo trabajo que hubiera efectuado una fuerza media entre «*cero*» y 52.

$$\text{Solución} \qquad f' = \frac{52}{2} = 26 \text{ Kg.}$$

f' = fuerza media

De donde resulta que $T = 26 \times 45 = \mathbf{1.170\ Kgm}$

2.° *Caso*: Si el crecimiento de la fuerza no fué uniforme, habría que conocer la gráfica correspondiente, lo que se hubiera obtenido con un dinamógrafo.

Dinamógrafo = *dinamómetro registrador*

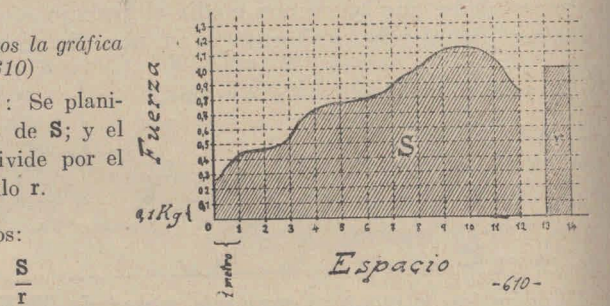
1156. – CALCULAR EL TRABAJO DE UNA FUERZA VARIABLE, CUANDO CONOCEMOS LA GRÁFICA DE DICHA FUERZA EN FUNCIÓN DEL ESPACIO RECORRIDO.

Supongamos la gráfica siguiente (fig. 610)

SOLUCIÓN: Se planimetra el área de **S**; y el resultado se divide por el área del modulo **r**.

Tendremos:

$$T = \frac{S}{r}$$



-610-

1157. – EJERCICIO.— Calcule el alumno el trabajo efectuado en **3 cd.** de recorrido por el buscapiés de la fig. 607, si suponemos que su fuerza inicial fué de **5 Kg.**, la cual se fué degradando uniformemente hasta reducirse (al fin de dichas **3 cd.** a **25 gr.**)

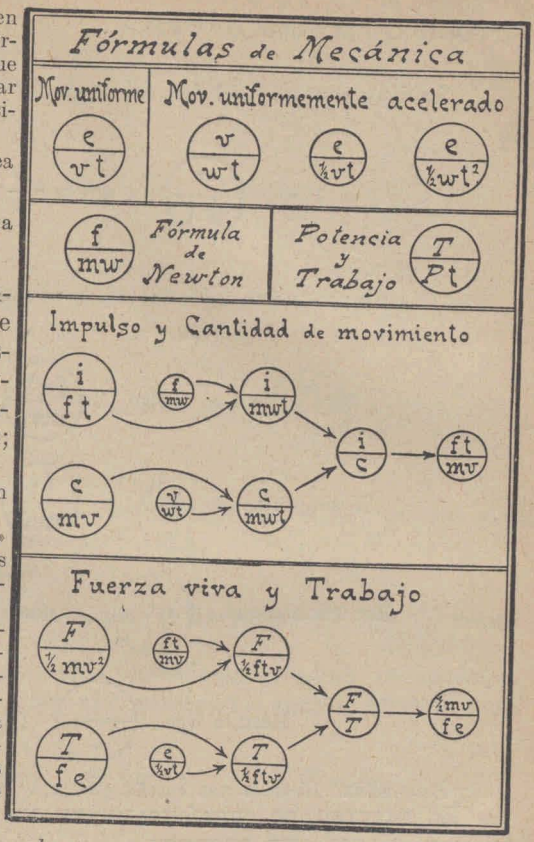
14.° - Ejercicios sobre fórmulas.

1158. – El cuadro adjunto contiene todas las fórmulas de Mecánica que hemos visto en lo que tenemos andado del texto.

Hay también en el cuadro algunas fórmulas *de transición*, que sirven para demostrar las dos equivalencias siguientes:

a) $i = c$ o sea $f.t = m.v$

b) $F = T$ o sea $\frac{1}{2}\, m.v = f.e$



1159.– El alumno debe ejercitarse en el trabajo de DERIVACIÓN DE FÓRMULAS, con lo que obtendrá varios bienes; entre otros:

a) Aprenderá bien las fórmulas.

b) Se «*entrenará*» en su manejo, para los casos en que deba resolver problemas.

c) Repasará el mecanismo del cálculo algébrico, que es indispensable para la comprensión de la Mecánica

DAMOS, A CONTINUACIÓN ALGUNOS EJEMPLOS DE TRABAJO DE DERIVACIÓN.

Pero advertimos a los alumnos que:

ANTES DE EJERCITARSE EN EL MANEJO DE LAS FÓRMULAS SINTÉTICAS, ES BUENO RELEER LAS INDICACIONES DE (**822** *h.* **824**).

1160. – Relacionemos la fórmula de Newton con la del trabajo, para ver a donde llegamos:

Fórmula de Newton $\frac{f}{mv}$ (1). Fórmula del trabajo $\frac{T}{fe}$ (2)

De la (1ª) se deduce que $f = m.w$

Sustituyendo en la (2ª) éste valor, resulta $\frac{T}{mwe}$ (3)

Pero, $\frac{v}{wt}$ o sea $w = \frac{v}{t}$

Sustituyendo éste valor en (3), se obtiene $\frac{Tt}{mve}$ (4)

Pero $T = f.e$, luego $\frac{fet}{mve}$ (5)

Y simplificando resulta $\frac{ft}{mv}$ (6)

Recordando que $\frac{i}{ft}$ y que $\frac{c}{mv}$

Resulta que $\frac{i}{c}$ (7)

Esta última fórmula nos enseña que:

EL IMPULSO ES NUMÉRICAMENTE IGUAL A LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO QUE PRODUCE.

Cosa ya vista en (**1083**).

1161. – Partamos de la fórmula anterior, yendo a los dominios de la fuerza viva.

La fórmula $\frac{i}{c}$ nos dice que $\frac{f}{mv}$ (1)

Sustituyamos en $\frac{2F}{mv^2}$ el valor $m.v$ por $f.t$

obtendremos  o sea  (2)

Ahora, como en el mov. unif.^{m} variado: 

sustituyendo en (2) el valor de $^{1}/_{2}$ t.v obtenemos  (3)

De ésta fórmula deducimos que:  (4)

Esta última fórmula nos enseña que:

LA FUERZA VIVA ES NUMÉRICAMENTE IGUAL AL TRABAJO QUE SE REQUIERE PARA ANULARLA.

Cosa ya vista en **1128**.

1162. – Advertencias para el buen uso de las fórmulas sintéticas.

1.ª En estas fórmulas consideramos como 1er MIEMBRO la casilla superior; y como 2º MIEMBRO la casilla inferior, luego

 se lee $T = F$

2.ª Los factores del 1er MIEMBRO forman un todo indescomponible.

De modo que la fórmula  no sirve para buscar el valor de f ni de t por separado.

Para buscarlo debe invertirse el orden de los miembros así 

3.ª Los términos que son divisores de un miembro, se eliminan, pasándolos al otro miembro como factores.

EJEMPLO. Tenemos $\frac{T}{fe}$ (1)

pero la fórmula $\frac{mv}{ft}$ nos enseña que $f = \frac{m.v}{t}$

Sustituyendo este valor en (1) resulta $\frac{T}{m\frac{v}{t}e}$ (2)

Ahora eliminamos el divisor t así $\frac{Tt}{mve}$ (3)

4.ª Cuando en el miembro que contiene la incógnita hay un coeficiente que estorba, se elimina, colocando en el otro miembro el recíproco de dicho coeficiente.

Si en $\frac{e}{\frac{1}{2}wt^2}$ la incognita es w, sustituimos esta fórmula por la siguiente $\frac{2e}{wt^2}$

1163 – EJERCICIO 1º La fórmula $\frac{T}{F}$ nos dice que $\frac{T}{\frac{1}{2}mv^2}$ (1)

Pero la fórmula $\frac{e}{\frac{1}{2}vt}$ nos da $\frac{1}{2}v = \frac{e}{t}$

Sustituyendo este valor en (1) resulta $\frac{T}{m\frac{e}{t}v}$ (2)

Indústriese el alumno en llegar a la fórmula del trabajo partiendo de (2), *y teniendo en cuenta las siguientes fórmulas.*





EJERCICIO 2.º – *¿Cómo llegamos a la siguiente fórmula de transición?*



1164. – EJERCICIO 3.º – *¿Cómo llegamos a la siguiente fórmula de transición?*



1165. – EJERCICIO 4.º – *Partiendo de la siguiente fórmula:*



¿cómo llegamos a estas otras?




1166. – EJERCICIO 5.º – *Partiendo de la última fórmula del ejercicio anterior, llegar a:*

 (1)

Hay que valerse entre otras fórmulas, de las siguientes:




1167. – EJERCICIO 6.º – *Partiendo de la fórmula (1) del ejercicio anterior llegar a:*



1168. – EJERCICIO 7.° – *Multiplicando ambos miembros de la fórmula del trabajo por* t, *resulta:* $\frac{Tt}{fte}$ *Sustitúyase el valor de* f $\frac{f}{mw}$ *y váyase trabajando para llegar a demostrar que* $\frac{T}{\frac{mv^2}{r}}$

15.° – Tabla de los números recíprocos

1169. – Como a menudo nos vemos en la necesidad de eliminar divisores, sustituyéndolos por factores, recíprocos de ellos, incluimos aquí la tabla correspondiente, haciendo las dos advertencias siguientes;

1.° Repásese todo lo que se ha visto ya en **209** h **216.**

2.° SI SE MULTIPLICA UN NÚMERO POR UNA CANTIDAD CUALQUIERA, SU RECÍPROCO QUEDA DIVIDIDO POR DICHA CANTIDAD

$$\text{Si} \qquad m = rec\ n$$

$$\text{lg} \qquad \frac{m}{a} = rec\ n.\ a$$

1170.– El principio anterior nos enseñará a calcular rápidamente los recíprocos que no figuran en la tabla.

Ej: ¿CUÁL ES EL RECÍPROCO DE **517**?

En la tabla tenemos: *rec* 0,517 = 1,93424

$$\text{de donde } rec\ 0{,}517 \times 1000 = \frac{1{,}93424}{1000} = 0{,}00193424$$

REGLA.– **Si se corre la coma decimal de un número, la coma de su recíproco se corre en sentido inverso, a igual distancia.**

1171.– MANEJO DE LA TABLA.– *Ejemplo.*– Buscar el recíproco de **0,435.**

Búsquese en la columna vertical de **n** el número **0,43,** y en la columna horizontal de **n** el incremento + **0,005.**

Procediendo como en la *tabla pitagórica,* encontramos en la casilla correspondiente, el número **2,29885.**

Luego *rec* 0,435 = 2,29885

Tabla N°. 12.

Números recíprocos

n	+0,000	+0,001	+0,002	+0,003	+0,004	+0,005	+0,006	+0,007	+0,008	+0,009	n
0,10	10,0000	9,90099	9,80392	9,70874	9,61538	9,52381	9,43396	9,34579	9,25926	9,17431	0,10
0,11	9,09091	9,00901	8,92857	8,84956	8,77193	8,65565	8,62069	8,54701	8,47458	8,40336	0,11
0,12	8,33333	8,26446	8,19672	8,13008	8,06452	8,00000	7,93651	7,87402	7,81250	7,75194	0,12
0,13	7,69231	7,63359	7,57576	7,51880	7,46269	7,40741	7,35294	7,29927	7,24638	7,19424	0,13
0,14	7,14286	7,09220	7,04225	6,99301	6,94444	6,89655	6,84932	6,80272	6,75676	6,71141	0,14
0,15	6,66667	6,62252	6,57893	6,53595	6,49351	6,45161	6,41026	6,36943	6,32911	6,28931	0,15
0,16	6,25000	6,21118	6,17284	6,13497	6,09756	6,06061	6,02410	5,98802	5,95238	5,91716	0,16
0,17	5,88235	5,84795	5,81395	5,78035	5,74713	5,71429	5,68182	5,64972	5,61798	5,58659	0,17
0,18	5,55556	5,52486	5,49451	5,46448	5,43478	5,40541	5,37634	5,34759	5,31915	5,29101	0 18
0,19	5,26316	5,23560	5,20833	5,18135	5,15464	5,12821	5,10204	5,07614	5,05051	5,02513	0,19
0,20	5,00000	4,97512	4,95050	4,92611	4,90196	4,87805	4,85437	4,83092	4,80769	4,78469	0,20
0,21	4,76190	4,73934	4,71698	4,69484	4,67290	4,65116	4,62963	4,60829	4,58716	4,56621	0,21
0,22	4,54545	4,52489	4,50450	4,48431	4,46429	4,44444	4,42478	4,40529	4,38596	4,36681	0,22
0,23	4,34783	4,32900	4,31034	4,29185	4,27350	4,25532	4,23729	4,21941	4,20168	4,18410	0,23
0,24	4,16667	4,14938	4,13223	4,11523	4,09836	4,08163	4,06504	4,04856	4,03226	4,01606	0,24
0,25	4,00000	3,98406	3,96825	3,95257	3,93701	3,92157	3,90625	3,89105	3,87597	3,86100	0,25
0,26	3,84615	3,83142	3,81679	3,80228	3,78788	3,77358	3,75940	3,74532	3,73134	3,71747	0,26
0,27	3,70370	3,69004	3,67647	3,66300	3,64964	3,63636	3,62319	3,61011	3,59712	3,58423	0,27
0,28	3,57143	3,55872	3,54610	3,53357	3,52113	3,50877	3,49650	3,48432	3,47222	3,46021	0,28
0,29	3,44828	3,43643	3,42466	3,41297	3,40136	3,38983	3,37838	3,36700	3,35570	3,34448	0,29
0,30	3,33333	3,32226	3,31126	3,30033	3,28947	3,27869	3,26797	3,25733	3,24675	3,23625	0,30
0,31	3,22581	3,21543	3,20513	3,19489	3,18471	3,17460	3,16456	3,15457	3,14465	3,13180	0,31
0,32	3,12500	3,11527	3,10559	3,09598	3,08642	3,07692	3,06748	3,05810	3,04878	3,03951	0,32
0,33	3,03030	3,02115	3,01205	3,00300	2,99401	2,98507	2,97619	2,96736	2,95858	2,94985	0,33
0,34	2,94118	2,93255	2,92398	2,91545	2,90698	2,89855	2,89017	2,88184	2,87356	2,86533	0,34
0,35	2,85714	2,84900	2,84091	2,83286	2,82486	2,81690	2,80899	2,80112	2,79330	2,78552	0,35
0,36	2,77778	2,77008	2,76243	2,75482	2,74725	2,73973	2,73224	2,72480	2,71739	2,71003	0,36
0,37	2,70270	2,69542	2,68817	2,68097	2,67380	2,66667	2,65957	2,65252	2,64550	2,63852	0,37
0,38	2,63158	2,62467	2,61780	2,61097	2,60417	2,59740	2,59067	2,58398	2,57732	2,57069	0,38
0,39	2,56410	2,55754	2,55102	2,54453	2,53807	2,53165	2,52525	2,51889	2,51256	2,50627	0,39
0,40	2,50000	2,49377	2,48756	2,48139	2,47525	2,46914	2,46305	2,45700	2,45098	2,44499	0,40
0,41	2,43902	2,43309	2,42718	2,42131	2,41546	2,40964	2,40385	2,39808	2,39234	2,38663	0,41
0,42	2,38095	2,37530	2,36967	2,36407	2,35849	2,35294	2,34742	2,34192	2,33645	2,33100	0,42
0,43	2,32558	2,32019	2,31481	2,30947	2,30415	2,29885	2,29358	2,28833	2,28311	2,27790	0,43
0,44	2,27273	2,26757	2,26244	2,25734	2,25225	2,24719	2,24215	2,23714	2,23214	2,22717	0,44
0,45	2,22222	2,21730	2,21239	2,20751	2,20264	2,19780	2,19298	2,18818	2,18341	2,17865	0,45
0,46	2,17391	2,16920	2,16450	2,15983	2,15517	2,15054	2,14592	2,14133	2,13675	2,13220	0,46
0,47	2,12766	2,12314	2,11864	2,11416	2,10970	2,10526	2,10084	2,09644	2,09205	2,08768	0,47
0,48	2,08333	2,07900	2,07469	2,07039	2,06612	2,06186	2,05761	2,05339	2,04918	2,04499	0,48
0,49	2,04082	2,03666	2,03252	2,02840	2,02429	2,02020	2,01613	2,01207	2,00803	2,00401	0,49
0,50	2,00000	1,99601	1,99203	1,98807	1,98413	1,98020	1,97628	1,97239	1,96850	1,96464	0,50
0,51	1,96078	1,95695	1,95312	1,94932	1,94553	1,94175	1,93798	1,93424	1,93050	1,92678	0,51
0,52	1,92308	1,91939	1,91571	1,91205	1,90840	1,90476	1,90114	1,89753	1,89394	1,89036	0,52
0,53	1,88679	1,88324	1,87970	1,87617	1,87266	1,86916	1,86567	1,86220	1,85874	1,85529	0,53
0,54	1,85185	1,84843	1,84502	1,84162	1,83824	1,83486	1,83150	1,82815	1,82482	1,82149	0,54
n	+0,000	+0,001	+0,002	+0,003	+0,004	+0,005	+0,006	+0,007	+0,008	+0,009	n

1172.– MODO DE CALCULAR LOS RECÍPROCOS DE MÁS DE TRES CIFRAS SIGNIFICATIVAS. *Ejemplo.* Buscar el recíproco de **0,8374.**

Buscamos los dos recíprocos siguientes: **rec** 0,837 = 1,19474

rec 0,838 = 1,19332 **dif** = 142

dif. (*diferencia entre las terminaciones de ambos recíprocos*).

Se multiplica la **dif.** por 4 (última cifra del número dado): $142 \times 4 = 568$.

(Continuación)

Números recíprocos

n	+0,000	+0,001	+0,002	+0,003	+0,004	+0,005	+0,006	+0,007	+0,008	+0,009	n
0,55	1,81818	1,81488	1,81159	1,80832	1,80505	1,80180	1,79856	1,79533	1,79211	1,78891	0,55
0,56	1,78571	1,78253	1,77936	1,77620	1,77305	1,76991	1,76678	1,76367	1,76056	1,75747	0,56
0,57	1,75439	1,75131	1,74825	1,74520	1,74216	1,73913	1,73611	1,73310	1,73010	1,72712	0,57
0,58	1,72414	1,72117	1,71821	1,71527	1,71233	1,70940	1,70648	1,70358	1,70068	1,69779	0,58
0,59	1,69492	1,69205	1,68919	1,68634	1,68350	1,68067	1,67785	1,67504	1,67224	1,66945	0,59
0,60	1,66667	1,66389	1,66113	1,65837	1,65563	1,65289	1,65017	1,64745	1,64474	1,64204	0,60
0,61	1,63934	1,63666	1,63399	1,63132	1,62866	1,62602	1,62338	1,62075	1,61812	1,61551	0,61
0,62	1,61290	1,61031	1,60772	1,60514	1,60256	1,60000	1,59744	1,59490	1,59236	1,58983	0,62
0,63	1,58730	1,58479	1,58228	1,57978	1,57729	1,57480	1,57233	1,56986	1,56740	1,56495	0,63
0,64	1,56250	1,56006	1,55763	1,55521	1,55280	1,55039	1,54799	1,54550	1,54321	1,54083	0,64
0,65	1,53846	1,53610	1,53374	1,53139	1,52905	1,52672	1,52439	1,52207	1,51976	1,51745	0,65
0,66	1,51515	1,51286	1,51057	1,50830	1,50602	1,50376	1,50150	1,49925	1,49701	1,49477	0,66
0,67	1,49254	1,49031	1,48810	1,48588	1,48368	1,48148	1,47299	1,47710	1,47493	1,47275	0,67
0,68	1,47059	1,46843	1,46628	1,46413	1,46199	1,45985	1,45773	1,45560	1,45349	1,45138	0,68
0,69	1,44928	1,44718	1,44509	1,44300	1,44092	1,43885	1,43678	1,43472	1,43266	1,43062	0,69
0,70	1,42857	1,42653	1,42450	1,42248	1,42045	1,41844	1,41643	1,41443	1,41243	1,41044	0,70
0,71	1,40845	1,40647	1,40449	1,40252	1,40056	1,39860	1,39665	1,39470	1,39276	1,39082	0,71
0,72	1,38889	1,38696	1,38504	1,38313	1,38122	1,37931	1,37741	1,37552	1,37363	1,37174	0,72
0,73	1,36986	1,36799	1,36612	1,36426	1,36240	1,36054	1,35870	1,35685	1,35501	1,35318	0,73
0,74	1,35135	1,34953	1,34771	1,34590	1,34409	1,34228	1,34048	1,33869	1,33690	1,33511	0,74
0,75	1,33333	1,33156	2,32979	1,32802	1,32626	1,32450	1,32275	1,32100	1,31926	1,31752	0,75
0,76	1,31579	1,31406	1,31234	1,31062	1,30890	1,30719	1,30548	1,30378	1,30208	1,30039	0,76
0,77	1,29870	1,29702	1,29534	1,29366	1,29199	1,29032	1,28866	1,28700	1,28535	1,28370	0,77
0,78	1,28205	1,28041	1,27877	1,27714	1,27551	1,27389	1,27226	1,27065	1,26904	1,26743	0,78
0,79	1,26582	1,26422	1,26263	1,26103	1,25945	1,25786	1,25628	1,25471	1,25313	1,25156	0,79
0,80	1,25000	1,24844	1,24688	1,24533	1,24378	1,24224	1,24068	1,23919	1,23762	1,23609	0,80
0,81	1,23457	1,23305	1,23153	1,23001	1,22850	1,22699	1,22549	1,22399	1,22249	1,22100	0,81
0,82	1,21951	1,21803	1,21655	1,21507	1,21359	1,21212	1,21065	1,20919	1,20773	1,20627	0,82
0,83	1,20482	1,20337	1,20192	1,20048	1,19904	1,19760	1,19617	1,19474	1,19332	1,19190	0,83
0,84	1,19048	1,18906	1,18765	1,18624	1,18483	1,18343	1,18203	1,18064	1,17925	1,17786	0,84
0,85	1,17647	1,17509	1,17371	1,17233	1,17096	1,16959	1,16822	1,16686	1,16550	1,16414	0,85
0,86	1,16279	1,16144	1,16009	1,15875	1,15741	1,15607	1,15473	1,15340	1,15207	1,15075	0,86
0,87	1,14943	1,14811	1,14679	1,14548	1,14416	1,14286	1,14155	1,14025	1,13895	1,13776	0,87
0,88	1,13636	1,13507	1,13379	1,13250	1,13122	1,12994	1,12867	1,12740	1,12618	1,12486	0,88
0,89	1,12360	1,12233	1,12108	1,11982	1,11857	1,11732	1,11607	1,11483	1,11359	1,11235	0,89
0,90	1,11111	1,10988	1,10865	1,10742	1,10619	1,10497	1,10375	1,10254	1,10132	1,10011	0,90
0,91	1,09890	1,09769	1,09649	1,09529	1,09409	1,09290	1,09170	1,09051	1,08932	1,08814	0,91
0,92	1,08696	1,08578	1,08460	1,08342	1,08225	1,08108	1,07991	1,07875	1,07759	1,07643	0,92
0,93	1,07527	1,07411	1,07296	1,07181	1,07066	1,06952	1,06838	1,06724	1,06610	1,06496	0,93
0,94	1,06383	1,06270	1,06157	1,06045	1,05932	1,05820	1,05708	1,05597	1,05485	1,05374	0,94
0,95	1,05263	1,05152	1,05042	1,04932	1,04822	1,04712	1,04603	1,04493	1,04384	1,04275	0,95
0,96	1,04167	1,04058	1,03950	1,03832	1,03734	1,03627	1,03520	1,03413	1,03306	1,03199	0,96
0,97	1,03093	1,02987	1,02881	1,02775	1,02669	1,02564	1,02459	1,02354	1,02249	1,02145	0,97
0,98	1,02041	1,01937	1,01833	1,01729	1,01626	1,01523	1,01420	1,01317	1,01215	1,01112	0,98
0,99	1,01010	1,00908	1,00806	1,00705	1,00604	1,00503	1,00402	1,00301	1,00200	1,00100	0,99
n	+0,000	+0,001	+0,002	+0,003	+0,004	+0,005	+0,006	+0,007	+0,008	+0,009	n

Se anula la última cifra de este resultado: 568 <> 57

Se resta este último resultado, de la terminación del recíproco de 0,837:

rec. 0,837 = 1,19474
—57

rec. 0,8374 = **1,19417**

EL TRABAJO QUE ACABAMOS DE EFECTUAR ES LO QUE SE DENOMINA **interpolación.**

NOTA. – Si el número dado tuviese cinco cifras, la *dif.* se multiplica por las dos últimas cifras del número dado, y a este producto se le anulan las dos últimas cifras.

FISICA GENERAL

VII.º Metrotecnia

1.º – Prenociones.

1173. – **Metrotecnia** es el arte de medir.

Constituye la parte práctica de la Metrología.

1174. – En el material hasta aquí desarrollado, ya hemos tratado *ex-profeso* y *ocasionalmente* muchos de los asuntos referentes directa o indirectamente al tema de nuestro epígrafe.

2.º – Medición de las longitudes.

1175. – Al hablar de la medición (**203** y sigs.) hemos recurrido a ejemplos de medidas de longitudes.

Aquí nos resta decir que:

Para medir una longitud (figs. 66 y 68):

Se transporta sucesivamente sobre dicha longitud otra longitud conocida, contando el número de veces que esta segunda longitud cabe en la primera.

La longitud que se usa para medir, puede ser una unidad conocida, o una fracción de la misma.

1176. – Las unidades básicas de longitud son:

En el SISTEMA DECIMAL: el **metro.**

En el SISTEMA TÉCNICO: el **metro.**

En el SISTEMA CEGESIMAL: el **centímetro.**

En el SISTEMA *M. T. S.*: el **metro.**

Para los nombres de los múltiplos y submúltiplos del *metro* se recurre a los prefijos: MIRIA (10.000), KILO (1.000), HECTO (100), DECA (10), DECI (0,1), CENTI (0,01), MILI (0.001)

1177. – Para medir líneas curvas se puede recurrir a cuatro procedimientos: a) el ALGÉBRICO-GEOMÉTRICO, b) el GEOMÉTRICO, c) el EMPÍRICO, d) el FÍSICO o *directo*.

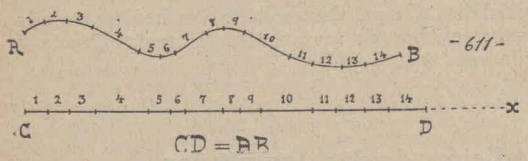
Seguimos el procedimiento **algébrico - geométrico,** cuando calculamos la longitud de la curva, basándonos en la longitud de una o más rectas relacionadas con ella, y aplicamos luego una fórmula conocida.

Ej.: cuando calculamos la longitud de la circunferencia aplicando la fórmula:

$$c = 2\,r\,\pi$$

1178. – Seguimos el procedimiento **geométrico,** cuando rectificamos la curva, midiendo luego la recta o quebrada resultante.

Ej.: Medir la curva **ABC** (fig. 611).



-611-

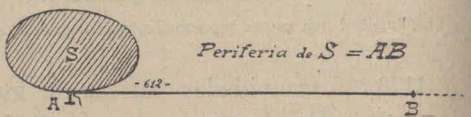
Se descompone en porciones sensiblemente rectas, las cuales después se transportan sobre un eje rectilíneo **oX.** Etc.

NOTA. – Si las porciones en que se descompuso la curva **AB** fueran mutuamente iguales, se obtiene su longitud aplicando la fórmula:

$$l = \mathbf{m}.\,n$$

l (longitud de **AB**) **m** (módulo de descomposición) n (número de partes obtenidas)

1179. – Seguimos el procedimiento **empírico** cuando sobreponemos a la curva un hilo inextensible; extendiéndolo luego y midiéndolo (fig. 612).



-612-

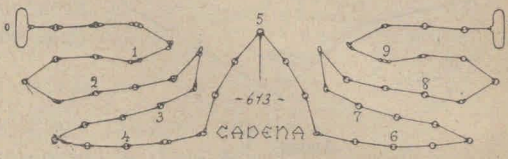
1180. – Seguimos el procedimiento **físico** o DIRECTO, cuando recurrimos a los utensilios y APARATOS DE MEDIDA.

Este sistema se aplica especialmente a la medición de líneas rectas.

Los utensilios de medida de longitudes son: la VARA MÉTRICA, el METRO PLEGADIZO, la CINTA MÉTRICA, la CADENA etc. (fig. 613)



Más adelante hablaremos de los aparatos de medida.



3.º – Medición de las áreas.

1181. – Las unidades básicas de áreas son:

En el SISTEMA DECIMAL: el **metro cuadrado** (m^2) y el **decámetro cuadrado** o ÁREA (a).

En el SISTEMA TÉCNICO: el **metro cuadrado** (m^2)

En el SISTEMA CEGESIMAL: el **centímetro cuadrado** (cm^2)

En el SISTEMA *M. T. S*: el **metro cuadrado** (m^2)

1182. – Para medir las áreas se puede recurrir a cuatro procedimientos: a) el ALGÉBRICO-GEOMÉTRICO, b) el GEOMÉTRICO, c) el EMPÍRICO, d) el FÍSICO.

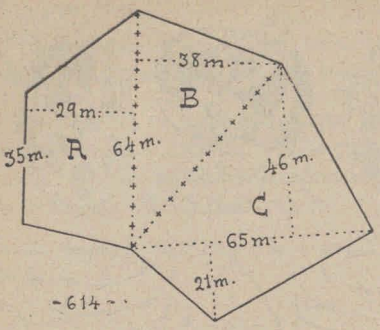
Seguimos el procedimiento **algébrico-geométrico** cuando calculamos el área de una superficie, basándonos en la longitud de una o más líneas relacionadas con ella, y aplicamos luego una fórmula conocida.

Ej.: cuando calculamos el área de un trapecio aplicando la fórmula:

$$\text{Trap.} = \tfrac{1}{2}\,(a+b)\,h$$

1183. – De hecho en el procedimiento *algébrico-geométrico* siempre se obtiene el área mediante el PRODUCTO DE DOS LONGITUDES.

La teoría de este procedimiento se ha explicado *ocasionalmente* en (907 - 908)



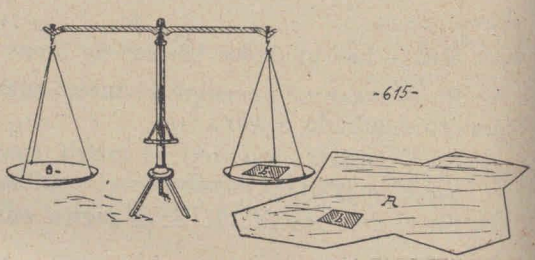
-614-

1184. – Seguimos el procedimiento **geométrico,** cuando descomponemos la superficie que vamos a medir, en otras superficies de forma definida; valuando luego las áreas de éstas y sumándolas. (fig. 614)

Áreas parciales
$$\begin{cases} 2A = (35+64)\times 29 = 2871 \text{ m}^2 \\ 2B = 64\times 38 = 2432 \text{ m}^2 \\ 2C = 65\times(46+21) = 4355 \text{ m}^2 \end{cases}$$

Area total
$$\begin{cases} 2\,(A+B+C) = 2871+2432+4355 = 9658 \text{ m}^2 \\ A+B+C = 9658/2 = \mathbf{4829\ m^2} \end{cases}$$

1185.–VALUACIÓN EMPÍRICA DE ÁREAS (mediante la pesada) (fig. 615).

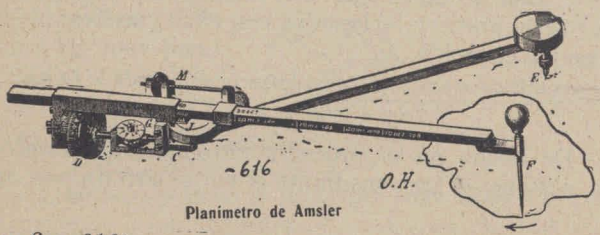


-615-

Se dibuja en una cartulina la superficie en cuestión **A**, y se recorta. Después se recorta de la misma cartulina un cuadrado **b** (de 1 cm² o de 1 dm²).

Se pesan **A** y **b** y se tendrá la siguiente proporción:

$$\frac{b}{A} = \frac{1}{x} \qquad x = \frac{A}{b} \quad (cm^2 \text{ o } dm^2)$$



-616

Planimetro de Amsler

1186. – VALUACIÓN FÍSICA DE ÁREAS. — Se recurre al planímetro (figs. 322 h. 324 y fig. 616)

NOTA. — Las ilustraciones señaladas con **O. H.**, han sido copiadas de un catálago de la antigua casa OTTO HESS.

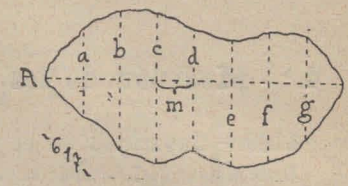
1187. – Fórmula Simpson. — El sistema geométrico de valuación de áreas dió por resultado un sistema algébrico — geométrico, aplicable a las figuras irregulares.

Es este el que se resuelve por la llamada «FÓRMULA SIMPSON» (fig. 617)

Se traza una recta arbitraria **AB**, que divida la figura en dos partes cualesquiera.

Se equivide **AB** mediante un módulo arbitrario **m**.

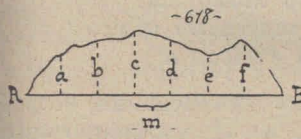
Por los puntos de división se trazan los segmentos **a, b, c, d**, etc., perpendiculares a **AB**.



Para valuar el área se aplica la fórmula:

Area = m (a + b + c + d + e...)

Para que el trabajo resulte suficientemente exacto, se requiere que las porciones en que queda descompuesta la periferia, sean SENSIBLEMENTE RECTAS.



1188. CASOS PARTICULARES DE LA FÓRMULA SIMPSON

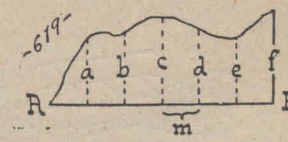
1er. Caso (fig. 618).

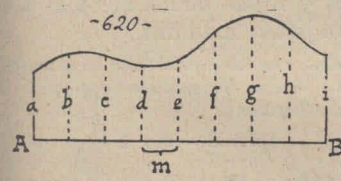
Cuando una figura tiene un costado rectilíneo, se puede tomar dicho costado como eje **AB**.

2.° *Caso* (fig. 619).

Aquí la fórmula anterior queda sustituída por esta otra:

Area = m(a+b+c...+ ½ f).





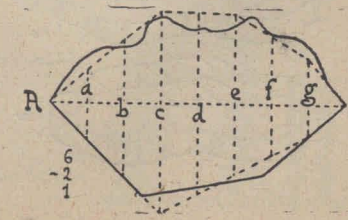
3er Caso (fig. 620).

Aquí se aplica la fórmula siguiente:

Area = m(½a+b+c...+½ i)

4.° Caso (fig. 621).

Cuando la periferia es muy irregular o cuando los vértices del borde poligonal no coinciden con las rectas **a, b, c**, etc., se debe rectificar dicha periferia, en forma tal, que las



pérdidas y ganancias sean sensiblemente iguales, y de modo que cada vértice de la nueva poligonal coincida con alguno de los segmentos a, b, c...

5.° Caso (fig. 449 y 450)

El sistema adoptado en el cálculo infinitesimal para valuar las áreas subtendidas por las gráficas (**766 h.** *4.° Caso* **769**) es uno de los procedimientos basados en el sistema Simpson.

4.° – Medición de los volúmenes y capacidades.

1189. – **Capacidad** es el volumen interno de una vasija

De modo que la diferencia entre las medidas de volumen y de capacidad es SIMPLE CUESTIÓN DE NOMBRE.

1190. – Las unidades básicas de volumen y capacidad son:

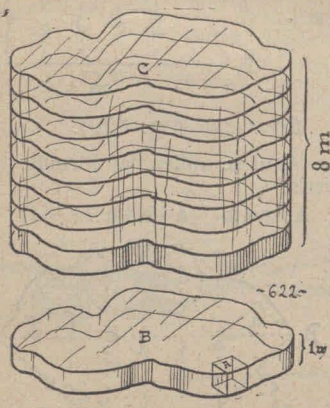
En el SISTEMA DECIMAL: el **metro cúbico** (m^3) llamado también ESTÉREO; y el DECÍMETRO CÚBICO o **litro** (lt).

En el SISTEMA TÉCNICO: el **metro cúbico** (m^3)

En el SISTEMA CEGESIMAL: el **centímetro cúbico** (cm^3)

En el SISTEMA *M. T. S.* el **metro cúbico** (m^3)

1191. – Para medir los volúmenes y capacidades, se puede recurrir a tres procedimientos: a) el ALGÉBRICO GEOMÉTRICO, b) el GEOMÉTRICO, c) el EMPÍRICO.



1192. – Seguimos el procedimiento **algébrico geométrico**, cuando calculamos el volumen o capacidad basándonos en las longitudes y áreas de los elementos de los objetos medidos.

Ej.: cuando calculamos la capacidad de una vasija prismática aplicando la fórmula siguiente:

$$\text{Volumen} = B \times h$$

1193. – De hecho en el procedimiento *algébrico geométrico*, siempre se obtiene el volumen mediante el PRODUCTO DE TRES LONGITUDES o el PRODUCTO DE UN ÁREA POR UNA LONGITUD.

Efectivamente:

Cuando valuamos el área de la BASE del cuerpo **C** en realidad estamos valuando el volumen de la REBANADA **B**.

Y ya sabemos por (**907, 908 y 1183.**) que este trabajo se obtiene mediante el producto de dos longitudes.

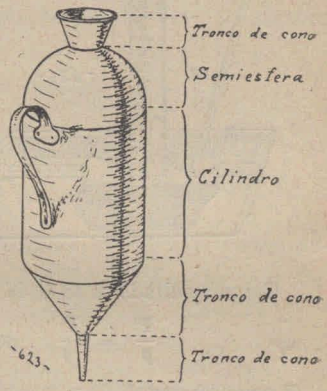
Conocido el volumen de **B**, se obtiene el de **C** multiplicando dicha medida por el *número de rebanadas.*

En nuestro caso:

C = **B**×8 8 = (*altura del cuerpo* **C**)

1194. Seguimos el procedimiento **geométrico** cuando descomponemos el cuerpo o capacidad que vamos a medir, en otros cuerpos de forma definida.

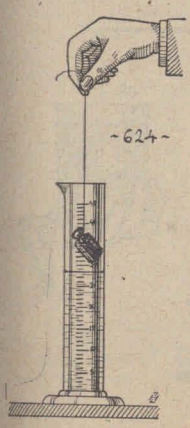
Ej.: Al valuar la capacidad de la vasija de la fig. 623



1195. – PROCEDIMIENTOS EMPÍRICOS O FÍSICOS DE VALUACIÓN DE VOLÚMENES Y CAPACIDADES.

Pueden reducirse a cuatro:

a) *por desalojo de agua;*
b) *por pesada;*
c) *por desalojo y pesada;*
d) *basándose en la densidad del cuerpo.*

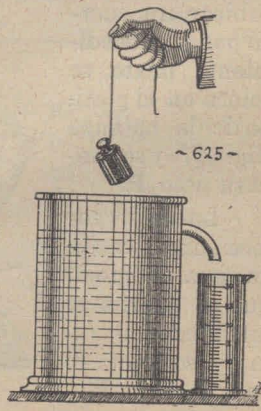


1196. – Para cubicar un cuerpo por el primer procedimiento, se recurre a la MEDIDA DEL AGUA DESALOJADA POR ÉL (fig. 624).

Se introduce un cuerpo en el agua contenida en una probeta graduada.

La diferencia entre ambos niveles del agua, nos da el volumen buscado.

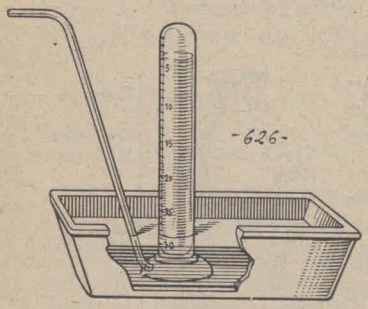
NOTA.– El procedimiento de FRASCO VERTEDERO (fig. 625) es una modificación del anterior.



Se recurre a él cuando el cuerpo no cabe en la probeta; y en ciertas, experiencia con la balanza hidrostática.

Para cubicar una vasija por un sistema análogo al anterior se llena dicha vasija de agua, la cual luego se vierte en una probeta graduada.

1197. – Para valuar el volumen de un gas, mediante el desalojo del agua, se recurre a la cuba neumática (fig. 626).


-626-

Se llena de agua o mercurio una probeta graduada, y se coloca invertida en una cuba llena del mismo líquido.

Luego se envía el gas a la probeta, mediante un tubo de goma o de vidrio convenientemente doblado. Etc.

1198 – Para cubicar un cuerpo mediante la **pesada**, se pesa dicho cuerpo y luego se pesa otro cuerpo de la misma sustancia y de volumen conocido.

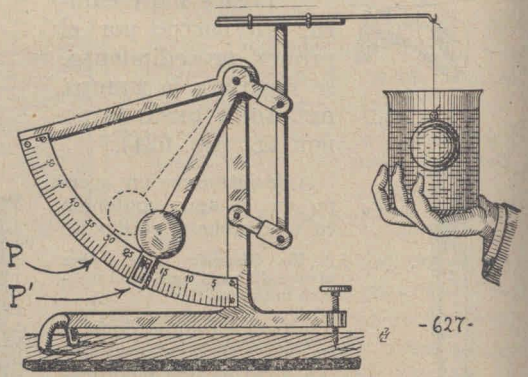
Como resultado se tiene la proporción siguiente:

$$\frac{P}{p} = \frac{V}{v} \quad \text{de donde} \quad V = \frac{P.v}{p}$$

P peso (del cuerpo)
V (volumen de cuerpo)
p (peso del patrón de cálculo)
v (volumen del patrón de cálculo)

1199. – Para cubicar un cuerpo por el **procedimiento mixto**, se coloca en el platillo de la balanza (fig. 627) y se anota su peso **P**.

Luego se coloca una vasija de agua de modo que el cuerpo se introduzca en ésta; y se anota su peso ficticio **P'**.



-627-

Se efectúa $P - P' = p$

La diferencia **p** *es* NUMÉRICAMENTE *igual al volumen del cuerpo.*

Para saber interpretar el número que se obtiene al valuar el volumen con el sistema anterior, léase lo que se indica en (**1202**).

1200. – Para cubicar una vasija por este procedimiento:

a) Se coloca la vasija vacía en un platillo de la balanza, y se tara hasta equilibrar en cero.

b) Se llena de agua la vasija, y se pesa dicha agua.

El peso del agua contenida en la vasija es NUMÉRICAMENTE *igual a la capacidad de la vasija.*

1201. – Para cubicar un cuerpo basándose en su densidad, se aplica la fórmula

$P = V \cdot d$ de la que se deduce la siguiente; $V = \frac{P}{d}$

Esto nos indica que:

a) Se pesa el cuerpo.

b) Se divide su peso por su densidad.



1202. – Para los cálculos de volumen mediante cualquiera de los dos últimos procedimientos (**1196 h. 1200**) hay que tener bien presente las relaciones siguientes:

CORRELACIÓN DE LAS MEDIDAS DE VOLUMEN, CAPACIDAD Y PESO

Volumen	m^3	dm^3	cm^3
Capacidad	Kl	lt	ml
Peso	Tn / m	Kg	gr

Esta tabla nos recuerda que:

1.° – Es lo mismo decir m^3 que decir **Kl**

« « « « dm^3 « « lt

« « « « cm^3 « « **ml**

2.° – « « « « m^3 de agua **Tn / m**

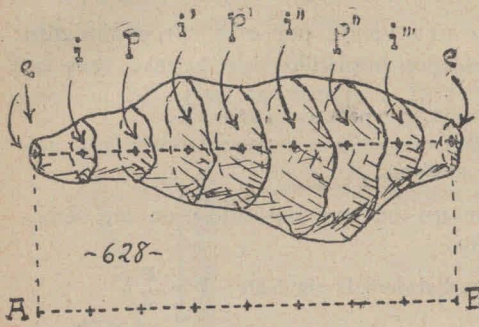
« « « « dm^3 « « **Kg**

« « « « cm^3 « « **gr**

NOTA 1.° En la casilla "Peso" ,se sobreentiende: « agua **destilada a 4°** »

2.° Las demás medidas no señaladas en esta tabla, deben convertirse a una de estas antes de proceder a calcular.

1203. – Cubicación algébrico-geométrica de cuerpos irregulares. (fig. 628)



Se divide el eje **AB** en un número impar de partes iguales. Y se mide el área de las secciones correspondientes a dichas divisiones:

e, e = secciones extremas.
i, i, i, = secciones de lugar impar.
p, p, p, = secciones de lugar par.
E = suma de las **e**.
I = suma de las **i**.
P = suma de las **p**.
L = longitud de **AB**

FÓRMULA $$V = \frac{(E + 2I + 4P)\,L}{3}$$

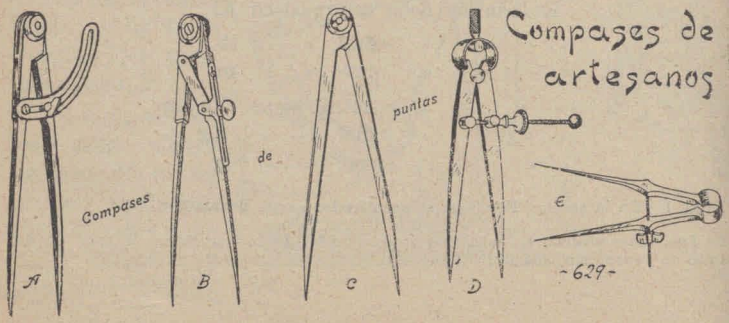
5.° – Aparatos para medir y transportar longitudes.

1204. – Además de los utensilios citados en (**1180**), existen aparatos muy variados, siendo los principales:

I.) Los compases de transporte y de medida (de formas muy variadas.)

Atendiendo a su forma y uso, pueden dividirse en tres grupos:

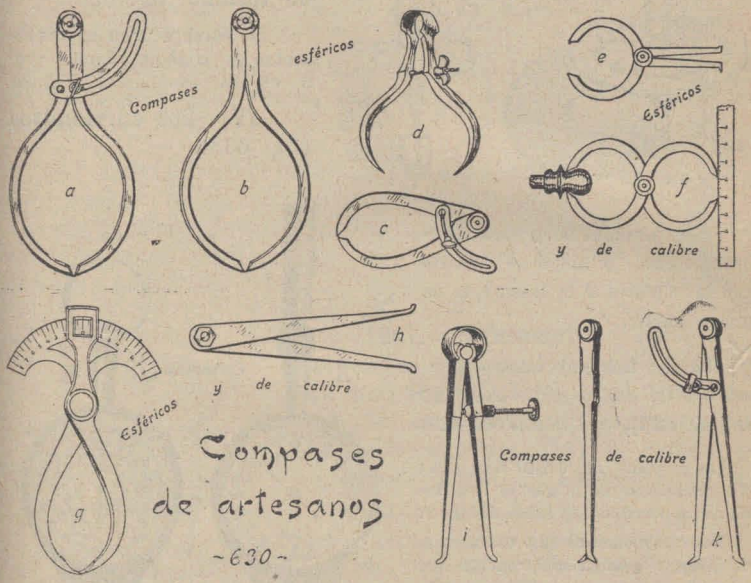
1.° COMPASES DE PUNTAS, *para transporte de longitudes y trazado de arcos* (fig. 629)



2.° COMPASES DE ESPESORES O DE CAPACIDAD, *para medir o comprobar el ancho de los cuerpos*

Reciben también el nombre de «COMPASES ESFÉRICOS» (fig. 630)

3.° COMPASES DE CALIBRE, *para medir o comprobar el ancho de las cavidades (fig. 630)*



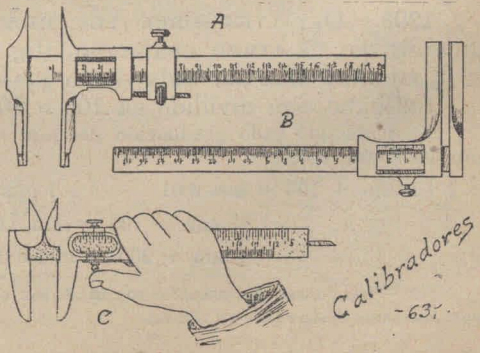
Como se ve en la fig. 630, muchos compases son mixtos, sirviendo para espesores y para cavidades.

LÉXICO. **Calibre** *es el ancho de una cavidad cilíndrica; pero en Artes y Oficios se ha dado en llamar* CALIBRE *el espesor de los alambres y varillas. De modo que* **compás de calibre,** *es desde ese punto de vista, también el compás de espesores.*

II.) Los calibradores (fig. 631).

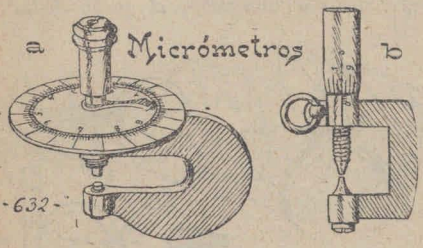
El **A** *sirve para espesores y para el ancho de las cavidades.*

El **B** *sirve sólo para espesores.*



El **C** *sirve para espesores, para el ancho de las cavidades y para la profundidad de las mismas.*

Para medir la profundidad de las cavidades, se introduce en ellas la varilla que en la fig. se ve a la derecha del aparato.

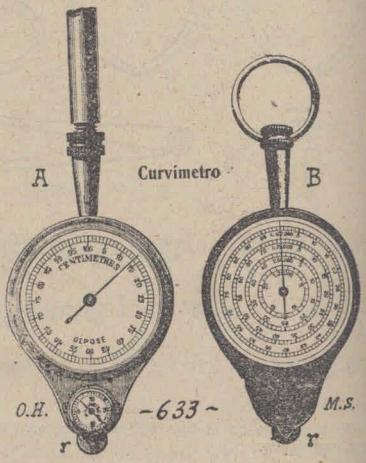


III.) Los micrómetros de tornillo (fig. 632).

De éstos, el **a** es un micrómetro *de limbo graduado;* y el **b** es un *micrómetro Pálmer.*

IV) Los curvímetros (fig. 633).

Para usarlos, se pone la aguja en CERO, y luego se recorre con la ruedita **r** la línea que se quiere medir.



1205. – Los curvímetros pueden ser de dos categorías: a) DE MEDIDA REAL, b) CAMPILÓMETROS.

Los primeros (fig. 633-**A**) tienen una sola graduación en la que se leen los milímetros o centímetros recorridos por **r**.

Los **campilómetros** (fig. 633-**B**) tienen diversas graduaciones, en las que se lee la medida que corresponde a la escala que sirvió de base a la construcción del diseño que se está midiendo.

1206.– DETALLES SOBRE LOS MICRÓMETROS. 1.° En el MICRÓMETRO DE LIMBO GRADUADO, (fig. 632-**a**) el tornillo, baja ½ mm. o 1 mm. por cada vuelta que da, según los aparatos. Su limbo está dividido en 100 o 200 partes iguales.

De modo que cada graduación del limbo puede corresponder, según los aparatos a:

$$1 \text{ mm} \div 100 = \text{mm } 0{,}01 \qquad 1 \text{ mm} \div 200 = \text{mm } 0{,}005$$

$$\tfrac{1}{2} \text{ mm} \div 100 = \text{mm } 0{,}005$$

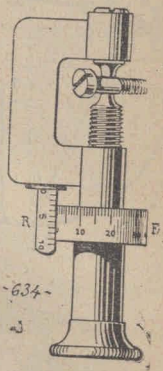
$$\tfrac{1}{2} \text{ mm} \div 200 = \text{mm } 0{,}0025$$

NOTA.— Las ilustraciones señaladas con **M. S.** han sido copiadas del catálogo de la MASSTABFABRIK SCHAFFHAUS EN (Suiza).

2.° En el MICRÓMETRO PÁLMER (fig. 632-b) a cada vuelta del tornillo corresponde ½ *mm.* ó *1 mm.* de avance.

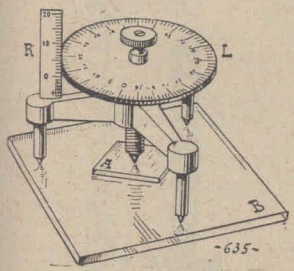
Y como el tambor está equidividido en *10* ó *20 partes*, cada paso del tambor equivale a *mm* $^1/_{40}$ ó $^1/_{20}$ ó $^1/_{10}$ de avance, según los aparatos.

Los pálmer que tienen tambor como en la fig. 634, llegan a apreciar fracciones pequeñas como los micrómetros de limbo.



3.° Existe un micrómetro especial de tornillo, llamado ESFERÓMETRO, que luego describiremos.

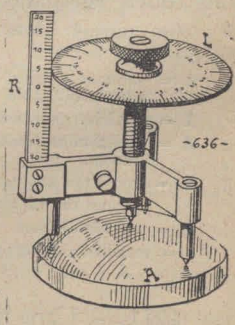
4.° Hay además, micrómetros muy variados, que se basan en recursos distintos de los anteriores, siendo los más precisos, los llamados «MICRÓMETROS OCULARES», cuyo estudio pertenece a la *Óptica*.



1207. – Esferómetro. Es un micrómetro especial, cuya disposición lo habilita para dos usos distintos: a) la MEDICIÓN DEL ESPESOR DE LAS LÁMINAS (fig. 635); b) la VALUACIÓN DEL RADIO DE LAS SUPERFICIES ESFÉRICAS (fig. 636).

Consta de un trípode equilátero, cuyo centro está atravesado por un tornillo micrométrico de limbo.

Cuando el limbo está en «CERO», el extremo del tornillo se halla en el mismo plano del triángulo formado por las puntas de las patitas del trípode.



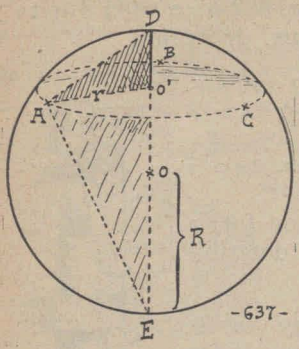
1208. – VALUACIÓN DEL RADIO DE LA ESFERA, MEDIANTE EL ESFERÓMETRO. — Se aplica la fórmula:

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{h} + h\right)$$

R (*radio de la esfera*)

r (*constante del aparato, que equivale al radio del triángulo equilátero de la base del trípode*).

h (*altura medida con el esferómetro*)



-637-

Demostración (fig. 637).

Tenemos
- **ADE** = triáng. rectáng. en **A**
- **DE** (hipotenusa) = **2R**
- **Do'** = **h**
- **Eo'** = **2R — h**
- **Ao'** = **r**

Pero **r** es la "altura sobre la hipotenusa"

$$\text{P. l. t.} \quad \frac{h}{r} = \frac{r}{2R-h}$$

$$\text{de donde} \quad h\,(2R - h) = r^2$$

$$2R - h = \frac{r^2}{h}$$

$$2R = \frac{r^2}{h} + h$$

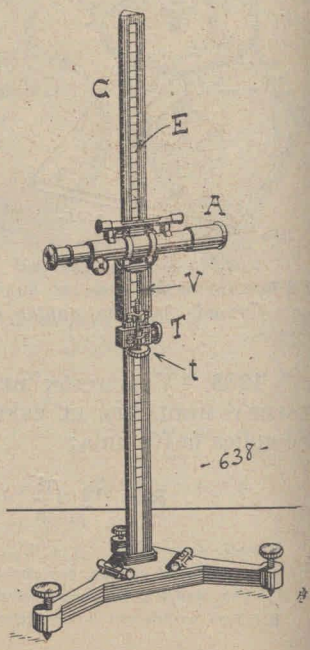
$$R = \tfrac{1}{2}\left(\frac{r^2}{h} + h\right) \qquad \text{L. Q. Q. D.}$$

1209. – OTROS APARATOS PARA MEDIR LONGITUDES.— Merecen citarse: el *catetómetro*, los *comparadores*, los *telémetros* y la *máquina de dividir*.

1210. – Catetómetro (fig. 638) Sirve para medir a distancia las longitudes verticales.

Sus piezas esenciales son las siguientes:

- **C** = columna vertical que asienta sobre un trípode nivelable.
- **A** = catalejo, perpendicular a la columna.
- **E** = escala milimétrica, paralela a la columna.
- **V** = vernier o nonio, para medir las fracciones de milímetro.
- **T** = tornillo fijador.
- **t** = tornillo micrométrico de ajuste.



-638-

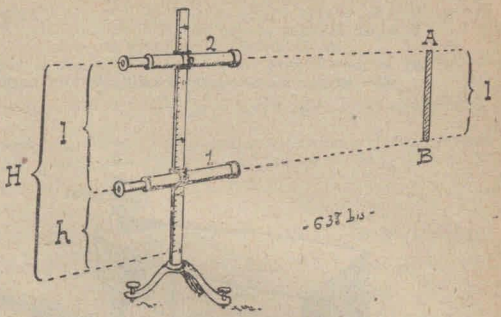
1211. – USO DEL CATETÓMETRO (638 bis).

Se corre el catalejo hasta que el punto **A** se vea en el centro del campo visual; y se anota la altura **H**.

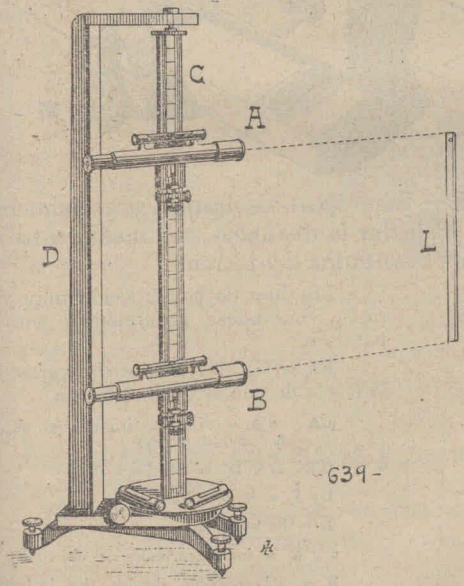
Lo mismo se hace con **B**, anotando **h**.

Tendremos que:

$$l = H - h$$



1212. – Comparadores.— Son aparatos que miden longitudes a distancia, comparándolas con la unidad elegida, la cual se halla también a distancia, y paralela a aquélla.



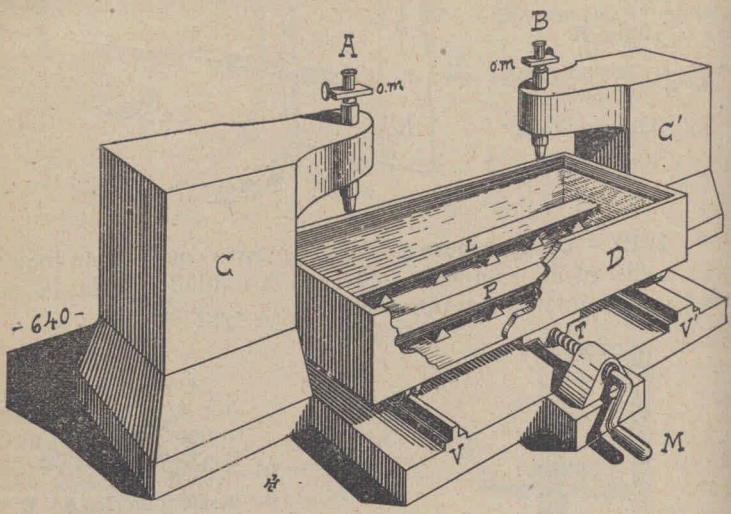
COMPARADOR VERTICAL (fig. 639). Se parece al catetómetro, del que se diferencia en lo siguiente: 1.° tiene dos catalejos mutuamente paralelos **A** y **B**; 2.°– la columna **C** gira sobre su eje vertical sostenida por el soporte **D**.

La escala de la columna **C** es innecesaria cuando se usa el aparato como COMPARADOR. Sirve para los casos en que se usa como CATETÓMETRO.

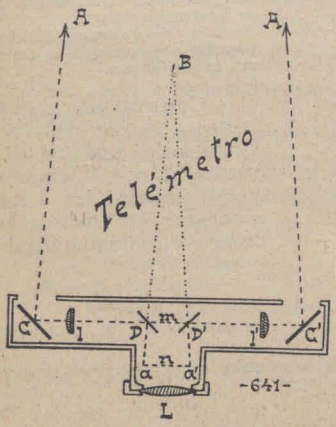
COMPARADORES HORIZONTALES.– (fig. 640) Son aparatos de suma precisión, usados en las oficinas de pesas y medidas para comparar los metros patrones y sus submúltiplos.

C = columnas de mampostería que sostienen sendos anteojos **A** y **B**, mutuamente paralelos.
R = carro que contiene las dos reglas **P** y **L**, colocadas sobre prismas triangulares
L = regla que se quiere medir.
P = patrón de medida.
(*Estas dos reglas están sumergidas en agua que se mantiene a temperatura fija*)

V y V' = vías
V *sujeta lateralmente las ruedas de la izquierda. En cambio* V' *deja que resbalen las de la derecha al dilatarse el carro.*
M = manija para correr el carro mediante el sinfín T.
o. m = ocular micrométrico o «MICRÓMETRO OCULAR».



1213. – Telémetros.— Son aparatos usados especialmente por los militares para calcular la distancia que media entre el observador y los puntos avanzados del terreno.



Los hay de construcción muy variada, basándose generalmente en la paralaje.

En la fig. 641, damos el esquema de la teoría de uno de estos aparatos.

CA y **C'A** = visuales dirigidas al objeto **A** (en lontananza)

C,**C'**, **D** y **D'** = espejos

l y **l'** = lentes objetivos

L = lente ocular

a y **a'** = imágenes reales del objeto **A**

B = sobreposición de las dos imágenes virtuales.

Para operar con esta clase de telémetros, se maniobra con el tornillo regulador, hasta sobreponer las dos imágenes virtuales.

Siendo *triáng.* **CAC'** semej. a *triáng.* a **aBa'**

se tendrá $\alpha = \beta$

y siendo **m** y **n** dos longitudes constantes en cada aparato, se conocerá la distancia **AC**, recurriendo a un problema de Trigonometría.

NOTA. - *El operador no recurre a la Trigonometría, porque los aparatos ya tienen señalada en una escala la distancia* **AC**, *mediante un índice, que se corre a medida que el operador maniobra con el tornillo regulador.*

1214. – Máquina de dividir (fig. 642).— Con ella se pueden resolver tres problemas distintos: a) DIVIDIR UNA PORCIÓN DE VARA EN UN NÚMERO CUALQUIERA DE PARTES IGUALES, dejando señaladas las divisiones; b) GRADUAR UNA VARA MEDIANTE UN MÓDULO CUALQUIERA; c) MEDIR LA DISTANCIA ENTRE LOS EXTREMOS DE UNA RECTA.

Partes esenciales del aparato:

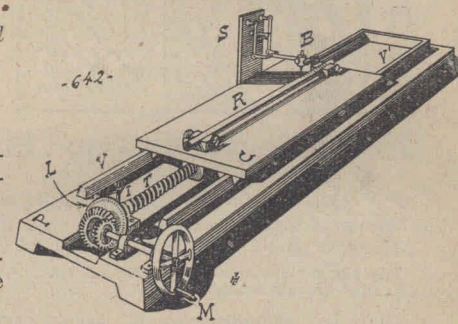
P = plataforma

V y **V'** = vías

C = carro que se desliza a lo largo de la plataforma

S = soporte fijo.

T = tornillo micrométrico fijo, que al girar, hace correr el carro



Por cada vuelta del tornillo, el carro avanza o retrocede 1 mm.

L = Limbo del tornillo. **I** = índice del limbo.

M = manija para hacer girar el tornillo.

B = buril para marcar las divisiones en la regla.

6.° - Aparatos especiales para valuar volúmenes.

1215. – Volumenómetros son aparatos especiales para cubicar cualquier clase de cuerpos, particularmente los diminutos, los porosos y los pulverulentos.

Los principales *volumenómetros* son: el de SAY (denominado «*estereómetro*» por su autor), el de REGNAULT y el de PAALZOW.

1216. – Los tres aparatos citados se basan en principios de *Neumática*; de modo que no es este el lugar donde deben estudiarse.

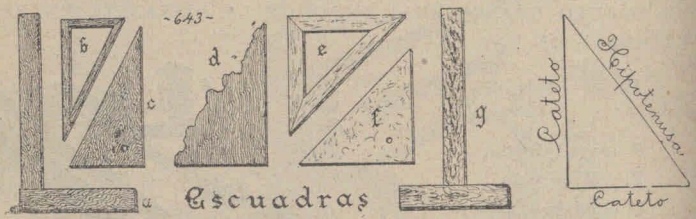
Más adelante, pues, los describiremos, y enseñaremos su manejo.

7.° – Rectificadores de direcciones y de ángulos.

1217. Los aparatos metrológicos se pueden agrupar en tres categorías: a) MEDIDORES, b) TRANSPORTADORES, c) COMPROBADORES O RECTIFICADORES.

Los primeros dan la medida de las magnitudes; los segundos copian la magnitud sin dar el resultado numérico de la medición; los terceros contienen una magnitud fija, para comprobar su existencia en muchos lugares.

1218. – Escuadras (fig. 643) *son los comprobadores de los ángulos rectos.*

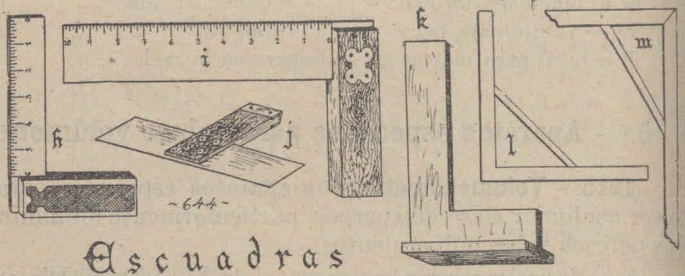


Sus partes esenciales son dos lados mutuamente perpendiculares que denominaremos CATETOS.

La recta que une los extremos de los catetos, es la hipotenusa.

Muchas escuadras carecen de hipotenusa, y las que la tienen se llaman *cartabones* O ESCUADRAS TRIANGULARES.

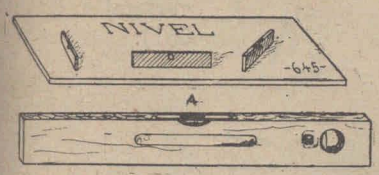
1219. Las escuadras son de diverso tamaño y forma, según el uso a que se las destine (fig. 643 y 644).

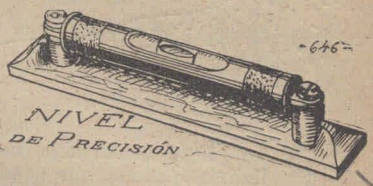


NOMENCLATURA **a** = *Regla L.* — **b** *y* **c** = *Cartabón escaleno.* — **d** = *Escuadra simple.* — **e** *y* **f** = *Cartabón isósceles.* — **g** = *Regla T.* — **h, i** *y* **j** = *Escuadras de carpintero.* — **k** = *Escuadra de precisión para mecánicos.* — **l** *y* **m** = *Escuadras de albañil y de pintor.*

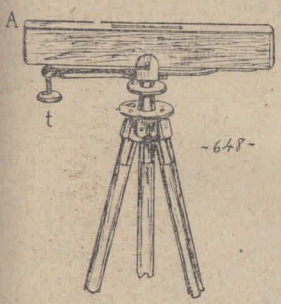
1220. – Nivel es el instrumento que sirve para comprobar si una línea o superficie es horizontal.

El principal nivel es el de burbuja (fig. 645 y 646).



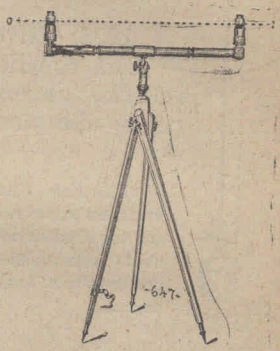


1221. – Nivel de agua es un tubo metálico de 1 m., o menos, de largo; en cuyas extremidades hay dos *vasos comunicantes* de vidrio (fig. 647).

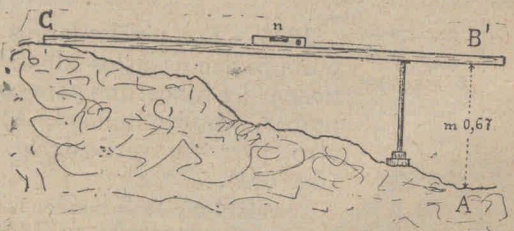


ara usarlo, se vierte en él agua coloreada hasta que el líquido sobrepase la parte metálica del aparato.

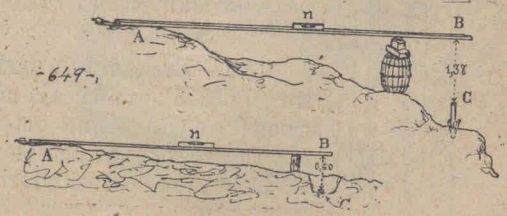
La visual **oX**, que pasa sobre las dos superficies libres del líquido, es una *línea horizontal*.

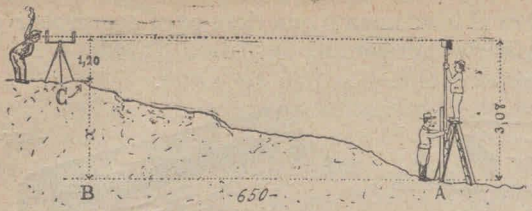


1222. – Nivel montado (fig 648) es un nivel de burbuja que sirve para sustituir el nivel de agua.



1223. – Los niveles sirven, no sólo para comprobar la horizontalidad; sino también para medir el desnivel entre dos puntos (fig. 649 y 650).





1224. – Plomada es el comprobador de las verticales (fig. 651).



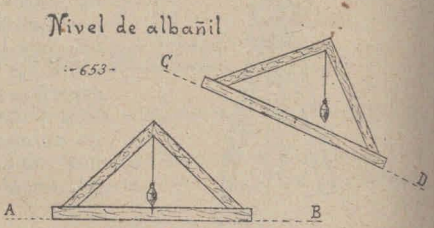
Está constituida por un cuerpo cilíndrico pesado, que pende de un hilo más o menos largo.

En la parte superior del hilo de la generalidad de las plomadas hay una pieza cilíndrica o cuadrada, del mismo ancho que el cilindro inferior (fig. 652).

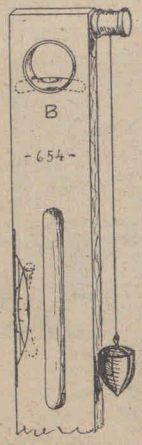


1225. – Nivel de plomada (fig.653) — Está constituido por un marco isósceles de madera, de cuyo ápice pende una plomada.

Llámasele también NIVEL DE ALBAÑIL, aunque los albañiles modernos lo están suplantando por los niveles largos de burbuja.

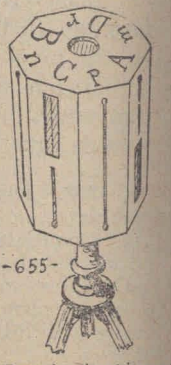


1226. – Los niveles largos de burbuja que usan los albañiles, tienen dos tubos: uno para comprobar la horizontalidad, **A**; y otro para la verticalidad, **B** (fig. 654).



Cuando el nivel coincide con la plomada, la burbuja está en el centro de **B**.

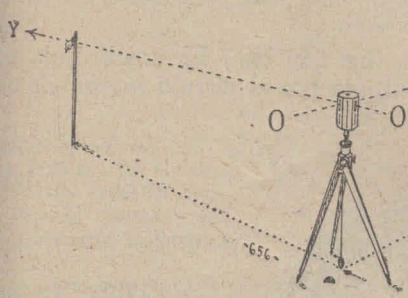
1227.– Escuadra de agrimensor (fig. 655), es una caja metálica en forma de prisma octogonal con cuatro caras principales **A**, **B**, **C**, **D**, y cuatro secundarias **m**, **n**, **p**, **r**,



Escuadra de agrimensor

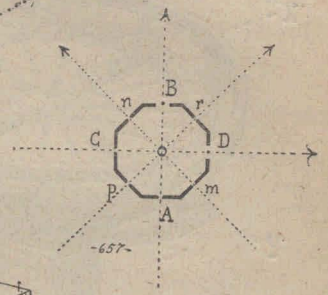
En cada cara principal hay un par de ventanas llamadas PÍNULAS (que más adelante describiremos: **1239**); y en cada cara secundaria hay una simple ranura vertical.

Este instrumento sirve para trazar y comprobar perpendiculares en los terrenos (fig. 656).



-656-

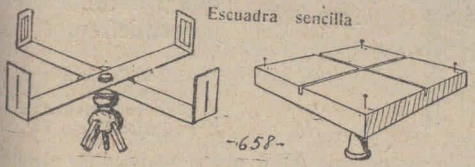
De una simple inspección de la fig. 657 se deduce que la visual que pasa por **AB** es perpendicular a la que pasa por **CD**; y que la que pasa por **mn** es perpendicular a la que pasa por **pr**.



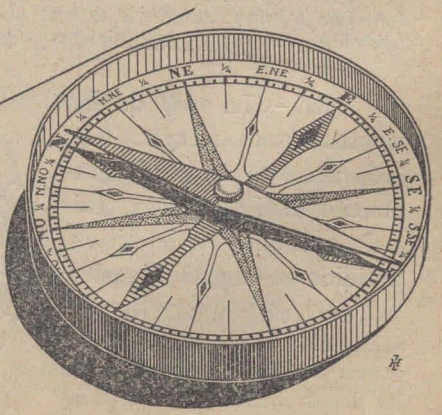
-657-

Además, los ángulos **Aom, moD, Dor, roB** etc. miden 45°.

Escuadra sencilla


-658-

1228. – ESCUADRA SIMPLIFICADA.— Cuando no se requiere mucha exactitud en las medidas, se puede improvisar una escuadra de agrimensor como se indica en la fig. 658.

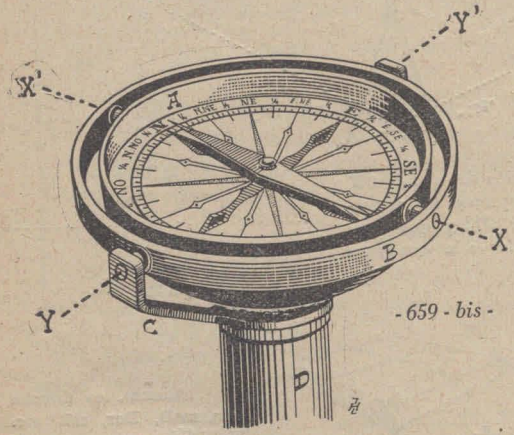


-659-

1229. – **Brújula** (fig. 659) es el aparato que sirve para determinar la dirección del meridiano magnético local.

Sus partes esenciales son: a) una caja cuadrada o circular, de madera o metal; b) un limbo colocado en el fondo de la caja, y denominado ROSA DE LOS VIENTOS; c) una aguja magnética colocada sobre un eje vertical que ocupa el centro del limbo.

1230. – **Brújula naútica** (fig. 659 bis.) Es una brújula común, cuya caja está constituída por el círculo interno de una SUSPENSIÓN CARDÁN.



- 659 - bis -

La parte inferior de la caja **A** *tiene plomo, de modo que tiende a conservar siempre la posición horizontal.*

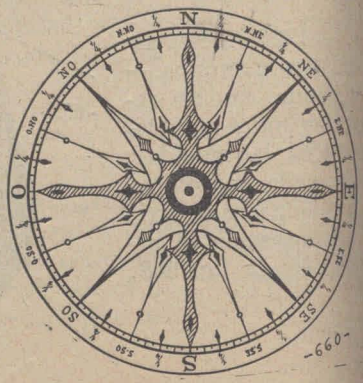
1231. – La SUSPENSIÓN CARDÁN está constituida por dos círculos **A** y **B** y una horquilla **C**; que generalmente es un semicírculo.

El anillo **A** se sostiene en **B** mediante el eje **XX'** y el anillo **B** se sostiene en **C** mediante el eje **YY'**

Esta disposición ideada en el siglo XVI por el matemático italiano Jerónimo Cardán, permite a la caja de la brújula conservar su horizontalidad a pesar de los barquinazos *y* galopes *de la embarcación.*

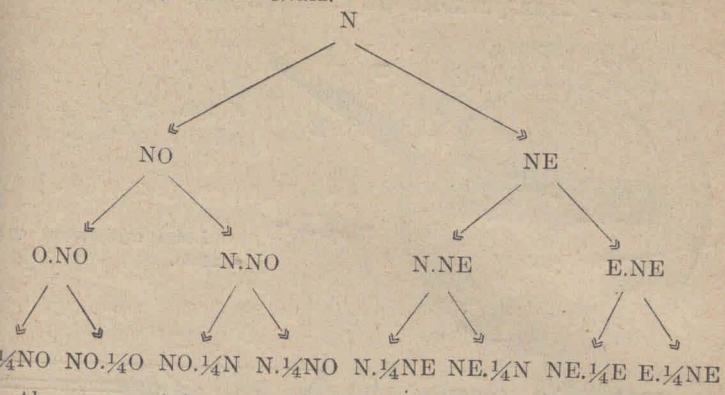
1232. – La **rosa de los vientos** o ROSA NÁUTICA (fig. 660) tiene un sistema de graduación distinto del sexagesimal, quedando en definitiva, dividido en 64 partes iguales.

Sus cuatro divisiones fundamentales corresponden a los *puntos cardinales*, obteniéndose los demás puntos por sucesivas divisiones de dos en dos.

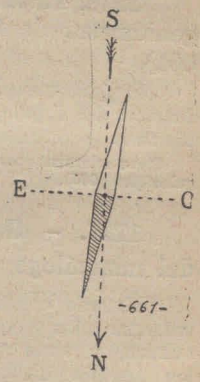


-660-

Como ejemplo de la escala de divisiones, damos el nombre de las que se hallan a derecha e izquierda del NORTE:



Algunas rosas de los vientos están equidivididas en 400 partes, correspondiendo 100 grados centesimales a cada cuadrante. Otras siguen la graduación común de los círculos, con 90° por cuadrante.

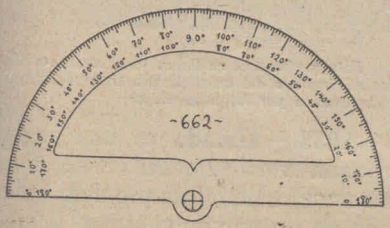


1233. – *Para el uso racional de la brújula hay que saber que el* meridiano magnético *es distinto del* geográfico (fig. 661).

Llámase **declinación magnética** el ángulo que forma el *meridiano magnético* con el *meridiano geográfico.*

La declinación magnética es distinta para cada lugar de globo y varía con el andar del tiempo de modo que el que usa la brújula debe conocer cuál es el valor para el lugar donde está operando.

8.° - Goniómetros.

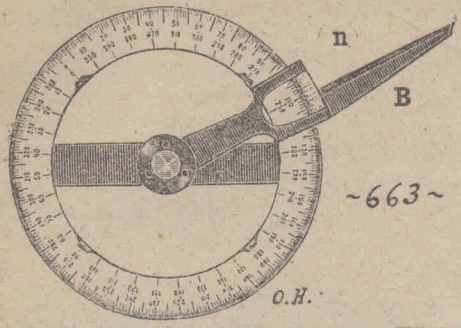


1234. – Se llaman **goniómetros** los aparatos que sirven para medir los ángulos.

El goniómetro más común, y el que sirve de base para la construción de otros goniómetros, es el transportador (fig. 662).

SINONIMIA. - **Transportador,** *graduador, semicírculo graduado,* LIMBO.
Limbo es el graduador que forma parte de otro goniómetro.

1235. - Transportador de precisión (fig. 663).



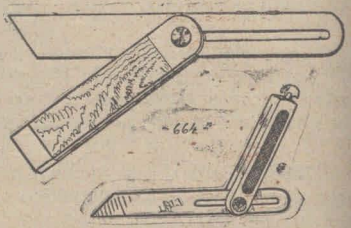
Consta de un limbo circular y de un brazo móvil **B** con *nonio* **n**

Luego explicaremos qué es el nonio.

1236. Falsa escuadra es un goniómetro de transporte (fig. 664).

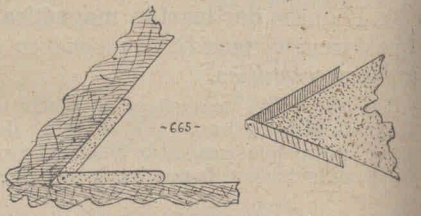
La falsa escuadra no da la graduación del ángulo, sino tan sólo su abertura.

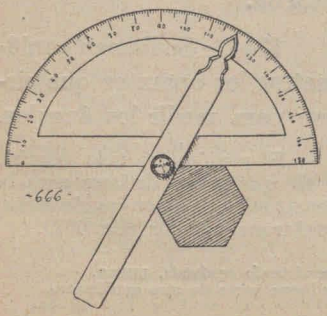
Sirve solamente para transportar los ángulos (fig. 665).

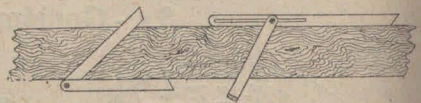


1237. – Goniómetro del minerálogo (fig. 666).

Es una combinación del transportador y de la falsa escuadra, y sirve para medir los ángulos diedros de los cristales.

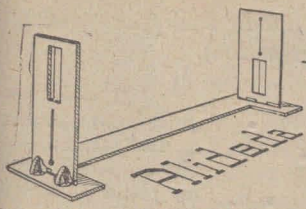




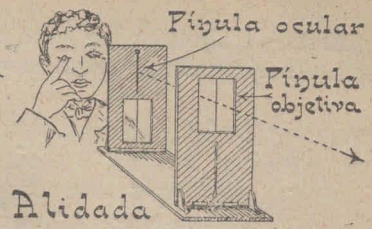


Este goniómetro, se llama «DE APLICACIÓN» para distinguirlo del GONIÓMETRO DE REFLEXIÓN, usado también por los minerálogos.

1238. – Alidada es una regla acodada verticalmente en sus dos extremos, hallándose provisto cada codo de un par de ventanas denominadas PÍNULAS (fig. 667).

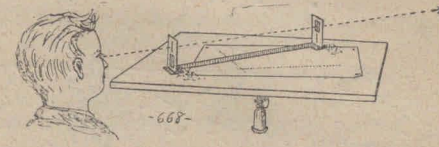


-667-



No es un goniómetro; pero forma parte de varios tipos de goniómetro.

Además se usa suelta para copiar directamente en el papel los ángulos del terreno (fig. 668).



-668-

1239. – Pínulas. – En varios aparatos de agrimensura, para obtener exactitud en la dirección de las visuales, se usa un par de ventanas desiguales colocadas una frente a otra, a las que se ha dado el nombre de PINULAS, *ocular* y *objetiva* respectivamente (fig. 667).

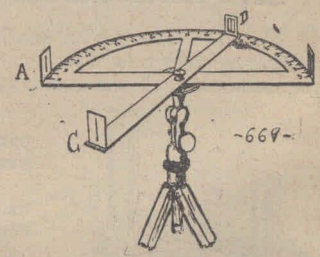
La PÍNULA OCULAR *es una rendija vertical, muy angosta; y es la que está junto al ojo del observador.*

La PÍNULA OBJETIVA *es una abertura rectangular bastante ancha, en la que hay un cabello estirado en dirección vertical.*

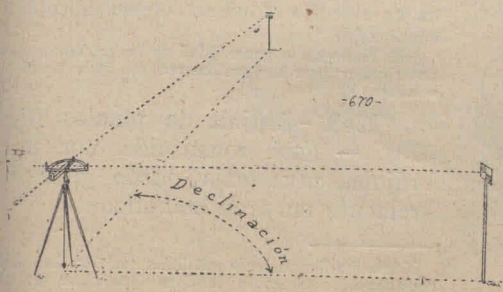
Con esta disposición se obtiene que el ojo tenga MUCHO CAMPO de observación, siendo el cabello el que marca la dirección de la visual.

1240. – Grafómetro es un aparato compuesto de un limbo graduado y dos alidadas, una fija y otra movible (fig. 669).

Le acompaña un trípode, al que está unido mediante una charnela universal.



-669-

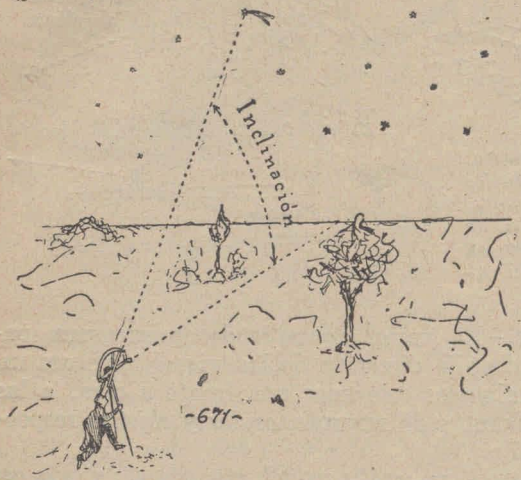


-670-

Una vez ajustado el grafómetro mediante un tornillo en la charnela, puede girar sobre su eje, permaneciendo siempre en el mismo plano.

Para sujetarlo en una posición sobre dicho plano, se recurre a otro tornillo; y entonces la única pieza móvil es la alidada **CD**.

1241. – El grafómetro sirve para medir cualquier clase de ángulos (horizontales, verticales e inclinados).



Llámanse ÁNGULOS HORIZONTALES o **declinaciones** los que se hallan sobre un plano *horizontal* (fig. 670).

ÁNGULOS VERTICALES o **inclinaciones** son los que coinciden con un plano vertical (fig. 671).

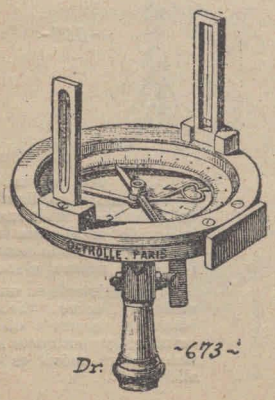
ÁNGULOS INCLINADOS son los que pertenecen a un plano inclinado (fig. 672).



SINONIMIA. = **Declinación** = desviación lateral
Inclinación = ELEVACIÓN = ALTURA = *declive*.
Distancia angular = Ángulo que forman dos visuales de un mismo haz.

1242.- ACCESORIOS DEL GRAFÓMETRO

a) Para los casos en que hay que referir las observaciones a la dirección del *meridiano local*, acompaña al grafómetro una brújula.



b) Tanto para las declinaciones, cuanto para las elevaciones, hay en el grafómetro un NIVEL, paralelo a la base.

c) Mediante una plomada se determina en el suelo el punto correspondiente al centro del limbo.

El limbo de la generalidad de los grafómetros es semicircular; pero hay grafómetros con limbo circular, o *entero*.

1243. – Brújula de pínulas (fig. 673). — Está constituida por una brújula, cuya caja puede girar libremente en sentido horizontal.

NOTA. La ilustraciones señaladas con **Dr**, han sido copiadas del catálogo de la Casa DEYROLLE (París)



674- O.H.

Sobre el borde de la caja hay dos pínulas fijas, diametralmente opuestas, que constituyen la alidada.

El limbo de la brújula está dividido en 360° ó 400°, según los aparatos.

1244. – Pantómetros (fig. 674) son goniómetros constituidos por dos escuadras cilíndricas de agrimensor; la inferior es fija, y la superior gira sobre su eje vertical.

En el borde superior de **A** se halla la graduación real (de 360°) y en el borde inferior de **B** se halla el vernier.

En la parte superior de **B** hay una brújula para la orientación del aparato.

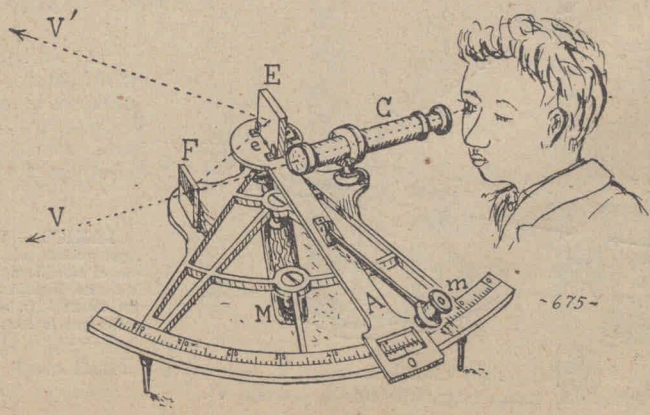
9.° – Goniómetros geodésicos y astronómicos.

1245. – Todos los instrumentos que en Agrimensura se usan con pínulas, tienen en Geodesia y Astronomía aparatos correspondientes, que en lugar de pínulas llevan catalejos o anteojos astronómicos.

Agrimensura = *Parte de la Geometría aplicada, que enseña a medir los terrenos.*

Geodesia = *Arte de medir la tierra.— Se distingue de la* AGRIMENSURA *por el fin y por los medios: ésta no busca la exactitud matemática, y aquélla sí; por lo tanto la Geodesia usa tan sólo instrumentos de* PRECISIÓN, *mientras que la Agrimensura recurre a instrumentos* SENSIBLEMENTE EXACTOS.

Los agrimensores modernos han ido abandonando poco a poco los instrumentos de pínulas, generalizándose entre ellos el uso de los instrumentos geodésicos.



1246. – **Sextante** es el aparato astronómico correspondiente al grafómetro (fig. 675).

Su limbo mide algo menos de 60° (1/6 de la circunferencia), y ésta es la razón de su nombre.

1247. - PIEZAS DEL SEXTANTE.– **C** = *Anteojo, paralelo al plano del limbo.*

A = *Alidada móvil, que gira sobre el centro* **e**.

E = *Espejo perpendicular al plano de la alidada.*

El espejo **E** está asentado en el centro; y su plano pasa por el CERO de la alidada.

LÉXICO. — **Alidada**, *en los aparatos astronómicos es la pieza que corresponde a la* ALIDADA MÓVIL *de los aparatos topográficos. — No tiene pínulas, y su único fin es señalar sobre el limbo la desviación del anteojo o espejo ajustado en ella.*

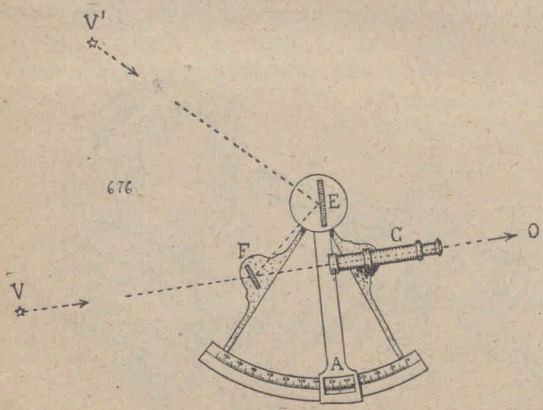
F = *Espejo fijo perpendicular al plano del limbo. Su plano es paralelo a la recta que une a* **e** *con el* CERO *del limbo.*

La mitad superior de **F** es espejo, y la mitad inferior, es vidrio transparente. Y como el límite entre la parte azogada y la transparente está a la altura del *eje óptico* del catalejo, resulta que *el haz de visuales se bifurca:* la parte inferior sigue la dirección de **V** ,y la superior va del espejo **F** al **E**, y sigue la dirección de **V'**.

M = *Manubrio para sostener el sextante en el aire.*

m = *Microscopio para aclarar la lectura de la graduación del limbo*

1248. – MANEJO DEL SEXTANTE. – 1.° Se sostiene el sextante, con una mano puesta en **M**, y se inclina de modo que el plano del limbo coincida con el plano del ángulo que se va a medir.



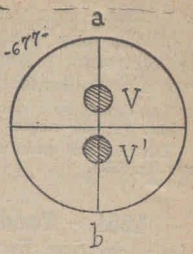
Supongamos que se trate de medir la distancia angular de las dos estrellas **V** y **V'** (fig 676).

2.° Se hace virar el aparato, hasta que se vea la estrella **V** a través de la parte transparante del espejo **F**.

LÉXICO.— **Virar.**— *Aquí usamos esta palabra con el significado que se le da en Náutica:* GIRAR UN OBJETO *sin salir del plano que lo sostiene.*

3.° Sin perder de vista la estrella **V**, se corre la alidada con la mano que está libre hasta llegar a ver la estrella **V'**.

4.° Maniobrando con cuidado, se llega a un momento en que las dos estrellas se ven sobrepuestas en la línea ver ical **ab** del retículo del anteojo (fig. 677).



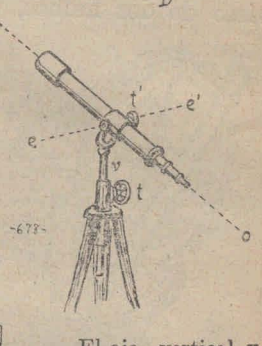
-677-

En este momento se suspende el movimiento de la alidada, y se deposita el sextante sobre la mesa. En el graduador se leerá entonces el ángulo que forman entre sí las visuales de las dos estrellas.

En Geometría se demuestra que para que las divisiones del limbo del sextante sean justas, deben tener como medida real la mitad de lo que indican.

Así el limbo de un sextante que marque 80°, tendrá en realidad 40° de abertura.

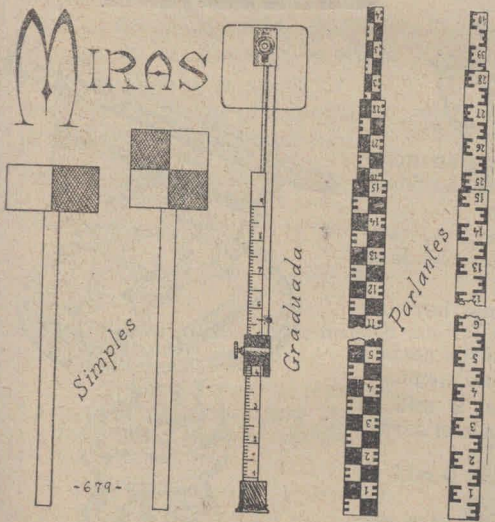
1249. – Catalejo montado (fig. 678): sirve para varios trabajos de Agrimensura, como el de medir los desniveles mediante las *miras parlantes* (fig. 679).



-678-

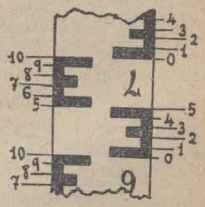
No es un goniómetro propiamente dicho, pero sirve de base a la construcción de varios goniómetros.

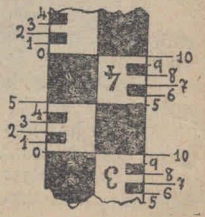
PARTES DEL CATALEJO montado. — El eje horizontal **ee'** le permite efectuar las inclinaciones.



-679-

El eje vertical **v**, sirve para efectuar las declinaciones.


-680-



Los tornillos **t** y **t'** sirven para sujetar el anteojo en posiciones dadas.

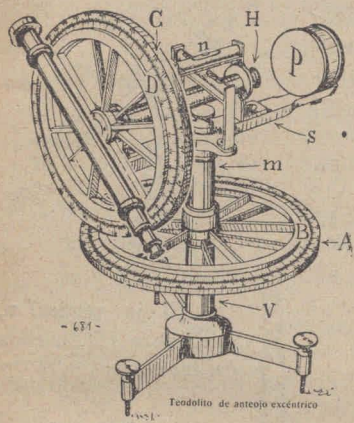
La línea **oX** es el eje óptico del anteojo.

1250. – Las MIRAS PARLANTES se llaman así porque su vara está equidividida en decímetros y centímetros; de modo que mediante el catalejo montado, puede el agrimensor leer la altura de la visual, sin valerse del ayudante.

Las figuras en forma de **E** (blancas o negras) que forman la escala miden, ½ *dm.* y dan, con sus huecos y relieves, la medida de los centímetros (fig, 680).

Los números están invertidos, para que aparezcan derechos en el ocular del catalejo (ver fig. 689).

1251. – **Teodolito** (fig. 681) es un anteojo montado, provisto de dos limbos, uno HORIZONTAL (para medir las *declinaciones*), y otro VERTICAL (para las *inclinaciones* o «*alturas*»).



Teodolito de anteojo excéntrico

El limbo horizontal se denomina CÍRCULO AZIMUTAL *cuando se aplica a la medida de las declinaciones con respecto al meridiano del lugar.*

LÉXICO .— **Azimut** = *ángulo que forma un plano vertical, con el meridiano local.*

Azimutal = *teodolito que se aplica exprofeso a la medida de los azimutes.*

Altazimutal = *teodolito que se aplica a la medida de las alturas y azimutes.*

La rueda **A** es el LIMBO HORIZONTAL, *inmóvil*, porque está soldado al eje vertical **V**.

C es el LIMBO VERTICAL, también *inmóvil*, porque está soldado al eje horizontal **H**.

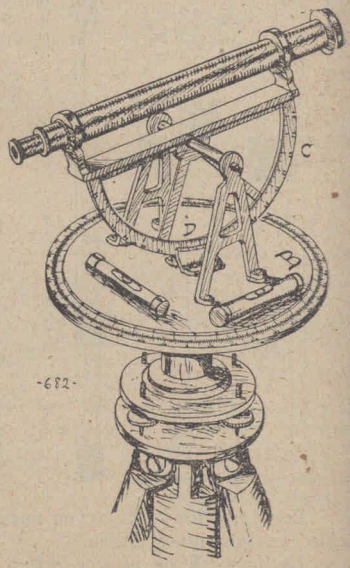
En vez de alidada hay dos RUEDAS MÓVILES **B** y **D**, con una graduación especial, llamada **nonio** o VERNIER, que luego estudiaremos.

Soldado a la rueda **B** está el caño **m**, al que está soldado el SOPORTE HORIZONTAL **S**.

Soldado a la rueda **D** está el anteojo.

En **n** hay dos niveles para asegurar la horizontalidad del aparato.

P es un contrapeso, para equilibrar la parte superior del teodolito.



1252. – El aparato que acabamos de describir, pertenece al grupo de los TEODOLITOS DE ANTEOJO EXCÉNTRICO, llamados así, porque su anteojo no se halla sobre el eje **V**.

Como ejemplo de TEODOLITO DE ANTEOJO CONCÉNTRICO, tenemos el de la fig. 682.

Su limbo vertical **C** es semicircular, y su vernier **D**, es de mucha menor amplitud que el limbo.

1253. – Así como hemos representado los teodolitos en las figs. 712 y 713, *son imcompletos;* puesto que en estas figuras no se han dibujado las cremalleras y demás piezas de maniobra, como tampoco los microscopios de lectura y otros accesorios.

Además los teodolitos como el de la fig. 681 tienen ajustado el pie **V**, otro anteojo que sirve para comprobar durante las distintas observaciones, si se ha movido por algún descuido la parte fija del aparato.

1254. – Como ejemplo de teodolitos completos, examínese el de la fig. 683, que es además un TAQUÍMETRO o aparato destinado a efectuar simultáneamente la planimetría y la altimetría de los terrenos.

LÉXICO. **Planimetría** = *medida horizontal de los terrenos.*

Altimetría = *medida vertical de los relieves de los terrenos.*

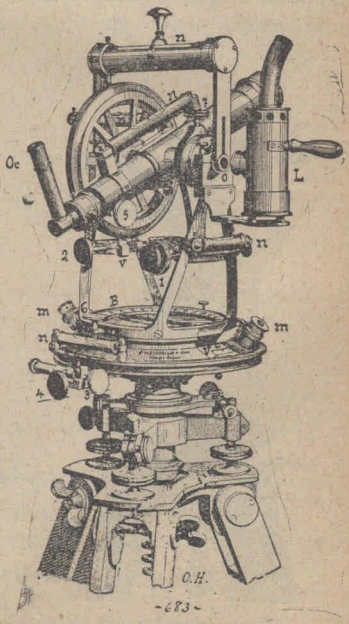
B = brújula, o «declinatoria magnética».

L = linterna para iluminar el retículo (**1259**) del anteojo.

o = agujero por donde penetran los rayos de la linterna para dar en un espejo central que los refleja sobre el retículo.

Oc = ocular, acodado para dar comodidad al observador cuando el anteojo está vertical.

n = niveles (que en este aparato son cinco).



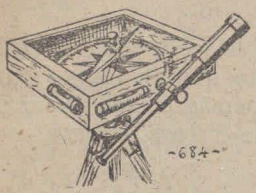
-683-

Teodolito-Taquímetro de tránsito de Breithaupt.

m = microscopios, para leer las graduaciones del limbo horizontal
v = vernier.

1,2,3,4,5, etc = Cabezas de tornillos, de los que unos (*sinfines*) son para maniobrar, y otros son para inmovilizar las distintas piezas móviles.

1255. – Brújula topográfica o de agrimensor (fig. 684).— Es un goniómetro para ángulos horizontales.



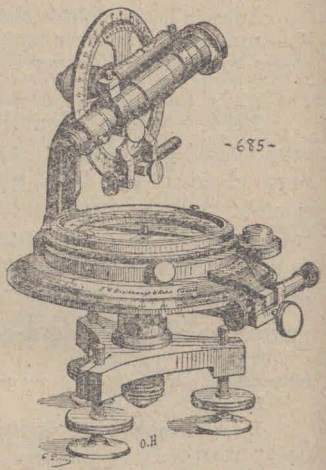
-684-

La caja puede virar horizontalmente, y el anteojo se mueve sobre un plano vertical

Sus partes son: a) una caja que contiene una *aguja imanada*, con el limbo correspondiente; b) un catalejo, colocado al costado de la caja, c) dos niveles mutuamente perpendiculares.

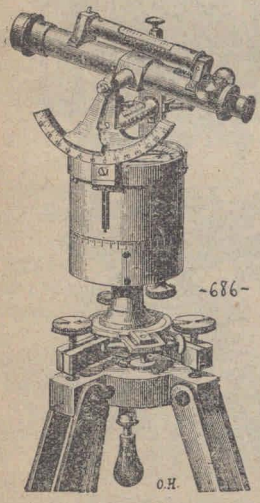
Tiene las mismas aplicaciones que la brújula de pínulas (1243).

Hay brújulas topográficas complicadas, que miden también ángulos verticales, siendo en rigor, *verdaderos teodolitos* (fig. 685).



-685-

Brújula topográfica de Breithaupt



-686-

Pantómetro francés

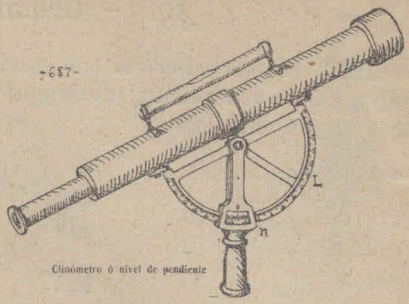
1256 – Los **pantómetros geodésicos** fig. 686) rematan en un anteojo montado y con limbo; vertical y se hallan provistos de dos niveles mutuamente perpendiculares.

Estos pantómetros son, en su esencia, verdaderos teodolitos.

1257. – Clinómetro o NIVEL DE PENDIENTE (fig. 687) es un goniómetro destinado a medir tan sólo ángulos verticales.

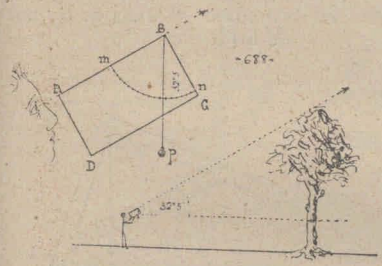
El que aquí representamos equivale a la parte superior del teodolito concéntrico de la fig. 682,

-687-



Clinómetro ó nivel de pendiente

1258. – GONIÓMETRO DE CONSTRUCCIÓN CASERA (fig. 688).

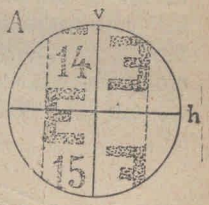


-688-

Con un cartón cuyos lados **AB** y **BC** sean bien perpendiculares, al que se añade una plomada **Bp**, se obtiene un excelente goniómetro para trabajos escolares.

Los Caldeos no tuvieron mejores.

1259. – Retículo.— Es un conjunto de hilos cruzados, tendidos en un aro que se halla en el interior de los anteojos de los goniómetros (fig. 689).



Los hilos pueden ser hebras de telaraña o de seda.

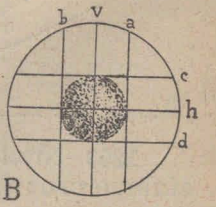
Los retículos más sencillos constan de un hilo vertical y otro horizontal.

Pero según el uso a que se les destine, pueden ser más o menos complicados.

El que se representa en **B**, tiene además de los hilos fijos **v** y **h**, los corredizos **a**, **b**, **c** y **d**.

Las piezas que sostienen los hilos corredizos, tienen movimiento simétrico de modo que **a** *y* **b** *siempre equidistan de* **v**; *lo mismo que* **c** *y* **d** *con respecto a* **h**.

-689-

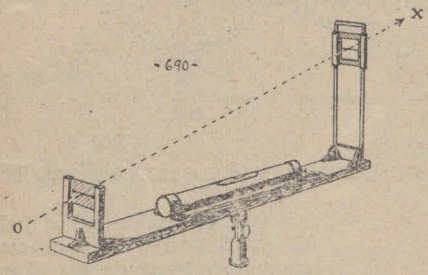


En **A** se ve sobre el retículo la imagen de la mira parlante que está observando el topógrafo.

Y en **B** se ve la imagen de un astro, del que se está midiendo el diámetro.

10.° – Clisímetros.

1260. – Los *clisímetros* son goniómetros verticales, que en vez de dar la graduación del ángulo, dan la medida de su tangente trigonométrica.

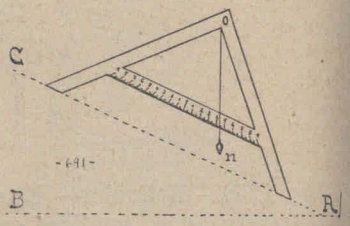


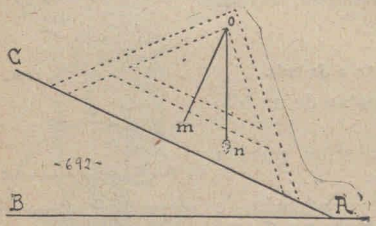
1261.–Nivel de declives o CLISÍMETRO DE PÍNULAS (fig. 690).

En este aparato, las pínulas son de hendija horizontal.

La pínula ocular es fija, en cambio la objetiva se mueve como el ALZA de las miras de los fusiles.

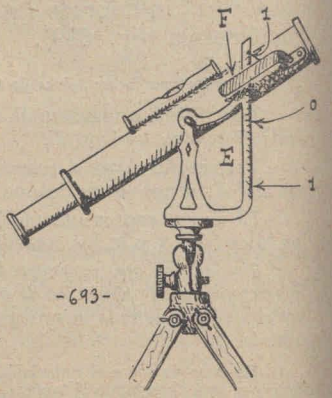
1262. –El NIVEL DE ALBAÑIL puede transformarse en un *clisímetro*, si se equidivide el travesaño horizontal colocando el CERO en el medio, y valiéndose de fracciones decimales de la distancia **om** (fig. 691 y 692).





1263.–Nivel de anteojo o CLISÍMETRO GEODÉSICO (fig. 693).

Es un nivel de pendiente, en el que se ha sustituído el limbo por la escala vertical de altura.

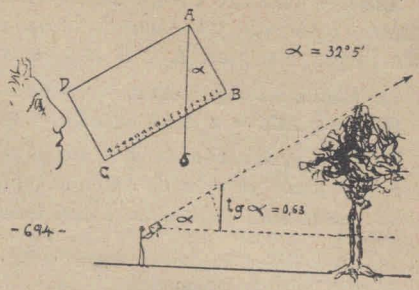


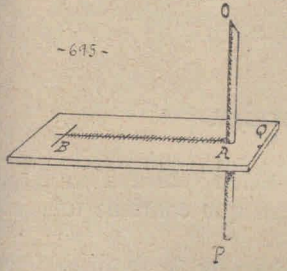
E (escala) **F** (fiel o guía)

1264.– CLISÍMETRO DE CONSTRUCCIÓN CASERA (fig. 694).

Difiere del goniómetro de la fig. 688, en que está sustituida la graduación sexagesimal por la trigonométrica.

Recuerde el alumno que
B 10 = AB



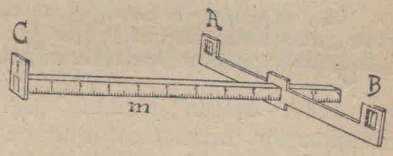


1265. – CLISÍMETRO DE SOMBRA (fig. 695).

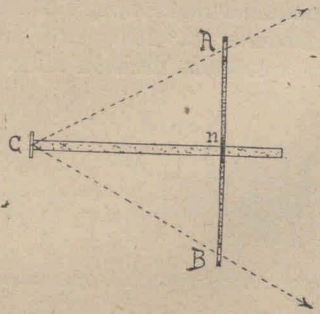
La distancia **AB** es fija, y vale «UNO». El palo está graduado en fracciones decimales de **AB** a partir desde **o** hacia **P**.

Conviene con los clisímetros en la sustitución del limbo por una escala rectilínea; pero difiere de ellos por la medida que da.

1266. – La **ballestilla** (fig. 696) es un aparato, al estilo de los clisímetros (1).



A medida que fué divulgándose el uso de los goniómetros geodésicos, fué decayendo la ballestilla hasta quedar relegada a los museos de los fósiles de la ciencia.



Consta de un bastón **m**, en cuya extremidad **C** hay una pínula ocular fija.

La corredera **AB** tiene dos pínulas objetivas, equidistantes del bastón.

Las divisiones del bastón **m** son fracciones decimales de la distancia **An**.

(1) La ballestilla o «BASTÓN DE JACOB» estuvo muy en boga desde principios de siglo XV hasta mitad del XVIII.

1267. – MANEJO DE LA BALLESTILLA.— Sosteniéndola con la mano izquierda, y colocando el ojo en **C**, se corre la regla **AB** hasta llegar a ver en **A** y **B** respective, los dos objetos.

La medida del ángulo **ACB** *se obtiene teniendo en cuenta que:*

Si $\measuredangle$ **ACn** = α $\measuredangle$ **ACB** = 2α entonces **An** = $tg\ \alpha$

P. l. t. la graduación de α se busca en la TABLA N.° 2 (pág. 286) cuando se conoce el valor de **An** en el supuesto que **Cn** = 1

Pero como la lectura de la ballestilla da la medida de **Cn** en el supuestó que

An = 1

tendremos que recurrir a los números recíprocos así:

Si p. ej. en la ballestilla leemos:

Cn = 1,22

nosotros anotaremos:

An = rec. 1,22 = 0,819672 (1)

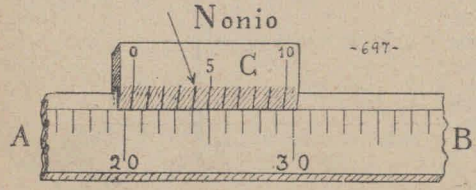
11.° – Nonio o vernier.

1268. – En los medidores de precisión, corre a lo largo de la escala o graduación real una pieza que contiene una escala especial, llamada **nonio** o **vernier.**

Hay dos tipos de nonio: el DECIMAL (generalmente rectilíneo), que sirve para valuar fracciones que van de 10 en 10; y el SEXAGESIMAL (curvilíneo), que sirve para las fracciones de grado.

1269. – **Nonio decimal** (fig. 697). — La regla **AB** está dividida en milímetros (que en la figura están aumentados).

La pequeña regla **C**, que es el *vernier*, mide 9 mm. (desde el CERO hasta el *N.° 10*) y está dividida en 10 partes iguales; de modo que cada división mide $^{9}/_{10}$ mm.



Con esta disposición se pueden llegar a apreciar las variaciones de longitud en *décimas de milímetros*, sin que se requiera para ello andar provisto de microscopio ni poseer una vista refinada.

1270. – LECTURA DEL NONIO DECIMAL. En el caso de la fig. 697, el cero del nonio marca **20 mm** Y ALGO MÁS.

(1) Ver tabla N° 12, pág. 413.

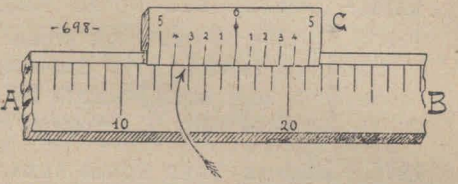
Corramos la vista hacia la derecha, y veremos que, de las diez divisiones del nonio, la que coincide con una división de la regla **AB** es la 4ª (*señalada en el dibujo con una flecha*).

Tendremos, pues, que EL CERO DEL NONIO ESTA MARCANDO:

20 mm y $^4/_{10}$ = mm **20,4**

1271. – Hay nonios que tienen el CERO en el medio, y a ambos lados tienen sólo cinco divisiones (fig. 698).

En estos nonios la fracción de mm. se debe calcular unas veces POR SUMA, *y otras* POR DIFERENCIA.



Ya hemos enseñado a calcularla *por suma*. Veamos el cálculo *por diferencia*.

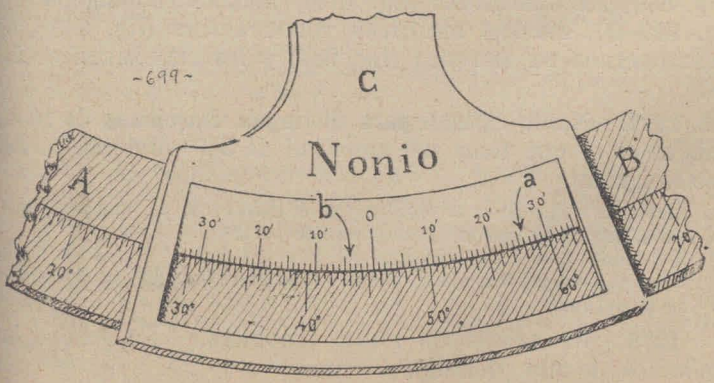
En la fig. 698 el CERO del nonio marca 17 mm, «*menos algo*».

Corramos la vista a la izquierda, y veremos que la 3ª división del nonio es la *coincidente*.

Luego, el CERO DEL NONIO MARCA: 17 — 0,3 = mm **16,7**

1272. – APARATOS PROVISTOS DE VERNIER DECIMAL. — De los citados en este capítulo, son: el CALIBRADOR (fig. 631) y el CATETÓMETRO (fig. 638).

1273. – **Nonio sexagesimal** (fig. 699).



En esta figura, **AB** es una porción de limbo, y **C** es el extremo de una alidada como la del sextante (fig. 675)

El limbo está dividido en grados y en medios grados.

En el nonio la distancia marcada de **0** a **30′**, mide tan sólo 29 *medios-grados* ($14\frac{1}{2}$); de modo que cada división del nonio tiene $^{29}/_{30}$ de *medio-grado*, que es lo mismo que:

$^{29}/_{60}$ de grado *o sea* **29 minutos**

1274. – LECTURA DEL NONIO SEXAGESIMAL, *por suma.*— En la fig. 699, el CERO del nonio marca más de *45°* (casi $45\frac{1}{2}$). Corramos la vista a la derecha, y veremos que la división *coincidente* (del nonio) señala **26′**.

El CERO del nonio marca, pues: **45° 26′**

1275. – LECTURA DEL NONIO SEXAGESIMAL, *por diferencia.* — En la misma figura, el CERO del nonio marca **45½** *grados* (escaso), o sea: casi *45° 30′*.

Corramos la vista a la izquierda, y veremos que la división *coincidente* (del nonio) marca **4′**.

Luego el CERO del nonio marca: $45° 30' - 4' = 45° 26'$

Como se ve, con ambos procedimientos hemos llegado al mismo resultado.

Muchas alidadas tienen marcados solamente **15′** *a cada lado del cero, de modo que la lectura se hará* POR SUMA *cuando el exceso es de 15′ o menos; y se hará* POR DIFERENCIA *cuando el exceso es de 15′ o más.*

1276. – APARATOS PROVISTOS DE NONIO SEXAGESIMAL.— De los citados en este capítulo son: los COMPASES ESFÉRICOS DE LIMBO (fig. 630–**g**), los TRANSPORTADORES DE PRECISIÓN (fig. 663), los SEXTANTES (fig. 675), muchos TEODOLITOS (ej.: fig. 682–**D**), muchas BRÚJULAS TOPOGRÁFICAS (fig. 685), los PANTÓMETROS DE ANTEOJO (fig. 686) y los CLINÓMETROS (fig. 687).

1277. – Nonio circular para distinguir fracciones de 10 segundos es el que tiene un amplitud de **359°** dividida en **360** partes iguales.

Con esta disposición se obtiene que el defecto de la amplitud total del nonio, que es **1°**, quede dividido en 360 partes.

De modo que cada división del nonio vale: $1° - {}^1/_{360}$ *de grado.*

Pero $^1/_{360}$ de grado = 10″ luego cada división del nonio difiere 10″ de la del limbo.

1278. – APARATOS CON NONIO CIRCULAR.— En general los teodolitos de alta precisión.

El de Breithaupt (fig. 683) es para **10″**; pero la generalidad de los nonios circulares son menos sensibles, apreciando fracciones mayores a saber **20″, 30″** como sucede en algunos pantómetros (fig. 686).

Para la lectura de los nonios circulares es imprescindible el uso de los microscopios que acompañan siempre a dichos nonios.

12.° – Taquímetros.

1279. – **Taquímetros** son aparatos que indican por simple lectura, el número de vueltas de su eje principal, o una magnitud relacionada con dichas vueltas.

Los taquímetros pueden dividirse en dos clases; 1.ª) TAQUÍMETROS TOTALIZADORES, 2.ª) TAQUÍMETROS INDICADORES.

1280. – 1.° TAQUÍMETROS **totalizadores** son los que marcan el total de vueltas del eje principal, o una magnitud derivada de dicho total.

1). Los principales taquímetros de esta clase son:

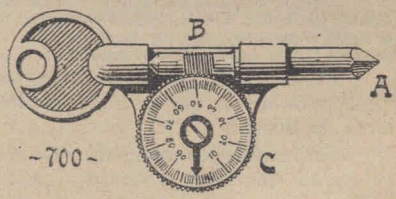
a). LOS MEDIDORES DE VUELTAS O **tacómetros simples (1)**. (fig. 700) muy usados para medir las revoluciones de los motores.

A = punta que se aplica al extremo del eje del motor

B = tornillo sin fin.

C = engranaje combinado con el tornillo sin fin.

En el caso de nuestra figura, para que **C** dé una vuelta, se requiere que **B** haya dado 100 vueltas.



-700-

b) LOS MEDIDORES DE RECORRIDO, aplicados a los vehículos, en combinación con una o más ruedas de éstos.

c) LOS TAXÍMETROS, que dan el precio del viaje en función del recorrido del vehículo.

d) LOS CURVÍMETROS O CAMPILÓMETROS, ya descritos (**1205**).

e) LOS CONTADORES de gas o de agua corriente.

f) La parte mecánica de los MEDIDORES DE ELECTRICIDAD.

---

(1) Llámanse **tacómetros** los taquímetros que se destinan a la medición de las velocidades, sea por vía directa, sea por vía indirecta.

El de la fig. 700 da indirectamente la velocidad, puesto que es un simple CUENTAVUELTAS.

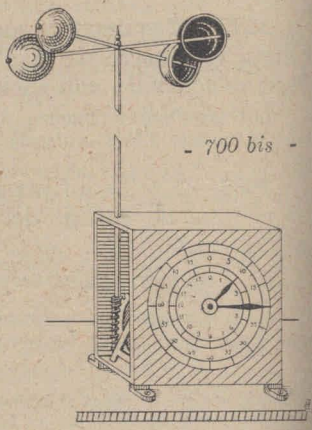
Velocímetros son los tacómetros de medida directa.

2.) **Taquímetros indicadores** son los que en cada instante están señalando la velocidad de su eje principal o una magnitud relacionada con dicha velocidad.

Los principales taquímetros indicadores son:

Los TACÓMETROS DE LECTURA DIRECTA, llamados **velocímetros**, los cuales difieren de los *medidores de vueltas*, en que dan directamente la medida de la velocidad.

1281.– Anemómetros (fig. 700 bis) son taquímetros encargados de medir la velocidad del viento.



- 700 bis -

Los hay del tipo TOTALIZADOR *como el de la figura, y los hay del tipo* INDICADOR.

Para valuar la velocidad del viento con un anemómetro totalizador, se aplica la fórmula

$$v = k \frac{n}{t}$$

v (*velocidad del viento*)

n (*número señalado por las manecillas, o mejor aún:* (INCREMENTO DE DICHO NÚMERO)

t (*tiempo correspondiente a* n)

k (CONSTANTE DEL APARATO, *a saber: coeficiente que indica cuantos* METROS *recorridos por el viento se necesitan para que la manecilla de las décimas dé una vuelta entera de cuadrante*).

Como puede bien entenderse, los anemómetros totalizadores dan la VELOCIDAD MEDIA que tuvo el viento durante una porción más o menos larga de tiempo.

En cambio los anemómetros indicadores, dan en cada instante la velocidad que tiene el viento.

FISICA GENERAL

VII.° - Propiedades de la materia

Parecióños conveniente no entrar ex-profero en este asunto, hasta no tener andado buen camino en el estudio de la Física; puesto que lo que aquí se expondrá, es cosa que en general ya se tiene sabida desde 5° ó 6° grado elemental; y no es lógico que se comience el estudio de una ciencia repitiendo a los alumnos lo que tal vez están cansados de recitar ad litteram para satisfacer los programas del Curso Elemental.

1.° - Propiedades de la materia.

1282. – Reléase lo que se ha estudiado en (**8 h. 14**).

En algunos programas figura la siguiente pregunta:

"DEFINICIÓN DE PROPIEDAD DE LA MATERIA".

A lo que se contesta en una de las formas siguientes:

a) **Propiedades** de la materia son sus diversas manifestaciones.

Que es lo misno que decir que:

Propiedades de la materia son los distintos modos con que ella impresiona nuestros sentidos.

b) **Propiedades** de la materia son las distintas relaciones que tienen entre sí los cuerpos.

CUERPO = *porción determinada de materia.*

Y tal vez existan diez o doce definiciones más.

Basta consultar textos, para ir aprendiéndolas; pero al fin, el alumno se convencerá que todas se reducen a las dos que acabamos de expresar.

1283.–La mayoría de los autores dividen las propiedades en tres categorías: a) GENERALES, b) ESPECÍFICAS, c) ACCIDENTALES.

Pero esta división es incompleta y errónea. Nosotros, a las que dichos autores denominan ESPECÍFICAS, las hemos subdividido en: **características** y *verdaderamente* **específicas** (ver **9** y **10**).

1284.–Una propiedad CARACTERÍSTICA aislada no determina especie.

Ej.: el AZÚCAR es **dulce**; pero también es **dulce** la SACARINA; sin contar con que hay muchas especies de azúcares (sacarosa, glucosa, levulosa, etc.).

Pero un CONJUNTO DE PROPIEDADES CARACTERÍSTICAS puede determinar especie.

Cualquiera entiende que es difícil y hasta imposible encontrar un conjunto más o menos grande de propiedades características, iguales en dos sustancias distintas.

1285.–Por eso podemos decir que toda sustancia tiene dos propiedades específicas diversas:

a) Su composición química: a saber, su extructura atómico-molecular (1)

b) El conjunto de sus propiedades características: color, olor, sabor, densidad, etc.

1286.–Llámanse sustancias **químicamente puras** o ESPECIES QUÍMICAS, las sustancias que no pueden ser descompuestas en dos o más sustancias mediante los procedimientos meramente físicos.

El AGUA DESTILADA es una especie química; en cambio el AGUA DEL MAR es una mezcla de varias especies químicas: *agua, sal gema*, etc.

1287. — Es sumamente difícil, rayando prácticamente en lo imposible, encontrar dos especies químicas que en igualdad de temperatura y presión tengan la misma DENSIDAD.

Por eso en la práctica, la DENSIDAD de cada especie química *puede considerarse* como propiedad específica.

Pero ¿quién nos asegura que no existan dos especies químicas equidensas?

Además, para aceptar la densidad como propiedad específica, hay que tener demostrado que la sustancia a que nos referimos es químicamente pura.

Y como esto último se demuestra examinando otras propiedades características, resulta que: LA DENSIDAD, POR SÍ SOLA, ES UNA SIMPLE PROPIEDAD CARACTERÍSTICA.

2.º-Propiedades generales de la materia.

1288. – Propiedad **general** es la que es común a todas las sustancias y a todos los cuerpos.

Propiedad **semi-general** es la que es común a una gran mayoría de sustancias o a uno o dos estados característicos de la materia (sólido, líquido, goseoso).

Todos los autores convienen en esta definición; pero no todos la aplican por igual.

Las que nosotros aquí llamamos «propiedades SEMI-GENERALES» reciben impropiamente el nombre de «propiedades PARTICULARES.»

De aquí que en unos libros se citen más propiedades generales que en otros.

(1) El estudio de esta propiedad específica en general, y para cada sustancia en particular, corresponde exclusivamente a la Química.

1289. — Podemos decir que todas las propiedades CARACTERÍSTICAS y ACCIDENTALES, si se consideran en abstracto, son propiedades GENERALES o por lo menos SEMI-GENERALES.

Así, una sustancia es roja, otra azul, otra verde, etc.; una sustancia es más densa que otra:

a) El COLOR *que corresponde a cada sustancia es una de sus propiedades características*

Pero el **color**, de por sí, es una propiedad *general* o por lo menos *semi-general*, porque no existe substancia sólida o líquida absolutamente incolora.

Los gases, en grandes masas tienen color

b) La mayor o menor DENSIDAD *de cada sustancia, es una de sus propiedades características.*

Pero la **densidad**, de por sí, es una propiedad *general*, porque todas las sustancias pesan, luego TODAS TIENEN DENSIDAD, en mayor o menor grado.

1290. – Existen, pues, tres categorías de propiedades generales:

La que se ha vuelto de moda citar en muchos textos como si fueran las únicas que merecen entrar en dicha clasificación; b) las que se citan en otros textos por las razones que acabamos de exponer; c) las que han sido llamadas PARTICULARES, *y que nosotros hemos denominado semi-generales.*

Las propiedades generales de la materia son, pues:

a) La EXTENSIÓN, la IMPENETRABILIDAD y la INERCIA.

b) La FIGURA o *forma*, la INDESTRUCTIBILIDAD, la DIFUSIBILIDAD, la DIVISIBILIDAD, la POROSIDAD, la COMPRESIBILIDAD, la ELASTICIDAD, la MOVILIDAD, la ATRACCIÓN y algunas más.

c) Las propiedades **particulares** o SEMI-GENERALES, siendo las más importantes:

El COLOR, el SABOR, etc., la COHESIÓN, la ADHESIÓN, la PERMEABILIDAD, la VISCOSIDAD, la CAPILARIDAD, la DUREZA, la TENACIDAD, la FRAGILIDAD, la MALEABILIDAD, la DUCTILIDAD.

Se han denominado: propiedades **organolépticas**, las que se aprecian directamente por los sentidos; tales son: el COLOR, el SABOR, la TERSURA o ASPEREZA superficial, etc.

De todas las propiedades enumeradas, estudiaremos ahora tan sólo las que no tendremos ocasión de estudiar en otra parte, o que deberemos citar antes de llegar al momento oportuno de citarlas.

No estudiaremos, pues, el COLOR, dejándolo para la Optica; el SABOR, OLOR, etc., que no se acostumbra estudiar en Física; la VISCOSIDAD, la DIFUSIBILIDAD, que dejaremos para la Hidráulica y Neumática; la DENSIDAD y la CAPILARIDAD que estudiaremos ocasional y determinadamente en la Hidráulica.

3.°– Extensión, impenetrabilidad, inercia.

1291. – **Extensión** es la propiedad por la cual todo cuerpo tiene lo que llamamos *tamaño* o *dimensión.*

En rigor la EXTENSIÓN es una propiedad *indefinible*, porque siempre que queremos explicarla, recurrimos a palabras o frases qué son sinónimas de *"extensión"*.

1292. – *Otros definen la extensión diciendo que:*

Es la propiedad que tienen todos los cuerpos de ocupar *una porción de espacio.*

Pero, como en Física el espacio carece de realidad, esta definición no es mejor que las otras.

1293. – Aceptando, para comodidad, que el espacio es algo real diremos que:

Volumen es la porción de espacio ocupada por cada cuerpo.

Es, pues, el VOLUMEN la medida de la extensión de un cuerpo.

1294. – En el volumen los geómetras consideran tres dimensiones que acostumbramos denominar: LARGO, ANCHO y ALTO.

Para los geómetras, y aún para los físicos, existen en la práctica tres categorías de espacio:

a) el espacio TRIDIMENSIONAL o *volumétrico.*

b) el espacio BIDIMENSIONAL o *areal.*

c) el espacio UNIDIMENSIONAL o *lineal.*

1295.– La **forma** o FIGURA es una consecuencia de la extensión *La definiremos así:*

Forma es el juego producido por la DISPOSICIÓN y TAMAÑO RELATIVO de las partes de un cuerpo.



-701-

No debemos confundir la FORMA con la *silueta* o con el *contorno* de un cuerpo.

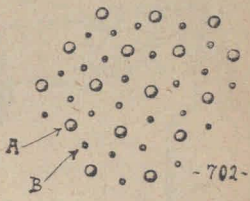
Cada silueta o contorno es uno de los infinitos ASPECTOS que pueden ofrecer a nuestra vista la forma que estamos observando.

LOS CUERPOS NO CAMBIAN DE *forma* AL CAMBIAR DE *posición:* PERO CAMBIAN DE *aspecto* (fig. 701).

1296. – Impenetrabilidad es la propiedad por la cual no puede una porción de materia ocupar el mismo lugar que ocupa otra.

Ver observación en **93** y **94**.

Cuando una sustancia se disuelve en otra, no se compenetran las moléculas de ambas sustancias, sino que se interpolan las de la sustancia disuelta, entre las del disolvente (fig. 702).





1297. – PARADOJA DE PENETRABILIDAD. – Si se coloca un terrón de azúcar en contacto con la superficie del agua de un vaso a punto de rebosar, se logrará disolver el terrón, sin que se derrame el agua (fig. 703).

Este experimento queda explicado en la observación que acabamos de hacer.

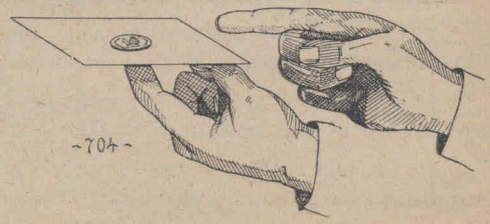
1298. – Ya hemos tenido ocasión de hablar de la inercia (**181, 182, 916, 935, 963...**).

Aquí solamente la definiremos como propiedad de la materia:

Inercia es la propiedad por la cual: a) un cuerpo que está en reposo permanecería siempre en dicho estado, si no interviniese algún agente externo que le diera un impulso; b) un cuerpo en movimiento conservaría siempre su movimiento *uniforme* y *rectilíneo* si no interviniese un agente externo que produjera en él: aceleración, retardo o desvío.

En la inercia, pues, podemos considerar dos aspectos distintos, que para comodidad de lenguaje, denominaremos respectivamente: INERCIA DE REPOSO e INERCIA DE MOVIMIENTO.

1299. – Debido a la INERCIA DE REPOSO los cuerpos no adquieren de inmediato la velocidad que les queremos imprimir.




-705-

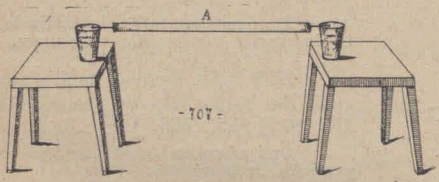
Esta pereza o histéresis en «DECIDIRSE A MOVER» *es causa de fenómenos a veces muy interesantes desde el punto de vista de nuestra curiosidad.*

EJEMPLOS. 1° El papirotazo a una tarjeta sobre la que reposa una moneda (fig 704).

2° Colocando un corcho sobre la boca de una botella, y una bolita sobre él, con un poco de ejercicio se puede lograr hacer saltar el corcho con un golpe recio de dedo, haciendo caer la bolita dentro de la botella (fig. 705).

3° Colocando la pelota sobre el brazo como se indica en (fig. 706), se puede lograr asirla con la mano mediante una rápida evolución.


-706-



-707-

4° Colocando en las extremidades de un palo sendos alfileres, y asentándolos sobre dos vasos como se indica en (fig. 707); si le damos un golpe seco y fuerte de martillo en **A**, podremos romperlo sin mover las copas, y aun sin torcer los alfileres.

5° Las balas de fusil generalmente atraviesan los vidrios sin hacerlos añicos, perforándolos solamente.

6° Colocando un yunque sobre el pecho de un hombre tendido en el suelo, se pueden dar fuertes martillazos sobre el yunque sin que el hombre lo sienta.

Es una de las tantas pruebas llamativas de los saltibanquis y prestidigitadores.

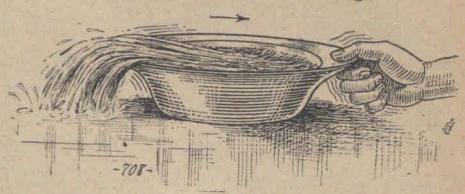
7° Colocando una piedra en la mano izquierda podremos romperla a martillazos, experimentando un dolor insignificante.

8.° Tirando de golpe, de una vasija llena de líquido, lo podremos derramar por el lado opuesto al sentido del movimiento (fig. 708).

9.° Un caso análogo acontece cuando hallándose uno sentado en un vehículo, éste arranca inesperada y bruscamente.

1300. – Debido a la INERCIA DE MOVIMIENTO, los cuerpos no se detienen de inmediato.

Esta pereza o HISTÉRESIS *de detención, da también lugar a fenómenos curiosos.*

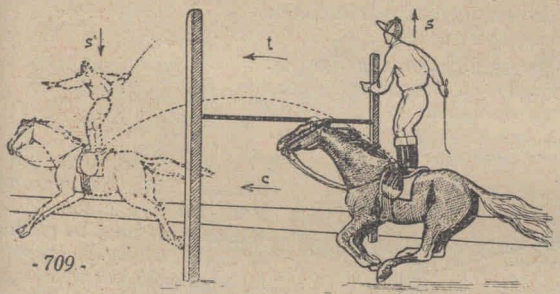

-701-

EJEMPLOS — 1.° Para saltar una zanja, tomamos envión con una carrera.

2.° Al bajar de un vehículo en movimiento, tenemos que tomar ciertas precauciones, para no caer.

3.° En las detenciones bruscas de los vehículos, los pasajeros son lanzados contra la parte anterior de los mismos.

4.° La inercia de movimiento es la causa de los desastrosos efectos de los choques de trenes.



-709-

5.° Los acróbatas explotan la inercia en pruebas como la de la (fíg. 709).

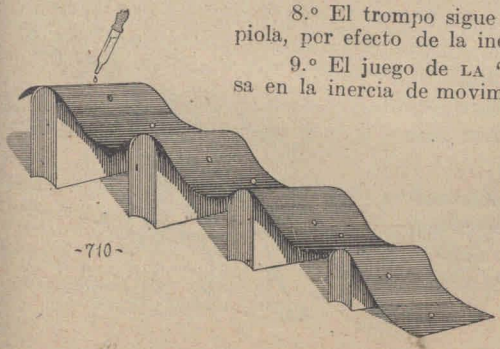
El acróbata salta verticalmente (flecha s); pero su velocidad en sentido de t, le hace caer de nuevo sobre el caballo (flecha s').

6.° Los ciclistas dejan de pedalear cuando su vehículo ha adquirido cierta velocidad.

7.° Nos basamos en la inercia de movimiento cuando para hundir el mango en el martillo, golpeamos con aquél sobre la mesa.

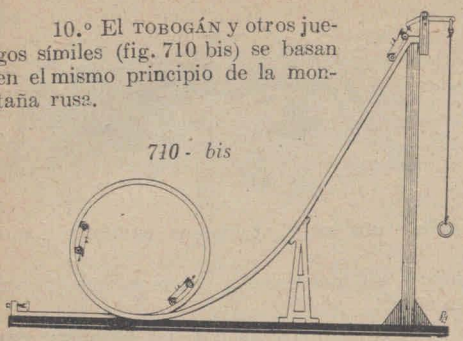
8.° El trompo sigue girando, libre ya de la piola, por efecto de la inercia.

9.° El juego de LA "MONTAÑA RUSA, se basa en la inercia de movimiento.


-710-

Se puede improvisar una montaña rusa mediante un papel aceitado o parafinado dispuesto sobre el lomo de varios libros como se indica en (fig. 710). Con un cuentagotas se va dejando caer el agua, que se desliza cuesta abajo, a pesar de las ondulaciones.

10.° El TOBOGÁN y otros juegos símiles (fig. 710 bis) se basan en el mismo principio de la montaña rusa.



710 - bis

A la histéresis de desvío se deben ciertos fenómenos curiosos.

EJEMPLOS — 1.° Cuando alguien se nos viene *"al humo"* le escurrimos súbitamente el cuerpo: *"le hacemos una gambeta"*.

2.° La liebre perseguida por el galgo (fig. 711), desvía a menudo su trayectoria, para aprovechar la inercia del perro.

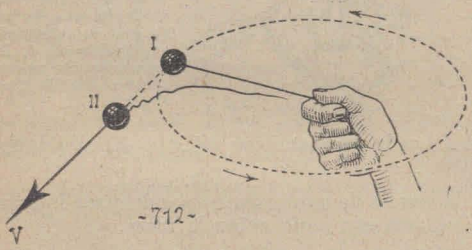
De este modo descansa, recorriendo una trayectoria más corta que la de su perseguidor.

1301. – También debido a la INERCIA DE MOVIMIENTO, los cuerpos se oponen al desvío de su trayectoria rectilínea.



-711-

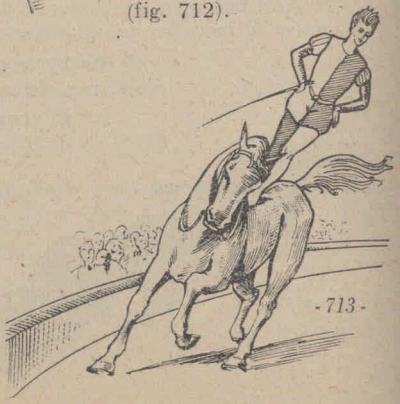
3.° Si mientras *"revoleamos"* una piedra atada a un hilo, soltamos súbitamente el hilo, la piedra *se escapará por la tangente*, siguiendo la trayectoria rectilínea que le correspondía en el instante en que se vió libre de la tracción (fig. 712).



-712-

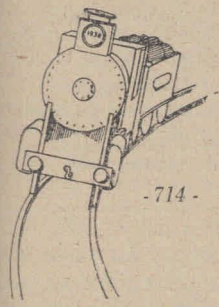
4.° La fuerza centrífuga, de que hablaremos en su lugar, es efecto directo de la inercia para el desvío.

5.° Para evitar las consecuencias de la fuerza centrífuga, los acróbatas en la pista adoptan posiciones que todos conocemos (fig. 713).



-713-

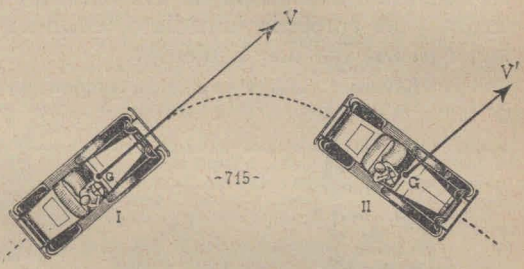
6°. Por la misma razón los trenes en las curvas tienen más alta la vía exterior que la interna; y además retardan el movimiento, (fig. 714).



-714-

1302. — En las curvas se comprueba como la dirección y sentido del *movimiento libre* PERTENECEN AL CENTRO DE GRAVEDAD DEL CUERPO con prescindencia absoluta de los movimientos de rotación o dislocación que pudieran efectuar las distintas partes del móvil (fig. 715).

1303. El PRINCIPIO DE INERCIA fué descubierto por Galileo; y más tarde fué catalogado por Newton entre los principios fundamentales de la Dinámica.



-715-

4.°– Otras propiedades generales.

1304. Indestructibilidad es la propiedad por la cual la materia no puede ser destruida.

Los cuerpos cambiarán de forma y tamaño; unas sustancias se cambiarán en otras al modificarse sus propiedades específicas; pero siempre subsistirá la misma cantidad de materia que ha intervenido en cada fenómeno.

Cuando quemamos una sustancia, DESAPARECE para nuestra vista total o parcialmente el combustible. Pero si recogiéramos en una vasija todos los vapores y cenizas de la combustión, advertiríamos al pesarlos que: deducido el peso del oxígeno del aire que se combinó en la combustión, subsiste íntegro el peso del combustible primitivo.

El principio de la indestructibilidad de la materia fué científicamente formulado por primera vez por el sabio Lavoisier.

EN LAS EXPERIENCIAS NADA SE CREA, NADA SE DESTRUYE, SOLAMENTE SE CAMBIAN LOS CARACTERES DE LA MATERIA.

Las experiencias que se realizaron en consecuencia del descubrimiento del radio, dieron motivo para que Gustavo Lebón pretendiese corregir la sentencia de Lavoisier.

Pero lo único a que hemos llegado con los nuevos conocimientos es que hay que considerar el éter como una de las formas de la materia, a no ser que se llegue a la conclusión de que el éter es algo completamente distinto de los electrones libres.

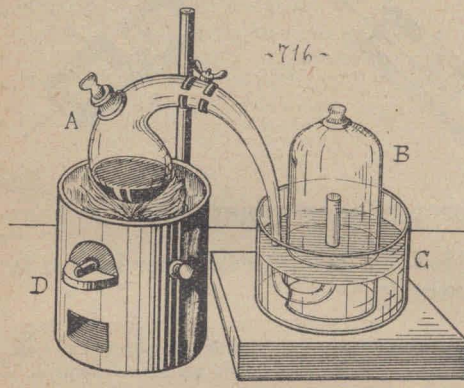
Y aun en este último caso subsiste la doctrina de Lavoisier.

A pesar de todo lo que acabamos de exponer, el principio de la indestructibilidad de la materia es un simple postulado; suficientemente cierto como para basarnos en él cuando estudiamos Física y Química; pero no tan cierto como para estribarnos en él cuando hacemos Filosofía.

¿Quién nos asegura que porque ahora nos parezca evidente este principio, no llegarán más tarde a descubrirse desintegraciones tales de la materia, que nos insinúen su verdadera génesis de destrucción insensible pero definitiva en aras de la producción de energía que se pierde emigrando hacia los «espacios infinitos» o sea hacia la nada?

1305. – Entre las experiencias efectuadas por Lavoisier para cimentar la doctrina de la INDESTRUCTIBILIDAD DE LA MATERIA y su corolario inmediato, COMBINACIÓN DE SUSTANCIAS, son curiosas las dos siguientes:

1ª Lavoisier quiso averiguar la composición del aire.



A este fin colocó mercurio en una retorta **A**, cuyo tubo de desprendimiento iba a terminar debajo de una campana **B**, cuyo aire estaba separado del ambiente mediante el agua de la cuba **C**.

El mercurio estuvo calentado por el hornillo **D**, por espacio de 11 días.

Observó Lavoisier que el volumen del aire de **B** iba disminuyendo paulatinamente.

Por otra parte, al pesar la retorta con su contenido (al cabo de los 11 días), notó que había aumentado de peso. Además descubrió que el gas contenido en **B** no era apto para conservar la vida.

¿Qué había pasado?.

El aire, que, como sabemos consta de 1 volumen de oxígeno por cada 3 de nitrógeno, había perdido su oxígeno.

En cambio el mercurio se había «OXIDADO»: a saber: *se había combinado con el oxígeno del aire.*

2º Los contemporáneos de Lavoisier creían que el agua se podía transformar en tierra mediante una prolongada ebullición.

Y Lavoisier quiso comprobar este aserto que él suponía gratuito, como efectivamente lo era.

A este objeto pesó una vasija de vidrio, colocóle agua y la cerró herméticamente, volviendo a pesarla con prolijidad.

Anotados ambos pesos (el de la vasija y el del líquido), colocó al fuego el recipiente, haciendo hervir el agua por *101 días* consecutivos.

Al fin pesó el recipiente *sin agua*, y notó que había perdido **17,4 gr.**

Hizo evaporar el agua, y ésta dejó un residuo de **20,4 gr.**

No tomando en cuenta los **3 gr.** de diferencia, que deben atribuirse al error de las distintas pesadas, resulta que el vidrio que perdió la vasija había quedado disuelto en el agua.

1306. – Divisibilidad es la propiedad que tienen todos los cuerpos de poder descomponerse en partículas muy pequeñas.

Al dividirse y subdividirse una sustancia, llegamos a su última expresión cuando obtenemos una de sus MOLÉCULAS (**43** y **44**).

Al subdividirse las moléculas, obtenemos los ÁTOMOS (**47**).

Al subdividirse los átomos, obtenemos los ELECTRONES y los NÚCLEOS, estos últimos de naturaleza aun dudosa (**52** y **53**).

Al subdividir los núcleos, parece que obtenemos *electrones y protones.*

¿ Terminará la divisibilidad de la materia en los electrones y protones ? Hay razones para suponer que no.

1307. – EJEMPLOS DE LA SUMA DIVISIBILIDAD DE LA MATERIA.

1.° – Un grano de almizcle, cuyo peso no llega a ½ decigramo, impregna todo el aire de una habitación con su fragancia; y a pesar de ello, después de varios años no ha disminuido sensiblemente su peso.

Supongamos que al fin de 5 años hubiera perdido $^1/_{10}$ de su peso, a saber gr. 0,005. En 1 año habría perdido gr. 0,001.

Como la habitación se ventiló regularmente, en ella no hubo difundido cada día ni un $^1/_{100}$ de esta cantidad, a saber gr. 0,000.01.

Suponiendo que la sala estuvo ventilada unas 10 horas diarias, ha ido renovándose el aire en forma tal, que a cada hora le podemos calcular a lo máximo gr. 0,000.001.

¿Qué cantidad de amizcle difundido por el aire habrá habido en cada segundo? ¡Claro que la respuesta no es tan obvia! Cualquiera entiende que no es racional dividir gr. 0,000001 por 3600; pero dividámoslo por 100, y obtenemos

$$\text{gr. } 0{,}000.000.01 = \mu \text{ gr. } 0{,}01 \text{ (1 centimicrogramo)}$$

La sala tiene buena capacidad. Supongámosla de $m\ 5 \times 4 \times 5 = 100\ m^3 = 100.000.000\ cm^3$.

Y como en cada cm^3 de la sala se percibe el olor de almizcle, podemos suponer que por la parte baja hay *1 partícula de almizcle* por cm^3 de ambiente.

Por lo tanto cada partícula pesará.

$$0{,}000.000.01 \div 100.000.000 = \textbf{gr } 0{,}000.000.000.000.000.1$$

Cualquiera entiende que con poco que modifiquemos las suposiciones en que hemos basado nuestro cálculo, quedará el resultado anterior sumamente modificado.

Pero siempre queda en pie esta consecuencia:

LA MATERIA ES DIVISIBLE EN PARTÍCULAS SUMAMENTES DIMINUTAS.

2.° – En las soluciones de materias colorantes se llega a medir con más precisión el peso probable de las partículas en que se descompone la materia.

Consideremos uno de los muchos casos:

Disolvemos en algunos cm^3 de alcohol, gr. 0,001 de RODAMINA EXTRA, y vertemos la solución en 10 lt. de agua. Esta queda toda teñida de rojo.

Observemos con un microscopio de mucho aumento (1000 diámetros, p. ej.) una gotita de agua, y seguiremos viéndola coloreada, sin que podamos distinguir las partículas de rodamina.

La gotita de agua que observamos puede llegar a tener 1 mm^3 o menos.

Vayamos, pues, al cálculo:

$$10 \text{ lt.} = 10.000.000 \text{ mm}^3$$

Y como en los 10 lt. había gr. 0,001 de rodamina, en cada gotita hay:

$$\frac{0{,}001}{10\,000.000} = 0{,}000.000\,000.1 \text{ gr. de rodamina}$$

Prosigamos la experiencia, echando 1 mm^3 del agua coloreada en 1 cm^3 de agua pura, y llenando con esta nueva agua un tubo de vidrio de 1 mm^2 de sección.

Miremos al trasluz, y notaremos que el agua está aun uniformemente coloreada.

Cada mm^3, pues, de esta nueva solución debe contener por lo menos. *1 molécula de rodamina.*

Volvamos al cálculo:

$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$$

Al echar 1 mm^3 de la primera solución en 1 cm^3 de agua, hemos multiplicado por 1000 el espacio ocupado por las moléculas de rodamina.

Y al observar en 1 mm^3 la nueva solución, hemos dividido por 1000 el espacio que servía de disolvente a dichas moléculas.

Total: hemos divido por 1.000.000 el espacio correspondiente a la primera solución.

Resulta, pues, que:

Una molécula de rodamina pesa menos que:

$$\frac{0{,}000.000.000.1}{1.000.000} = 0{,}000.000.000.000.000.1\ gr.$$

3.° – Basado en la experiencia y cálculo con soluciones de FLUORESCEÍNA fuertemente iluminadas, *Spring* en 1905 llegó a asentar que el átomo de hidrógeno pesa menos que $0{,}000.000^1.000.000^2.000.000^3.0025$ gr.

4.° – Podemos también formarnos una idea de la suma divisibilidad de la materia, considerando el caso de las células.

Hay células del tejido conjuntivo que miden menos de ½ micrón de diámetro.

Su volumen será

$$0{,}25^3 \times 4{,}19 = \mu^3\ 0{,}044... = mm^3\ 0.000.044.$$

Supongamos que el peso específico de dichas células sea *1*.

Pesarán mg 0,000.044 = gr. 0,000.000.044.

Toda célula está compuesta de albúmina y agua. Cada molécula de albúmina es un conjunto complicado de átomos de *carbono*, *nitrógeno*, *oxigeno* e *hidrógeno*, y de otros elementos más.

Además cada célula debe contener algunos centenares de moléculas de albúmina.

De todo lo cual se deduce que en 1 milimillonésima de gramo de albúmina debe haber muchos miles de átomos.

1308. – Porosidad es la propiedad que tienen todos los cuerpos, de tener toda su masa llena de huecos diminutos a los que denominamos POROS.

Los poros pueden ser de tres categorías: a) MICROSCÓPICOS O APARENTES: bien visibles, como los de las esponjas, el alfar (tierra cocida).

b) MICROSCÓPICOS, que se distinguen tan sólo mediante el aumento óptico.

Hasta los metales tienen poros microscópicos, a pesar del aspecto compacto de su masa.

c) INTERMOLECULARES, que son intersticios sumamente diminutos que hay entre las moléculas.

Las moléculas no se tocan: se hallan a respetable distancia unas de otras.

En los gases los espacios intermoleculares son enormes, en proporción con el diámetro de las moléculas.

En los líquidos, cada espacio intermolecular equivale a muchos diámetros moleculares.

Y aun en los sólidos más compactos las moléculas distan varios diámetros unas otras.

Solamente en un sólido que hubiera llegado al enfriamiento absoluto *se podría aceptar que las moléculas pudieran estar en mutuo contacto.*

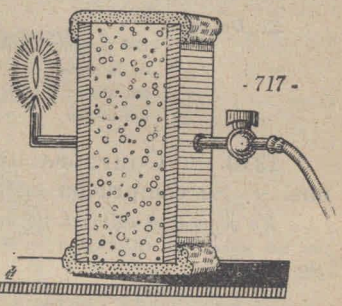
En Térmica se explicará, qué es lo que se denomina «CERO ABSOLUTO» o sea «FRÍO COMPLETO.»

1309.- Se han hecho experiencias diversas para demostrar la porosidad de los sólidos:

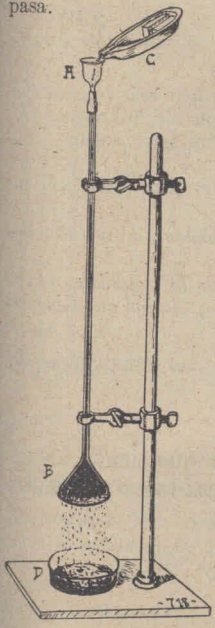
a) EXPERIENCIA DE PETTENKOFER (fig. 717).

Se ajusta a ambas caras de una placa de asperón o arenisca, dos chapas metálicas provista de sendos tubos; y se rodea el contorno de la placa con cera o lacre.

Comunicando uno de los tubos con la cañería de gas, y aplicando una llama al otro tubo, se comprobará que el gas pasa.



- 717 -



b) COMPROBACIÓN DE LA POROSIDAD DE LA MADERA:

Lluvia de Diana (fig. 718).

Se acopla un tubo barométrico a un embudo **B** de boca cilíndrica, obturada con un tapón de madera.

Se echa mercurio de modo que llene el embudo **B**, y se sigue añadiendo mercurio para llenar también el tubo.

Y se verá, que a una cierta altura del mercurio, comienza a salir de la madera una finísima lluvia de mercurio.

c) COMPROBACIÓN DE LA POROSIDAD DEL HIERRO.

El hierro incandescente es atravesado por ciertos gases como el óxido de carbono.

d) COMPROBACIÓN DE LA POROSIDAD POR MEDIO DE las burbujas de aire.

Si se echa un trozo de tiza en agua, se ven salir burbujas de aire, que ocupaban los poros.

Para evidenciar los poros de otros cuerpos, se introducen en agua caliente:

El aire aprisionado en los poros, se dilata, y sale forzosamente al exterior.

Para aplicar este procedimiento al granito «piedra de adoquín», colóquese un trozo dentro de agua, y bajo la campana neumática:

Enrarézcase el aire, etc...

e) COMPROBACIÓN DE LOS POROS DE LOS METALES MEDIANTE EL BATIDO.

Los metales, como se obtienen de la fundición tienen su densidad específica; pero si se los lamina o se los bate con un martillo, quedan más densos.

Con el batido disminuyen las dimensiones de los poros.

Ej: Densidad:

del platino fundido	= 21,50	— batido =	22.
de la plata	»	= 10,46	— laminada	10,62.
del oro	»	= 19,30	— »	19,36.
del níquel	»	= 8,35	— »	8,67.

1310. — COMPROBACIÓN DE LA POROSIDAD DE LOS LÍQUIDOS. — Se comprueba en las disoluciones:

En general el volumen de una solución de dos líquidos o de un líquido con un sólido, es inferior a la suma de los volúmenes de los dos cuerpos separados.

a) EJEMPLO DE CONTRACCIÓN DE VOLUMEN EN LA SOLUCIÓN MUTUA DE LOS LÍQUIDOS.

En un tubo largo de vidrio échese agua hasta ocupar más o menos la mitad del tubo; luego llénese el espacio restante con alcohol teñido con un color de anilina que sea soluble en agua y alcohol (ej.: eosina, azul de metileno, violeta metilo, verde metilo).

Tápese bien el tubo e inviértase repetidamente para favorecer la solución.

Cuando todo el líquido haya adquirido coloración homogénea, la solución será completa.

Se notará que a medida que avanza el proceso de la solución, se va formando en el tubo una burbuja de vapores de agua y alcohol que llenarán el vacío producido por la contracción del líquido.

b) EJEMPLO DE CONTRACCIÓN DE VOLUMEN EN LAS SOLUCIONES DE LÍQUIDO CON SÓLIDO:

El que acabamos de exponer en (**1296**)

1311. — **Permeabilidad** es la propiedad que tienen los sólidos, de poder ser atravesados por los líquidos o los gases.

La permeabilidad es una consecuencia inmediata de la porosidad.

Varias de las experiencias que acabamos de citar como comprobación de la porosidad de los sólidos, sirven para evidenciar su permeabilidad.

1312. — COMPROBACIÓN DE LA PERMEABILIDAD DE LOS METALES.

Los académicos de Florencia en 1661 quisieron averiguar si el agua era *compresible* (a saber: si perdía volumen al ser comprimida).

A este fin llenaron completamente de agua unas esferas de oro bien pulimentadas, cuya boca soldaron con escrupulosidad.

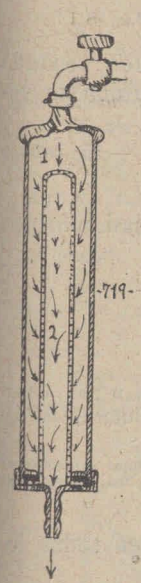
Luego trataron de abollarlas a martillazos.

¿Y cuál no fué su sorpresa al ver que la superficie de estas esferas se iba empañando al compás de los golpes que recibían?

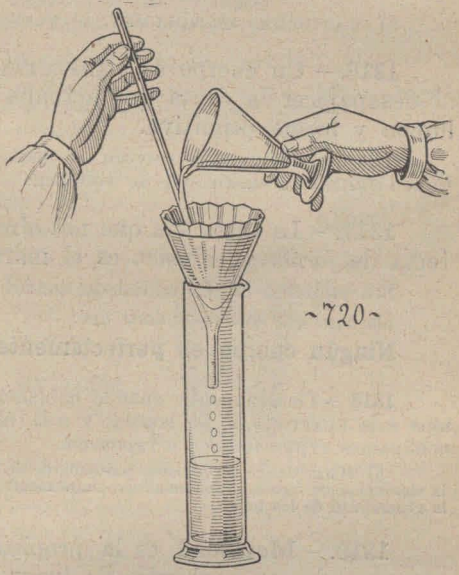
¡El agua interior trasudaba en forma de fino rocío a través de los poros del oro.

1313. — La permeabilidad de los cuerpos notablemente porosos se aprovecha cuando se procede a la filtración de los líquidos.

a) En los filtros como el de Berkefeld (fig. 719) la « bujía » **2**, es un tubo de *bizcocho de porcelana*.



-719-



-720-

LÉXICO — **Bizcocho de porcelana** = *Producto que se obtiene al retirar del horno de cerámica los objetos de* PASTA DE CAOLÍN, *antes que se produzca la fusión de esta substancia.*

Los gránulos de caolín, que ya han llegado al estado pastoso, se AGLUTINAN, *formando al enfriarse, un conjunto bien poroso.*

Aglutinarse = *Adherirse unas a otras por contacto las partes de un conjunto que antes estaba disgregado.*

b) El papel que en la fabricación no ha sido *encolado* ni muy presionado, es muy permeable; y se usa para filtrar en los laboratorios (fig. 720).

1314. — **Compresibilidad** es la propiedad que tienen los cuerpos de perder volumen cuando son comprimidos.

La compresibilidad es también una consecuencia de la porosidad.

Siendo todos los cuerpos porosos, serán todos también compresibles.

Los cuerpos más compresibles son los gases.

Algunas de las experiencias que hemos citado al estudiar la porosidad, comprueban la compresibilidad de los sólidos.

En su lugar (Hidráulica y Neumática) estudiaremos la compresibilidad de los líquidos y de los gases.

1315. – **Elasticidad** es la propiedad que tienen los cuerpos de recuperar su volumen y forma primitiva cuando desaparece la causa que lo había modificado.

Existen, pues, dos clases de elasticidad:

a) ELASTICIDAD DE VOLUMEN, b) ELASTICIDAD DE FORMA.

1316. – Un cuerpo es PERFECTAMENTE ELÁSTICO, cuando al desaparecer la causa que actuaba sobre él, recupera su volumen y forma primitiva.

Los líquidos y gases carecen de elasticidad de forma. — En cambio tienen PERFECTA elasticidad de volumen.

1317. – La sustancia que nos ofrece la elasticidad más perfecta de *forma* y *volumen* es el marfil.

Sin embargo la elasticidad del marfil no es absoluta.

De aquí que podamos decir que:

Ningún cuerpo es perfectamente elástico.

1318. – Generalmente cuando hablamos de ELASTICIDAD nos referimos a la ELASTICIDAD DE FORMA; y a la elasticidad de volumen, la denominamos *expansibilidad o expansión.*

Al tratar de las propiedades particulares de los sólidos, hablaremos ex-profeso de la elasticidad de forma, denominándola simplemente "*elasticidad*" como es costumbre en la generalidad de los textos.

1319. – **Movilidad** es la propiedad que tienen todos los cuerpos, de ser cambiados de lugar.

Esta propiedad es una consecuencia directa de la inercia.

1320. – **Atracción** es la propiedad que tienen las distintas porciones de materia, de tratar de acortar las distancias que las separan entre sí.

Según como se presente la atracción recibe los nombres de: GRAVITACIÓN, COHESIÓN, ADHESIÓN Y AFINIDAD QUÍMICA.

1321. – Gravitación o ATRACCIÓN UNIVERSAL, es la atracción que existe entre los cuerpos.

Véase (**61** h. **63**)

1322. – Cohesión es la atracción que existe entre las moléculas de cada cuerpo.

Llámase también ATRACCIÓN MOLECULAR.

La cohesión es grande en los sólidos: es pequeña en los líquidos, y es nula, o por lo menos inapreciable en los gases.

1323 – En los sólidos la cohesión varía mucho según las sustancias, siendo causa más o menos directa de las siguientes propiedades:

DUREZA, TENACIDAD, DUCTILIDAD,
MALEABILIDAD, FRAGILIDAD y ELASTICIDAD

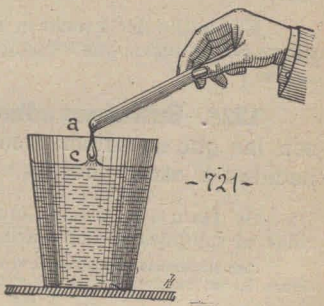
que los sólidos poseen en mayor o menor grado.

Algunas de estas propiedades, como la *maleabilidad*, no son comunes a todos los sólidos; pero podemos suponer que para algunos lo son en ínfimo grado.

Trataremos de estas propiedades en el párrafo siguiente.

1324. – Adherencia o ADHESIÓN es la atracción que se produce entre dos superficies que están en contacto.

Para distinguir entre cohesión y adherencia examínese la (fig. 721).

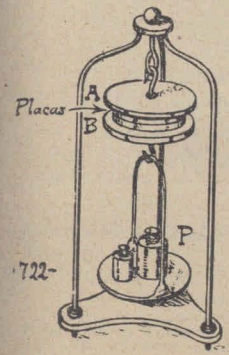


-721-

En c hay COHESIÓN, y en a hay ADHERENCIA.

Ambas suertes de atracción son moleculares, y difieren en que:

La COHESIÓN existe entre las moléculas de un mismo cuerpo; la adherencia, en cambio, tiene lugar entre las moléculas superficiales de dos cuerpos que están en *contacto*.



-722-

1325. – ADHERENCIA ENTRE DOS SÓLIDOS. — Para que pueda apreciarse se requiere:

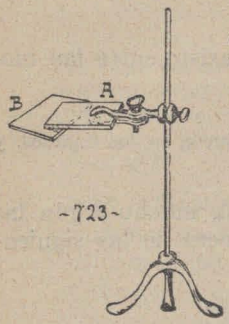
a) que las dos superficies estén perfectamente pulimentadas:

b) que ambas superficies coincidan en buena parte de su extensión;

Se pone de manifiesto el poder «ADHESIVO» de las superficies tersas mediante los PLANOS DE MAGDEBURGO (fig. 722).

A y **B** = *prensas para sujetar las placas de ensayo.*

P = *peso que trata de vencer la* ADHESIÓN *de las placas.*



-723-

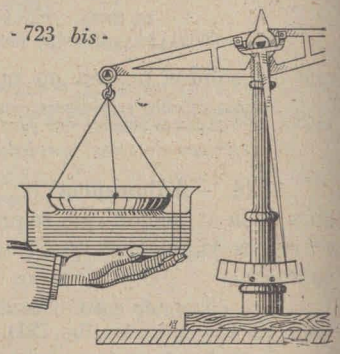
Como placas de ensayo, sirven las de mármol, vidrio, y aún de plomo recién cortado o de cualquiera metal bien bruñido.

1326. – Se aumenta la adherencia entre dos sólidos, mojando las superficies que van a estar en contacto.

Para comprobarlo úsense dos láminas de vidrio, colocándolas como se indica en (fig. 723).

En este caso contribuye al efecto de la experiencia, no sólo la *adherencia* entre el agua y el vidrio; sino también la *cohesión* de las moléculas del agua.

-723 *bis*-



1327. – Para medir la adherencia entre sólido y líquido se recurre a una balanza (fig. 723 -bis).

El platillo de la balanza se sustituye por la placa que se quiere ensayar.

1328.– Sustancias adhesivas son las que se adhieren con tenacidad a otros cuerpos.

Se las usa en estado líquido o de solución, para que queden adheridas al solidificarse por enfriamiento o por pérdida del disolvente.

Las sustancias adhesivas sirven de base a la fabricación de colas, cementos o mástiques, lacres, barnices y pinturas en general.

Ejemplos de sustancias adhesivas. —

Gomas arábiga y de Senegal, dextrina: solubles en agua.

Gelatina (cola de carpintero y de pescado): soluble en agua y muy soluble en ácido acético.

Resinas: solubles en alcohol, aguarrás, nafta, éter.

Goma - laca: soluble en alcohol.

Aceite de linaza: soluble en aguarrás, nafta.

El aceite de linaza es líquido; pero al combinarse con el oxígeno del aire se *resinifica*.

1329. - Como ejemplo de adherencia entre sólido y liquído, ver (fig 721).

En su lugar (Hidráulica y Neumática) entraremos en mayores detalles sobre la adherencia de los líquidos y de los gases.

1330. – ¿Por qué unos sólidos pueden ser mojados y otros no?

a) Cuando la adherencia es mayor que la cohesión, el líquido moja al sólido.

Ej.: el agua, el alcohol, el aceite mojan el vidrio, la madera, las piedras.

b) Cuando la cohesión es mayor que la adherencia, el líquido no moja al sólido.

Ej.: El agua y el alcohol no mojan las superficies engrasadas; el mercurio no moja el vidrio.

1331. – Cuando las gotas no mojan la superficie de sostén, adquieren forma esférica, debido a la tensión superficial, que es una consecuencia de la cohesión.

En Hidráulica explicaremos qué es la tensión superficial.

Aquí solamente diremos que es una fuerza que se manifiesta en la superficie de los cuerpos (máxime de los líquidos), y es causa de curiosos fenómenos que a menudo se presentan como verdaderas paradojas.

La capilaridad que también estudiaremos en Hidráulica es una consecuencia directa de la adherencia y cohesión.

1332. – **Afinidad química** es la atracción que existe entre los átomos de cada molécula.

La afinidad química es variable entre las distintas especies de átomos.

A ello es debido el sinnúmero de transformaciones que se pueden obtener al poner sucesivamente en contacto diversas sustancias.

Ej.: Si mojamos cal viva la transformamos en cal apagada:

$$Ca\,O + O < \begin{matrix} H \\ H \end{matrix} = Ca < \begin{matrix} OH \\ OH \end{matrix}$$

(cal viva) (agua) (cal apagada)

Como se ve, el átomo de calcio (Ca), que antes estaba enlazado a un átomo de oxígeno (O), al ponerse en contacto con el agua se enlazó con dos oxígenos, y éstos a su vez quedan enlazados con sendos hidrógenos.

1333. – Reacción química es toda transformación de sustancias.

Ej.: la que acabamos de explicar.

Hay cuatro suertes de reacciones químicas: a) por síntesis, b) por análisis c) por sustitución d) por intercambio.

1334. – Síntesis química es la reacción que se produce mediante una SUMA de dos o más componentes.

Ej.: $CaO + H_2O = Ca(OH)_2$
(cal viva) (agua) (cal apagada)

SINONIMIA. — **Síntesis** = COMBINACIÓN, COMPOSICIÓN, *reacción por asociación.*

1335. – Análisis químico es la reacción por la cual una sustancia se descompone dando origen a dos o más sustancias distintas de ella.

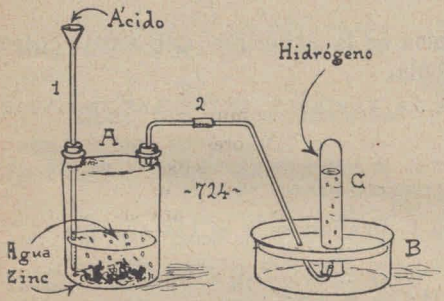
Ej.: Usando el VOLTÁMETRO (fig. 9) como se indicó en (**51** — b), se descompone el agua en dos volúmenes de *hidrógeno* y uno de *oxígeno:*

$$H_2O = H_2 + O$$

SINONIMIA. — **Análisis** = DESCOMPOSICIÓN, DESDOBLAMIENTO, *reacción por disociación.*

1336. – Sustitución es la reacción que se produce cuando una sustancia pierde parte de sus componentes, adquiriendo en cambio otros.

Ej.: En un gasógeno como el de (fig. 724), se echa un poco de agua y trozos de *zinc.*



Acoplado el gasógeno como se ve en la figura, se echa *ácido sulfúrico* por el tubo de seguridad 1; e inmediatamente se ve que el líquido burbujea.

En el tubo de ensayo al principio se recoge aire e *hidrógeno.* Pero cuando queda desalojado todo el aire que había en el gasógeno, no se recogerá en el tubo de ensayo más que hidrógeno (1):

$$SO_4H_2 + Zn = SO_4Zn + H_2$$
(ácido sulfúrico) (sulfato de zinc)

El sulfato de zinc, que es sólido, queda disuelto en el agua del gasógeno.

EL ALUMNO NO DEBE EFECTUAR ESTA EXPERIENCIA ANTES DE CONOCER BIEN TODAS LAS PRECAUCIONES QUE SE REQUIEREN PARA EVITAR GRAVES DESGRACIAS.

1337. – Intercambio o DOBLE SUSTITUCIÓN es la reacción que tiene lugar cuando dos sustancias cambian mutuamente parte de sus elementos.

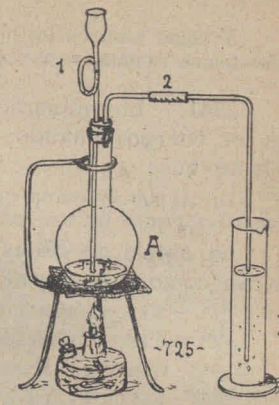
(1). En cualquier texto de Química podrá enterarse el alumno de las experiencias que sirven para comprobar que en el tubo de ensayo lo que se recoge es hidrógeno.

Ej.: Si mezclamos sal de cocina con ácido sulfúrico, y calentamos (fig. 725), saldrá por el tubo abductor **2** ácido clorhídrico (ác. muriático)

$$SO_4H_2 + ClNa = SO_4HNa + ClH$$

(ác sulf.) (sal de cocina) (bisulfato de sodio) (ác. clor.)

Se comprueba que lo que sale por el tubo es un ácido, haciéndole burbujear en agua con tintura azul de tornasol. El gas irá disolviéndose y enrojeciéndose el agua(1).



5° Propiedades de los sólidos

1338. – Hay propiedades generales, que son muy notables en los sólidos, y muy poco en los líquidos y gases; o por lo menos es difícil saber apreciarlas en ellos.

Tales son entre otras: la DUREZA, la DUCTILIDAD, la MALEABILIDAD, la FRAGILIDAD y la ELASTICIDAD DE FORMA.

Y aun en los sólidos existen en grado tan variable que, mientras en unos son sumamente evidentes, en otros es muy difícil observarlas.

Son éstas las propiedades que muchos autores denominan PARTICULARES, sin que haya razón alguna para denominarlas así, puesto que este calificativo correspondería a propiedades exclusivas de una o varias sustancias, y no a la generalidad de ellas, aun cuando varíe mucho su graduación.

1339. – **Dureza** es la resistencia que oponen los cuerpos a ser rayados por otros.

Contrario a "DUREZA" *es* "BLANDURA"; *pero en nuestro caso podemos expresarnos mejor diciendo que* "los cuerpos que no son DUROS, son **disgregables**".

Cuanto más DUREZA tiene un cuerpo, tanto menos DISGREGABILIDAD tiene.

1340. – La disgregabilidad no es en rigor una propiedad opuesta a dureza, es simplemente un grado pequeño de dureza.

LA DUREZA ES CONSECUENCIA DIRECTA DE LA COHESIÓN.

(1) En cualquier texto de Química se indica como se reconoce que lo que se desprende es ácido CLORHÍDRICO.

Y como también los líquidos y los gases tienen cohesión, también ellos tienen DUREZA POSITIVA, aunque sean sumamente disgregables.

1341. – Los minerólogos tienen muy en cuenta la dureza de los cuerpos cuando tratan de determinar su naturaleza, puesto que:

EL MAYOR O MENOR GRADO DE DUREZA ES UNA DE LAS PROPIEDADES CARACTERÍSTICAS DE LAS ESPECIES QUÍMICAS.

La **escala de Mohs** contiene diez cuerpos que se consideran como *patrones de dureza:*

1°. – TALCO laminar blanco: $(SiO_3)_4H_2Mg_3$.
2°. – YESO cristalizado: $SO_4Ca + H_2O$.
3°. – CALCITA o Espato de Islandia: CO_3Ca.
4°. – FLUORITA o Espato fluor: FL_2Ca.
5°. – APATITA: $(PO_4)_3Ca_4.(F,Cl,OH)Ca$.
6°. – FELDESPATO ORTOSA: Si_3O_8ALK.
7°. – CUARZO hialino o Sílice cristalizada e incolora: SiO_2.
8°. – TOPACIO: $SiO_4Al_2Fe_2$.
9°. – CORINDÓN o Alúmina mineral: Al_2O_3.
10°. – DIAMANTE: C.

Esta escala está dispuesta de modo que cada patrón es rayado por el que le sigue:

De modo que el TALCO es el patrón más blando; y el DIAMANTE es el más duro (1).

El TALCO y el YESO son rayados por la uña; la CALCITA es rayada por los clavos comunes; la FLUORITA, la APATITA y el FELDESPATO son rayados por el acero templado; el CUARZO y los patrones siguientes dan chispas con el eslabón.

1342. – **Esclerómetro** (fig.726) es un aparato que sirve para medir la dureza en forma más precisa que la que se consigue al aplicar la escala de Mohs.

AB = fiel de balanza.

En **B** se colocan las pesas con que se mide la presión necesaria para rayar el mineral.

En **p** está la punta de *acero* o de *diamante* usado para rayar.

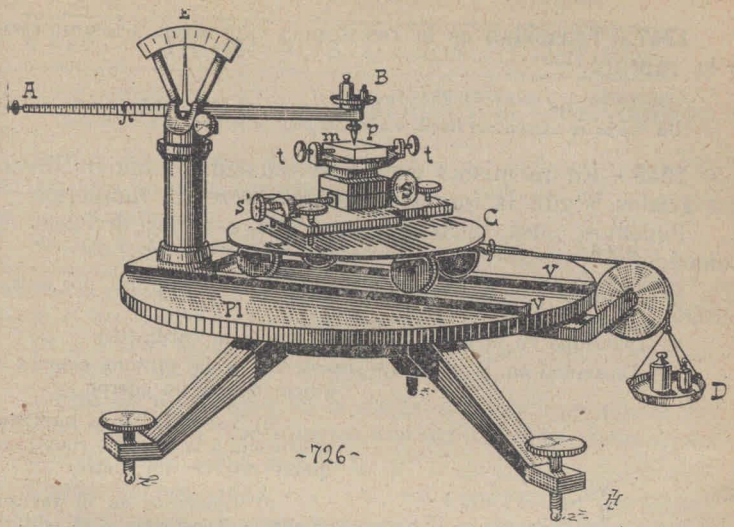
En **m** se coloca el mineral.

t y **s** = tornillos para presionar o cambiar de posición el mineral.

C = carro movido por las pesas que se colocan en el platillo **D**.

El esclerómetro ha comprobado lo que ya se suponía de antemano, a saber que: LOS GRADOS DE DUREZA DE LA ESCALA DE MOHS no son matemáticos: *son empíricos,*

(1) El DIAMANTE es el mineral más duro que se conozca; pero hay sustancias químicas artificiales, más duras que él; tales como el CARBORUNDO o carburo de silicio, el BORURO DE CARBONO y el CARBOSILICIURO DE TITANO.



1343.- Ductilidad es la propiedad que tienen los cuerpos, de poder reducirse a hilos, mediante la tracción.

Los metales son en general los cuerpos más dúctiles.

Los cuerpos, en el *estado pastoso* (entre sólido y líquido) son muy dúctiles.

El vidrio, p. ej.: con el que se llegan a obtener hilos finísimos, cuyo conjunto (LANA DE VIDRIO) se usa para filtrar sustancias corrosivas.

Como ejemplo del reducido espesor que se puede dar a los hilos metálicos, baste citar que se han obtenido hilos tan sutiles de platino, que 1000 metros no llegaron a pesar gr. 0,05.

1344.- Llámanse hileras los aparatos para reducir a hilo las varillas de metal.

Para ilustrarse en este asunto, interesante desde el punto de vista tecnológico, remitimos al alumno a la Enciclopedia de Espasa, artículos: HILERA, TREFILERÍA, ALAMBRE y CABLE.

1345.- Maleabilidad es la propiedad que tienen los cuerpos, de poder reducirse a láminas mediante la presión.

Los metales son en general muy maleables.

Los cuerpos en *estado pastoso* son también maleables.

Faraday llegó a obtener hojas de oro de mm. 0,000,001.

Los «*panes de oro*» que se usan para dorar tienen de mm 0,000.3 a mm 0,000.03 de espesor.

1346.- Laminadores son los aparatos para reducir a hojas los trozos de metal.

Consúltese en Espasa el artículo: LAMINADOR.

1347.- Tenacidad es la resistencia que ofrecen los cuerpos a la ruptura.

Contrario a TENAZ es FRÁGIL.

Un cuerpo es sumamente **frágil**, cuando es muy poco TENAZ; y viceversa.

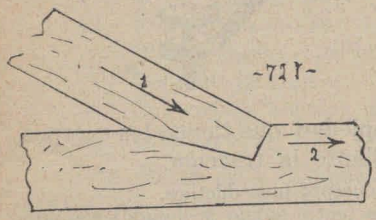
1348.- En un mismo cuerpo la tenacidad adquiere diversos grados, según la forma en que se pretenda romperlos.

Podemos, pues, decir que hay seis especies diversas de tenacidad:

a) Tenacidad en la **tracción** = resistencia a la ruptura por estiramiento.

b) Tenacidad en la **presión** = resistencia a la trituración.

c) Tenacidad en la **flexión** = resistencia a la ruptura cuando se quiere doblar un cuerpo.



-727-

d) Tenacidad en la **torsión** = resistencia a la ruptura cuando se quiere retorcer un cuerpo.

e) Tenacidad en el **deslizamiento** = resistencia a la pérdida de trozos por empuje longitudinal (fig. 727).

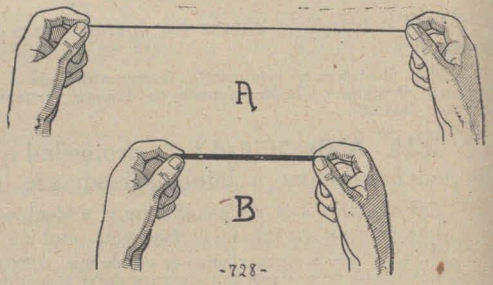
f) Tenacidad en el **corte** = resistencia a los tajos.

1349.- La ELASTICIDAD de forma es una propiedad íntimamente ligada a la tenacidad.

Habrá, pues, seis tipos de elasticidad, de TRACCIÓN, de PRESIÓN, de FLEXIÓN, de TORSIÓN, de DESLIZAMIENTO y de HENDEDURA.

Los cuerpos poseen diverso grado de elasticidad según la forma como se actúe sobre ellos.

La goma caucho nos ofrece un ejemplo muy patente de esta diversidad de grado (fig. 728):



-728-

Cede al ser estirada; pero cuando la soltamos, se encoge y ensancha hasta recuperar las dimensiones primitivas: *tiene buena elasticidad de tracción.*

En cambio la goma tiene poca elasticidad de flexión.

El vidrio y el acero nos ofrecen buenos ejemplos de elasticidad de flexión.

VIII.º - Resistencia de los Materiales.

1.º - Resistencia al alargamiento y al acortamiento.

1350. - El estudio de la RESISTENCIA DEL MATERIAL de construcción se basa esencialmente en la *elasticidad* y *tenacidad* de los cuerpos.

Existiendo íntima relación entre las seis formas de elasticidad y tenacidad, tomaremos como base de nuestro estudio la resistencia de los cables y varillas al ALARGAMIENTO *y al* ACORTAMIENTO*; para luego completar el estudio en lo que se refiere a los otros casos de elasticidad y tenacidad.*

En la resistencia del material hay que considerar primero dos límites: a) LÍMITE DE ELASTICIDAD, b) LÍMITE DE TENACIDAD.

Límite de elasticidad es la carga máxima que puede soportar un cuerpo sin experimentar una deformación permanente.

Lo indicaremos con el símbolo **Q**.

Límite de tenacidad o CARGA DE RUPTURA es la menor carga que se requiere para provocar la ruptura de un cuerpo.

Lo indicaremos con el símbolo **K**.

1351. - CONSIDERACIONES SOBRE EL LÍMITE DE ELASTICIDAD.

1º. PRINCIPIO DE COULOMB. - En rigor podemos considerar que toda carga **P** produce en las varillas un alargamiento (o contracción longitudinal) que se puede descomponer así.

$$d = \Delta L + \Delta' L$$

L (*longitud de la varilla*)

d (*incremento total de longitud*), que en la atracción es positivo, y en la presión es negativo.

ΔL es un alargamiento o acortamiento temporal, denominado «ALARGAMIENTO O ACORTAMIENTO ELÁSTICO».

Δ'L es un alargamiento o acortamiento PERMANENTE.

Cuando $P < Q$

entonces **L'Δ** el sensiblemente igual a CERO.

2.º Al quitarse el peso **P** que actuaba sobre la varilla, desaparece **ΔL**, y subsiste **Δ'L**.

De modo que aun cuando se pasa el límite de elasticidad, se produce DEFORMACIÓN ELÁSTICA, junto con la deformación permanente.

3.º Si después que una varilla recibió una tracción o presión $P > Q$, se le aplica otro peso:

P' (en el mismo sentido)

No experimentará deformación permanente, $\Delta'\mathbf{L}$ sino tan sólo la elástica $\Delta\mathbf{L}$ que corresponde al peso $\mathbf{P}'$

De aquí resulta que, para conocer el efecto de una presión o tracción, es necesario conocer las presiones o tracciones anteriormente experimentadas, por la varilla que se ensaya.

4.° La deformación elástica $\Delta\mathbf{L}$ es proporcional a la carga **P**, aun cuando **P** produzca deformación permanente.

5.° De lo dicho, resulta que en las deformaciones por tracción o presión existen dos causas de deformación:

a) La lucha contra la cohesión que trata de mantener las moléculas a una cierta distancia.

Su efecto es la DEFORMACIÓN ELÁSTICA.

b) La lucha contra la cohesión que impide el deslizamiento de las moléculas, obligándolas a conservar su relación mutua de lugar.

Cuando se logra dislocar el conjunto de moléculas, se produce una DEFORMACIÓN PERMANENTE.

6.° Los distintos grados de DUCTILIDAD y de MALEABILIDAD son efecto de la mayor o menor facilidad con que se puede provocar el deslizamiento de las moléculas en las distintas sustancias.

Todo lo que hasta aquí se dijo, es aplicable a las seis formas de elasticidad.

Las palabras *elástico, frágil, maleable, dúctil* y símiles aplicadas a ciertos cuerpos en forma exclusiva, no son *científicas* sino simplemente *técnicas;* y deben entenderse como sigue:

Cuerpos **elásticos**: aquellos en que no se llega al límite de elasticidad sino mediante cargas considerables.

Ej.: marfil, vidrio, acero, goma, caucho.

Cuerpos **inelásticos**: aquellos en que se llega al límite de elasticidad con una pequeña carga.

Ej.: plomo.

Cuerpos **tenaces**: aquellos en que $\mathbf{K} > \mathbf{Q}$.

Cuerpos **frágiles**: aquellos en que $\mathbf{Q} > \mathbf{K}$.

Cuerpos **dúctiles** y **maleables**: los tenaces en los que **Q** es muy inferior a **K**.

Cuerpos **duros**: los que son tenaces contra la hendedura o corte.

Cuerpos **blandos**: los que son frágiles en lo referente a hendedura o corte.

1352. – Histéresis elástica o ESLATICIDAD RETARDADA es la lentitud que se observa tanto al producirse la *deformación elástica* cuanto al recuperarse la forma primitiva.

Weber en 1835 observó que un hilo de seda sometido a una tracción experimentó un estiramiento inmediato, seguido de un estiramiento lento que duró más de 36 horas.

Al suprimir la carga, el hilo se encogió de inmediato, tan sólo parcialmente; y no recuperó la longitud primitiva sino a los 20 días.

En unos cuerpos la his'éresis elástica es muy notoria.

Ej.: caucho, gutapercha, vidrio, plomo.

En cambio en otros es débil y hasta insensible.

En la generalidad de los metales es insensible.

1353. – **Plasticidad** es la propiedad de los cuerpos, de poder ser deformados con cargas muy inferiores a **Q**, cuando la acción de dicha carga es muy prolongada; o viceversa por cargas enormes aplicadas a toda la superficie del cuerpo.

No hay que confundir, pues, la PLASTICIDAD con la *maleabilidad*, la *ductilidad* y la *inelasticidad* en general.

La plasticidad es efecto de deslizamiento de las moléculas lo mismo que la deformación permanente que acabamos de estudiar; pero en ella los efectos aparecen desproporcionados con las causas, si se los quiere medir con el mismo criterio.

1354. – Teniendo en cuenta todo lo que se acaba de exponer, se entenderán bien los conceptos que siguen.

1355. – **Coeficiente de alargamiento** o DE ACORTAMIENTO, es el incremento temporal que adquiere una varilla de **1m.** de largo y **1mm².** de sección, al someterla a las carga de **1Kg.**

$$\alpha = \frac{\Delta L.s}{L.\ P}$$

$\frac{\Delta L.s}{\propto LP}$ $\frac{\propto LP}{\Delta L.s}$

α = (Coeficiente de alargamiento o de acortamiento)

1356. – **Módulo de elasticidad** o MÓDULO DE YOUNG es el número recíproco de α.

$$E = \frac{1}{\alpha} \qquad E \text{ (}\textit{módulo de elasticidad}\text{)}$$

De aquí resulta que $\frac{\Delta L.s.E.}{LP}$

1357. – LEY DE HOOKE. – La fórmula sintética anterior:

$\frac{LP}{\Delta L.s.E.}$ nos enseña que $\Delta L = \frac{L.P}{s.E}$

Lo que podemos expresar así:

El alagarmiento elástico de un cuerpo prismático sujeto a la tracción es directamente proporcional a la longitud del cuerpo y al peso de tracción; e inversamente proporcional a la sección transversal de dicho cuerpo.

En este enunciado no figura el módulo de Young, que para cada sustancia es una constante.

1358. - SIGNIFICADO DEL MÓDULO DE YOUNG.

Si suponemos que una varilla de 1 mm² de sección bajo una cierta tracción llega a duplicar su longitud, tendremos que

$$L = \Delta L$$

Aplicando, pues, la fórmula anterior, obtenemos

$$L = \frac{L \cdot P}{1 \times E}$$

de donde resulta que $L.E = L.P$

o sea que $E = P$

Como consecuencia:

EL MÓDULO **E** REPRESENTA EL PESO NECESARIO PARA QUE UNA VARILLA DE **1 mm²** DE SECCIÓN DUPLIQUE SU LONGITUD EN CONSECUENCIA DE LA TRACCIÓN.

1359.- Límite unitario de elasticidad es el límite de elasticidad para una varilla de 1 mm² de sección.

$$q = \frac{Q}{s}$$



q (*límite unitario de elasticidad*)
Q (*límite de elasticidad*)
s (*sección de la varilla*)

1360. – **Carga unitaria de ruptura** O COEFICIENTE DE RUPTURA es la carga de ruptura para una varilla de **1 mm²** de sección.

$$k = \frac{K}{s}$$



K (*carga de ruptura*)
k (*coeficiente de ruptura*)
s (*sección de la varilla*)

1361.- El coeficiente **k** tiene dos valores distintos, según que la carga actúe por poco tiempo o por mucho tiempo.

Distinguiremos, pues, entre;

k (para la ruptura brusca), y **k'** (para la ruptura lenta)

Siempre se tendrá que $k > k'$

Por eso **k** ha recibido el nombre de COEFICIENTE ABSOLUTO de ruptura, y es el que figura en la generalidad de las tablas.

Ej.: en el *acero estirado* k varía entre 89 y 99; y k' vale 70.

TABLA N° 13

RESISTENCIA A LA TRACCIÓN (Metales comunes)

Metal		Condiciones	q	E	k
Hierro dulce	forjado o estirado	el más fuerte	32	21.000	61
		el más débil			25
	en barras	—	14	20.000	40
	laminado o palastro laminado	tracción longitudinal	19	21.000	36
		tracción transversal			33
		tracción oblicua			34
	alambre sin recocer	diámetro = 0,23 mm	32	21.000	90
		diámetro > 3 mm			50
	alambre recocido	—	5	20.000	48
Acero	dulce	piezas pequeñas	33	22.000	70
		piezas grandes			42
	dulce cementado	—	> 30	22.000	84
	fundido o de cementación (sin templar)	piezas pequeñas	> 30	22.000	106
		piezas grandes			30
	templado	—	> 66	30.000	—
	estirado	—	—	22.000	de 86 a 99
	acero - níquel	para puentes	38	20.900	60
	Bessemer	—	30	21.500	55
Fundición	acerada	—	21	21.500	de 35 a 70
	común	mínimo	7,5	7.500	12
		máximo		10.500	32
Cobre	lam., estirado o batido	—	12	12.500	40
	alambre (sin recocer)	diámetro < 1 mm	12	6.400	70
		diámetro hasta 2 mm			50
		diámetro > 2 mm			40
	recocido	—	3	10.500	31
Latón	hojas	—	—	de 8.000 a 10.000	12,5
	alambre (sin recocer)	diámetro < 1 mm	—		78
		diámetro hasta 2 mm	—		48
		diám. > 2 mm (cal. inf)			29
Bronce	laminado o batido	—	—	de 8.000 a 10.000	25
	fundido	—	—		15
Plomo	fundido	—	0,25	1.800	1,25
	laminado	—	—	500	1,35
	alambre	diámetro 4 mm	0,4	700	2,2

TABLA N° 14

RESISTENCIA A LA TRACCIÓN (Otros cuerpos)				
SUSTANCIA		q	E	k
Aluminio		—	2.100	65
Plata	laminada	11	7.270	29
	recocida	3	7.140	16
Oro	puro	—	—	10
	aleación 99,8 %	—	—	de 11 a 14
Estaño	fundido	—	—	3,2
	recocido	—	—	1,7
Zinc	fundido	—	8.000	6
	laminado	—	12.000	5
	estirado	—	13.000	12,8
Platino	laminado	26	17.000	34
	recocido	14	15.500	25
Vidrio		—	7.000	2,5

1362. – **Coeficiente de seguridad** es la carga que por mm^2 de sección se admite en las construcciones.

Lo indicaremos con k

Factor de seguridad es el número que multiplicando a **k**, nos da k.

En los metales vale $^1/_6$ *y en las maderas* $^1/_{10}$.

$$\text{P. l. t.} < \begin{matrix} \text{En los metales } k = {}^1/_6\,\mathbf{k} \\ \text{En las maderas } k = {}^1/_{10}\,\mathbf{k} \end{matrix}$$

2.° – Tablas y problemas de resistencia

1363. – Aunque no hay dos autores que coincidan en los valores que se atribuyen a los coeficientes **q**, α, **E**, **k** y **k'**, damos a fuer de curiosidad las cuatro tablas adjuntas, que el lector aceptará con beneficio de inventario.

TABLA N.° 15

RESISTENCIA A LA TRACCIÓN (Maderas)

MADERA	Forma de la tracción	E	k
Roble	paralela a las fibras	921	6,49
	perpendic. a las fibras	189	0,58
	perpend. a las fibras y a un radio	130	0,41
Pino	paralela a las fibras	564	2,48
	perpendic. a las fibras	98	0,26
	perpend. a las fibras y a un radio	29	0,20
Alamo	paralela a las fibras	517	1,97
	perpendic. a las fibras	73	0,15
	perpend. a las fibras y a un radio	39	0,21
Haya	paralela a las fibras	980	3,57
	perpendic. a las fibras	270	0,88
	perpend. a las fibras y a un radio	159	0,75
Arce	paralela a las fibras	1.021	3,58
	perpendic. a las fibras	157	0,72
	perpend. a las fibras y a un radio	73	0,37
Acacia	paralela a las fibras	1.260	7,93
	perpend. a las fibras y a un radio	——	1,23

1364. – OBSERVACIONES. – 1ª. Toda varilla suspendida verticalmente tiene una longitud límite, pasada la cual se rompe por su propio peso.

2ª. Para calcular el coeficiente de seguridad k hay que distinguir entre los casos de esfuerzos constantes y los de esfuerzos bruscos e intermitentes *(ver* **1362***)*.

Así: a) para los cables metálicos:
en el primer caso: $k = \frac{1}{4}\,k$
en el segundo caso: $k = \frac{1}{8}\,k$
b) y en general para los metales:
usados en construcciones: $k = \frac{1}{6}\,k$
usados en las máquinas: $k = \frac{1}{10}\,k$

3ª. También varía el coeficientes **k** según el diámetro de las varillas debido a la tensión superficial.

Si el diámetro es pequeño, **k** es mayor como se puede observar en la TABLA Nº 13

4ª. Los coeficiente y módulos de tracción se aplican también a la presión; pero sólo para los valores muy pequeños de **ΔL.**

Para los demás casos consúltese la siguiente tabla:

TABLA Nº 16

Resistencia a la presión				
Material	Q	E	k	*k*
Acero forjado	14	25.000	75	10
Acero fundido	—	25.000	80	8
Hierro dulce	14	20.000	30	7
Fundición	15	10.000	70	4
Bronce	—	6.500	50	3
Roble, nogal	2	1.400	7	1
Abeto, arce pino	—	700	5	0,6
Vidrio	—	7.000	13	—
Ladrillos	—	1.000	1,5	—

1365. – PROBLEMA 1º *¿Un alambre de cobre de* **3 mm** *de diámetro y de* **5 m** *de largo soporta* **18 Kg** *de tracción:*

¿Cuál es su alargamiento elástico?

SOLUCIÓN



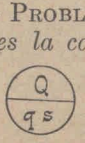
$$\Delta L = \frac{L.P}{s.E}$$

$$x = \frac{5 \times 18}{1{,}5^2 \times 3{,}14 \times 6.400} = 0{,}002\text{m} = 2\text{mm}$$

1366. – PROBLEMA 2º. – *En el mismo caso anterior:*

¿Cuá es la carga con que se llega al límite de elasticidad?

SLUCIÓN



$Q = q.s$ $\qquad x = 12 \times 1{,}5^2 \times 3{,}14 = 84{,}78$ Kg

1367. – PROBLEMA 3°. *En el mismo caso anterior: ¿Cuál es la carga que determina la ruptura brusca?*

SOLUCIÓN $K = k.s$

$$x = 40 \times 1{,}5^2 \times 3{,}14 = 282{,}6 \text{ Kg.}$$

1368. – PROBLEMA 4° – *En el mismo caso anterior: ¿Cuál es la carga que se admite en la práctica?*

SOLUCIÓN: a) Si el esfuerzo es constante:

$$K = \tfrac{1}{4} K$$

$$x = \tfrac{1}{4} \cdot 282{,}6 = 70{,}65 \text{ Kg.}$$

b) Si hay esfuerzos bruscos e intermitentes:

$$K = \tfrac{1}{8} K$$

$$x = \tfrac{1}{8} \cdot 282{,}6 = 35{,}33 \text{ Kg.}$$

1369. – PROBLEMA 5°. – *Una columna de fundición,* de **3 1/2 m.** *de altura y de* **4 dm²** *de sección soporta* **15 toneladas** *de presión: ¿Qué acortamiento experimenta?*

SOLUCIÓN



$$\Delta L = \frac{L.P}{s.E}$$

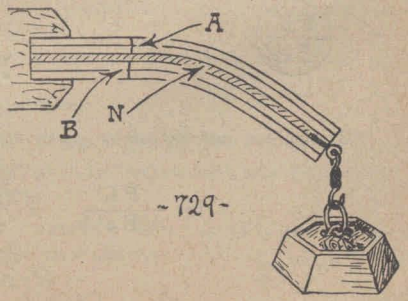
$$x = \frac{3{,}5 \times 15.000}{400 \times 10.000} = 0{,}00013 \text{ m} = 0{,}13 \text{ mm}$$

3.° - Observaciones

1370. – Para las demás formas de elasticidad y tenacidad subsisten los conceptos referentes a las magnitudes **q**, α, **E**, y **k**; pero sus valores cambian para cada una de estas formas.

1371. – Al estudiar la FLEXIÓN hay que tener en cuenta a qué se da el nombre de FIBRAS NEUTRAS, y cuál es el motivo de esta distinción.

Toda viga que se flexiona podemos considerarla como formada por una superposición de láminas conforme lo indica a fig. 729.



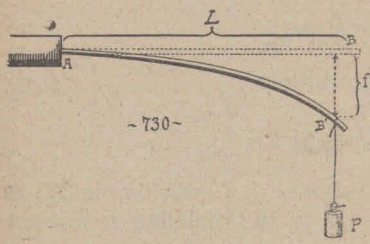
-729-

Fibra neutra o CAPA NEUTRA es la lámina que ocupa el centro del haz.

En nuestro caso, **N** es la capa neutra.

1372. – Al flexionar una viga hacia abajo, las fibras que se hallan por encima de la capa neutra, SUFREN UN ALARGAMIENTO; y las que se hallan por debajo, SUFREN UN ACORTAMIENTO.

En cambio las fibras de la capa neutra, ni se encogen, ni se estiran.



~730~

En nuestro caso, **A** es la capa que se estira; y **B** es la que se encoge.

1373. – En las deformaciones elásticas por flexión, se llama **flecha** la distancia entre el VIENTRE de flexión y su posición inicial (fig. 730)

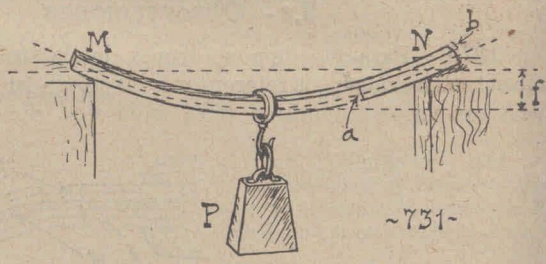
El cálculo matemático y la experiencia nos enseñan que: 1°.) Cuando la barra está sujeta por un extremo, y flexionada desde el otro:

$$f = \frac{4P.L^3}{E.a^3.b} \qquad \frac{4PL^3}{Ea^3bf}$$

f (*flecha*) P (*peso flexor*)
E (*módulo de Young calculado en la tracción longitudinal*
a (*espesor*, medida vertical)
b (*ancho*, medida horizontal)

2°. Cuando la varilla está apoyada en los dos extremos (fig. 731):

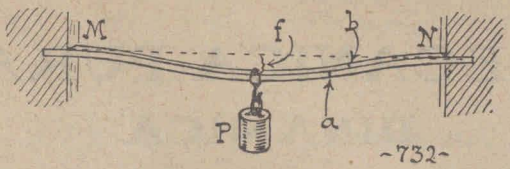
$$f = \frac{P.L^3}{4E.a^3.b} \qquad \frac{PL^3}{4Ea^3bf}$$



~731~

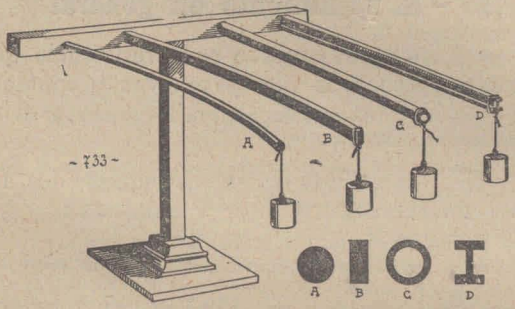
3°. Si los dos extremos están empotrados (fig. 732):

$$f = \frac{P.L^3}{.16E.a^3.b} \qquad \frac{PL^3}{16Ea^3bf}$$



-732-

1374. – Para el cálculo de la resistencia por flexión hay que tener en cuenta la FORMA DE LA SECCIÓN DE CADA VARILLA (fig. 733).



-733-

La figura nos demuestra que A IGUALDAD DE SUPERFICIE DE SECCIÓN la varilla más flexible es la que tiene sección CIRCULAR.

El hierro "doble T" es muy poco flexible.

1375. – Para estudiar la torsión se recurre a dinamómetros como el de la fig. 390.

1376. – Atendiendo al sentido que tiene la elasticidad dentro de la masa de los cuerpos, éstos se dividen en: ISÓTROPOS Y ANISÓTROPOS.

Isótropos son los cuerpos cuya elasticidad se presenta con iguales caracteres en cualquier sentido.

Anisótropos son los cuerpos cuya elasticidad es más intensa en un sentido que en otro.

Hay cuerpos homogéneos que son anisótropos.

1377. – CONTRACCIÓN TRANSVERSAL EN LA TRACCIÓN. – Toda varilla sometida a la tracción contrae su sección transversal a medida que se va alargando.

A pesar de ello, el volumen no permanece constante, sino que aumenta, como se ha podido comprobar experimentalmente.

MECANICA PURA

DINAMICA

III°. El rozamiento.

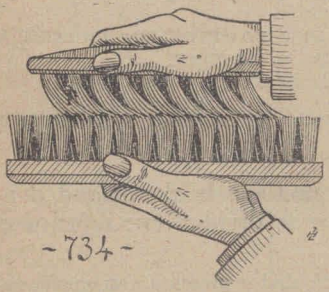
1.° - El rozamiento en general

1378. — Roce o ROZAMIENTO es la resistencia que oponen las superficies de los cuerpos que se mueven en contacto mutuo.

El roce se debe a que se compenetran las asperezas de las superficies que se hallan en contacto.

1379. — En los sólidos deben distinguirse dos formas de roce: a) por DESLIZAMIENTO, b) por RODADURA.

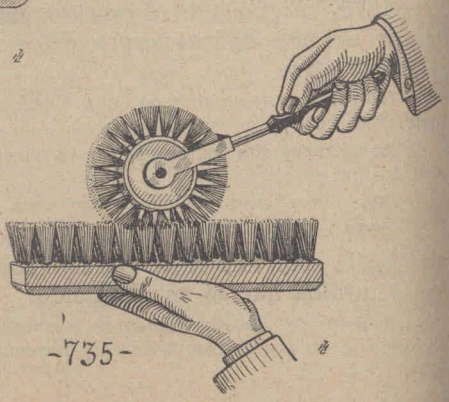
Ejemplo de deslizamiento: las patinadas.
Ejemplo de rodadura: un cuerpo que se traslada sobre rodillos.


-734-

Los haces de cerdas se compenetran, y quedan aprisionados, estorbando el movimiento.

1380. — El roce por delizamiento o resbalamiento es comparable al estorbo que se ofrecen mutuamente las cerdas de dos cepillos que se trasladan uno sobre otro (fig. 734).

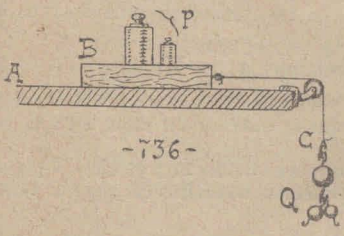
1381. — El roce por rodadura es comparable al estorbo que recibe un rodillo de cerdas al trasladarse sobre un cepillo común (fig. 735)


-735-

Como se ve, aunque aquí las cerdas se hunden más, reciben menos estorbo, porque las cerdas de ambos cepillos no tienden a detenerse mutuamente como en el caso anterior.

Queda, pues, asentado que el roce por rodadura es, en igualdad de condiciones, muy inferior al roce por deslizamiento.

2.° Roce por deslizamiento



-736-

1382. — Las **leyes del roce por deslizamiento** fueron establecidas experimentalmente por Coulomb, y se comprueban mediante el procedimiento ideado por él mismo en 1781 (fig. 736).

Sobre una superficie horizontal **A** se coloca el cuerpo **B**, unido mediante hilo y polea al aro **C**.

Sobre **B** se colocan las pesas **p**, y luego se procede a colgar de **C** varias pesas **Q**, hasta obtener que el cuerpo comience a resbalar.

Tendremos entonces:

$$P = B + p \qquad B \text{ (}peso\ del\ cuerpo\text{) } B.$$

P (*presión que ejerce* **B** *sobre el soporte* **A**)

Q (*fuerza necesaria para vencer la resistencia del roce.*

1383. — Otro procedimiento para estudiar el rozamiento es el siguiente (fig. 737).

Se va elevando el plano **AB** hasta que el cuerpo **M** comience a resbalar.

Se mide el ángulo α y el peso del cuerpo; y aplicando lo que aprendimos en (1019) se tendrá que.

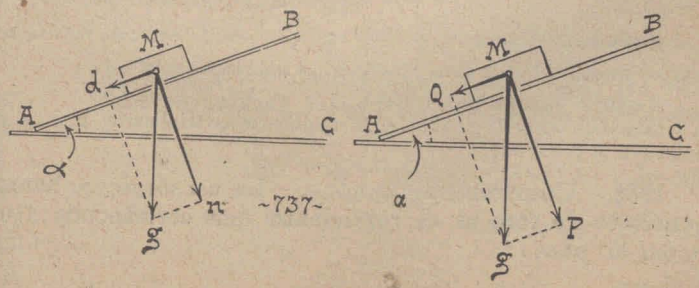
$$d = g.\ sen\ \alpha$$

$$n = g.\ cos\ \alpha$$

d (*componente efectiva o dinámica*).

n (componente normal o estática).

g (*peso del cuerpo, en sentido vertical*).



En nuestro caso:

d representa el esfuerzo **Q** con que se vence la resistencia al roce;

n representa la fuerza **P** que es causante del roce. Sustituyendo estos símbolos por sus equivalentes tenemos (fig. 738)

$$Q = g.sen\alpha \qquad P = g.cos\alpha$$

1384. – Tribómetros son aparatos destinados a medir el roce por deslizamiento.

En la fig. 736 está representado en su esencia el TRIBÓMETRO de Coulomb.

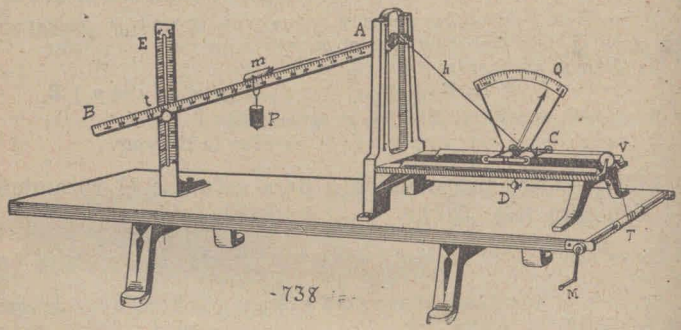
La fig. 738 representa el *Tribómetro* de Hartl.

La balanza – pesón **Q** marca la fuerza necesaria para vencer el roce.

Se halla sobre un carro **C** que puede acercarse o alejarse del plano inclinado mediante el torno **T**.

El tensor **h** sirve de trasmisión entre el cuerpo **m** y el eje del pesón.

El plano **AB** puede variar su inclinación mediante el tornillo **t** que lo sujeta en la escala **E**.



738

1385. – 1ª LEY. – El rozamiento es directamente proporcional a la presión que ejerce el móvil sobre su soporte.

$$Q = \rho.P \qquad \rho = \frac{Q}{P}$$

Q (resistencia de roce) **ρ** (coeficiente de roce, que varía según las sustancias y según la tersura de las superficies que están en contacto.

P (presión normal sobre el soporte)

COMPROBACIÓN (fig. 736). – Al duplicarse o triplicarse **P**, hay que duplicar o triplicar **Q**.

1386. – COEFICIENTE DE ROCE. – La constante **ρ**, llamada **coeficiente de roce** es el rozamiento que corresponde a una *unidad de peso.*

Aquí, siguiendo el sistema técnico, adoptaremos como unidad de peso el **Kg**.

El coeficiente ρ indica, pues, en cada caso el roce correspondiente a **1 Kg.** de presión normal sobre el soporte.

1387. – Cuando ensayamos en el plano de Galileo (fig. 737) el coeficiente de rozamiento vale:

$$\rho = \frac{Q}{P} = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = tg\,\alpha \qquad (822)$$

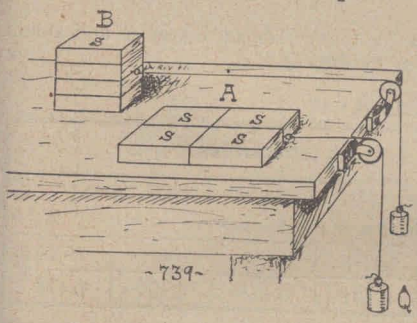
Lo cual se expresa así:

EL COEFICIENTE ρ EN EL PLANO DE GALILEO ES *numéricamente* IGUAL A LA $tg\ \alpha$.

En el tribómetro de Hartl (fig. 738)., la escala E da directamente este valor.

1388. – 2ª LEY (Paradoja de rozamiento).

El roce por deslizamiento permanece constante, aun cuando aumente o disminuya la superficie de contacto.



-739-

La experiencia lo ha enseñado, aunque parezca una contradicción; pero el cálculo matemático demuestra que la contradicción es sólo aparente (fig. 739.)

Si experimentamos con dos paralelepípedos **A** y **B** de la misma sustancia y con la misma tersura en la superficie de contacto, y tales que

a = b **s = ¼S** **a** (*peso de* **A**) **b** (*peso de* **B**)

nos daremos cuenta que:

EN **A** HAY SOBRE LA SUPERFICIE **S** UN PESO CUÁDRUPLE DEL QUE HAY SOBRE CADA **s** EN **B**.

De consiguiente, aplicando la 1ª Ley, en **A** el roce sobre **s** es cuádruple del roce que hay en **B** sobre cada **s**.

Pero como **S** = 4 **s**, resulta que...

Como se ve, esta paradoja no es una verdadera ley; es un simple corolario de la 1ª ley.

3ª LEY. – **El roce por deslizamiento varía según las sustancias y según la tersura y lubrificación de las superficies rozantes.**

Al estudiar la 1ª ley, ya hemos tenido que tomar en cuenta esta otra, que es una simple inducción experimental.

4ª LEY. – **El roce es una función de la velocidad del deslizamiento.**

a) El roce de arranque es siempre mayor que el roce de movimiento.

b) El roce durante el movimiento es en general una *función decreciente* de la velocidad.

c) Pero en algunos casos, como entre el CUERO y el HIERRO, el roce es *función creciente* de la velocidad.

NOTAS. – 1ª. – La primera parte de esta ley no es aplicable al caso en que el cuerpo que va a resbalar se coloque sobre el soporte poco antes de la experiencia.

Por eso el enunciado exacto de esta parte de la ley es el siguiente.

EN LOS CUERPOS COMPRESIBLES, QUE HAN PERMANECIDO CIERTO TIEMPO EN CONTACTO, EL ROCE ES MAYOR EN EL ARRANQUE QUE DURANTE EL ARRASTRE.

2ª. – La segunda parte de la ley (enunciada en **b** y **c**) es aplicable a los casos en que la velocidad pasa de **4m/seg.**

Tabla N.º 17

Valores de ρ para los ferrocarriles

LLANTAS DE HIERRO DULCE, *sobre carriles de* HIERRO, SECOS (vagones de 3 a 8 toneladas)

v (Km/h)	16.56	26,28	31,68	51,48	72	79,20
ρ	0.209	0.206	0.171	0,145	0,136	0,112

LLANTAS DE ACERO, SOBRE CARRILES DE ACERO

v (Km/h)	0	10 93	21.8	43.9	65.8	87.6	96,48
ρ	0.242	0.088	0.072	0.07	0.057	0,038	0.027

ZAPATAS DE FUNDICIÓN, SOBRE LLANTAS DE ACERO

v (Km/h)	0	8.05	16.09	40,03	72.36	96,48
ρ	0.330	0.273	0.242	0,166	0,127	0,074

ZAPATAS DE ACERO COLADO SOBRE LLANTAS DE ACERO (para el caso más desfavorable: carriles húmedos).

v (Km/h)		0	10	30	50	70	90
ρ	s. r. s.	0,450	0,313	0.215	0.176	0,154	0,141
	s. r. h.	0,250	0,174	0,119	0,098	0,086	0,078

s. r. s. (*superficies de rozamiento, secas*)
s. r. h. (*superfic es de rozamiento, húmedas*)

Cuando la velocidad es inferior a 4 m/seg, la ley se corrige así.

UNA VEZ INICIADO EL MOVIMIENTO, EL ROCE ES INDEPENDIENTE DE LA VELOCIDAD.

El ingeniero Marín fué quien comprobó la constancia sensible del roce para velocidades inferiores a *4 m/seg.*

En la práctica, el roce puede considerarse constante hasta la velocidad de 15 m/seg. Al llegar a 20 m / seg el decremento de roce comienza a ser ya muy apreciable.

1389. - De las observaciones que anteceden se deduce que:

CUANDO LAS TABLAS DE ROZAMIENTO QUE FIGURAN EN LOS TRATADOS DE MECÁNICA NO DAN MÁS QUE UN VALOR DE ρ PARA CADA PAR DE SUPERFICIES ROZANTES, SE REFIERE A VELOCIDADES INFERIORES A **15 m/seg.**

Tabla N.º 18

Valores de ρ para vehículos sobre el pavimento

Llanta	Condición	Asfalto comprimido	Asfalto fundido	Macadán ordinario	Granito	Madera dura	Madera blanca
Cuero (sobre)	s. l. s.	0,68 a 0,60	0.79	0.76	0.71	0.75	0,84
	p. m. s.	0.74	0,95	0 80	0 83	0.92	0,91
	p. f.	0.55	0.57	0.53	0.53	0.55	0,62
Caucho (sobre)	s. l. s.	0 67 a 0.62	0.89	0.88	0 70	0 93 a 0,76	0.83
	p. m. s.	0.75	0 94	0 83	0.87	1.00	0,90
	p. f.	0.45	0.50	0.44	0.50	0.46	0.60
Hierro (sobre)	s. l. s.	0.35 a 0.30	0.42 a 0.38	0.39	0.35 a 0.27	0.60 a 0.54	0 53 a 0,41
	p. m. s.	0,45 a 0,40	0.45 a 0.38	0 36	0,35 a 0 27	0,53 a 0 50	0 57 a 0.51
	p. f.	0,40 a 0.35	—	—	—	0.42 a 0.38	—

s. l. s. (*superficies limpias y secas*).
p. m. s. (*pavimento mojado y sucio*)
p. f. (*pavimento fangoso*)

1390. - PARADOJA DE LAS FRENADAS. – Los automóviles o los ferrocarriles que andan a gran velocidad, si se los frena bruscamente, se detienen menos rápidamente que si se los va frenando de a poco.

La razón es obvia:

Supongamos la velocidad del tren: **60 Km/h.**

Si la frenada es brusca, las ruedas patinarán sobre los rieles a razón de *60 Km/h = 17 m/seg.*

Pero si la frenada permite que las ruedas sigan girando, supongamos «*a media velocidad*» se deslizarán sobre los rieles a razón de 8,5 m/seg.

Habrá, pues, más roce en este caso; y por lo tanto la frenada será más eficaz.

TABLA N.º 19

Valores de ρ para presiones inferiores a 1 Kg

A). METAL SOBRE METAL

Móvil	sobre	Superficies	En reposo	En movimiento
Metal (*en gral*)	ídem	secas	0,18	0,18
		lubrif. con aceite de oliva	0,12	0,07
Bronce	BRONCE	secas	—	0,20
	FUNDICIÓN	secas	—	0,22
	HIERRO DULCE	poco lubrificadas	—	0,16
Fundición	FUNDICIÓN O BRONCE	poco lubrificadas	0,16	0,15
		mojadas con agua	—	0,31
Hierro dulce	FUNDICIÓN O BRONCE	secas	0,19	0,18
	HIERRO DULCE	secas	—	0, 4
		poco lubrificadas	0,13	—
Acero	ACERO	secas	0,15	—

B). METAL Y MADERA

Madera	METAL	secas	0,60	0,42
		lubrif. con grasa	0 ,12	0,08
Fundición	ROBLE	secas	—	0,49
		mojadas	0,65	0,22
		enjabonadas	—	0,19
Latón	ROBLE	secas	0,62	—

C). METAL SOBRE HIELO

Hierro	HIELO	—	—	de 0,016 a 0,032
Acero	HIELO	secas	0,027	0,014

C). MADERA SOBRE MADERA

Madera (*en gral*)	ídem		secas	0,50	0,36
			lubrif. con jabón seco	0,36	0,14
Roble	roble	f//m	secas	0,62	0,48
			enjabonadas	0,44	0,16
		f∓m	secas	0,54	0,34
			mojadas	0,71	0,25

f//m (fibras paralelas al movimiento)

f ⊥ m (fibras perpendiculares al movimiento)

La mayoría de los coeficientes de esta tabla fueron calculados por Morin.

TABLA N°. 20

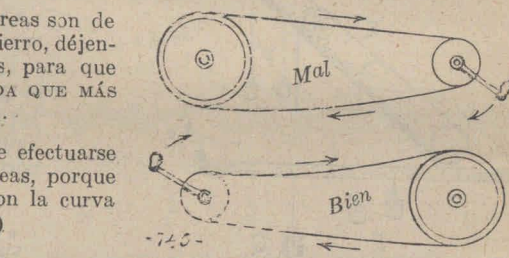
Valores de ϱ para el cuero

Material		*Superficies*	*En reposo*	*En movimiento*
CORREA SOBRE MADERA		secas	de 0,63 a 0,47	de 0,45 a 0,27
		mojadas con agua	0,87	0,33
CORREA SOBRE HIERRO		secas	0,28	0,56
CUERO DE PISTONES		engrasadas	0,12	0,23
CUERO	v (m/seg)		8	0,036	0,104	0,496
Y HIERRO	P	engrasados	0,180	0,227	0,329	0,641
(en general)	P	sin engr.	0,238	0,292	0,417	0,717

1391. – APLICACIÓN DE ESTOS CONCEPTOS AL USO DE LAS CORREAS:

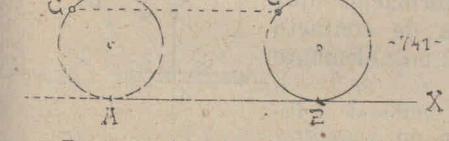
1.° Cuando las correas son de cuero y las poleas de hierro, déjense aquéllas algo flojas, para que «TIREN MÁS, A MEDIDA QUE MÁS RESBALAN» (Paradoja).

2°. La tracción debe efectuarse por debajo de las poleas, porque así aumenta el roce con la curva de la correa (fig. 740)



3.° – Rozamiento por rodadura

1392. – En el movimiento de una rueda sobre un plano, podemos considerar tres casos:

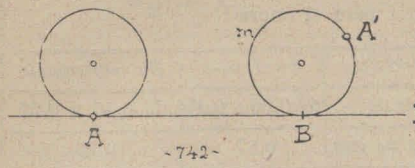


a) DESLIZAMIENTO PERFECTO (fig. 741). Al recorrer la rueda el segmento **AB**, un punto cualquiera **C** de su llanta efectúa un recorrido.

$$CC' = AB$$

En este caso la rueda no ha girado. No ha habido, pues, rodadura: es una "*patinada perfecta*".

b) Rodadura perfecta fig. (742). Al recorrer la rueda el segmento **AB**, el punto **A** llega a **A'**, y tenemos que:



-742-

arco **BmA'** = segm. **AB**

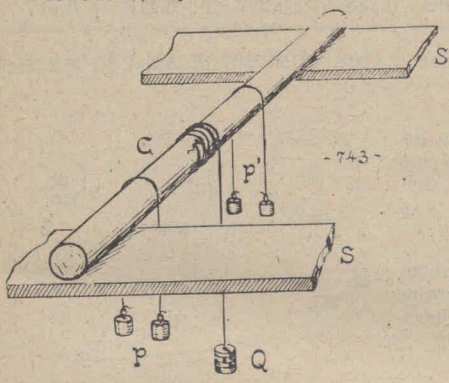
En este caso no ha habido deslizamiento.

c) Deslizamiento y rodadura simultáneas. Es lo que sucede generalmente.

1393. – Leyes del roce por rodadura. Fueron descubiertas experimentalmente por Coulomb y Morín, y se comprueban en aparatos distintos para cada ley.

1394. – 1ª Ley. – **El roce por rodadura es directamente proporcional a la presión que ejerce el móvil sobre su soporte.**

Como se ve, la primera ley es común a ambas especies de roce.



-743-

Comprobación (fig. 743) (Aparato de Coulomb). Sobre dos soportes planos y horizontales **S** y **S'** apoyan los extremos del cilindro **C**.

Cuelgan del cilindro los pares de pesas iguales.

Actúa como pesa motora **Q**.

La presión **P** que el cilindro ejerce sobre los soportes será:

$$P = c + \Sigma p$$

c (peso del cilindro)

Σp (suma de todas las **p**)

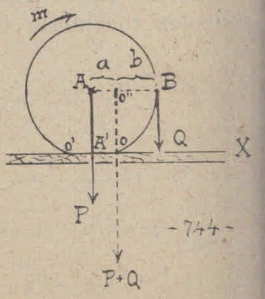
Aumentando la carga **Q** se llega a un momento en que el cilindro comienza a girar.

1395. – Interpretación de la experiencia anterior (fig. 744) – La presión del cilindro sobre su soporte, produce en ambos una deformación que les da una pequeña zona de contacto **oo'**, que en la figura está notablemente exagerada.

Cuando **C** inicia su giro en sentido de la flecha **m**, el punto de apoyo es **o**, que consideramos transportado en **o**."

P está aplicado en **A** (baricentro del cilindro).

Q está aplicado en **B**.



-744-

P. l. t., para que **C** arranque, se requiere que **Q** sea tal como para producir desequilibrio en sentido de **m**.

El equilibrio inestable (en sentido de **m**) es el límite inferior de este desequilibrio, y se produce cuando la resultante **P+Q** pasa por **o**.

Para que esto suceda se requiere que

P. a = Q. b (igualdad de los momentos estáticos)

Pero como **a** es sumamente pequeño en comparación con el radio **AB**

podemos considerar que $b = AB$ (radio)

de donde resulta que $P.a = Q.r$ r (radio)

o sea $$Q = \frac{P.a}{r}$$

que podemos escribir así: $$Q = a.\ \frac{P}{r}$$

La experiencia ha demostrado que **a** es para cada caso una cantidad sensiblemente constante.

De modo que llamándola ρ' tenemos:

$$Q = \rho'\ \frac{P}{r}$$

Q (*resistencia a la rodadura*) ρ' (*coeficiente de roce por rodadura*).
P (*presión del cilindro o rueda sobre el soporte*). **r** (*radio del cilindro o rueda*).

1396. – La fórmula a que hemos llegado

$$Q = \rho'\ \frac{P}{r}$$

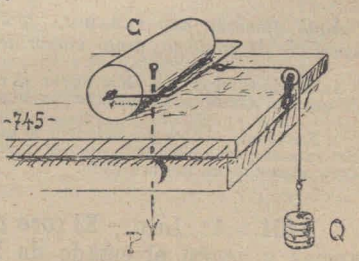
demuestra la primera ley, por cuanto **P** es un factor; y demuestra la segunda ley, que a continuación enunciamos.

1397. – 2.ª LEY. – **El roce por rodadura es inversamente proporcional al radio del rodillo.**

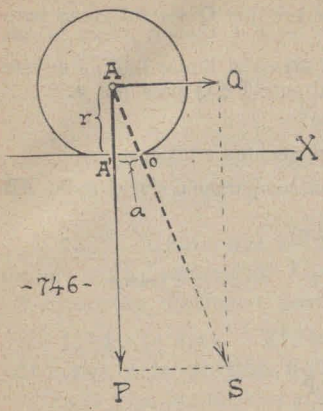
Efectivamente, en la fórmula anterior, **r** es un divisor.

1398. – OTRA COMPROBACIÓN DE LA LEY ANTERIOR (fig. 745).

Difiere este aparato del anterior en cuanto que, allá la tracción de **Q** se aplica en la periferia, y aquí se aplica en el baricentro y es paralela a la superficie de sostén.



-745-



-746-

El croquis adjunto (fig. 746) nos enseña que siendo semejantes los dos triángulos **AA'o** y **APS** tendremos que:

$$\frac{r}{a} = \frac{P}{Q}$$

S (resultante del sistema **P, Q**)

NOTA. La porción **AA'** se considera como r (radio), porque la deformación es sumamente pequeña.

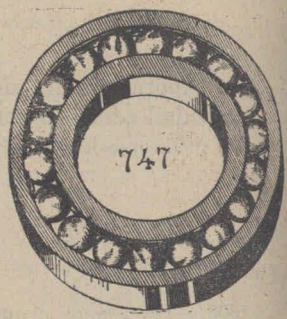
De la proporción anterior se deduce que:

$$Q = a\,\frac{P}{r}$$

como en el caso anterior.

1399.– El coeficiente ρ' *(de rodadura)* es siempre muy inferior a ρ *(de deslizamiento).*

Y como el roce entre la rueda y su eje es por deslizamiento, se le disminuye notablemente recurriendo a los *cojinetes de municiones* (fig. 747) *en los que el roce es por rodadura.*



1400. - 3ª LEY. – El roce por rodadura es función decreciente de la anchura de la llanta.

Cuando se trata de cuerpos compresibles, el roce es inversamente proporcional a la anchura de la llanta.

Esta proporción no es perfecta, sino tan sólo aproximada,

Aquí también hay PARADOJA; *porque parecería que cuanto mayor es la superficie de contacto, tanto mayor debiera ser el roce.*

Aplicando el mismo raciocinio que en el roce por deslizamiento, llegamos a la conclusión que: EL ANCHO DE LA LLANTA NO DEBIERA INFLUIR EN EL ROCE.

Pero como, el roce por rodadura se produce por humdimiento mutuo de las superficies rozantes; cualquiera entiende que, CUANTO MAYOR ES LA SUPERFICIE DE CONTACTO, TANTO MENOR ES EL HUNDIMIENTO.

1401. - 4ª LEY. – El roce por rodadura varía según las sustancias y según el estado de las superficies rozantes.

4.° – Rozamiento indirecto

1402. - Al resbalar un cuerpo sobre otro previamente aceitado, el móvil resbala sobre el aceite, y éste resbala sobre el soporte.

Las asperezas de ambas superficies rozantes dejan entre sí huecos en que se introduce el lubrificante; y los poros de ambas superficies al cabo de algún tiempo se llenan de esta materia, desapareciendo todo contacto entre ellas.

Las partículas grasas *ruedan* entre las superficies, de modo que se produce tan sólo roce por rodadura.

A esto se debe la disminución tan notable de rozamiento entre las superficies lubrificadas.

1403. – Reglas del roce indirecto (Reglas de Hirn). — 1.ª – PARA QUE EL LUBRIFICANTE DÉ UN ROZAMIENTO REGULAR Y MÍNIMO, DEBE *triturarse* DURANTE CIERTO TIEMPO ENTRE LAS SUPERFICIES ROZANTES.

Por eso la lubrificación rinde poco en su comienzo.

2.ª – SI AL VARIAR LA TEMPERATURA, PERMANECEN CONSTANTES LAS OTRAS CONDICIONES (de presión, velocidad, etc.), EL ROCE INDIRECTO ES INVERSAMENTE PROPORCIONAL A LA MAGNITUD $1{,}05^t$.

$$Q_t = \frac{Q_o}{1{,}05^t}$$

t (*temperatura*) Q_t (roce a la temperatura t) Q_o (roce a cero grados)

3.ª – CUANDO LAS SUPERFICIES ESTÁN *abundantemente lubrificadas*, PERMANECIENDO CONSTANTE LA TEMPERATURA, EL ROCE INDIRECTO ES INVERSAMENTE PROPORCIONAL A LA VELOCIDAD.

$$Q = \frac{q}{v}$$

q (*roce unitario, con respecto a la velocidad*)

Si no se regula la temperatura, la relación entre el roce y la velocidad se complica, pues depende de la rapidez de enfriamento del aparato en marcha.

Se puede admitir prácticamente que en las máquinas, con una lubrificación media EL ROCE ES INVERSAMENTE PROPORCIONAL A LA RAÍZ CUADRADA DE LA VELOCIDAD:

$$Q = \frac{q}{\sqrt{v}}$$

4.ª – EL ROCE INDIRECTO ES PROPORCIONAL A LA PRESIÓN, Y EN LA PRÁCTICA ES INVERSAMENTE PROPORCIONAL A LA RAÍZ CUADRADA DE LA SUPERFICIE DE CONTACTO.

$$Q = q \frac{P}{\sqrt{s}}$$

q (*roce unitario, respecto a la sección*)

1404. – Resumiendo las cuatro reglas anteriores, obtenemos las dos fórmulas siguientes:

a) Para cuando las superficies están abundantemente lubrificadas y se logra eliminar el calor de frotación:

$$Q = \rho'' \frac{P}{1{,}05^t \, v \sqrt{s}}$$

b) Para cuando se tiene una lubrificación media y no se toma en cuenta el *calor de frotación.*

$$Q = \rho'' \frac{P}{1{,}05^t \sqrt{v.s}}$$

ρ'' (*coeficiente de roce indirecto, correspondiente a* CERO GRADOS, *y unitario con respecto a la* PRESIÓN, *la* SECCIÓN DE CONTACTO *y la* VELOCIDAD..

5°. – Rozamiento total

1405. – En la práctica, para cada caso hay que calcular el rozamiento total, que, p. ej, en una rueda es la resultante de:

a) el roce por deslizamiento de la rueda sobre el eje;

b) el roce por rodadura de la rueda sobre el plano de sostén;

c) el roce por deslizamiento (patinada) de la rueda sobre el plano de sostén.

Llamaremos ρ''' el coeficente de roce total, el cual es función directa de

$$\rho \quad \rho' \quad \rho''$$

1406. – Para los vehículos se calcula ρ''' en **Kg** d roce, correspondiente a cada **tonelada** de presión.

6°. – Aplicaciones del rozamiento

1407. – INCONVENIENTES DEL ROZAMIENTO. – Al hablar de trabajo mecánico (**1092** h. **1098**) vimos que:

T (*trabajo total*) = T_e (*trabajo estático*) + T_i (*trabajo de impu lso*

El *trabajo estático* o *de remoción de obstáculos*, llamado también « TRABAJO PASIVO » es trabajo perdido inútilmente ; puesto que no produce movimiento.

El trabajo pasivo es el que se produce luchando :

a) CONTRA EL ROCE
b) *contra la resistencia del aire*
c) *contra otros estorbos*

Luego.... (concluya el alumno).

1408. – VENTAJAS DEL ROZAMIENTO. – Sin rozamiento sería imposible andar y mantenerse seguros en pie.

Lo comprobamos cuando la calzada está escarchada.

b) Las trasmisiones (de correa y de fricción) serían imposibles si no existiera el roce.

c) Los clavos quedan sujetos en su agujero debido al roce.

Igualmente sucede con los corchos en los golleretes de las botellas.

1409. – MEDIDA DE LA POTENCIA DE UN MOTOR.

Ya sabemos que **(1144)**:

Potencia de un motor es el trabajo que puede efectuar en una unidad de tiempo.

$$P = \frac{T}{t}$$

De donde se deduce que:

El **trabajo** efectuado por un motor es igual al producto de su potencia por el tiempo que duró el trabajo:

$$T = P.t$$

Unidades de trabajo y de potencia			
Magnitudes	*C. G. S.*	*0,001 M. T. S.*	*Técnicas*
TRABAJO	**1 ergio** = 1 dn × 1 seg	**1 julio** = 10megaerg × 1s.	**1 Kgm.** = 1Kg. × 1 m
POTENCIA	**1 erg/seg** = $\frac{1 \text{ erg}}{1 \text{ seg}}$	**1 vatio** = $\frac{1 \text{ jul}}{1 \text{ seg}}$	**1 C. V.** = $\frac{75 \text{ Kgm}}{1 \text{ seg.}}$

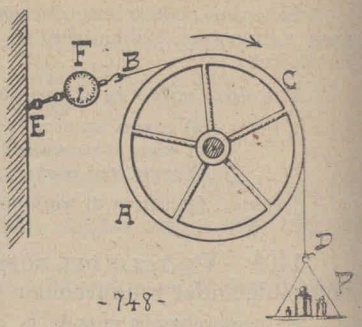
1410. – Para medir la potencia de los motores se recurre a dispositivos denominados **frenos**, que se basan en la medida del TRABAJO DEL ROCE.

1411. – Freno de cinta (fig. 748).

Consta de un volante **A** que mediante una trasmisión se pone en comunicación con la polea del motor que se va a medir.

Sobre la llanta del volante se asienta una cinta o correa **BC** acoplada a un dinamómetro **F** que se sujeta en un punto fijo **E**.-

Del extremo **D** pende un plato en el que se colocan las pesas **P** que sirven para medir la potencia del motor.



-748-

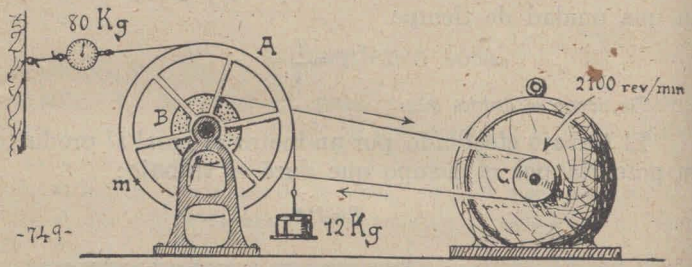
Las pesas **P** *sirven para aumentar la fricción de la correa.*

EL DINAMÓMETRO MARCA LA SIGUIENTE SUMA DE TRACCIÓN.

$$F = Q + P$$

F (*tracción total*) **Q** (*tracción del volante, como consecuencia de la fricción*)

1412. – USO DEL FRENO DE CINTA – Se acopla como se indica en (fig. 749); y con un *tacómetro* (**1280**) se mide la velocidad del eje del motor.



-749-

Se van añadiendo pesas **P**, hasta obtener que el motor adquiera la velocidad que tiene asignada en la chapa de fábrica.

Llamaremos « VELOCIDAD CARACTERÍSTICA » la que se indica en la chapa del motor.

EN ESE MOMENTO, EL MOTOR ESTÁ TRABAJANDO EN CONDICIONES NORMALES, Y TODO SU TRABAJO ÚTIL SE GASTA EN VENCER EL ROCE DEL FRENO.

Por lo tanto su potencia se medirá en función del trabajo de rozamiento, que es el único trabajo que sustituye al trabajo útil que efectuaría el motor si estuviese acoplado a una máquina cualquiera.

1413. – Para calcular más expeditamente la potencia de los motores mediante el freno, conviene basarse en la fórmula que se deriva de las dos siguientes:

FÓRMULA DEL TRABAJO $T = f.e$ (1)

T (trabajo) **f** *(fuerza)* **e** *(espacio recorrido por el punto de aplicación de la fuerza, en sentido de ésta).*

FÓRMULA DE LA POTENCIA $P = \frac{T}{t}$ (2)

P (potencia del motor).

t *(tiempo empleado en la producción del trabajo T)*

Sustituyendo en (2) el valor de T conforme a la fórmula (1), se obtiene:

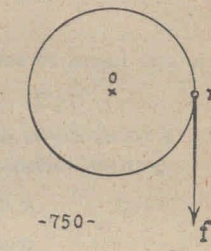
$$P = \frac{f.e}{t} = f.\frac{e}{t}$$

Pero $\frac{e}{t} = v$ (velocidad)

luego $P = f.v$ (fórmula que buscábamos)

La cual nos enseña que (fig. 750.)

La potencia de un motor se mide multiplicando la FUERZA que manifiesta un punto cualquiera m de su volante por la VELOCIDAD con que se traslada.



-750-

El punto **m** se puede determinar tanto en la llanta cuanto en cualquier otro punto del volante (cosa que se entenderá muy bien cuando se estudie EL TRABAJO EN LAS TRASMISIONES).

1414. – PROBLEMA. – *Aplicando el freno de cinta a un motor* (fig. 749), *y obtenidas las* **2100 rev/min** *que indica su chapa, el dinamómetro marca* **80 Kg.** *y en* **P** *hay* **12 Kg.** *¿Cuál es la potencia del motor cuando trabaja normalmente?*

OBSERVACIÓN. – Para poder resolver el problema es necesario conocer la relación que existe entre las dos poleas **B** y **C**, y cuál es el diámetro de **A**.

Si no se conociera la relación entre **B** y **C**, se aplica el tacómetro en el eje del freno y se mide directamente la velocidad que tiene el freno, ahorrándose de este modo el cálculo correspondiente.

SOLUCIÓN: 1° **Velocidad del freno:**

Supongamos que $\frac{B}{C} = \frac{15}{2}$

$$v = \frac{2100 \times 2}{15} = 280 \text{ rev/min} = 4{,}67 \text{ rev/seg}$$

2°.– **Circunferencia de la polea A:**

Supongamos que tenga **28 cm.** de diámetro:

$$c = 28 \times 3{,}14 = \mathbf{87{,}92\ cm.}$$

3° **Velocidad de la llanta.** – Un punto cualquiera **m** de la llanta de **A** recorre, pues, **87,92 cm.** en cada vuelta que da el freno.

Y como el freno efectúa **4,67 rev/seg,** la velocidad de traslación del punto **m** será

$$v = 87{,}92 \times 4{,}67 = 410{,}59\ \text{cm/seg} = \mathbf{4{,}11\ m/seg}$$

4°. – **Fuerza de rozamiento.** – El dinamómetro marca

$$F = 80\ \text{Kg.}$$

pero esta fuerza es suma de otras dos como se indicó en **(1411)**:

$$F = P + Q$$

P (*fuerza ejercida por el contrapeso*)

Q (*fuerza desplegada por el volante al rozar con la cinta, ejerciendo tracción en ella*).

y como $P = 12$ Kg.

tendremos $80 = 12 + Q$

de donde $Q = 80 - 12 = \mathbf{68\ Kg.}$

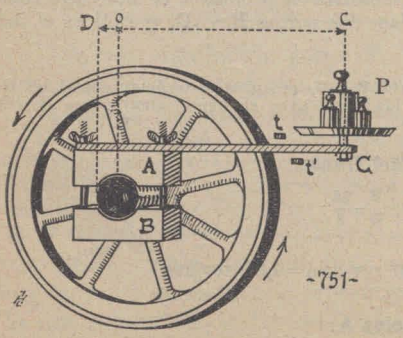
5°. **Conclusión.** – Apliquemos la fórmula $P = f \cdot v$

que aquí tiene esta forma $P = Q \cdot v$

Resulta $P = 68 \times 4{,}11 = 279{,}48\ Kgm/seg$

que, reducidos a «CABALLO VAPOR», dan

$$P = 279{,}48 \times 0{,}013 = \mathbf{3{,}63\ C.V.}$$



1415. – Freno Prony (fig. 751). – Consta de dos ZAPATAS **A** y **B** unidas entre sí mediante dos tornillos.

La zapata **A** se prolonga mediante el brazo **AC**, que remata en un platillo para las pesas **P**.

t, t, (*dos topes para limitar el juego del freno*).

V (*volante o polea del motor, cuya potencia se va a valuar*).

1416. –FUNCIONAMIENTO DEL FRENO PRONY. – Aplicado al volante o polea del motor de modo que el contrapeso **P** trate de hacer caer el freno en sentido contrario de la rotación de **V**, apretando convenientemente los tornillos y poniendo en marcha el motor, resultará lo siguiente:

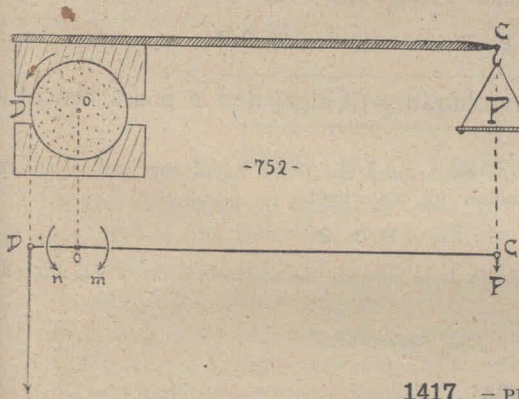
a) Si el contrapeso **P** es exagerado, el freno caerá sobre el tope t'

b) Si el contrapeso es escaso, el freno chocará contra **t**

c) Regulando el contrapeso, se obtendrá el equilibrio entre los *momentos* de las dos fuerzas siguientes:

Q (*fuerza del volante, aplicada a la periferia del eje*)

P (fuerza aplicada en **C**)



La palanca **DoC** (fig. 752) estará en equilibrio cuando:

m = n

m (*momento de* **P**)

n (*momento de* **Q**)

O sea cuando

P × oC = Q.r

(radio = oD)

1417. – PROBLEMA. – *Aplicado el freno Prony a la llanta de un volante de* **m 0,30** *de radio, cuya velocidad era de* **850 rev/min**, *hubo que colocar* **4,7 Kg** *en el platillo para equilibrar el sistema. – ¿Cuál era la potencia del motor, si el brazo* **oC** *medía* **1,80 m**?

TÉRMINOS: **Q** = x **P** = 4,7 Kg

r = 0,30m **oC** = 1,80m **P** (potencia) = **y**

SOLUCIÓN. – VALOR DE **Q** (fuerza del volante en la llanta).

$$Q \times 0{,}30 = 4{,}7 \times 1{,}80 \qquad Q = \frac{4{,}7 \times 1{,}80}{0{,}30} = 28{,}2 \text{ Kg}$$

2º. – VELOCIDAD DE LA LLANTA DEL VOLANTE. – Por cada vuelta del volante, un punto cualquiera de la llanta recorre:

$$e = 2r\pi$$

$$e = 0{,}60 \times 3{,}14 = 1{,}884 \text{ m}$$

Y como el volante da

$$850 \text{ rev/min} \div 60 = 14{,}17 \text{ rev/seg.}$$

resulta que **v** (de la llanta) $= 1{,}88 \times 14{,}17 = \mathbf{26{,}64}$ **m/seg.**

3°. – CONCLUSIÓN. – La fuerza de *28,2 Kg* se traslada a razón de *26,64 m/seg.*

Luego, la potencia que representa será:

$$P = Q.v$$

$$P = 28{,}2 \times 26{,}64 = 751{,}248 \text{ Kgm/seg.}$$

que reducidos a "CABALLO VAPOR", dan:

$$\mathbf{P = 751{,}248 \times 0{,}013 = 9{,}77 \text{ C.V.}}$$

1418. – UNA DIFICULTAD. – A alguien se le podrá ocurrir lo siguiente:

Si se aprietan más los tornillos del freno, habrá más roce, y en consecuencia habrá que colocar un contrapeso.

$$\mathbf{P' > P}$$

Y entonces el cálculo de la potencia del motor dará otro resultado completamente distinto.

Este sistema está, pues, equivocado.

No hay tal cosa:

Si se aprietan más los tornillos, y de consiguiente hay que colocar más contrapeso en **C**, el motor irá más despacio, porque debe trabajar más.

Resultará entonces

$$P' = Q' \times v'$$

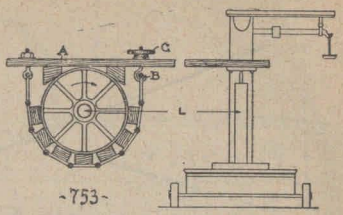
Es verdad que no obtendremos exactamente

$$P' = P$$

Pero ya dimos a entender (**1412**) que:

LA POTENCIA DE UN MOTOR SE CALCULA CONFORME AL **número de revoluciones** QUE DEBE DAR SU EJE POR MINUTO, SEGÚN LAS INDICACIONES DEL FABRICANTE.

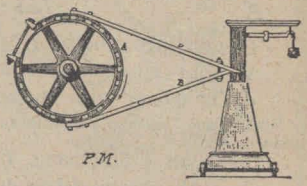
Cuanto más nos alejemos de la *velocidad característica* del motor, tanto más nos alejamos del *"máximo de rendimiento"* o nos exponemos a *"forzarlo"* para que pronto quede fuera de uso.



-753-

1419. – El freno Prony puede adquirir formas diversas, como se puede observar en (fig. 753).

Aquí el freno se combina con una báscula porque hay que valuar potencias grandes.



IV.º - Máquinas [1]

1º. Máquinas y aparatos

1420. – **Máquina** es cualquier cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos que tiene por fin modificar la acción de una o varias fuerzas.

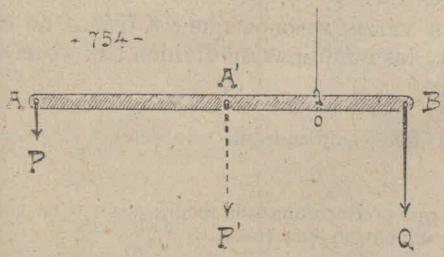
Se modifica la acción de una fuerza:

a) Aumentando o disminuyendo la intensidad de su efecto estático.

b) Aumentando o disminuyendo la intensidad de su efecto dinámico.

c) Cambiando la dirección o sentido de ambos efectos.

d) Trasladando el punto de aplicación de la fuerza, o sea: produciendo trabajo a distancia.



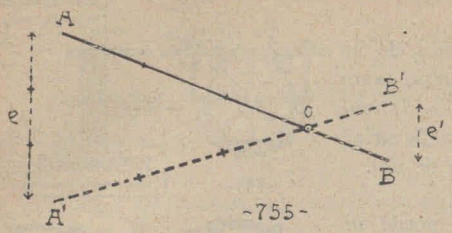
-754-

1421. – Ejemplos de los cuatro tipos de modificaciones.

a) AUMENTO O DISMINUCIÓN DEL EFECTO ESTÁTICO (fig. 754).

Por medio de la palanca **AoB**, la fuerza **P** se opone a la fuerza **Q** como si tuviese la intensidad de **P'**.

(1) Aunque muchos textos estudien las máquinas en Estática, debido a que se calculan para el caso de equilibrio, es más lógico estudiarlas en Dinámica, no sólo atendiendo a la finalidad de las mismas, sino porque su estudio queda mutilado cuando no se puede tomar en cuenta los conceptos de TRABAJO y FUERZA VIVA.



-755-

b) AUMENTO O DISMINUCIÓN DEL EFECTO DINÁMICO (fig, 755)

Al pasar el punto **A** a la nueva posición **A'**, recorre un espacio **AA'** que, en nuestro caso es triple del espacio **BB'** recorrido por el punto **B**.

c) CAMBIO DE DIRECCIÓN DEL EFECTO (fig. 48 casos **A,B** y **C,D**)

CAMBIO DE SENTIDO (fig. 48: caso **E,F**)

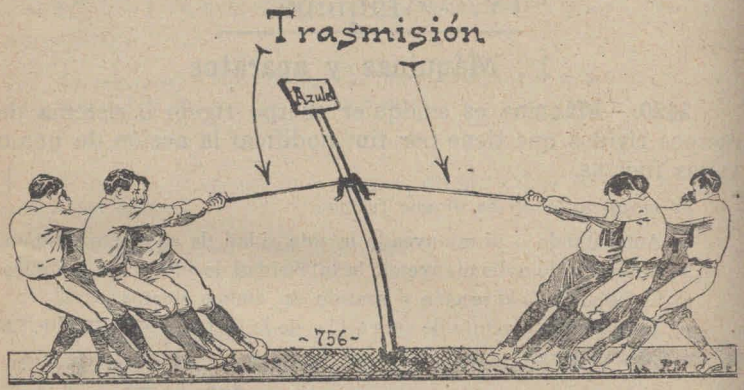
Ya se ha explicado esto en su lugar **(156)**.

d) TRASLADO DEL PUNTO DE APLICACIÓN. (fig, 756).

Los que "cinchan", aplican su fuerza a la soga, y la soga TRASMITE la acción al bando contrario.

TRABAJO A DISTANCIA. (fig, 740).

La acción giratoria del eje de la polea de mando se TRASMITE al eje de la polea receptora por medio de la correa que une las dos poleas.



-756-

1422. – Atendiendo a varias razones que los físicos no están de acuerdo en definir, las máquinas se dividen en : SIMPLES y COMPUESTAS.

1423. – Según unos autores:

Máquina **simple** es la que comprende un solo sistema de *apoyo, potencia* y *resistencia*.

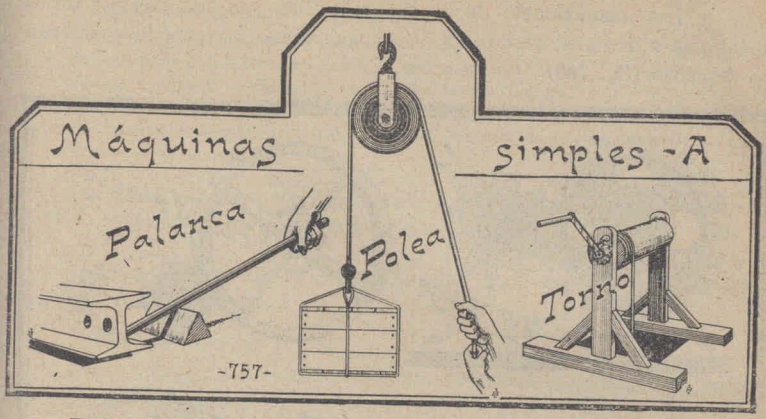
Para otros:

Máquina **simple** es la que produce una sola modificación o un conjunto inseparable de modificaciones en una fuerza.

Para otros:

Máquina **simple** es la que encierra una forma sencilla y definida de modificación del efecto de una fuerza.

Y para muchos (entre los modernos):



Es inútil la división de las máquinas en SIMPLES Y COMPUESTAS.

1424. – Mejor es decir que:

Las máquinas pueden ser más o menos **sencillas** o **complejas**, reduciéndolas todas, en último análisis a variaciones o sistemas de PALANCAS y PLANOS INCLINADOS.

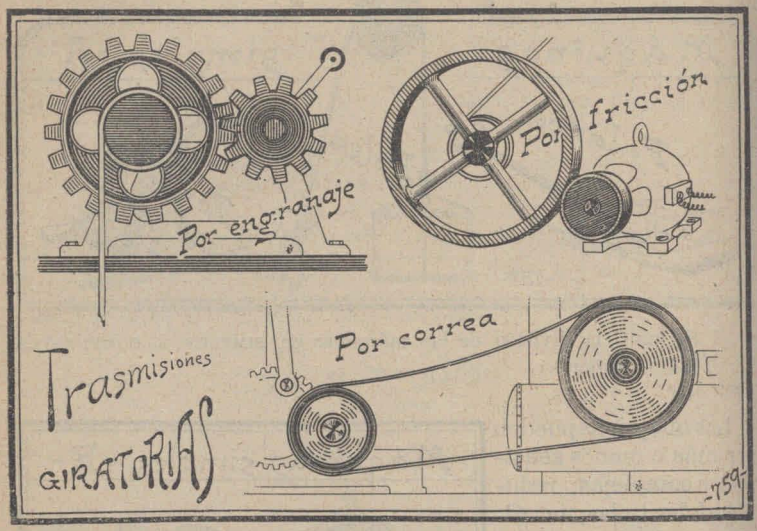


1425.– Las máquinas SENCILLAS que sirven de base al estudio y construcción de las demás son:

a) La **palanca** y sus derivadas: la POLEA y el TORNO (fig. 757).

b) El plano **inclinado** y sus derivadas: la CUÑA y la ROSCA o *tornillo* (fig. 758).

c) Las **trasmisiones**, de las cuales, muchas son adaptaciones de las máquinas anteriores; pero otras tienen modalidad bastante independiente de aquéllas (fig. 759).



1426. – **Piezas** de una máquina son los distintos cuerpos que concurren a su formación.

Las piezas son de dos categorías: de ARMAZÓN y de ACCIÓN.

Las piezas **de armazón** están constituidas por tablas tirantes, varillas, soportes, etc., a los que se añaden clavos, tornillos, bulones, para formar un conjunto rígido.

Las piezas **de acción** se dividen en: PIEZAS MOVIBLES y en PIEZAS FIJAS o *de ligadura*.

1427. – Aunque dijimos que las máquinas constaban de cuerpos **rígidos**, no se debe entender que es *con exclusión* de cuerpos deformables.

En las máquinas hay piezas: FLEXIBLES (como la correa, cordel o cadena de las poleas) y ELÁSTICOS (como los resortes o muelles).

Y aquí es necesario que nos uniformemos en el LÉXICO *para que no demos a entender a los alumnos una cosa por otra:*

Flexible = *que puede doblarse.*
Extensible = *que puede alargarse.*

Contráctil = *que puede contraerse.*
Compresible = *que puede comprimirse.*
Deformable = flexible o extensible, o ambas cosas a la vez.
Blando o plástico = que acepta y conserva la deformación.
Elástico que recupera la forma o las dimensiones primitivas, o ambas cosas a la vez.
INFLEXIBLE, INEXTENSIBLE, INCOMPRESIBLE, INDEFORMABLE, INELÁSTICO =.....
Rígido = INDEFORMABLE.

De modo que para que un cuerpo sea rígido, no basta que sea *inflexible:* se requiere también que sea *inextensible* e *incompresible.*

1428. – El conjunto de piezas de una máquina recibe el nombre de MECANISMO.

Podremos, pues, decir que:

Una máquina es más o menos **sencilla** o **compleja**, según la variedad y número de piezas de su mecanismo.

Las máquinas notablemente complejas se denominan «MAQUINARIAS»

1429. – TODA MÁQUINA ESTÁ SUJETA A LIGADURAS

Esto significa que las piezas movibles de las máquinas tienen movimientos más o menos definidos en forma y extensión, mediante otras piezas fijas que aprisionan a las primeras y que se denominan LIGADURAS.

1430. – Las principales ligaduras de las piezas movibles pueden ser:

a) PUNTOS, como en la *suspensión cardán* (1231) y en la *charnela universal* (ver fig. 669).

b) EJES como en el caso de las poleas (fig. 775) y de muchas palancas (fig. 160).

c) GORRONES, que son ejes con cabezas o ensanchamientos que impiden que la pieza móvil efectúe desplazamientos laterales.

d) VÍAS o *guías*, como en el caso de los charriotes (fig. 642).

e) PLANOS, como en el caso del plano Packard (fig. 562).

1431. – Para simplificar el cálculo referente a las máquinas, DEBEMOS SUPONER QUE SUS PIEZAS NO TIENEN **masa**; o sea: que no producen estorbo al movimiento (*masa de inercia*), ni pesan (*masa gravitatoria*).

Pero, como las piezas realmente *pesan* y son *inertes;* no se llegará nunca a un cálculo práctico sin corregir el teórico mediante los datos que se desprenden del peso e inercia de todas las partes movibles.

Además existe otra causa de error en los cálculos sobre la eficiencia de las máquinas, y es el ROZAMIENTO mutuo de las piezas.

1432. – No hay que confundir **máquina** con **aparato.**

Toda máquina es un aparato ; pero no viceversa.

Aparato es un cuerpo o sistema de cuerpos construido para usos determinados.

Así, una vasija es un aparato, pero no una máquina.

1433. – Además hay aparatos que tienen mecanismos que facilitan su uso pero que no entran en su composición esencial.

Ej.: el aparato fotográfico (impropiamente llamado *máquina*), el microscopio, etc.

La balanza es una máquina netamente mecánica, y sin embargo atendiendo a su uso común en los laboratorios, se la considera simplemente como APARATO, sin que a nadie se le ocurra decir que es una máquina.

2.º – Trasmisiones

1434. – En Mecánica se llama **trasmisión** cualquier máquina o pieza encargada de unir una fuerza con el objeto sobre el que ella debe actuar.

Como las FUERZAS *son inseparables de la* MATERIA, *de aquí que dos cuerpos que no tienen contacto directo, necesiten un cuerpo intermediario para poder actuar el uno sobre el otro.*

Este cuerpo intermediario es un TRASMISOR de energía.

1435. – La trasmisión puede ser PURA o MIXTA.

Es **pura** la trasmisión cuando no modifica la *intensidad, dirección* y *sentido* de la fuerza, trasladando tan sólo su *punto de aplicación*; y es **mixta** en caso contrario.

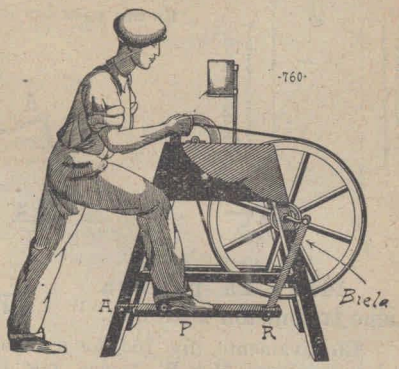
1436. – Las trasmisiones *puras* pueden ser : de EMPUJE y de TRACCIÓN.

Para trasmitir *empujes*, se usan CUERPOS RÍGIDOS (barras, caños, varillas inflexibles, etc.).

Para trasmitir *tracciones*, se puede usar cuerpos rígidos; pero también se usan *cuerpos flexibles*, con tal que sean *inextensibles* (cadenas, cuerdas, cordeles, correas, etc.).

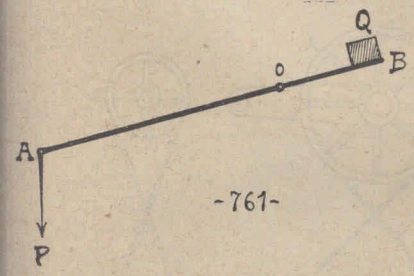
1437. – En el caso de la trasmisión por *biela*, hay empujes y tracciones sucesivas ; por eso el trasmisor es rígido.

Pero en el caso de la trasmisión del *pedal* a la *rueda* del afilador (fig. 760) a veces se sustituye la biela por una soga, porque se recurre sólo a la tracción, aprovechando la *inercia* de la rueda.



1438. – Todo trasmisor mixto es una máquina; pero no viceversa.

El trasmisor mixto más sencillo es la palanca.



1439. – En la palanca de 1er. género (fig. 761).

a) Hay *trasmisión;* en efecto :

La fuerza **P** está aplicada en **A** y ejerce su acción en **B**.

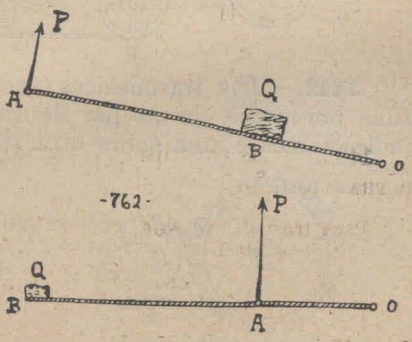
b) Hay *inversión del sentido* de la fuerza.

Efectivamente, **P** trabaja *hacia abajo* para *levantar* el peso **Q**.

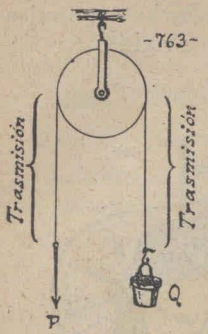
c) Cuando los brazos son desiguales, hay también MODIFICACIÓN DE LA INTENSIDAD de la fuerza.

d) Y en este mismo supuesto, la velocidad de traslado de **A** es distinta de la de **B**.

En las palancas de 2° y 3er género no hay inversión del sentido de la fuerza, pero existen las demás modificaciones citadas en las de 1er. género (fig. 762).



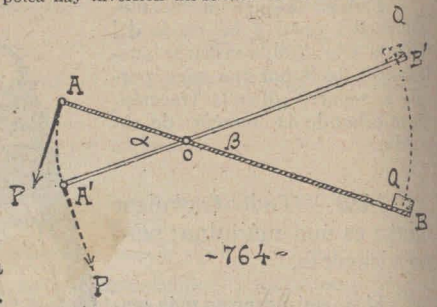
1440. – Las trasmisiones pueden ser *rectilíneas, angulares y circulares.*



-763-

Las trasmisiones *puras* son RECTILÍNEAS; pero también son rectilíneas las dos ramas de la polea de tracción (fig. 763)

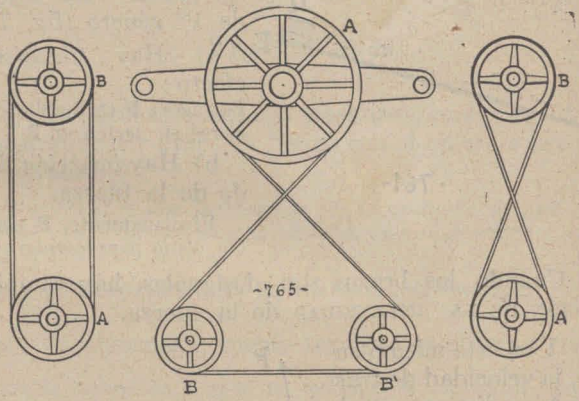
En esta polea hay inversión del sentido de la fuerza.



-764-

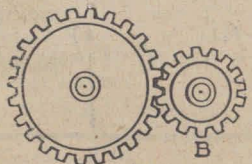
1441. – La palanca tiene trasmisión ANGULAR.

Efectivamente, (fig. 764) los movimientos que hacen **A** y **B** para pasar a las posiciones **A'** y **B'**, tienen por trayectoria los arcos de α y de β respectivamente.

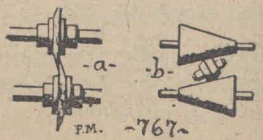


-765-

1442. – Las trasmisiones CIRCULARES O GIRATORIAS se efectúan por medio de un par de ruedas, que actúan directa o indirectamente una sobre otra. (fig. 765 h. 767).

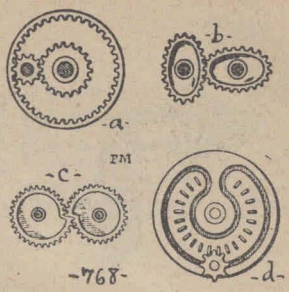


-766-

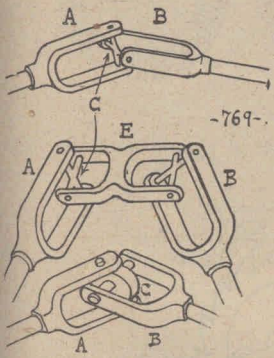


-767-

Las trasmisiones circulares, a pesar de lo variadas que son, pueden reducirse a tres tipos : por FRICCIÓN, por ENGRANAJE y por POLEAS.

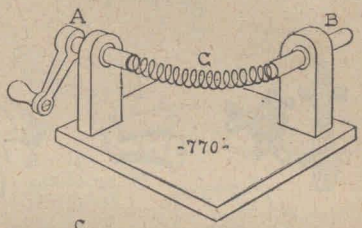


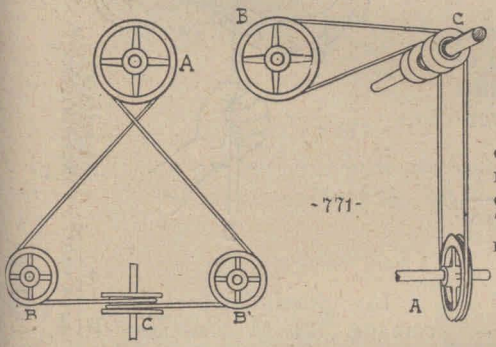
1443.– Existen sistemas muy variados e ingeniosos de trasmisiones como se puede ver en las fig. 765 h. 781.



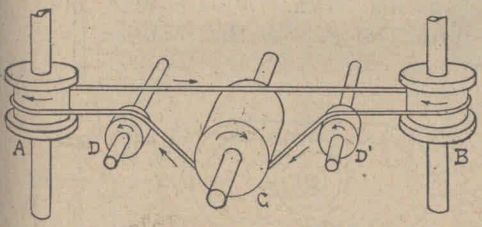
A continuación damos el nombre y finalidad de cada una.

A) Trasmisiones que TRASLADAN el eje de rotación paralelamente a sí mismo (figs. 765 h. 768).



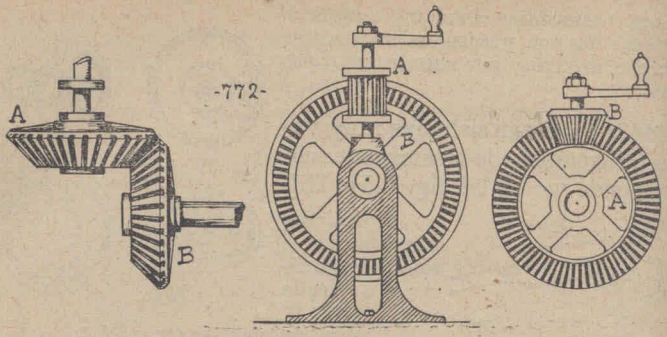


B) Trasmisiones que TUERCEN el eje de rotación, como la articulación de **Cardán** (fig. 769) y la trasmisión de resorte (fig. 770).

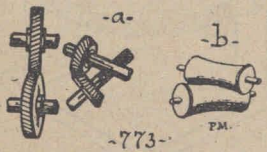


Cardan fué un sabio italiano del siglo XVI al que los matemáticos y la física deben ingeniosas indagaciones.

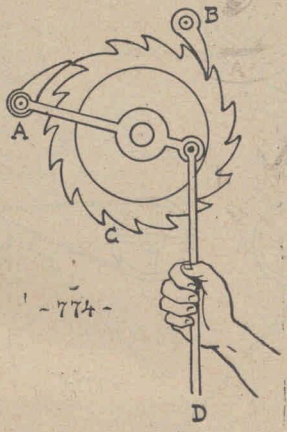
La mecánica debe a Cardán la suspensión y la articulación que llevan su nombre.

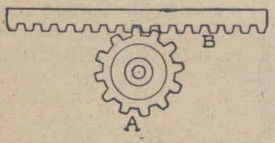


C) Trasmisiones que trasladan y tuercen el eje de rotación (figs. 771 h. 773)

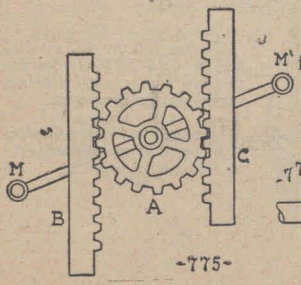


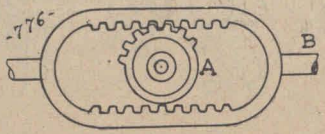
1444.– Hay trasmisiones que convierten el movimiento rectilíneo en curvilíneo o viceversa.

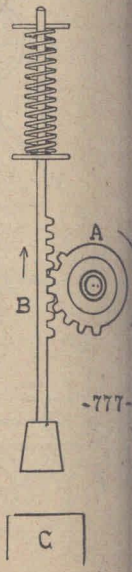


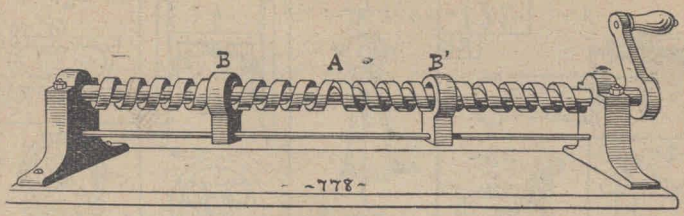


Las principales son: el CRIC (fig. 774), la CREMALLERA (fig. 775 h. 777) la BIELA fig. 778) y otras (fig. 779).

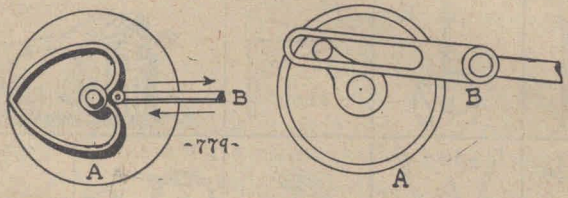




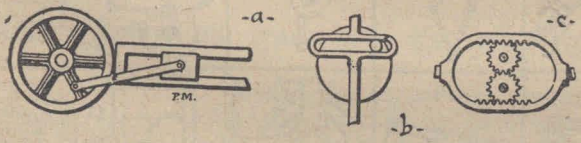




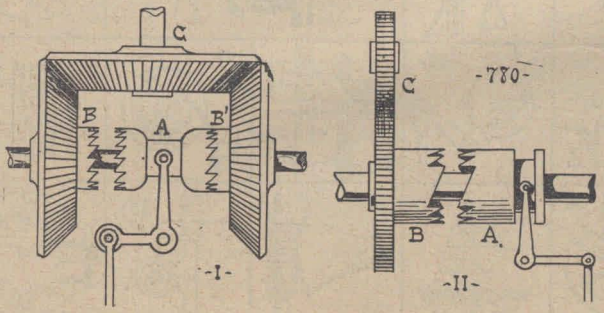
-778-



-779-



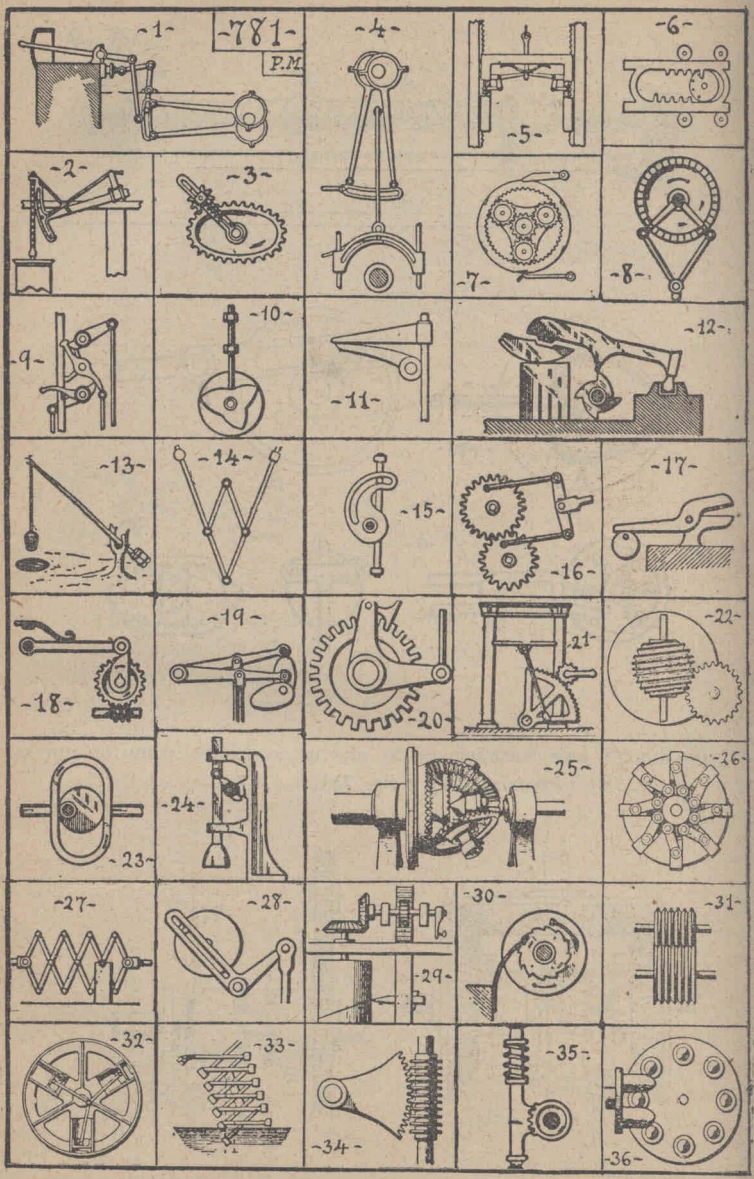
Finalmente hay trasmisiones de efectos complejos como se puede ver en la fig. 780 (*desconectador*) y fig. 781.



-780-

-I-

-II-


-781-
P.M.
-1-
-2-
-3-
-4-
-5-
-6-
-7-
-8-
-9-
-10-
-11-
-12-
-13-
-14-
-15-
-16-
-17-
-18-
-19-
-20-
-21-
-22-
-23-
-24-
-25-
-26-
-27-
-28-
-29-
-30-
-31-
-32-
-33-
-34-
-35-
-36-

3.° - Poleas

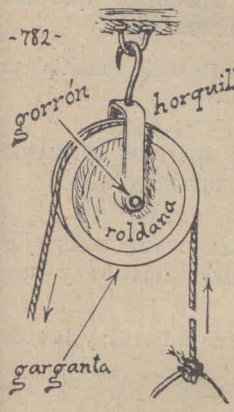
1445. – Las **poleas** son ruedas en cuya periferia se adapta una trasmisión flexible (fig. 765 y 771)

Según su uso las poleas pueden ser: de TRACCIÓN y de TRASMISIÓN GIRATORIA.

1446. – Las POLEAS DE TRACCIÓN en general tienen la periferia acanalada, para que en ella ajuste la trasmisión (soga, correa o cadena). En cambio las DE TRASMISIÓN GIRATORIA a menudo son lisas, y otras veces tienen dientes como se ve en la trasmisión de la bicicleta.

1447. – En las POLEAS DE TRACCIÓN la trasmisión tiene dos extremidades libres, en una de las cuales se aplica directamente la POTENCIA o **fuerza motriz**, y en la otra, la *resistencia* o **fuerza de reacción**. En las POLEAS DE TRASMISIÓN GIRATORIA, la trasmisión es una correa o cadena sin fin.

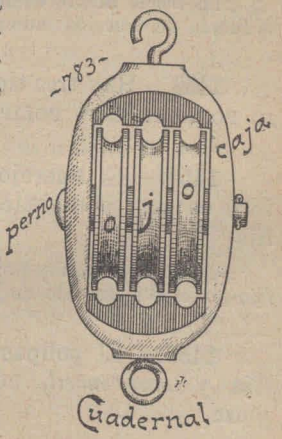
4.° - Poleas de tracción o garruchas



1448. – La forma más común de las **poleas de tracción**, es la de una *roldana* sostenida por una horquilla que remata en un gancho que le sirve de sostén (fig. 782).

LÉXICO.— **Roldana** = *rueda de llanta acanalada que juega libremente, sobre un gorrón.*

Generalmente el trasmisor de estas poleas es un cordel o soga; pero también puede ser una cadena.



1449. – **Cuadernales** (fig. 783) son las garruchas de madera cuya roldana se halla cerrada dentro de una CAJA cilindro-oval, que deja descubierta tan sólo una porción de su periferia.

Son muy usadas en marinería.



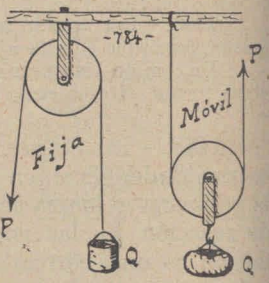
1450. – Las poleas de tracción pueden ser: SIMPLES y COMPUESTAS

Son **simples**, las que constan de una sola roldana (fig. 782) y **compuestas** o APAREJOS, las que constan de varias (fig. 786 h. 788)

1451. – Las poleas simples, en forma de *cuadernal* se llaman MOTONES (fig.785).

Podemos definir el **motón**, diciendo que: ES EL CUADERNAL CON UNA SOLA ROLDANA (1).

Cuadernal es el término general para designar las GARRUCHAS DE MARINERO; y **motón** es el CUADERNAL SIMPLE.



1452. - Las poleas simples o **troclas** pueden ser de dos tipos: TROCLA FIJA Y TROCLA MÓVIL. (fig. 784).

Trocla fija es la que está ajustada a un soporte, sirviendo tan sólo para *invertir el sentido de la tracción.*

Trocla móvil es la que pende de un trasmisor que tiene uno de los dos extremos atado a una barra fija.

La trocla móvil, como veremos más adelante, sirve para multiplicar la fuerza de tracción, aunque disminuye su velocidad.

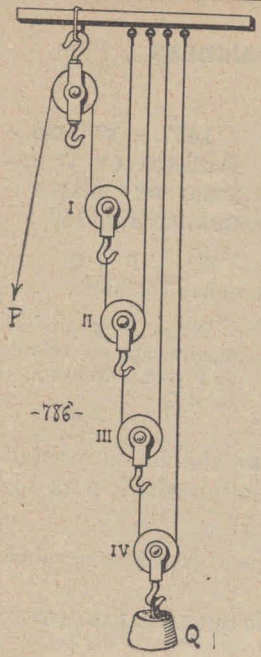
1453. – Hay tres tipos fundamentales de aparejos: el APAREJO POTENCIAL, el POLIPASTOS y el APAREJO DIFERENCIAL.

1454. – El **aparejo potencial** o SISTEMAS DE TROCLAS (fig. 786) es una combinación de varias troclas móviles y una fija.

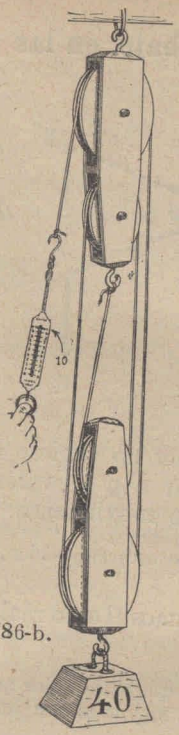
Las *troclas móviles* producen la multiplicación de la fuerza; y la *trocla fija* invierte el sentido de la tracción.

1455. – El **polipastos** es un conjunto de dos piezas *una fija* y *otra móvil*, con una o varias roldanas en cada pieza.

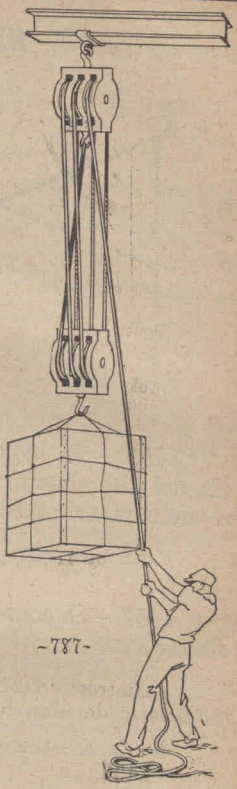
(1) El traductor de Kleiber — Karsten desconoce el verdadero significado de los términos CUADERNAL y MOTÓN:



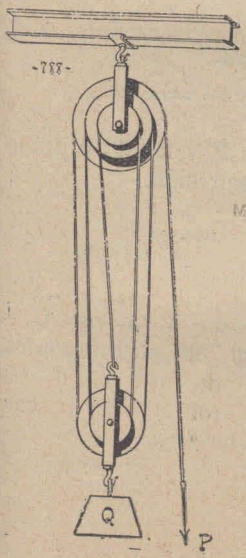
-786-



786-b.



-787-



-788-

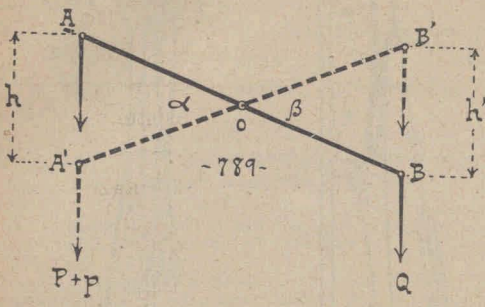
Hay tres tipos de polipastos : a) el POLIPASTOS PLANO (fig. 786-bis), el PAR DE CUADERNALES o *aparejo de marinero* (fig. 787), c) el POLIPASTOS DE WHITE o **tróculo** (fig. 788).

El *polipastos plano* consta de roldanas separadas cuyos ejes son mutuamente paralelos y sobrepuestos.

El *aparejo de marinero* y el de *White* tienen las roldanas yuxtapuestas, con un eje común, y sueltas sobre él como las poleas "locas"

1456. – Más adelante hablaremos del aparejo diferencial y de los polipastos.

5.º - El trabajo en las palancas



1457. – 1er Caso. – PALANCA DE 1er GÉNERO DE BRAZOS IGUALES (fig, 789).

Si **P = Q** hay equilibrio.

Luego **P+p** produce movimiento en sentido de **P** y en sentido opuesto a **Q**.

1458. – Si la palanca no tuviese roce alguno, ni resistencia del aire, bastaría dar a **p** un valor infinitesinal, para que el sistema se pusiese en movimiento.

Partiremos siempre de esta suposición, para simplificar el cálculo.

1459. – Si consideramos el caso real de que LA PALANCA TIENE MASA:

Entonces la fuerza **p**, que es la única que produce movimiento, dará tanto más impulso, cuanto mayor sea su intensidad.

P. l. t., la velocidad del sistema será tanto mayor, cuanto mayor sea **p**.

1460. – Para el cálculo del trabajo de **P** y de **Q**, dijimos que nos conviene reducir **p** a su ínfima expresión.

De modo que prácticamente tendremos.

$$P = Q$$

1461. – RELACIÓN ENTRE EL TRABAJO DE **P** Y DE **Q**. – Cuando la fuerza **P** recorre la distancia **h** (fig. 789), su antagónica **Q** recorre la distancia **h'**.

Tendremos, pues:

TRABAJO MOTOR $T_m = P.h$

TRABAJO RESISTENTE $T_r = Q.h'$

Pero $P = Q$ y la Geometría nos enseña que $h = h'$

luego $P.h = Q.h'$

o sea $T_m = T_r$

El trabajo motor es igual al trabajo resistente.

1462. – EN LA PALANCA DE *1er género* Y DE BRAZOS IGUALES, NO SE GANA NI EN FUERZA NI EN ESPACIO:

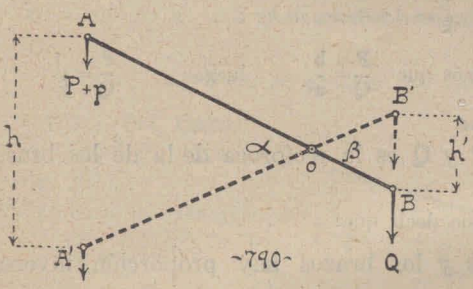
Hay simple inversión del sentido del movimiento.

1463. – NOTA. – En vez de decir «*ganancia o pérdida* EN ESPACIO», se acostumbra decir «*ganancia o pérdida* EN VELOCIDAD.»

Y la razón es obvia, porque en el mismo tiempo en que **P** recorre el espacio **h**, **Q** recorre el espacio **h'**. Tendremos, pues, la proporción.

$$\frac{v}{v'} = \frac{h}{h'}$$

v, v' (*velocidad del punto de aplicación de* **P** *y del punto* **Q**, *respective*).



~790~

En adelante, usaremos este lenguaje, no sólo para seguir la costumbre, sino porque es más preciso.

1464. – 2° Caso. PALANCA DE 1er GÉNERO, DE BRAZOS DESIGUALES (fig. 790).

Ya sabemos que, para que haya equilibrio, se requiere que

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a} \qquad (1)$$

Y de la semejanza de los triángulos **AoA'** y **BoB'** se deduce que

$$\frac{a}{b} = \frac{h}{h'} \qquad (2)$$

Sustituyendo este valor de $\frac{a}{b}$ en (1)

obtenemos $\frac{Q}{P} = \frac{h}{h'}$

de donde resulta que $P.h = Q.h'$

o sea $T_m = T_r$

De nuevo tenemos que

El trabajo motor es igual al trabajo resistente.

1465. – Dando al brazo **a** el siguiente valor

$$a = k.b$$

k (cualquier número, entero o fraccionario)

tendremos que $\frac{a}{b} = k$

Este valor k es, pues, la **razón** entre el BRAZO DE POTENCIA **a** y el BRAZO DE RESISTENCIA **b**.

Lo llamaremos **razón de los brazos de la palanca.**

Si invertimos la razón, tenemos

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{k}$$

$\frac{1}{k}$ es el recíproco de k

1466. – Teníamos que $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$ luego $\frac{P}{Q} = \frac{1}{k}$

Esto nos indica que:

La razón entre **P** y **Q** es la recíproca de la de los brazos de la palanca.

Que es lo mismo que decir que:

Entre las fuerzas y los brazos hay proporción inversa,

1467. – De la fórmula anterior se deduce que:

$$Q = P.\ k$$

Que es lo mismo que decir que;

Q CRECE PROPORCIONALMENTE AL CRECIMIENTO DE **a**.

O sea:

.... PROPORCIONALMENTE AL BRAZO DE LA FUERZA MOTRIZ.

1468. – Teníamos que (1464).

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{b} \qquad \text{luego} \qquad \frac{h}{h'} = k$$

Esto nos indica que:

LA RAZÓN ENTRE **h** Y **h'** ES LA MISMA QUE LA DE LOS BRAZOS DE LA PALANCA *(proporción directa).*

Pero **(1463)** $\quad \frac{h}{h'} = \frac{v}{v'}$

Lo que nos indica que:

LA VELOCIDAD DE LOS EXTREMOS **A** Y **B** DE LA PALANCA, ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A LOS BRAZOS RESPECTIVOS.

1469. – De las dos deducciones anteriores:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{k} \qquad \text{y} \qquad \frac{v}{v'} = k$$

resulta que:

a) Cuando **a** > **b** ganamos en fuerza y perdemos en velocidad.

b) Cuando **a** < **b** ganamos en velocidad, y perdemos en fuerza.

c) Cuando **a** = **b** no se gana ni en fuerza ni en velocidad.

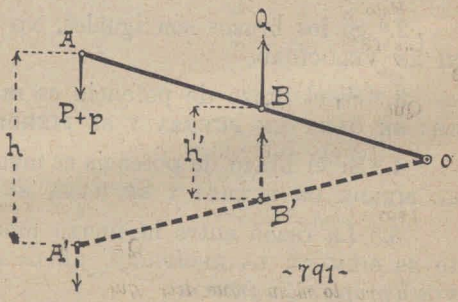
1470. – **3er Caso.** PALANCA DEL 2º GÉNERO (fig. 791). –

Ya sabemos que **(404)**;

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$$

y la semejanza de los triángulos **AoA'** y **BoB'** nos enseña que

$$\frac{a}{b} = \frac{h}{h'} = k$$



-791-

Notaremos, pues, que:

Este es un caso idéntico al de la palanca de 1er género (cosa ya insinuada en **434** h. **441**).

Tendremos, por consiguiente que, también aquí:

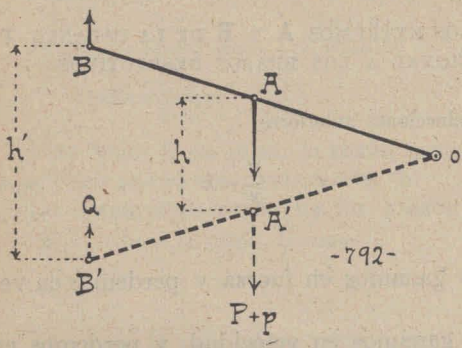
$$P.h = Q.h'$$

El trabajo motor es igual al trabajo resistente.

1471. – Y como en la palanca de 2° género, siempre:

$$a > b$$

EN ESTA PALANCA, SIEMPRE SE GANA EN FUERZA Y SE PIERDE EN VELOCIDAD.



1472. – **4° Caso** – PALANCA DE 3er GÉNERO (fig. 792).

Del simple examen de la figura, se colige que este es un caso inverso del anterior.

Luego:

EN LA PALANCA DE 3er GÉNERO. SE PIERDE EN FUERZA, Y GANA EN VELOCIDAD.

1473. – RESUMEN – En cualquier palanca:

1.° EL TRABAJO MOTOR ES IGUAL AL TRABAJO RESISTENTE.

2.° Si los brazos son iguales, NO SE GANA NI EN FUERZA NI EN VELOCIDAD.

3.° Si el brazo de potencia es mayor que el de resistencia: SE GANA EN FUERZA Y SE PIERDE EN VELOCIDAD.

4.° Si el brazo de potencia es menor que el de resistencia: SE PIERDE EN FUERZA Y SE GANA EN VELOCIDAD

5.° La razón entre la fuerza motriz y la fuerza resistente ES SIEMPRE LA RECÍPROCA DE LA DE LOS BRAZOS RESPECTIVOS *(proporción inversa)*.

6.° La razón entre las velocidades del punto de aplicación de ambas fuerzas, ES SIEMPRE LA MISMA QUE LA DE LOS BRAZOS RESPECTIVOS *(proporción directa)*.

Como consecuencia:

En las palancas, descontando la pérdida por el rozamiento y por la resistencia del aire, nunca se pierde ni se gana; PUESTO QUE LO QUE SE GANA EN FUERZA, SE PIERDE EN VELOCIDAD, Y VICEVERSA.

1474. – La consecuencia a que hemos llegado, pone de manifiesto la UTOPÍA de los que pretendieron inventar una máquina que, basándose en la atracción de la tierra produjese el llamado *movimiento perpetuo*.

Cualquier máquina, por complicada que sea, tropezará con el inconveniente de no **poder producir trabajo.** Lo único que puede, es MODIFICARLO.

6.°–El trabajo en las garruchas o poleas de tracción

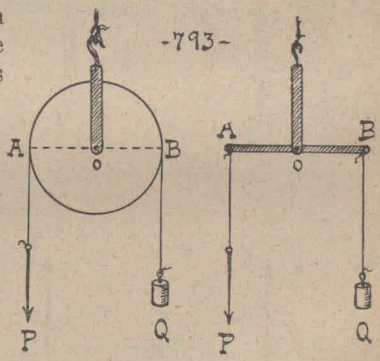
1475. – La **polea fija** es en último examen una palanca de 1er. género y de brazos iguales (fig. 793)

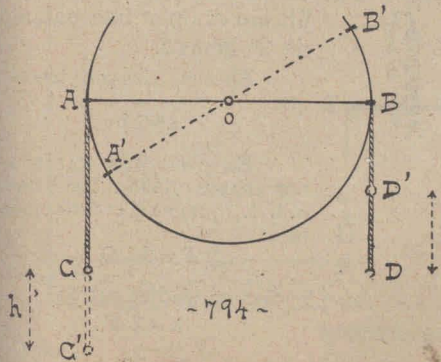
EFECTIVAMENTE:

Mediante la trasmisión, la fuerza **P** queda aplicada en **A**, y la fuerza **Q** queda aplicada en **B**.

El fulcro resulta siendo **o**.

De modo que la palanca es **AoB** *(simétrica)*.





Siendo **a=b** no se gana en fuerza, ni en velocidad (**146**).

Para el caso de equilibrio tendremos:

$$P = Q$$

y cómo (fig 794) $h = h'$

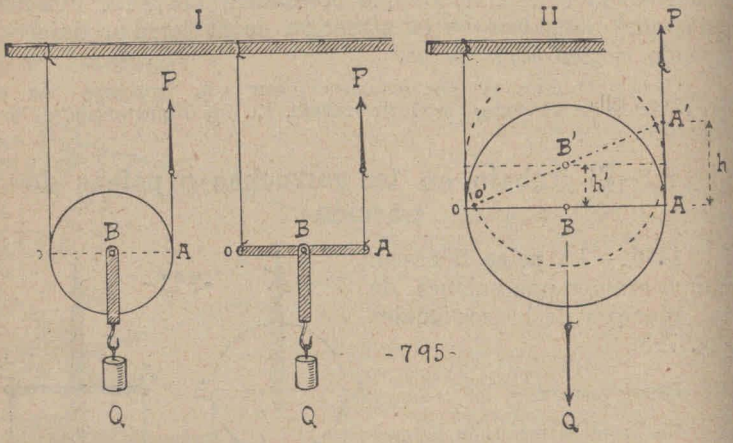
resulta $P.h = Q.h'$

Efectivamente, tanto cuanto baja **P**, sube **Q**, y viceversa.

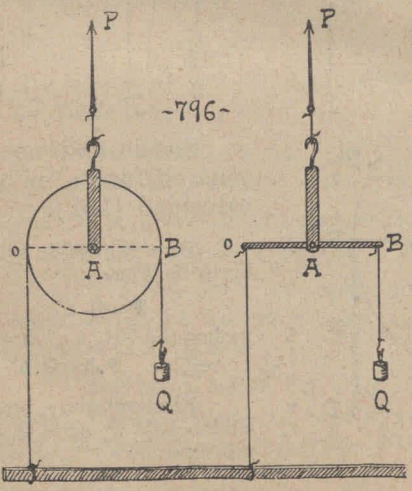
1476. – **El único objeto que tiene la polea fija, es el de invertir el sentido del movimiento (1452).**

1477. – La polea móvil puede ser: DIRECTA O INVERSA.

Es **directa**, cuando tiene la resistencia aplicada al gorrón (fig. 795).



-795-



-796-

Y es **inversa** cuando en el gorrón se aplica la fuerza motriz (fig 796).

1478. – La **polea móvil directa** (fig. 795) es en último examen una palanca de 2º género.

En ella, siempre tenemos que

$$a = 2\,b$$

Es, pues, 2 la RAZÓN DE LOS BRAZOS (**1495**). Tendremos, p. l. t., que, en el caso de equilibrio:

$$P = \tfrac{1}{2}\,Q$$

y siempre tendremos que

$$h = 2\,h'$$

1479. – *En consecuencia:*

En la POLEA MÓVIL DIRECTA, **se duplica la fuerza, pero la velocidad queda reducida a la mitad.**

En esta polea, no se invierte el sentido del movimiento.

1480. – La **polea movil inversa** (fig. 796) es una palanca de 3er género.

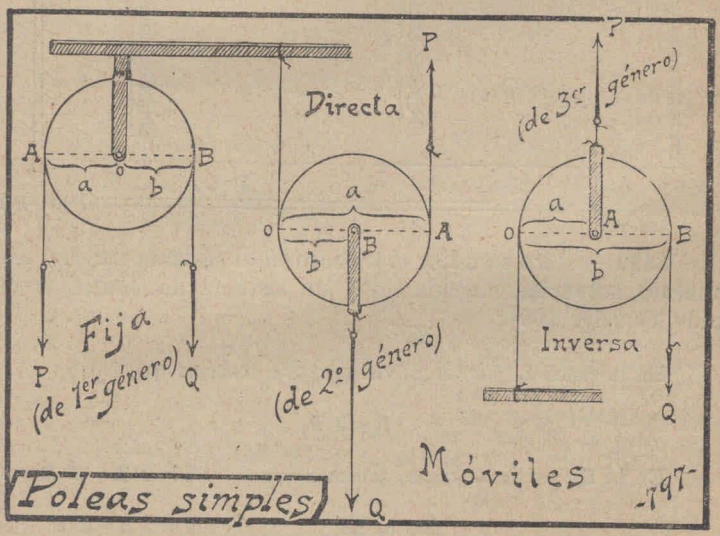
En ella $a = \frac{1}{2} b$

luego $P = 2 Q$

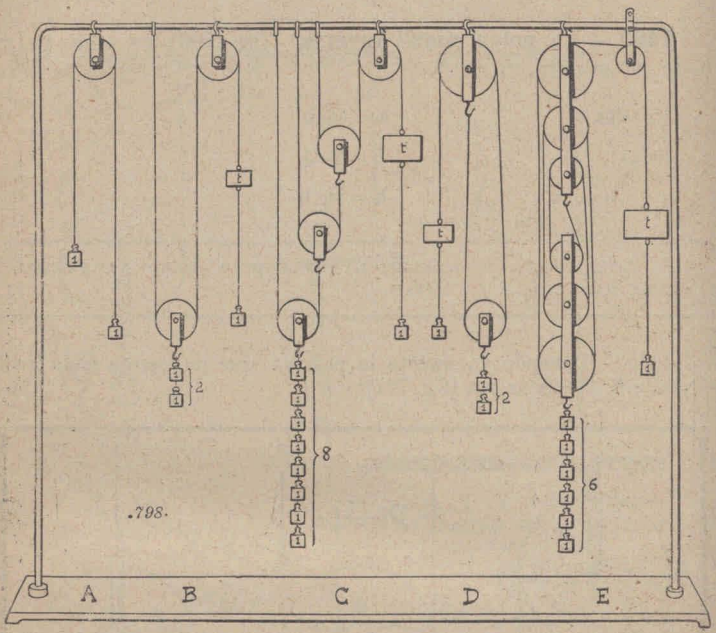
y $h = \frac{1}{2} h'$

AQUÍ, PUES, SE DUPLICA LA VELOCIDAD, PERO LA FUERZA QUEDA REDUCIDA A LA MITAD.

1481. – Teniendo en cuenta la palanca que representa cada trocla, las podemos clasificar así (fig. 797):



Poleas simples o Troclas		
Fija		de 1er género
Móviles	directa	de 2°. género
	inversa	de 3er género



1482. – Para estudiar el trabajo en el SISTEMA DE TROCLAS o **aparejo potencial**, consideremos un sistema de cuatro troclas móviles (fig. 799):

En la polea **I**, por ser MÓVIL DIRECTA, tenemos que

$$R = 2\,P$$

En la **II**, por igual razón, tenemos que $S = 2\,R = 2^2\,P$

Y así adelante: En la **III** $T = 2\,S = 2^3\,P$; En la **IV** $Q = 2\,T = 2^4\,P$

Y generalizando, tendremos:

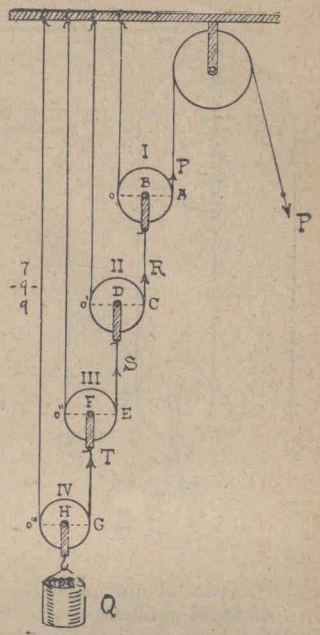
$$Q = 2^n P$$

n (número de poleas móviles)

Este resultado nos indica qu

$$h' = \frac{h}{2^n}$$

puesto que LO QUE SE GANA EN FUERZA SE PIERDE EN ESPACIO.

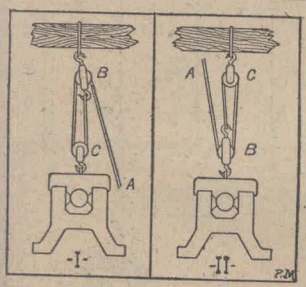


1483. – *De las dos fórmulas anteriores se deduce la siguiente regla:*

> **En el aparejo potencial: la fuerza queda multiplicada por la potencia *n* de 2; y la velocidad queda dividida por esa misma cantidad.**

1484. – **Polipastos sencillo** es el que consta de una sola polea móvil.

Puede ser DIRECTO O INVERSO (fig. 800).



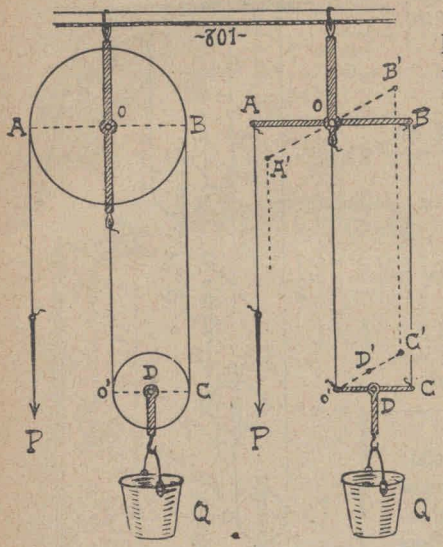
En el polipastos **directo** (fig. 800-**I**) un cabo de la trasmisión está sujeto en la polea fija; en el polipastos **inverso** (fig. 800-**II**) un cabo está sujeto en la polea móvil.

1485. – EL TRABAJO EN EL POLIPASTOS SENCILLO DIRECTO.

Ya vimos (**1475**) que la polea fija no modifica los dos factores del trabajo (*fuerza* y *espacio*).

P. l. t. en este polipastos tenemos la misma modificación que en la polea móvil normal (**1479**):

$$Q = 2n\ P \qquad h' = \frac{1}{2n}\ h$$



1486.- El juego de palancas del polipastos directo se indica en (fig. 801).

Los puntos o y o' deben considerarse como fijos en una fracción infinitesimal de tiempo.

En la palanca **AoB** (1er. género) tenemos:

$$a = b$$

luego $P' = P$ $\quad h' = h$

En la palanca **C'o'D'** (2º género) tenemos:

$$c = 2d$$

luego $Q = 2P' = 2P$

$$h'' = \tfrac{1}{2}h' = \tfrac{1}{2}h$$

1487.- EL TRABAJO EN EL POLIPASTOS INVERSO (fig. 801-bis)

Debido al movimiento que hace el paralelogramo **BCDE** al pasar a la posición **B'C'D'E'**, quedan como puntos fijos **o** y **o'**.

o' punto medio entre **B** y **C**

A simple vista se ve

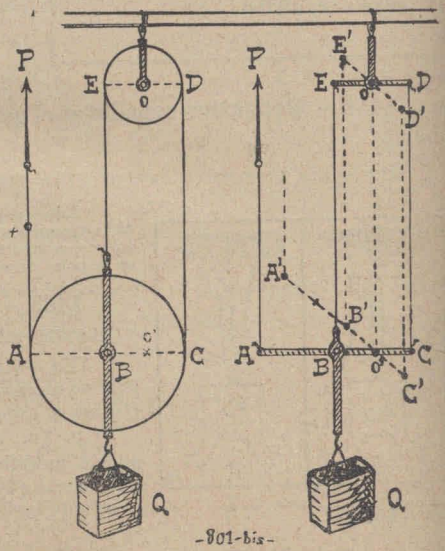
que $a = 3b$

luego $k = 3$

p. l. t. $Q = 3P$

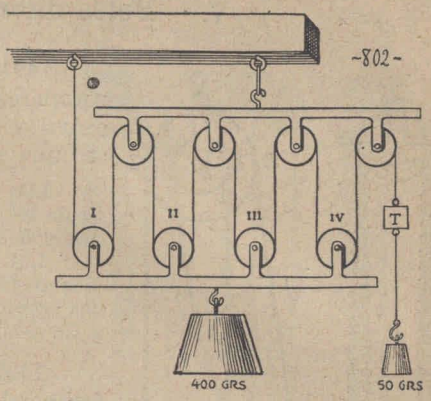
$h = \tfrac{1}{3}h$

1488.- Para estudiar el trabajo en el *polipastos compuesto directo*, tendremos en cuenta que en este aparejo, la resistencia está directamente aplicada al centro de cada polea móvil.



Lo desglosaremos, pues, como en la fig. 802

Del simple examen de la figura se deduce que en cada polea móvil **I, II, III, IV**, acontece por separado y con independencia mutua, lo que corresponde a una POLEA MÓVIL DIRECTA.



Y como en ella se tiene que $Q = 2P$

en un conjunto así dispuesto se tendrá ;

$$Q = (2 \times 4)P$$

lo que generalizado, se indica así :

$$Q = 2n.P$$

n (número de poleas móviles)

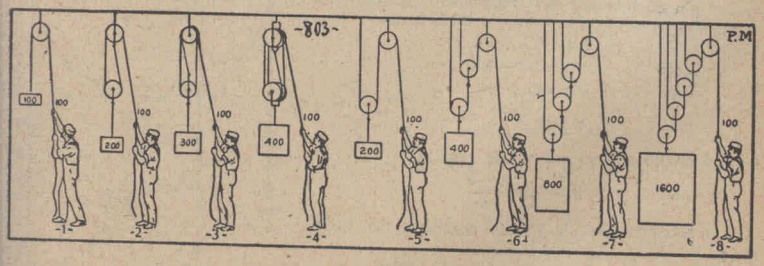
P. l. t. para que se cumpla el principio de la igualdad entre trabajo motor y trabajo resistente, se tendrá que

$$h' = \frac{h}{2n}$$

1489. – De las dos fórmulas obtenidas, se sigue la regla :

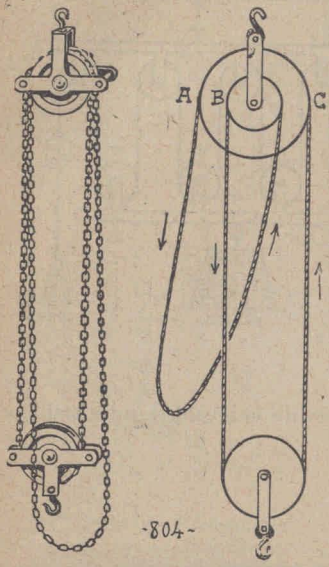
En el polipastos normal: la fuerza queda multiplicada por $2n$; y la velocidad queda dividida por esa misma cantidad.

1490. – Todo lo que hemos visto con respecto al trabajo en las poleas queda sintetizado en la fig. 803 (1).



(1) Llamamos la atención como en Kleiber Karsten están equivocadas las fórmulas referentes al aparejo potencial y al polipastos.

7.° – Polea diferencial



1491. – La **polea diferencial** es un aparejo que consta de una polea móvil y dos fijas, cuya trasmisión es una cadena sin fin (fig. 804).

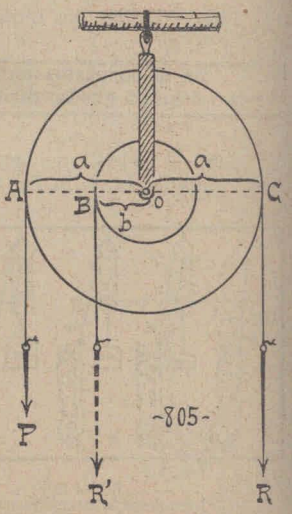
Las dos poleas fijas están mutuamente soldadas, de modo que giran con entera dependencia una de otra.

Las llantas de las poleas tienen dientes de engranaje, u otras rugosidades apropiadas al ajuste de la cadena, a fin de que no pueda resbalar.

1492. – **Teoría de la polea diferencial.** — La trocla móvil tiene como único fin, dividir la carga **Q** en dos cargas ficticias **R** de modo que $R = \frac{1}{2}Q$

Examinando la fig. 805 se ve que en la polea fija se forman dos palancas.

AoC y **BoC**



En **Ao** y **Bo** se suman los momentos, de **P** y de **R**, porque tienen el mismo sentido.

$$P.a + R.c \quad \text{(momento motor)}$$

Resulta, pues, que la mitad de la carga sirve para ayudar al operador a efectuar el trabajo.

En **oC** tenemos **R.a** (momento resistente)
La condición de equilibrio será, pues:

$$P.a + R.b = R.a$$

luego $P.a = R.a - R.b$

o sea $P.a = R(a - b)$

$$P = R\,\frac{a-b}{a}$$

y dando a **R** su valor $\frac{1}{2}Q$, resulta

$$P = \frac{1}{2}Q\,\frac{a-b}{a}$$

Esta expresión puede escribirse también así:

$$2P = Q\,\frac{a-b}{a} \quad \text{o así} \quad P = \frac{Q\,(a-b)}{2.a}$$

1493. – Las poleas diferenciales se construyen por lo general combinadas con engranajes y tornillos sinfín (fig. 806.)

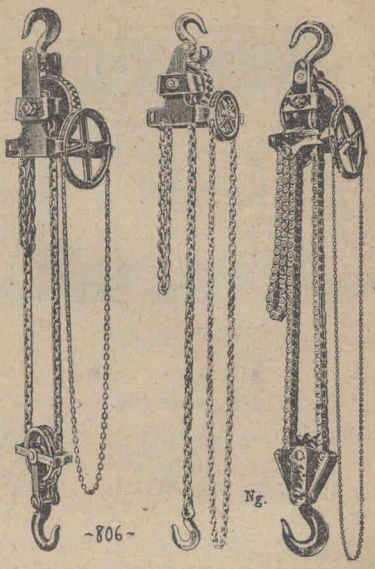


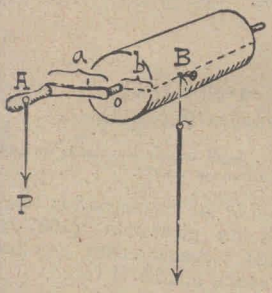
Fig. -806-

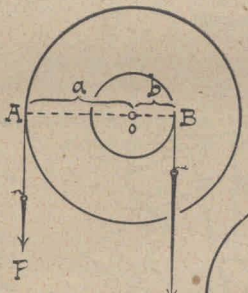
8.°– Torno

1494. – **Torno** es una máquina que consta de una palanca de 1er. género, de brazos desiguales; y en la cual uno o ambos brazos pertenecen a un tambor cilíndrico en el que se arrolla la trasmisión (fig. 807).

1495. – La condición de equilibrio en el torno, es pues:

$$P.a = Q.b$$



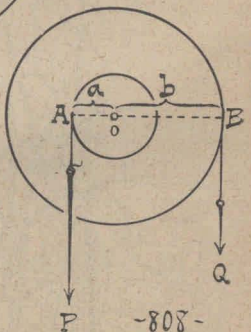


-807-

1496. – Hay tornos que multiplican la fuerza y dividen la velocidad (fig. 807):

$$h' = h\frac{b}{a} = {}^1/_k\, h \qquad Q = P\frac{a}{b} = P.k$$

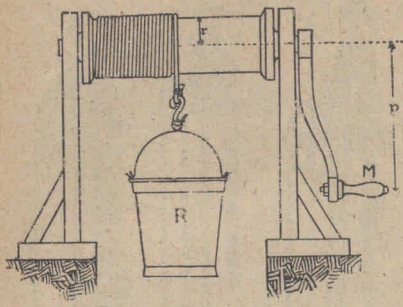
pero también los hay de función inversa a la anterior (fig. 808).



-808-

En éstos tenemos también

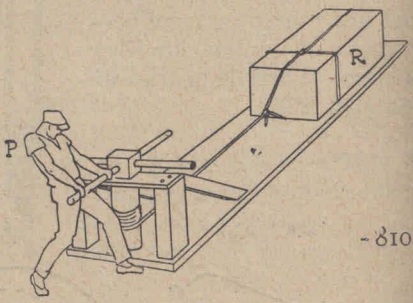
$$Q = P\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad h' = h.\frac{b}{a} \qquad \text{Pero aquí } \frac{a}{b} < 1 \qquad \text{luego } \frac{b}{a} > 1$$



-809-

1497. – Aplicaciones del torno.– El torno se aplica a usos muy variados, ya suelto, constituyendo de por sí una máquina; ya combinado con otros elementos, constituyendo en tal caso, una pieza de maquinaria.

1° El torno de pocero (fig. 809).

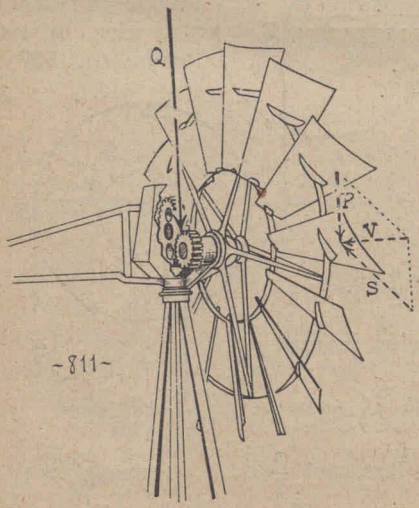


-810-

2° El cabrestante (fig. 810).

3° El torno en el molino de viento (fig. 811).

El viento ejerce la potencia en las aspas; y la resistencia se le aplica a una rueda engranada, cuyo diámetro es pequeño con relación al del molino.

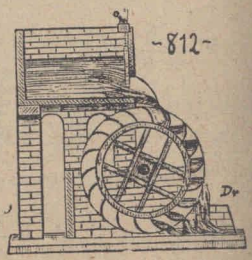


-811-

4° El torno en la rueda hídráulica (fig. 812)

Aquí sucede lo mismo que en el molino de viento.

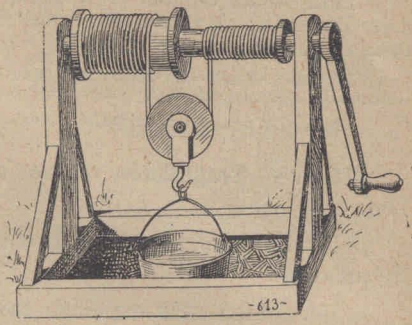
5° Al tratar de las trasmisiones giratorias (**1507** y **1513**) veremos como en ellas se aplica mucho el torno.



-812-

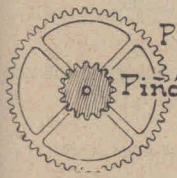
1498. – TORNO DIFERENCIAL. – es una adaptación de la teoría de la polea diferencial (fig. 813).

Aquí en vez de la cadena se recurre a la soga, que debe dar varias vueltas en el tambor para que no resbale.



9.º – Cálculo del trabajo en los engranajes y trasmisiones.

1499. – Los **engranajes** son trasmisiones giratorias efectuadas mediante el contacto directo de ruedas y piezas dentadas.



Pueden reducirse a los cuatro siguientes tipos fundamentales:

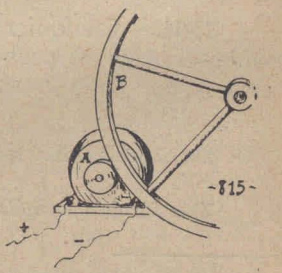
a) ENGRANAJE DE RUEDAS (fig. 814).

b) ENGRANAJE DE RUEDA Y CREMALLERA (fig. 775 y 777).

c) ENGRANAJE DE TORNILLO SIN FIN (fig. 822).

d) ENGRANAJE DE RUEDA Y CADENA (fig. 806).

1500. – **Trasmisiones de fricción** (fig. 815) son las ruedas que se trasmiten una a otra el movimiento mediante el contacto mutuo de sus llantas, una de las cuales es de cuero o caucho, siendo la otra de metal o madera.



Los engranajes y las trasmisiones de fricción están sujetos a las mismas leyes por cuanto podemos considerar que en la rueda de fricción existe un número infinito de dientes.

1501. – Para estudiar la velocidad en los engranajes, debemos considerar dos casos: a) TRASMISIÓN ENTRE DOS RUEDAS DENTADAS; b) RELACIÓN ENTRE EL PLATO Y SU PIÑÓN.

LÉXICO – **Plato** = LA RUEDA MAYOR *en un par de ruedas dentadas concéntricas y mutuamente soldadas* (fig. 814).

Piñon = LA RUEDA MENOR (*en el mismo caso*).

1502. – **Trasmisión entre dos ruedas dentadas** (fig. 766).

No conviene razonar este caso basándose en el concepto de palanca.

Es mucho más expedito razonarlo por un procedimiento peculiar de las trasmisiones.

Si la rueda motriz **A** tiene **a** dientes, y la receptora **B** tiene **b** dientes, la razón entre los dientes es

$$\frac{a}{b} = k$$

1503. – El concepto de razón (**905** – c) «NÚMERO DE VECES QUE UNA CANTIDAD CABE EN OTRA» nos enseña que si **a** vale k veces **b**, tendremos que:

Por cada vuelta que da A, la rueda B dará k vueltas.

De donde resulta que:

Hay proporción inversa entre las velocidades angulares de las ruedas y el número respectivo de dientes.

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{p}{a}$$

ω (*velocidad angular*) (*1*)

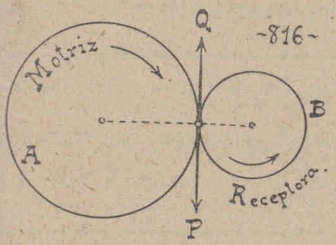
1504. – Cualquiera entiende que el número de dientes de ambas ruedas es proporcional a sus respectivas circunferencias, y por ende, a sus respectivos radios.

De donde resulta que: $$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{r}{r'}$$

Esta fórmula es aplicable también a las poleas de fricción. (fig. 815)

(1) Al hablar del «MOVIMIENTO GIRATORIO» en Cimemática, tendremos ocasión de deslindar los dos conceptos de **velocidad angular** y **velocidad tangencial** o **lineal**. Ahora sólo nos interesa saber que ω (velocidad angular) significa en nuestro caso «NÚMERO DE VUELTAS QUE DA LA RUEDA EN CADA SEGUNDO».

1505. – Modificación del trabajo en las llantas de un par de ruedas dentadas (fig. 816):



Cualquiera entiende que para: que haya equilibro, se requiere que

$$P = Q$$

P (fuerza motriz, tangencial a la llanta de A)

Q (reacción, tangencial a la llanta de B)

La razón es obvia, porque P y Q son congruentes (301) y como

$$T_m = T_r$$

o sea $P.e = Q.e'$

resulta que $e = e'$

EN LA TRASMISIÓN POR CONTACTO DE DOS RUEDAS, NO SE GANA NI EN FUERZA NI EN VELOCIDAD, SI COSIDERAMOS P Y Q APLICADAS A LAS LLANTAS (1).

1506. – Modificación del trabajo en los ejes de un par de ruedas dentadas (fig. 817).

Debemos suponer que los dos ejes tienen el mismo radio:

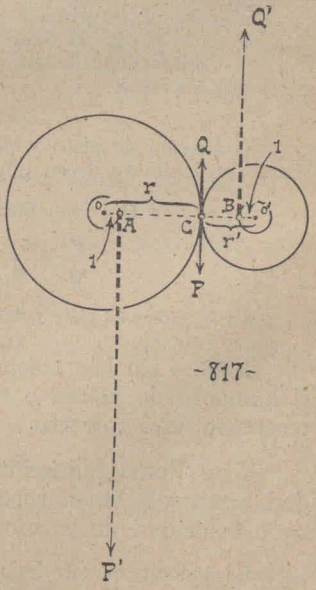
$$oA = o'B = 1$$

Aplicando el principio del torno (1496) en cada rueda tenemos:

$$\frac{P}{P'} = \frac{1}{r} \qquad \frac{Q}{Q'} = \frac{1}{r'}$$

$$P = \frac{P'}{r} \qquad Q = \frac{Q'}{r'}$$

pero $P = Q$ luego $\frac{P'}{r} = \frac{Q'}{r'}$



-817-

(1) Aquí hablamos de velocidad LINEAL, y no de velocidad ANGULAR.

o sea $\frac{P'}{Q'} = \frac{r}{r'} = k$ (proporción directa)

p. l. t. $\frac{v}{v'} = \frac{1}{k}$ (proporción inversa)

En la trasmisión por contacto de dos ruedas. *Si consideramos* **P** y **Q** *aplicados a los ejes:*

1°. Si la rueda mayor es motriz, se pierde en fuerza y se gana en velocidad.

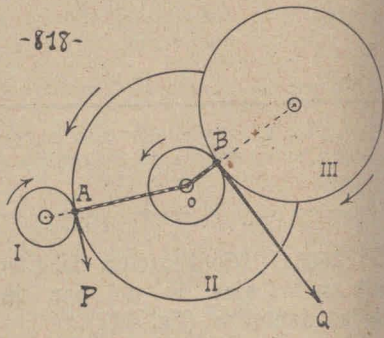
2°. La razón k de esta modificación, es $\frac{r}{r'}$

1507. – Relación entre el plato y su piñón (fig. 818). Un sistema de plato y piñón es un TORNO.

Se aplicará, pues, a él la regla del torno, que es la misma que la de la palanca:

La rueda **I**, imprimió en el plato de la rueda **II** (conforme al principio de trasmisión) una fuerza **P**.

-818-



El sistema de plato y piñón va a trabajar sobre la rueda **III** recibiendo en la llanta de su piñón una reacción **Q**.

Entre **P** y **Q** existe, pues, la relación:

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$$ (proporción inversa)

a y **b** (radios del plato y piñón, respectivamente).

1508. – En las trasmisiones se denomina: **multiplicación** el aumento de fuerza o velocidad que se produce en la rueda receptora, con respecto a la fuerza o velocidad de la motora.

Y se llama **reducción** la disminución de fuerza o velocidad producida en la rueda receptora, con respecto a la fuerza o velocidad de la motora.

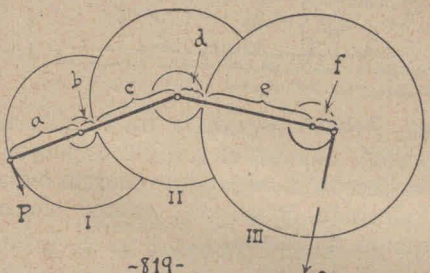
Basándonos en este lenguaje enunciaremos las leyes de las trasmisines por engranaje o por fricción en la siguiente forma:

1.° En la trasmisión entre dos ruedas distintas, cuando k es mayor que la unidad, hay en el eje receptor MULTIPLICACIÓN DE VELOCIDAD ANGULAR Y REDUCCIÓN DE FUERZA.

Sucede lo contrario, cuando $k < 1$.

$$k \text{ es la razón } \frac{a}{b} \quad o \text{ la razón } \frac{r}{r'}$$

2;° Cuando se aplica la fuerza motriz al plato, y la resistencia al piñón, hay en la llanta de éste, MULTIPLICACIÓN DE FUERZA Y REDUCCIÓN DE VELOCIDAD LINEAL.



-819-

Sucede lo contrario, cuando la potencia se aplica al piñón, y la resistencia al plato.

3.° En una sucesión de platos y piñones (fig. 819), la reducción o multiplicación final es igual al producto de las reducciones o multiplicaciones parciales.

Si $\frac{a}{b} = m$ $\frac{c}{d} = n$ $\frac{e}{f} = r$

Aplicando la 2.ª ley, habrá en las llantas: MULTIPLICACIÓN DE FUERZA Y REDUCCIÓN DE VELOCIDAD.

El coeficiente k que indica el valor de esta multiplicación será:

$$k = m.n.r$$

luego: $Q = K.P$ o sea $Q = P.m.n.r$

El coeficiente que indica la reducción de la velocidad será:

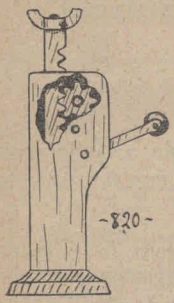
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{m.n.r}$$

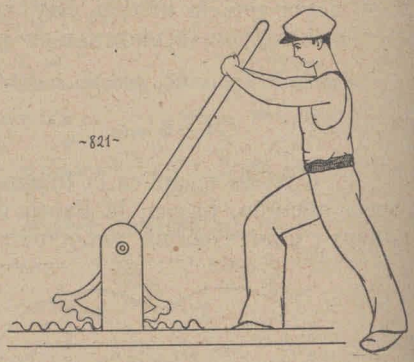
luego $$v' = \frac{v}{m.n.r}$$

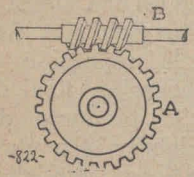
1509. – En el engranaje de **rueda y cremallera**, no hay multiplicación ni reducción.

Su único fin es el de convertir en rectilíneo el movimiento circular o viceversa.

Ej.: el gato o crik (fig. 820) y la palanca de cambista (fig. 821)







1510. – En el engranaje **de tornillo sin fin** (fig. 822), cuando el tornillo es motor y la rueda es receptora, se produce enorme reducción de velocidad, y por lo tanto, enorme multiplicación de fuerza.

Ej.: el tacómetro (fig. 700)

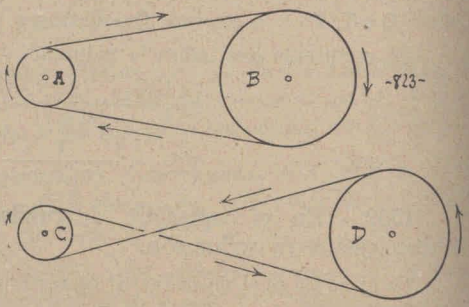
Si la rueda es motriz, y el tornillo es receptor, sucede lo contrario.

Ej.: el regulador de la rotación del cilindro del aparato Morín (figs 494 y 559)

1511. – En el engranaje de rueda y cadena, no se produce multiplicación ni reducción, hay simple tracción a distancia.

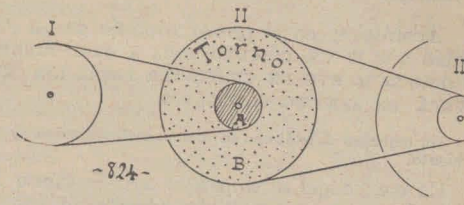
10.° – El trabajo en las trasmisiones a distancia.

1512. – En la trasmisión giratoria a distancia, (fig. 823) cualquiera ve que si no hay resbalamiento, se cumplen las mismas reglas que en las trasmisiones por engranaje o por fricción.



1513. – También en estas trasmisiones existen tornos como los de *plato* y *piñón* (fig. 824).

Aquí, sin atender al tamaño de las dos poleas, se llama **polea de mando** la que imprime el movimiento al eje del torno; y **polea de acción o motriz** la que envía el movimiento a otra rueda de mando.



-824-

En el caso de la fig. 824, son POLEAS **motrices**: **I** para el sistema **II**, y **B** para el sistema **III**; y es POLEA DE **mando**: **A** para **B**.

1514. – Las tres leyes de los engranajes o de las ruedas de fricción, aquí pueden expresarse en los términos siguientes:

1.° Cuando el movimiento se trasmite entre dos poleas de distinto eje, no se gana en fuerza ni en velocidad lineal: LO ÚNICO QUE VARÍA ES LA VELOCIDAD ANGULAR.

2.° Cuando el movimiento se trasmite entre dos ruedas soldadas a un mismo eje, la razón ENTRE LAS DOS FUERZAS, es la recíproca de la de los radios respectivos; y la RAZÓN ENTRE LAS VELOCIDADES LINEALES DE SUS LLANTAS es la misma que la de los radios.

3.° En una sucesión de tornos, la multiplicación o la reducción final es igual al producto de las multiplicaciones o reducciones parciales.

11.° – Las ruedas dentadas en la antigüedad

Por H. H. MANCHESTER

(De un artículo de la revista «INGENIERÍA INTERNACIONAL» – Junio – 1921)

1515. – El origen de la rueda dentada se atribuye a los egipcios y a los babilonios.

Los egipcios las usaron desde tiempo inmemorial para sus ruedas hidráulicas.

Los babilonios en su grabados de, tal vez, 700 años antes de nuestra era, muestran la aplicación de poleas y palancas, pero no la de ruedas dentadas.

El autor de este artículo no ha podido encontrar ninguna ilustración de engranajes, a pesar de haber investigado miles de grabados.

1516.– Probablemente por primera vez se menciona la aplicación de ruedas para trasmisiones en el año 330 antes de nuestra era:

Aristóteles, en el primer capítulo de su "PROBLEMAS MECÁNICOS" escribió que SI UN CÍRCULO TOCA A OTRO CÍRCULO, Y EL DIÁMETRO DEL PRIMERO SE MUEVE EN CUALQUIER DIRECCIÓN, EL DIÁMETRO DEL OTRO SE MOVERÁ EN SENTIDO CONTRARIO.

Sin embargo Aristóteles no menciona los dientes, y sólo describe trasmisión por rozamiento.

En ese tiempo se empezó a usar la **cabría**, la cual se adoptó extensamente para mover materiales pesados, máxime en la construcción de edificios.

Y es probable que en ella se haya aplicado alguna clase de engranaje.

1517.– Al parecer, el tornillo de Arquímedes (ver *Hidráulica*) para extraer agua, fué posterior a la aplicación del tornillo para otros usos.

Esto sugiere la idea de que el **tornillo sin fin** *era ya conocido.*

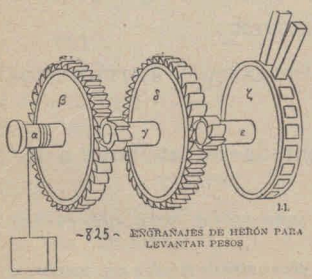
Pero no hay pruebas suficientes para ello.

1518.– No hay duda alguna que la rueda dentada era conocida por los antiguos matemáticos griegos.

El arquitecto romano *Vitruvio* dice que OTESIBIO construyó un reloj de agua en el cual utilizó una trasmisión de ruedas dentadas para medir el tiempo (1).

Este reloj se dice que contenía una cremallera y un tambor giratorio, *ambos dentados en ciertos lugares y engranando para trasmitir un movimiento regular.*

Por el año 230 antes de nuestra era, Filón de Bizancio (según cuenta la tradición) utilizó para elevar agua, una rueda con rayos que accionaba una cremallera.



–825– ENGRANAJES DE HERÓN PARA LEVANTAR PESOS

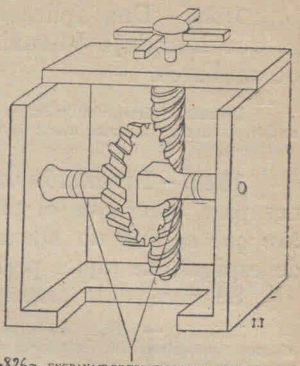
Casi ninguno de los trabajos de Otesibio y Filón subsisten; pero es probable que algunos de sus inventos fueran presentados por Herón de Alejandría, que vivió el siglo II antes de nuestra era.

Efectivamente en sus obras Herón declara que éstas contienen no sólo aparatos propios, sino también ajenos, *aunque no aclara la procedencia de ninguno.*

1519.– Herón, en su tratado de Mecánica, demuestra como puede levantarse una carga por medio de RUEDAS DENTADAS Y PIÑONES (fig. 825).

(1) Vitruvio atribuye también a Otesibio la construcción del SIFÓN, de los FUELLES, una MÁQUINA TÉRMICA y el ÓRGANO DE AGUA.

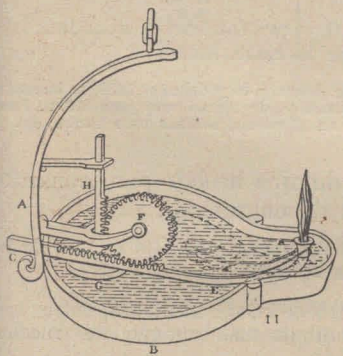
También muestra la aplicación del TORNILLO SIN FIN con una RUEDA DENTADA y CREMALLERA, y da ejemplos de DIENTES INCLINADOS (fig. 826).



-826- ENGRANAJE DE TORNILLO SIN FIN DE HERÓN

En sus trabajos sobre Neumática describe una *rueda dentada* y *cremallera*, *ruedas dentadas cónicas* y el accionamiento de una EXCÉNTRICA.

Esta excéntrica se utilizó para accionar la rueda ventiladora de un órgano, lo cual comprueba que, *como juguete de filósofos*, data de miles de años antes de haberse aplicado industrialmente en Europa.



-827- LÁMPARA CON ARREGLO AUTOMÁTICO DE LA MECHA

1520. – LA RUEDA DENTADA y la CREMALLERA también se usaron en una lámpara para regular automáticamente el movimiento de la mecha (fig. 827).

Esto se hacía en la forma siguiente: al mermar el aceite, subía la mecha lo suficiente como para reponer la parte quemada.

En las indicaciones de Herón se especifica que esta cremallera debe ser de hierro.

HÉ AQUÍ UNO DE LOS POCOS EJEMPLOS ANTIGUOS DE DIENTES DE HIERRO O DE DIENTES QUE AJUSTEN EN OTROS DIENTES.

No hay duda que la práctica corriente en la antigüedad era hacer los dientes extendiendo los rayos de la rueda o fijando bloques oblongos de madera en la circunferencia o en la cara de la rueda.

1521. – No se puede aseverar que en los tiempos antiguos los engranajes fueran generalmente del tipo cilíndrico y rueda de espigas, y si estaban en el mismo plano, o si consistían en un bloque liso que golpeaba otro bloque.

Los dibujos que se muestran en el tratado de Herón son probablemente más típicos de su período que los de otros autores de la misma época.

Los dientes de las ruedas tal vez representan conocimientos de un período anterior, y, *aunque son más sencillos*, se someten a una técnica más rigurosa que los que se hacían en esa época.

N. B. — Las ilustraciones señaladas con **I. I.** pertenecen a la Revista "INGENIERÍA INTERNACIONAL".

1522. – Una aplicación curiosa de la rueda dentada fué la que introdujo Vitruvio en relación con la rueda de paletas de un barco.

Lo más curioso, sin embargo es que la rueda de paletas no se utilizaba para hacer andar el barco, sino para medir la velocidad del mismo.

1523. – INVENCIÓN DEL PIÑÓN DE LINTERNA. – Hay razones para creer que el **piñón de linterna,** *a pesar de lo primitivo que es,* fué un adelanto sobre la rueda dentada y rueda de espigas, de aquel período.

Se inventó a principios de la Edad Media.

LÉXICO.— **Piñón de linterna** *es el que está formado por dos discos unidos entre sí por unas columnitas cilíndricas* (como sucede en los piñones de los despertadores comunes) *o por una superficie cilíndrica con ventanas oblongas en sentido de las generatrices* (fig. 828 - **E**).

La aplicación del piñon de linterna (hoy casi totalmente abandonada) es la característica de los engranajes de la Edad Media.

En un libro de ingeniería militar, de autor desconocido y del año 1430, se insertan ilustraciones de la aplicación de engranaje a un molino de viento con una RUEDA DE ESPIGAS y PIÑÓN DE LINTERNA; y se incluyen EXCÉNTRICAS, RUEDAS DE PALETAS, etc.

1524. – Entre los numerosos dibujos hechos por Leonardo de Vinci hay varias ilustraciones de engranajes.

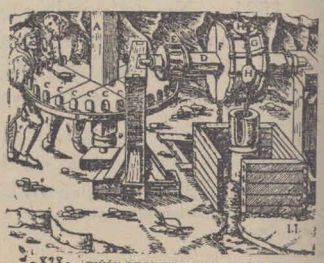
Merecen citarse los dibujos de una PRENSA, una GRÚA, una MÁQUINA DE TALADRAR y una PICADORA DE LIMAS.

Una de ellas muestra cierto número de ruedas dentadas, entre las cuales probablemente se encuentra el dibujo más antiguo de ruedas con dientes en el interior de la llanta.

Estos dientes son de forma triangular, y un lado de ellos es casi paralelo al radio.

Es bueno advertir que la mayoría de estos dibujos eran simples insinuaciones; no constando que hayan llegado a ponerse en práctica.

1525. – EL ENGRANAJE DE AGRÍCOLA (fig. 828). – A mediados del siglo XVI, Jorge Agrícola, en su obra «*De re metallica*», describe los engranajes que se utilizaban en esa época, y tal vez por muchos años previamente.



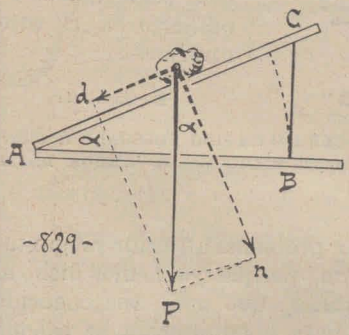
828 PIÑÓN DE LINTERNA DE AGRÍCOLA

La mayoría de los engranajes se componían de piñones de linternas con espigas que se combinaban ya con engranajes cilíndricos, ya con ruedas de espigas.

La fig. 828 muestra un piñón de linterna mejorado y una rueda de espigas.

Conforme lo indica Agrícola, los dientes de las ruedas se aseguraban con tornillos, a fin de poderlos reponer cuando se rompían. Y tanto éstos como las espigas eran de acero.

12.° – El plano inclinado y sus aplicaciones.



-829-

1526. – Ya vimos en diversas ocasiones lo que se refiere a la teoría del plano inclinado **157 – 158 – 851 – 852 – 1020.** (fig. 829)

Aquí solamente recordaremos que (**1021**):

$d = P.\ sen\ \alpha$ $\qquad$ $n = P.\ cos\ \alpha$

Si llamamos "UNO" el segmento **AB**, tendremos que

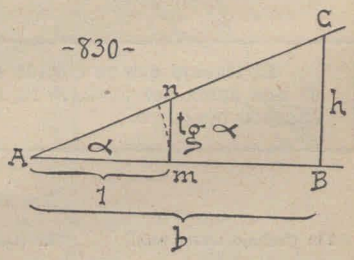
$$CB = tg\ \alpha$$

CB es el DECLIVE.

LÉXICO— **Declive** o PENDIENTE = DESNIVEL UNITARIO.

Desnivel = *Diferencia de niveles entre dos puntos cualesquiera de un plano inclinado.*

1527. – El **declive** se puede llamar también: RAZÓN ENTRE LA ALTURA Y LA BASE DE UNA PENDIENTE (fig. 830)



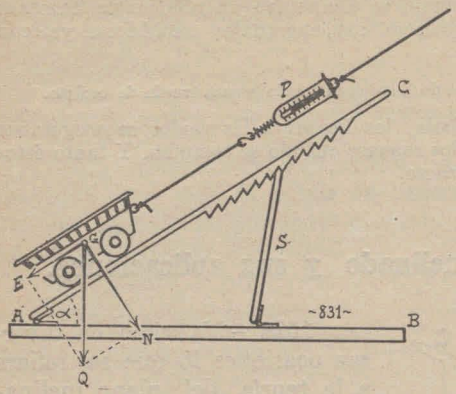
-830-

De la semejanza de los triángulos **Amn** y **ABC**, se deduce que

$$\frac{tg\ \alpha}{1} = \frac{h}{b}$$

de donde resulta que $\qquad tg\ \alpha = \frac{h}{b}$ $\qquad$ L.Q.Q.D.

1528. – En la tracción cuesta arriba se pueden presentar dos problemas:



1er. PROBLEMA. – *Supuesto nulo el roce, ¿cuál es la fuerza que equilibra a* **Q** (fig. 831)?

SOLUCIÓN **P = E**

pero $E = Q \cdot sen\ \alpha$

luego $P = Q \cdot sen\ \alpha$

1529. – 2.° PROBLEMA. – *Teniendo en cuenta el roce, ¿cuál es la condición de equilibrio en el caso anterior?*

SOLUCIÓN $P = Q \cdot sen\ \alpha + R$ R (*rozamiento*

NOTA. – Recordemos que: SI EL CUERPO HA SIDO COLOCADO RECIENTEMENTE SOBRE EL SOPORTE, TIENEN EL MISMO VALOR AMBOS ROCES (el de arranque y el de movimiento).

1530. – OBSERVACIÓN. - En el problema anterior preguntamos por la condición de equilibrio, porque ya hemos dicho al tratar del trabajo en las palancas, que una vez conocido el valor de **P** (fuerza necesaria para el equilibrio), se calcula **p** (fuerza necesaria para obtener una determinada aceleración).

En (**1093** h. **1098**) hemos distinguido entre "TRABAJO DE REMOCIÓN DE ESTOREOS" y "TRABAJO DE IMPULSO"; y dijimos que:

> **El trabajo que se efectúa en la producción de un movimiento es una suma del** TRABAJO DE OBVIACIÓN **o** ESTÁTICO **y el** DE IMPULSO **o** DINÁMICO.

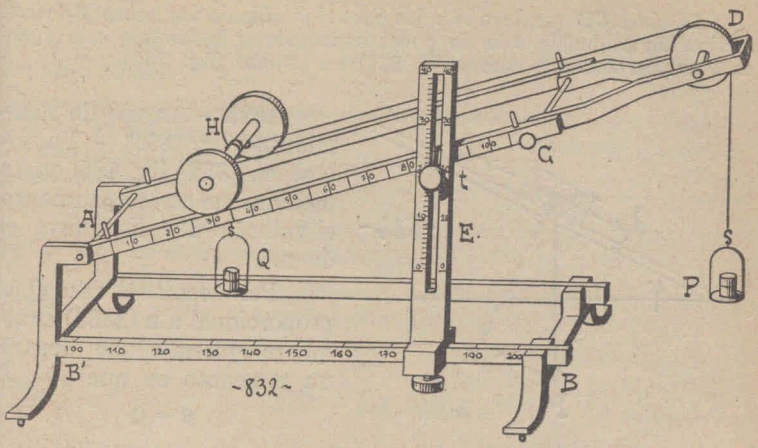
$$Tm = Te + Ti$$

Tm (trabajo motor total) **Te** (trabajo estático) **Ti** (trabajo de impulso)

Y allí mismo dijimos que **fm = fe + fi**

En nuestro problema, tendremos, pues que

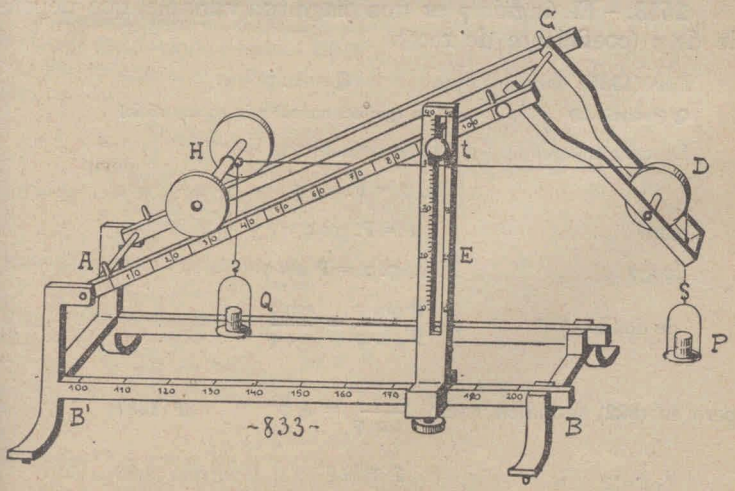
fm = P + p **fe = P** **fi = p**



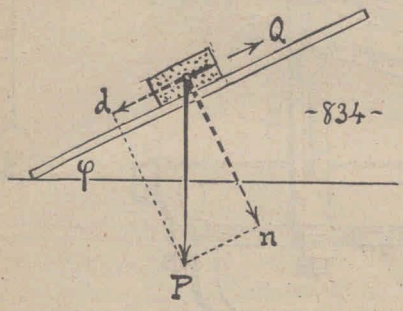
1531. – Aparato de Bertram (fig. 832 y 833). – Sirve para demostrar la condición de equilibrio en el plano inclinado.

Consta de dos vías paralelas, de inclinación graduable, y con una escala vertical **E** que da la medida del *seno* o de la *tangente* de α.

Sobre las vías va un *"carro"* que consiste en un eje con dos ruedas del que pende un platillo para las pesas **Q**.



La pieza **CD** que lleva la polea para el platillo de las pesas **P**, tiene inclinación graduable, a fin de poder experimentar haciendo que la fuerza **P** sea paralela a la cuesta (fig. 832) o a la base (fig. 833).



-834-

1532. – Ángulo de rozamiento (fig. 834). - Ya vimos en (**852** - fig. 486) que a medida que crece α, aumenta el valor de **d** y disminuye el de **n**.

Pero como el roce **Q** es proporcional a **n** (**1385**) cualquiera entiende que llegará un momento en que

$$\mathbf{d} = \mathbf{Q}$$

Pasado ese límite de crecimiento de α, el cuerpo resbalará sobre su soporte.

Llamando φ a ese valor límite de α tendremos que el cuerpo resbalará cuando

$$\mathbf{Q} = \mathbf{d} = \mathbf{P}.\, sen\, \varphi \qquad (1)$$

Este ángulo φ ha recibido el nombre de ÁNGULO DE ROZAMIENTO.

1533. – El ángulo φ es una magnitud variable, que depende de ρ (coeficiente de roce).

Por (**1385**) sabemos que $\mathbf{Q} = \mathbf{n}.\, \rho$

Q (*rozamiento*) **n** (presión normal a la su superficie)

De esta ecuación y la (1) se deduce que

$$\mathbf{n}.\, \rho = \mathbf{P}.\, sen\, \varphi$$

pero $\mathbf{n} = \mathbf{P}.\, cos\, \varphi$

luego $\mathbf{P}.\, cos\, \varphi.\, \rho = \mathbf{P}\, sen\, \varphi$

de donde $$\rho = \frac{\mathbf{P}\, sen\, \varphi}{\mathbf{P}\, cos\, \varphi} = \frac{sen\, \varphi}{cos\, \varphi}$$

pero en (**822**) se indica como $\dfrac{sen\, \varphi}{cos\, \varphi} = tg\, \varphi$ er (**1387**)

p. l. t. $\rho = tg\, \varphi$

1534. – La fórmula a que acabamos de arribar nos enseña a calcular el coeficiente de rozamiento por medio del plano de Galileo:

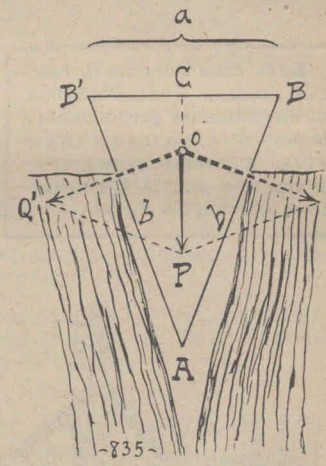
> **El coeficiente de rozamiento es igual a la tangente trigonométrica del ángulo de rozamiento.**

1535. – Las máquinas sencillas derivadas del plano inclinado son: la CUÑA y el TORNILLO.

Cuando al estudiar las máquinas sencillas, decimos TORNILLO, nos referimos a la *hélice*, al *tornillo* y a la *rosca*.

13.° – La cuña

1536. – En su composición esencial, la **cuña** es un cuerpo con dos caras planas concurrentes (fig. 835).



Al abrirse paso una cuña, haciendo una brecha, la fuerza **P** de empuje, aplicada a su cabeza, se descompone en dos fuerzas **Q** y **Q'**, normales a los dos costados de la cuña.

Cuando la cuña es simétrica, su sección es un triángulo isósceles **BB'A**

Este triángulo y el **PoQ** son semejantes, luego:

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{b}$$

de donde $$Q = P.\frac{b}{a}$$

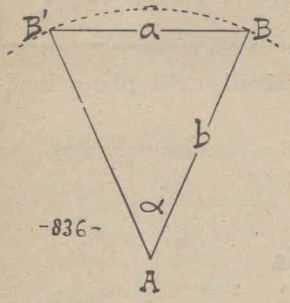
siguiendo nuestra costumbre de llamar k la razón $\frac{a}{b}$ sea cual fuere el lugar donde le encontramos, tendremos que

$$Q = P.\ 1/k$$

k (*razón entre la cabeza y un costado*). $1/k$ (*razón entre un costado y la cabeza*).

1537. – La fórmula a que hemos llegado, nos enseña que:

Cuando en la cuña isósceles hay equilibrio entre la FUERZA MOTRIZ y la DE REACCIÓN normal a sus costados, ésta es igual al producto de aquélla por la razón entre un costado y la cabeza.



-836-

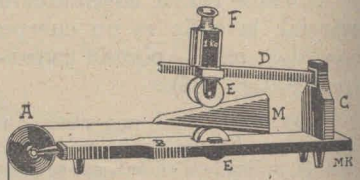
1538. – Siendo **BAB'** un triángulo isósceles (fig. 836) si consideramos **b** como unidad, tendremos que

$$\mathbf{a} = cuerda\ \alpha$$

$$\text{p. l. t.} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P}\ \frac{1}{cd\ \alpha}$$

lo cual nos enseña que

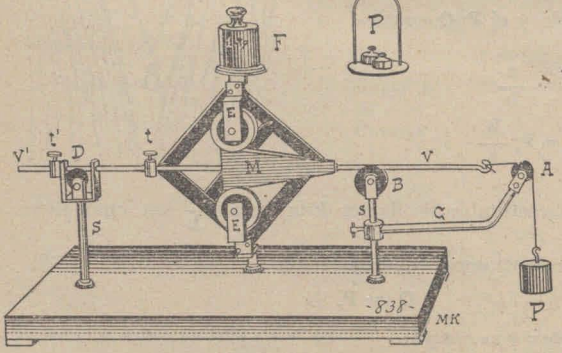
En la cuña isósceles la reacción NORMAL A LOS COSTADOS, es directamente proporcional a la PRESIÓN EJERCIDA EN LA CABEZA, e inversamente proporcional a la cuerda trigonométrica del ángulo apical.



-837-

LÉXICO. — **Ápice** (en el triángulo isósceles) = *vértice opuesto a la base.*

Ángulo apical = *el del ápice*



-838-

1539. – APARATOS PARA ESTUDIAR LA LEY DE EQUILIBRIO EN LA CUÑA (figs. 837 y 838).

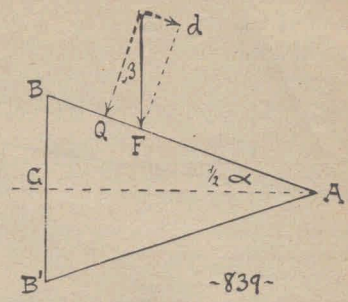
Para experimentar con estos aparatos, hay que tener en cuenta (fig. 839) que **F** no es normal al costado de la cuña.

Conforme a la ley del plano inclinado, tendremos pues que

$$Q = F.\ cos\ \beta$$

$$\beta = \tfrac{1}{2}\alpha$$

y como por la ley de la cuña sabemos que $Q = P\ \frac{1}{cd\ \alpha}$



-839-

resulta que $$F.\ cos\ \beta = P\ \frac{1}{cd\ \alpha}$$

de donde $$F = P\ \frac{1}{cd\ \alpha\ .\ cos\ \beta}$$

pero (802) $$cd\ \alpha = 2\ sen\ \tfrac{1}{2}\alpha = 2\ sen\ \beta$$

luego $$F = P\ \frac{1}{2\ sen\ \beta\ .\ cos\ \beta}$$

1540. – APLICACIONES DE LA CUÑA:

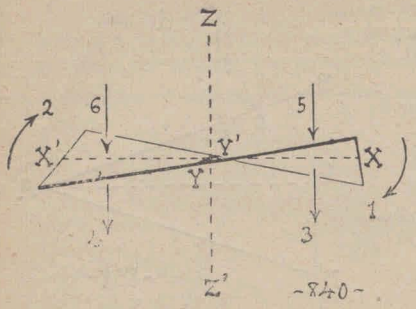
1.° Queda aplicada directamente en el cuchillo, el hacha, el cortafierro, el formón, la cuña (*en su acepción vulgar*).

2.° El principio de la cuña queda aplicado también en: las chavetas, los clavos, las leznas, y cualesquiera otros cuerpos de forma piramidal que se abran paso con el procedimiento de la cuña.

1541. - La ley de la cuña nos indica como, tanto mayor será el efecto de los instrumentos cuneiformes, cuanto menor sea el ángulo de su punta o filo.

14.° – La hélice y el tornillo

1542. – La **hélice** en su forma más rudimental consiste en una superficie alabeada de directriz **XX**, y generatriz **YY'**, ambas rectas. Gira sobre un eje **ZZ'**, perpendicular a la directriz y a la posición media de la generatriz (fig. 840).



-840-

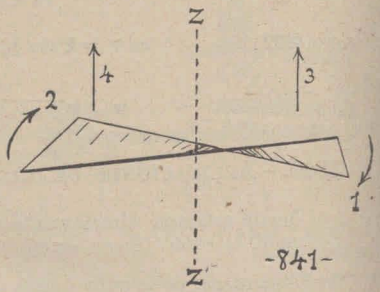
Como se ve LA HÉLICE ES UNA APLICACIÓN DIRECTA DE LA TEORÍA DEL PLANO INCLINADO.

Cuando la hélice gira en sentido de las flechas **1, 2,** produce empuje en sentido de las flechas **3, 4.**

1543. – Si la hélice está fija dentro de un elemento móvil (p. ej., aire, agua), produce EMPUJE en sentido de **3,4** y ASPIRACIÓN en sentido de **5,6.**

Es el caso de los VENTILADORES y de ciertas CENTRÍFUGAS.

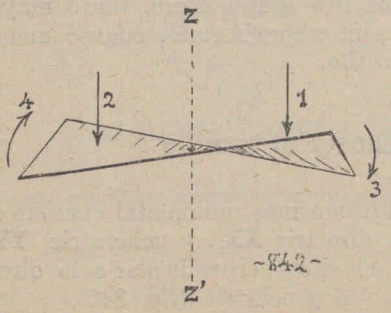
1544. – Si la hélice tiene avance libre, y el elemento que la contiene tiene más inercia que ella, entonces éste queda relativamente quieto, y la hélice avanza en sentido inverso al de su propulsión (fig. 841).



-841-

Podemos decir que se "ENTORNILLA EN EL AIRE O EN EL AGUA".

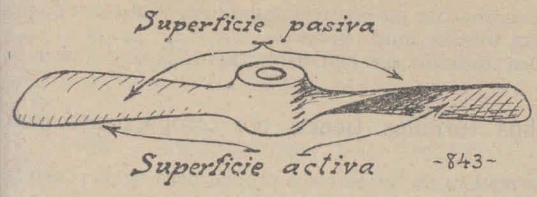
Es el caso de las HÉLICES de los buques y aeroplanos, de los HELICÓPTEROS, y de ciertos juguetes denominados por lo general "hélices".



-842-

1545. – Si la hélice está fija y suelta (sin movimiento giratorio propio), y se halla dentro de una corriente (de agua, de aire, etc.), en sentido de **1,2**; entonces la hélice girará en sentido de **3,4** (fig. 842).

Es el caso de las TURBINAS y de los MOLINOS DE VIENTO.



-843-

1546. – Como las hélices verdaderas son chapas con espesor, tendrán dos caras, una ACTIVA y otra PASIVA (fig. 843).

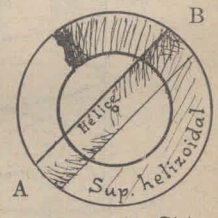
Cara **activa** es la que trabaja produciendo presión o recibiéndola; y cara **pasiva** es la que no se toma en cuenta para el cálculo fundamental de la hélice.

Aunque la práctica ha dado también algunas indicaciones para la forma de la **cara pasiva**, el principio del plano inclinado en la hélice, se aplica a la **cara activa**.

1547. - La generatriz de la cara activa NO ES UNA LÍNEA RECTA como se supuso en lo que antecede: es una curva especial, que varía según el fin a que se destine la hélice (fig. 843).

Subsiste, sin embargo, la teoría que hemos expuesto bajo la hipótesis de que la generatriz fuera recta.

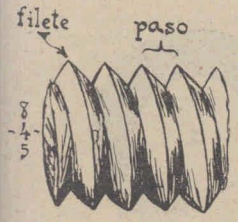
1548. – El **tornillo** es un cilindro recto, de base circular, al que se le ha aplicado normalmente a su superficie, una superficie HELIZOIDAL (fig. 844).



-844-

Si se considera sólo la porción **AB**, se verá que una superficie **helizoidal** es una sucesión continua de HÉLICES.

O mejor aún:



-845-

La **hélice** es un segmento de superficie helizoidal, que se obtiene cortando esta superficie mediante dos planos mutuamente paralelos, y paralelos al eje **XX'**

1549. – El tornillo que acabamos de describir es TEÓRICO. El **tornillo real** consta de una CRESTA espiralada (fig. 845) denominada **filete**, cuyo esqueleto es una superficie helizoidal.

El filete tiene generalmente sección triangular, trapecial o rectangular; pudiendo adquirir formas muy variadas.

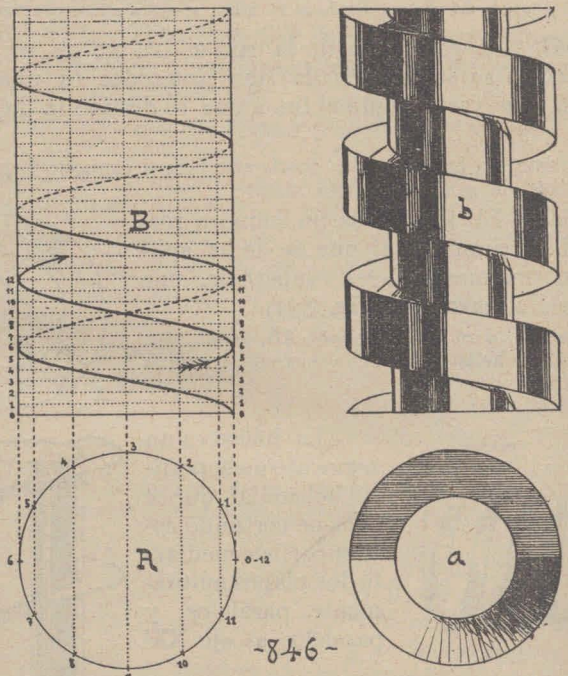
Por lo general los tornillos son cilíndricos; pero los hay cónicos y aún de otras formas.

1550. – Muchos tornillos tienen por complemento otra pieza: la **rosca.**

Los tornillos para madera no tienen rosca propia; pero se la construyen en el momento de penetrar en la madera.

El cálculo y construcción de roscas, es análogo al de los tornillos.

1551. – **Diseño de tornillos en proyección recta** (fig. 846).



La circunferencia **A** se equidivide, p. ej. en 12 partes. Y en el rectángulo **B** se trazan las horizontales **1**, **2**, **3**, ... 12.

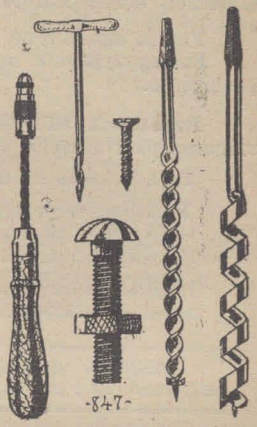
Desde las divisiones de la circunferencia se trazan paralelas a los costados del rectángulo **B**.

Los puntos de encuentro de **v0** con **h0**, **v1** con **h1**, **v2** con **h2**, etc. indican por donde debe pasar la espiral que define el filete.

v0, v1, v2... (*verticales que salen de las divisiones* **0, 1, 2...** *de la circunferencia*).
h0, h1, h2... (*horizontales que salen de las divisiones* **0, 1, 2...** *del rectángulo*).
En la figura se ha indicado con una flecha el modo de duplicar la espiral, para definir ambos bordes de un filete de sección rectangular.

1552. - APLICACIONES DEL TORNILLO:

a) En los tornillos, tirabuzones, taladros, etc. (fig. 847).
b) En las prensas (fig. 848).
c) En los tornillos sin fin (fig. 822 y 823).


-847-

1553. - **Paso** del tornillo es la distancia entre dos posiciones inmediatas del filete (fig. 845).

Esta distancia se mide paralelamente al eje del tornillo.

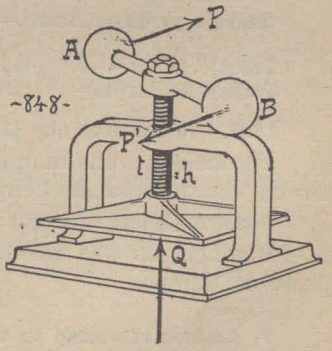
1554. - **Cálculo del tornillo, tomando por ejemplo la prensa** (fig. 848).

Aplicando la REGLA DE ORO de la mecánica:

$$Tm = Tr$$

tendremos $\mathbf{P.c = Q.h}$

P (*presión normal a un radio, ejercida en la periferia*).
c (*circunferencia recorrida por* **A**).
h (PASO DEL TORNILLO, *que es lo que avanza por cada vuelta que da*).



-848-

de donde $\mathbf{Q = P \frac{c}{h}}$

lo cual se expresa así:

En el tornillo la reacción en la punta es igual al producto de la presión radio-normal por la razón entre la circunferencia descrita por A y el paso del tornillo.

15.° — Aplicación de las máquinas simples a la vida práctica

1555. — Para aclarar más los conceptos hasta ahora enunciados con referencia al TRABAJO, es necesario que ampliemos el léxico correspondiente.

Fuerza motriz o DE POTENCIA = la que tiende a producir movimiento.
Fuerza resistente, DE RESISTENCIA, O REACCIÓN = la que se opone al movimiento.

Resistencia útil o PRIMARIA = aquella resistencia que debe vencer la máquina para cumplir con su objeto.

Ej: *la resistencia que opone la piedra al martillo que trata de romperla.*

Resistencias perjudiciales, SECUNDARIAS, NOCIVAS, PASIVAS O INÚTILES = las que producen el roce de la piezas de la máquina, el choque con el aire, el peso de las piezas.

Estas resistencias producen pérdida inútil de energía.
Deben, pues, eliminarse lo más que se pueda.

Máquina ideal SERÍA LA QUE NO TUVIESE QUE LUCHAR CON RESISTENCIAS PASIVAS.

Trabajo útil = el que se aplica a vencer resistencias útiles.
Trabajo perdido o INÚTIL = el que se aplica a vencer resistencias nocivas.
Trabajo motor = el trabajo de la fuerza motriz.
Trabajo resistente = el trabajo que oponen las resistencias.

1556. — **Ya sabemos que (1144):**

Potencia de una máquina es el trabajo que puede producir en una unidad de tiempo.

Podemos, pues, decir que:

Potencia de una máquina es su trabajo unitario con respecto al tiempo.

$$T_1 = P$$

T_1 (trabajo efectuado en una unidad de tiempo).
P (potencia de la máquina).

1557. — IMPORTANTE. — Cuide bien el alumno de no confundir «FUERZA DE POTENCIA» con «POTENCIA DE UNA MÁQUINA», que son dos cosas muy diversas.

Por eso nosotros al hablar de máquinas evitamos decir "FUERZA DE POTENCIA" y suplimos esta frase por su equivalente **"Fuerza motriz"**.

1558. – Podemos definir también la **potencia** *en función de la velocidad.*

efectivamente $P = T.t$

pero $T = f.e$

luego $P = f.e.t$ o sea $P = f.r$

1559. – **Rendimiento** de una máquina es la razón que existe entre el TRABAJO ÚTIL (*que produce*) y el TRABAJO MOTOR (*que se le aplica*).

$$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{P_s}{P_e}$$

Pe (*potencia de entrada*)

Ps (*potencia de salida*).

El rendimiento se acostumbra medir, dando a T_m el valor de 100.

Así decimos: "*Este motor tiene un rendimiento de* **75 %**".

1560. – PROBLEMA 1. – *Un motor eléctrico recibe energía correspondiente a* **1,8 Kw** *(kilovatios), y produce trabajo correspondiente a* **2C.V.** *¿Cuál es su rendimiento?.*

Términos $P_e = 1{,}8$ Kw $= 1.800\,w$

$P_s = 2 \times 736 = 1.472\,w$

Solución $$R = \frac{P_s}{P_e} = \frac{1.472}{1.800} = 0{,}82$$

RESPUESTA. – El motor rinde el **82 %**.

PROBLEMA 2.° – *En el mismo caso anterior, ¿cuál es la degradación o pérdida de energía aplicada a las resistencias nocivas?*

SOLUCIÓN.— Decir que un motor rinde el 82% es lo mismo que decir que pierde el 18 %.

1561. – Aunque estamos en MECÁNICA sin haber estudiado ELECTRICIDAD, el alumno no debe desconocer la relación que existe entre las tres unidades siguientes: AMPERIO, VOLTIO y VATIO. *Para ello, es menester dar antes el concepto de* COLOMBIO.

1562. – **Colombio** = unidad con que se mide la cantidad de electricidad.

Como podemos considerar que la electricidad es un conjunto de electrones libres, nos imaginaremos lo que es un *colombio* diciendo que

1 COLOMBIO = 1.000.000ⁿ electrones

n (*un número desconocido para nosotros*).

Es, pues, **el colombio** la unidad de MASA ELÉCTRICA.

1563. – Cuando por un conductor *«corre la electricidad»* tenemos lo que se denomina **corriente eléctrica.**

Para objetivar la CORRIENTE ELÉCTRICA, podemos compararla con la CORRIENTE DE AGUA en los caños.

Por un mismo caño, *según la presión*, puede correr más o menos agua.

La intensidad de la corriente de agua se mide en **lt/seg** (*litros por segundo*), que para ser más científicos, debemos expresarla en **Kg/seg** (kilo-masa por segundo).

1564. – La **intensidad** de corriente eléctrica se mide en **cl/seg** (*colombios por segundo*), que se denominan **amperios.**

1 amp. = 1 cl/seg.

Es, pues, el AMPERIO en todo comparable al *Kg./seg.* de la corriente de agua.

1565. – Así como la mayor o menor intensidad de la corriente de agua depende (*entre otras causas*) de la PRESIÓN o TENSIÓN, también la intensidad de la corriente eléctrica depende (*entre otras causas*) de la TENSIÓN o PRESIÓN de dicha corriente.

Esta TENSIÓN se mide por **voltios.**

SINONIMIA. — **Tensión eléctrica,** FUERZA ELECTROMOTRIZ, *diferencia de potencial.*

1566. – La **potencia** de una corriente eléctrica es igual al producto de su TENSIÓN por su INTENSIDAD.

La potencia eléctrica se mide por **vatios:**

$$1w = 1a \times 1v \qquad P = I.E$$

P (*potencia*). **I** (*intensidad de la corriente*). **E** (*fuerza electromotriz o tensión*).

1567. – PROBLEMA 3.° – *A un motor eléctrico de* **12 amperios** *y* **220 voltios** *se le aplicó el* FRENO PRONY, *y obtenida, la velocidad característica de* **850 rev/min**, *el freno quedó equilibrado con* **22 Kg**. *¿Cuál es su rendimiento, si la polea tiene* **24 cm**. *de diámetro?*

CONVERSIÓN. – $850 \text{ rev/min} = \frac{850}{60} \text{ rev/seg}$ [24 cm = 0,24 m

SOLUCIÓN. — 1.° *Velocidad de la llanta:*

Circunferencia $= 0{,}24 \times 3{,}14$ m $\qquad v = \frac{850 \times 0{,}24 \times 3{,}14}{60}$ m/seg

2.° *Potencia de salida:*

$$Ps = Q \cdot v$$

$$Ps = \frac{22 \times 850 \times 0{,}24 \times 3{,}14}{60} = 234{,}872 \text{ Kgm/s}$$

$$Ps = 234{,}872 \times 9{,}8 = \mathbf{2.301{,}75\ w}$$

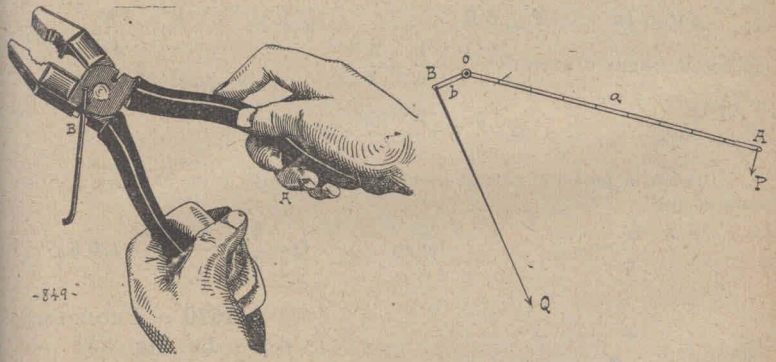
3.° *Potencia de entrada:*

$$Pe = I \cdot E \qquad Pe = 12 \times 220 = \mathbf{2.640\ w}$$

4.° *Rendimiento:*

$$R = \frac{Ps}{Pe} \qquad R = \frac{2301{,}75}{2640} = 0{,}87 = \mathbf{87\ \%}$$

1568. – PROBLEMA 4.° — *En las pinzas de la (fig. 849), ¿cuál es la reacción del alambre cuando el operador ejerce una presión de* **8 Kg.**?



SOLUCIÓN: En el croquis adjunto suponemos que el centro de presión de la mano está en **A** y que la presión es perpendicular al segmento **Ao**. Y suponemos que el alambre asienta en **B**.

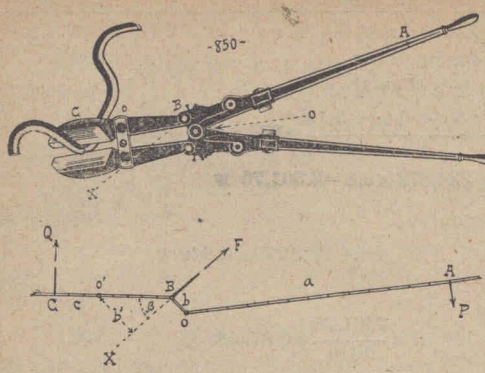
Tomando como unidad **b**, vemos que en nuestro caso

$$\frac{a}{b} = 9$$

Luego $\qquad Q = 9\,P = 9 \times 8 = \mathbf{72\ Kg}$

1569. – PROBLEMA 5.° — *En las* TIJERAS MULTIPLICADORAS *de la* (fig. 850), *cuál es el efecto en* **C**, *cuando aplicamos un esfuerzo de* **12 Kg.** *en* **A**?

SOLUCIÓN: En la palanca **AoB** el croquis nos indica que



$$\frac{a}{b} = 13$$

luego $F = 13\,P = 13 \times 12 = 156$ **Kg**

F (EQUIVALENTE de **P** aplicada normalmente en **B**) (véase **440**)

F actúa en **B** sobre la palanca **Bo'C**; pero **F** es oblicua a **o'B**, de modo que su brazo recto es **b'** = **o'B'**.

Siendo variable el ángulo β, también es variable el valor de **b'**.

Supongamos, pues, dos casos:

a) Cuando comenzó la presión el alambre pudo ser tan grueso como para que

o'Bo = *línea recta*

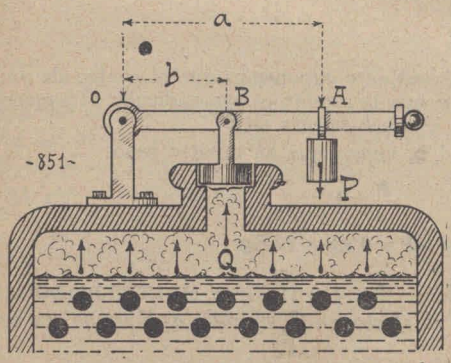
entonces $F \perp o'B$ p. l. t. $b' = o'B$

de donde (según el croquis): $\frac{b'}{c} = \frac{5}{3}$

luego $Q = \frac{5}{3}F = \frac{5 \times 156}{3} = 260$ **Kg**

b) En la posición actual (conforme al dibujo y en el croquis), tenemos que

$\frac{b'}{c} = —$ luego $Q = \frac{5}{6}F = \frac{5 \times 156}{6} = 130$ **Kg**



1570. – PROBLEMA 6.º – *La* fig. 851 *representa la* «VÁLVULA DE SEGURIDAD» *de una caldera o de un autoclave (*marmita de Papín*). Si el pilón* **P** *pesa* **5 Kg**, *¿cómo graduaremos el brazo* **oA** *para que sus divisiones indiquen* «ATMÓSFERAS TÉCNICAS» *o fracciones de dicha unidad?*

NOTA. – En Neumática explicaremos lo que se refiere a la presión de los gases sobre las paredes de sus vasijas (veáse "MANÓMETROS").

Por ahora baste saber que:

a) En los líquidos y en los gases la presión se mide por el esfuerzo que hay que oponer a **1cm²** de superficie para contrarrestar dicha presión.

b) En los gases las unidades prácticas de presión son las **atmósferas**, que pueden valuarse de dos maneras distintas, obteniendo valores algo diversos en ambos casos.

c) El problema dice *"atmósfera técnica"*; y ésta es la presión que corresponde a **1 Kg.** por **cm²** de superficie presionada.

SOLUCIÓN. – Supondremos que la válvula tiene **8 cm²** de sección.

Luego cada atmósfera técnica en la válvula produce **8 Kg** de EMPUJE.

NOTA.— *Cuando se habla de esfuerzos producidos por los líquidos o los gases, la palabra* **presión** *indica* EMPUJE APLICADO A **1 cm²** DE SECCIÓN; *de modo que hay que renunciar al uso de la palabra* PRESIÓN *en los casos en que la sección presionada no es de* 1 cm²; *y en su lugar debe usarse la palabra* **empuje** *o cualquier otro de sus sinónimos.*

Tenemos, pues, que en nuestro caso con 1 AT. TÉCNICA:

$$Q = 8 \text{ Kg.}$$

Y el problema se reduce a: AVERIGUAR CUÁNTO MIDE **a** PARA EL CASO DE EQUILIBRIO.

Igualaremos, pues, los momentos:

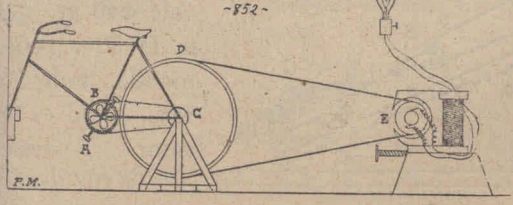
$$P \cdot a = Q \cdot b$$

$$5\,a = 8\,b$$

$$a = \frac{8}{5}\,b$$

RESPUESTA. – Equidividimos **b** en 5 partes y desde **B** hacia **A** tomamos tres de estas divisiones, señalando con **1** la tercera. Subdividiendo la porción **0-1** en 10 partes iguales obtenemos las divisiones correspondientes a DECI-ATMÓSFERAS TÉCNICAS.

1571. – PROBLEMA 7.° — *Alguien se valió de la bicicleta para hacer funcionar un dínamo (fig. 852). Queremos saber con un empuje medio de* **8 Kg.** *¿cuál fué la potencia de la corriente eléctrica obtenida?*



SOLUCIÓN. – El sistema de *pedal* y *plato* es un torno.

Llamando **a** el brazo del pedal, y **b** el radio del plato tenemos (1514 - 2.°).

$$F = \frac{a}{b} P$$

F (equivalente de **P**, aplicada tangencialmente a la llanta).

Examinando la fig., parece que $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ luego

$$F = \frac{3}{2} P = \frac{3 \times 8}{2} = 12 \text{ Kg.}$$

La trasmisión del plato **B** al piñón **C** no produce modificación de la fuerza **F** (1514 - 1.°).

Siendo **Q** la reacción tangencial en la llanta de **E**, será también **Q** la fuerza que se opone a **F** en la llanta de **D** (1506).

Luego en el torno **C,D** tendremos

$$Q = \frac{c}{d} F$$

c (*diámetro de* **C**) **d** (*diámetro de* **D**)

Examinando la fig., parece que $\frac{c}{d} = \frac{2}{13}$

luego $Q = \frac{2}{13} \quad F = \frac{2 \times 12}{13} = 1{,}85 \text{ Kg}$

Para calcular la potencia necesitamos conocer la velocidad angular de la polea **E**.

Supongamos que el tacómetro (1280) nos dé

$$\omega = 2.100 \text{ rev/min} = 75 \text{ rev/seg}$$

Supongamos también que el diámetro de **E** sea

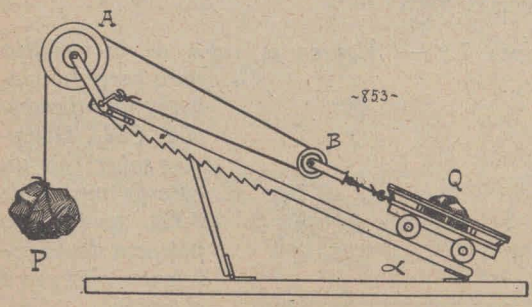
$$e = 3\tfrac{1}{2} \text{ cm} = \text{m } 0{,}035$$

Entonces $v = 75 \times 0{,}035 \times 3{,}14 = 8{,}24$ **m/seg**

Y como (1558) *Potencia* $= f \,.\, v$

luego $P = 1{,}85 \times 8{,}24 = 15{,}24$ **Kgm/seg**

CONVERSIÓN $P = 15{,}24 \times 0{,}0133 = 0{,}203$ **C.V.**



853

1572. – PROBLEMA 8.° — En la (fig. 853), si **Q** vale **940 gr.** y α mide **30°**; suponiendo nulo el roce, ¿cuál es el valor de **P** para el caso de equilibrio?

SOLUCIÓN. – Llamemos **F** la componente dinámica de **Q**
Tendremos (**1021**)

$$F = Q.\ sen\ \alpha = Q sen\ 30°$$

Buscando en la TABLA N. 1 (pág. 285) obtenemos

$$sen\ \alpha = 0{,}50$$

de donde $F = 940 \times 0{,}50 = 470$ gr.

Pero la reacción de **F** se transmite a **P** mediante un polipasto directo

luego (**1486**) $F = 2\ P$

o sea $P = \frac{1}{2} F = 235$ gr.

16.° – Máquinas complejas

1573. – Entre las máquinas complejas que son aplicaciones directas del TORNO, ENGRANAJES y TROCLAS, conviene citar: el TORNO COMPUESTO, la CABRIA, y los distintos tipos de PESCANTES y de GRÚAS.

El **torno compuesto** (fig. 854) consta de un juego de engranajes, accionado por un manubrio o por un motor, y terminado en un tambor donde se arrolla la transmisión (cable o cadena).

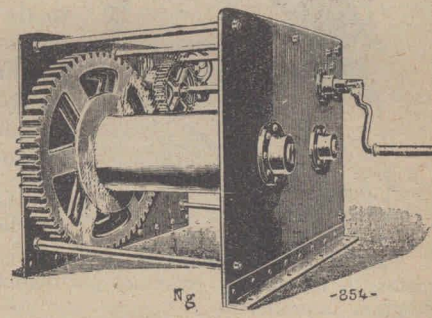


Fig. -854-

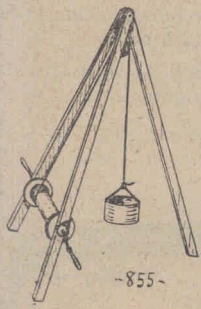


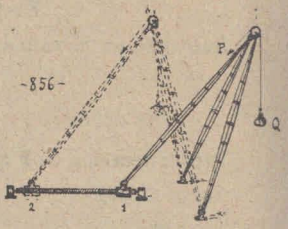
Fig. -855-

La **cabria** (fig. 855), en su forma más simple, consta de un *caballete-trípode*, a cuyo pie se halla un torno, y de cuya cima cuelga una trocla o un aparejo.

Las cabrias gigantescas usadas en algunos puertos, se denominan **machinas**.

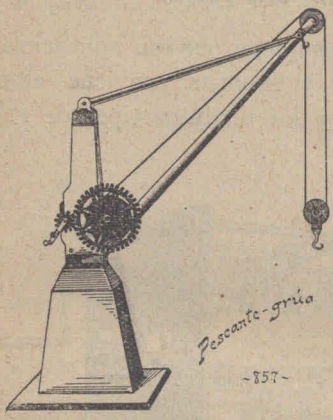
1574. – **Cabria de tijera** o MACHINA BASCULANTE (fig. 856), es aquella cuyo pie posterior puede correrse (accionado por

un tornillo *sinfín)*, con el objeto de hacer correr horizontalmente la carga.



1575. – Los **pescantes** son aparatos que difieren esencialmente de la cabria, por cuanto el caballete queda sustituído por un brazo (fijo o móvil) extendido perpendicular u oblicuamente a una pared o columna que le sirve de soporte.

Los pescantes se usan mucho en las embarcaciones.

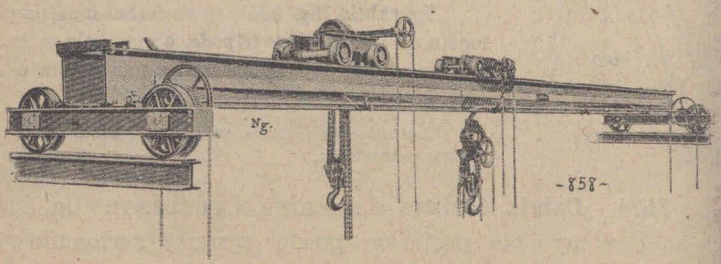


Los pescantes del brazo móvil, y asociados a un torno (fig. 857) entrán en la categoría de las *grúas*, y se denominan PESCANTES-GRÚAS o GRÚAS-PESCANTES.

1576. – Las **Grúas** son máquinas que constan esencialmente de un soporte vertical del que se desprende (oblicua o perpendicularmente) un brazo rígido (denominado AGUILÓN), en el que se emplaza la polea o máquina elevadora.

La fig. 857 representa una grúa sencilla, accionada a mano.

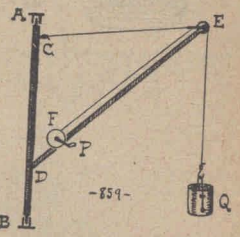
La fig. 858 representa un PUENTE-GRÚA, cuyo *aguilón* es un *puente* sostenido en sus dos extremos por sendas vías, mediante las cuales se desplaza lateralmente.



La máquina elevadora del PUENTE - GRÚA, es un *"charriote"* o carro.

1577. – ELEMENTOS DE UNA GRÚA SENCILLA (fig. 859).

A (QUICIONERA SUPERIOR) } En ellas encajan los GORRONES o extremidades de la COLUMNA o FUSTE **CD**.
B (QUICIONERA INFERIOR) }
DE (AGUILÓN, TORNAPUNTAS o *pescante*)
CE (TENSOR o TIRANTE)
F (TORNO DE MANDO).
E (TROCLA)
P (POTENCIA o *fuerza motriz*)
Q RESISTENCIA o *reacción*)



-859-

LÉXICO. – El término **guinche** aplicado en Buenos Aires a las grúas, es un anglicismo derivado de "WINCH" = *torno*.

1578. – Dejando a parte razones de finalidad, podemos clasificar las grúas como sigue:

Grúas

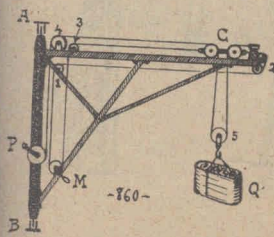
1.º GIRATORIAS
- *Transportables*
- *Fijas*
  - De doble quicionera
    - con polea terminal (fig. 859).
    - con carro (fig. 860).
  - De quicionera inferior
    - de columna fija (fig. 861).
    - de columna giratoria (fig. 862).
    - de plataforma giratoria (fig. 863).
- *Transportables*
  - Rodantes
    - para carretera o binario (fig. 864).
    - *grúas-velocípedos* (fig. 865).
  - Flotantes o *buques-grúas* (fig. 874 b).

2.º BASCULANTES
- Con tirante extensible (fig. 866).
- Con tirante rígido y articulado (fig. 867).
- De aguilón rígido, inclinable (fig. 868).

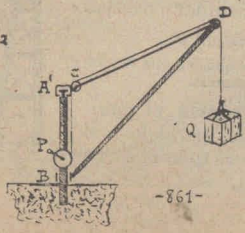
3.º GIROBASCULANTES (combinaciones de los tipos 1º y 2º).

4.º CORREDERAS
- *Puentes-grúas* (fig. 858).
- *Grúas de consola* (fig. 869).

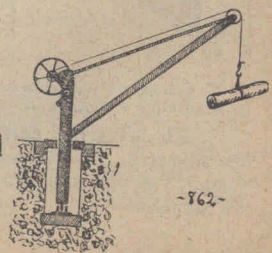
5.º COMBINADAS o ESPECIALES
- *De caballete* (fig. 870).
- *De pórtico* (fig. 871).
- *Titanes* (fig. 872).

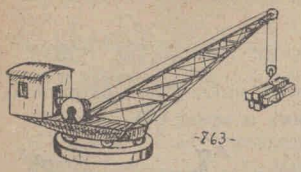


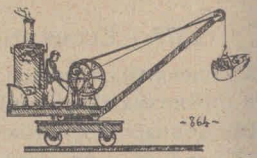
-860-

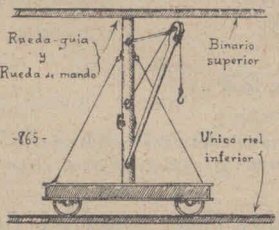


-861-

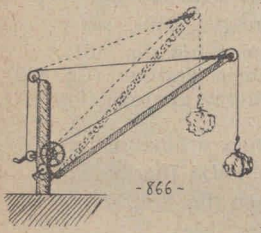

-862-

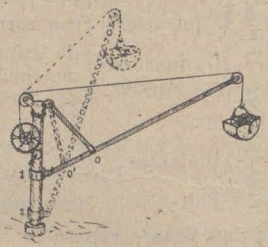


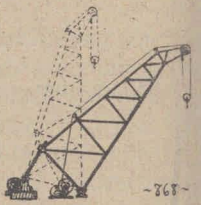




1579. – EXPLICACIÓN DEL CUADRO ANTERIOR.

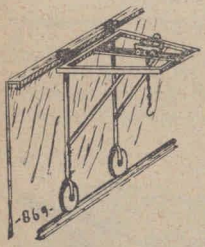




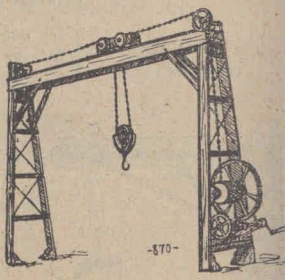


En las grúas **giratorias**, el aguilón se desplaza lateralmente como una puerta sobre sus goznes.

Las FIJAS están emplazadas en el suelo; y las transportables están emplazadas en un vehículo.

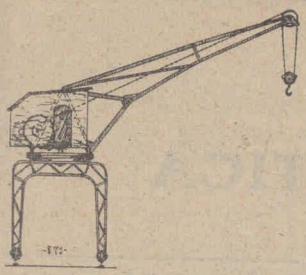


En las grúas **basculantes**, el aguilón sube o baja como el brazo medidor de las básculas.



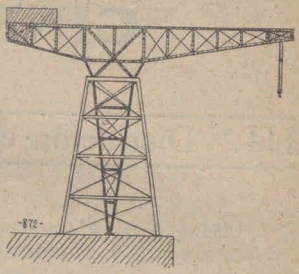
Con este movimiento se obtiene que la carga se acerque o aleje de la columna.

En las grúas **correderas**, el *aguilón* se corre lateralmente, paralelo a sí mismo; y el charlote recorre todo el largo del aguilón.



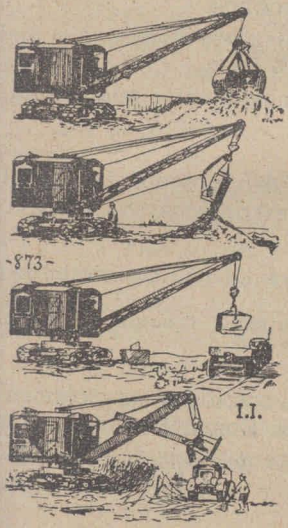
Estas grúas son rígidas (ni giratorias ni basculantes); pero son de movimiento más amplio que las anteriores.

Las GRÚAS DE CABALLETE difieren de los **puentes grúas**, por cuanto el aguilón no se desplaza lateralmente.



En ambos tipos, a veces se sustituye el charriote por una grúa del tipo 1º, 2º ó 3º.

Las GRÚAS DE PÓRTICO son muy usadas en los puertos.



Los TITANES son grúas gigantescas emplazadas sobre una torre.

Son generalmente giratorias; pero las hay también giro-basculantes.

Hay titanes con aparejo terminal, las hay con charriotes, y las hay también con GRÚAS-CHARRIOTES.

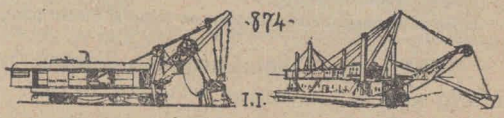
Grúa-charriote, es la grúa que se corre a lo largo de un aguilón, como si fuera un charriote.

1580. – Son adaptaciones de las grúas, las CARGADORAS, las EXCAVADORAS o «PALAS» y ciertas DRAGAS (figs. 873 y 874).

En la fig. 874 (a la derecha) se indica una DRAGA EXCAVADORA.

Las DRAGAS ASPIRADORAS no tienen forma de grúas.

Los CAMIONES VOLCADORES son también adaptaciones de la teoría de las grúas.



CINEMATICA

III.° - Distinción entre Cinemática y Dinámica

1581. – *A esta altura de nuestro estudio, conviene volver a distinguir entre* CINEMÁTICA y DINÁMICA **(146)**.

La **Cinemática** es el estudio del movimiento en sí: sin tener en cuenta SUS CAUSAS y SUS ESTORBOS.

Las causas del movimiento son las fuerzas, y sus estorbos son la MASA y también las FUERZAS EXTRAÑAS (de roce, etc.).

La **Dinámica** es el estudio del movimiento relacionado con sus causas y estorbos.

1582. – Los elementos intrínsecos del movimiento son el ESPACIO y el TIEMPO; y los elementos extrínsecos son la MASA y la ENERGÍA (fuerzas).

La masa debe considerarse no sólo como estorbo del movimiento, sino también como sujeto del movimiento:

SIEMPRE QUE EN MECÁNICA HAY MOVIMIENTO, TENEMOS UNA MASA QUE SE TRASLADA.

1583. – Cuando en el movimiento consideramos solamente el ESPACIO y el TIEMPO, estudiamos **Cinemática.**

Cuando en el movimiento, además del *espacio* y el *tiempo* tomamos en cuenta las FUERZAS y la MASA, estudiamos **Dinámica.**

La Cinemática es pues un estudio abstracto del movimiento.

En ella consideramos los cuerpos como si fueran puntos.

1584. – En Cinemática estudiamos, pues, todo lo que se refiere a: TRAYECTORIAS y VELOCIDADES.

La Cinemática es el estudio de la forma del movimiento.

Por eso algunos físicos dijeron que la Cinemática es la Geometría del movimiento.

1585. – En la trayectoria podemos considerar:

Su FORMA, la DISTANCIA entre dos puntos, el CAMINO (distancia entre el origen del movimiento y la posición actual del móvil), el RECORRIDO (incremento del camino).

Véase **891** h. **901**.

En la velocidad podemos considerar:

El ESPACIO GLOBAL, el ESPACIO UNITARIO (medida de la velocidad) la ACELERACIÓN (incremento de la velocidad) y el TIEMPO.

IV.° - Consecuencias del principio de independencia de los movimientos

1.° – Principio de independencia de los movimientos.

1586. - Ya vimos que (**1014**):

EL EFECTO DE UNA FUERZA SOBRE UN CUERPO NO DEPENDE DE SU ESTADO DE REPOSO O DE MOVIMIENTO, NI DE LA EXISTENCIA DE OTRAS FUERZAS QUE ESTÉN APLICADAS AL MISMO CUERPO.

Este principio fundamental de la Dinámica es el que nos da derecho para considerar que:

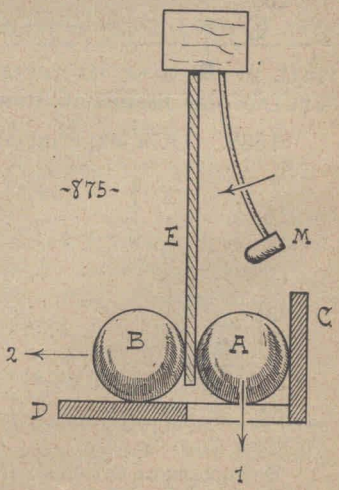
Los movimientos complicados, son resultantes de otros movimientos más simples; y que todo movimiento curvilíneo plano es resultante de dos movimientos rectilíneos (**979** h. **983**).

En otras palabras:

Este principio nos enseña a DESCOMPONER LOS MOVIMIENTOS COMPLEJOS, considerándolos como sumas geométricas (**318**) de otros movimientos más simples.

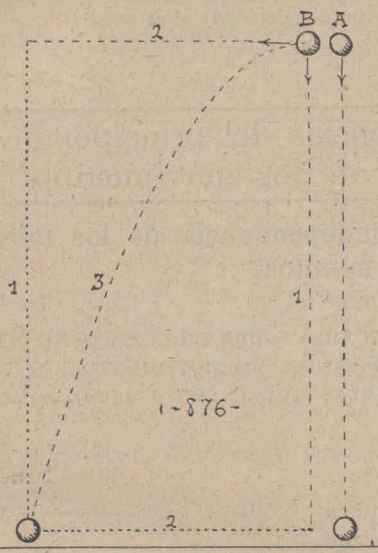
Y como consecuencia de lo anterior:

Nos enseña a descomponer las velocidades complejas, y sus incrementos: las aceleraciones.



1587. – Conviene dejarlo asentado con una demostración experimental (fig. 875):

Las dos esferitas **A** y **B** equidistan del suelo.
A se halla aprisionada entre la tabla vertical **C** y la lámina elástica **E**.
B se halla sobre la tabla horizontal **D** y apoyada al elástico **E**.



-876-

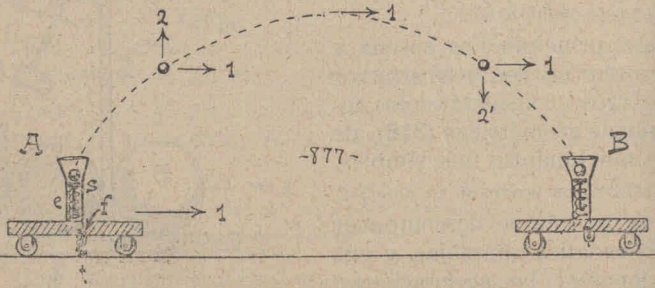
Separando el martillo **M** y soltándolo, da contra el elástico **E**, dejando libre a **A** e imprimiendo en **B** un movimiento según la trayectoria rectilínea indicada con la flecha **2**.

A cae verticalmente, siguiendo al trayectoria **1**. Pues bien, ambas esferitas, **A** y **B**, llegan al suelo al mismo tiempo (fig. 876).

Cualquiera ve que la trayectoria real de **B**, que es **3**, está compuesta de la trayectoria vertical **1**, producida por la gravedad, y de la trayectoria horizontal **2**, producida por el impulso que recibió **B** de **M**.

LO IMPORTANTE PARA NUESTRO CASO ES QUE EL RECORRIDO VERTICAL DE **B** NO SE HA ACELERADO NI RETARDADO A PESAR DEL IMPULSO QUE LE DESVIÓ HORIZONTALMENTE.

1588. – Otra experiencia (877).



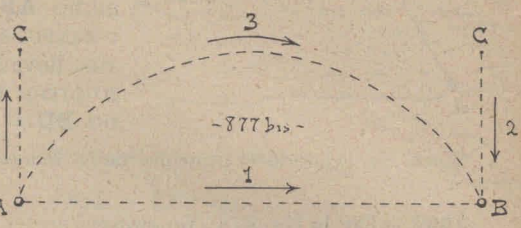
-877-

Se imprime un envión al carrito. Éste en su camino encuentra el tope que mueve el freno **f**.

El elástico **e** hace entonces saltar el soporte **s** que lanza la esferita al aire.

El carro sigue su trayectoria **1**, y la esferita, al volver hacia el suelo emboca nuevamente en su cilindro.

El recorrido **3** de la esferita está, pues, compuesto por el recorrido **1** y el recorrido **2.2'** (fig. 877 bis).



Y lo interesante es que permaneció intacta la velocidad de la esferita en sentido de **1** a pesar del vaivén vertical **2,2'**.

En la fig. 709 tenemos un caso idéntico a éste.

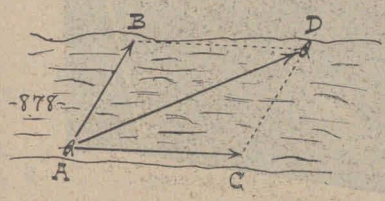
1589. – Ya hemos tenido en cuenta este principio al estudiar las leyes del movimiento uniformemente variado mediante las gráficas obtenidas en la *máquina de Morin*, en el *plano de Packard* y en otros aparatos por el estilo.

2.° – Composición de movimientos rectilíneos.

1590. – Las experiencias anteriores (**1585-1586**) y otras muy variadas nos enseñan que:

Dos movimientos simultáneos efectuados por un mismo cuerpo se combinan lo mismo que las fuerzas.

Si no hubiera corriente en el río (fig. 878), el remo del botero, le dejaría en **B** al fin 5 minutos.



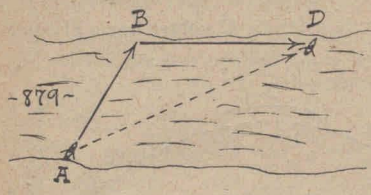
Por otra parte si el botero no rema, la corriente lo deja en **C** al fin de dichos 5 minutos.

¡Hay corriente y el botero rema:

AL FIN DE LOS CINCO MINUTOS EL BOTE ESTÁ EN **D**.

Los dos movimientos **B** y **C** «*han compuesto*» el movimiento **D** conforme al paralelogramo de los vectores (principio de Stevino - **317**).

1591. - Si transportamos el vector **AC**, aplicándolo al extremo de **B** (fig. 879), vemos que:



-879-

EL BOTE SE TRASLADÓ AL PUNTO **D**, COMO SI ANTES HUBIERA HECHO EL RECORRIDO **AB** (en 5 minutos), Y DESPUÉS (en otros 5 MINUTOS, llevado por la corriente) HUBIESE HECHO EL RECORRIDO **BD = AC**.

Queda así aclarado el principio de la independencia de los movimientos.

1592. - En la fig 878. tenemos:

AB y **AC** (*movimientos componentes*) **AD** (*movimiento resultante*)

1593. - Cinégrafos son los aparatos que sirven para estudiar gráficamente la forma y dimensión de los movimientos.

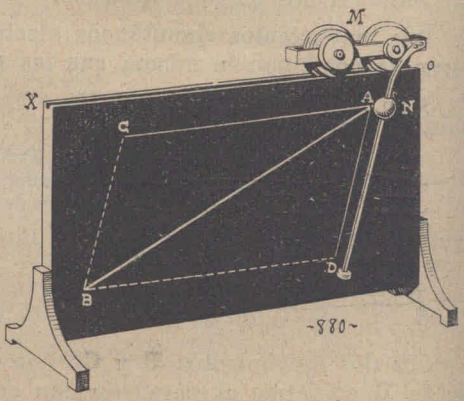
El cinégrafo de ENGELMEYER (fig. 880), sirve para comprobar el paralelogramo de los movimientos.

Dejando enganchada la bollilla **N**, si se suelta el carro, éste baja la pendiente **cX**, y la tiza de la bolilla marca su recorrido **AC**.

En cambio si dejamos quieto el carro, y soltamos la bollila, queda en el pizarrón marcado el recorrido **AD**.

Si soltamos carro y bolilla al mismo tiempo, queda marcado el recorrido **AB**.

Se sobreentiende que **AC** es la porción de trayectoria correspondiente al mismo tiempo del recorrido **AD**.



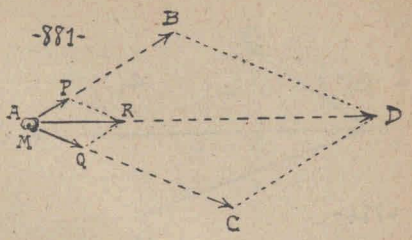
-880-

1594. - TODO PARALELOGRAMO DE MOVIMIENTO ES SEMEJANTE AL PARALELOGRAMO DE LAS FUERZAS QUE LO PRODUCEN (fig. 881).

Si tenemos el sistema **P, Q** [(resultante **R**) aplicado al cuerpo **M**, en el cual produce el recorrido **AD**, compuesto por los recorridos **AB** y **AC**, tendremos que

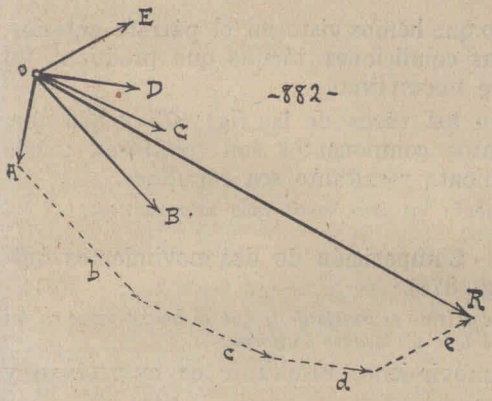
$$\frac{P}{Q} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{P}{R} = \frac{AB}{AD}$$



Y además tenemos sobrepuestos los ángulos

PAR y **BAD** etc.



1595. – Cuando a un mismo punto se aplican más de dos fuerzas, se produce un movimiento compuesto de tantos movimentos simples cuantas son las fuerzas.

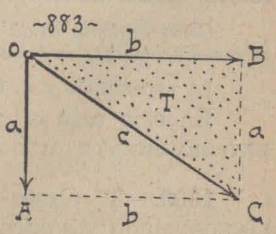
Esto es evidente.

Para buscar el movimiento resultante, en este caso se recurre al polígono de vectores. (fig. 882).

1596. – Cálculo matemático del recorrido resultante.

Dos casos distintos:

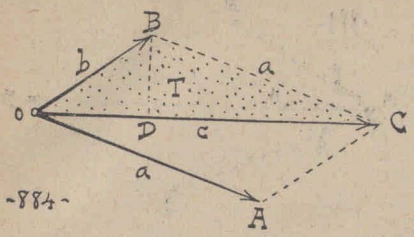
1.er Caso. – **Los dos recorridos componentes son mutuamente perpendiculares** (fig. 883)



En el triángulo rectángulo **T** tenemos **a** y **b** (*catetos*) **c** (*hipotenusa*)
luego (*teorema de Pitágoras*)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.° Caso. – Los dos recorridos componentes son mutuamente oblicuos (fig 884).



-884-

En el triángulo **T** tenemos: **c** (opuesto a ángulo obtuso) luego (teorema de Pitágoras):

$$c = \sqrt{a^2 - b^2 + 2\,c.d}$$

d (*medida del segmento* **oD**)

ESTE CÁLCULO SE APLICA A CUALQUIER CASO DE PARALELOGRAMO DE VECTORES.

3.° – Forma del movimiento resultante

1597. – En todo lo que hemos visto en el párrafo anterior, hemos supuesto ciertas condiciones tácitas que producen un movimiento resultante RECTILÍNEO.

Pero ya vimos en los casos de las figs. 875 y 876 que, cuando los movimientos componentes son *rectilíneos*, puede suceder que el movimiento resultante sea *curvilíneo*.

Estudiaremos solamente los tres casos más interesantes:

1598. – 1er CASO. – **Composición de dos movimientos uniformes rectilíneos** (fig. 878).

Suponiendo que la corriente es constante y que el botero reme en tal forma, que produzca en el bote un avance uniforme:

En ese caso el movimiento resultante es RECTILÍNEO y UNIFORME.

Queda, pues, señalado por la diagonal del paralelogramo.

1599. – 2° CASO. – **Composición de dos movimientos rectilíneos, uniformemente acelerados** (fig. 880).

Como tanto la caída de la bolilla, cuanto el movimiento del charriote son producidos por la gravedad, serán ambos UNIFORMEMENTE ACELERADOS

La experiencia y el cálculo matemático han enseñado que:

En este caso el movimiento resultante es RECTILÍNEO y UNIFORMEMENTE ACELERADO.

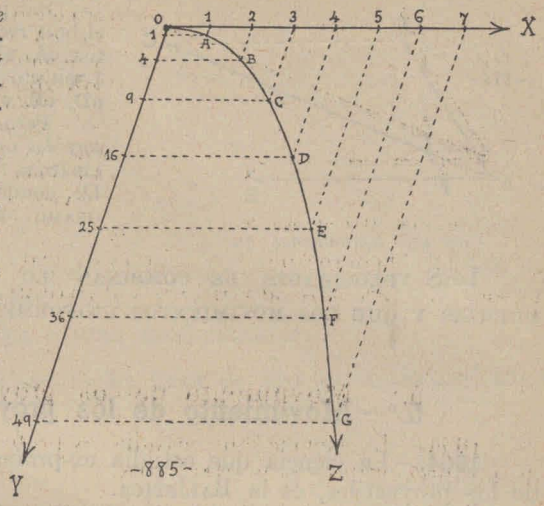
1600. – 3er CASO. – Composición de dos movimientos RECTILÍNEOS: uno UNIFORME y otro UNIFORMEMENTE ACELERADO (fig. 885).

El móvil recorre el eje **oX** *con* MOVIMIENTO UNIFORME, y el eje **oY** CON MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO.

Combinándose ambos movimientos, recorrerá la trayectoria curvilínea **oZ.**

En este caso el movimiento resultante **oD** es CURVILÍNEO y REGULARMENTE ACELERADO.

No confundir REGULARMENTE con UNIFORMEMENTE (837).



1601. – La trayectoria **oZ** es una PARÁBOLA.

Ya habíamos considerado este caso con componentes mutuamente perpendiculares (fig. 876).

1602. – Como regla general, la siguiente:

a) LA TRAYECTORIA RESULTANTE DE DOS MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS DE LA MISMA ESPECIE, ES UNA LÍNEA RECTA.

b) LA TRAYECTORIA RESULTANTE DE DOS MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS DE DISTINTA ESPECIE, ES UNA LÍNEA CURVA.

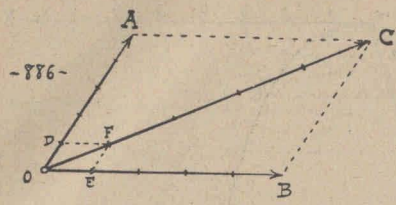
c) CUANDO DE LOS MOVIMIENTOS COMPONENTES, UNO ES UNIFORME, Y EL OTRO UNIFORMEMENTE ACELERADO, LA TRAYECTORIA ES UNA PARÁBOLA.

La 2ª parte de esta ley nos da derecho para considerar toda trayectoria curvilínea como resultante de dos movimientos rectilíneos simultáneos.

Ya habíamos tenido esto en cuenta en **833** h. **835.**

4.° – Composición de las velocidades

1603. - En el caso del bote (**1588**) supusimos que teníamos dos movimientos uniformes, que componían un tercer movimiento uniforme.



Si, pues, en 5 minutos el bote recorrería los segmentos, **oA**, **oB**, **oC**, (fig. 886); en 1 minuto recorrerá 1|5 o sea, **oD**, **oE**, **oF**.

Pero **oD**, **oE**, **oF**, son *recorridos unitarios* o sea VELOCIDADES.

De donde **oDEF** = PARALELOGRAMO DE LAS VELOCIDADES.

Con esto aprendemos que:

LAS VELOCIDADES SE COMBINAN LO MISMO QUE LAS FUERZAS Y QUE LOS MOVIMIENTOS UNIFORMES.

5.° – Movimiento de los proyectiles

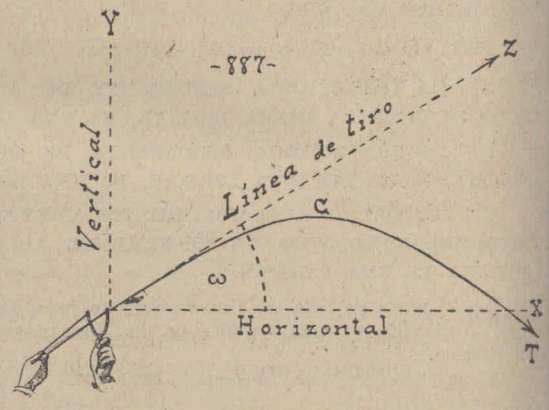
1604. – La ciencia que estudia ex-profeso el movimiento de los proyectiles, es la BALÍSTICA.

Para dar a este cálculo el rigor matemático se parte de la suposición de proyectiles *lanzados al vacío*.

1605. – ELEMENTOS DE LA TRAYECTORIA DE UN PROYECTIL (fig. 887).

Debemos tener en cuenta cuatro líneas: la HORIZONTAL **oX**, la VERTICAL **oY**, la LÍNEA DE TIRO **oZ** y la trayectoria **oC**.

Línea de tiro es a dirección que tiene el proyectil al desprenderse de su propulsor.

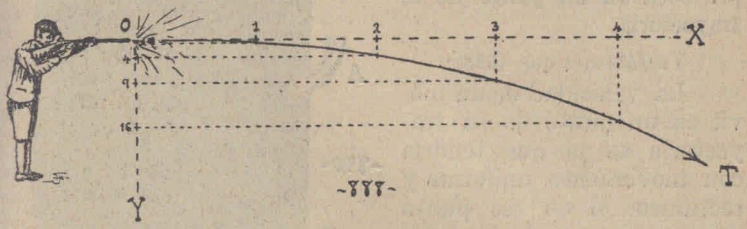


Angulo de tiro = ω = ZoX.

1606. – **La trayectoria de los proyectiles es siempre una porción de parábola.**

Consideramos sólo dos casos.

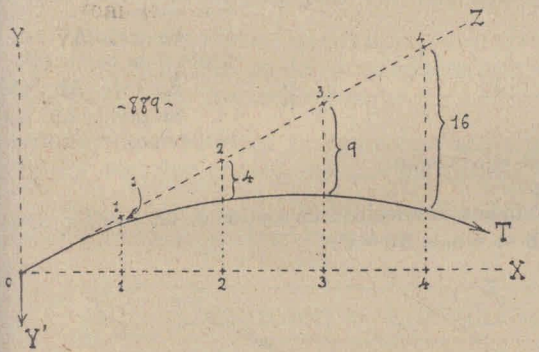
1607. -1.er Caso. — **La línea de tiro es horizontal** (fig.888).



El movimiento sobre **oX**, *es uniforme; y el movimiento sobre* **oY**, *es uniformemente acelerado.*

La trayectoria es una semi-parábola.

1608. - 2.° Caso. — **La línea de tiro es inclinada hacia arriba** (fig. 889).



A partir de **o** el proyectil recorrería sobre **oZ**, en tiempos iguales, los segmentos iguales *o.1*, *1.2*, *2.3*, etc.

Pero la gravedad le hace caer en sentido de **oY'**, alejándose verticalmente de **oZ** conforme al movimiento uniformemente acelerado, a saber:

Al fin de la 1ª unidad de tiempo: 1 módulo
« « « « 2ª « « « 4 «
« « « « 3ª « « « 9 «
« « « « 4ª « « « 16 « etc.

Se demuestra matemáticamente que también aquí la trayectoria es una porción de parábola.

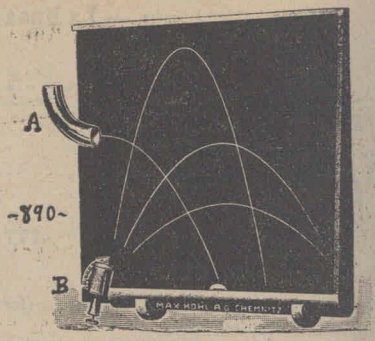
1609. - Para estudiar el tiro horizontal u oblicuo existen CINÉGRAFOS diversos; entre otros, el de Ducrue (fig. 890).

La pizarra está algo inclinada hacia atrás. El proyectil es una bolita de tiza, que se puede dejar caer por el tubo encorvado **A**, o se puede arrojar mediante el pistolete de muelle **B**.

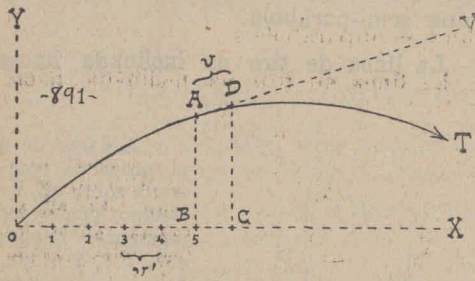
1610. – Velocidad del proyectil en un punto de la trayectoria.

Ya sabemos que (933):

La velocidad de un móvil en un punto de su trayectoria es la que tendría con movimiento uniforme y rectilíneo, si en ese punto desaparecieran todas las fuerzas que actúan sobre él.



-890-



-891-

Para determinar, pues, dicha velocidad se procede como sigue: (fig. 891).

Supongamos que tenemos que calcularla cuando el móvil está en **A**.

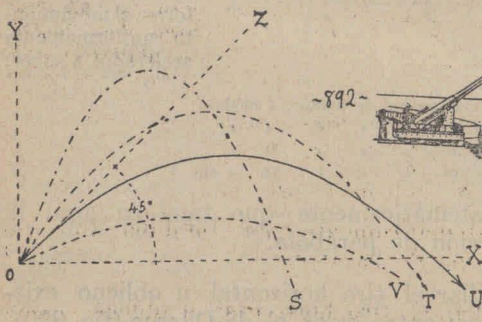
Se traza **AV** tangente a la curva **oT**.

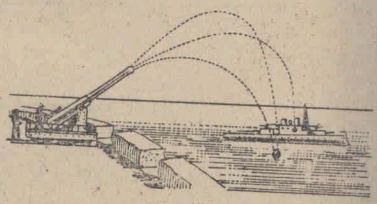
Se baja **AB** ⊥ **oX**.

Se divide **oB** por el tiempo transcurrido desde que se inició el movimiento.

Supongamos 5 seg.

El segmento **v'** indica la velocidad en sentido de **oX** (ver fig. 886). A derecha de **B** se señala **BC** = **v'**.




-892-

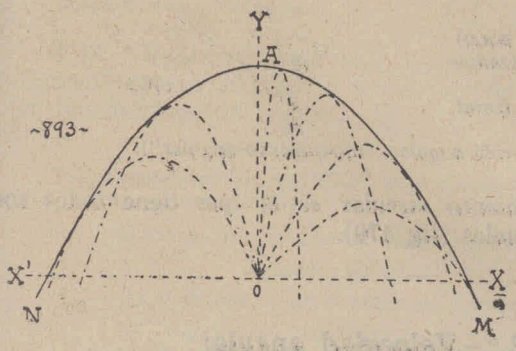
Se levanta la perpendicular **CD**, y se obtiene el vector **AD** = **v** (velocidad buscada).

1611. – Máximo alcance del proyectil. 1° *Sobre la horizontal* **oX** (fig. 892).

Se obtiene cuando se da a ω el valor de 45° (½ ángulo recto).

2.° – *En alto* (fig. 534).

Se obtiene dando a ω el valor de 90°



1612. – LÍMITE DE LA ZONA QUE PUEDE ABARCAR UN TIROTEO DESDE UN PUNTO DADO, CON LANZAMIENTO CONSTANTE (fig. 893).

Es una parábola **MAN**, denominada *parábola de tiro*. La descubrió Torricelli.

6.° – Composición de las aceleraciones

1613. – Siendo las aceleraciones, incrementos de velocidades, participarán de las propiedades fundamentales de éstas; podemos, pues, presumir que:

Las aceleraciones se componen conforme al paralelogramo de vectores *(Lo mismo que las fuerzas y los movimientos.)*

Este principo se demuestra matemáticamente; pero juzgamos innecesario dar aquí su demostración.

V.° – Movimiento circular uniforme

1.° – Movimiento giratorio

1614. – Reléase 829 h. 832.

1615. – Movimiento **giratorio** o POLAR es el que se considera con respecto a un punto fijo cualquiera (figs. 479 y 480).

El móvil va de **B** a **B'**, y elegimos como punto de referencia el punto fijo **A**.

Conforme a esta definición también puede ser movimiento giratorio el rectilíneo (fig. 894).

El móvil va de **B** a **B'** y a **B''**; y nosotros estudiamos su movimiento refiriéndolo al punto fijo **A**.

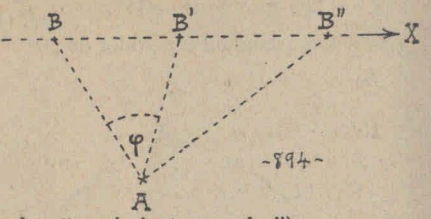
1616. – ELEMENTOS DEL MOVIMIENTO GIRATORIO:

X (*trayectoria*).

A (*centro de giro o* POLO)

AB, AB', etc. (*radios vectores*).

BB' (*recorrido lineal*, "movimiento lineal")



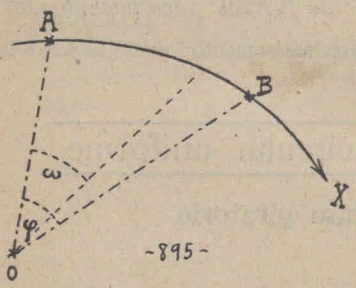
-894-

φ (*recorrido angular*, "movimiento angular").

1617. – Movimiento circular es el que tiene todos sus radios vectores iguales (fig 479).

2.° – Velocidad angular

1618. – En el movimiento giratorio podemos considerar dos tipos distintos de velocidad: la ANGULAR y la LINEAL, según que se tenga en cuenta su *recorrido angular* o su *recorrido lineal*.



-895-

1619. – **Velocidad angular** (fig. 895).

El móvil pasa de **A** a **B** en t segundos.

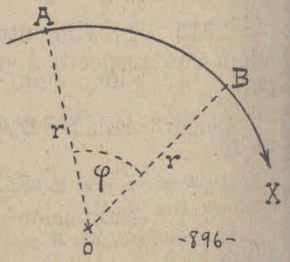
Su recorrido angular es φ.

Su velocidad angular es:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

1620. – **Velocidad angular, media e instantánea.** — Cuando se calcula la velodidad angular como se acaba de indicar, se obtiene la VELOCIDAD MEDIA que tuvo el radio vector al recorrer el ángulo φ **(189 y 190).**

Esto es evidente, porque no sabemos si el movimiento del radio vector es *uniforme* o *variado*.



-896-

Si calculamos ω recurriendo al cálculo infinitesimal (**767**, h. **769**), podremos calcular la VELOCIDAD ANGULAR INSTANTÁNEA como calculamos la ACELERACIÓN LINEAL INSTANTÁNEA en (**941** h. **952**)

Daremos una somera idea:

1621. – VELOCIDAD ANGULAR INSTANTÁNEA (fig. 895) – Supongamos que calculamos el ángulo φ reccorrido en una porción indefinidamente pequeña de tiempo: dt.

dt se lee: « *diferencial de tiempo* ».

Ya sabemos que la magnitud dependiente de una diferencial, se llama también *diferencial* (**945**).

P. l. t. el ángulo descripto por el radio vector en el tiempo dt será $d\varphi$

$d\varphi$ se lee: « diferencial de fi ».

Siendo dt el tiempo, y $d\varphi$ el recorrido angular, tendremos que:

$$\omega \text{ (velocidad angular instantánea)} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Si, pues, por algún medio llegamos a conocer los valores $d\varphi$ y dt, en un instante dado, podremos calcular mediante una simple división, la VELOCIDAD ANGULAR DEL MÓVIL *en dicho instante.*

Añadimos aquí (como en **769**) que: *lo único que nos interesa, es llamar la atención del alumno sobre la* EXISTENCIA *del medio para calcular matemáticamente la velocidad instantánea.*

1622. – EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR, LA VELOCIDAD ANGULAR SE PUEDE MEDIR DE TRES MODOS DISTINTOS SEGÚN EL SISTEMA QUE SE ADOPTE PARA MEDIR EL ÁNGULO φ.

El ángulo φ se puede medir por tres sistemas distintos: *a*) por RADIANES, *b*) por GRADUACIÓN SEXAGESIMAL, *c*) por REVOLUCIONES.

1623. – **Radián** es el arco que tiene longitud igual a la de su radio (fig. 896).

Si arco **AB** = radio r
luego **AB** = 1 RADIÁN

Y como los ángulos se miden mediante su arco:

Tenemos (en nuestro caso):

$$\varphi = 1 \text{ RADIÁN}$$

1624. – **Graduación sexagesimal**, es la que da a la *circunferencia*: 360°; al *grado*: 60', y al *minuto*: 60".

Llamando c *a la circunferencia, tendremos:*

$$c = 2\pi . r = 2\pi \text{ radianes}$$

y como $c = 360^\circ$

luego $2\pi \text{ radianes} = 360^\circ$

$$1 \text{ radián} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180}{\pi} = 57^\circ\ 17'\ 44'',75$$

1625. Cada recorrido completo de la circunferencia, es una **revolución.**

Cada REVOLUCIÓN corresponde pues, a un movimiento angular de 360°

$$1 \text{ rev.} = 360^\circ$$
$$n \text{ rev.} = n\,360^\circ$$
$$1 \text{ rev.} = 2\pi \text{ radianes}$$
$$n \text{ rev.} = 2\pi . n \text{ radianes}$$

1626. Se ha dado en llamar ω la velocidad angular. Nosotros denominaremos:

ω	la velocidad angular medida en	RADIANES
ω'	» » » »	GRADOS
ω''	» » » »	REVOLUCIONES

P. l. t. φ	es el recorrido angular, medido en	*radianes*
φ'	» » » »	*grados*
φ''	» » » »	*revoluciones*

La fórmula $\omega = \frac{\varphi}{t}$ (1619)

nos enseña que $\omega' = \frac{\varphi'}{t}$ y $\omega'' = \frac{\omega''}{t}$

1627. Para los casos de conversión de un sistema a otro tenemos:

Tabla N.° 21

Valor de	*en función de* ω	*en función de* ω'	*en función de* ω''
ω	———	$\omega = \frac{\pi}{180}\,\omega'$	$\omega = 2\pi\ \omega''$
ω'	$\omega' = \frac{180}{\pi}\,\omega$	———	$\omega' = 360\ \omega''$
ω''	$\omega'' = \frac{1}{2\pi}\,\omega$	$\omega'' = \frac{1}{360}\,\omega'$	———

Cuando hay que convertir φ a φ' etc, se usan las mismas fórmulas anteriores cambiando las ω por sus correspondientes φ.

En los casos prácticos consúltese la siguiente tabla, para obviar las operaciones.

Tabla N.° 22

$2\pi = 6{,}28319$	———	$\frac{\pi}{180} = 0{,}01746$
$\frac{1}{2\pi} = 0{,}159138$	$\frac{1}{360} = 0{,}002728$	$\frac{180}{\pi} = 57{,}295767$

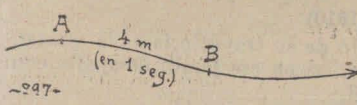
Examinando la fórmula general de la velocidad angular, y su dos fórmulas derivadas, vemos que son análogas:

V. angular	$\varphi = \omega . t$	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	$t = \frac{\varphi}{\omega}$
V. lineal	$c = v . t$	$v = \frac{c}{t}$	$t = \frac{e}{v}$

3.° – Velocidad lineal efectiva.

1628. — En todo movimiento curvilíneo, se puede considerar la velocidad lineal en dos formas diversas: a) la EFECTIVA, b) la TANGENCIAL.

Estudiemos ambas formas en el movimiento circular.



~297~

1629. – **Velocidad efectiva** (en general) es la porción de curva recorrida en una unidad de tiempo (fig. 897).

Si el móvil recorre 4 m. de curva en **1 seg.**, tendrá en ese lugar de su trayectoria, la velocidad de **4 m|seg.**

En el movimiento circular diremos que:

Velocidad efectiva es la longitud de arco recorrido en una unidad de tiempo.

1630. — **Movimiento circular uniforme** es el que tiene un móvil, cuya velocidad efectiva es constante.

En el movimiento circular uniforme tenemos como en cualquier movimiento lineal uniforme:

$$v = \frac{e}{t}$$

e (*longitud del arco recorrido en* t *unidades de tiempo*).

1631. – Relación entre la velocidad angular y la lineal efectiva (fig. 896).

Supongamos $\varphi = 2{,}35$ *radianes* en 5 *seg.*

luego $\omega = \frac{2{,}35}{5} = 0{,}47$ *radianes/seg.*

y supongamos $r = 0{,}30$ *metros*

entonces $v = 0{,}47 \times 0{,}30 = 0{,}141$ *metros/seg.*

De aquí la fórmula $v = r.\omega$

> EN EL MOVIM. CIRC. UNIFORME, LA VELOCIDAD LINEAL EFECTIVA ES IGUAL AL PRODUCTO DE LA VELOCIDAD ANGULAR RADIÁNICA POR LA MEDIDA DEL RADIO.

Consultando la tabla N.° 21, obtenemos también:

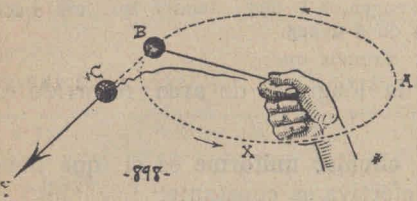
$$v = \frac{\pi}{180}\, r.\omega' \qquad v = 2\pi r.\omega''$$

4.° – Velocidad tangencial.

1632. – La velocidad lineal efectiva no es la verdadera velocidad del móvil.

Efectivamente hemos visto que (**1610**):

Velocidad de un móvil en un punto de su trayectoria es la que tendría con movim. *uniforme y rectilíneo*, si en ese punto desaparecieran todas las fuerzas que actúan sobre él.



-898-

1633. – LA DIRECCIÓN QUE SIGUE UN MÓVIL AL ADQUIRIR MOVIMIENTO LIBRE, ES SIEMPRE TANGENTE A LA TRAYECTORIA QUE SEGUÍA EN SU MOVIMIENTO FORZADO (fig. 898).

La piedra sujeta al hilo gira alrededor de **o** describiendo la circunferencia **ABX**. Si al llegar al punto **B**, se corta el hilo, la piedra sigue la trayectoria rectilínea **BY**.

Y tenemos que: **BY** tangente *a* **ABX**.

La experiencia y el cálculo matemático han demostrado esta ley.

Aquí nos contentamos con exponerla.

1634. – Relación entre la velocidad tangencial y la efectiva. – Cualquiera entiende que:

$$v = f(v_t)$$

Léase: "velocidad efectiva = función de la velocidad tangencial".

A simple examen parecería, que la intensidad de **v** debiera ser distinta de la de v_t.

Pero profundizando el examen nos convencemos de que:

> **La velocidad efectiva y la tangencial tienen la misma intensidad y difieren tan sólo en la forma** (*siendo la primera curvilínea, y la segunda rectilínea*).

Efectivamente por Geometría sabemos que: LA TANGENTE ES LA PROLONGACIÓN DEL ARCO INFINITESIMAL DEL PUNTO DE CONTACTO.

P. l. t., al quedar libre el móvil de las causas que lo sujentaban al centro de giro, SEGUIRÁ EN LÍNEA RECTA CON LA VELOCIDAD QUE EN ESE MOMENTO TENÍA.

5.° – La aceleración de la velocidad tangencial.

1635. – Ya sabemos que (**917** h. **923**):

Aceleración es el incremento de la velocidad, adquirido en una unidad de tiempo.

Y sabemos que (**924**):

Hay aceleración *positiva* y *negativa*, siendo esta última un *incremento negativo* o sea un *decremento*.

Falta ahora indicar cual es la dirección y *sentido* de la aceleración en la *velocidad tangencial*.

1636.– En el movimiento recitlíneo, la velocidad tangencial coincide con la trayectoria.

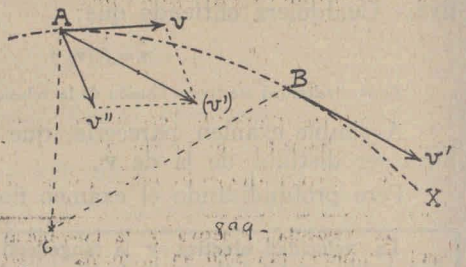
Por eso:

En el movimiento rectilíneo la aceleración es congruente (**307**) con la velocidad respectiva.

En cambio:

EN EL MOVIMIENTO CURVILÍNEO ES CABALMENTE LA ACELERACIÓN, LA CAUSANTE DEL CONTINUO DESVIARSE DE LA VELOCIDAD TANGENCIAL.

1637. – Incremento de la velocidad tangencial (fig. 899).



Supongamos un móvil que en un tiempo **t** va de **A** a **B**, y cuya velocidad tangencial sea:

v cuando está en **A**,

v' cuando está en **B**

Transportemos **v'** paralelamente a sí mismo, hasta aplicarlo en **A**.

Obtendremos (**v'**) equivalente de **v'**

Con lo que descubrimos que el vector **v** se ha transformado en el vector **v'** debido al componente **v''** que se le sumó geométricamente (**318**).

Tenemos, pues, que $v' = v \overset{\wedge}{+} v''$

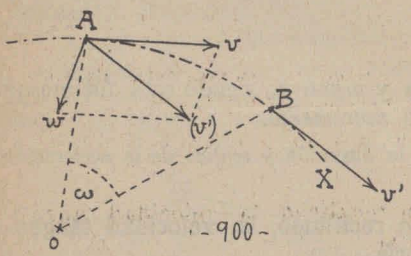
De donde resulta que **v''** es el incremento geométrico de **v** al fin del tiempo **t**.

1638. – Aceleración de la velocidad tangencial.

Si el tiempo **t** hubiera sido *1 segundo*, tendríamos que:

$$v'' = w \quad (aceleración)$$

1639. – Si el movimiento *giratorio* es uniforme, tendremos que:



$$v = v'$$

Pero, aun entonces subsiste la aceleración **w** distinta de cero (fig. 900).

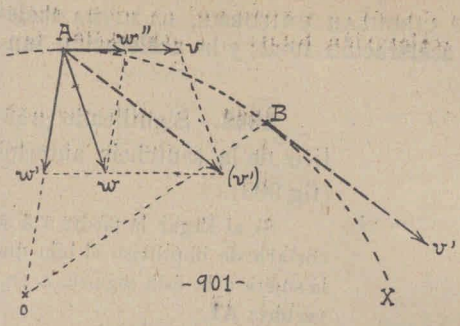
En el movimiento circular uniforme la aceleración **w** es constante.

1640. – Aceleración instantánea es la que se valúa mediante el cálculo infinitesimal, o sea, eligiendo como unidad de tiempo *dt*.

(Ver en **1621** el significado de *dt*)

1641. – Aceleración tangencial, aceleración normal y aceleración total.

Todo vector puede considerarse como resultante de un [illegible] de vectores.



P. l. t. (fig. 901), consideraremos el vector **w** como suma geométrica de los dos vectores:

w' (normal a la trayectoria **AX**)

w'' (tangente de dicha trayectoria)

Aceleración **tangencial** es la componente **w''**, tangente a la trayectoria.

Aceleración **normal** o **centrípeta** es la componente **w'**, coincidente con el radio **oA.**

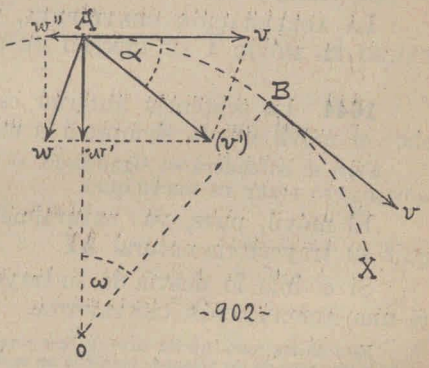
Siendo **w** la suma geométrica de **w'** y **w''**, ha recibido el nombre de: **aceleración total**, pudiendo también denominarse: **aceleración efectiva**.

1642. – Las aceleraciones en el movim. circular uniforme (fig. 902).

$v = v'$

Si **v** es velocidad instantánea y **w** es aceleración instantánea, podemos suponer: dt (unidad de tiempo adoptada); y entonces $\omega = d\varphi$ (o sea: ángulo indefinidamente pequeño).

Pero $\alpha = \omega$ (por tener los lados naturalmente perpendiculares).



P. l. t. α es un ángulo indefinidamente pequeño. En el triángulo **Av(v')** el lado **v(v')** se va volviendo cada vez más paralelo al radio **oA**, a medida que decrece α.

Cuando, pues, α se ha reducido a su ínfima expresión, tenemos

v(v') // oA

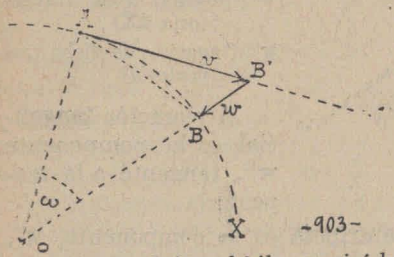
pero siempre tenemos que **w// v(v')**

de donde resulta que **w** cae sobre el radio **oA**, o sea: coincide con la aceleración CENTRÍPETA **w'**.

Tendremos, pues, **w' = w** **w'' =** CERO

Todo lo cual se expresa así:

EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME, LA MISMA **aceleracón centrípeta** ES LA **aceleración total**; y la **aceleración tangencial** ES NULA.



-903-

1643. – Significado práctico de la sentencia anterior (fig 903).

Si al llegar la piedra a **A** se cortara de improviso el hilo que la sujeta a **o**, ésta seguiría la trayectoria **AY**.

Luego $v = AB'$

Pero si subsiste el hilo, seguirá la trayectoria **AX**.

Luego el hilo ha impreso a la piedra, la aceleración centrípeta **w**, haciéndola caer hacia el centro **o**.

De consiguiente:

LA ACELERACIÓN CENTRÍPETA, VA CONTINUAMENTE ACERCANDO EL MÓVIL A SU CENTRO DE GIRO.

1644. – La sentencia anterior es paradojal, porque de hecho, el móvil queda siempre a la misma distancia del centro **o**.

Pero se entenderá su significado, si se tiene en cuenta que TODO MOVIMIENTO LIBRE ES RECTILÍNEO.

El móvil, pues, va naturalmente alejándose de **o** al seguir su trayectoria natural **AY**.

Si el hilo lo desvía de su trayectoria natural, imprime en él una ACELERACIÓN CENTRÍPETA.

Esta última consideración sirve de base para calcular la resistencia mínima que requieren los rayos de los volantes, para que no se deforme o rompa la llanta como efecto del esfuerzo centrífugo de la misma.

El estudio que acabamos de hacer está íntimamente enlazado con el de las fuerzas CENTRÍFUGA y CENTRÍPETA, que consideraremos más adelante, al volver a la Dinámica.

1645. – Valuación de la aceleración centrípeta.

En el movimiento giratorio uniforme se calcula algébricamente la aceleración centrípeta mediante la siguiente fórmula:

$$w = \frac{v^2}{r}$$

w (*aceleración centrípeta*) **v** (*velocidad tangencial*) **r** (*radio de curvatura*)

Para saber aplicar esta fórmula hay que tener presente que, EL RADIO DEBE MEDIRSE CON LA MISMA UNIDAD LINEAL ADOPTADA AL ELEGIR LA UNIDAD DE VELOCIDAD.

EJEMPLO (fig. 903). ¿Cuál es en **A** la aceleración centrípeta del móvil, si su velocidad es de **3** *m/seg*, y si en **A** el radio de curvatura tiene **45** *cm.* de longitud?

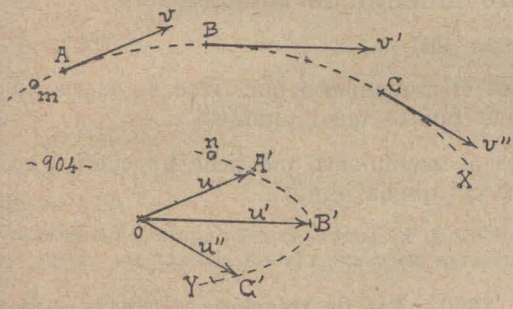
CONVERSIÓN $45 \text{ cm} = 0,45 \text{ m}$

SOLUCIÓN $w = \frac{v^2}{r}$ $\qquad x = \frac{9}{0,45} = 20 \text{ m./seg.}$

6.°- Hodógrafa del movim. circular uniforme

1646.–En Cinemática superior, para simplificar la solución de ciertos problemas de movimiento curvilíneo se recurre a la construcción de una curva denominada HODÓGRAFA.

Para lo que se estudia en los cursos de enseñanza secundaria, es inútil este conocimiento; pero hay programas que lo exigen, luego....



-904-

1647. - Hodógrafa (fig. 904). – Un móvil **m** recorre la trayectoria **X** con velocidad variable, que en los puntos **A**, **B**, y **C** vale **v**, **v'** y **v''**, respectivo. Desde un punto cualquiera **o**, llamado POLO, trazamos los vectores **u**, **u'** y **u''**, equipolentes de **v**, **v'** y **v''**, respectivo.

Si en lugar de trazar sólo los tres vectores polares **u**, hubiéramos trazado los infinitos vectores correspondientes a las velocidades que el móvil tiene en cada uno de los infinitos puntos de la trayectoria **X**, hubiéramos obtenido la curva **Y** (lugar geométrico de las extremidades de los vectores **u**).

Podemos, pues, suponer que al móvil **m** le corresponde un móvil **n** que se mueve sobre la trayectoria **Y** con dependencia del movimiento que **m** tiene sobre la trayectoria **X**.

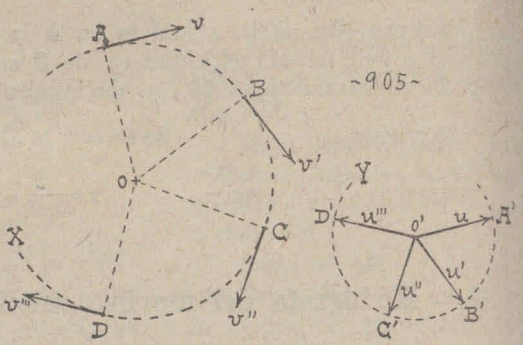
La trayectoria **Y** es la **hodógrafa** del movimiento de **m**.

1648. - La Hodógrafa del movimiento circular uniforme es una circunferencia (fig. 905).

Siendo todas las **v** iguales, serán también iguales todas las **u**.

La curva **Y** será, pues, una circunferencia.

Además el punto **n** *se traslada sobre la hodógrafa con movimiento uniforme.*



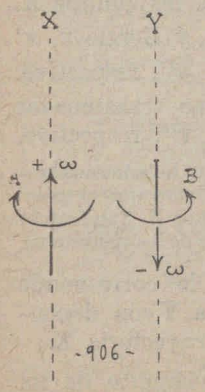
AL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME LE CORRESPONDE HODOGRÁFICAMENTE OTRO MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.

7.°- Movimiento de rotación

1649. - Ya vimos que (**102**):

Rotación polar es el movimiento que tiene un cuerpo en el que uno sólo de sus puntos queda inmóvil.

Rotación axial es el movimiento que tiene un cuerpo, en el que una de sus rectas queda inmóvil.



Cuando hablamos de rotación sin especificación alguna, nos referimos a la rotación AXIAL.

1650. - Eje de rotación es la recta indefinida que contiene a la recta que queda inmóvil en el cuerpo que VOLTEA.

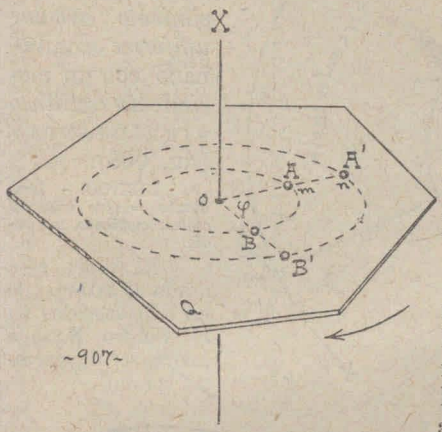
Al iniciar el estudio de los MOMENTOS, tuvimos ocasión de hablar de rotación *dextrorsa* y *sinistrorsa*, etc. (**384** y **385**).

1651. - Para poder geometrizar el estudio de la rotación se ha convenido en representar la velocidad angular ω mediante un vector colocado sobre el eje de rotación (fig. 906).

En la figura:

A y **B** indican el sentido de la rotación; ω y ω' son los vectores que indican la velocidad.

1652. - Para saber qué sentido y signo le corresponde al vector ω, se sigue la misma regla que se indicó al hablar de la representación vectorial del momento estático (**382** y **383**).



En nuestro caso:

+ ω va hacia *arriba*, porque es *dextrorso, o sea positivo*

—ω va hacia *abajo* porque es sinistrorso, o sea *negativo*.

No están de acuerdo los autores en la determinación práctica de los conceptos DEXTRORSO y SINISTRORSO. De aquí que, aun definiéndolos en forma análoga, los apliquen unos al revés de los otros.

1653. – En el movimiento rotatorio uniforme, la velocidad angular es una misma para cualquiera de los puntos del cuerpo. No así la velocidad tangencial (fig. 907).

Q representa un cuerpo laminar que voltea sobre el eje **X** (perpendicular a él).

Los puntos **m** y **n**, pertenecientes a un mismo radio vector, han efectuado simultáneamente el movimiento angular φ.

Para ambos tenemos:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

En cambio, conforme a (**1631**, **1634**), tenemos:

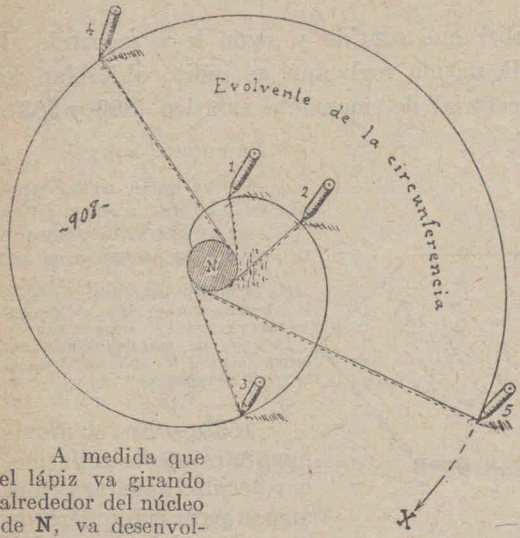
$$v = r.\omega \qquad v' = r'.\omega$$

$$e = r.\varphi \qquad e' = r'.\varphi$$

v y **v'** (*velocidades tangenciales de* **m** *y* **n** *respectivo*) $r = oA$ $r' = oA'$

e *y* **e'** (*movimientos lineales de* **m** *y* **n** *respectivo*)

8.º – Composición de movimientos curvilíneos.



1654. - Las **trayectorias espirales planas** se pueden considerar como resultantes de un *movimiento circular uniforme* combinado con un *movimiento rectilíneo* «IRRADIANTE» (fig. 908).

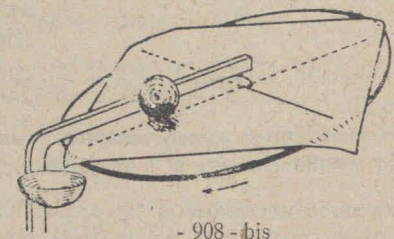
LÉXICO. - **Irradiante** = *Que huye del centro, siguiendo un radio.*

El lápiz está atado al extremo de un hilo envuelto en el cilindro **N** (que puede ser un carretel común).

A medida que el lápiz va girando alrededor del núcleo de **N**, va desenvolviéndose el hilo, y el lápiz se aleja cada vez más del centro de giro

Su trayectoria **X** resulta siendo una espiral.

Cualquier espiral plana puede considerarse engendrada de la misma manera, con sólo aceptar que el alejamiento del lápiz se efectúe por razones distintas de la que hemos expuesto.



- 908 - bis

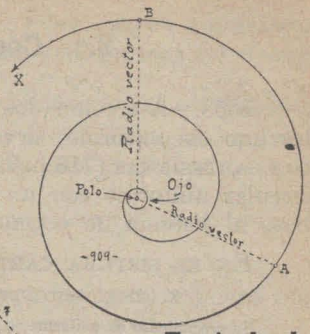
Ya vimos esto en **(983)** (fig. 908 - bis).

1655. – Podemos, pues, decir que:

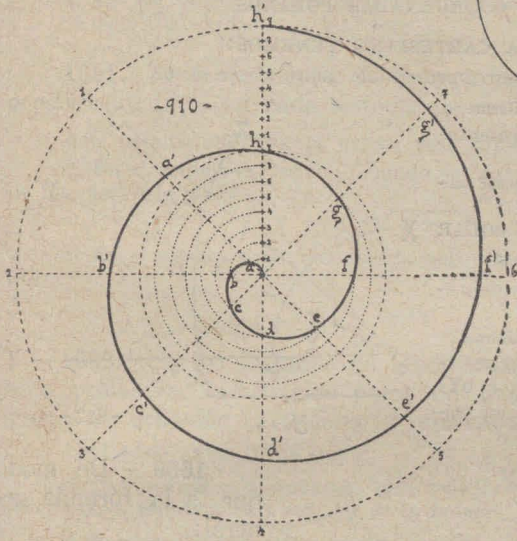
Espiral plana es una curva abierta, cuyo punto generador gira alrededor de un punto llamado POLO, alejándose continuamente de él (fig. 909).

El círculo de donde se desprende el punto generador, se llama OJO de la espiral.

RADIO VECTOR es la recta sobre la cual se aleja el punto generador.



1656. – Desde el punto de vista de este sistema de generación de las espirales, es muy interesante la siguiente curva:



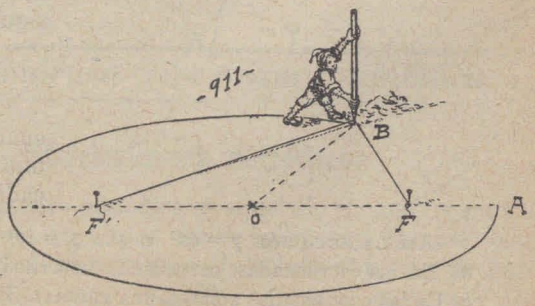
Espiral de Arquímedes (fig. 910) es la trayectoria de un punto que está animado de un *movimiento circular uniforme* combinado con un *movim. rectilíneo uniforme irradiante.*

En esta curva el ojo está reducido a CERO, puesto que el movimiento se inicia en el polo.

1657. – Con igual razón, las **trayectorias ovales** se pueden considerar como resultantes de un *movim. circular uniforme*, combinado con un *movim. rectilíneo radial de vaivén* (fig. 911).

Debido al cordel que está sujeto en **F** y **F'**, el radio vector **oA**. **oB** va acortándose u alargándose sucesivamente, resultando una TRAYECTORIA OVAL.

El óvalo así obtenido, es una **elipse**; pero variando la causa del acortamiento y alargamiento sucesivo del radio vector, se obtienen óvalos muy diversos.



9.° – Coordenadas polares

1658. – Así como dos movimientos rectilíneos de los cuales uno es uniforme, sirven de base al sistema de COORDENADAS CARTESIANAS (716 h. 759); la combinación de un movimiento circular uniforme con un rectilíneo radial cualquiera, sirve de base al sistema de COORDENADAS POLARES.

EN EL SISTEMA CARTESIANO TENEMOS:

x (magnitud representada sobre el eje de **oX**).

Su crecimiento es uniforme.

y (magnitud representada sobre el eje **oY**.

Su crecimiento puede ser uniforme o variado.

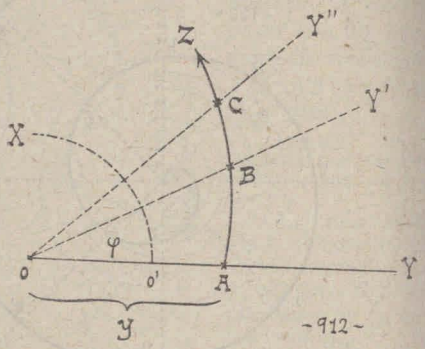
EN EL SISTEMA POLAR (fig. 912) TENEMOS:

φ (magnitud representada sobre el arco **o'X**)

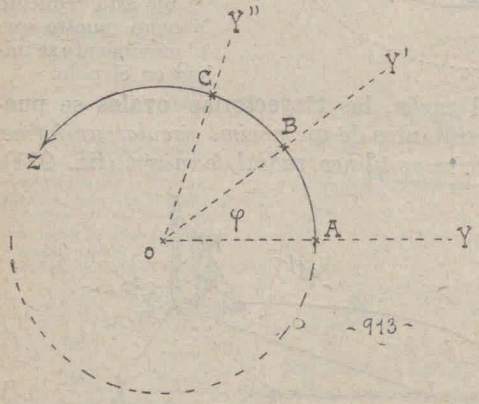
Su crecimiento es uniforme.

y (magnitud representada sobre el radio vector **oY**)

Su crecimiento puede ser uniforme o variado.



-912-



-913-

1659. – De modo que a la fórmula general:

$$y = c + a\,x^n$$

le corresponde en las coordenadas polares la siguiente:

$$y = c + a\,\varphi^n$$

1660. – A toda ecuación le corresponde una gráfica distinta en cada sistema.

ASÍ LA ECUACIÓN $y = ax^2$ O SEA $y = a\varphi^2$ TIENE POR GRÁFICA:

a) En las coordenadas, cartesianas, una PARÁBOLA (fig. 560 y 568).

b) En las coordenadas polares, una ESPIRAL (fig. 565 y 908).

La ecuación $y = ax$ o sea $y = a\varphi$ tiene por gráfica:

a) En las coordenadas cartesianas, una recta que pasa por el origen de los ejes **X** e **Y** (fig. 424 y 517).

b) En las coordenadas polares, una espiral de Arquímedes (fig. 910).

La ecuación $y = c + 0x$ o sea $y = c + 0\varphi$ tiene por gráfica:

a) En las coordenadas cartesianas, una recta paralela al eje de las abscisas (fig. 515).

b) En las coordenadas polares, una circunferencia con centro en el polo (fig. 913).

1661. – Recíprocamente: A toda curva, le corresponde una ecuación distinta en cada sistema de coordenadas.

Así, la circunferencia tiene por ecuación:

a) En el sistema cartesiano (cuando su centro coincide con el origen de los ejes) (fig. 417):

$$y = \pm \sqrt{b - x^2}$$

b) En el sistema polar (cuando su centro coincide con el polo) (fig. 913):

$$y = c + 0\varphi$$

1662. – En los tratados de Geometría Analítica se enseña a plantear la ecuación polar de una curva cuando se conoce su ecuación cartesiana, y viceversa.

Aquí sólo advertimos que:

a) Hay curvas cuya ecuación más sencilla es la cartesiana, y hay curvas cuya ecuación más sencilla es la polar.

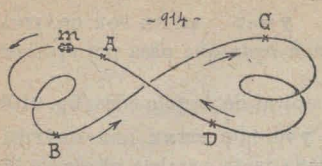
b) Hay ecuaciones cuya gráfica más sencilla es la cartesiana, y hay ecuaciones cuya gráfica más sencilla es la polar.

La habilidad del calculista, pues, radica en saber elegir el sistema más apropiado para cada caso.

VI.° - Movimiento vibratorio harmónico.

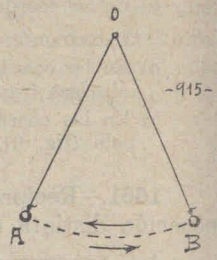
1.° - Movimientos periódicos

1663. – Movimiento **periódico** es aquel en el cual un punto dado va recorriendo repetidas veces un mismo camino, empleando siempre el mismo tiempo en volver al punto de partida (fig. 914).



Si el móvil **m** recorre continuamente la pista **ABCD** tardando siempre el mismo tiempo en volver a pasar por **A** o por **B**, o **C**, etc., su movimiento es PERIÓDICO.

Como se ve, cualquier punto de la ruta debe poders considera como origen del movimiento.



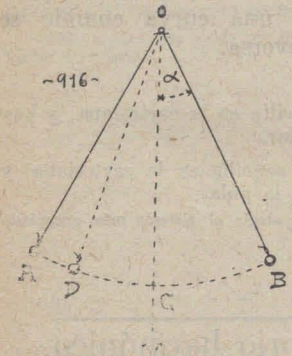
1664. – Movimiento **vibratorio** es el vaivén repetido de un punto sobre un segmento de línea (fig. 915).

El punto **m** va de **A** a **B** y de **B** a **A**, sucesivamente.

1665. – Movimiento VIBRATORIO **harmónico** es el que se produce con aceleración creciente y decreciente como el del péndulo (fig. 915).

Esta forma particular de *vibración* se ha denominado "HARMÓNICA" porque es sensiblemente igual a la que tienen las lengüetas en la producción de los sonidos.

Aquí no entraremos a estudiar las causas de este tipo particular de movimiento puesto que es tema correspondiente a la Dinámica.
Tan sólo estudiaremos su forma, puesto que estámos en Cinemática.



1666. – **Elementos del movimiento vibratorio** (fig. 916).

Oscilación simple es el recorrido **AB**, o sino el recorrido **BA**.

Oscilación completa o VIBRACIÓN es el recorrido **ABA**, o sino el recorrido **BAB**.

Se dice que dos o más oscilaciones son DE LA MISMA **fase**, cuando tienen el mismo sentido y origen.

P. l. t., la OSCILACIÓN COMPLETA consta de dos *oscilaciones simples*, DE FASE OPUESTA.

Vértice de oscilación es el punto **C**, equidistante de los EXTREMOS **A** y **B**.

Semioscilación simple es el recorrido **AC**, o sino **CA**, o sino **CB**, o sino **BC**.

Amplitud del movim. vibratorio = SEMIOSCILACIÓN SIMPLE.

En el movim. pendular se considera como AMPLITUD el ángulo α; y a veces el 2α

Elongación es la distancia de una posición cualquiera del móvil hasta el vértice.

En nuestro caso: **DC**.

P. l. t. podemos también decir que:

Amplitud de un movimiento vibratorio, es su ELONGACIÓN MÁXIMA.

Frecuencia es el NÚMERO DE VIBRACIONES producidas en una unidad de tiempo.

Téngase presente que VIBRACIÓN = *Oscilación completa.*

Período es el tiempo necesario para obtener una oscilación completa.

1667. – La FRECUENCIA y el PERÍODO son dos conceptos recíprocos.

Efectivamiente:

Si en un segundo se producen 50 vibraciones, *tendremos que:*

1 vibración se produce en 1|50 de seg.

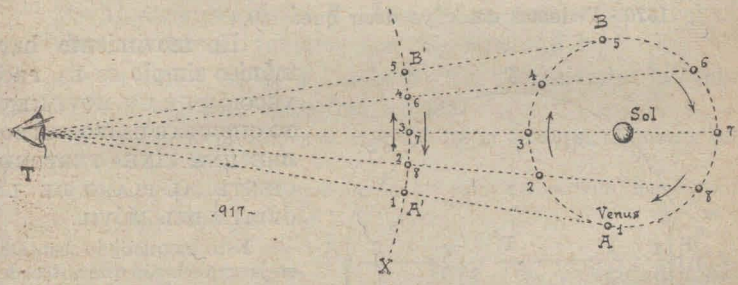
FRECUENCIA 50 vibr|seg.

PERÍODO: 1|50 seg. para cada vibración.

2.° – Movimiento harmónico simple

1668. – Son muy variadas las causas que pueden determinar la producción de *movim.s. vibr.s. harmónicos.*

Consideraremos un caso en el que interviene una causa meramente geométrica (fig. 917).



.917.

El planeta Venus recorre su órbita alrededor del sol con MOVIMIENTO GIRATORIO *sensiblemente uniforme*, que podemos considerar como circular.

En **T** se indica el ojo de un observador colocado en la Tierra.

X representa la bóveda celeste, lugar donde el observador se imagina ver al Sol y a Venus.

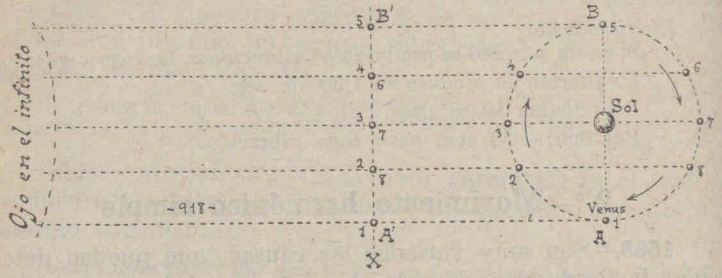
Venus pasa sucesivamente por los puntos **1,2,3**, etc. de su órbita; y el observador ve proyectados esos puntos sobre un segmento lineal de la bóveda **X**.

Como se ve, el movimiento aparente de Venus es VIBRATORIO, y nosotros añadimos que es un caso real de MOVIMIENTO VIBRATORIO HARMÓNICO SIMPLE.

Para simplificar, eliminamos el especificante "VIBRATORIO", llamándolo MOVIM. HARMÓNICO SIMPLE.

1669. – Si suponemos el ojo del observador colocado en el «infinito», entonces la bóveda **X** será plana, y en consecuencia, el segmento **A'B'** será una recta.

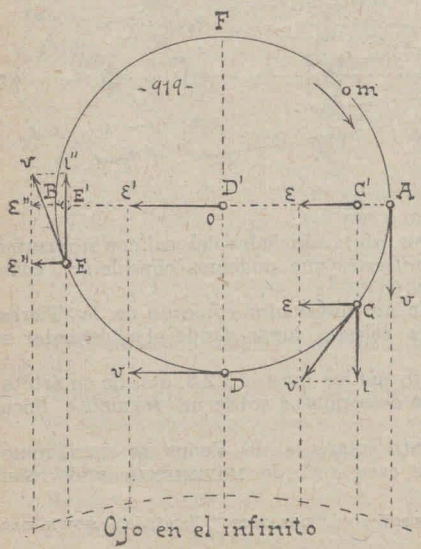
Además las visuales que van del ojo del observador a los puntos 1,2,3, etc. serán mutuamente paralelas, y perpendiculares al segmento **A'B'**.



Item más, el segmento **A'B'** será paralelo al diámetro **AB**.

Tenemos entonces el caso del MOVIMIENTO HARMÓNICO SIMPLE Y REC. TILÍNEO, *que es el que estudiaremos,*

1670.- Podemos desde ya decir que:



EL MOVIMIENTO HARMÓNICO SIMPLE ES LA PROYECCIÓN DE UN MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME SOBRE UNA LÍNEA PERTENECIENTE AL PLANO DE LA ÓRBITA DEL MÓVIL.

Esto ha quedado asentado en la explicación que antecede.

1671.- Este *movim. harmónico* ha sido denominado SIMPLE, porque todos los demás movims. harmónicos, se pueden considerar como compuestos por dos o más de esta categoría, o por un harmónico simple combinado con otro movimiento cualquiera.

1672. – **Estudio del movim. harmónico simple** (fig. 919).

Para simplificar el trabajo, haremos coincidir la recta **A' B'** con el diámetro **AB**

Cuando **m** *está en* **A** *el ojo lo ve en* **A**; *cuando está en* **C**, *lo ve en* **C'** *etc.*

El vector **v** representa la velocidad tangencial del móvil, la cual permanece siempre perpendicular al radio vector.

Consideremos primeramente el efecto visual producido cuando **m** se halla en **C**.

Descompongamos el vector **v** en otros dos:

ι (*velocidad imperceptible*) perpendicular a **AB**

ε (*velocidad efectiva*) paralela a **AB**

Como se ve, el ojo colocado en el infinito recibe la impresión de que en **C'** el móvil se traslada hacia **o** con velocidad ε, inferior a **v**.

1673. – Con poco que se estudie este caso se verá que:

En **A** y **B** tenemos $\iota = v$ $\varepsilon =$ CERO

En **D** tenemos $\iota =$ CERO $\varepsilon = v$

Y resumiendo los distintos casos considerados, tendremos que:

1º – Mientras **m** va de **A** hacia **D**, va creciendo su velocidad efectiva, hasta igualarse con la velocidad real.

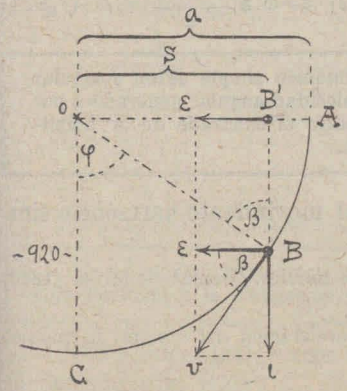
2º – Mientras **m** va de **D** hacia **B**, va decreciendo su velocidad efectiva, hasta reducirse a CERO.

3º – Al dirigirse **m** de **B** hacia **F**, va creciendo la velocidad efectiva, hasta igualarse con la velocidad real.

4º – Al seguir **m** de **F** hacia **A**, va decreciendo la velocidad efectiva, hasta reducirse a CERO.

Al explicar el movimiento aparente de **m** sobre el diámetro **AB**, debemos sustituir **D** y **F** por **o**.

En el recorrido **AoB** tenemos la 1.ª FASE del movim. harmónico; y en el recorrido **BoA** tenemos la 2.ª FASE.



-920-

1674. – **La velocidad máxima en el movim. harmónico simple** (fig. 920).

Ya sabemos que (**1631**) $v = \omega . r$

que en nuestro caso es lo mismo que

$$v = \omega . a$$

a (amplitud)

Y como en **C** tenemos $\varepsilon = v$

luego en **C** tendremos

$$\varepsilon = \omega . a$$

En el movim. hármonico la velocidad máxima es igual al producto de la velocidad angular generadora, por la amplitud de la oscilación.

Denominamos *velocidades generadoras* de la velocidad efectiva harmónica a las dos velocidades **v** y ω del movim. circular uniforme que engendra el movin. harmónico simple.

1675.-Valor de la velocidad en el movimiento harmónico simple (fig. 920):

De la igualdad de los ángulos β se deduce la semejanza de los triángulos rectángulos **oB'B** y **vεB**.

p. l. t $\qquad \frac{\varepsilon}{v} = \frac{BB'}{oB}$

de donde $\qquad e = \frac{v.BB'}{oB} \qquad (1)$

pero vimos que $\qquad v = \omega.a$

además $\qquad oB = oA = a$ (*amplitud de la oscilación*)

y $\qquad BB' = a.cos\beta$

pero $\qquad \beta = \varphi$

luego sustituyendo estos valores en (1) obtenemos $\qquad \varepsilon = \frac{\omega.a^2.cos\,\varphi}{a}$

o sea $\qquad \varepsilon = \omega.a.cos\,\varphi \qquad (2)$

Pero $\qquad cos\,\varphi = \frac{\sqrt{oB^2 - oB'^2}}{oB}$

y como $\qquad oB = oA = a \qquad$ y $\qquad oB' = s$ (elongación)

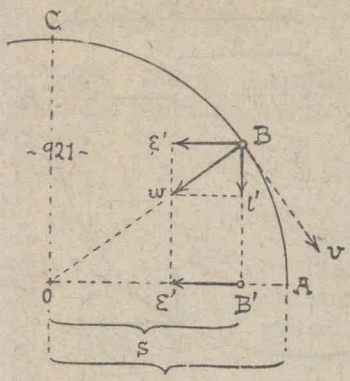
resulta que $\quad cos\,\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{a}$ luego (2) $\quad \varepsilon = \omega.a\,\frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{a} = \omega\sqrt{a^2 - s^2}$

La velocidad del movim. harmónico simple es en cualquier instante, igual al producto de la velocidad angular generadora por la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la amplitud y el cuadrado de la elongación.

1676. - La aceleración en el movimiento harmónico simple (fig. 921).

Ya vimos que la aceleración en el movim. circular uniforme (1642) es centrípeta y constante: **w**.

Veamos ahora qué valor tiene la aceleración del movim. harmónico derivado de aquél:



Descompongamos **w** en dos vectores:

ι' (*aceleración imperceptible*) ⊥ **Ao**
ε' (*aceleración efectiva*) // **Ao**

ε' es, pues, la aceleración del movim. harmónico simple.

Como se ve:

a) LA ACELERACIÓN EN EL MOVIM. HARMÓNICO SIMPLE ESTÁ SIEMPRE DIRIGIDA HACÍA EL CENTRO **O**.

b) ESTA ACELERACIÓN TIENE SU VALOR MÁXIMO CUANDO EL MÓVIL ESTÁ EN **A** o en su extremo opuesto; Y VALE «*cero*», CUANDO EL MÓVIL ESTÁ EN **O**.

El punto **o** es el lugar donde se invierte el sentido de ε'.

1677. – Valor de la aceleración (fig. 921).

Ya vimos que $w = \frac{v^2}{r}$

pero aquí $v = \omega . a$ y $r = a$

luego aquí tenemos: $w = \frac{(\omega . a)^2}{a} = \omega^2 . a \quad (1)$

De la semejanza de los triángulos rectángulos **oB'B** y **Bε'w** se deduce que

$\frac{\varepsilon'}{w} = \frac{oB'}{oB}$ de donde $\varepsilon' = \frac{w . oB'}{oB}$

pero $oB = oA = a \qquad oB' = s \qquad w = \omega^2 . a \ (1)$

luego $\varepsilon' = \frac{\omega^2 . a . s}{a} = \omega^2 . s$

Y como en cada caso ω es constante, luego:

En el movim. harmónico simple la aceleración es continuamente proporcional a la elongación.

1678. – Relación entre la velocidad angular generadora y el período (fig. 922).

Para cualquier elongacion **s** tendremos

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

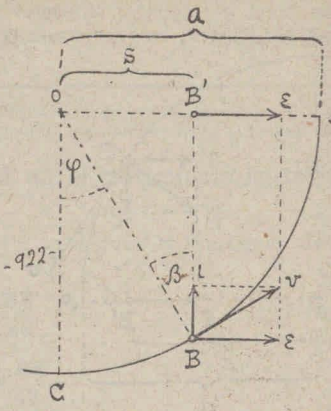
ω (*velocidad angular generadora*
φ (*movimiento angular efectuado desde*) **C**
t (*tiempo empleado en efectuar el movim.* φ).

Llamando **T** el *período*, o sea, el tiempo necesario para efectuar una revolución sobre la circunferencia, tendremos

$$\omega = \frac{1 \text{ } revolución}{T}$$

pero sabemos que

1 *revol.* (medida en radianes) $= 2\pi$ luego $\omega = \frac{2\pi}{T}$



1679. – Relación entre el tiempo y la elongación (fig. 922.)

Llamemos **T** el período o sea el tiempo necesario para una oscilación completa; y **t** el tiempo necesario para una elongación cualquiera **s**.

Y consideremos ambos tiempos a partir del instante en que el móvil está en **C** (es decir en **o**) moviéndose hacia **A**:

En el triángulo **BB'o**, tenemos:

$$s = a.sen\ \beta = a.sen\ \varphi \qquad (1)$$

Y como el recorrido que efectuó el móvil sobre el arco **CB** fué uniforme, tenemos:

$$\frac{CB}{c} = \frac{t}{T}$$

pero c (*circunferencia*) $= 2\pi.a$

y $CB = \varphi.a$

luego $\frac{\varphi.a}{2\pi.a} = \frac{t}{T}$ o sea $\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t}{T}$

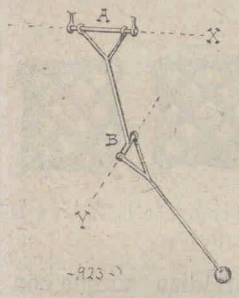
de donde $\varphi = 2\pi\frac{t}{T}$

Sustituyamos este valor en (1) y obtendremos:

$$s = a.sen\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

3.° – Composición de movim^{s}. harmónicos simples.

1680. – **Movim. harmónico compuesto** es el que se obtiene como resultante de dos o más movimientos harmónicos simples.



-923-

El caso más sencillo es el de un movimiento resultante de dos harmónicos simples.

Para su estudio, recurrimos al PÉNDULO DE AIRY.

1681. – **Péndulo de Airy** (fig. 923). Consta de dos varillas mutuamente articuladas **AB** y **BC**: la superior suspendida de un punto fijo, y la inferior rematando en la lenteja **C**.

Los dos ejes de oscilación **X** e **Y**, están mutuamente alabeados; por lo tanto, la varilla **AB** oscila en un plano distinto del de las oscilaciones de **BC**.

En nuestro caso, ambos planos son mutuamente perpendiculares.

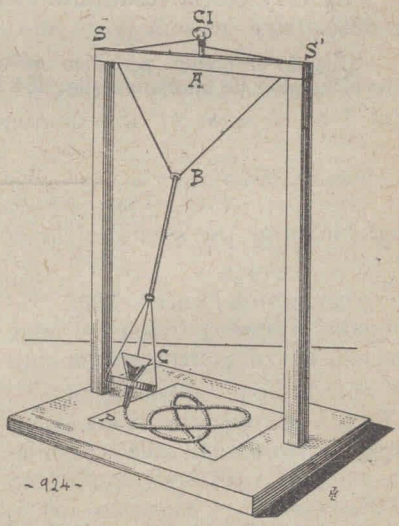
1682. – Una forma más expedita para la construcción de un AIRY, es la que se indica en la (fig. 924).

En **S** y **S'** están suspendidas dos ramas extremas de un hilo doble de cuya extremidad inferior cuelga un embudo lleno de arena.

En **B** hay un pasador de hilo que sirve para variar la proporción mutua de los segmentos **AB** y **BC**.

La clavija **Cl** no es necesaria; pero ayuda a dar al péndulo la longitud conveniente.

P (*lámina de cartulina, que recibe el chorro de arena*).

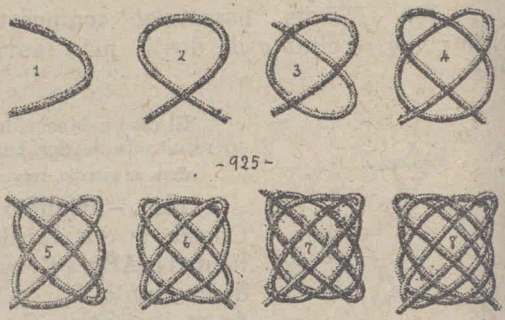


-924-

1683. – Para poner en acción el péndulo, se desvía la lenteja (o embudo) en sentido diagonal a la lámina **P**.

De este modo se obtiene una oscilación lenta del péndulo **AC**, combinada con otra más veloz del péndulo **BC**.

Según la proporción que se dé a las dos partes **AB** y **BC**, y según el desvío diagonal que se imprima a la lenteja, se recogerán en la lámina dibujos de arena muy variados, que representarán la trayectoria del embudo (fig. 925).



Para recoger intactos estos dibujos, conviene engomar la lámina **P** antes de usarla.

1684. – Composición de un movim. periódico simple con un movim. rectilíneo uniforme:

La trayectoria resultante es una línea ondulada (figs. 432 h. 438).

Cuando el movim. periódico es harmónico la curva ondulada recibe el nombre de SINUSOIDE (fig. 434 h. 436).

DINÁMICA

V.° - Dinámica de la rotación

1.° – Fuerzas centrípeta y centrífuga

1685. – Ya vimos que (1641):

En el movim. giratorio existe una aceleración centrípeta (figs. 901 y 902 — w') que en el movim. circular uniforme es la aceleración única o «total». (1642).

SI EXISTE UNA ACELERACIÓN, EXISTE LA FUERZA QUE LA PRODUCE.

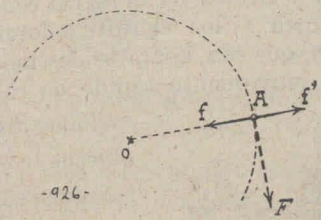
Luego:

Fuerza centrípeta es la que en el movim. giratorio produce la aceleración centrípeta.

1686. – En el caso de la piedra revoleada con un hilo, la fuerza centrípeta está engendrada por la reacción del hilo (1107 h. 1109).

En el caso de la rotación de la Tierra, si no existiera la fuerza centrípeta, todos los cuerpos libres serían lanzados al espacio.

La aceleración centrípeta de la Tierra esta producida por la gravedad.



-926-

1687. – En el movimiento circular, el móvil conserva siempre una misma distancia del centro.

Está, pues, equilibrada la fuerza centrípeta, por otra igual y opuesta a ella, denominada: **fuerza centrífuga** (fig. 926).

f (*fuerza centrípeta*) f' (*fuerza centrífuga*)
F (*fuerza propulsora*)

1688. – **Valor de la fuerza centrípeta.**

Ya sabemos que (1012): $w = \frac{f}{m}$

de donde $f = w.m$

La fuerza centrípeta es igual al producto de la aceleración centrípeta por la masa del móvil.

1689. – También sabemos que (1645):

$$w = \frac{v^2}{r}$$

p.l.t. $$f = \frac{m.v^2}{r}$$

pero (1064) $$m.v^2 = 2F.$$

luego $$f = \frac{2F}{r}$$

La fuerza centrípeta es igual al duplo de la fuerza viva, dividido por el radio de curvatura de la trayectoria del cuerpo en referencia.

1690. – Pero también sabemos que (1631):

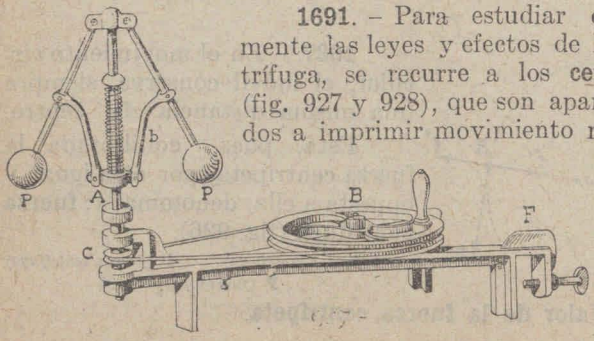
$$v = \omega.r$$

y como acabamos de ver que $f = \frac{m.v^2}{r}$

resulta que $$f = \frac{m(\omega.r)^2}{r} = m.\omega^2.r$$

La fuerza centrípeta es igual al producto de la masa por el cuadrado de la velocidad angular y por el radio.

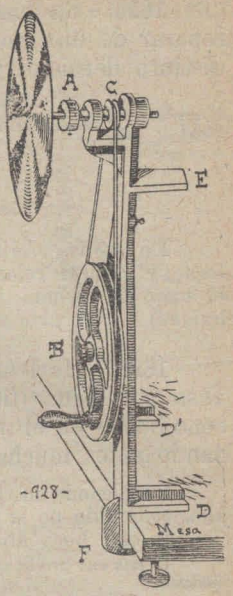
2.° - Experiencias y aplicaciones sobre fuerza centrífuga.



1691. – Para estudiar experimentalmente las leyes y efectos de la fuerza centrífuga, se recurre a los **centrifugadores** (fig. 927 y 928), que son aparatos destinados a imprimir movimiento rápido de rotación a los objetos colocados en su pieza giratoria **AC**.

El centrifugador puede colocarse horizontal o verticalmente, según que se asiente en sus pies (fig. 927), o se sujete a la mesa mediante la prensa **F** (fig. 927).

Hay centrifugadores eléctricos, que son más cómodos que los simplemente mecánicos.



1692. – Regulador de Watt (*colocado en* **AC** *de la fig. 927*) – Consta de un eje vertical de cuya extremidad superior penden dos brazos móviles que rematan en dos bochas macizas **P**.

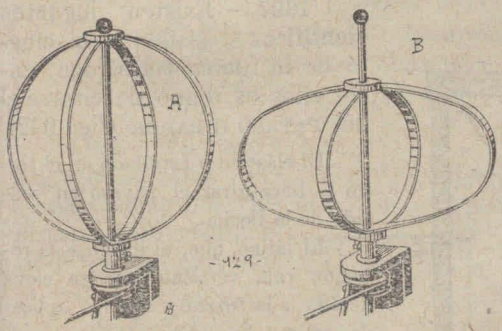
Cuando el aparato está quieto, los brazos están caídos; y al girar el aparato, los brazos se levantan más o menos según la velocidad de rotación del sistema.

Este aparato fué ideado por Jaime Watt para regular la tensión del vapor de agua de las calderas.

Para ello tiene otros dos brazos **b**, articulados a los principales y a un anillo que juega en el eje vertical.

Cuando hay mucha tensión en la caldera, el regulador gira velozmente, y entonces el anillo sube demasiado.

Acoplado éste a una palanca, la eleva lo suficiente como para hacerle abrir la válvula de escape de vapor,...



1693. – Anillos elásticos (fig. 929), aplicados al centrifugador.

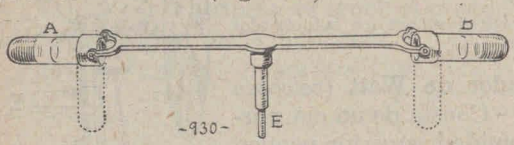
La parte inferior de los anillos está sujeta al eje vertical. La parte superior, en cambio, puede correrse libremente por el eje.

Al girar el sistema, la fuerza centrífuga hincha el *"ecuador"* del sistema, achatando los *"polos"*.

1694. – Los **anillos elásticos** sirven para explicarnos porque la Tierra está *achatada en los polos y ensanchada en el Ecuador.*

Cuando la Tierra estaba en estado semiflúido, sufrió los efectos de la fuerza centrífuga. Ahora su corteza de granito y otras rocas silíceas, le impide seguir ensanchándose.

1695. – La fuerza centrífuga se aprovecha también para separar de una mezcla flúida sus componentes cuando son de distinta densidad (fig. 930).



-930-

En las dos vasijas **A** y **B**, colocamos, por ej., leche; y al girar velozmente el aparato, se separa el suero de la nata, quedando ésta (que es más liviana) en la parte superior del líquido.

1696. – Haciendo girar rápidamente un vaso con agua (fig. 931), ésta forma un cono hueco en el interior del vaso, desbordando si es mucha la velocidad.


-931-

Revoleando un recipiente de agua atado a un hilo, el líquido no se derrama, aun cuando el recipiente esté boca abajo.

Es esta una prueba más que conocida, aunque el vulgo no sabe explicársela satisfactoriamente.



-932-

1697. – Existen **juguetes científicos** basados en el efecto de la fuerza centrífuga; entre ellos es digno de citarse el del PAYASO GIRADOR (fig. 932).

El elástico **e** arrollado en el torno **t**, hace girar el payaso en sentido de la flecha.

El látigo, que, al iniciarse la rotación caía verticalmente, se eleva debido a la *fuerza centrífuga* aplicada en **m**.

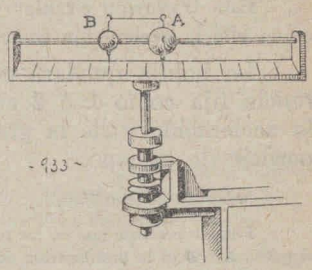
De este modo, al llegar a la columna **B** el látigo tropieza con ella, y a causa de la *fuerza viva* de **m**, se arrolla.

Una vez perdida su fuerza viva, **m** por *su propio peso* hace desarrollar el látigo; y entonces el payaso da otra media vuelta, deteniéndose al llegar el látigo a la columna **A**; etc.

1698.–Comprobación experimental de la fórmula $f = \omega^2 m.r$ (fig. 933).

Esta fórmula nos enseña que:

La fuerza centrífuga es proporcional a la masa del móvil, al radio de la trayectoria y al cuadrado de la velocidad angular.



Demostraremos sólo la proporcionalidad de la *masa* y del *radio*.

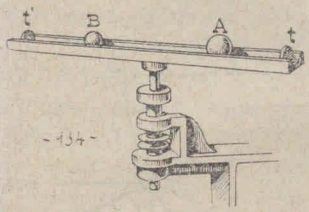
Las dos esferitas **A** y **B** están mutuamente unidas por un hilo:

a) Si al comenzar la rotación del aparato, las dos esferitas equidistan del centro, la esfera mayor **A** arrastrará a la menor **B**.

b) Si se colocan de modo que: $m.r = m'.r'$

m y **m'** (*masas de* **A** y **B**, *respective*). **r** y **r'** (radios de **A** y **B**, respective).

Las esferitas no se corren. En la fig. se ha supuesto que $m' = 2m$



1699. – El aparato de la fig. 934 sirve para demostrar que la aceleración centrífuga es independiente de la masa.

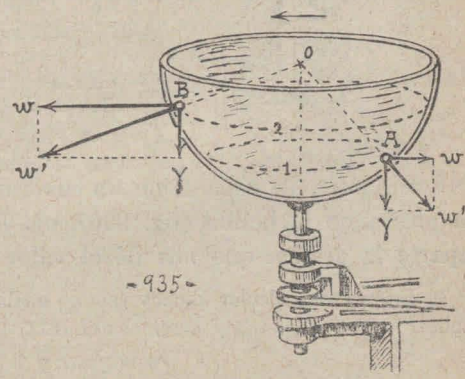
Efectivamente las dos bolillas **A** y **B** llegan al mismo tiempo a los topes **t** y **t'**, respective.

1700. – **Copa de Augusto** (fig. 935).– Sirve para comprobar indirectamente cualquiera de las tres partes de la fórmula:

$$f = \omega^2 . m . r$$

Veamos en que se basan los experimentos:

Si colocamos una bolilla en la copa, y ponemos en marcha el centrifugador, la bolilla, sube más o menos, según sea su peso y la velocidad giratoria de la copa.



En cada posición que adquiere la bolilla, en su movimiento ascencional, va girando sobre circunferencias horizontales (paralelas a las **1** y **2** que hay señaladas en la figura).

Esta traslación circular y horizontal de la bolilla es la que produce en ella la aceleración centrífuga **w**, causante de su ascensión.

La bolilla quedará estable, girando sobre una circunferencia fija como **1** ó **2** cuando la resultante **w'** (entre **w** y la aceleración γ de la gravedad) llega a ser *normal* a la superficie de la copa.

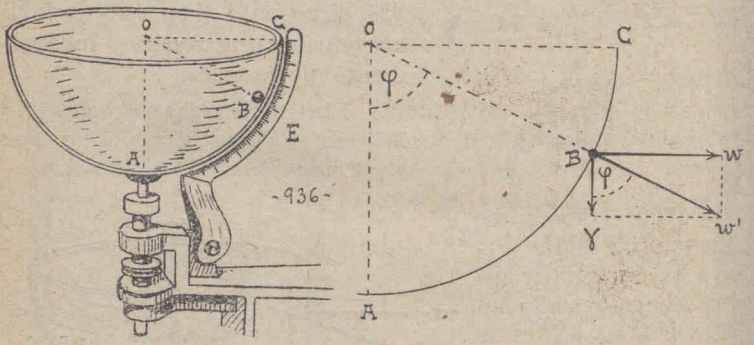
w (*aceleración centrífuga*) γ (*aceleración de la gravedad*).

Téngase presente que en las superficies esféricas (como la de la copa) la normal en el punto **A** o **B** es la prolongación de su radio **oA** u **oB** respective.

En cada lugar del globo terrestre, la aceleración γ es constante.

Quedando, pues, constante γ, la sola inspección de la fig. 935 nos indica que cuanto más alto está la bolilla, tanto mayor ha de ser la aceleración centrífuga **w**; y que para que la bolilla ascienda a 90°, se requiere que:

$$w = \infty$$



Si, pues, la copa tiene un cuadrante externo, que señale la altura de la bolilla (fig. 936), ej: 78°, podremos construir aparte la gráfica que nos dé el valor de **w**.

En vez de calcular dichos valores mediante una gráfica, podemos aplicar la Trigonometría y veremos que (**811**):

$$w = \gamma . sen\, \varphi$$

φ (ángulo que indica la altura de la bolilla.)

1701. – Experiencia con la copa de Augusto.

1.° – Colocando una sola bolilla en la copa queda constante la masa, y entonces tenemos que la fórmula

$$f = m.w$$

se transforma en $f = w$

y la fórmula $f = \omega^2.m.r$

se transforma en $f = \omega^2.r$

p. l. t. $w = \omega^2.r$

Si, pues, medimos el radio r y valuamos mediante un tacómetro la velocidad angular ω (medida en radianes), podremos conocer el valor de w, que después comprobamos mediante la fórmula (811):

$$w = \gamma.sen\,\varphi$$

NOTA.— *Para simplificar el trabajo, hay que tener en cuenta que γ es para cada lugar del Globo, una cantidad constante: por lo tanto podremos usar esta otra fórmula*

$$w = sen\,\varphi \qquad \text{(considerando } \gamma = 1\text{)};$$

de donde $\omega^2.r = sen\,\varphi$

2.° – Colocando en la copa dos o más bolillas de igual tamaño y distinta masa, podemos considerar en cada observación que $\omega = 1$ (porque es la misma para las distintas bolillas)

P. l. t. (1690) en vez de $f = \omega^2 m.r$ tendremos $f = m.r$

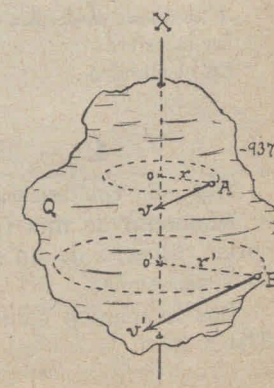
Aquí, pues, lo mismo que en (1698), tendremos la siguiente fórmula que hay que comprobar experimentalmente:

$$m.r' = m'.r$$

3.° – La energía cinética en la rotación.

1702. – Repase el alumno (1060 h. 1068).

1703. – Consideremos en un cuerpo Q que voltea sobre el eje X, dos puntos materiales A y B (fig. 937).



Su velocidad angular ω será la misma.

En cambio tendremos que:

$$\frac{v}{v'} = \frac{r}{r'}$$

Si A es un punto material, tiene MASA, aunque sea muy pequeña.

Tendremos, pues, que (1064):

$$F = \tfrac{1}{2}\, m.v^2$$

F (fuerza viva o energía cinética).

Pero ya sabemos que: $v = \omega.r$

luego $F = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 m.r^2$

EN LA ROTACIÓN, LA FUERZA VIVA DE CADA PUNTO MATERIAL, EQUIVALE AL SEMIPRODUCTO DEL CUADRADO DE LA VELOCIDAD ANGULAR POR LA MASA Y POR EL CUADRADO DEL RADIO.

1704. – El cuerpo **Q** es una suma de puntos materiales **A**, **B**, **C**, etc.

P. l. t.

LA ENERGÍA CINÉTICA DE UN CUERPO QUE VOLTEA, ES IGUAL A LA SUMA DE LAS ENERGÍAS CINÉTICAS DE TODOS SUS PUNTOS MATERIALES:

$$Ft = \Sigma F$$

Se lee: *"Fuerza viva total = Suma de todas las fuerzas vivas elementales"*.

Si $F = \frac{1}{2}\omega^2.m.r^2$ $F' = \frac{1}{2}\omega^2 m'(r')^2$

$F'' = \frac{1}{2}\omega^2 m''.(r'')^2$ etc.

Tendremos $Ft = \Sigma(\frac{1}{2}\omega^2 mr^2)$

y factoreando tenemos $Ft = \frac{1}{2}\omega^2.\Sigma(m.r^2)$

Léase: *"Fuerza viva total = Mitad del cuadrado de la velocidad angular por la suma de todos los productos de masa por el cuadrado de radio"*.

1705. – Mediante el cálculo podemos determinar la fórmula de F para cada tipo de cuerpo geométrico (considerándolo de masa homogénea).

En los cuerpos de revolución (cilindro, cono, esfera) la fórmula general es

$$F = \frac{1}{2}\omega^2.K.m.r^2$$

K (coeficiente propio para cada tipo de cuerpo).

En la esfera $K = \frac{2}{5} = 0{,}4$

En el cilindro $K = \frac{1}{2} = 0{,}5$

4.° – Momento de inercia

1706. – En Estática hemos definido el MOMENTO diciendo que (374):

Momento de una fuerza es la medida de su acción giratoria, respecto de un punto, de una recta o de un plano.

Y vimos que:

Los momentos estudiados en Estática son de 1er orden (387):

$$m = f.d.$$

1707. – En Mecánica tenemos que, *en general*:

Momento ES UN PRODUCTO DE UN VECTOR POR UNA DISTANCIA.

La forma general de los momentos, es pues:

Momento de 1.er orden: $K.\mathbf{a}.\mathbf{d}$

» » 2.º orden: $K.\mathbf{a}.\mathbf{d}^2$

» » 3.er orden: $K.\mathbf{a}.\mathbf{d}^3$

K (coeficiente, que puede valer "uno") **a** (el vector) **d** (la distancia).

1708. – **Momento de inercia** es el producto $K.\ \mathbf{m}.\mathbf{r}^2$ que en el movimiento de rotación figura en la fórmula

$$F = \tfrac{1}{2}\ \omega^2 . K.\ \mathbf{m}.\mathbf{r}^2.$$

De modo que, llamando I el momento de inercia, tenemos:

$$I = K.\mathbf{m}.\mathbf{r}^2$$

y entonces

$$F = \tfrac{1}{2}\,\omega^2 . I$$

1709. – Para un punto material tenemos:

$$I = \mathbf{m}.\mathbf{r}^2$$

porque

$$K = \text{"UNO"}$$

Para todos los cuerpos teníamos (**1704**)

$$F = \tfrac{1}{2}\omega^2\ \Sigma\ (\mathbf{m}.\mathbf{r}^2)$$

luego

$$I = \Sigma\ (\mathbf{m}.\mathbf{r}^2)$$

1710. – Comparemos dos fórmulas homólogas.

1.ª Energía cinética en las traslaciones:

$$F = \tfrac{1}{2}\ \mathbf{m}.\mathbf{v}^2$$

2.ª Energía cinética en las rotaciones:

$$F = \tfrac{1}{2}\ I.\ \omega^2$$

Donde se ve que:

SE CORRESPONDEN	*En la rotación*	Con	*En la traslación*
	El momento de inercia		La masa
	La velocidad angular		La velocidad lineal

1711. – **Volantes.**- Si tenemos dos ruedas de igual masa e igual diámetro y cuya masa está diferentemente distribuida, una

homogéneamente, y la otra concentrada casi toda en la llanta (fig. 938), tendremos:

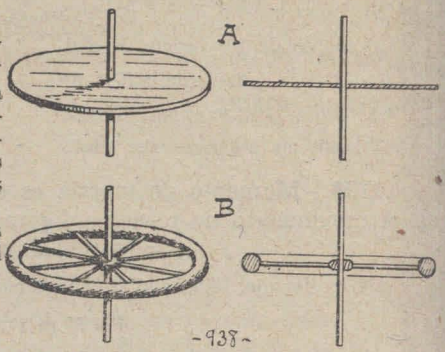
$$I_a < I_b$$

Ia (momento de inercia de **A**).
Ib (momento de inercia de **B**).

Efectivamente en **B** la mayoría de los puntos materiales distan mucho de **X**, mientras que en **A** son pocos los que se hallan en las mismas condiciones.

Si, pues, las dos ruedas giran con la misma velocidad tendremos:

$$F_a = \tfrac{1}{2}\, I_a . \omega^2$$
$$F_b = \tfrac{1}{2}\, I_b . \omega^2$$



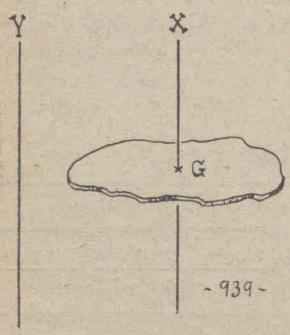
-938-

Fa y Fb (Fuerza viva de **A** *y de* **B**, *respective*).

De modo que: $F_a < F_b$

Si cesa la causa de la rotación de **A** y de **B**, cualquier estorbo hará detener luego a **A**, mientras que para detener a **B** se requiere mucho estorbo.

1712. – **Volantes** son las ruedas que tienen concentrada gran parte de su masa en la llanta.



-939-

Los volantes en las maquinarias desempeñan el papel de ACUMULADORES de *fuerza viva*, debido a la magnitud enorme de su momento de inercia.

Los volantes dan regularidad al funcionamiento de las maquinarias, haciendo que las bielas venzan los *puntos muertos*.

1713. – En todo cuerpo podemos considerar dos clases de momentos de inercia: a) los BARICÉNTRICOS, b) los que se refieren a ejes cualesquiera.

MOMENTO DE INERCIA **baricéntrico** es el que se refiere a un eje de gravedad, **(482)** p. ej: **X** (fig. 939).

Los demás momentos de inercia se refieren a ejes cualesquiera, p. ej: Y.

Símbolos adoptados en este texto: i (momento de inercia baricéntrico). I (momento cualquiera de inercia).

1714. – En los cuerpos geométricos de masa homogénea se puede, por cálculo, llegar a conocer las fórmulas particulares de los momentos baricéntricos de inercia.

Todos tienen la fórmula general

$$i = K\ m.d^2$$

En la tabla siguiente damos los valores más interesantes:

TABLA N°. 23

Momentos baricéntricos de inercia		
FIGURA O CUERPO	EL EJE DE GRAVEDAD	MOMENTO
Círculo	Es perpendicular al círculo	$i = \frac{1}{2}\ m.r^2$
	Es un diámetro	$i = \frac{1}{4}\ m.r^2$
Rectángulo (de lados a y b)	Es paralelo al lado **b**	$i = \frac{1}{12}\ m.a^2$
Cuadrado (de lado a)	Es un eje cualquiera de simetría	$i = \frac{1}{12}\ m.a^2$
Corona cuadrática (lados: a > b)	» » » »	$i = \frac{1}{12}\ m.(a-b)^2$
Corona circular (radios: r > r')	Es un diámetro	$i = \frac{1}{4}\ m.(r-r')^2$
Triángulo isósceles (base: b; altura: h)	Es paralelo a la base	$i = \frac{1}{18}\ m.h^2$
Hexágono regular (lado o radio: r)	Es un eje cualquiera de simetría	$i = m.r^2$
Polígono regular (cualquiera)	» » » »	$i = m.r^2$ (aproximado)
Esfera	Es un diámetro cualq.	$i = \frac{2}{5}\ m.r^2$
Cilindro	Es el eje de figura	$i = \frac{1}{2}\ m.r^2$
Cuboide	Es paralelo a una arista	$i = \frac{1}{2}\ m.\sigma^2$

σ (semidiagonal de la cara atravesada po el eje X).

1715.– Regla de Steiner, PARA CALCULAR UN MOMENTO CUALQUIERA DE INERCIA (fig. 940).

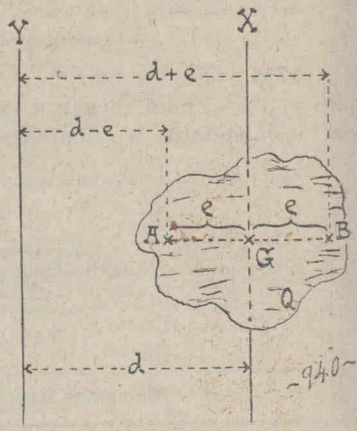
Tengamos que calcularlo para el cuerpo **Q**, con respecto al eje **Y**.

Trazamos el eje de gravedad **X // Y** y suponemos conocido el momento i respecto de **X**.

Descompongamos la masa de **Q** en dos masas iguales ($\frac{1}{2}$m) colocadas respectivamente en los puntos **A** y **B**, equidistantes de **X**.

Llamemos **e** *la distancia* **AG = BG**.

La distancia **e** debe ser tal, que i sea igual a la suma de los momentos de inercia de las dos ($\frac{1}{2}$ m) con respecto a **X**.



Entonces tendremos:

$$i = \tfrac{1}{2}m.e^2 + \tfrac{1}{2}m.e^2 = m.e^2$$

Por otra parte tenemos

$$I = \overbrace{\left|\tfrac{1}{2}\ m\ (d+e)^2\right|}^{\text{momento de B}} + \overbrace{\left|\tfrac{1}{2}\ m\ (d-e)^2\right|}^{\text{momento de A}}$$

$$I = \tfrac{1}{2}\ m\ \underbrace{\left[\ (d+e)^2 + (d-e)^2\ \right]}$$

$$I = \tfrac{1}{2}\ m\ [d^2 + 2d.e + e^2 + d^2 - 2d.e + e^2]$$

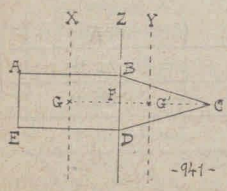
$$I = \tfrac{1}{2}\ m\ (2\ d^2 + 2\ e^2)$$

$$I = m.d^2 + m.e^2$$

pero $m.e^2 = i$

luego $I = i + m.d^2$

EL MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO CON RESPECTO A UN EJE CUALQUIERA, ES IGUAL A SU MOMENTO DE INERCIA RESPECTO AL EJE DE GRAVEDAD PARALELO A AL EJE DADO, MÁS EL MOMENTO DE INERCIA DE SU BARICENTRO CONSIDERADO COMO SI EN ÉL ESTUVIERA CONCENTRADA TODA LA MASA DEL CUERPO.



1716.– La regla de Steiner nos enseña a determinar también el momento de inercia de las figuras y cuerpos descomponibles en porciones de forma geométrica definida (fig. 941).

Queremos calcular el momento de inercia para la fig. **ABCDE** con respecto al eje **Z** (prolongación de **BD**).

Trazamos **X** e **Y** (ejes de gravedad del rectángulo y del triángulo isósceles, respective), de modo que:

$$X // Y // Z$$

En el rectángulo tenemos: (ver TABLA N.° 23)

$$i = {}^1/_{12}\, m.ED^2$$

luego $$I_r = {}^1/_{12}\, m.ED^2 + m.FG^2 = m\,({}^1/_{12}\, ED^2 + FG^2)$$

En el triángulo tenemos:

$$i' = {}^1/_{18}\, m'.CF^2$$

luego $$I_t = {}^1/_{18}\, m'.CF^2 + m'.G'F^2 = m'\,({}^1/_{18}\, CF^2 + G'F^2)$$

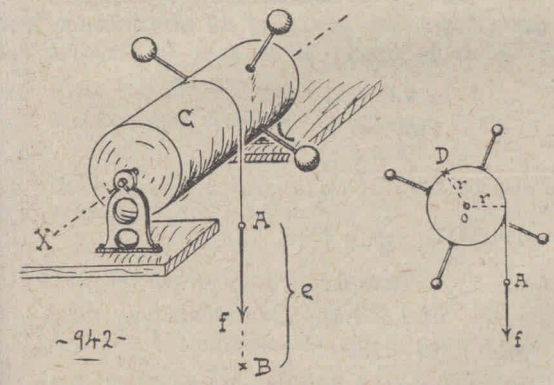
Por lo tanto en la figura **ABCDE**, tenemos:

$$I = m\,({}^1/_{12}\, ED^2 + FG^2) + m'\,({}^1/_{18}\, CF^2 + G'F^2)$$

Ir (momento del retángulo) It (momento del triángulo)

5.° – Relación entre la fuerza motriz y la rotación.

1717. – Movimiento rotatorio engendrado por una fuerza tangencial constante (fig. 942).



-942-

El torno **C** es movido por la fuerza constante **f**.

Su punto de aplicación **A** efectuará un movim. unif^{m}. a c e l e r a d o (**927, 928**).

Un punto cualquiera **D** de la periferia del torno tendrá el mismo m o v i m i e n t o que **A**.

Si al fin de un tiempo **t** el punto **D** tiene adquirida una velocidad angular ω, su aceleración angular, debida a la acción de **f** será:

$$\vartheta = \frac{l\omega}{t}$$

y como **(1631)** $v = \omega.r$ **v** (*velocidad tangencial de* **D**).

luego, por paralelismo de valores tendremos que: $w = \vartheta . r$

w (*aceleración tangencial de* D).

La aceleración tangencial de un punto que gira con movim. unifm.m acelerado es igual a su aceleración angular multiplicada por el radio.

El espacio recorrido por el punto D en su movim. unifm. acelerado será (975):

$$e = \tfrac{1}{2}\, w.t^2 \qquad (1)$$

1718. – Valor del trabajo en la rotación unifm. acelerada. El trabajo efectuado por f (fig. 942), será:

$$T = f.e$$

Sustituyendo e por su valor, conforme a la fórmula (1) tendremos

$$T = f.\ \tfrac{1}{2}\, w.t^2$$

Si suponemos nulo el roce y la resistencia del aire, entonces T es puro trabajo de impulso (1094) y tendremos (1123):

$$T = F$$

Léase: «*Trabajo = Fuerza viva producida*».

Pero sabemos que (1708):

$$F = \tfrac{1}{2}\, I.\omega^2$$

luego

$$f.\ \tfrac{1}{2}\, w.t^2 = \tfrac{1}{2}\, I.\omega^2$$

$$f.w.t^2 = I.\omega^2$$

$$f.w = I\ \frac{\omega^2}{t^2}$$

pero también sabemos que (1717) $\dfrac{\omega}{t} = \vartheta$

y que en este caso (*id.*) $w = \vartheta . r$

p.l.t. tendremos $f.\vartheta.r = I.\vartheta^2$

luego $f.r = I.\vartheta$

Pero (f.r) es el momento estático de f respecto del eje X; tendremos, pues: $M = I.\ \vartheta$

Léase: «*Momento estático de la fuerza motriz = Momento de inercia del cuerpo, multiplicado por la aceleración angular*».

Esta fórmula ha recibido el nombre de **ecuación del movimiento circular** y nos enseña a medir prácticamente el momento de inercia de cualquier sistema giratorio.

1719. – Comparemos dos fórmulas homólogas:

1.º Valor del momento estático en la rotación:

$$M = I.\vartheta$$

2.º Valor de la fuerza motriz, en la traslación:

$$f = m.w$$

Esto nos indica que

	En la rotación		En la traslación
Se corresponden	El momento estático	con	la fuerza motriz
	El momento de inercia		la masa
	La aceleración angular		la aceleración lineal

Ver (1710).

5.º – Masa ficticia

1720. – Al experimentar con la máquina de Atwood hemos dicho que (860-1023):

Podemos considerar que la roldana tiene una masa ficticia concentrada en la llanta, que obra como una masa real con respecto al peso de la pesita adicional P.

Ahora toca demostrarlo:

Efectivamente, acabamos de ver que

$$f.r = I.\vartheta$$

Como r en cada aparato, es una cantidad constante, podemos darle el valor de «uno», y tendremos:

$$f = I.\vartheta$$

Además sabemos que $\omega.r = v$ (1)

luego, aquí tendremos $\omega = v$

Léase: «*Velocidad angular = Velocidad lineal*».

Pero sabemos que $\vartheta = \frac{\omega}{t}$ y que $w = \frac{v}{t}$

p.l.t. $\vartheta = w$

Sustituyamos este valor en (1):

$$f = I.w$$

comparemos con $f = m.w$

En la máquina de Atwood, lo mismo que en cualquier caso homólogo, el momento de inercia de su roldana es una masa ficticia.

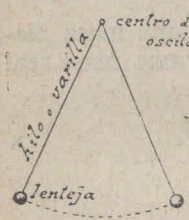
Y como el raciocinio anterior, se hizo considerando como radio «uno» el de la llanta, resulta que:

La masa ficticia de una roldana está concentrada en la llanta, o mejor dicho: en el punto de aplicación de la fuerza motriz.

VI.° - Movimiento pendular

1.° - Teoría del péndulo.

1721. - **Péndulo** es cualquier cuerpo ligado a un punto fijo, en cuyo derredor puede oscilar libremente a impulsos de la gravedad (fig. 943).



-943-

Hay otras formas de péndulo, como veremos luego: pero el que hemos definido, es el aparato denominado así por antonomasia.

1722. - En el péndulo debemos distinguir tres partes:

El **centro de oscilación** o *de suspensión*; la **lenteja** o parte pesada del péndulo; y la **varilla** o hilo que une la lenteja con el centro de suspensión.

1723. - En Mecánica se distinguen dos tipos de péndulo: el real y el matemático.

Real o físico es cualquier péndulo verdaderamente existente, sea de hecho o en potencia.

Matemático (ideal o *simple*) es un péndulo con las siguientes condiciones:

a) Lenteja con masa, pero reducida a un punto material.

b) Hilo inextensible y sin masa.

c) Punto de suspensión sin roce.

d) Péndulo moviéndose en el vacío.

El péndulo matemático, en la práctica es irrealizable; pero podemos al construir péndulos reales, acercarnos sensiblemente a él.

En efecto, una esferita pequeña de metal suspendida de un hilo delgado satisface sensiblemente a las cuatro condiciones.

1724. –ELEMENTOS DE LA OSCILACIÓN DEL PÉNDULO (fig. 944).

Ver (**1666**).

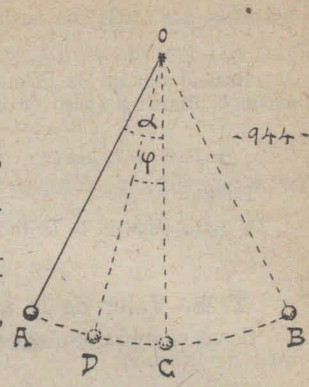
Oscilación simple = recorrido **AB**, o sino **BA**.

Oscilación completa o VAIVÉN = recorrido **ABA**, o sino, recorrido **BAB**.

La OSCILACIÓN COMPLETA consta de dos *oscilaciones simples*, de fase opuesta: la IDA **AB** y la VUELTA **BA**.

Semioscilación simple = recorrido **AC**, o sino **CA**, etc.

Amplitud = ángulo α.



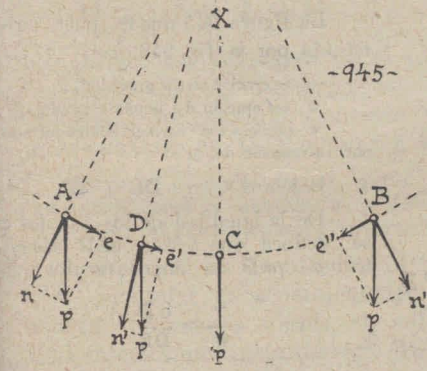
Elongación = distancia angular **DC**, o sea ángulo φ.

Podemos pues decir que "**Amplitud** es la elongación máxima".

Frecuencia = número de vaivenes por cada unidad de tiempo.

Período = tiempo necesario para un vaivén.

La frecuencia y el período son *magnitudes recíprocas*.



1725. – **Funcionamiento del péndulo** (fig. 945).

El peso **p** de la lenteja, queda descompuesto en dos fuerzas:

n (componente normal o estática).

e (componente efectiva o dinámica).

La componente estática queda neutralizada por la reacción del hilo.

Como se ve, la componente efectiva **e** está siempre dirigida hacia la vertical **X**, tratando de llevar la lenteja al vértice **C**.

Además **e** va disminuyendo a medida que la lenteja se acerca a **C**; y al llegar a **C**, se reduce a «*cero*».

1726. – Como consecuencia, el movimiento de la lenteja pertenece a la categoría de los VIBRATORIOS, o de vaivén (**1664**).

Se trata ahora de demostrar que dicho movimiento es HARMÓNICO SIMPLE (**1668 h. 1679**).

1727. – **Valor de (e) en cada péndulo.**

Sabemos que (1021) en cualquier momento:

$$e = p \cdot sen\ \varphi$$

Basándonos en la fórmula de Newton: ($f = m.w$) podremos representar la fuerza **p** (peso de la lenteja) así:

$$p = m.\gamma$$

m (*masa de la lenteja*) γ (*aceleración de la gravedad*)

Luego $e = m.\gamma.sen\ \varphi$

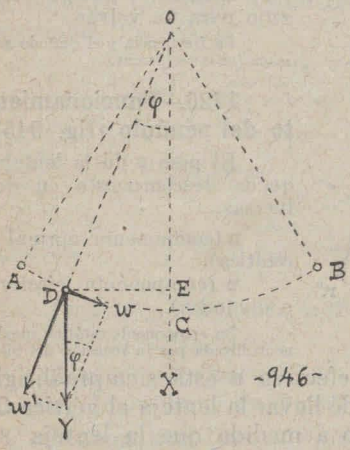
Y para cuando la lenteja está en **A** tendremos:

$$e = m.\gamma.sen\ \alpha$$

1728.–Valor de la aceleración en el movimiento pendular. Como en cada péndulo la masa de la lenteja es constante, la fórmula de Newton

$$w = \frac{f}{m}$$ nos enseña que:

LA ACELERACIÓN EN EL MOVIM. PENDULAR, ES CONTINUAMENTE PROPORCIONAL A LA COMPONENTE EFECTIVA **e**.



La figura 945 queda, pues, sustituída por la fig 946.

γ (aceleración de la gravedad)
w (aceleración d l movim. pendular)
w' (aceleración normal, contrarrestada por la reacción del hilo)

Bajemos **DE** ⊥ **oX**

De la igualdad de los ángulos φ se deduce que *triáng.* **oED** (*semej*) *triáng.* γ**wD** de donde resulta que

$$\frac{\gamma}{w} = \frac{oD}{DE}$$

luego $$w = \frac{\gamma \times DE}{oD}$$

oD = l (longitud del péndulo)

p. l. t. $$w = \frac{\gamma \cdot DE}{l}$$

Cuando la elongación es muy pequeña, el segmento **DE** se confunde con el arco **DC** (cuya longitud llamaremos **s**)

luego $$w = \frac{\gamma \cdot s}{l}$$

Y como lo mismo sucede cuando la lenteja está en **A** (en cuyo caso **s** (elongación) queda sustituida por **a** (amplitud), tendremos que:

Tratándose de oscilaciones de pequeña amplitud: LA ACELERACIÓN AL INICIARSE LA OSCILACIÓN QUEDA INDICADA CON LA FÓRMULA:

$$w = \frac{\gamma . a}{l}$$

1729. – El movim. pendular, de pequeña amplitud es sensiblemente un movim. harmónico simple.

Efectivamente en la fórmula

$$w = \frac{\gamma}{l} . s$$

para cada péndulo tiene como cantidad constante $\frac{\gamma}{l}$

luego puede escribirse así:

$$w = c. s$$

Comparemos esta fórmula con la del movim. harmónico simple (**1677**);

$$\varepsilon' = \omega^2 . s = c. s$$

Luego .... L. Q. Q. D.

1730. – La velocidad en el movim. pendular.

A la inversa de lo que sucede con la aceleración; la velocidad del péndulo comienza siendo nula en **A**, para llegar a su máximo en **C**, y volver a ser nula en **B**.

La razón es obvia, porque, hasta llegar a **C** se van sumando todas las aceleraciones elementales **w**, y desde **C** hasta **B** van restándose de la primera velocidad, por haber invertido su sentido.

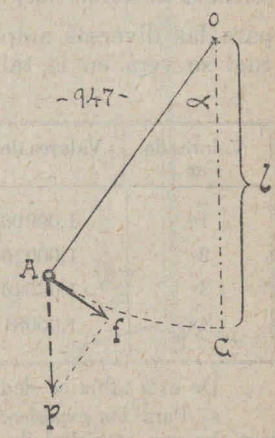
Teniendo en cuenta que el movim. pendular es sensiblemente un movim. *harmónico simple*, su velocidad en cualquier instante será (**1675**).

$$v = k \sqrt{a^2 - s^2}$$

Aquí ω ha sido sustituida por la constante, k propia de cada péndulo.

En el péndulo tenemos:

a (*amplitud*) = longitud del arco **AC**
s (*elongación*) = longitud del arco **DC**



1731. – Valor del período en cada péndulo (fig. 947).

Ya sabemos que en el movim. harmónico simple (**1677**):

$$\varepsilon' = \omega^2 . s$$

que en el péndulo se traduce por

$$w = \omega^2 . s$$

pero como $f = m . w$

luego aquí $f = m . \omega^2 . s$

y como α = elongación máxima tendremos que cuando la lenteja está en **A**:

$$f = m . \omega^2 . a$$

Pero a = arco $CA = l . \alpha$

luego $f = m . \omega^2 . l . \alpha$

pero hemos visto que (**1727**):

e (*o sea*) $f = m . \gamma . sen\ \alpha$

luego $m . \omega^2 . l . \alpha = m . \gamma . sen\ \alpha$

o sea $\omega^2 . l . \alpha = \gamma . sen\ \alpha$

pero sabemos que (**1678**) $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

T (*período*) = Tiempo empleado en un vaivén, o sea: en una oscilación completa.

luego $\dfrac{4\pi^2 . l . \alpha}{T^2} = \gamma . sen\ \alpha$

o sea $\dfrac{4\pi^2}{T^2} = \dfrac{\gamma . sen\ \alpha}{l . \alpha}$

y también $\dfrac{T^2}{4\pi^2} = \dfrac{l . \alpha}{\gamma . sen\ \alpha}$

$$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l . \alpha}{\gamma . sen\ \alpha}}$$

p. l. t. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{\gamma} \dfrac{\alpha}{sen\ \alpha}}$

Pero, cuando la amplitud de la oscilación es muy pequeña, tenemos sensiblemente:

$$\alpha = sen\ \alpha$$

o sea $\dfrac{\alpha}{sen\ \alpha} = 1$ (uno)

de consiguiente $\boxed{T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{\gamma}}}$

ESTA ES UNA FÓRMULA SUMAMENTE IMPORTANTE, QUE NO DEBE OLVIDAR EL ALUMNO.

1732. – Para poder apreciar el grado de exactitud de la fórmula anterior, hay que conocer el valor de la razón $\dfrac{\alpha}{sen\ \alpha}$ para las diversas amplitudes de la oscilación del péndulo, lo cual se verá en la tabla siguiente:

TABLA N°. 24

Valores de α	Valores de $\dfrac{\alpha}{sen\ \alpha}$	Valores de α	Valores de $\dfrac{\alpha}{sen\ \alpha}$
1°	1,00006	5°	1,00127
2°	1,00020	6°	1,00183
3°	1,00046	10°	1,00510
4°	1,00081	30°	1,04720

De esta tabla se deduce que:

a) Para las experiencias escolares puede aplicarse la fórmula anterior aun con amplitud de 4° ó 6°.

b) Para las medidas de precisión efectuadas con el péndulo, no se puede pasar de los 2° ó 3°.

2.° – Leyes del péndulo.

1733. - La fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\gamma}}$ es la síntesis de las CUATRO LEYES DEL PÉNDULO:

1.ª LEY (*del isocronismo del péndulo*). – **No varía el período de oscilación de un pénduio, aunque varíe su amplitud.**

Siempre teniendo en cuenta que la amplitud no sea superior a 2° para experiencias prolijas, y a 4° ó 6° para experiencias escolares.

2.ª LEY (*de las masas*). – **El período de oscilación de un péndulo no depende de la masa** (*o peso*) **de su lenteja.**

3.ª LEY (*de las longitudes*) – **El período de oscilación de los péndulos es proporcional a la raíz cuadrada de su longitud.**

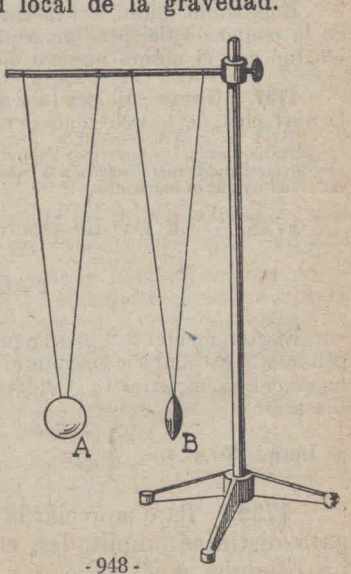
De las leyes 2° y 3° se deduce el siguiente corolario:

COROLARIO (*del isocronismo en péndulos diversos*). – **La ley del isocronismo es aplicable también a péndulos diversos, con tal que tengan la misma longitud.**

4.ª LEY (*ley de la influencia de la gravedad*). – **El período de oscilación de un péndulo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la intensidad local de la gravedad.**

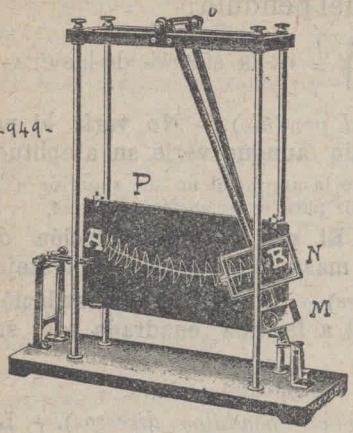
1734. – **Ley de isocronismo.** Fué descubierta por Galileo (reléase el ejemplo citado en **646** h. **648** y en **652.**)

Se comprueba experimentalmente esta ley haciendo oscilar un péndulo con 5° de amplitud, y midiendo su período. El péndulo irá poco a poco reduciendo su amplitud; y se comprobará que el período permanece constante, aun cuando la amplitud llegue a 2°, a 1° y a un ½° o menos.



-948-

1735. – Para que no falle esta experiencia debe evitarse cuanto se pueda la influencia del estorbo del aire, lo cual se obtiene reduciendo el tamaño de la lenteja y haciéndola de plomo, para que pese mucho.



-949-

El aparato de la fig. 948 sirve para poner en evidencia el estorbo del aire.

Las dos lentejas **A** y **B** son de madera. **A** oscila oponiendo su cara al aire; y **B** oscila oponiéndole su perfil.

Las oscilaciones de **A** degradan rápidamente su amplitud. En cambio **B** pierde lentamente la amplitud.

1736. – El péndulo de Hillig (fig 949) sirve para demostrar la ley de isocronismo.

En el marco **N** hay una lámina de acero que remata en una tiza que toca la pizarra **P**.

Antes de soltar el péndulo se desvía y suelta la lámina de acero que vibrará de arriba abajo.

Durante una oscilación del péndulo, la lámina vibrante trazará en la pizarra una línea en ziz-zag que dividirá el arco **AB** en tantas partes cuantas son las vibraciones de la lámina.

En Acústica veremos que «LAS VIBRACIONES DE UNA LÁMINA ELÁSTICA SON ISÓCRONAS AUNQUE CAMBIE SU AMPLITUD.» P. l. t., podemos considerar como unidad de tiempo cada vibración de la lámina.

Repitiendo, pues, la experiencia, pero con una amplitud distinta en la oscilación del péndulo, comprobaremos que la nueva oscilación se efectuó con el mismo número de oscilaciones de la lámina vibrante.

1737. – NOTA.— El péndulo de Hillig sirve especialmente para medir la variación de la velocidad durante la oscilación (**1730**).

Efectivamente, los segmentos determinados por la lámina vibrante sobre el arco **AB** son inversamente proporcionales a la velocidad media que tuvo el péndulo mientras recorría cada uno de dichos segmentos.

1738. – La ley de isocronismo se deduce de la fórmula:

$$\mathbf{T} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{l}{\gamma}}$$

Efectivamente: 2π es siempre una constante; y para un mismo péndulo, l es también constante. Si el péndulo queda fijo en un mismo lugar del globo terrestre, tendremos también que: γ es una magnitud constante.

Luego $\mathbf{T} = c\,\sqrt{\frac{c'}{c''}}$ o sea $\mathbf{T} = constante$

c, c', c'' (diversas constantes)

1739. – Para apreciar la exactitud de la ley de isocronismo para distintas amplitudes, consúltese la siguiente tabla, para un péndulo, cuyo período y frecuencia vale **1** si $\alpha = 1'$.

TABLA Nº 25

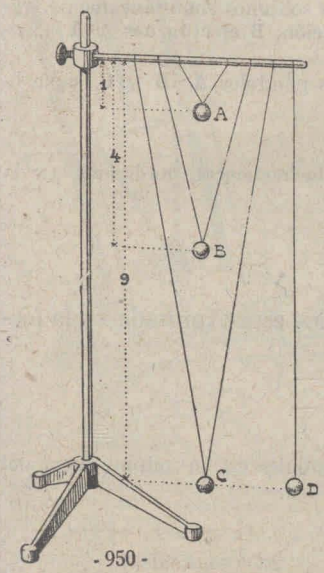
Variación de la exactitud de la ley de isocronismo					
α	Período	Frecuencia	α	Período	Frecuencia
1.º	1,00003	0,99997	5.º	1,00063	0,99921
2.º	1,00011	0,99990	6.º	1,00092	0,99909
3.º	1,00025	0,99977	10.º	1,00253	0,99746
4.º	1,00040	0,99960	30.º	1,02333	0,97726

Recuérdese que:

Período = Tiempo empleado en un vaivén, o sea, en una oscilación completa.

Frecuencia = Número de vaivenes efectuados en una unidad de tiempo.

El concepto del período es recíproco del de frecuencia.



- 950 -

1740. – 2.º Ley de las masas. NO VARÍAN LAS OSCILACIONES DE LOS PÉNDULOS, AL CAMBIAR LA MASA DE SU LENTEJA.

Se comprueba experimentalmente mediante el aparato de la fig. 950.

Los dos péndulos **C** y **D** tienen la misma longitud, luego pueden considerarse como un mismo péndulo repetido.

La esferita **C** es de plomo, y la **D** es de madera ambas del mismo diámetro.

Desviando ambos péndulos igualmente, y soltándolos al mismo tiempo, se verá que sus vaivenes son isócronos.

Sin embargo el péndulo **D** se retrasará algo, debido a la resistencia del aire.

Se evita esta imperfección de la experiencia, dando al cuerpo **D** la forma de lenteja y dejando al **C** la forma de esfera.

En rigor para que la resistencia del aire no estorbe a esta experiencia se requiere que:

$$\frac{s}{s'} = \frac{m}{m'}$$

s, s' (*superficies que oponen a la resistencia del aire las dos esferitas* **C** *y* **D** *respectivamente*). **m, m'** (*masas de* **C** *y* **D** *respectivamente*).

1741. – La ley de las masas se halla implícitamente expresada en la fórmula general:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\gamma}}$$

Efectivamente en ella no figura **m**, a pesar de que para llegar a esta fórmula hubo que basarse en esta otra:

$$f = m.\gamma$$

1742. – 3.° Ley de las longitudes. – EL PERÍODO DE OSCILACIÓN DE LOS PÉNDULOS ES PROPORCIONAL A LA RAÍZ CUADRADA DE SU LONGITUD.

Se comprueba experimentalmente esta ley mediante el aparato de la fig. 950.

La longitud de los tres péndulos **A**, **B** y **C** sigue la razón siguiente

$$\therefore 1:4:9$$

Si desviamos los tres péndulos, y los soltamos simultáneamente, veremos que mientras **C** efectúa una oscilación, **B** efectúa dos y **A** efectúa tres.

De consiguiente la *frecuencia* de los péndulos **A**, **B** y **C** sigue la siguiente razón:

$$\therefore 3:2:1$$

Y como el período es recíproco de la frecuencia, tendremos que la razón de los períodos de **A**, **B** y **C** es:

$$\therefore 1:2:3$$

o sea $$\therefore \sqrt{1} : \sqrt{4} : \sqrt{9}$$

1743. – La ley de las longitudes está expresada en la fórmula:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\gamma}}$$

Efectivamente, estando los tres péndulos en un mismo lugar del Globo, tendremos:

$$\gamma = constante$$

Además siempre tenemos que $2\pi = constante$

luego $$T = c \frac{\sqrt{l}}{c'} = \frac{c}{c'} \sqrt{l} = c''.\sqrt{l}$$

1744. – Corolario. – LA LEY DE ISOCRONISMO ES APLICABLE A PÉNDULOS DIVERSOS, CON TAL QUE TENGAN LA MISMA LONGITUD.

Efectivamente, la ley de las masas nos enseña que la masa de dos péndulos distintos, no influye en acelerar o retardar el período.

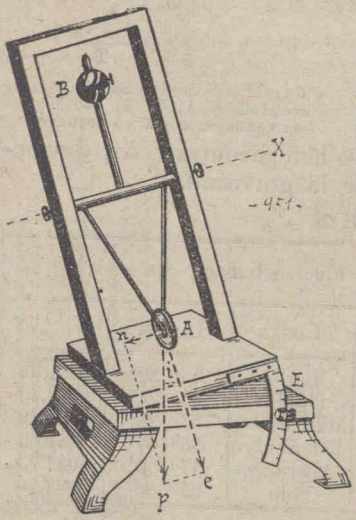
Y si los péndulos tienen la misma longitud tendremos:

$$\frac{T}{T'} = \frac{c.\sqrt{l}}{c.\sqrt{l}} = 1 \text{ (uno)}$$

luego $T = T'$

1745. – 4°.- Ley de la influencia de la gravedad. – EL PERÍODO DE OSCILACIÓN DE UN PÉNDULO ES INVERSAMENTE PROPORCIONAL A LA INTENSIDAD CON QUE ACTÚA LA GRAVEDAD SOBRE SU LENTEJA.

Se comprueba experimentalmente esta ley mediante el péndulo de Mach (fig. 951).



La fuerza real **p** (vertical) queda descompuesta en la normal o estática **n** y en la efectiva **e**.

El movimiento del péndulo no se efectuará conforme al valor de γ sino conforme al valor de γ', porque $p = m.\gamma$

queda sustituído por $e = m.\gamma'$

Tendremos, pues, que

$$\gamma' = \gamma . \cos i$$

El valor de i se lee en la escala **E**

Experimentando con este aparato se verá que:

$$\frac{T}{T'} = \frac{\sqrt{\gamma'}}{\sqrt{\gamma}} \text{ o sea } T\sqrt{\gamma} = T'\sqrt{\gamma'}$$

El contrapeso **B** sirve para variar la longitud efectiva del péndulo, bajando o subiendo dicho contrapeso. De este modo se obtienen oscilaciones más o menos lentas, a gusto y comodidad del experimentador.

1746. – La ley de la influencia de la gravedad, se halla expresada en la fórmula:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\gamma}}$$

Efectivamente en un mismo péndulo tenemos:

$$l = constante$$

y siempre tenemos $2\pi = constante$

luego, siendo la única variable γ, resulta:

$$T = c.\frac{\sqrt{c'}}{\sqrt{\gamma}} = c''.\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

1747. – Valuación de la aceleración de la gravedad. – La máquina de Atwood habría sido un instrumento ideal para la determinación de la aceleración de la gravedad (**1022**), si no hubiese sido tan inexacta en sus medidas (**859**).

En cambio el péndulo con todas las precauciones que se pueden seguir en su construcción, resulta siendo realmente un aparato ideal para esta determinación.

Su uso se basa en la fórmula del péndulo:

$$T = 2\pi\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{\gamma}}$$

de donde se deduce

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{\gamma}$$

o sea $$l = \frac{T^2.\gamma}{4\pi^2}$$

y $$\gamma = \frac{4\pi^2.l}{T}$$

Para usar debidamente esta fórmula, se recurre al sistema C. G. S., midiendo: l en **centímetros** y T en **segundos.**

1748. – Mediante el péndulo se han encontrado los siguientes valores para la aceleración de la gravedad.

Tabla N. 26

Valores de γ (al nivel del mar)

Lugar	Latitud	γ	Lugar	Latitud	γ
Ecuador	0°	978, 07	Berlín	52° 30'	981,33
Buenos Aires	34° 35'	979, 70	Dublín	53° 21'	981,40
Madrid	40° 24'	980, 07	Mánchester	53° 29'	981,42
Latitud 45°	45°	980, 66	Edimburgo	55° 57'	981,62
París	48° 50'	981, 01	Aberdeen	57° 9'	981,73
Greenwich	51° 29'	981, 24	Polo	90°	983,26

1749. – Para culcular γ al nivel del mar en función de la latitud, podemos aplicar la fórmula de Helmert:

$$\gamma = \gamma_0.(1 + 0{,}00531.\,sen\,\Phi)$$

Φ (*latitud*) γ_0 (*valor de γ en el Ecuador*)

Esta fó mula está su eta a vari ciones, puesto que en una misma latitud y al nive del mar, se obtienen diversos valores según los lugares (variando por la proximidad de las montañas, y según que la medición se efectúe en el continente o en el océano, y aun en diversos puntos del continente o del océano).

1750. – Para calcular γ en función de la altura, aplicamos la siguiente fórmula:

$$\gamma_h = \frac{\gamma}{0{,}0002\,h}$$

γ_h (*valor de* γ *a una altura* **h**)
γ (*valor de* γ *al nivel del mar*).

1751. – Péndulo que marca los segundos. – Apliquemos la fórmula:

$$l = \frac{T^2 . \gamma}{4\,\pi^2}$$

Dando a **T** el valor de *1 seg.*, obtenemos

$$l = \frac{\gamma}{4\,\pi^2} = \frac{\gamma}{39{,}4784} = 0{,}02534\ \gamma\ .$$

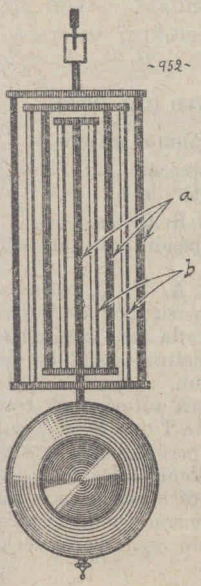
Para un punto del globo en el que γ = 980 cm | seg tendremos

$$l = \text{cm } 24{,}83$$

1752. – Péndulo cuya oscilación simple dura 1 seg.

En la fórmula del péndulo tenemos que **T** representa el tiempo necesario para un *vaivén*, o sea para una *oscilación completa*.

Y como *1 osc. compl.* = *2 osc. simples* tendremos que si una oscilación simple dura *1 seg;* la oscilación completa dura *2 seg.*



De allí que **T** = 2 seg.

$$\text{p. l. t.} \quad l' = \frac{2^2 . \gamma}{4\,\pi^2} = \frac{\gamma}{4\,\pi^2} = 4l$$

l (longitud del péndulo cuya OSCILAC. COMPLETA dura 1 seg).

l' (longitud del péndulo cuya OSCILAC. SIMPLE dura 1 seg).

1753. – El péndulo en los relojes. La conclusión a que hemos llegado *(de poder valuar la longitud del péndulo para un período dado)* ha servido de base a la regulación de los relojes (**127** y **128**).

Y como los cambios de temperatura dilatan y contraen la varilla del péndulo, hubo que idear los PÉNDULOS COMPENSADORES (fig. 952), cuya teoría se debe a Harrison.

Las varillas oscuras **a** son de hierro, y las claras **b** de zinc.

Existiendo entre la dilatación del hierro y la del zinc (a igualdad de incremento de temperatura) la relación:

$$\frac{f}{z} = \frac{12}{29}$$

deberá darse a la suma de las longitudes de las varillas **a** y de las longitudes de las **b**, una proporción inversa a la anterior, a saber:

$$\frac{\Sigma\, a}{\Sigma\, b} = \frac{29}{11}$$

NOTA. - En el caso de nuestra figura deben sumarse las longitudes de tres varillas **a**, y de dos **b**, o sea, siempre se sumarán las de un sólo costado y la del centro.

1754. – Péndulo compuesto. – Ya vimos que los péndulos *reales* (denominados «COMPUESTOS») no son ideales, porque su uso está sujeto a errores fundamentales: *roce en el punto de suspensión, estorbo del aire* y especialmente: el MOMENTO DE INERCIA DEL SISTEMA, que no ha sido tomado en cuenta en todo el estudio anterior, puesto que supusimos que toda la masa del péndulo estuviera concentrada en una lenteja puntiforme.

El roce del punto de suspensión y el *estorbo del aire* pueden reducirse a su ínfima expresión, de modo que prácticamente los podemos considerar como nulos.

En cambio el momento de inercia del sistema (varilla y lenteja) varía notablemente según la forma y material adoptados en su construcción.

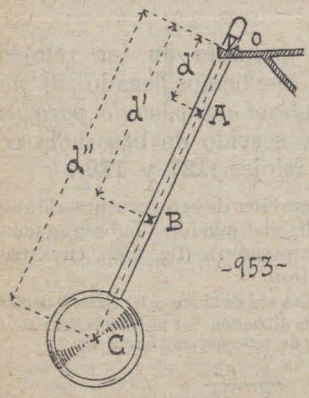
De aquí que sea necesario sustituir la fórmula del péndulo simple:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\gamma}}$$

por una propia para el péndulo compuesto.

1755. – FÓRMULA DEL PÉNDULO COMPUESTO (fig. 953)

Consideremos el péndulo descompuesto en sus puntos materiales.



-953-

Un punto **A** representa un péndulo que oscila al rededor de **o**.

Idem los puntos **B**, **C**, etc.

La longitud del péndulo **A** es *d*; la de **B** es *d'*, etc.

Si cada péndulo **A**, **B**, **C**, estuviese libre, oscilaría con su período propio (conforme a la ley de las longitudes).

Pero como los distintos péndulos elementales forman un conjunto rígido, este conjunto (o sea el péndulo real) adquirirá un período **T** que es el resultante de todos los períodos elementales.

Unos péndulos elementales (como el **A**) se verán forzados a oscilar más lentamente que si estuvieran sueltos; y otros (como el **C**) deberán oscilar más acelerados.

Basándose en las consideraciones anteriores se llega a la siguiente fórmula:

$$l = \frac{I}{m.\ d}$$

l (longitud del péndulo simple, sincrónico de un péndulo compuesto determinado).
I (momento de inercia del péndulo compuesto, con respecto al eje de suspensión).
m (masa del péndulo compuesto)
d (distancia del centro de gravedad del péndulo compuesto, al eje de suspensión).

Sustituyendo, pues, este valor en la fórmula: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\gamma}}$

obtenemos $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m.\gamma\ d}}}$ que es la fórmula del péndulo compuesto.

y como $m.\gamma = p$ (medido en dinas)

tendremos también $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{p.d}}$ **p** (*peso del péndulo, medido en dinas*).

1756. – Centro deos cilación del péndulo compuesto (fig 954). – Llámase así a un punto **o** colocado sobre la línea **Go** o sobre su prolongación, de modo que el segmento **oo'** sea igual a la longitud l del péndulo simple isócrono.

1757. – Determinación del momento de inercia de un cuerpo cualquiera (fig. 955).

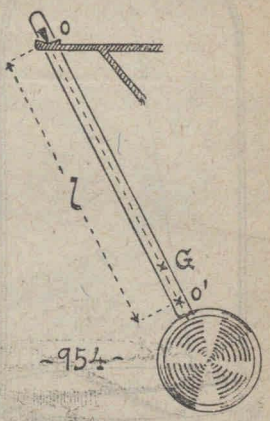
Supongamos que se trate de un volante.
Su centro de gravedad **G** estará en el centro de la figura.

Suspendemos el volante de un punto cualquiera **o** y lo hacemos oscilar, midiendo su período **T** de oscilación.

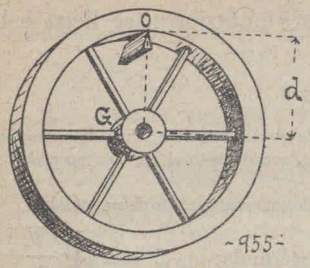
Aplicando la fórmula del péndulo compuesto.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m.\ \gamma.p}}$$

obtenemos $I = \frac{T^2.m.\gamma.d}{4\pi^2} = 0{,}025330\ T.m.\gamma.d$



954



Este momento de inercia **I** es el que tiene el volante con respecto al eje **o** de suspensión.

Para determinar el momento de inercia, con respecto al centro **G** del volante aplicaremos la regla de Steiner **(1715)**:

$$I = i + m \cdot d^2$$

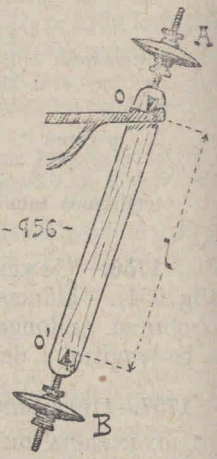
de donde resulta: $i = I - m \cdot d^2$

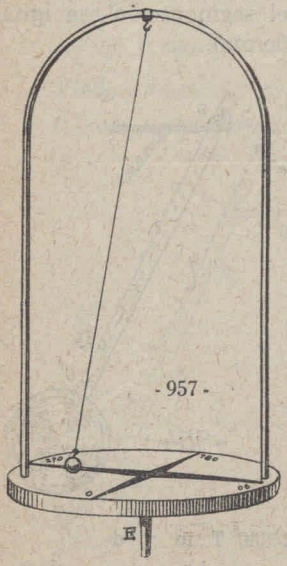
1758. – PÉNDULO REVERSIBLE DE KÁTER.

Basándose en los datos que preceden, Huyghens planteó la siguiente regla:

El eje de suspensión y el centro de oscilación de un péndulo compuesto, son reversibles.

Esto significa que: NO VARÍA EL PERÍODO DE UN PÉNDULO COMPUESTO, AUNQUE SE INVIERTA SUSPENDIÉNDOLO DE SU CENTRO DE OSCILACIÓN.





En esta propiedad se basó Káter en 1818 para idear su péndulo reversible (fig. 956).

Las dos cuchillas **o** y **o'** son fijas. Las dos lentejas **A** y **B** pueden acercarse o alejarse de las cuchillas mediante tuercas de seguridad.

Para graduar el péndulo se hace oscilar suspendiéndolo sucesivamente de **o** y **o'**; y variando la posición de las lentejas hasta obtener el isocronismo de ambas clases de oscilaciones; o sea;

$$T = T'$$

T (*período del péndulo, cuando está suspendido de* **o**)
T' (*período del péndulo, cuando está suspendido de* **o'**)

Entonces tendremos:

$$oo' = l$$

l (*longitud del péndulo simple, isócrono con el de Káter*)

1759. - Plano de oscilación del péndulo.

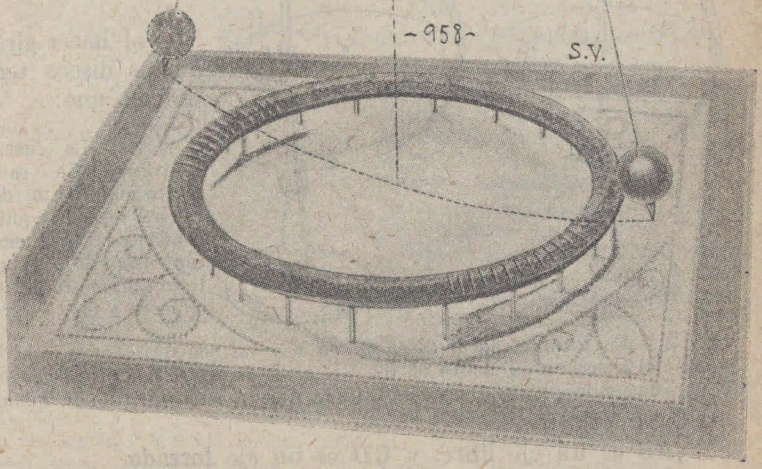
EL PÉNDULO OSCILA CONSTANTEMENTE EN UN MISMO PLANO.

Esto significa que el ángulo **AoB** (fig. 946) permanece sobre el mismo plano inicial.

Se comprueba mediante el péndulo de Foucault (fig 957).

Colocado el aparato sobre un centrifugador (**1691**), y haciendo oscilar el péndulo, se notará que, aunque el aparato gire horizontalmente, el péndulo no cambiará de orientación en sus oscilaciones.

1760.- EXPERIENCIA DE FOUCAULT (fig. 958). Convencido Foucault de la propiedad anterior la aprovechó en 1851 para demostrar la rotación de la Tierra.



Con este fin suspendió un péndulo de m. 67,24, de la cúpula del Panteón, con un dispositivo inferior conforme se indica en la figura.

El período del péndulo fué de *seg. 16,4.*

La púa en que remataba la lenteja, fué trazando rayas en la arena del aro horizontal; de modo que se pudo comprobar que a cada vaivén el péndulo se iba desviando APARENTEMENTE de su plano inicial.

En realidad el péndulo permanecía en el plano inicial; pero la Tierra, que giraba, iba haciendo cambiar de dirección los diámetros del aro.

Con la experiencia de Foucault se puso en evidencia la rotación de la Tierra.

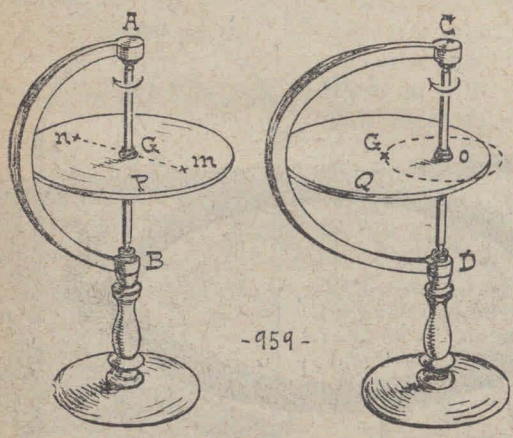
EN LOS LABORATORIOS DE FÍSICA SE SUSTITUYE LA ROTACIÓN DE LA TIERRA (que es demasiado lenta) POR LA DEL CENTRIFUGADOR.

VII.º - Giroscopio

1.º - Ejes libres, en la rotación.

1761. - Si disponemos de dos aparatos como los de la fig. 959, de modo que el eje **AB** pase por **G** y el eje **CD** no pase por **G**; y de modo que:

$$AB \perp P \text{ y } CD \perp Q$$



-959-

al hacer girar ambos discos tendremos que:

1.º - La fuerza centrífuga de cada punto material **m** (del disco **P**) queda equilibrada por la fuerza centrífuga de un punto **n**, diametralmente opuesto a él.

2.º- En cambio, en el disco **Q** no hay tal contrarresto; y toda la masa del disco actúa sobre el eje **CD** *como si estuviera concentrada en* **G**, produciendo por su fuerza centrífuga una tracción que tiende a combar el eje hacia **G**.

AB es un eje **libre**, y **CD** es un eje **forzado.**

1762. - En Mecánica superior se demuestra que todo cuerpo (por irregular que sea) posee como mínimum tres EJES LIBRES mutuamente perpendiculares.

En el **cuboide** (paralelepípedo rectangular) los tres EJES LIBRES son sus EJES DE SIMETRÍA (*ver fig. 308*).

En un **cilindro** recto son EJES LIBRES sus *ejes de simetría*, a saber a) el eje de revolución; b) todos los diámetros del círculo que se obtiene al efectuar en el cilindro una sección mediante el plano basilar de simetría.

En la **esfera** todos los diámetros son EJES LIBRES.

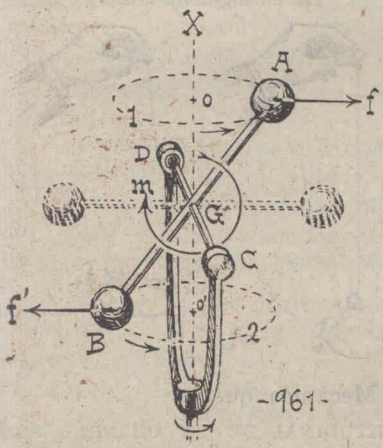
1763. - Del concepto de EJE LIBRE se deduce que:

Cuando un cuerpo gira sobre un EJE LIBRE, dicho eje conserva su dirección inicial, a no ser que intervenga una fuerza extraña, que tienda a desviarlo.



Este principio se demuestra experimentalmente mediante el GIROSCOPIO DE BOHNENBERGER (fig. 960).

Consta de un volante montado sobre los tres anillos de la suspensión Cardán (**1231**), y al que se imprime una rotación veloz, mediante un hilo que se arrolla a su eje.



1764. - No todos los *ejes de gravedad* (**482**) son ejes libres.

Si colocamos sobre el centrifugador el aparato de la fig. 961, y lo hacemos girar, dando al balancín **AB** una inclinación inicial **AGX**, tendremos que el eje inicial de giro de dicho balancín será **X**.

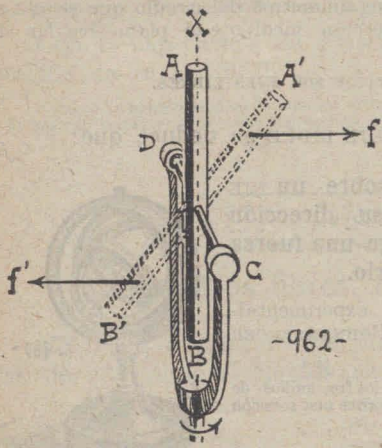
X es uno de los infinitos ejes de gravedad del balancín.

Pues bien: al girar verticalmente el balancín, sus dos esferas extremas **A** y **B** recorren las trayectorias circulares horizontales **1** y **2**, engendrándose en consecuencia las dos fuerzas centrífugas **f** y **f'** mutuamente paralelas e iguales (en el caso de ser **A** y **B** de igual masa).

El sistema **f**, **f'** es un PAR (**412**) cuyo momento **m** desvía el balancín de su inclinación primitiva, hasta darle la posición horizontal.

1765. – Lo que dijimos de la fuerza centrífuga engendrada por la traslación circular de las masas de **A** y **B**, debe aplicar sea cualquiera de los puntos materiales de la barra que une entre sí a dichas esferas.

Por lo tanto el fenómeno se produce también cuando usamos un balancín cilíndrico, sin contrapesos extremos.



El *eje longitudinal* del cilindro largo es un EJE LIBRE **inestable.**

Ejes **inestables** son los que no ofrecen resistencia al desvío de su dirección inicial.

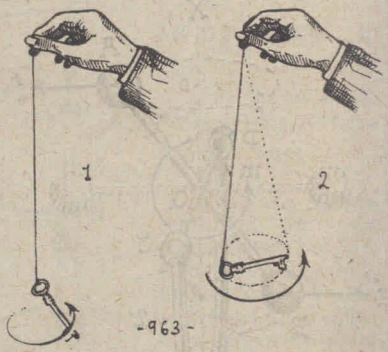
Ejes **estables** son los que se oponen más o menos intensamente a desviarse de la dirección inicial.

En la esfera, todos los diámetros son EJES LIBRES **estables.**

1766. – EJES LIBRES **estables** E **inestables.** - Si sustituimos el balancín de la fig. anterior por un cilindro (fig. 962), y damos al cilindro la posición vertical; al hacer girar verticalmente el sistema, tendremos que el *eje inicial de giro* **X** será un EJE LIBRE.

Pero basta cualquier fuerza extraña, aún mínima, (p. ej: una ráfaga de viento) para desviar el cilindro de su primera posición; y entonces se engendra el par f, f' a que nos hemos referido anteriormente.

De consiguiente:



1767. – Se demuestra en Mecánica que:

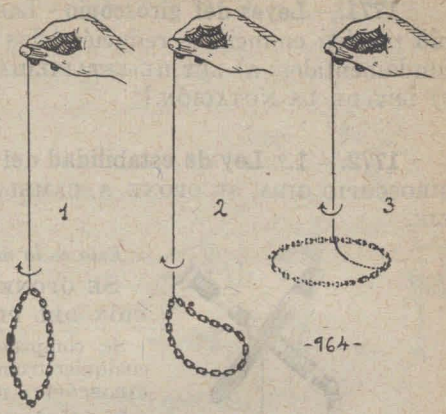
PARA QUE EL EJE LONGITUDINAL DE UN CILINDRO SEA ESTABLE SE REQUIERE QUE:

$$l < 0{,}869\ r$$

l (largo del eje longitudinal) r (radio del cilindro)

1768. – La experiencia de hacer girar una llave colgada de un hilo, para que de su posición inicial (vertical) adquiera sucesivamente la inclinada y la horizontal (fig. 963), se basa en la propiedad de los *ejes libres* INESTABLES.

Lo mismo dígase cuando se sustituye la llave por una cadena a fuer de collar (fig. 964).



Primero se abre el collar, por la fuerza centrífuga como en el caso de los aros elásticos (1693); luego comienza a erguirse hasta adquirir la posición horizontal y la forma circular con centro de giro en el centro del aro.

2.° – Giroscopios y Giróstatos.

1769. – **Giroscopios** son aparatos que constan de un volante denominado TORO que gira velozmente sobre un eje sostenido en forma muy diversa, por soportes que se prestan al estudio de las leyes referentes a los ejes *libres* y *forzados*.

Giróstatos son aparatos análogos a los giroscopios, que se usan:

a) Para demostrar la rotación de la Tierra, basándose en la propiedad de los ejes libres estables.

b) Para obtener alguna ventaja técnica de dicha propiedad.

Dada su finalidad, son muy variados los tipos de giroscopios y giróstatos, como se puede observar en las fig. 960 y 965 h. 970.

1770. – En los giroscopios, siempre el eje es perpendicular al plano del toro, tanto cuando el eje es libre, cuanto cuando el eje es forzado.

Giroscopio **simétrico** es el que gira sobre un eje libre.

Giroscopio **disimétrico** o **asimétrico** es el que gira sobre un eje forzado.

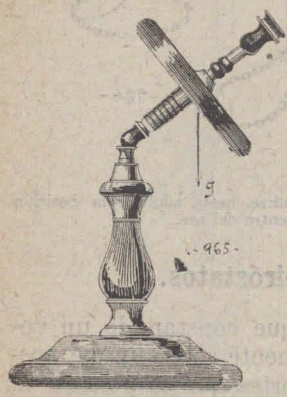
El giroscopio es **centrado** cuando el plano baricéntrico de la *parte móvil*, perpendicular al eje **AB**, pasa por el centro **O** de suspensión.

Es **descentrado** en caso contrario.

El giroscopio es SIMÉTRICO y CENTRADO cuando O coincide con G.

1771. – Leyes del giroscopio - Las propiedades del giroscopio pueden enunciarse reduciéndolas a tres principios o leyes fundamentales: a) LEY DE ESTABILIDAD, b) LEY DE PRECESIÓN, c) LEY DE LA NUTACIÓN.

1772. – 1.° Ley de estabilidad del giroscopio - CUANDO EL GIROSCOPIO GIRA, SE OPONE A CAMBIAR LA DIRECCIÓN DE SU EJE.



Esta pesa *descentra* el giroscopio corriendo su baricentro hacia A o hacia B, según que se aplique en uno u otro extremo.

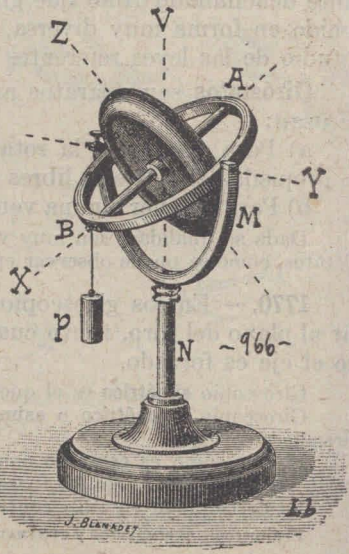
Esto es lo mismo que decir que:

SE OPONE A CAMBIAR LA INCLINACIÓN DEL PLANO DE SU TORO.

Se comprueba experimentalmente con cualquier trompo o peonza y con la PEONZA GIROSCÓPICA DE SCHMIDT (fig. 965).

Se entiende que para que la peonza venza la fuerza g de la gravedad se requiere que gire VELOZMENTE, puesto que así su momento rotor es intenso.

Como en los GIROSCOPIOS SIMÉTRICOS CENTRADOS la fuerza g no tiende a inclinar el eje de giro, para comprobar con ellos la ley de estabilidad, se recurre a una pesa aplicada al extremo de dicho eje (fig. 966)



1773. – La estabilidad giroscópica se halla explotada en la vida práctica en diversas formas:

La bicicleta se equilibra debido a sus dos ruedas, que son dos giróstatos.

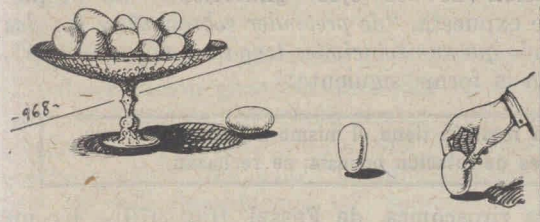
El juego del trompo o peonza se basa en la estabilidad giroscópica.

Igual fundamento tiene el hacer bailar la moneda sobre la mesa colocándola verticalmente e imprimiéndole una rápida rotación con los dedos índice y pulgar.

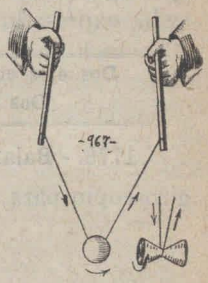
Se prueba si un huevo cocido es duro o no, haciéndolo girar como se indica en fig. 968. Si no es duro su masa interna no adquiere la velocidad que pretendimos darle con el impulso aplicado a su cáscara; luego...

El juego del diábolo (fig. 967) está basado en el mismo principio de la peonza.

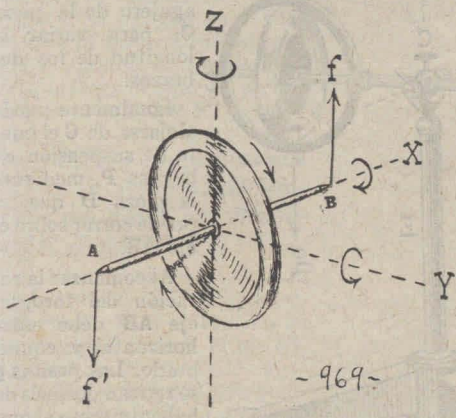
La veloz rotación que se imprime a los proyectiles, tiene por fin impedir que su eje longitudinal deje de coincidir con la trayectoria.


-968-




-967-

El tren *mono-riel* obtiene su estabilidad mediante potentes giróstatos.



-969-

2.° – **Ley de precesión** (fig. 969). – Si a un volante que gira sobre el eje **X** se le aplica un par de fuerzas **f**, **f'** que tienda a hacer desviar el eje de giro **AB** con una rotación sobre el eje **Y**, perpendicular al eje **X**; se producirá en el volante una reacción giratoria sobre un tercer eje **Z** perpendicular a **X** y a **Y**.

A saber:

El eje de giro **AB** pretenderá ir a colocarse sobre el eje **Y**.

La fuerza de reacción que tiende a colocar el eje **AB** sobre **Y**, se denomina **reacción giroscópica**.

1774. – El movimiento que efectúa el giroscopio con intento de ir a colocar su eje sobre **Y** recibe el nombre de **precesión**.

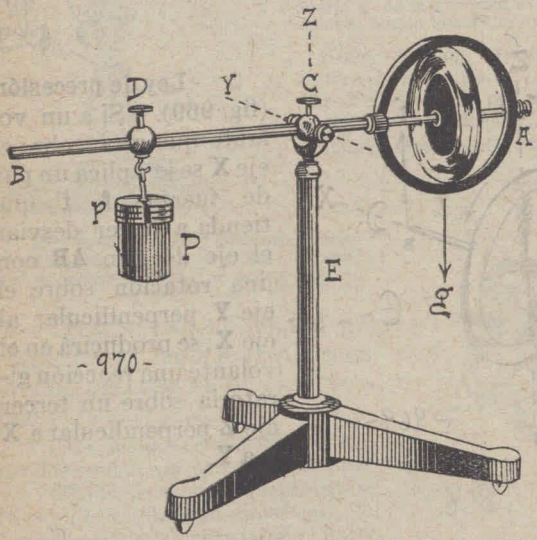
Para calcular el sentido de la precesión, hay que saber que:

El EJE **AB** TIENDE A COLOCARSE SOBRE **Y** EN TAL FORMA QUE COINCIDA EL SENTIDO DE LAS DOS ROTACIONES: la que tenía el volante y la que pretendió introducir el par de fuerzas en el aparato.

1775. - Atracción de los ejes giratorios. – La propiedad anteriormente expuesta, "*de pretender sobreponerse los dos ejes* **AB** *e* **Y** *de modo que sus rotaciones tengan el mismo sentido*", se ha expresado en la forma siguiente:

> **Dos ejes cuya rotación tiene el mismo sentido, se atraen.**
> **Dos ejes de rotación opuesta, se rechazan.**

1776. - Balanza giroscópica de Fessel (fig. 970). – Es un giroscopio para estudiar la precesión.



El eje **AB** puede correrse dentro del agujero de la pieza **C**, para variar la longitud de los dos brazos.

Igualmente puede alejarse de **C** el punto de suspensión de la pesa **P**, mediante la pieza **D** que se puede correr sobre el eje **AB**.

Al comenzar la rotación del toro, el eje **AB** debe estar horizontal y equilibrado. Las pesitas **p** se retiran después de haber impreso el movimiento giratorio en el toro. De este modo se obtiene el desequilibrio.

Al retirar las pesitas **p**, la fuerza **g** de gravedad trata de inclinar el eje **AB**, y entonces se produce el fenómeno de la precesión.

Como al girar horizontalmente el sistema, se va desviando también horizontalmente el eje **Y**, nunca llega el eje de giro **AB** a colocarse sobre el eje de torsión **Y**.

De aquí que la precesión sea continua.

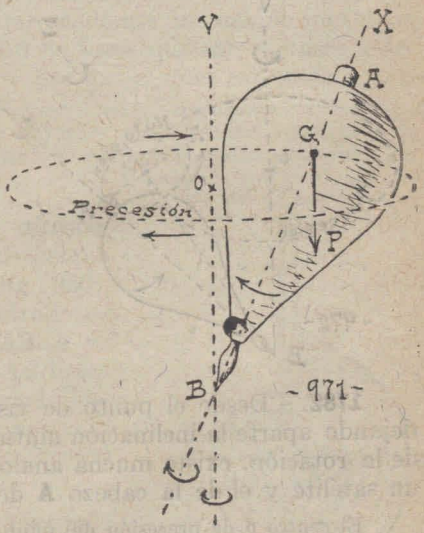
NOTA. — Aunque aquí la fuerza g no constituye de por sí un *par de fuerzas* forma un sistema *giratorio* (420) con la ligadura que el eje **AB** tiene en **C**: y ya sabemos que todo sistema giratorio es equivalente a un *par* (431).

1777. – Cono de precesión.– Para simplificar la explicación, hemos definido la precesión basándonos en su primera reacción alrededor de un eje **Z**, perpendicular a los dos ejes **X** e **Y**.

SIN EMBARGO LA PRECESIÓN ES UN FENÓMENO MÁS COMPLEJO:

La reacción giratoria alrededor de **Z** se suma geométricamente (**318**) con la acción giratoria del par **f**, **f'**, dando una resultante, que sumada a su vez con reacciones provocadas sucesivamente, da como último resultado un movimiento del eje **AB**, describiendo una superficie cónica alrededor de un eje **V** con el que forma un ángulo tanto más agudo, cuanto mayor es la velocidad del giroscopio ver (fig. 966).

Este cono puede observarse bien mediante el giroscopio de la fig. 966, en el cual el arco **M** puede girar sobre el eje **V**, puesto que tiene un perno que juega libremente dentro del soporte hueco **N**.



1778. – La peonza nos ofrece el ejemplo más sencillo del CONO DE PRECESIÓN (fig. 971).

Si se compara el sentido de la rotación del trompo (sobre el eje **X**) y el sentido de su precesión (sobre el eje **V**), se verá que:

En el trompo y en cualquier objeto análogo (como el de la figura 965) la precesión tiene el mismo sentido que la rotación.

En cambio en el caso de la fig. 966, la rotación y la precesión tienen sentido opuesto.

De aquí la regla siguiente:

a) Si el par de fuerzas trata de alejar el eje de giro **AB** del eje **V**, la precesión tiene el mismo sentido que la rotación.

b) Si el par trata de acercar **AB** al eje **V**, la precesión tiene sentido opuesto al de la rotación.

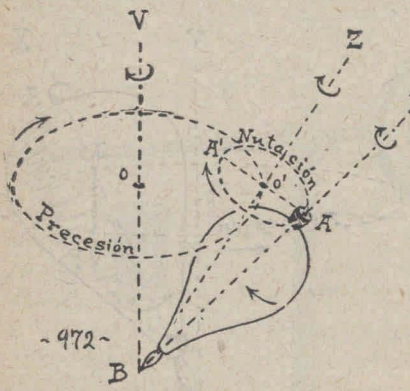
1779. – Aquí, en contraposición a lo que podíamos suponer basándonos en la "atracción de los ejes de giro" (**1775**), tenemos que asentar que:

> **Dos ejes de rotación, que se ven obligados a alejarse, reaccionan tratando de adquirir el mismo sentido en su rotación.**
> y viceversa: **Dos ejes... forzados a acercarse...**

1780. – 3.° – **Ley de nutación.** – Cuando disminuye notablemente la rotación de un giroscopio, aparece otro fenómeno: EL GIROSCOPIO CABECEA, ADQUIRIENDO UN BALANCEO EN SU PRECESIÓN.

Este balanceo ha recibido el nombre de **nutación.**

La nutación existe siempre que hay precesión; pero cuando el toro gira velozmente, es muy poco perceptible.



1781. – Examinando con detención el movimiento de la peonza cuando aparece la nutación, se verá que (fig. 972):

EL EJE **AB** DE GIRO NO COINCIDE CON LA GENERATRIZ **Z** DEL CONO DE PRECESIÓN; SINO QUE DESCRIBE UN CONO ELÍPTICO ALREDEDOR DE ESTA RECTA.

Es este el **cono de nutación**, en el que el diámetro mayor **AA'**, de su base se conserva sobre el plano del ángulo **VBZ**

1782. – Desde el punto de vista de una comparación y dejando aparte la inclinación mutua de las órbitas y el sentido de la rotación, existe mucha analogía entre el movimiento de un satélite y el de la cabeza **A** del trompo.

El centro **o** de precesión del punto **A**, queda representado por el Sol; el centro **o'**, de nutación, representa un planeta cualquiera; y la cabeza **A** del trompo representa uno de sus satélites.

1783. – DESVÍO DEL EJE **AB** DE SU PRIMERA POSICIÓN. – Cuando un trompo simétrico inicia su rotación en la posición vertical, no admite precesión; puesto que la fuerza **g** tiene por línea de acción el eje **X**, prolongación del **AB**.

Pero como su forma de equilibrio es *inestable* basta cualquier estorbo debido al roce de su púa, o la resistencia del aire para que su eje de giro **AB** tienda a desviarse de la vertical **V**. – Al primer desvío se sigue el efecto de la gravedad, que va abriendo cada vez más el ángulo **XBV** a medida que la rotación del trompo va haciéndose más lenta.

Un giroscopio simétrico centrado como el de Bohnenberger (fig. 960), no sufre el influjo de la gravedad, sea cual fuere la inclinación de su eje de giro **AB**.

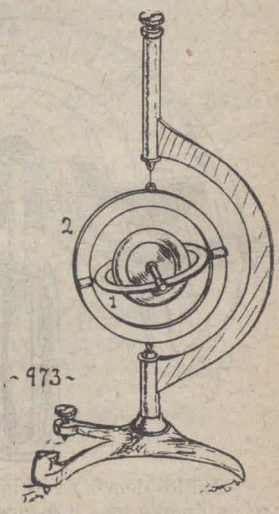
Pero como en la mayoría de los casos, el baricentro real no coincide perfectamente con el baricentro aparente (**457**), se produce también en la generalidad de estos giroscopios la precesión, aunque muy cerrada y lenta.

El solo roce de los extremos del eje **AB** en sus cojinetes (cuando el toro está inclinado) ya es causa de una acción asimétrica sobre él, a la que se sigue forzosamente la *reacción giroscópica*, que es la causante de la precesión.

1784. – Giroscopios eléctricos. – Para evitar la disminución de la velocidad, que forzosamente debe producirse en los giroscopios que se hacen girar mediante un envión inicial, se ha recurrido a la construcción de toros que son motores eléctricos sostenidos en su soporte por dos pivotes extremos.

Entre los aparatos de toro electro-motor podemos citar el GIRÓSTATO DE TROUVÉ al que se puede imprimir una velocidad constante, de más de **300 rev** | **seg**; y el de FOUCAULT, (fig 973) que es una variación del de Trouvé.

1785. – Orientación del giroscopio. – Dejando libre un giroscopio eléctrico de tres aros (tipo fig. 960), simétrico y sensiblemente centrado, se ve que poco a poco su eje **AB** se va desviando de la posición inicial hasta colocarse paralelo al eje **NS** de la Tierra, y en forma tal, que ambas rotaciones (la del toro y la de la Tierra) tienen el mismo sentido.



Se cumple aquí la regla de «ATRACCIÓN DE LOS EJES DE ROTACIÓN» (**1775**).

Esta propiedad del giroscopio, que es una forma de manifestarse la precesión, ha sido explotada en la construcción de giróstatos con fines científicos o técnicos relacionados con la orientación.

Citaremos el GIRÓSTATO DE FOUCAULT y la BRÚJULA GIROSTÁTICA DE AUSCHUTZ.

1786. – **Giróstato de Foucault** (fig. 973). – Es simétrico y centrado.

El anillo cardánico **2** asienta en su cojinete inferior cónico mediante un pivote, y en su parte superior queda suspendido por un hilo sin torsión.

Si mediante los tornillos compensadores se corre el centro de gravedad del giróstato a su centro de figura, será insensible a la atracción, y carecerá, p. l. t., de precesión.

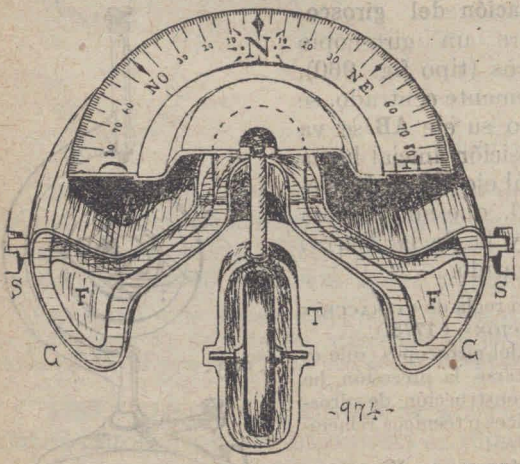
Así graduado el giróstato, si se le hace girar colocando su eje **AB** en dirección de una estrella determinada, permanecerá en dicha posición mientras dure su rotación.

Cambiará, pues, el eje **AB** su inclinación con respecto a la vertical del lugar en forma análoga a la desviación del péndulo de Foucault (**1759**); y a las 24 horas le hallaremos en al misma dirección inicial, con respecto a dicha vertical.

El giróstato de Foucault, sirve, pues para demostrar la rotación de la Tierra como el péndulo homónimo.

1787. – Si en la experiencia anterior se descentra el giróstato habrá precesión debido a la gravedad, y entonces el eje **AB** describirá el cono correspondiente, cuyo eje será la recta que va del giróstato a la estrella en referencia.

El giróstato de Foucault se descentra mediante tornillos de compensación o mediante una pesita colocada como se indicó en la fig. 966.



1788. – Si se deja fijo el anillo **2** y se orienta el aparato de modo que el eje **AB** pueda desviarse sobre el *plano meridiano*, entonces dicho eje irá inclinándose hasta orientarse como se indicó en **1785.**

La orientación, sensiblemente paralela al eje de la Tierra se obtendrá sólo cuando la pesita desiquilibradora es ínfima.

En los demás casos la dirección del eje **AB** formará con el eje terrestre un ángulo más o menos abierto según la intensidad de la pesita **p**.

1789. – Si se deja suelto el anillo **2** y se fija el anillo **1** en posición horizontal, el eje **AB** del toro buscará la dirección del meridiano, colocándose de modo que ambas rotaciones.....

Esta última propiedad es la que se explota en el COMPÁS O BRÚJULA GIROSTÁTICA DE AUSCHUTZ (fig. 974) cuyo toro tiene su eje **AB** en posición horizontal, admitiendo tan sólo declinaciones.

LEXICO. – **Declinación** desviación angular sobre un plano horizontal (**1241**).

Hállase provisto el compás de Auschütz de una rosa de los vientos en su parte superior, y se halla montado sobre un sistema cardánico; de modo que funciona como una brújula marina (**1230**).

Para que la brújula de Auschütz sea muy sensible a las declinaciones, tiene el soporte del toro sostenido por un aro horizontal que flota en mercurio.

La dirección señalada por las brújulas girostáticas es la del MERIDIANO VERDADERO, mientras que las brújulas comunes señalan el MERIDIANO MAGNÉTICO (**1233**).

En los buques de guerra, en los que forzosamente abunda el hierro, resultan necesarias las brújulas girostáticas, porque las magnéticas están sujetas a continuas perturbaciones.

3.º - El giróstato Tierra.

1790. – El GLOBO TERRESTRE es un giróstato que no necesita suspensión cardánica porque se halla suelto en el espacio.

Si el baricentro de la Tierra coincidiese con su centro de figura, hubiera sido un giróstato simétrico centrado.

Pero aún así habría estado sujeto al desvío de su eje **NS** de la posición inicial, *que suponemos debió ser perpendicular al plano de su órbita.*

Efectivamente la Tierra no es esférica, y su eje **NS** es mucho mayor que 0,869 r (**1767**), y es p. l. t., un *eje libre* INESTABLE (**1766**).

1791. – Sin detenernos a averiguar las causas del primer desvío del eje **NS** estudiaremos el giróstato Tierra, atendiendo a la inclinación actual de su eje (fig. 975).

La Tierra en su traslación, recorre una elipse **ABA'B'**, en la que el Sol ocupa el foco cercano a **A**.

La traslación terrestre tiene el mismo sentido que la rotació (ambos son *levogiros*).

La Tierra se halla en **A** a fines de Diciembre; en **B** a fines de Abril, etc.

1792. – ELEMENTOS DE LA ÓRBITA TERRESTRE:

AA' = Diámetro mayor **BB'** = Diámetro menor.

Ambos diámetros son los EJES DE SIMETRÍA (**467** y **469**) de la elipse.
El centro de la simetría de la elipse, es **o**.

A es el PERIHELIO o *perigeo*, y **A'** es el AFELIO o **apogeo**.

Afelio es el punto de la órbita terrestre, más cercano del Sol.
Perihelio es el punto de la órbita terrestre, más alejado del Sol.

F y **F'** son los FOCOS de la elipse.

En **F** *está el Sol.*

Focos (en la elipse) son dos puntos colocados simétricamente a ambos lados de o' sobre el eje **AA'**, y que gozan de la propiedad siguiente (fig 911):

$$FB + BF' = \text{constante}$$

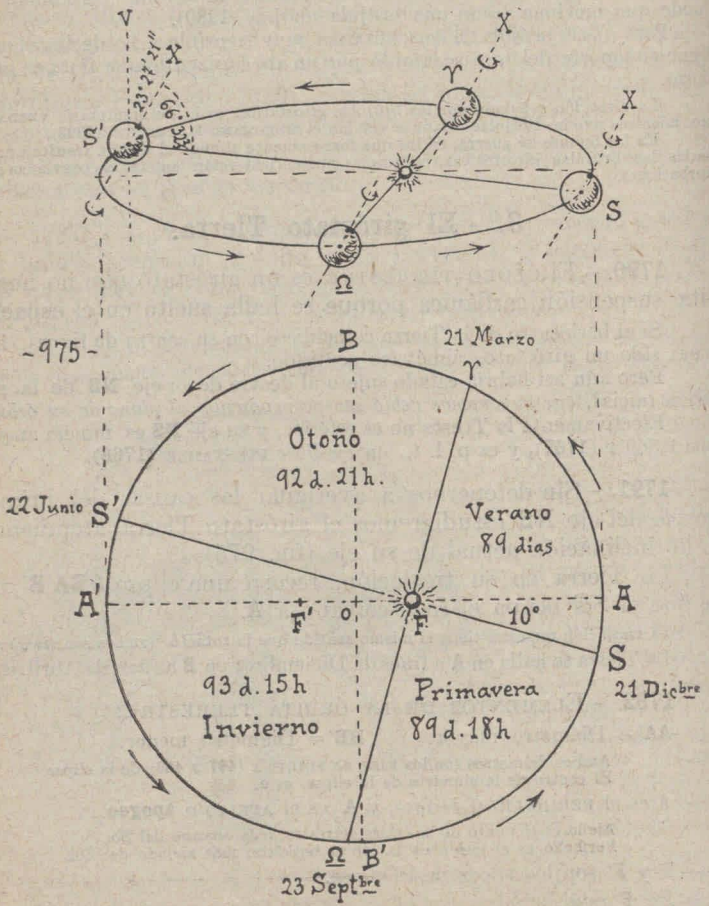
S y **S'** son los PUNTOS DE LOS SOLSTICIOS.

LÉXICO. – **Solsticio** = Instante en que el Sol en su movimiento aparente está más alejado del Ecuador (fig. 33).

Se denomina "SOLSTICIO" porque parece que entonces el sol detiene su movimiento ascensional para comensar su descenso, o viceversa.

Υ y Ω son los PUNTOS EQUINOCCIALES.

Υ se llama PUNTO VERNAL.



LEXICO. – **Equinoccio** = Momento en que el Ecuador terrestre está frente al Sol. Se denomina "EQUINOCCIO", porque entonces el día dura lo mismo que la noche.

1793. – El eje **X** de rotación forma un ángulo de 66°32' 39" con el plano de la órbita terrestre; y forma un ángulo de 23°27'21" con la recta **V**, perpendicular al plano de la órbita.

Durante la traslación de la Tierra, el eje **X** se mantiene siempre paralelo a sí mismo.

La inclinación de **X** es tal, que cuando la Tierra está en **S** o en **S'**, coincide con el plano perpendicular a la órbita que va de **S** a **S'**.

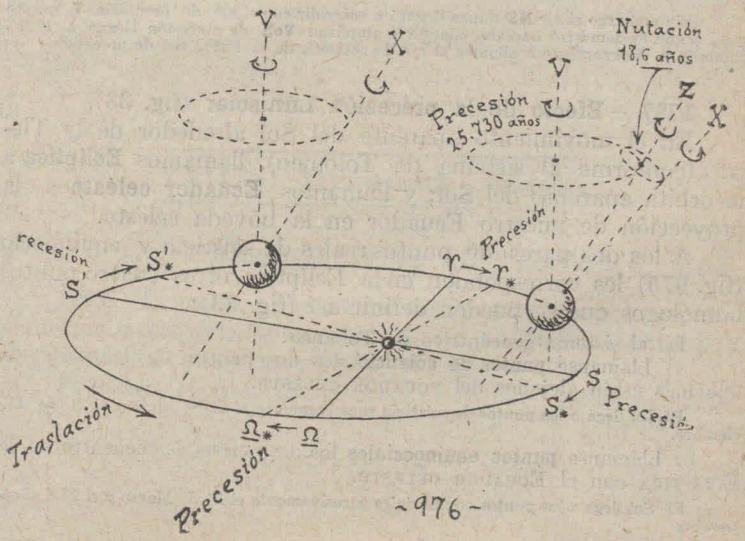
1794. – **Precesiones y nutaciones terrestres.** La Tierra está sujeta a las atracciones del Sol y de la Luna, las cuales actúan con mayor intensidad en la zona ecuatorial terrestre, por ser la parte que se halla más cercana a dichos astros.

Estas dos atracciones (solar y lunar) dan origen a dos precesiones con sus respectivas nutaciones.

La precesión y nutación solar reciben el máximo impulso en los *solticios* (algo mayor en el de Diciembre que en el de Junio). En los *equinoccios* el impulso dado por el Sol, es nulo.

Es difícil de definir la *precesión solar*, debido a la irregularidad del impulso correspondiente.

La *nutación solar* hace que el eje **NS** de la Tierra describa alrededor de **Z** un cono de 1" de amplitud y cuyo período es sensiblemente de *1 año*.



La *precesión lunar* es más complicada que la solar, debido a la posición de la Luna con respecto a la Tierra, que tiene un ciclo de variación correspondiente a 18,6 años.

La *nutación lunar* (mucho más notable que la solar) tiene una amplitud de **9"2**, y su período es de 18,6 años (fig. 976).

Tiene sentido opuesto al de la traslación y rotación terrestre.

1795. – Precesión lunisolar es la suma geométrica de las precesiones solar y lunar (fig. 976).

Esta, lo mismo que la nutación lunar, tiene sentido opuesto al de la traslación y rotación terrestre.

Su amplitud es de 23°27' (puesto que ésta es la inclinación del eje terrestre, con respecto al eje **V** de precesión).

Su período es de 25.730 años.

El polo **N** describe, pues, una circunferencia de precesión paralela al plano de la eclíptica, con la velocidad angular:

$$\omega = 50"26 \text{ por año.}$$

Lo mismo dígase del polo S.

1796. – La curva de precesión descrita por el polo terrestre no es en rigor una circunferencia ni cosa que se le parezca, porque el eje **X** va acercándose a la perpendicular **V** (fig. 974) con la velocidad angular.

$$\omega = 0{,}48"$$

Sin embargo el eje **NS** nunca llegará a coincidir con el eje de precesión **V**, puesto que, según lo demostró Laplace, cuando la amplitud **VoX** de precesión llegue a $1°21'$, comenzará nuevamente a alejarse el eje de rotación de la Tierra del de precesión.

1797. – Efecto de la precesión Lunisolar (fig. 33).

En el movimiento aparente del Sol alrededor de la Tierra (conforme al sistema de Tolomeo), llamamos **Eclíptica** a la órbita aparente del Sol; y llamamos **Ecuador celeste** a la proyección de nuestro Ecuador en la bóveda celeste.

A los dos pares de puntos reales de solsticio y equinoccio (fig. 975) les corresponden en la Eclíptica otros cuatro puntos homólogos que se pueden definir así (fig. 33):

En el sistema geocéntrico de Tolomeo:

a) Llámanse **puntos de solsticio**, los dos puntos de la ECLÍPTICA que más están alejados del ECUADOR CELESTE.

El Sol llega a los puntos de solsticio sucesivamente el 22 de Junio y el 21 de Diciembre.

b) Llámanse **puntos equinocciales** los dos puntos de encuentro de la ECLÍPTICA con el ECUADOR CELESTE.

El Sol llega a los puntos equinociales sucesivamente el 21 de Marzo y el 23 de Septiembre.

c) Llámanse **trópicos** las dos órbitas del Sol en su traslación aparente diurna, cuando se halla en los solsticios.

1798.– En el sistema de Tolomeo, la Tierra aparece fija en el centro de la Eclíptica (sin traslación ni rotación); pero efectuando su precesión *regresiva* alrededor de un eje **V** perpendicular al plano de la Eclíptica.

Como consecuencia:

La intersección $\Upsilon\Omega$ del ecuador y eclíptica, se va corriendo con movimiento dextrogiro (inverso al de la rotación y traslación terrestre), con una velocidad angular:

$$\omega = 50''26 \text{ por año.}$$

Lo que corresponde a un período de 25.730 años.

A esta traslación de los equinocios y solsticcios sobre la órbita aparente del Sol, y en sentido opuesto al de la traslación aparente de este astro, se debe que las constelaciones denominadas "SIGNOS DE ZODIACO" vayan cambiando su posición con respecto a los dos puntos aparentemente fijos $\Upsilon\ \Omega$.

Antes el equinoccio de Marzo o *Punto vernal* Υ se hallaba en la constelación *Aries* (Carnero): ahora se halla en *Piscis* (Pescado); dentro de unos cuantos años se hallará en *Acuario* (Aguador).

Y al cambio de orientación del eje **X**, se debe el cambio de posición del POLO CELESTE o punto de encuentro del eje **X** con la bóveda celeste.

Actualmente muy cerca del *polo norte* se halla la *estrella polar*, que va alejándose cada vez de él.

Los chinos señalaron como *estrella polar* la α de Dragón en el año 2700 antes nuestra Era.

VIII.° - Mecánica sideral

1.° – Movimiento de los planetas

1799. - El movimiento de los planetas se puede interpretar conforme a dos *escuelas* o SISTEMAS: a) el SISTEMA APARENTE, *de Tolomeo*, b) el SISTEMA REAL *de Copérnico*.

El **sistema aparente,** GEOCÉNTRICO DE TOLOMEO supone que la Tierra es el centro del sistema sideral, y que todos los astros efectúan revoluciones alrededor suyo.

El **sistema real,** HELIOCÉNTRICO DE COPÉRNICO considera el Sol y las estrella como puntos sensiblemente fijos; mientras que la Tierra y demás planetas efectúan revoluciones alrededor del Sol.

1800. – Los planetas son giróstatos esferoidales animados de los siguientes movimientos:

1.º Rotación uniforme levogira sobre un eje polar **NS**.

La Tierra efectua su rotación en 24 **horas**.
Esta rotación es la que produce la precesión.

2.º Traslación levogira NO UNIFORME, en órbitas elípticas alrededor del Sol.

La Tierra efectua su traslación en 365 ¼ días escaso.
El Sol no ocupa el centro de figura de las órbitas de sus planetas, sino que se halla en uno de los dos focos (1792).

3.º Precesión, que en la Tierra es DEXTROGIRA, o sea de sentido opuesto a la rotación y traslación.

La precesión terrestre se efectúa en 25.730 años, y es causa de la RETROGRADACIÓN DE SUS EQUINOCCIOS que se efectúa con una velocidad angular de 50''26 por año (1795).

4.º Nutación que en la Tierra es dextrogira como la precesión.

La Tierra tiene dos nutaciones distintas: la SOLAR, cuyo período es de *1 año* y cuya amplitud es de *1''*; y la LUNAR cuyo período es de 18,6 *años* y cuya amplitud es de 9''2

5.º Traslación del perihelio, que en la Tierra es levógiro como la rotación y tiene una velocidad angular de 11'' al año.

Como en la Tierra la traslación del perihelio es opuesta al retroceso de los puntos equinocciales, resulta que dentro de varios millares de años el punto vernal ♈ coincidirá con el perihelio.

6.º Balanceo del eje NS, acercándose o alejándose del eje **V** de precesión.

El eje de la Tierra forma actualmente con **V** un angulo de *23º27'21''*, y se está acercando a este eje con la velocidad angular de *0,48''* por año (1796).
Al llegar a formar con **V** un ángulo de *1º21'*, comenzará a alejarse de este eje.

7.º Deformación progresiva de la órbita.

La órbita terrestre va ensanchando paulatinamente su diámetro menor **BB'** y disminuyendo su diámentro mayor **AA'**, con tendencia a transformarse en una circunferencia

8.ª Desvíos accidentales de la trayetoria, debido a la atracción de los demás planetas que varia notablenemte en función de la distancia (fig. 78).

De aquí resulta que la forma elíptica de las órbitas es ideal, correspondiendo a la trayectoria que cada planeta describiría si fuese el único de su sistema.

9.ª Movimiento de la órbita en el espacio, ACOMPAÑANDO AL SOL EN SU TRASLACIÓN.

El Sol se traslada hacia un punto de la constelación Hércules con una velocidad lineal de unos 20km/seg

NOTA — Todos estos movimientos comprobados en la Tierra, se supone con fundamento que existen en los demás planetas, en forma más o menos apreciable, aunque hasta ahora no se hayan podido comprobar en todos.

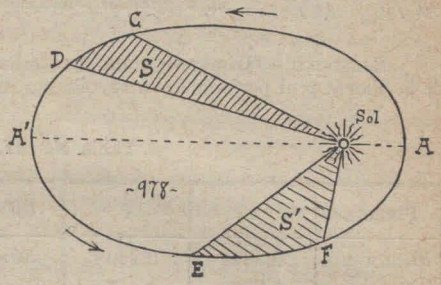
1801. – Las tres leyes de Képler – Copérnico, que sustituyó el sistema APARENTE GEOCÉNTRICO de Tolomeo por el REAL HELIOCÉNTRICO, supuso que las órbitas de los planetas eran circulares.

Képler corrigió la hipótesis de Copérnico, estableciendo tres leyes referentes a la traslación de los planetas:

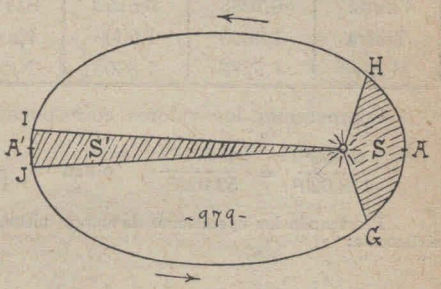
a) LEY DE LA FORMA DE LAS ÓRBITAS;

b) LEY DE LAS ÁREAS DESCRITAS POR EL RADIO VECTOR;

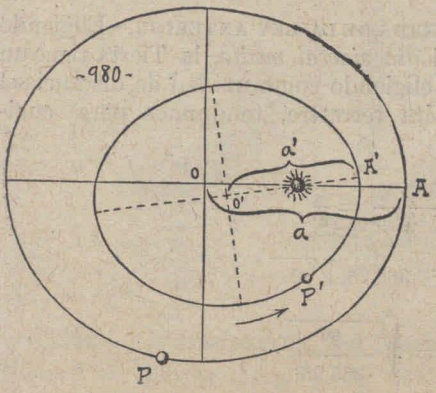
c) LEY DE LOS PERÍODOS DE REVOLUCIÓN.



1802. – LEY 1.ª – Cada planeta en su revolución describe una elipse, en uno de cuyos focos está el Sol (fig. 975).



1803. – LEY 2.ª — Las áreas descritas por el radio vector de un planeta son proporcionales a los tiempos empleados en recorrerlas (fig. 978).



$$\frac{S}{S'} = \frac{t}{t'}$$

t y t' (tiempo empleado para recorrer las áreas S y S', respectivamente).

De aquí se desprende que:

A TIEMPOS IGUALES, CORRESPONDEN ÁREAS IGUALES.

Luego (fig. 979):

TODO PLANETA SE TRASLADA VELOZMENTE EN EL PERIHELIO Y LENTAMENTE EN EL AFELIO.

1804 –. Ley 3.ª – Los cuadrados de los períodos de revolución de dos planetas distintos son proporcionales a los cubos de sus semiejes mayores (fig. 980).

$$\frac{T^2}{(T')^2} = \frac{a^3}{(a')^3}$$

T, T' (*período de revolución de dos planetas cualesquiera*).
a, a' (*medidas respectivas de los semiejes* Ao *de las órbitas*).

Ejemplo. – Tomando como unidades de medida el semieje mayor de la Tierra y el período de su revolución tenemos:

Tabla N.º 27.

Planeta	a	T	Planeta	a	T
Mercurio	0,3871	0,2408	Júpiter	5,2028	11,8620
Venus	0,7233	0,6152	Saturno	9,5389	29,4572
Tierra	1,0000	1,0000	Urano	19,1833	84,0202
Marte	1,5237	1,8808	Neptuno	30,0551	164,76

Comparemos los valores correspondientes a *Mercurio* y *Júpiter*

$$\frac{2{,}408^2}{118.620^2} = \frac{3.871^3}{52.028^3} \quad \text{o sea} \quad \frac{301^2}{14.827{,}5^2} = \frac{553^3}{7432{,}6^3}$$

Efectuando las operaciones de ambos miembros, y simplificando se obtiene sensiblemente:

$$\frac{1}{2426} = \frac{1}{2426}$$

1805. – Fórmula deducida de la ley anterior. - Eligiendo como unidad de tiempo el *día sideral medio*, la Tierra tiene un período de *365 ¼ días*, y eligiendo como unidad de distancia el semieje mayor de la órbita terrestre, tendremos para cualquier planeta:

$$\frac{365{,}25^2}{T^2} = \frac{1^3}{a^3}$$

de donde $$T = 365{,}25.\sqrt{a^3}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2}{365{,}25^2}}$$

2.º – Gravitación.

1806. - Ya hemos tratado algo de lo referente a este tema en (**61** h. **63**, **74**, **83** **148** h. **153**, **1320**, **1321**).

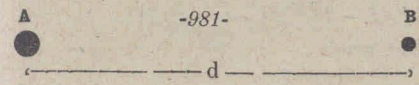
Aquí añadimos que:

A pesar de la enorme distancia que separa a ciertos planetas (como Urano) del Sol, ambos cuerpos se atraen mutuamente.

Si no fuera así las trayectorias de los planetas debieran ser rectilíneas (**864** y **1009**).

La intensidad de las atracciones ejercidas por unos cuerpos sobre otros está sujeta a una ley importante descubierta por Newton:

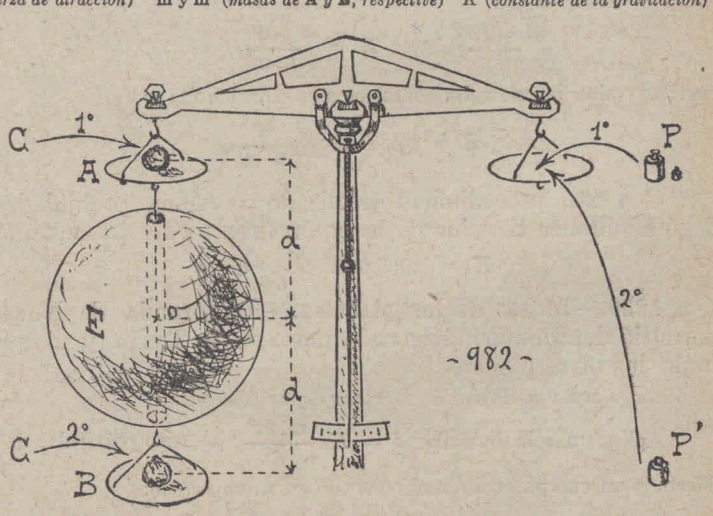
1807. - Ley de Newton (sobre la atracción universal). – **Todos los cuerpos se atraen; y la intensidad con que cada par de cuerpos se atrae es directamente proporcional al producto de su masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia** (fig. 981).



-981-

$$f = K \frac{m.m'}{d^2}$$

(*fuerza de atracción*) **m** y **m'** (*masas de* **A** *y* **B**, *respectivamente*) *K* (*constante de la gravitación*)



-982-

1808. – **Determinación del coeficiente** *K* (Método Richard y Krigar Menzel) (fig. 982).

Debajo del platillo **A** de la balanza colocaron una esfera **E** de plomo de *100.000 Kg.*

Por un agujero vertical de la esfera pasaba un hilo que mantenía el platillo **B** suspendido del platillo **A**.

El cuerpo **C** se pesó colocándolo sucesivamente en **A** y **B**, y los platillos y esfera de plomo estaban colocados de modo que

$$d = d'$$

d y **d'** (*distancia del baricentro de* **C** *al centro* o *de la esfera de plomo.*)

Cuando el cuerpo estuvo en **A** su peso fué **P**, y cuando estuvo en **B**, su peso fué **P'**

Tendremos pues, que: $P = g + e$

$$P' = g - e$$

g (*fuerza de atracción ejercida por la Tierra sobre el cuerpo* **C**).
e (*fuerza de atracción ejercida por* **E** *sobre dicho cuerpo*)..

Restando ordenadamente obtenemos

$$P - P' = (g + e) - (g - e)$$

$$P - P' = 2e$$

o sea $$e = \tfrac{1}{2}\ (P - P') \qquad (1).$$

Aplicando la ley de Newton, resulta

$$e = K\ \frac{m.m'}{d^2}$$ **m** y **m'** (*masa de* **E** y de **C**, *respective*)

P. l. t. $$K = \frac{e.d^2}{m.m'}$$

sustituyendo *e* por su valor conforme a la ecuación (1) se obtiene

$$K = \tfrac{1}{2}\ (P - P')\ \frac{d^2}{m.m'}$$

Con este procedimiento realizado con suma prolijidad, se llegó a obtener el valor de la CONSTANTE DE LA GRAVITACIÓN.

$$K = 0{,}000.000.06681 \text{ dinas}$$

1809. – Masa de los planetas. – La fórmula de Newton permitió determinar, primero la masa de la Tierra, y después la de los otros planetas.

Veamos como se determina la masa de la Tierra.

Apliquemos la formula. $f = K\ \frac{m.m'}{d^2}$ al caso particular de la Tierra y un cuerpo cualquiera colocado en su superficie:

tendremos $p = K\frac{M.m}{R^2}$ **p** (*peso del cuerpo*) **m** (*masa del cuerpo*)
M y **R** (*masa y radio de la Tierra, respective*)

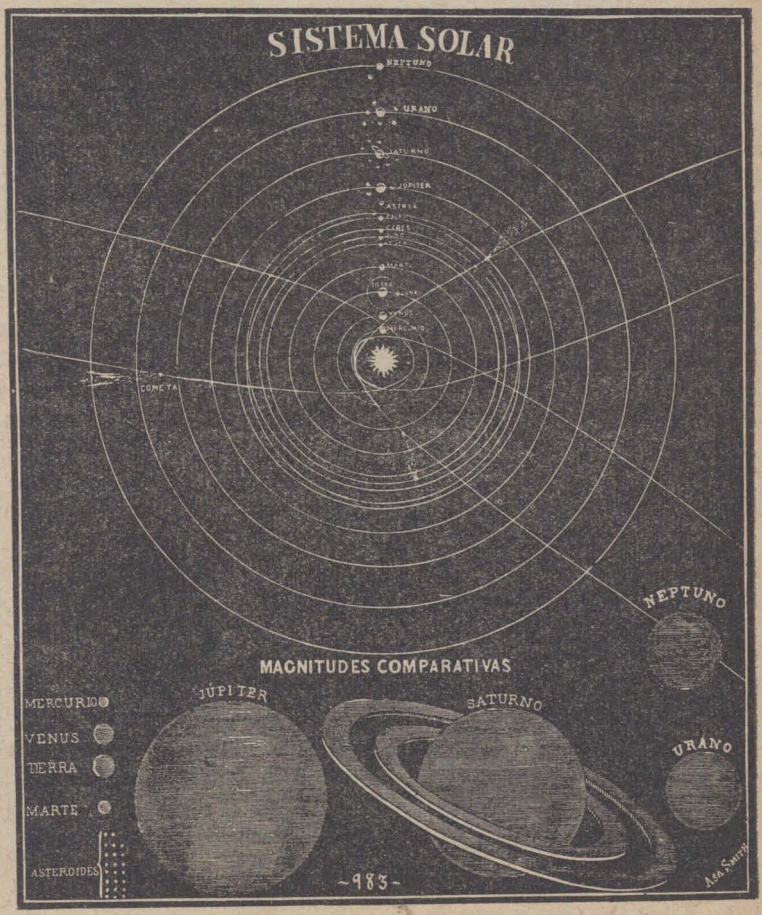
Hemos sustituído **d** por **R**, porque la distancia se mide entre los baricentros de los dos cuerpos atraídos.

Además suponemos en este caso que la Tierra es esférica.

Y como ya sabemos que $p = m \cdot \gamma$

sustituímos este valor en la expresión anterior: $m \cdot \gamma = K \dfrac{M \cdot m}{R^2}$

o sea $\gamma = K \dfrac{M}{R^2}$ de donde $M = \dfrac{\gamma \cdot R^2}{K}$



Conocemos los tres valores siguientes:

γ = 980 cm/seg $\quad$ R = 6.370. Km = 637.000.000 cm

K = 0,000..000.06681 dinas

luego.....

Como resultado del cálculo anterior resultó que:

LA TIERRA TIENE UNA MASA DE **596×10^{20} toneladas**

O sea 59.600 trillones de toneladas.

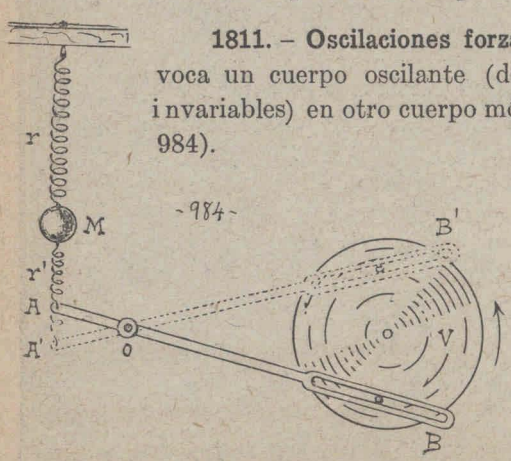
1810. – Tomando como unidades la masa y volumen de la Tierra tenemos:

Tabla N.° 28

Astro	MASA	VOLUMEN	Astro	MASA	VOLUMEN
Sol	324,400	1.310.160	Júpiter	310	1306
Mercurio	0,061	0,053	Saturno	92	734
Venus	0,787	0,995	Uran o	13,5	71
Tierra	1,000	1,000	Neptuno	16,5	51
Marte	0,105	0,150	Luna	0,013	0,02

IX.° Influencia mutua, en el movimiento

1.° - Oscilaciones provocadas por otras oscilaciones



1811. – **Oscilaciones forzadas** son las que provoca un cuerpo oscilante (de amplitud y período invariables) en otro cuerpo móvil ligado con él (fig. 984).

Un péndulo vertical (análogo al de las figs. 433 h. 436) consta de una esferita **M** sostenida por un resorte **r** y ligada a la palanca **AoB** mediante un resorte **r'**, más débil que **r**

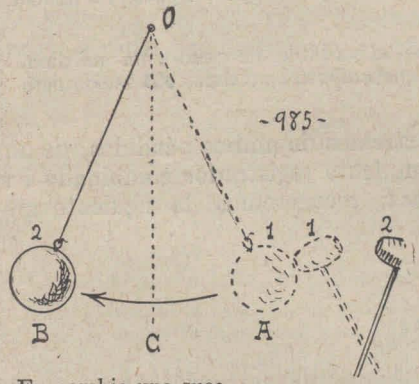
Al girar el volante **V** con movimiento uniforme produce en **AoB** un movimiento vibratorio obligado, de amplitud y período constantes.

Si el sistema **rMr'** vibrara libremente, tendría un período **T'**, distinto del período **T**, del volante.

En cambio, ligado como está a la palanca **AoB**, vibra con el período de ésta.

Por otra parte la amplitud del vaivén de **M** será tanto mayor, cuanto más se acerca **T'** a **T**; llegando a su máximo en un sistema en el cual

$$T' = T$$



De los dos sistemas oscilantes, el **VBoA** es el ACTIVO, y el **rMr'** es el PASIVO.

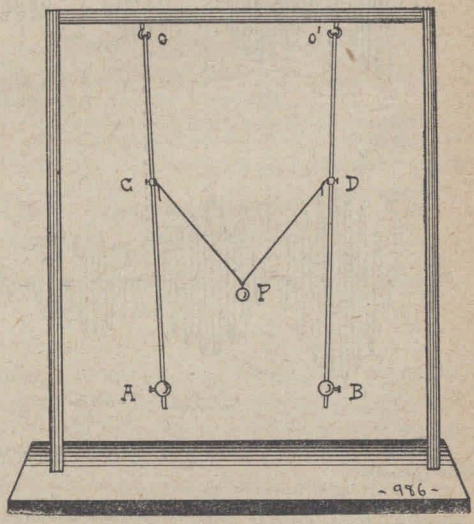
1812. – Hay **resonancia** entre dos sistemas oscilantes (activo y pasivo) cuando ambos tienen el mismo período.

Si el péndulo **Aô** (fig. 985) es pesado, requerirá mucho esfuerzo para llevarlo de **C** hasta **B** con un solo envión.

En cambio una sucesión de pequeños enviones, *sincrónicos* con el vaivén del péndulo, le hará llegar a **B** después de varias oscilaciones.

Si la sucesión de los enviones hubiesen tenido período muy distinto del péndulo, se habrían neutralizado casi por completo, y el péndulo hubiera quedado casi inmóvil en **C** a pesar de la intensidad de los enviones.

1813. – **Oscilaciones libres provocadas** son las que produce un sistema oscilante, en otro sistema oscilador ligado con él, sin que ni uno ni otro tengan amplitud fija.



Se estudian con el PÉNDULO DE OBERBECK (fig. 986).

Los dos péndulos **oA** y **o'B** están ligados mediante un hilo al peso **P**.

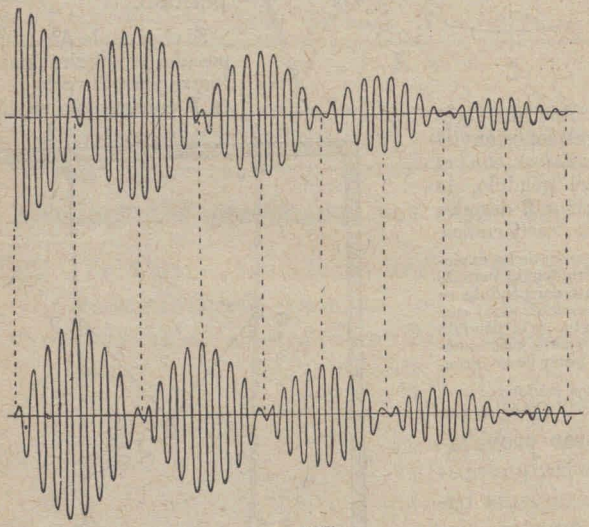
Las correderas C y D sirven para variar las condiciones de amplitud relacionadas con las de P.

Las lentejas A y B pueden correrse para variar la longitud efectiva de los dos péndulos.

Desviando **oA** de su posición vertical, para que (conforme a la figura) oscile de delante a atrás, se notará que de poco a poco va oscilando el péndulo **o'B**.

Ambos oscilarán con amplitud variable, de CERO a un máximo, y en forma tal, que cuando **oA** tiene amplitud máxima, **o'B** está quieto y viceversa.

Si disponemos en los extremos de ambos péndulos, de una aguja o cualquier otro adminículo registrador combinado con una hoja de papel receptora, recogeremos la siguiente gráfica (fig. 987).



- 987 -

Ha habido, pues, paso periódico de energía, de un péndulo al otro sucesivamente.

Si no hubiese habido pérdida de energía, debido al roce y al estorbo del aire, no se habría producido la degradación que se observa en los máximos sucesivos de amplitud; y el sucesivo intercambio de energía habría persistido indefinidamente.

2. – Movimiento del centro de gravedad de un sistema

1814. – Ya vimos que (**450**):

Los cuerpos en sus movimientos actúan como si su masa estuviese concentrada en el BARICENTRO o *centro de masa.*

Falta ahora ver qué acontece en un sistema de dos cuerpos, libres en el espacio, cuando se acercan o se alejan por atracción o repulsión mutua.

Se acostumbra recurrir para ello al ejemplo de un cañón y su bala (fig. 988).

- 988 -



Cuando sale la bala, el cañón retrocede.

Efectivamente la explosión de la pólvora actúa sobre el cañón y la bala, *como si ambos se imprimieran un empellón mutuo de igual intensidad.*

Tendremos por de pronto

$$i = i'$$

i,i' (Impulsos recibidos por el cañón y por la bala, respective).

Y como (**1083**) $i = c \qquad i' = c'$

tendremos $c = c'$

Cantidad de movimiento adquirido por el cañón = cantidad....

O sea $m.v = m'.v'$ *m, m' (masas del cañón y de la bala, respective)*
v, v' (velocidades del cañón y de la bala, respective)

Se concibe, pues, porqué la bala sale tan veloz en comparación con el retroceso del cañón.

Si en un caso como el de la figura, tuviéramos $v' = 47\,v$ entonces podríamos deducir que: $m = 47\,m'$

1815. Antes de producirse la explosión, el centro de gravedad del sistema "*cañón - bala*" estaba en **G**.

Pues bien:

Si el cañón no perdiese fuerza viva al rozar por el suelo, etc., permanecería siempre en **G** el baricentro del sistema "*cañon-bala*", aun después de haberse alejado enormemente ésta de aquél.

1816. – De lo que acabamos de exponer se deduce que:

Cuando un cuerpo "CAE" hacia la superficie de la Tierra, en realidad "CAE TAMBIÉN LA TIERRA HACIA ÉL".

La caída de la Tierra hacia dicho cuerpo es imperceptible, puesto que su velocidad adquiere dimensiones infinitesimales como se puede concebir examinando la fórmula:

$$M.V = m.v$$

de donde $$\frac{M}{m} = \frac{v}{V}$$ (proporción inversa)

M y **m** (*masas*) *de la Tierra y del cuerpo en referencia*).
V y **v** (*velocidades de caída de la Tierra y del cuerpo*).

3.º– Choque de los cuerpos

1817.– En el choque de dos cuerpos no interesa saber si uno de los dos o ambos estaban en movimiento antes del choque.

El efecto mutuo es el mismo en ambos casos, como se deduce del concepto de relatividad del movimiento (**829, 1014 ,1586 h. 1589**).

Interesa, sin embargo, saber si ambos cuerpos están *libres*, o si uno de los dos está *fijo*.

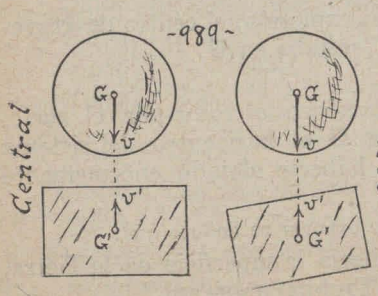
Por ejemplo en el caso del choque de la pelota contra la pared, todo el efecto dinámico del choque recae sobre la pelota, porque la pared no puede cambiar de lugar.

1818.– Dada la condición molecular de los cuerpos que chocan, podemos considerar dos casos: a) choque de cuerpos INELÁSTICOS, b) choque de cuerpos ELÁSTICOS.

En el 1er. caso puede tratarse de dos cuerpos plásticos, o de uno plástico y uno elástico: el efecto dinámico es el mismo.

Ver LÉXICO en (**1427**).

En el 2.º caso puede tratarse de dos cuerpos elásticos o de uno elástico y otro rígido: el efecto dinámico es el mismo.



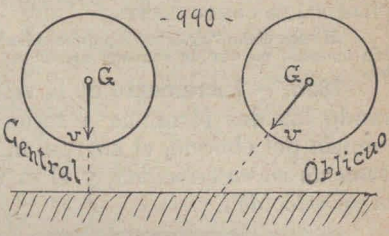
Como no existen cuerpos perfectamente rígidos, no consideraremos el caso de dos cuerpos de esta especie, que corresponde al primero.

1819.– Atendiendo a la forma como se produce el choque entre dos cuerpos libres debemos distinguir entre CHOQUE CENTRAL y CHOQUE OBLICUO (fig. 989).

El choque es **central** cuando las velocidades de ambos cuerpos (anteriores al choque,) son congruentes, y además el contacto se efectúa sobre la línea de acción de ambas velocidades.

Téngase entendido que la velocidad de traslación de un cuerpo se halla siempre aplicada a su baricentro.

El choque es **oblicuo** cuando carece de una de las dos condiciones anteriores.



1820.– Cuando uno de los dos cuerpos está fijo, subsiste la distinción entre choque CENTRAL y choque OBLICUO (fig. 990).

Para saberla aplicar debidamente, hay que considerar que el cuerpo fijo tiene siempre velocidad congruente con el cuerpo móvil.

No tomaremos en cuenta el choque de cuerpos de superficie irregular porque su estudio resulta complicado.

1821.– Al estudiar el efecto del choque, nos interesa averiguar los tres elementos variables de la velocidad de cada uno de los cuerpos a raíz del choque (*intensidad, dirección, sentido*).

El punto de aplicación del vector velocidad en el choque es invariable, puesto que se halla radicado en el baricentro de cada cuerpo o del sistema.

1822.–Choque central de cuerpos inelásticos - Al encontrarse los dos cuerpos, formarán una sola masa:

$$M = m + m'$$

m, m' (*masas respectivas de los dos cuerpos*)
M (*masa del conjunto*)

Y el conjunto de ambos cuerpos seguirá trasladándose en la misma dirección que tenían al encontrarse, y con velocidad:

$$V = f(v, v', m, m')$$

v, v' (*velocidades respectivas, anteriores al choque*)
V (*velocidad del conjunto a raíz del choque*)

1823.– Para calcular **V**, teniendo en cuenta el **principio de la conservación de la energía** plantearemos la siguiente igualdad:

$$C = c + c'$$

C, c, c' (*cantidades respectivas de movimiento*)

O sea $$V(m + m') . = m . v + m' . v'$$

De donde $$V = \frac{m.v + m'.v'}{m + m'}$$

1824. – Si los dos cuerpos tienen la misma masa se tendrá:

$$V = \tfrac{1}{2}(v + v')$$

EN EL CHOQUE CENTRAL DE CUERPOS INELÁSTICOS DE IGUAL MASA, LA VELOCIDAD RESULTANTE ES EL TÉRMINO MEDIO ALGÉBRICO DE LAS DOS VELOCIDADES COMPONENTES.

Hemos dicho "*algébrico*", porque si las dos velocidades componentes son de sentido opuesto, en vez de sumarse se restan.

1825. – Incremento de la velocidad en el choque. – Examinando las dos fórmulas anteriores se deduce que, como consecuencia del choque, el cuerpo más veloz experimenta un *decremento en su velocidad*, y el menos veloz recibe un *incremento en su velocidad*.

Efectivamente para el cuerpo más veloz tenemos después del choque:

$$\Delta v = V - v \quad (\textit{resultado negativo})$$

y para el menos veloz

$$\Delta v' = V - v' \quad (\textit{resultado positivo})$$

1826. – Estos dos incrementos (*negativo y positivo*) de velocidad importan incrementos respectivos de cantidad de movimiento.

De donde resulta para el primer cuerpo:

$$\Delta c = m\,(V - v) \quad (\textit{negativo})$$

y para el segundo $\Delta c' = m'\,(V - v')$ (*positivo*)

Y por el principio de conservación de energía tendremos:

CANTIDAD DE MOVIMIENTO PERDIDO POR EL PRIMER CUERPO = CANTIDAD DE MOVIMIENTO ADQUIRIDO POR EL SEGUNDO:

$$m\,(v - V) = m'\,(V - v')$$

1827. – Choque central de cuerpos elásticos. – Su efecto consta de dos fases:

PRIMERA FASE. – Los cuerpos se aplastan hasta llegar a adquirir la velocidad común:

$$V = \frac{m.v + m'.v'}{m + m'} \quad (\textit{como el en caso anterior})$$

P. l. t. (*al fin de la 1ª. fase*):

$$c_1 = m.v - m\,(v - V)$$
$$c_1' = m'.v' + m\,(v - V)$$

SEGUNDA FASE. – *Los cuerpos recobran su forma primitiva.* – La reacción elástica de ambos cuerpos actúa con igual intensidad que la acción que produjo su aplastamiento.

En consecuencia, el cuerpo que tenía más velocidad experimenta un nuevo decremento igual al anterior, siendo, pues, su decremento total:

$$\Delta c = -2m\,(v - V)$$

De donde $c_2 = m.v - 2m\,(v - V)$

$$c_2 = m.v - 2m.v + 2m.V$$

$$c_2 = 2m.V - m.v$$

Pero $c_2 = m.V_1$

luego $m.V_1 = 2m.V - m.v$

de donde $V_1 = 2V - v$

Por igual camino llegaríamos a esta otra formula

$$V_1' = 2V - v'$$

LA VELOCIDAD QUE CADA CUERPO TIENE AL FIN DE LA 2ª FASE ES IGUAL AL DUPLO DE LA VELOCIDAD QUE AMBOS TENÍAN AL FIN DE LA 1ª FASE, MENOS LA VELOCIDAD QUE CADA UNO TUVO ANTES DEL CHOQUE.

1828. – La fuerza viva en el choque central de los cuerpos. – Al aplicar el principio de conservación de la energía para plantear la igualdad:

$$M.V = m.v + m.v \quad (1823)$$

tuvimos en cuenta que $\frac{1}{2}\,M.V^2 = \frac{1}{2}\,m.v^2 + \frac{1}{2}\,m'.v'^2$

puesto que, quedando invariables las masas componentes de **M** (que son **m** y **m'**) no podrá ser cierta la 2ª. igualdad, sin serlo la 1ª.

El principio de conservación de la energía nos enseña, pues, aquí que:

EN EL CHOQUE CENTRAL, AL TERMINAR LOS DOS MÓVILES SU APLASTAMIENTO, EL CONJUNTO TIENE UNA FUERZA VIVA QUE ES IGUAL A LA SUMA ALGÉBRICA DE LAS FUERZAS VIVAS QUE ANIMABAN A AMBOS CUERPOS AL PRODUCIRSE EL CHOQUE.

Esta regla es aplicable al choque de cuerpos inelásticos, y al finalizar la 1ª. fase del choque de cuerpos elásticos.

1829. – En rigor esta regla meramente mecánica es simplemente ideal; porque en todo choque hay pérdida de energía que se transforma en calor.

De allí que en la práctica debemos plantear

$$\frac{1}{2}\,M.V^2 < \frac{1}{2}\,m.v^2 + \frac{1}{2}\,m'.v'^2$$

1830. – Cuando chocan cuerpos elásticos de masas iguales, las fórmulas anteriormente expuestas quedan sumamente simplificadas:

Al fin de la 1.ª fase tendremos para el conjunto

$$V = \tfrac{1}{2}(v + v') \qquad (1824)$$

y para cada cuerpo tendremos la siguiente cantidad de movimiento y la siguiente fuerza viva $c = m.V$

$$F = \tfrac{1}{2} m.V^2$$

Al fin de la 2.ª fase vimos que como regla general cada cuerpo tiene (**1827**):

$$V_1 = 2V - v$$

Y como en nuestro caso $V = \tfrac{1}{2}(v + v')$

resulta que $V_1 = v + v' - v$

o sea $V_1 = v'$

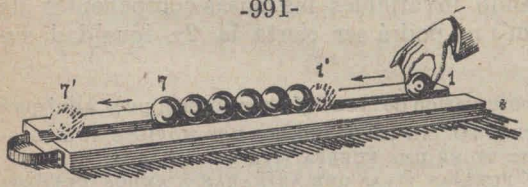
Por igual camino se llega a: $V_1' = v$

Estas dos igualdades nos enseñan que:

Cuando chocan dos cuerpos elásticos de igual masa, resulta que al separarse ambos cuerpos tiene cada uno la velocidad que tenía el otro antes del choque.

1831.– Bochas de repercusión (figs. 17, **605**, 991). –

-991-



La sentencia que acabamos de formular, nos explica porque la bocha que llega, se queda quieta, y porque quedan quietas también las intermedias, saliendo la última con la misma velocidad que tenía la primera.

Léase la observación inserta en (**1018**)

El aparato de la fig. 991 fué ideado por Tindall.

1832.– El choque de cuerpos elásticos, cuando uno de ellos está fijo, queda sujeto a las leyes de la REFLEXIÓN.

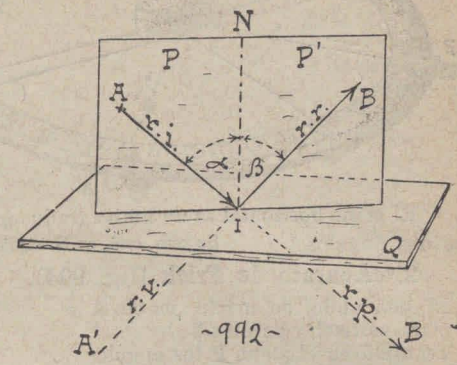
Reflexión es el desvío de la trayectoria de un móvil, como consecuencia de su choque con una superficie fija.

Ej.: el REBOTE de la pelota al pegar contra la pared o contra el suelo.

La reflexión puede ser por efecto de un choque central u oblicuo; pero para ambos casos las leyes *cinemáticas* son las mismas.

1833. – Elementos de la reflexión (fig. 992).

m (proyectil que choca)
r . i (rayo incidente)
r . r (rayo reflejado)
I (punto de incidencia)
Q (superficie de reflexión)
N (normal a la superficie **Q**, pasando por **I**)
α (ángulo de incidencia)
β (ángulo de reflexión)
P (plano del ángulo α)
P' (plano del ángulo β)
r . v (rayo virtual o aparente)
r . p (rayo potencial)



El rayo *virtual* o *aparente* se llama así, porque un observador que no reparase en la existencia del estorbo **Q**, creería que el proyectil **m**, hubiera sido lanzado desde **A'**, y no desde **A**.

El rayo *potencial* se denomina así, porque si no se hubiese interpuesto el estorbo **Q**, el proyectil habría seguido hacia **B'**, y no hacia **B**.

1834. – 1.ª Ley. – Los dos ángulos α y β (de incidencia y de reflexión) **son coplanares.**

Esto significa que **P** y **P'** forman un solo plano.

Y como la normal **N** *pertenece al plano* **PP'**, *resulta que:*

El plano **PP'** ES NORMAL A LA SUPERFICIE **Q**.

Esta ley se comprueba continuamente en la vida práctica (juego de la pelota, etc.), y se pone de manifiesto al comprobar experimentalmente la 2.ª ley.

1835. – La *1.ª ley* puede enunciarse también así:

LOS RAYOS INCIDENTE Y REFLEJADO SE HALLAN SOBRE UN MISMO PLANO NORMAL A LA SUPERFICIE DE REFLEXIÓN.

Y también se puede enunciar así:

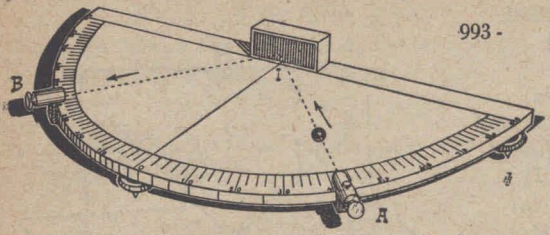
LOS DOS RAYOS (*incidente* y *reflejado*) SON COPLANARES CON LA NORMAL.

1836. 2.ª Ley.– El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

$$\alpha = \beta$$

Esta ley puede demostrarse experimentalmente con los tres aparatos siguientes:

1.° Aparato de Dagnin (fig. 993). -



993 -

En **A** hay un pistolete con el que se lanza contra **I** una bollilla de márfil.

I es una pantalla de acero.

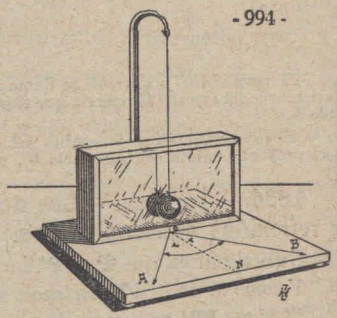
En **B** hay un cubilete o bolsa que recibe la bollilla después de la reflexión.

El plano horizontal es un limbo graduado, para medir la abertura de los dos ángulos. Su cero está en **N**, siguiendo la graduación hacia **X** y **X'**.

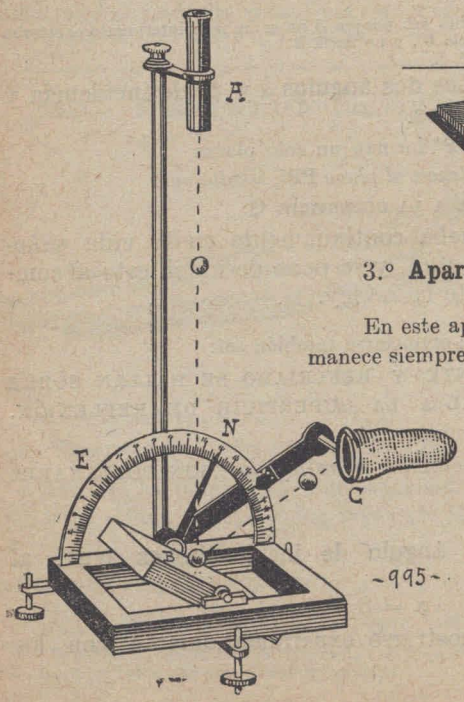
2.° Aparato de Frick (fig. 994). -

El pendulillo de márfil va de **A** al plano vertical; y de allí a **B**.

Trazando en el plano **P** los ángulos correspondientes se comprueba su igualdad.



- 994 -



- 995 -

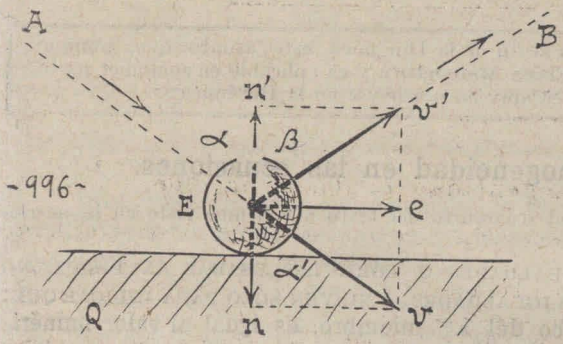
3.° Aparato de Nollet (fig. 995).

En este aparato el rayo incidente permanece siempre vertical.

Se obtiene la variación del ángulo de incidencia, inclinando el plano de reflexión.

La flecha **N** señala el desvío de la normal con respecto al rayo incidente.

1837. – Demostración matemática de las dos leyes (fig. 996).



-996-

En la 1.ª fase del choque la velocidad de incidencia **v**, se descompone en dos: una normal **n**, otra tangencial **e**.

La velocidad tangencial **e** se conserva íntegra.

En cambio, la normal **n** queda reducida a CERO al fin de dicha fase.

En la segunda fase el cuerpo fijo **Q** devuelve por reacción elástica toda la energía recibida, de modo que al separarse la bolilla de **Q** tiene recuperada toda la velocidad **n**, pero en sentido contrario. Las dos velocidades **n'** y **e** tienen como resultante la velocidad de reflexión:

$$\mathbf{v'} = \mathbf{v}$$

Del simple examen de los dos paralelogramos de velocidades se desprende que:

1.° – Siendo **nn'** una línea recta y concurriendo con ella **e**, resulta que los tres vectores **n**, **n'**, **e**, son coplanares; luego son también coplanares sus resultantes respectivas **v** y **v'**.

Pero **Av** es una sola recta.

Luego la dirección incidente **Av**, la normal **n'** y la dirección reflejada **v'**, son coplanares.

Queda, pues, demostrada la 1ª ley.

2.° – Siendo iguales los tres juegos de vectores homólogos, y siendo $\mathbf{n} \perp \mathbf{e}$ los dos paralelogramos son iguales; luego:

$$\alpha' = \beta$$

Pero, por opuestos por el vértice, tenemos

$$\alpha' = \alpha$$

de donde: $\alpha = \beta$

Queda, pues, demostrada la 2ª. ley.

1838. – En el choque OBLICUO de dos cuerpos libres y elásticos, hay que tener en cuenta el desvío de la reflexión, para determinar con exactitud el efecto producido.

X.º - Homogeneidad

Colocamos al fin de la Dinámica este asunto que, aunque pertenece a la Física Matemática y es aplicable en cualquier parte de la Física, lo es muy en particular en la Dinámica.

Homogeneidad en las ecuaciones.

1839. - En el transcurso del texto nos hemos visto en la necesidad de advertir que:

CIERTAS IGUALDADES O FÓRMULAS USADAS EN FÍSICA NO SON VERDADERAS IGUALDADES, Y SIRVEN SÓLO PARA INDICAR QUE: **el valor numérico del 1.er miembro, es igual al valor numérico del 2.º miembro.**

1840. - Podemos, pues, distinguir dos clases de igualdades o ecuaciones: a) las FÍSICAS, b) las MERAMENTE ALGÉBRICAS.

Ecuación física es la que contiene, aunque en forma más o menos velada, las mismas magnitudes en ambos miembros, y con las mismas intensidades.

Ecuación meramente algébrica es aquella que contiene en un miembro magnitudes diferentes de las del otro; pero en tal forma, que sustituyendo los símbolos de las magnitudes por los números que indican su intensidad, se obtiene una igualdad aritmética.

1841. - **Dimensión** de una magnitud es la medida de su intensidad.

De aquí se desprende que una magnitud cualquiera, sin variar de intensidad, puede variar de dimensión.

Basta para ello cambiar la unidad que se adopta para medirla.

Ej.: Un cuerpo dado, pesa 7 Kg.; y como el Kg. vale 2,16 libras, ese mismo cuerpo pesará:

$$p = 7 \times 2{,}16 = 15.12 \text{ libras}$$

La INTENSIDAD de **p** no varió al cambiar el sistema de medición; pero varió su DIMENSIÓN, o sea el *número* con que se indica su intensidad.

1842. - En las ecuaciones, cuando queremos expresar "DIMENSIÓN DE UNA MAGNITUD" encerramos su símbolo en un paréntesis rectilíneo.

Ej.: [m] se lee *"dimensión de la masa"*
[T] se lee *"dimensión del trabajo"*

1843. – Ecuaciones **dimensionales** son aquellas en las que están sustituídas las magnitudes por sus dimensiones

Ej.: $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{t}}$ (ecuación física)

$[\mathbf{v}] = \frac{cm}{seg}$ (ecuación dimensional en el sistema *c. g. s.*)

$[\mathbf{v}] = \frac{m}{seg}$ (ecuación dimensional en el sistema técnico)

1844. – Se dice que una ecuación es **homogénea**, cuando sustituyendo en ambos miembros las magnitudes por sus dimensiones, se obtiene una identidad.

Identidad es la igualdad que tiene idénticos los dos miembros.

EJEMPLO.– En el caso de la fig. 603 tenemos

$$E = \mathbf{p}.\mathbf{h}$$

Se trata de averiguar si dicha fórmula es homogénea.

PROCEDIMIENTO.– Sabemos que $\mathbf{p} = \mathbf{m}.\gamma$

luego $E = \mathbf{m}.\gamma.\mathbf{h}$ (1)

por otra parte sabemos que (**1133**):

$E = T$

y también que (**1123**): $T = F$

luego $F = \mathbf{m}.\gamma.\mathbf{h}$ (2)

Pero por otra parte sabemos que (**1064**) : $F = \frac{1}{2}\,\mathbf{m}.\mathbf{v}^2$

Sustituyendo este valor en (2):

$$\tfrac{1}{2}\,\mathbf{m}.\mathbf{v}^2 = \mathbf{m}.\gamma.\mathbf{h} \qquad (3)$$

Si esta última ecuación es homogénea, tendremos:

$$\tfrac{1}{2}\,[\mathbf{m}.\mathbf{v}^2] = [\mathbf{m}.\gamma.\mathbf{h}] \qquad (4)$$

Para averiguarlo, planteemos las *ecuaciones dimensionales* de cada una de estas magnitudes en el sistema *c. g. s.*:

$[\mathbf{m}] = gr$ $\qquad [\mathbf{v}] = \frac{cm}{seg}$ $\qquad [\mathbf{h}] = cm$

γ es una aceleración; luego tendremos (**1004**):

$$\gamma = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{t}}$$

de donde resulta $[\gamma] = K \cdot \frac{[\mathbf{v}]}{[\mathbf{t}]}$

o sea $[\gamma] = K \cdot \frac{cm}{seg^2}$

Sustituyamos todos estos valores en (4):

$$\tfrac{1}{2}\, gr \cdot \frac{cm^2}{seg^2} = K \cdot gr \cdot \frac{cm}{seg^2} \cdot cm$$

$$K' \cdot gr \cdot \frac{cm^2}{seg^2} = K \cdot gr \cdot \frac{cm^2}{seg^2} \qquad (5)$$

K y K' (constantes de proporcionalidad)

1845. – Cuando se hacen estos trabajos, no se tiene en cuenta el valor de las *constantes de proporcionalidad*, porque si la ecuación no es falsa, deben ser tales como para igualar el valor numérico de ambos miembros.

Del resultado obtenido en (5) se deduce que la ecuación (3) es HOMOGÉNEA.

Si, pues, por otro camino ya sabíamos que: $F = \tfrac{1}{2}\, \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}^2$ es homogénea, quedará demostrado que también es homogénea $E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{h}$

1846. – Regla - Para que una ecuación sea FÍSICA, debe ser homogénea.

Las ecuaciones HETEROGÉNEAS o *meramente algébricas* sirven tan sólo para resolver problemas prácticos; pero no pueden explotarse con fines de investigación.

En otros términos: LAS ECUACIONES HETEROGÉNEAS NO DEMUESTRAN NADA.

1847. – Por Algebra sabemos que:

$$\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^{1/n} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\mathbf{a}^n} = \mathbf{a}^{-n} \qquad \mathbf{a}^0 = 1$$

Para comodidad de trabajo, se explota este conocimiento en las averiguaciones de homogeneidad.

La ecuación (5) adquirirá entonces la forma:

$$K' \cdot gr \cdot cm^2 \cdot seg^{-2} = K \cdot gr \cdot cm^2 \cdot seg^{-2}$$

La fórmula del péndulo (**1733**) se escribirá así:

$$\mathbf{T} = 2\pi\, (l \cdot \gamma^{-1})^{1/2}$$

1848. – Como en el sistema *c. g. s.* todas las magnitudes se miden por unidades relacionadas con las tres FUNDAMENTALES, **espacio, masa** y **tiempo**, resulta forzosamente que:

CUANDO EN UNA FÓRMULA HOMOGÉNEA SUSTITUIMOS LAS MAGNITUDES POR SUS DIMENSIONES, LLEGAMOS EN ÚLTIMO TÉRMINO A LA EXPRESIÓN SIGUIENTE:

$$K \cdot cm^m \cdot gr^n \cdot seg^r = K' \cdot cm^m \cdot gr^n \cdot seg^r$$

m, n, r (*cualesquier números: enteros o fraccionarios, positivos o negativos, pudiendo valer también cero*).

ESTATICA

III.º - Estática Gráfica *(ampliación)*

1.º - Vectores heteroplanos.

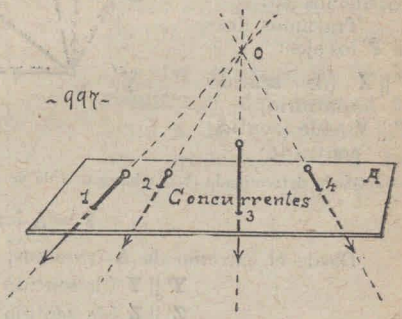
1849. - Ya vimos qué se entiende por vectores COPLANARES Y HETEROPLAMOS (**306**).

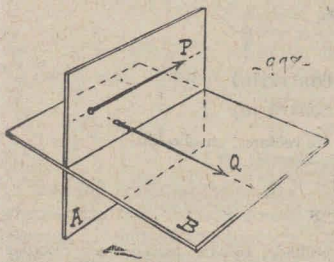
Los vectores heteroplanos pueden ser CONCURRENTES O ALABEADOS.

1850. - Vectores heteroplanos **concurrentes** son aquellos cuyas rectas de acción, forman haces (fig. 997).

En todo haz heteroplano, los vectores son coplanares si se toman de de a dos.

1851. - Vectores heteroplanos **alabeados** son aquellos cuyas rectas de acción no se cortan (fig. 998).





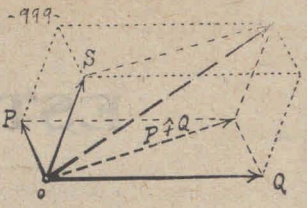
(*uno de los plan*

Ambos planos son *auxiliares de ilustración.*

1852. - Para buscar la resultante de un sistema heteroplano ecurrir al POLÍGONO DE VECTORES (**342** h. **344**)

Cuando los vectores son concurrentes, puede seguirse también el procedimiento de COMPOSICIONES PARCIALES SUCESIVAS (**339** h. **341**)

La resultante de un haz de tres vectores heteroplanos, es la diagonal del paralelepípedo que tiene por aristas los tres vectores de origen común (fig. 999)



Se transportan los tres vectores dados **P, Q, S**, a un mismo punto de aplicación **o**, etc.

1853. – Descomposición de un vector en otros tres de dirección heteroplana.

1er Caso. - Cuando el vector dado y sus componentes son concurrentes uniaplicados (fig. 1000).

DATOS: **F** (vector dado) **X, Y, Z,** (rectas de acción de sus componentes).

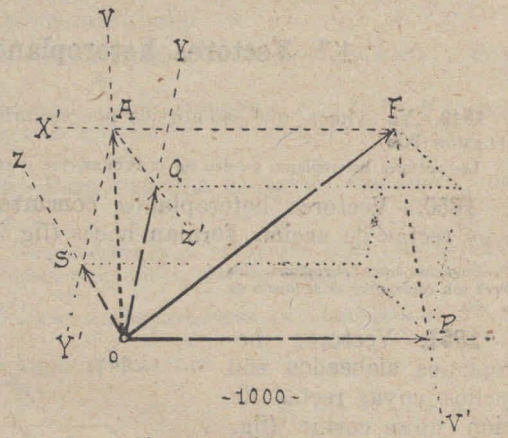
El plano del ángulo **FoX** y el plano del ángulo **YoZ** tienen por intersección eje **V**.

Para construir el paralelepípedo procedemos así:

Trazamos desde **F** los ejes:

X' || X (de sentido contrario)

V' || V (de sentido contrario)



Queda determinado el paralelogramo de vectores **oAFP**, en el cual:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \dot{+} \mathbf{P}$$

Desde el extremo de **A** trazamos;

Y' || Y (de sentido contrario)

Z' || Z (de sentido contrario)

Queda determinado el paralegramo de **oQAS** de vectores, en el cual:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \dot{+} \mathbf{S}$$

Luego $\mathbf{F} = \mathbf{P} \dot{+} \mathbf{Q} \dot{+} \mathbf{S}$

Las otras líneas punteadas que figuran en el grabado, se han trazado para recordar que este problema es el recíproco del anterior.

1854. – 2.º CASO. - Cuando el vector dado y sus componentes no son concurrentes (fig. 1001).

Para que este problema sea *posible y determinado*, se requiere que las cuatro líneas de acción formen un cuadrilátero.

TEMA. - **F** (fuerza dada)
V, X, Y, Z (las cuatro rectas de acción).

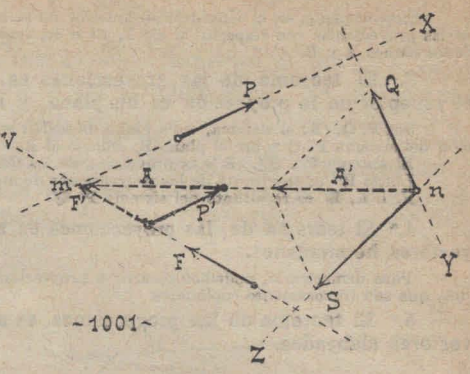
SOLUCIÓN. - Se traza la diagonal **mn**
Se corre **F** hasta F^0
Se construye el triángulo de fuerzas:

$$F' = P' \dotplus A$$

P' debe ser paralelo a **X**.

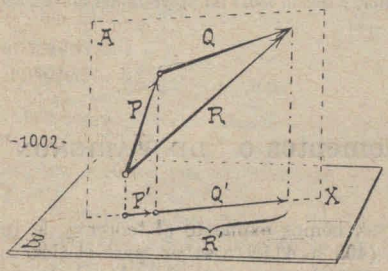
Se transporta **P'** a **P** (sobre su recta de acción)
Se corre **A** hasta **A'**
Y se construye el paralelogramo de fuerzas:

$$A' = Q \dotplus S$$



ego $F = P \dotplus Q \dotplus S$

2.º - Teorema de las proyecciones.



1855. - Teorema. - SI UN SISTEMA COPLANAR DE VECTORES SE PROYECTA SOBRE UN EJE **X**, SE TENDRÁ QUE:

La proyección de la resultante del sistema es igual a la resultante de las proyecciones de las componentes (fig. 1002).

A es el plano del sistema **P, Q**.
B es es un plano cualquiera.
X es la intersección de ambos planos.

El solo examen de la figura nos indica que:

R' = proyección de **R**.

y que **R'** = **P'** + **Q'**

P' y Q' (proyecciones respectivas de **P** y de **Q**).

1856. - Observaciones. - 1.ª Como la resultante de un sistema concurrente, de más de dos fuerzas, se obtiene por medio de una sucesión de composiciones de las fuerzas tomadas de a dos, se entiende que **la demostración anterior vale para cualquier número de fuerzas.**

Como el paralelismo es un caso límite de la concurrencia, se entenderá que la demostración anterior vale también para el caso de fuerzas paralelas.

2.ª **El teorema de las proyecciones, es aplicable también al caso de proyección oblicua.**

Efectivamente, en la demostración anterior no se ha tenido en cuenta la inclinación de las proyectantes con respecto al eje **X**, ni se ha tenido en cuenta la inclinación mutua de los planos **A** y **B**.

3.ª El teorema de las proyecciones es aplicable también cuando el receptor de la proyección es un plano, y no una recta.

Sea **P, Q, (R)** el sistema, cuyo plano de sostén es **A**; y sea **P′, Q′, (R′)** una proyección del sistema **P, Q** sobre el plano **B**, oblicuo al **A**.

El sistema **P″, Q″, (R″)** es proyección de los dos sistemas sobre el eje **X**.

Luego **R″** es resultante de las proyecciones de ambos sistemas.

P. l. t., **R′** es resultante del sistema **P′ Q′**.

4.ª El teorema de las proyecciones es aplicable también al caso de vectores heteroplanos.

Para demostrarlo, podemos recurrir a proyecciones de vectores tomados de dos en dos, que son forzosamente coplanares.

5.ª El teorema de las proyecciones es aplicable también al caso de vectores alabeados.

1857. - De todo lo anteriormente expuesto, resulta que el teorema de las proyecciones, enunciado en su forma más amplia, se expresa así:

La proyección de la resultante de un sistema de vectores es igual a la resultante de las proyecciones de los vectores.

En este enunciado hay que sobreentender que en cada caso todas las proyecciones se efectúan sobre un mismo plano receptor, y siendo todas las proyectantes mutuamente paralelas.

3.º – Teorema de los momentos o "DE VARIGNON"

1858. – Al estudiar las palancas, hemos expuesto el teorema de los momentos EN FORMA RESTRINGIDA (**403** h. **411**), a saber, para el caso en que el momento resultante valga CERO, o sea: para cuando el sistema queda en equilibrio.

Aquí lo estudiaremos para cualquier caso, o sea: para cuando el momento resultante tiene cualquier valor.

Reléase lo expuesto desde (**373** hasta **402**); y (**547** h. **550**).

1859. - Hablando en lenguaje físico, diremos que (**374**):

Momento de una fuerza con respecto a un punto o a un eje, es la medida de su acción giratoria sobre dicho punto o sobre dicho eje (fig. 325).

Hablando en lenguaje matemático, diremos que (**387**):

Momento de una fuerza respecto a un punto, es el producto de la intensidad de la fuerza, por la distancia entre ella y el punto (fig. 181).

Y también (549).

Momento de una fuerza con respecto a un eje, es el momento de la proyección del sistema sobre un plano perpendicular al eje (fig. 326).

1860. – TEOREMA DE LOS MOMENTOS. – **El momento de la resultante de un sistema de fuerzas es igual a la resultante de los momentos de dichas fuerzas** (fig. 1003).

Sea **o** el polo de los momentos.

Unimos **A** con **o**.

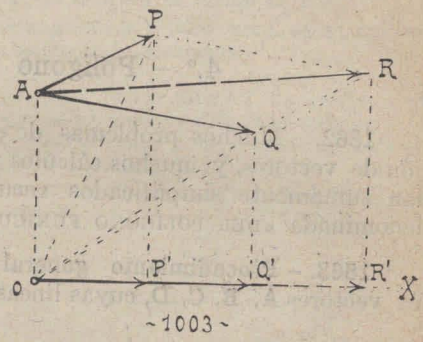
Trazamos **oX** $\perp$ **Ao**

y trazamos **PP'//Ao//QQ'//RR'**

Luego los vectores **P'**, **Q'**, **R'** (con origen común en **o**) son las proyecciones respectivas de **P**, **Q** y **R** sobre **X**.

De lo expuesto en (536 h. 540) se deduce que

$$\frac{m}{\triangle APo} = \frac{n}{\triangle AQo} = \frac{s}{\triangle ARo}$$



~1003~

m, n, s, (*momentos respectivos de* **P, Q, y R** *con referencia al punto* **o**).

Como los tres triángulos tienen una base común **Ao**, sus áreas son proporcionales a sus alturas, que son respectivamente los vectores **P'**, **Q'** y **R'**.

Podemos, pues, sustituir en la ecuación anterior los valores de los triángulos por los de sus alturas sin que deje de existir igualdad entre las nuevas razones:

$$\frac{m}{P'} = \frac{n}{Q'} = \frac{s}{R'}$$

Aplicando una propiedad de las proporciones, resulta:

$$\frac{m+n}{P'+Q'} = \frac{s}{R'}$$

Pero por el teorema de las proyecciones sabemos que:

$$P'+Q' = R'$$

luego

$$\frac{m+n}{R'} = \frac{s}{R'}$$

de donde

$$m+n=s$$

L. Q. Q. D.

1861. – La expresión final de la demostración anterior nos insinúa enunciar el teorema de los momentos en una forma más clara:

El momento de la resultante de un sistema coplanar de vectores, es igual a la suma algébrica de los momentos de los vectores componentes.

OBSERVACIONES. — 1.ª Hemos supuesto aplicable el teorema al caso de más de dos vectores concurrentes, porque el procedimiento de buscar la resultante por medio de composiciones parciales sucesivas, nos indica que la demostración anterior es extensible a este caso.

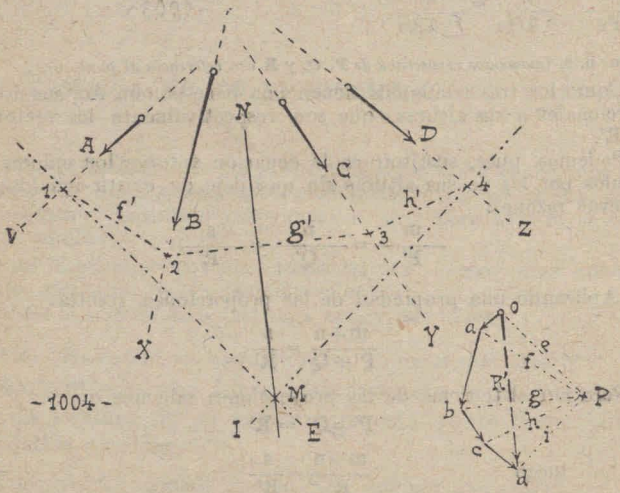
2.ª Hemos eliminado del enunciado la expresión "vectores CONCURRENTES" porque el procedimiento de las composiciones parciales sucesivas, nos indica que la demostración anterior es también extensible a casos como el de la fig. 146, en que los vectores son concurrentes, tomados de a dos; pero su conjunto no es concurrente a un punto único.

3.ª El paralelismo es un caso límite de la concurrencia; luego.....

4.º – Polígono funicular.

1862. – Muchos problemas de composición y descomposición de vectores, y muchos cálculos relacionados con ellos quedan sumamente simplificados recurriendo a la construcción denominada «DEL POLÍGONO FUNICULAR».

1863. – Procedimiento general (fig. 1004.) — Tengamos los vectores **A, B, C, D**, cuyas líneas de acción son **V, X, Y, Z.**



Con origen en un punto arbitrario **o** construimos el polígono de vectores correspondiente (**342**).

Para más comodidad en el trakajo, se han trazado **a, b, c, d,** (equipolentes de **A, B, C, D**) con la mitad de sus dimenciones reales, basándonos en (**327**).

Se determina un punto arbitrario **P**, denominado **polo**, desde donde se traza el HAZ DE RADIOS POLARES correspondiente (**348**).

Desde un punto cualquiera **1** (tomado sobre **V**) se traza el eje **E** paralelo al radio polar **e**.

Desde **1** se traza también **f'//f**

Desde **2** se traza **g'//g** etc.

Desde **4** se traza el eje **I** paralelo a **i**.

El punto **M**, *de encuentro del eje* **I** *con el* **E** *pertenece a la recta de acción de* **R**.

Luego el eje **N**, *paralelo a* **R**, *es la línea de acción de* **R**.

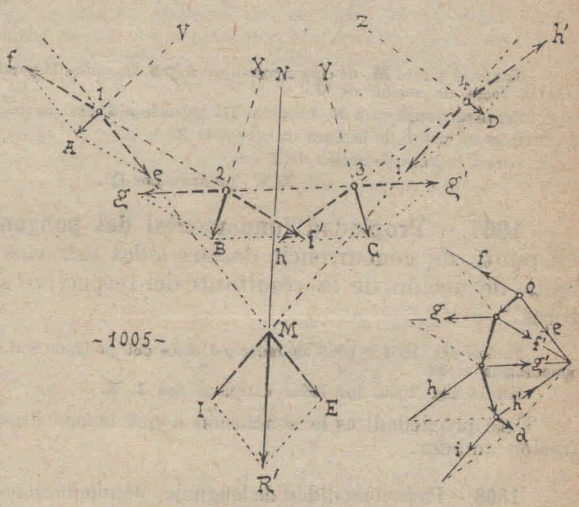
FALTA SOLAMENTE QUE DETERMINEMOS DÓNDE ESTÁ EL PUNTO DE APLICACIÓN DE **R**, cosa que más adelante indicaremos.

1864 – La figura formada por las rectas **Ef'g'h'I** ha recibido el nombre de **polígono funicular**, porque en algunas soluciones adquiere el aspecto y función de un *cordel tendido a causa de la tracción ejercida en él por los vectores aplicados en sus vértices* **1, 2, 3, 4.**

En rigor, en la mayoría de los casos resulta impropio este nombre, debido a la relación que tiene el polígono con sus vectores.

1865. – Demostración del polígono funicular (f. 1005).

Recordando el desdoblamiento de los radios polares, (indicado a la derecha de la fig. 150), y teniendo en cuenta que el triángulo de vectores es un recurso artificioso pero no realista, sustituimos (en el haz de radios polares) los triángulos por sus correspondientes paralelogramos.



Por otra parte (basándonos en **296** h. ,**300**) corremos los vectores **A, B, C, D,** hasta aplicarlos en **1, 2, 3, 4,** respectivo.

Descomponemos dichos vectores según las direcciones indicadas por el polígono funicular, y quedan de este modo transportados los paralelogramos del *haz de vectores* al *polígono funicular*.

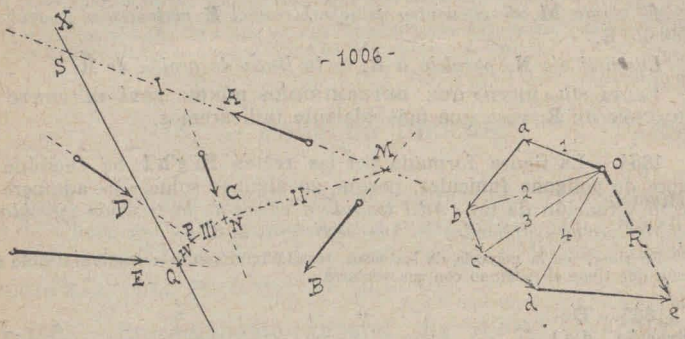
Y como los vectores opuestos e iguales se anulan, quedan solamente actuando los vectores **e, i**, que corridos sobre sus respectivas líneas de acción hasta aplicarse en **M**, dan el sistema **E, I**, cuya resultante **R'** es equivalente y congruente de **R** (**390** y **326**).

La línea de acción de **R'** es, pues, la línea de acción de **R**.
P. l. t., **M** pertenece a la línea de acción de **R**. L. Q. Q. D.

1866. – Cuando la disposición de las fuerzas lo permite, se puede elegir como POLO el mismo punto **o**, origen del polígono de vectores, y entonces sustituimos el *haz de radios polares* por el POLÍGONO DE LAS RESULTANTES SUCESIVAS (**347**).

EJEMPLO (fig. 1006) Sea el sistema **A, B, C, D, E.**

Al construir el polígono **oabcde**, notamos que el primer radio polar queda reducido a cero.



Desde el punto **M**, de concurrencia de **A** y **B**, trazamos **II** paralelo a **2** hasta encontrar la recta de acción de **C**.

Desde este encuentro **N**, trazamos **III** paralelo a **3**, etc., hasta **Q**.

Q es un punto de la línea de acción de **R**.

Luego, la línea de acción de **R** es:

X||**R'** (pasando por **Q**).

1867. – **Propiedad fundamental del polígono funicular.** — El punto de concurrencia de sus *lados extremos* pertenece a la recta de acción de la resultante del respectivo sistema de vectores.

En las figs. 1004 y 1005 los lados extremos del polígono son **E, I,** y su punto de concurrencia es **M.**

En la fig. 1006, los lados extremos son **I, X,**

Esta propiedad, es la conclusión a que hemos llegado en la demostración anterior.

1868. – Para comodidad de lenguaje, denominaremos: **Vértice principal** *de un polígono funicular*, el punto de concurrencia de sus lados extremos, y **vértices extremos,** los puntos de encuentro de cada lado extremo, con la recta de acción extrema correspondiente.

En las figs. 1004 y 1005 tenemos:

M (*vértice principal*) **1** y **4** (*vértices extremos*)

En la fig. 1006 tenemos:

S (*vértice principal*) **M** y **Q** (*vértices extremos*)

1869 – **Propiedades derivadas** – 1ª Si para un mismo sistema de vectores construimos diversos haces de radios polares, que difieran entre sí por la posición del POLO, al construir después los polígonos funiculares correspondientes, se tendrá que: *todos los vértices principales se hallan sobre una misma recta, que es la línea de acción de la resultante del sistema dado.*

Esta propiedad, si bien se examina, es la misma propiedad fundamental, expresada en otros términos. Puede expresarse también así:

LA LÍNEA DE ACCIÓN DE LA RESULTANTE DE UN SISTEMA DE VECTORES ES EL LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS VÉRTICES PRINCIPALES DE TODOS SUS POLÍGONOS FUNICULARES.

2.ª – Si dos sistemas de vectores son equivalentes (**294**) y los lados extremos del polígono funicular de uno de dichos sistemas tienen cada uno un punto común distinto del vértice principal con su homólogo del polígono funicular del otro (*ambos de polo común*), entonces ambos pares de lados extremos coinciden.

Esto significa que los polígonos funiculares de ambos sistemas tienen un mismo vértice principal.

Puede expresarse también así:

EL LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS VÉRTICES PRINCIPALES DE TODOS LOS POLÍGONOS FUNICULARES DE POLO COMÚN PERTENECIENTES A SISTEMAS EQUIVALENTES Y CUYOS LADOS EXTREMOS GIRAN CADA UNO ALREDEROR DE UN PUNTO FIJO, ES UN PUNTO.

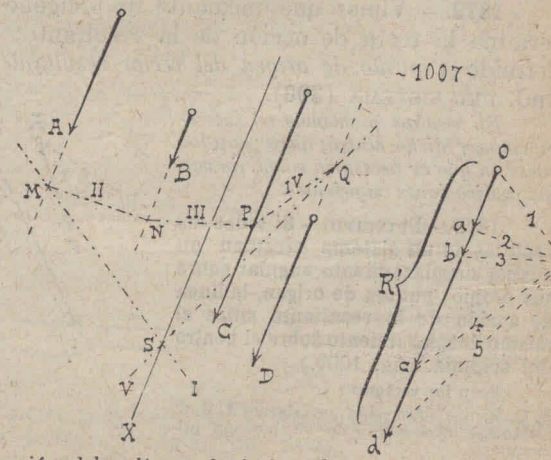
3ª. – Si para un mismo sistema de vectores, se obtienen varios polígonos funiculares cuyos lados extremos han girado cada uno sobre un punto fijo, el lugar geométrico de los polos correspondientes, es una recta paralela a la que une los dos puntos fijos.

4.ª (*Recíproca de la anterior*) Si el polo de un polígono funicular se corre sobre una recta, y uno de los lados extremos del polígono funicular gira sobre un punto fijo; el otro lado extremo también girará sobre un punto fijo, y la recta que une los dos puntos fijos es paralela a la trayectoria del polo.

Y también los lados intermedios del polígono funicular giran cada uno alrededor de un punto fijo: y estando todos los puntos fijos sobre una misma recta.

Esta propiedad, en forma más amplia se expresa así:

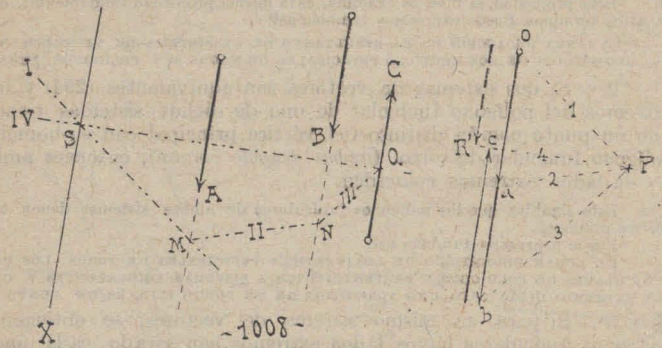
LOS LADOS HOMÓLOGOS DE DOS POLÍGONOS FUNICULARES PERTENECIENTES A UN MISMO SISTEMA DE VECTORES SE CORTAN TODOS SOBRE UNA MISMA RECTA PARALELA A LA TRAYECTORIA DEL POLO.



1870 – Aplicación del polígono funicular al caso de **vectores para-** (fig. 1007).

Sean los vectores **A** || **B** || **C** || **D**. (*vértice principal*)
Su polígono de vectores será la recta **od**
El haz de radios polares será **1, 2 ... 5.**
El polígono funicular será **M, N, P, Q, S.** **X** (*recta de acción de* **R**).

1871 – El mismo procedimiento se sigue cuando hay vectores de de sentido opuesto (fig. 1008).



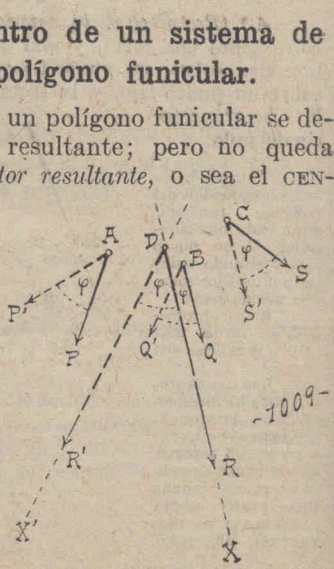
Como se ve en este ejemplo, el polígono funicular puede adoptar formas muy extrañas para el principiante.

5.° – Determinación del centro de un sistema de vectores mediante el polígono funicular.

1872. – Vimos que mediante un polígono funicular se determina la recta de acción de la resultante; pero no queda definido el *punto de origen del vector resultante*, o sea el CENTRO DEL SISTEMA (**396**).

En muchos problemas no interesa conocer dicho centro; pero para los casos en que es necesario conocerlo van las indicaciones siguientes.

1873. – PRINCIPIO. - **Si todos los vectores de un sistema efectúan un mismo desplazamiento angular sobre sus propios puntos de origen, la línea de acción de la resultante sufre el mismo desplazamiento sobre el centro del sistema.** (fig. 1009.)



Sean los vectores
P, Q, S, que giran sobre sus orígenes **A, B, C,** alejándose un ángulo φ de su posición primera.

Sea **D** el centro del sistema **P, Q, S**; y **X** la línea de acción de la resultante

Tendremos que: $\sphericalangle XDX' = \varphi$

1874. – El principio anterior nos indica que:

Para determinar el centro de un sistema, se determina primero su EJE mediante el polígono funicular; luego se hace virar todos los vectores sobre sus orígenes, con una misma desviación angular, y se busca el nuevo eje, mediante otro polígono funicular.

El punto de encuentro de ambos ejes, es el punto de aplicación de la resultante.

Eje *de un sistema de vectores, es la recta de acción de su resultante.*

6.° – Determinación gráfica del momento estático de un sistema de vectores.

1875 – MOMENTO ESTÁTICO RESULTANTE DE UN SISTEMA DE VECTORES CONCURRENTES (fig. 1010).

Dado un sistema de vectores concurrentes, construimos su polígono de vectores **o, 1, 2, 3, 4.**

Unimos el centro **o** del sistema con el polo de momentos **P** y trazamos **X⊥oP.**

Proyectamos los vectores sobre el eje **X** mediante rectas paralelas a **oP.**

Y tendremos:

M = *vector* **R'** × **oP**

M (*momento del sistema con respecto a* **P.**)

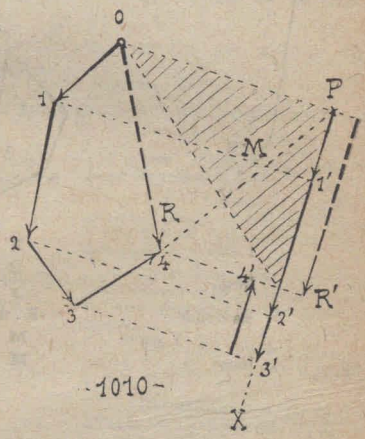
R' (*proyección de la resultante* **R**, *sobre el eje* **X**)

DEMOSTRACIÓN: Ya sabemos que **(530 h 540)**

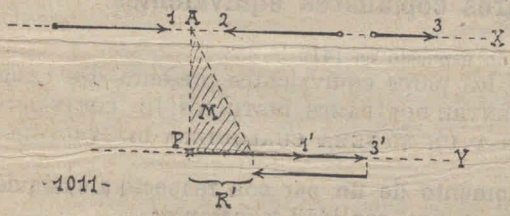
M = 2 *área* **PoR**

pero *área* **PoR** = *área* **PoR'**

luego **M** = 2 *área* **PoR'** = *vector* **R'**×**oP**



1876. – Aplicación del procedimiento anterior, al caso de vectores congruentes (fig. 1011).



Se baja **PA** ⊥

Se traza **Y** // **X**

Y se toma **P** como origen del polígono de vectores.

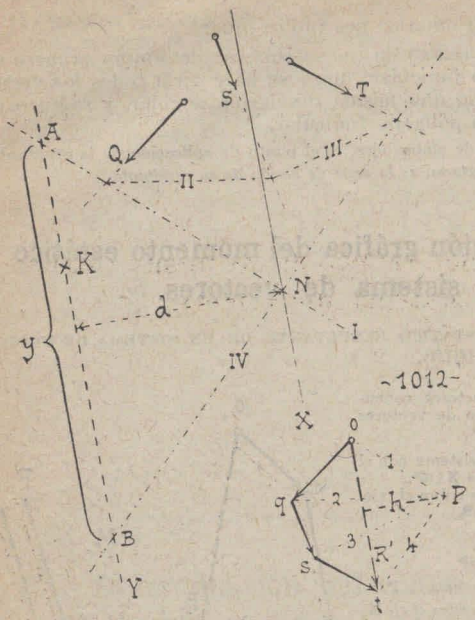
Este polígono resulta siendo una línea recta **(345)** con resultante **R'** que es equipolente de **R.**

1877. – **Momento resultante, de un sistema cualquiera de vectores.** Se recurre al polígono funicular (fig. 1012).

Hay que calcular el momento del sistema con respecto a **K**

X es el eje del sistema

Pasando por **K**, trazamos **Y** // **X.**



Los lados extremos **I IV** del polígono funicular cortarán a **Y** en los puntos **A** y **B**.

Llamaremos **y** la medida del segmento **AB**.

Desde **P** bajamos una perpendicular a **R'** y desde **N** bajamos otra al segmento **A B**.

Denominaremos **h** y **d** las medidas respectivas de estas dos perpendiculares.

El momento del sistema, con respecto al punto **K** será:

$$M = y.h$$

1878. – Demostración del procedimiento anterior.

Los triángulos **Pot** y **NAB** son semejantes.

Tendremos, pues:

$$\frac{R'}{y} = \frac{h}{d}$$

pero $R' = R$ (resultante verdadera del sistema)

luego $\frac{R}{y} = \frac{h}{d}$

de donde $R.d = y.h$

Y como $M = R.d$

luego $M = y.h$

L. Q. Q. D.

7.° – Pares coplanares equivalentes.

1879. – Reléase lo expuesto en (**412** h. **433**).

El estudio de los pares equivalentes presenta dos casos: a) EQUIVALENCIA ENTRE DOS PARES DISTINTOS, b) EQUIVALENCIA ENTRE UN PAR Y UN SISTEMA CUALQUIERA DE VECTORES.

1880. – El momento de un par con respecto a cualquier punto de su plano es una cantidad constante:

$$M = f.d$$

f (*uno de los dos vectores*)

d (*distancia entre las rectas de acción de los dos vectores.*)

DEMOSTRACIÓN (fig. 1013).

Es la generalización de lo expuesto en (413).

Leáse la sentencia inserta al fin de (420).

Sea el par **f, f'**, actuando sobre el punto **P**

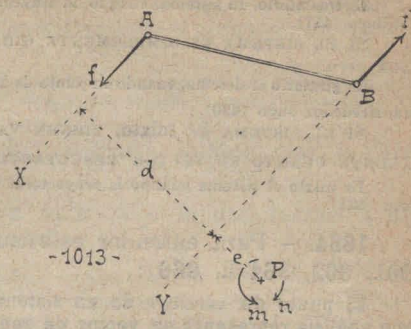
Tenemos:

m (*momento de* **f** *sobre* **P**)-
n (*momento de* **f'** *sobre* **P**).

Por hallarse **P** fuera del espacio comprendido por los ejes **X, Y**, resulta que ambos momentos son opuestos; luego

$$M = m - n$$

M (*momento del par, sobre* **P**)
Pero $m = f\,(d + e)$ y $n = f\,.\,e$
luego $M = f\,(d + e) - f\,.\,e$ etc

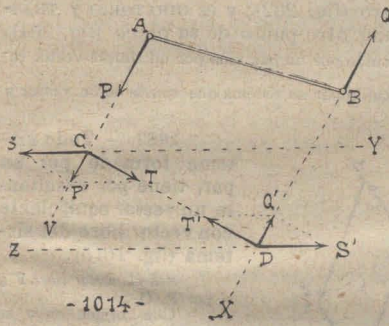


-1013-

1881. – Dos pares son EQUIVALENTES, **cuando tienen el mismo momento.**

En efecto: EL ÚNICO EFECTO DEL PAR CONSISTE EN HACER GIRAR EL SISTEMA SOBRE SU PUNTO DE APOYO.

1882. – Problema. – Sustituir un par por otro equivalente (fig. 1014).



-1014-

Sea el par **P, Q** *que actúa sobre los ejes* **V** *y* **X**.

Y sean los ejes **Y, Z** *sobre los que debe actuar el par equivalente.*

C y **D** (intersecciones de los dos pares de ejes).

Trasladamos los vectores dados (sobre sus líneas de acción) hasta aplicarlos en **C** y **D**, respectivamente.

Unimos **C** con **D**, y descomponemos **P'** y **Q'** según las direcciones **Y, CD, Z**

Obtendremos los dos paralelogramos iguales **CSP'T** y **DS'Q'T'**

Quedarán, pues, sustituídos **P'** y **Q'** por sus vectores componentes, respectivos (**S, T**) y (**S', T'**„).

Pero **T** y **T'** son opuestos e iguales; etc.

1883. – EQUIVALENCIA ENTRE UN PAR Y UN SISTEMA CUALQUIERA DE FUERZAS COPLANARES. — Podemos establecer el postulado categórico siguiente:

Todo sistema coplanar tiene como último sistema resultante: un par y un vector,

Releáse desde **416** h. **422** y desde **427** h. **432.**

SI EL SISTEMA ES SIMPLEMENTE TRASLATORIO SU PAR EQUIVALENTE ES NULO.

Es **traslatorio** un sistema, cuando la trayectoria de su punto de apoyo es real y rectilínea (**417**).

SI EL SISTEMA ES SIMPLEMENTE GIRATORIO SU VECTOR RESULTANTE VALE *cero*.

Es **giratorio** el sistema, cuando su punto de apoyo no cambia de lugar, y el sistema gira alrededor suyo (**420**).

SI EL SISTEMA ES **mixto**, TIENEN VALOR REAL TANTO SU PAR EQUIVALENTE CUANTO SU VECTOR RESULTANTE.

Es **mixto** el sistema cuando la trayectoria de su punto de apoyo es real y curvilínea (**421**).

1884. – Para entender este asunto, hay que recordar que (**361, 362, 364 h. 866**):

El punto de «APOYO» de un sistema es una ligadura, que en último análisis representa un vector de sentido opuesto a la resultante del sistema.

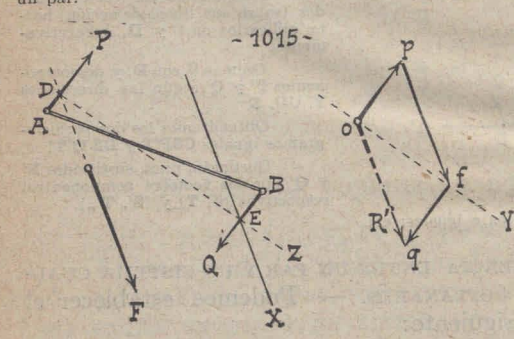
1885. – Condición gráfica para que un sistema coplanar de vectores pueda ser sustituido por un par.

Basta demostrar gráficamente que su resultante es nula y que su momento, respecto de un punto cualquiera, tiene valor distinto de cero.

1886. – Cuando un sistema tiene resultante distinta de *cero*, es simplemente TRASLATORIO para su centro (fig. 202); y es GIRATORIO y TRASLATORIO (o sea, *mixto*) para cualquier otro punto de su plano (fig. 204).

En el primer caso, no podrá ser sustituído por un par, sino por un simple vector resultante.

En el segundo caso, podrá ser sustituído por un sistema que conste de un vector y un par.



- 1015 -

1887. – **Todo sistema formado por un par, tiene por resultante un vector equipolente con vector libre del sistema** (fig. 1015).

Sea el vector libre **F** *y el par* **P, Q**.

Con origen en **o** se construye el cuadrilátero de vectores **opfq** con resutante **R'**

Siendo los lados vectores **p** y **q** mutuamente paralelos e iguales, el cuadrilátero será un paralelogramo.

P. l. t. *vector* **R'** = || *vector* **f**.

Para buscar la línea de acción de **R**, se traza desde **D**: **Z** || **Y**

Y (*eje diagonal* **of**)

D (*punto de concurrencia de los dos primeros vectores pasados al cuadrilátero*)

Obtendremos el punto **E**, perteneciente a la línea buscada.

1888. – En el problema anterior podríamos haber determinado la posición del EJE CENTRAL **X** teniendo en cuenta el *teorema de los momentos*, que aplicado a nuestro caso nos enseña que:

EL MOMENTO DE **R** CON RESPECTO A UN PUNTO CUALQUIERA DEL PLANO, ES IGUAL A LA SUMA ALGÉBRICA DEL MOMENTO DEL PAR Y DEL MOMENTO DE **F** CON RESPECTO AL MISMO PUNTO.

1889. – El estudio de los sistemas mixtos, nos sugiere una pregunta:

¿Cuál es el efecto de la aplicación de una fuerza a un cuerpo, fuera de su baricentro?

Véase la observación al fin de (298), y téngase en cuenta la fig. 106.

Distingamos primero el caso de «IMPACTOS» del caso de «ENVIÓN CONTINUADO».

LÉXICO — **Impacto** = *Aplicación instantánea de una fuerza a un cuerpo.*

Es el caso de un choque en el que inmediatamente quedan separados el cuerpo percusor del que recibe el choque.

En realidad, al decir "INSTANTÁNEO", aquí entendemos *"de ínfima duración"*; puesto que el IMPACTO ABSOLUTO no puede existir desde que todo movimiento es efecto de un trabajo, y todo trabajo es producto de una fuerza por un espacio; y para que una fuerza recorra un espacio, por ínfimo que sea, se requiere un cierto tiempo.

1°. EN EL IMPACTO:

1.° Si el envión se aplica siguiendo uno de los ejes de gravedad del cuerpo, hay sólo efecto traslatorio.

En el billar, es el caso del tacazo *"en bola llena"*.

2.° En cambio, si el golpe se produce en dirección desviada del centro de gravedad, el cuerpo adquiere un movimiento rectilíneo de traslación, acompañado de otro de rotación sobre su baricentro.

En el billar, es el caso del golpe *"con efecto"*.

2°. – Cuando el ENVIÓN ES CONTINUADO, pueden presentarse tres casos (ya explicados en **423** h. **426**).

a) La fuerza motriz conserva su misma relación con el cuerpo durante la traslación de éste (**424**). b) La fuerza motriz conserva siempre su dirección sin que influya sobre ella la rotación del cuerpo por ella movido. c) La fuerza motriz modifica su sentido conforme a una ley independiente de la orientación del cuerpo por ella movido.

(No tomamos en cuenta los casos en que la fuerza modifica los otros tres elementos: *aplicación*, *sentido* e *intensidad*, sino los casos se multiplican).

1892. – EN EL PRIMER CASO:

1.° Si la línea de acción de la fuerza pasa por el baricentro del cuerpo, hay simple traslación rectilínea.

Es el caso de la tracción efectuada por el propulsor del aeroplano.

2.° Si el baricentro del cuerpo no está sobre la línea de acción de la fuerza, aquél se traslada siguiendo una trayectoria circular.

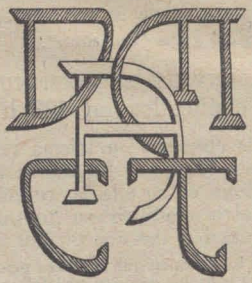
1893. – En el segundo caso:

1.° Si la línea de acción de la fuerza motriz pasa por el baricentro del cuerpo, hay simple traslación rectilínea.

2.° Si el baricentro del cuerpo no está sobre la línea de acción de la fuerza, hay traslación rectilínea, y mientras tanto el cuerpo gira sobre su baricentro hasta que éste queda sobre la línea de acción de la fuerza (fig. 106).

1894. – En el tercer caso: la trayectoria del cuerpo depende de la ley de desvío a que está sujeta la fuerza motriz.

Pero aun aquí no hay rotación del cuerpo, mientras la línea de acción de la fuerza sea un eje de gravedad.



BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

BIBLIOTECA NACIONAL DE MAESTROS

INDICE DEL 1ER TOMO

Página

ACLARACIONES 3

FISICA GENERAL

I.º CONOCIMIENTOS PRIMORDIALES

1.º – Materia, sustancia y cuerpo 9
2.º – Propiedades de la materia 10
3.º – Fenómenos 12
4.º – Ciencias físico-químicas 12
5.º – Los seres 13
6.º – La naturaleza y las ciencias naturales 14
7.º – Lugar que corresponde a la Física en la clasificación de las Ciencias 16
8.º – Relación de la Física con las demás ciencias, y con las artes e industrias 16

II.º MATERIA, ENERGÍA Y ÉTER

1.º – Concepto objetivo de "punto" 17
2.º – Los cuerpos puntuales 19
3.º – Constitución de la materia 20
4.º – Constitución de los átomos 22
5.º – Materia y energía 24
6.º – Diversa formas de energía 25
7.º – División de la Física 28
8.º – El éter cósmico 31

III.º METROLOGÍA

1.º – Objeto de la Metrología 67
2.º – Magnitud, medición, cantidad, número 67
3.º – Unidad y número 69
4.º – Propiedades importantes de los múneros recíprocos 70
5.º – Dos clases de cantidades 71
6.º – Magnitudes físicas 73
7.º – Las tres modalidades del espacio 74
8.º – Unidades físicas (sistemas de medida) 76
9.º – El metro teórico y del metro tipo 78
10.º – El kilogramo patrón 80
11.º – Errores en la medición 81

IV.° – Investigación física

1.° – Métodos de investigación 227
2.° – Inducción experimental 228
3.° – Definición, regla, ley 230
4.° – Relación entre las causas y sus efectos 234
5.° – Relación entre los co-efectos 238
6.° – Inmutabilidad de las leyes físicas 238
7.° – División de las leyes 240
8.° – Hipótesis y teorías 240
9.° – Los postulados en la Física 244

V.° – ABC de la Física matemática

1.° – Fórmulas y problemas 245
2.° – Cantidades constantes y variables 247
3.° – Cantidades unitarias y globales 249
4.° – Funciones crecientes y decrecientes 250
5.° – Representación gráfica de las funciones 250
6.° – Representación gráfica de un argumento y su función 253
7.° – Representación gráfica de dos co-argumentos o de dos co-funfunciones 255
8.° – ¿Qué significado tiene una gráfica? 257
9.° – Interpretación de las gráficas 260
10.° – Casos prácticos 269
11.° – Representación gráfica de los productos 273
12.° – Coeficientes angular y ordenada de origen 276

VI.° – Rudimentos de Trigonometría

1.° – Líneas trigonométricas 279
2.° – Colíneas y líneas negativas 282
3.° – Tablas de las líneas trigonométricas 284
4.° – Valor de los lados de un triángulo 290
5.° – Correlación de las líneas trigonométricas 294
6.° – Valor trigonométrico del coeficiente angular 296

VII.° – Metrotécnia

1.° – Prenociones 415
2.° – Medición de las longitudes 415
3.° – Medición de las áreas 417
4.° – Medición de los volúmenes y capacidades 420
5.° – Aparatos para medir y trasportar longitudes 424
6.° – Aparatos especiales para valuar volúmenes 431
7.° – Rectificadores de direcciones y de ángulos 432
8.° – Goniómetros 437
9.° – Goniómetros geodésicos y astronómicos 441
10.° – Clisímetros 448
11.° – Nonio o vernier 450
12.° – Taquímetros 453

VII.° – *bis* – PROPIEDADES DE LA MATERIA

1.° – Propiedades de la materia 454
2.° – Propiedades generales de la materia 456
3.° – Extensión, impenetrabilidad, inercia 458
4.° – Otras propiedades generales 463
5.° – Propiedades de los sólidos 475

VIII.° – RESISTENTIA DE LOS MATERIALES

1.° – Resistencia al alargamiento y al acortamiento 479
2.° – Tablas y problemas de resistencia 484
3.° – Observaciones 487

MECANICA

I.° – GENERALIDADES

1.° – Los tres estados típicos de la materia 33
2.° – Sistemas rígidos y sistemas muelles 34
3.° – Lugar y movimiento 34
4.° – Fenómenos simples, repetidos y complejos 38
5.° – Concepto de instante y de simultaneidad 39
6.° – Concepto de anterioridad y de posteridad 40
7.° – Concepto de tiempo 40
8.° – El reloj y las unidades de tiempo 41
9.° – Otros relojes y otras unidades de tiempo 43
10.° – Reposo y quietud 49
11.° – Relaciones de lugar 50
12.° – Energía y fuerza 52
13.° – División de la Mecánica pura 53

II.° – FACTORES DEL MOVIMIENTO

1.° – Gravedad 54
2.° – Concepto de peso 55
3.° – Medida de las fuerzas (dinamómetros) 58
4.° – Peso y masa 60
5.° – Los tres conceptos de masa 63
6.° – Concepto intuitivo de velocidad 65

MECANICA PURA

ESTATICA

I.° – ESTÁTICA GRÁFICA Y EXPERIMENTAL

1.° – Escala y vector 84
2.° – Magnitudes escalares y vectoriales 87
3.° – Representación de las fuerzas 87
4.° – Equilibrio 89
5.° – Principios fundamentales de Estática 92
6.° – Composición de fuerzas 95
7.° – Composición de fuerzas congruentes 97
8.° – Composición de dos fuerzas concurrentes 98
9.° – Composición de fuerzas paralelas 104

10.° – Composición de sistemas de más de dos fuerzas 107
11.° – Descomposición de fuerzas 113
12.° – Las palancas 116
13.° – Momentos de una fuerza 124
14.° – Momento estático polar 124
15.° – Rotación dextrorsa y sinistrorsa 128
16.° – Definición práctica y medida del momento de una fuerza ... 129
17.° – Los momentos en la palanca 131
18.° – Teorema de los momentos (restringido) 133
19.° – Aplicación del teorema de los momentos a los sistemas de fuerzas coplanares 135
20.° – Par de fuerza 137
21.° – Efectos constante y variado 140
22.° – Sistemas giratorios y mixtos 141
23.° – Sustitución de fuerzas en las palancas 145
24.° – Equilibrio de los cuerpos 148
25.° – Baricentros aparente y real 153
26.° – Centro de las figuras geométricas 155
27.° – Baricentros de los vértices de los polígonos 161
28.° – Baricentro de las líneas materiales 164
29.° – Baricentro de las láminas homogéneas y planas 167
30.° – Baricentro de los sólidos 174
31.° – Representación gráfica de los momentos 177
32.° – Los tres momentos estáticos o de primer orden 183

II.° – ESTÁTICA APLICADA

1.° – Las balanzas 185
2.° – Balanzas simétricas 186
3.° – Condiciónes que deben llenar las balanzas de precisión 189
4.° – Condiciones necesarias para las exactitud de la balanza 189
5.° – Sensibilidad de las balanzas 192
6.° – Condiciones necesarias paraa sensibilidad de la balanza 200
7.° – Condiciones de practicidad de la balanza 202
8.° – Medios de conservación de la balanza 204
9.° – Tipos de balanza de precisión 204
10.° – Balanzas de Roberval 208
11.° – Modo de asegurar la precisión de las pesadas 209
12.° – Balanzas asimétricas 211
13.° – Balanzas de construcción casera 220
14.° – Caja de pesas 221
15.° – Manejo del granatorio 223
16.° – Otras clases de balanzas 224

III.° – ESTÁTICA GRÁFICA (*Ampliación*)

1.° – Vectores heteroplanos 677
2.° – Teorema de las proyecciones 679
3.° – Teorema de los momentos o "de Varignon" 680
4.° – Polígono funicular 682
5.° – Determinación de un centro de un sistema de vectores, mediante el polígono funicular 686

6.° – Determinación gráfica del momento estático de un sistema de vectores 687
7.° – Pares coplanares equivalentes 688

CINEMATICA

I.° – Movimiento uniforme

1.° – Concepto de trayectoria 298
2.° – Movimiento uniforme y movimiento variado 300
3.° – Concepto matemático de velocidad 300
4.° – Problemas sobre movimiento uniforme 302
5.° – Aparatos para estudiar el movimiento 303
6.° – Estudio del movimiento libre en el plano de Galileo 308
7.° – Estudio del movimiento uniforme en la máquina de Atwood .. 311
8.° – Modificación de la máquina de Atwood 313
9.° – Estudio del movimiento uniforme en el aparato de Morín 315
10.° – Gráficas del movimiento uniforme 316
11.° – Sinónimos de "espacio" 318
12.° – Ecuaciones dimensionales 321
13.° – Ecuación dimensional de la velocidad 324

II.° – Movimiento uniformemente variado

1.° – Concepto de aceleración (estudiado en el plano de Galileo) .. 325
2.° – Movimiento uniformemente variado 329
3.° – Gráfica de la velocidad, en el movimiento uniformemente variado 331
4.° – Aceleración infinitesimal 335
5.° – Ley de las velocidades 339
6.° – Valor del camino en el movimiento uniformemente acelerado . 341
7.° – Gráfica del camino en el movimiento uniformemente acelerado 352
8.° – Valor de los espacios parciales en el movimiento uniformemente acelereado 354
9° – Valor del espacio integral, con relación a la veloicdad actual .. 355
10.° – Problemas propios del movimiento uniformemente retardado .. 355
11.° – Leyes de la caída de los cuerpos 357

III.° – Distinción entre Cinemática y Dinámica

..... 572

IV.° – Consecuencias del principio de independencia de los movimientos

1.° – Principio de independencia de los movimientos 573
2.° – Composición de movimientos rectilíneos 575
3.° – Forma del movimiento resultante 578
4.° – Clomposición de las velocidades 579
5.° – Movimiento de los proyectiles 580
6.° – Composición de las aceleraciones 583

V.° – Movimiento circular uniforme

1.° – Movimiento giratorio 583
2.° – Velocidad angular 584

3.° – Velocidad lineal efectiva 587
4.° – Velocidad tangencial 588
5.° – La aceleración de la velocidad tangencial 589
6.° – Hodrógrafa del movimiento circular uniforme 593
7.° – Movimiento de rotación 594
8.° – Composición de movimientos curvilíneos 596
9.° – Coordenadas polares 598

VI.° – Movimiento vibratorio harmónico

1.° – Movimientos periódicos 599
2.° – Movimiento harmónico simple 601
3.° – Composición de movimientos harmónicos simples 607

DINAMICA

I.° – Leyes fundamentales

1.° – Las tres leyes fundamentales de la Dinámica 361
2.° – Comprobación de la ley de fuerza, masa y aceleración 365

II.° – Magnitudes mecánicas

1.° – Definición algébrica de masa 369
2.° – Los tres sistemas métricos adoptados en Física 370
3.° – Problemas de fuerza masa y aceleración 373
4.° – Las dos formas de energía mecánica (fuerza estática y fuerza viva) 377
5.° – Impulso y cantidad de movimiento 380
6.° – Trabajo mecánico 386
7.° – Trabajo motor y trabajo resistente 390
8.° – Valor del trabajo 393
9.° – Medida del trabajo 394
10.° – Trabajo y fuerza viva 397
11.° – Energía potencial 398
12.° – Potencia de los generadores de energía 401
13.° – Trabajo de las fuerzas variables 405
14.° – Ejercicios sobre fórmulas 406
15.° – Tabla de los números recíprocos 412

III.° – El rozamiemto

1.° – El rozamiento en general 490
2.° – Roce por deslizamiento 491
3.° – Rozamiento por rodadura 497
4.° – Rozamiento indirecto 501
5.° – Rozamiento total 502
6.° – Aplicación del rozamiento (frenos) 502

IV.° – Máquinas

1.° – Máquinas y aparatos 509
2.° – Trasmisiones 514
3.° – Poleas 521
4.° – Poleas de tracción o garruchas 521

5.° – El trabajo en las palancas 524
6.° – El trabajo en las garruchas o poleas de tracción 529
7.° – Polea diferencial 536
8.° – Torno 537
9.° – Cálculo del trabajo en los engranajes y trasmisiones por contacto 539
10.° – El trabajo en las trasmisiones a distancia 544
11.° – Las ruedas dentadas en la antigüedad 545
12.° – El plano inclinado y sus aplicaciones 549
13.° – La cuña 553
14.° – La hèlice y el tornillo 555
15.° – Aplicación de las máquinas simples a la vida práctica 560
16.° . Máquinas complejas 567

V.° – Dinámica de la rotación

1.° – Fuerzas centrípeta y centrífuga 609
2.° – Experiencias y aplicaciones sobre la fuerza centrífuga 610
3.° – La energía cinética en larotación 615
4.° – Momento de inercia 616
5.° – Relación entre la fuerza motriz y la rotación 621
6.° – Masa ficticia de los volantes 623

VI.° – Movimiento pendular

1.° – Teoría del péndulo 624
2.° – Leyes del péndulo 629
3.° – Péndulo compuesto 636
4.° – Plano de oscilación del péndulo 639

VII.° – Giroscopio

1.° – Ejes libres, en la rotación 640
2.° – Giroscopios y giróstatos 643
3.° – El giróstato Tierra 651

VIII.° – Mecánica sideral

1.° – Movimientos de los planetas 655
2.° – Gravitación 659

IX.° – Influencia mutua, en el movimiento

1.° – Oscilaciones provocadas por otras oscilaciones 662
2.° – Movimiento del centro de gravedad de un sistema 665
3.° – Choque de los cuerpos 666

X.° – Homogeneidad

Homogeneidad en las ecuaciones 674

INDICE DE TABLAS

1.° – Valores naturales del seno de α 285
2.° – Valores naturales de la tangente de α 286
3.° – Valores naturales de la secante de α 288

4.° – Valores naturales del sonoverso de α 289
5.° – Valores trigonométricos de los lados del triángulo rectángulo . 293
6.° – Valores trigonométricos de los lados de cualquier triángulo .. 294
7.° – Unidades de espacio, fuerza, masa y tiempo 373
8.° – Correlación de las distintas unidades de espacio, fuerza, masa y tiempo 374
9.° – Unidades mecánicas (espacio, fuerza, tiempo, trabajo) 395
10.° – Correlación de las distintas unidades de trabajo 395
11.° – Correlación de las distintas unidades de potencia 403
11.° – bis – Fórmulas de Mecánica 407
12.° – Números recríprocos ..... 413 y 414
12.° bis – Correlación de las medidas de volumen, capacidad y peso 423
13.° – Resistencia a la tracción (metales comunes) 483
14.° – Resistencia a la tracción (otros cuerpos) 484
15.° – Resistencia a la tracción (maderas) 485
16.° – Resistencia a la presión 486
17.° – Valores de ρ (rozamiento) para los ferrocarriles 494
18.° – Valores de ρ para vehículos sobre el pavimento 495
19.° – Valores de ρ para presiones inferiores a 1 Kg. 496
20.° – Valores de ρ para el cuero 497
20.° bis – Unidades de trabajo y de potencia 503
21.° – Correlación de las tres valuaciones de la velocidad angular ... 586
22.° – Valores numerícos de las expresiones usuales relacionadas con π 587
23.° – Momentos de inercia baricéntricos 619
24.° – Valores de la razón $\frac{\alpha}{sen\ \alpha}$ 628
25.° – Variación de la exactitud de la ley de isocronismo 631
26.° – Valores de γ (al nivel del mar) 634

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS
Inv. 52 658
24-5-90