MATEMATICA
CURSO MODERNO

DE LOS MISMOS AUTORES

Teoría Elemental de los Conjuntos.

Matemática, Curso Moderno para 1er. año, ciclo básico. Tercera edición.

Matemática y Elementos de Matemática Moderna para 2º año, ciclo básico.

Matemática y Elementos de Matemática Moderna para 4º año Bachi-

Trigonometría, rectilínea y esférica para 5º año de los Colegios Nacionales y Liceos. Segunda edición.

Geometría del Espacio para Colegios Nacionales y Escuelas Normales y Comerciales. Segunda edición.

Elementos de Cálculo Infinitesimal y de Geometría Analítica. Tercera edición.

Aritmética-Algebra, Curso Moderno para Escuelas Industriales. 1er. año, ciclo básico. 16ª edición.

Geometría, Curso Moderno para Escuelas Industriales. 1er. año, ciclo básico. 15ª edición.

Matemática para Escuelas Industriales. 2º año, ciclo básico. 131 edición.

Matemática para Escuelas Industriales. 3er. año, ciclo medio. 12ª edición.

Regla de Cálculo. Instrucciones para su uso. Cuarta edición.

Matemática Financiera de Miguel M. Tajani. Octava edición.

Temas de Análisis Matemático (agotado) de Miguel M. Tajani.

Seguros de Vida (agotado) de Miguel M. Tajani.

MIGUEL M. TAJANI

Ex profesor de la Universidad Nacional de Buenos Aires

Escuela Superior de Comercio Carlos Pellegrini

Profesor de la Universidad Argentina de la Empresa

MANUEL J. VALLEJO

Ex profesor de la Universidad Nacional de Buenos Aires

Escuela Superior de Comercio Carlos Pellegrini

Profesor de la Universidad Argentina de la Empresa

MATEMATICA

CURSO MODERNO

PARA

TERCER AÑO

CICLO BASICO

CESARINI HNOS. — EDITORES
SARMIENTO 3219/31 - BUENOS AIRES

PRINTED IN ARGENTINE
IMPRESO EN ARGENTINA

ALGEBRA

CONJUNTOS Y SUBCONJUNTOS. - REVISION 1

Conjuntos. — Una recta es un conjunto de puntos; esta página es un conjunto de puntos; los números 7, 11, 8 y 13 forman un conjunto de números; los números cuyo cubo es menor que 200 forman un conjunto, etc.

Cada uno de los "objetos" que lo integran se llama *elemento* de ese conjunto.

En rigor, en Matemática se toman como conceptos primitivos las ideas de *conjunto*, *elemento* y *pertenencia*, por lo que no necesitan aclaración.

Notación.

$$\mathbf{A} = \{a, b, c, \ldots, x\}$$

Se lee "el *conjunto* **A** tiene por *elementos* $a, b, c, \ldots, x$".

$$a \in \mathbf{A}$$

Se lee "el elemento a pertenece al conjunto **A**".

Conjuntos iguales.

Dos conjuntos merecen ser llamados iguales si y sólo si tienen los mismos elementos; o sea, si ambos constituyen un mismo conjunto.

Así, los conjuntos.

{números pares menores que 11} y {2, 4, 6, 8, 10}

son iguales porque sus elementos son los mismos.

La definición de igualdad se indica así:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

si y sólo si

1) $h \in \mathbf{A} \Rightarrow h \in \mathbf{B}$

que se lee "*h* pertenece a **A**, entonces *h* pertenece a **B**";

2) $g \in \mathbf{B} \Rightarrow g \in \mathbf{A}$

que se lee "*g* pertenece a **B**, entonces *g* pertenece a **A**"; siendo *h* y *g* nombres de objetos cualesquiera que pertenecen a ambos conjuntos.

Conjunto vacío: $\varnothing$.

Un conjunto que no tiene ningún elemento se llama conjunto vacío.

No está de más aclarar que el conjunto vacío y el conjunto formado por el número cero son distintos, pues el conjunto vacío no tiene ningún elemento y el otro tiene un elemento, que es el cero.

Ejemplos:

1) {numeros primos múltiplos de 9} $= \varnothing$
2) {insectos que sean mamíferos} $= \varnothing$
3) $\{x/x \in \mathbf{N} \;\wedge\; 10 + x < 4\} = \varnothing$

Se lee "conjunto formado por elementos x tales que x pertenece al conjunto **N** de todos los números naturales y la suma $10 + x$ debe ser menor que 4".

Como no existe ningún elemento del conjunto números naturales que cumpla esa condición, se obtiene un conjunto vacío.

La inclusión.

Se dice que el conjunto **A** es *una parte* o un *subconjunto* de otro **B**, o que está incluido en este otro, cuando todo elemento del primero es elemento del segundo.

Ejemplo:

Sea **A** el conjunto de los habitantes de un país; sus elementos son personas. Consideremos ahora un conjunto **H** tal que

$$\mathbf{H} = \{\text{miembros de } \mathbf{A} \text{ que sean negros}\}$$

Probablemente haya en ese país habitantes no negros, y en ese caso **A** tiene más elementos que **H**; pero podría ocurrir que todos los habitantes fueran negros, y entonces **H** = **A**.
En cambos casos es cierto que todo elemento de **H** es elemento de **A**.

En símbolos:

$$h \in \mathbf{H} \Rightarrow h \in \mathbf{A}$$

Se lee "si el elemento *h* pertenece al conjunto **H**, entonces *h* pertenece al conjunto **A**".
Cuando esto suceda, se dice que:

a) el conjunto **H** es *parte* del conjunto **A**,

o que

b) el conjunto **H** es *subconjunto* del conjunto **A**,

o que

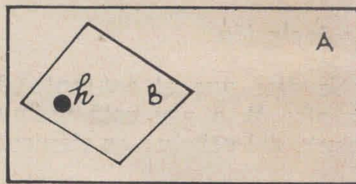
c) el conjunto **A** *incluye* o *contiene* al conjunto **H**.

Todas estas frases significan lo mismo y se simbolizan con una U acostada, con la abertura hacia el conjunto que incluye.

Así:

$\mathbf{H} \subset \mathbf{A}$ y $\mathbf{A} \supset \mathbf{H}$ Se lee "**H** es *parte* de **A** y **A** *incluye* a **H**".

El conjunto **B** es *parte* de **A** si y sólo si cada elemento de **B** es también elemento de **A**.



En símbolos:

$$\mathbf{B} \subset \mathbf{A} \iff h \in \mathbf{B} \Rightarrow h \in \mathbf{A}$$

Con esta definición se admite que todo *conjunto* es un *subconjunto de sí mismo.* En otras palabras, todo conjunto es *parte* de sí mismo.

Para cualquier conjunto **P** es cierto que $\mathbf{P} \subset \mathbf{P}$.

Esto no coincide exactamente con el uso común de la palabra *parte*, pero en Matemática es más cómodo decir también que **B** es *parte* de **A** cuando $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Cuando **B** es parte de **A** y no es todo **A**, diremos que **B** es *parte propia* de **A**, o bien que el conjunto **B** está *incluido estrictamente* en el conjunto **A**.

Así, si

$\mathbf{A} = \{$habitantes de un país$\}$

$\mathbf{B} = \{$miembros de **A** que tienen piel negra$\}$

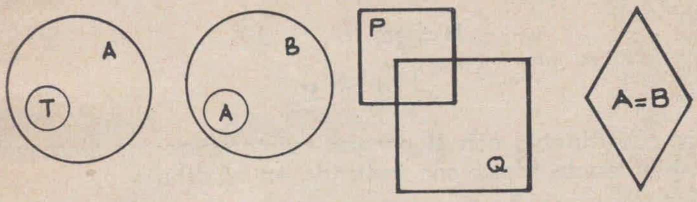
Es seguro que $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$, y como $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, resulta que **B** es *parte propia* de **A**.

Simbólicamente,

$$\mathbf{B} \subsetneqq \mathbf{A} \quad \text{o} \quad \mathbf{A} \supsetneqq \mathbf{B}$$

Se lee "**B** está incluida propiamente en **A**".

Ejemplos:



1) $A \not\subset T$ $\quad$ $B \supset A$ $\quad$ $Q \not\subset P$ $\quad$ $A \subset B$

$T \supsetneqq A$ $\quad$ $B \subset A$

2) $A = \{15, 2, 1, 3, 0\}$

$B = \{2, 7, 8, 9, 15, 0, 10, 1, 3\}$

$A \subset B$

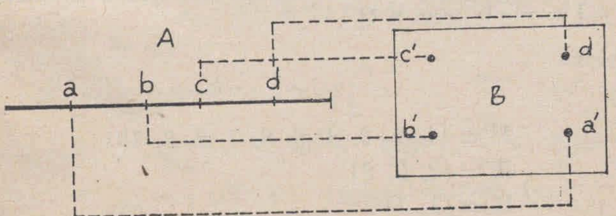
Observaciones:

- La *inclusión* no es recíproca, salvo que *los dos cojuntos sean iguales.*
- La *inclusión* es *transitiva.*

Conjuntos coordinables.

Se dice que un conjunto es *coordinable* con otro si a cada elemento del primero corresponde un elemento y sólo uno del segundo, siendo cada elemento de éste correspondiente de uno y sólo uno del primero.

Ejemplo:



Si

$$\mathbf{A} = \{a,\ b,\ c,\ d\}$$

y

$$\mathbf{B} = \{a',\ b',\ c',\ d'\}$$

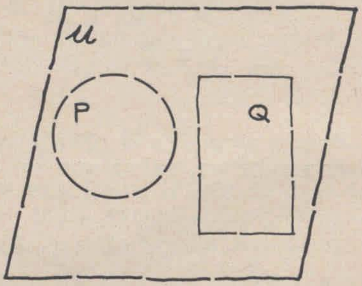
es

$$\mathbf{A} \ \overline{\wedge}\ \mathbf{B}$$

A es coordinable con **B** porque existe entre sus elementos la correspondencia biunívoca indicada en el dibujo.

Conjuntos disjuntos.

Se dice que dos conjuntos son *disjuntos* si ambos son subconjuntos de un mismo conjunto y no tienen elementos comunes



En símbolos:

Si

$$\mathbf{P} \subset \mathbf{U} \ \wedge\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{U}$$

$$\mathbf{P})\,(\mathbf{Q} \iff \nexists\, x/x \in \mathbf{P} \ \wedge\ x \in \mathbf{Q}$$

Se lee "los conjuntos **P** y **Q** son disjuntos [**P**) (**Q**] si y sólo si [$\iff$] no existe [$\nexists$] un elemento x tal que x pertenece [$\in$] a **P** y [$\wedge$] x pertenece a **Q**".

Ejemplos:

a) Si

$$\mathbf{U} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$$
$$\mathbf{A} = \{3,\ 6,\ 9\}$$
$$\mathbf{B} = \{1,\ 7\}$$

A y **B** son disjuntos **A) (B** porque son subconjuntos de **U** y no tienen elementos comunes.

b) Si

$$\mathbf{F} = \{\text{polígonos}\}$$
$$\mathbf{P} = \{\text{triángulos}\}$$
$$\mathbf{Q} = \{\text{pentágonos}\}$$

P y **Q** son *disjuntos* **P) (Q** porque son subconjuntos de **F** y no tienen elementos comunes.

Diferencia ($\setminus$).

Se llama *diferencia* entre un conjunto (**A**) y otro (**B**) al conjunto que tiene por elementos a los del primero que no pertenecen al segundo.

En símbolos:

$$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{x / x \in \mathbf{A} \quad \wedge \quad x \notin \mathbf{B}\}$$

Se lee: La diferencia entre el conjunto (**A**) y el (**B**) es el conjunto de elementos (x) tales que pertenecen a (**A**) y no pertenecen a (**B**).

Ejemplos:

I) Si $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\mathbf{B} = \{1, 4, 5\}$

es $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{2, 3\}$

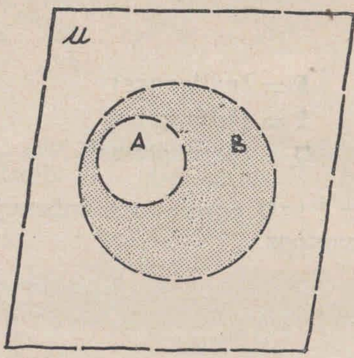
II) Si $\mathbf{N} = \{\text{números naturales}\}$

y $\mathbf{P} = \{x / x \in \mathbf{N} \wedge x = \dot{2}\}$

es $\mathbf{N} \setminus \mathbf{P} = \{\text{números impares}\}$

III) Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$

es $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A} = \{\text{figura sombreada}\}$



IV) Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ es $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \emptyset$
ya que no existen elementos de **A** que no pertenecen a **B**.

Propiedad conmutativa.

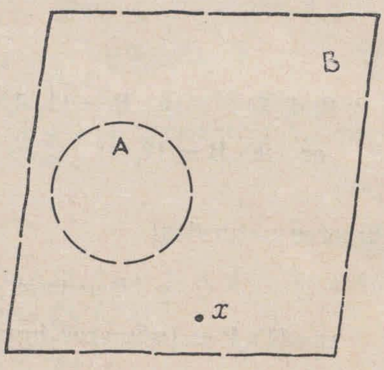
De los ejemplos III y IV se establece que la diferencia de conjuntos no es conmutativa.

En símbolos:

$$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$$

Complementación.

El complemento de un conjunto **A** con respecto a otro **B** del



cual es parte, es el conjunto de los elementos del segundo que no pertenecen al primero.

En símbolos:

$$\text{Si} \quad \mathbf{A} \subset \mathbf{B} \quad \text{es} \quad \complement_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \{x / x \in \mathbf{B} \quad \wedge \quad x \notin \mathbf{A}\}$$

Se lee "el *complemento* del conjunto **A** con respecto al **B** [$\complement_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$] es el conjunto formado por los elementos x tales que pertenecen [$\in$] a **B** y [$\wedge$] no pertenecen [$\notin$] a **A**".

Ejemplos:

a) Si

$$\mathbf{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

y

$$\mathbf{B} = \{6, 12, 18\}$$

es

$$\complement_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$$

b) En una oficina de correos, el conjunto de empleados varones es el complemento del conjunto de empleadas con respecto al conjunto total del personal de esa oficina.

Otra notación conjuntista.

La *complementación* puede simbolizarse así:
Si **N** es *complemento* de **P**, se indica

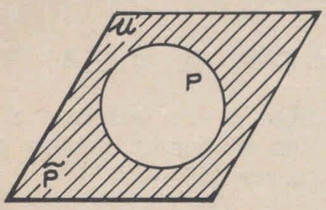
$$\mathbf{N} \sim \mathbf{P}$$

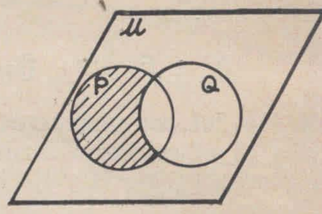
o bien

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{N}$$

Relación entre complementación y diferencia de dos conjuntos.

Si **P** es un subconjunto dado del conjunto universal **U**, se puede definir un nuevo conjunto $\tilde{\mathbf{P}}$ denominado *complemento de* **P** de la siguiente forma: $\tilde{\mathbf{P}}$ es el conjunto de todos los elementos de **U** que no están contenidos en **P**. La porción sombreada de la figura es el *complemento* del conjunto **P**.



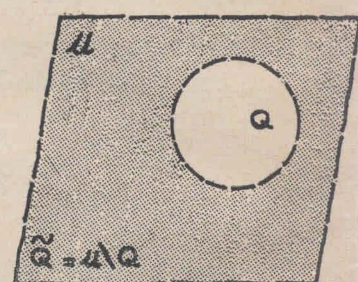


A veces interesa solamente una parte del complemento de un conjunto. Por ejemplo, podemos desear considerar la parte del complemento del conjunto **Q** que está contenida en **P**, esto es, el conjunto $\mathbf{P} \cap \widetilde{\mathbf{Q}}$. La porción sombreada es $\mathbf{P} \cap \widetilde{\mathbf{Q}}$. Teniendo en cuenta la definición de *diferencia* ($\setminus$) de **P** y **Q**, es decir, el conjunto que tiene aquellos elementos de **P** que no pertenecen a **Q**, podemos decir, como lo visualiza la figura, que $\mathbf{P} \cap \widetilde{\mathbf{Q}}$ y $\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}$ constituyen *el mismo conjunto.*

El *complemento* de un *subconjunto* es un caso especial de un conjunto *diferencia,* puesto que podemos escribir $\widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{U} \setminus \mathbf{Q}$.

(La figura en la página siguiente.)

El complemento del conjunto vacío, $\varnothing$, es el conjunto universal **U**, así como el complemento del conjunto universal es el conjunto vacío.

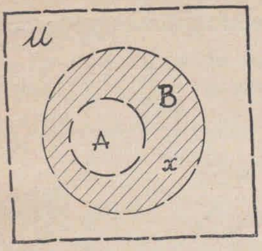


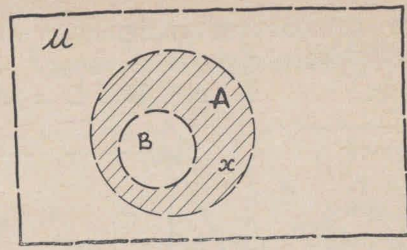
De acuerdo a las definiciones de *diferencia* entre conjuntos y de *complemento* de un conjunto con respecto a otro, se puede escribir que

$$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \complement_{A}\mathbf{B} \qquad \text{si} \qquad \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$$

y

$$\mathbf{B} \setminus \mathbf{A} = \complement_{B}\mathbf{A} \qquad \text{si} \qquad \mathbf{A} \subset \mathbf{B}$$





Por ello el complemento de un conjunto **A** con respecto a otro **B** suele denominarse *diferencia relativa* entre **B** y **A**.

Unión. — Se llama *unión* ($\cup$) de un conjunto **A** con otro **B** al conjunto cuyos elementos pertenecen al **A** o al **B**, o bien pueden pertenecer a ambos conjuntos. (La conjunción "o" se usa en sus dos sentidos diferentes: excluyente e incluyente.)

En símbolos:

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x / x \in \mathbf{A} \quad \vee \quad x \in \mathbf{B}\}$$

Se lee "la unión de **A** y **B** es el conjunto de elementos x tales que pertenecen al **A** o al **B** o a ambos". El símbolo $\vee$ representa la palabra "o".

Ejemplos:

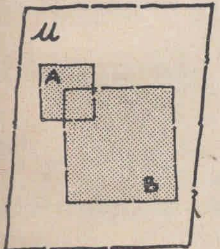
I) Si

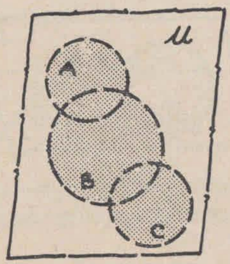
$$\mathbf{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \{3, 6, 9, 12\}$$

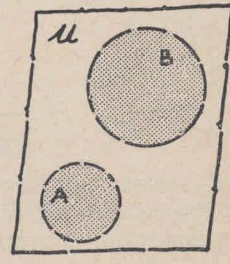
es

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$

II) En cada una de estas figuras, la *unión* o *suma* es la parte sombreada.

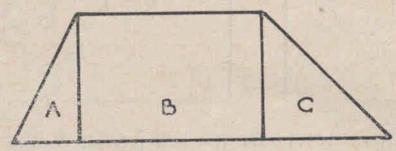






III) Dibujar dos triángulos y un rectángulo cuya unión sea un trapecio:

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C} = \{\text{trapecio}\}$$



IV) La *unión* de los conjuntos de alumnos de cada una de las divisiones de una escuela es el conjunto de los alumnos de esa escuela.

Intersección. — La *intersección* ($\cap$) de los conjuntos **A** y **B** es el conjunto cuyos elementos son comunes a los conjuntos dados, es decir, que pertenecen a ambos.

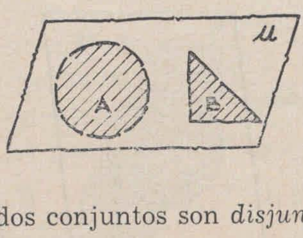
En símbolos:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x / x \in \mathbf{A} \ \wedge \ x \in \mathbf{B}\}$$

Se lee "intersección de **A** y **B** es el conjunto de elementos x tales que pertenecen a **A** y a **B**". El símbolo $\wedge$ representa la palabra "*y*".

Si los conjuntos dados son *disjuntos,* la intersección de los mismos es un conjunto vacío:

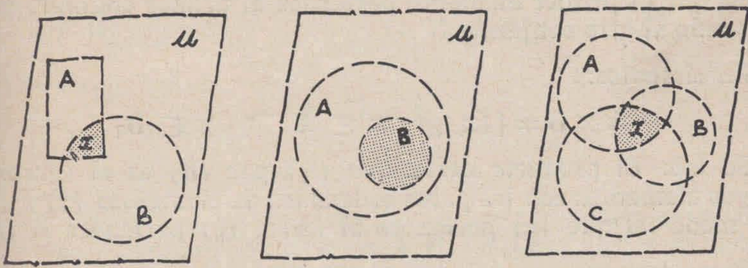
$$\mathbf{A})(\mathbf{B} \iff \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$$



Recordemos que dos conjuntos son *disjuntos* si no tienen ningún elemento común.

Ejemplos:

I) En cada una de estas figuras, la *intersección* es la parte sombreada.



II) Si

$$\mathbf{A} = \{1, 3, 5, 7, 11\} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \{3, 6, 9\}$$

es

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{3\}$$

III) Si consideramos la expresión $|x| < 3$ para x número entero, significa

$$x > -3 \quad \text{y} \quad x < 3$$

Es decir, el conjunto

$$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

es la intersección de los conjuntos

$$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

y

$$\{2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots\}$$

La **unión** y la **intersección** de conjuntos son operaciones binarias, pues generan un nuevo conjunto a partir de dos conjuntos dados.

Producto cartesiano.

El *producto cartesiano* del conjunto (**A**) por el (**B**) es el conjunto que tiene por elementos a pares ordenados de elementos tales que el primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo al otro conjunto.

En símbolos:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(x, y) \,/\, x \in \mathbf{A} \quad \wedge \quad y \in \mathbf{B}\}$$

Se lee: El *producto cartesiano* (**A**) por (**B**) es el conjunto cuyos elementos son los pares ordenados de elementos (x) e (y) de modo tal que (x) pertenece al (**A**) e (y) pertenece al (**B**).

Ejemplo:

Si $\mathbf{A} = \{1, 2, 3\}$ y $\mathbf{B} = \{5, 6\}$

es $$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left\{ \begin{matrix} (1, 5) \; ; \; (2, 5) \; ; \; (3, 5) \\ (1, 6) \; ; \; (2, 6) \; ; \; (3, 6) \end{matrix} \right\}$$

Caso particular

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \{(x, y) \,/\, x \in \mathbf{A} \quad \wedge \quad y \in \mathbf{A}\}$$

es el *producto cartesiano* del conjunto (**A**).

Producto de dos números naturales. — De esta operación conjuntista se infiere la siguiente

DEFINICIÓN. — Se llama *producto de dos números naturales* (a, b) al *número de elementos* del producto cartesiano de un conjunto (**A**) de (a) elementos por otro (**B**) de (b) elementos.

Ejemplos:

I) Si $a = 3$; $b = 4$; $\mathbf{A} = \{x, y, z\}$; $\mathbf{B} = \{t, u, v, w\}$

y dado que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left\{ \begin{matrix} (x, t) \; ; \; (y, t) \; ; \; (z, t) \\ (x, u) \; ; \; (y, u) \; ; \; (z, u) \\ (x, v) \; ; \; (y, v) \; ; \; (z, v) \\ (x, w) \; ; \; (y, w) \; ; \; (z, w) \end{matrix} \right\}$$

tiene 12 elementos, es

$$3 \times 4 = 12$$

II) Si $a = 4$; $b = 1$; $\mathbf{A} = \{x, y, z, u\}$; $\mathbf{B} = \{t\}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(x, t) \ ; \ (y, t) \ ; \ (z, t) \ ; \ (u, t)\}$$

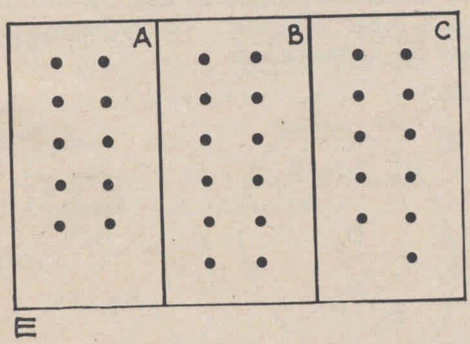
tiene 4 elementos, es

$$4 \times 1 = 4..$$

Partición de un conjunto.

Supongamos que los alumnos que ocupan un aula se reparten en tres columnas. Llamamos **A** al conjunto de los alumnos de la primera columna, **B** al conjunto de los alumnos de la segunda columna y **C** al conjunto de los alumnos de la tercera columna. Al conjunto de los alumnos del aula lo llamamos **E**.

Los conjuntos **A**, **B** y **C** no son vacíos y los alumnos del aula pertenecen a ellos. Esto se expresa diciendo que el *conjunto de conjuntos* {**A**, **B**, **C**} es una *partición* de **E**.



Con símbolos:

a) Ninguno de los conjuntos es vacío:

$$\mathbf{A} \neq \emptyset \qquad \mathbf{B} \neq \emptyset \qquad \mathbf{C} \neq \emptyset$$

b) Ningún alumno pertenece a dos de los conjuntos **A**, **B**, **C**:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \emptyset$$

Es decir, estos conjuntos son *disjuntos.*

c) Todo alumno del aula de referencia pertenece a uno de los conjuntos **A**, **B**, **C**:

$$\{\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}\} = \mathbf{E}$$

En consecuencia se puede aceptar la:

Definición. — Un conjunto **M** de partes no vacías de **E** es una partición del conjunto **E** si y solo si todo elemento de **E** pertenece a un conjunto y solo a uno, de **M**.

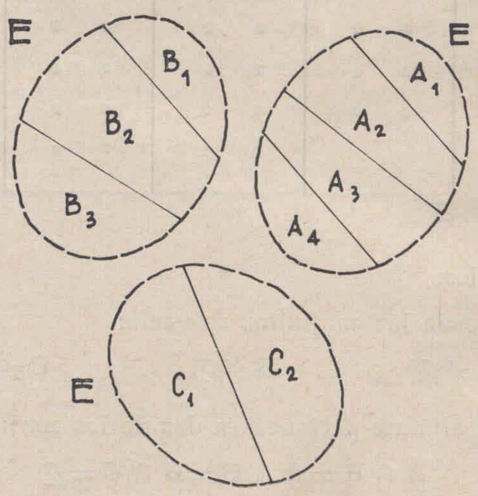
Simbólicamente:

$$\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\} \text{ es una partición de } \mathbf{E}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1) \ \mathbf{A}_1 \neq \emptyset \quad \mathbf{A}_2 \neq \emptyset \quad \mathbf{A}_3 \neq \emptyset \quad \mathbf{A}_4 \neq \emptyset \\ 2) \ \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_4 = \\ \quad = \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4 = \emptyset \\ 3) \ \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \mathbf{A}_3 \cup \mathbf{A}_4 = \mathbf{E} \end{cases}$$

Cada uno de los subconjuntos de **E** se llama *clase de la partición*, o bien, con otras palabras: los conjuntos elementos de **M** se llaman *clase de la partición.*

Gráficamente:



1) $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$ es una partición de **E** con cuatro *subconjuntos o clases.*

2) $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3\}$ es partición de **E** con tres clases.

3) $\{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2\}$ es partición de **E** con dos clases.

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Estructura de un conjunto. —*Definición.* — Un conjunto sobre el cual están definidas una o más operaciones se dice que está munido de una *estructura.*

Las estructuras más importantes del Algebra Moderna son: Grupo, Anillo, Cuerpo y Espacio Vectorial.

Las propiedades de una estructura son aplicables a todos los conjuntos que tengan esa estructura.

Estructura de Grupo.

Se dice que una operación, que se representa con el símbolo $(\ast)$, dada sobre un conjunto **A**, define una estructura de grupo sobre **A**, si y solamente si esa operación posee las cuatro propiedades siguientes:

1ª) La operación $(\ast)$ es una ley de composición interna, o sea satisface la propiedad de clausura.

2ª) Es asociativa:

$$(a \ast b) \ast c = a \ast (b \ast c)$$

3ª) Existe un elemento neutro (e):

$$e \in \mathbf{A} \quad : \quad e \ast a = a \ast e = a$$

4ª) Todo número $a \in \mathbf{A}$ admite un simétrico (a'):

$$a' \in \mathbf{A} \quad : \quad a \ast a' = a' \ast a = e$$

Además, cuando la operación $(\ast)$ sobre un conjunto **A** posee también la propiedad conmutativa $(a \ast b) = (b \ast a)$ se dice que tiene estructura de grupo conmutativo o grupo abeliano.

Ejemplo de Grupo.

El conjunto **Z** de los números enteros tiene estructura de grupo con la operación de adición.

En efecto:

1) La adición es una ley de composición interna en el conjunto **Z** porque la suma de dos números enteros es otro número entero.

2) Es asociativa:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

3) Admite un elemento neutro, el cero:

$$0 \in \mathbf{Z} \quad : \quad 0+a=a+0=a$$

4) Todo elemento perteneciente a los números enteros, $a \in \mathbf{Z}$, admite un elemento simétrico (a').

$$a' = -a \in \mathbf{Z} \text{ tal que } a+(-a)=(-a)+a=0$$

Además, la suma es conmutativa $a+b=b+a$, entonces **Z** tiene estructura de grupo aditivo abeliano.

En cambio, el mismo conjunto de los números enteros, **Z**, no tiene estructura de grupo con la multiplicación porque el simétrico de un entero diferente de (-1) y de $(+1)$ no es un número entero, esto es, no pertenece a **Z**.

Ejemplo:

El simétrico de -9 es $-\dfrac{1}{9} \notin \mathbf{Z}$.

Estructura de anillo.

Se dice que dos operaciones representadas por los símbolos $*$ y **T**, dadas sobre un conjunto **A**, definen una *estructura de anillo* sobre **A** si y solamente si se cumple que:

Para la operación $(*)$:

1) Es ley de composición interna.

2) Es asociativa:

$$(a \ast b) \ast c = a \ast (b \ast c)$$

3) Es conmutativa:

$$a \ast b = b \ast a$$

4) Admite un elemento neutro $e \in \mathbf{A}$:

$$e \ast a = a \ast e = a$$

5) Todo elemento $a \in \mathbf{A}$ admite un elemento simétrico (a'):

$$a' \in \mathbf{A} \quad : \quad a \ast a' = a' \ast a = e \text{ (elemento neutro)}$$

Para la operación $(\mathbf{T})$:

1) Es ley de composición interna.

2) Es asociativa:

$$(a\,\mathbf{T}\,b)\,\mathbf{T}\,c = a\,\mathbf{T}\,(b\,\mathbf{T}\,c)$$

3) Es distributiva en relación a la primera operación $(\ast)$, esto es:

$$(a \ast b)\,\mathbf{T}\,c = (a\,\mathbf{T}\,c) \ast (b\,\mathbf{T}\,c)$$
$$a\,\mathbf{T}\,(b \ast c) = (a\,\mathbf{T}\,b) \ast (a\,\mathbf{T}\,c)$$

Ejemplo:

El conjunto **Z** de los números enteros tiene estructura de anillo con las operaciones de suma y multiplicación.

En efecto:

1) La suma y la multiplicación son leyes de composición interna para **Z**.

2) Se cumple en **Z** la propiedad asociativa en ambas operaciones.

3) Para la suma existe elemento neutro, simétrico y es conmutativa.

4) La multiplicación es distributiva con respecto a la adición

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Estructura de cuerpo.

Un conjunto **A** en el que están definidas dos operaciones $\ast$ y **T**, tiene *estructura de cuerpo* cuando estas operaciones tienen todas las propiedades de la estructura de anillo y además la segunda operación **T** tiene elemento neutro, elemento inverso y es conmutativa.

Los elementos $\{a, b, c, \ldots\}$ de un cuerpo deben poseer las siguientes propiedades:

Para la operación $(\ast)$:

1) Es ley de composición interna.

2) Es asociativa:

$$(a \ast b) \ast c = a \ast (b \ast c)$$

3) Es conmutativa:

$$a \ast b = b \ast a$$

4) Existencia de elemento neutro (e):

$$a \ast e = e \ast a = a$$

5) Existencia de elemento inverso (a'):

$$a \ast a' = a' \ast a = e$$

Para la operación $(\mathbf{T})$:

1) Es ley de composición interna.

2) Es asociativa:

$$(a \,\mathbf{T}\, b) \,\mathbf{T}\, c = a \,\mathbf{T}\, (b \,\mathbf{T}\, c)$$

3) Es distributiva con respecto a la operación $(\ast)$:

$$(a \ast b) \mathbf{T} c = (a \mathbf{T} c) \ast (b \mathbf{T} c)$$
$$c \mathbf{T} (a \ast b) = (c \mathbf{T} a) \ast (c \mathbf{T} b)$$

4) Existencia de elemento neutro (e):

$$a \mathbf{T} e = e \mathbf{T} a = a$$

5) Existencia de elemento inverso (a'):

$$a \mathbf{T} a' = a' \mathbf{T} a = e$$

6) Es conmutativa:

$$a \mathbf{T} b = b \mathbf{T} a$$

Ejemplo:

El conjunto de los números racionales **Q** con las operaciones de suma y multiplicación tiene estructura de cuerpo.

En efecto:

Para la operación suma:

1) Es ley de composición interna, ya que la suma de dos números racionales es otro número racional.

2) Es asociativa:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{m}{n} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{m}{n}$$

3) Es conmutativa:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

4) Existencia de elemento neutro, el cero:

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

5) Existencia de elemento inverso o simétrico:

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$$

Para la operación multiplicación:

1) Es ley de composición interna.

2) Es asociativa:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}$$

3) Es distributiva con respecto a la adición:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}\right)$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\right)$$

4) Existencia de elemento neutro, el uno:

$$\frac{a}{b}\cdot 1=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

5) Existencia de elemento inverso o simétrico, el recíproco:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=1 \text{ (elemento neutro)}$$

6) Es conmutativa:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

El conjunto **Z** de los números enteros munido de las operaciones suma y multiplicación no tiene estructura de cuerpo pues para la multiplicación el simétrico de $a \in \mathbf{Z}$ es $\frac{1}{a} \notin \mathbf{Z}$, siempre que $a \neq \pm 1$, es decir no tiene simétrico en **Z**.

EJERCICIOS

I) De los conjuntos dados, ¿cuáles son iguales?

$$\mathbf{A} = \{a, b, c, m, n\} \qquad \mathbf{B} = \{a, b, c, n, g\}$$

$$\mathbf{C} = \{c, n, b, m, a\}$$

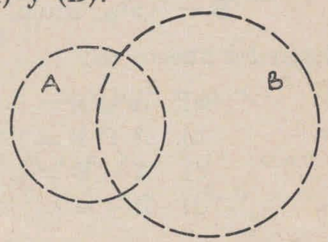
R.: (**A**) y (**C**)

II) Teniendo en cuenta que

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \not\subset \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \not\supset \mathbf{B} \end{array}\right\} \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$$

dibujar un diagrama de conjuntos (**A**) y (**B**).

R.:

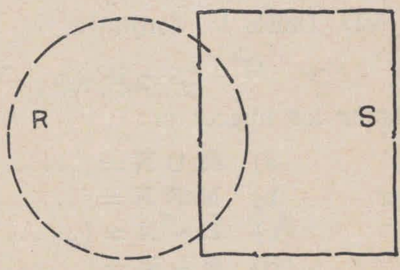


III) Teniendo en cuenta el diagrama, llenar los huecos.

$\ldots \not\subset \ldots$

$\ldots \not\supset \ldots$

$\ldots \cap \ldots \neq \emptyset$



R.: $\mathbf{R} \not\subset \mathbf{S}$

$\mathbf{R} \not\supset \mathbf{S}$

$\mathbf{R} \cap \mathbf{S} \neq \emptyset$

IV) Dados los conjuntos siguientes, llenar los huecos:

$\mathbf{R} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ $\mathbf{S} = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$

a) $\mathbf{R} \cup \mathbf{S} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
b) $\mathbf{R} \cap \mathbf{S} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
c) $\mathbf{R} \sim \mathbf{S} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
d) $\mathbf{S} \sim \mathbf{R} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

R.: a) $\{0, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15$
b) $\{3, 9\}$
c) $\{0, 6, 12, 15\}$
d) $\{1, 5, 7, 11, 13\}$

V) Dados los conjuntos

$\mathbf{B} = \{\text{gato, ratón, perro}\}$ y $\mathbf{A} = \{\text{ratón}\}$

llenar los huecos en:

a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
c) $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
d) $\mathbf{B} \sim \mathbf{A} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

R.: {gato, ratón, perro}
R.: {ratón}
R.: {gato, perro}
R.: $\varnothing$

VI) Dados los conjuntos

$\mathbf{M} = \{\gamma, \alpha, \mu, \varrho\}$ y $\mathbf{N} = \{\alpha, \gamma, \mu, \varrho\}$

llenar los huecos en:

a) $\mathbf{M} \cup \mathbf{N} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
b) $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
c) $\mathbf{M} \sim \mathbf{N} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
d) $\mathbf{N} \sim \mathbf{M} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

R.: $\{\alpha, \gamma, \mu, \varrho\}$
R.: $\{\alpha, \gamma, \mu, \varrho\}$
R.: $\varnothing$
R.: $\varnothing$

VII) Dados los conjuntos

$\mathbf{R} = \{a, b, c, g, h\}$, $\mathbf{T} = \{b, c, k, m\}$ y $\mathbf{W} = \{j, k, p, d, i\}$

llenar los huecos en:

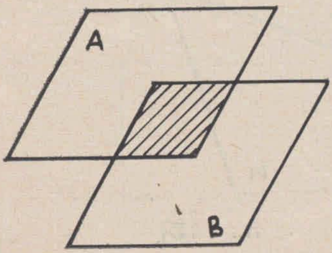
a) $\mathbf{R} \cap \mathbf{T} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
b) $\mathbf{R} \cap \mathbf{W} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
c) $\mathbf{R} \cup \mathbf{W} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
d) $\mathbf{T} \cap \mathbf{W} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
e) $\mathbf{R} \cup \mathbf{T} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
f) $\mathbf{T} \cup \mathbf{W} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

R.: $\{b, c\}$
R.: $\varnothing$
R.: $\{a, b, c, g, h, j, k, p, d, i\}$
R.: $\{k\}$
R.: $\{a, b, c, g, h, k, m\}$
R.: $\{b, c, k, m, j, k, p, d, i\}$

VIII) Escribir el siguiente conjunto de cuatro maneras diferentes:

$\{x, y, u, v\} = \{\ldots, \ldots, \ldots, \ldots\} = \{\ldots, \ldots, \ldots, \ldots\} = \{\ldots, \ldots, \ldots, \ldots\}$

IX) Describir este diagrama simbólicamente:

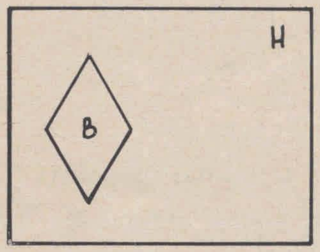


R.: $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$
$\mathbf{A} \not\supset \mathbf{B}$
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \varnothing$

X) ¿Qué lado del símbolo $\subset$ señala hacia el subconjunto, el lado curvo o el abierto?

$\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$ R.: El lado curvo

XI) Si se indica **H** $\supset$ **B**, ¿el lado curvo del símbolo $\supset$ señala al subconjunto?



R.: Sí

XII) Si **A** $\subset$ **B**, entonces **A** $\cup$ **B** $= \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

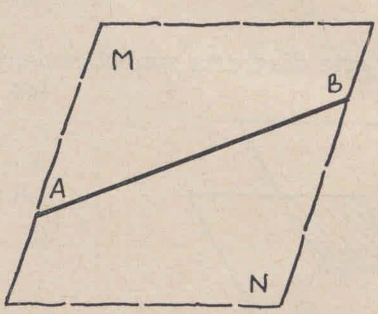
R.: {**B**}

XIII) Complete cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Si **A** $\subset$ **B** y **A** $\supset$ **B**, entonces $\{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

R.: {**A** = **B**}

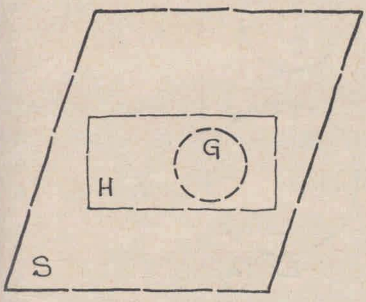
b) De acuerdo con los conjuntos **M** y **N** del grabado, determinar **M** $\cap$ **N** $= \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

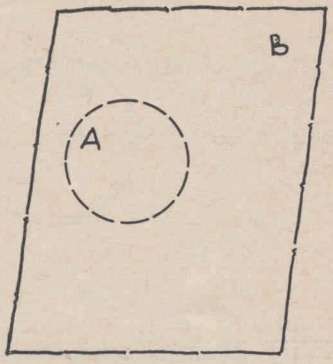


R.: $\{\overleftrightarrow{\mathbf{AB}}\}$

c) Si $\mathbf{G} \subset \mathbf{H}$ y $\mathbf{H} \subset \mathbf{S}$, entonces $\{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

R.: $\{\mathbf{G} \subset \mathbf{S}\}$





d) Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, determinar el conjunto $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

R.: $\{\mathbf{A}\}$

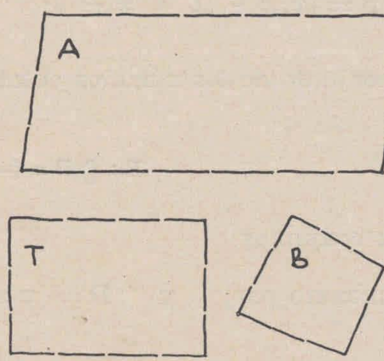
XIV) Llenar el hueco en

$\{\text{múltiplos de } 3\} \cap \{\text{múltiplos de } 5\} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

R.: $\{\text{múltiplos de } 15\}$

XV) Teniendo en cuenta el diagrama, llenar el hueco en

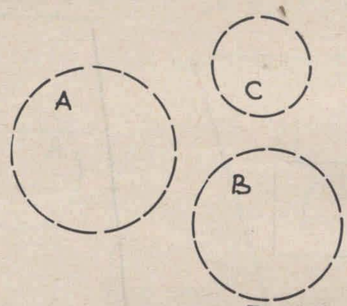
$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{T} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$



R.: $\varnothing$

XVI) Observando el diagrama, llenar el hueco en

$$\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$



R.: $\{\mathbf{A}\}$

XVII) Dado el conjunto

$$\mathbf{A} = \{x/x \in \mathbf{N} \wedge x > 0\}$$

siendo

$$\mathbf{N} = \{\text{conjunto de números naturales}\}$$

hallar $\complement_N \mathbf{A}$.

R.: $\complement_N \mathbf{A} = \varnothing$

XVIII) Dado el conjunto

$$\mathbf{B} = \{x/x \in \mathbf{Z} \wedge x \geqq 0\}$$

siendo

$$\mathbf{Z} = \{\text{conjunto de los números enteros}\}$$

hallar $\complement_Z \mathbf{B}$.

R.: $\complement_Z \mathbf{B} = \{-1, -2, -3, \ldots$

XIX) Dados los conjuntos

$$\mathbf{P} = \{x/x \text{ número par}\} \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \{x/x \in \mathbf{N}\}$$

hallar $\complement_D \mathbf{P}$.

R.: $\complement_D \mathbf{P} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

XX) Dados los conjuntos

$$\mathbf{H} = \{x/|x| > 6\} \quad \text{y} \quad \mathbf{P} = \{x/x \in \mathbf{Z}\}$$

llar $\complement_P \mathbf{H}$.

R.: $\complement_P \mathbf{H} = \{|6|, |5|, |4|, |3|, |2|, |1|, 0\}$

XXI) Teniendo en cuenta las definiciones de unión e intersección, completar las siguientes relaciones:

a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \dots$
R.: $\mathbf{A}$

b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{A} = \dots$
R.: $\mathbf{A}$

c) $\mathbf{A} \cup \mathbf{U} = \dots$
R.: $\mathbf{U}$

d) $\mathbf{A} \cap \varnothing = \dots$
R.: $\varnothing$

e) $\mathbf{A} \cap \mathbf{U} = \dots$
R.: $\mathbf{A}$

f) $\mathbf{A} \cup \varnothing = \dots$
R.: $\mathbf{A}$

XXII) Teniendo en cuenta la definición de complemento, stablecer las siguientes relaciones:

a) $\mathbf{A} \cup \widetilde{\mathbf{A}} = \dots$
R.: $\mathbf{U}$

b) $\mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}} = \dots$
R.: $\varnothing$

c) $\widetilde{\mathbf{U}} = \dots$
R.: $\varnothing$

XXIII) Completar las siguientes relaciones:

a) $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \dots$
R.: $\mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{B}}$

b) $\mathbf{U} \setminus \mathbf{A} = \dots$
R.: $\widetilde{\mathbf{A}}$

c) $\mathbf{A} \setminus \mathbf{U} = \dots$
R.: $\varnothing$

d) $\mathbf{A} \setminus \varnothing = \dots$
R.: $\mathbf{A}$

e) $\varnothing \setminus \mathbf{A} = \dots$
R.: $\varnothing$

f) $\mathbf{A} \setminus \mathbf{A} = \dots$
R.: $\varnothing$

g) $(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \setminus \mathbf{C} = \mathbf{A} \setminus \dots$
R.: $\mathbf{A} \setminus (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

XXIV) Completar la relación siguiente

{Triángulos isósceles} ∩ {Triángulos rectángulos} = {. . . .}

R.: {△ rectángulos isósceles}

XXV) Indicar correctamente un subconjunto de los triá gulos.

R.: {△ rectángulos}, {△ isósceles
{△ oblicuángulos}, etc.

XXVI) Dados los números 12 y 60, ¿qué representa la *uni* y qué la *intersección* de estos números?

R.: 1º) El m. c. m.
2º) El m. c. d.

RECAPITULACION DE LAS REGLAS OPERATIVAS CON NUMEROS ENTEROS Y CON NUMEROS RACIONALES

2

Números enteros. — Hemos visto que la condición de posibilidad de la sustracción de *números naturales,* dice que: El minuendo debe ser mayor o igual que el sustraendo.

Para que la sustracción sea posible en todos los casos, los matemáticos han creado una nueva clase de números llamados *números negativos.*

Dado que interesa ver cómo estos números solucionan el problema de la sustracción en los casos de imposibilidad antes señalados, se amplía el campo de los números creando a la clase de *números enteros,* compuesta por los números naturales y los negativos.

Definiremos las relaciones de igualdad y desigualdad y las operaciones aritméticas en forma sumaria.

Relación de igualdad y desigualdad. — En la representación gráfica el conjunto ordenado de los números negativos, aparece a la izquierda de los números positivos —colocados también por orden creciente de magnitud— estando separados ambos conjuntos por el cero. Dados en la gráfica dos números cualesquiera será mayor *el que aparezca colocado a la derecha.*

Ejemplos:

$$-3 > -9$$
$$+7 > -1$$
$$+10 > +1$$

Suma de números enteros. — En símbolos:

I)
$$a + b + c = +(a + b + c)$$
$$-a - b - c = -(a + b + c)$$

II) $(-a) + (+b) = -a + b = \begin{cases} -(a - b) \text{ si es } a > b \\ +(b - a) \text{ si es } b > a \end{cases}$

III) $a - b - c + d = (a + d) - (b + c)$

Ejemplos:

$$-7 - 4 - 5 - 1 = -(7 + 4 + 5 + 1) = -17$$
$$-3 + 7 = +4$$
$$+9 - 11 = -2$$
$$7 - 1 - 6 - 4 = 7 - 11 = -4$$
$$-3 + 3 = 0$$

Resta de números enteros. — En símbolos:

$$(\pm a) - (\pm b) = (\pm a) + (\mp b)$$

Ejemplos:

$$(+9) - (+3) = (+9) + (-3) = +6$$
$$(-7) - (+8) = (-7) + (-8) = -15$$
$$3 - 7 = (+3) - (+7) = (+3) + (-7) = -4$$

PRODUCTO DE NÚMEROS ENTEROS. — En símbolos:

$$(+a)\cdot(+b) = +ab$$
$$(-a)\cdot(-b) = +ab$$
$$(-a)\cdot(+b) = -ab$$
$$(+a)\cdot(-b) = -ab$$

Ejemplos:

$$(-7)\cdot(-4) = +28$$
$$(-2)\cdot(-1)\cdot(+3) = +6$$
$$(-3)\cdot(+4)\cdot(-1)\cdot(-10) = -120$$

DIVISIÓN EXACTA. — En símbolos:

$$(+a) : (+b) = +(a : b)$$
$$(-a) : (-b) = +(a : b)$$
$$(+a) : (-b) = -(a : b)$$
$$(-a) : (+b) = -(a : b)$$

Ejemplos:

$$(-30) : (-6) = +5$$
$$(+100) : (-50) = -2$$

Números racionales. — Hemos visto al tratar la división de números naturales que la condición de posibilidad de dicha operación es que el *dividendo sea múltiplo del divisor*. Para que la división sea posible en todos los casos los matemáticos han creado una nueva clase de números llamados *números racionales*.

Relación de igualdad y desigualdad.

Dada la igualdad

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$$

llamamos primer producto cruzado a (5×8) y segundo produ
cruzado a (4×10). Ahora bien, *una fracción o número racio
será igual, mayor o menor que otra cuando el primer produ
cruzado sea respectivamente igual, mayor o menor que el seg
do producto.*

Ejemplos:

$$\frac{5}{4} > \frac{1}{8} \text{ pues } [5 \times 8 > 4 \times 1]$$

$$\frac{-3}{4} < \frac{1}{5} \text{ pues } [(-3) \times 5 < 4 \times 1]$$

$$\frac{-7}{4} < \frac{-1}{4} \text{ pues } [(-7) \times 4 < 4 \times (-1)]$$

Suma de números racionales.

a) SUMA DE FRACCIONES DE IGUAL DENOMINADOR. — Recordem
la correspondiente

*Definición. — Se llama suma de varias fracciones de igu
denominador a otra fracción del mismo denominador cuyo n
merador es la suma de los numeradores de las fracciones dada*

$$\frac{7}{12} + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{7+1+5}{12} = \frac{13}{12}$$

$$\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{14}{9} = \frac{1-5+14}{9} = \frac{10}{9}$$

$$-\frac{8}{3} - \frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{-8-4+7}{3} = -\frac{5}{3}$$

b) Suma de fracciones de distinto denominador.

Definición. — Se denomina suma de varias fracciones de distinto denominador, a la suma de otras tantas fracciones de igual denominador, respectivamente iguales a las dadas.

Recuérdese que esta suma puede hallarse empleando un denominador común cualquiera, o bien el mínimo común múltiplo de los denominadores, llamado *mínimo común denominador.*

1) *Aplicando un denominador común cualquiera.*

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=\frac{18}{72}+\frac{24}{72}+\frac{60}{72}=\frac{102}{72}$$

$$1+\frac{4}{3}=\frac{3}{3}+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$$

$$-\frac{5}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{120}{216}-\frac{54}{216}+\frac{36}{216}=-\frac{138}{216}$$

2) *Aplicando el mínimo común denominador.*

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{10}{12}=\frac{17}{12}$$

$$-\frac{5}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{20}{36}-\frac{9}{36}+\frac{6}{36}=-\frac{23}{36}$$

Resta de números racionales. — Recordemos que para esta operación rige la siguiente

Definición. — Se llama diferencia entre dos fracciones dadas en cierto orden, a una tercera fracción tal, que sumada a la segunda dé por resultado la primera.

Conviene, además, recordar que toda resta de números ra
nales se puede convertir siempre en una suma, pero cambiar
de signo a la fracción sustraendo.

1) *Resta de fracciones de igual denominador.*

Ejemplos:

$$+\frac{9}{5}-\left(+\frac{7}{5}\right)=\frac{9}{5}+\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{9-7}{5}=\frac{2}{5}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{5}{2}\right)=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=$$

2) *Resta de fracciones de distinto denominador.*

Ejemplos:

$$\frac{4}{3}-\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{4}{3}+\frac{9}{4}=\frac{16}{12}+\frac{27}{12}=\frac{16+27}{12}=\frac{43}{12}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{9}{20}\right)=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{9}{20}\right)=-\frac{10}{20}-\frac{9}{20}=$$

$$=\frac{-10-9}{20}=-\frac{19}{20}$$

Producto de números racionales. — Recordemos la siguien
Definición. — *Se llama producto de varias fracciones, a ot
fracción, cuyo numerador es el producto de los numeradores
su denominador es el producto de los denominadores.*

Ejemplos:

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{12}=\frac{5\cdot1\cdot9}{4\cdot2\cdot12}=\frac{45}{96}$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-2\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{(-1)\cdot(+2)\cdot(-2)\cdot(-1)}{4\cdot3\cdot5}=-\frac{4}{60}=-\frac{1}{15}$$

División de números racionales. — Recordemos la siguiente REGLA. — *Para hallar el cociente de dos fracciones se multiplica la fracción dividendo por la fracción recíproca del divisor.*

Ejemplos:

a) $$\frac{4}{9}:\frac{7}{2}=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{7}=\frac{8}{63}$$

b) $$-\frac{1}{2}:4=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$$

c) $$\frac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{4}}=\frac{9\cdot4}{5\cdot1}=\frac{36}{5}$$

d) $$\frac{6}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{6}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{6\cdot4}{1\cdot3}=\frac{24}{3}=8$$

e) $$\frac{-\frac{3}{5}}{7} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{7}{1}} = -\frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 7} = -\frac{3}{35}$$

Números mixtos. — Cuando el valor absoluto de un número racional es mayor que la unidad, puede indicarse como la suma de la parte entera y una parte fraccionaria, dando lugar a la expresión que se conoce con el nombre de *número mixto.*

$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

$$\frac{15}{6} = 2 + \frac{3}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2}$$

Potenciación de números racionales. — Recordemos la siguiente *Definición.* — *Se llama potencia n-sima de una fracción al producto de* (n) *factores iguales a la fracción.*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{(-3)^4}{5^4} = \frac{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = +\frac{81}{625}$$

Regla de los signos de la potenciación. — En símbolos:

$$\left(\pm\frac{a}{b}\right)^{2n} = +\frac{a^{2n}}{b^{2n}} \qquad \text{(potencia par)}$$

$$\left(+\frac{a}{b}\right)^{2n+1} = +\frac{a^{2n+1}}{b^{2n+1}} \quad \text{(potencia impar)}$$

$$\left(-\frac{a}{b}\right)^{2n+1} = -\frac{a^{2n+1}}{b^{2n+1}} \quad \text{(potencia impar)}$$

Propiedades de la potencia. — Expresión simbólica:

1) $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{n}$

2) $\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}:\left(\frac{c}{d}\right)^{n}$

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{p} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+p}$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}:\left(\frac{a}{b}\right)^{p} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-p}$

5) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right]^{p} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot p}$

Potencias de exponente negativo. — Se llama potencia de *una fracción con exponente negativo* a la unidad sobre la misma fracción con exponente positivo, o bien a la inversa de la fracción con exponente positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{+m}} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+m}$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}} = 4$$

o bien

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{3} = \frac{27}{125}$$

Téngase en cuenta que $\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$ puede escribirse como poten de la recíproca de dicha fracción, con el exponente opuesto.

Aplicaciones:

a) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2} : \left(-\frac{4}{3}\right)^{3} = \left(-\frac{4}{3}\right)^{(-2)-(+3)} = \left(-\frac{4}{3}\right)^{-2-3}$

$$= \left(-\frac{4}{3}\right)^{-5} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{5} = -\frac{243}{1024}$$

b) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(-2)\cdot 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^{6} = 64$

c) $\left(\frac{10}{3}\right) \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^{2} = \left(\frac{10}{3}\right)^{1-4+2} = \left(\frac{10}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{10}$

Radicación de números racionales. — Recordemos la siguien

Definición. — Se llama raíz enésima exacta de $\left(\frac{a}{b}\right)$ *a to fracción* $\left(\frac{x}{y}\right)$ *cuya potencia enésima sea igual a* $\left(\frac{a}{b}\right)$

Ejemplos:

$$\sqrt{+\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2} \text{ pues } \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[3]{+\frac{27}{8}} = +\frac{3}{2} \text{ pues } \left(+\frac{3}{2}\right)^3 = +\frac{27}{8}$$

$$\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2} \text{ pues } \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$$

Regla de los signos. — En símbolos:

$$\sqrt[2n]{+\frac{a}{b}} = \pm\frac{x}{y} \text{ siempre que } \left(\pm\frac{x}{y}\right)^{2n} = +\frac{a}{b}$$

$$\sqrt[2n+1]{+\frac{a}{b}} = +\frac{x}{y} \text{ siempre que } \left(+\frac{x}{y}\right)^{2n+1} = +\frac{a}{b}$$

$$\sqrt[2n+1]{-\frac{a}{b}} = -\frac{x}{y} \text{ siempre que } \left(-\frac{x}{y}\right)^{2n+1} = -\frac{a}{b}$$

EJERCICIOS

Operaciones con números enteros.

I)

a) $-4-5$
R.: -9

b) $10-8-3-11$
R.: -12

c) $-30+60$
R.: $+30$

d) $9-2+5-8-7$
R.: -3

e) $12-40$
R.: -28

f) $-4-8-7-6+9$
R.: -16

g) $-1-1-1+3$
R.: 0

h) $(+2)+(-2)$
R.: 0

i) $(-4)+(-7)$
R.: -11

j) $(-12)+(+27)$
R.: $+15$

II)

a) $(-4) - (+6)$
R.: -10

b) $(+6) - (+10)$
R.: -4

c) $(-9) - (-1)$
R.: -8

d) $(-5) - (-5)$
R.: 0

e) $(+8) - (-12)$
R.: $+20$

f) $(-a) - (-a)$
R.: 0

g) $(-100) - (+120)$
R.: -220

h) $(-5x) - (+2x)$
R.: $-7x$

III)

a) $(+10) \cdot (-2)$
R.: -20

b) $(-12) \cdot (-4)$
R.: $+48$

c) $(-1) \cdot (-1)$
R.: $+1$

d) $(+a) \cdot (-2b)$
R.: $-2ab$

e) $(+4a) \cdot (-6b)$
R.: $-24ab$

f) $(-2x) \cdot (-4)$
R.: $+8x$

g) $(-3) \cdot (-8)$
R.: $+24$

h) $(-1) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot ($
R.: -150

i) $(+4)(-1)(+5)(+$
R.: -120

j) $(-3a)(+4)(-3)$
R.: $+36a$

k) $(-2)(-3)(-1)$
R.: -6

m) $(-x)(+2xy)(-x)$
R.: $+2x^3y$

n) $(+10)(+2)(+1)$
R.: $+20$

p) $(-22)(-1)(+5)$
R.: $+110$

IV)

a) $(-4+3-2) \cdot (-10)$
R.: $+30$

b) $(-8-4) \cdot (-5+6)$
R.: -12

c) $(4a-8c) \cdot (-3abc+6c)$
R.: $-12a^2bc + 24abc^2 + 24ac -$

$(12 - 3 + 1) \cdot (-10)$

R.: -100

$(12atu - 5t) \cdot (10u + 4ta)$

R.: $120atu^2 - 50tu + 48a^2t^2u - 20t^2a$

$(-9 - 5 + 60) \cdot (-2a)$

R.: $-92a$

)

$(-30) : (+5)$
R.: -6

$(-12) : (-4)$
R.: $+3$

$(+96) : (-2)$
R.: -48

) $(+20) : (+10)$
R.: $+2$

e) $(-100) : (-50)$
R.: $+2$

f) $(+40a) : (-20)$
R.: $-2a$

g) $(-40ax) : (-2x)$
R.: $+20a$

h) $(+8x^2) : (-4x)$
R.: $-2x$

i) $(+22y^3) : (+11y^2)$
R.: $+2y$

I)

) $(-12 + 6 + 4) : (-2)$

R.: 1

) $(-50a + 100ab + 10a) : (-10a)$

R.: $4 - 10b$

) $(+30xyt - 6xy + 12xy) : (-6xy)$

R.: $-5t - 1$

) $(-40a - 4a) : 2a$

R.: -22

) $(-50ab^4 + 25b^3 + 100b) : (-25b)$

R.: $2ab^3 - b^2 - 4$

f) $(-100ac - 50a) : (-50a)$

R.: $2c + 1$

VII)

a) $-30xy - 10x$

R.: $-10x(3y + 1)$

b) $-2ax^3 + 4ax^2 - 16ax^2$

R.: $-2ax^2(x - 2 + 8)$

c) $-100tu - tu$

R.: $-tu(100 + 1)$

d) $-33at - 11t + 11at$

R.: $-11t(3a + 1 - a)$

e) $-22a^4b^2 + 11a^3b$

R.: $-11a^3b(2ab - 1)$

VIII)

a) $[(-3 - 8 - 10) - 30] : (+3)$

R.: -17

b) $[(-3)(-1)(-4)] : (-6)$

R.: $+2$

c) $[(-4)(-x^2)x] : 2x$

R.: $2x^2$

IX) Comprobar gráficamente la propiedad conmutativa en el siguiente ejemplo:

$$-3 - 5 + 4 - 6$$

X)

a) $-\{-[(-5 + 1)]\}$

R.: -4

b) $-|-[-(1 - 11)]|$

R.: 10

XI)

a) $10 - (-1)^4 - 2 + (-3)^3 - 1$

R.: -21

b) $+1 - (-2)^3 - (10)^2 - (+1)^4$

R.: -92

c) $2 - (-2)^4 + (+4)^2 - (-5)^2$

R.: -23

d) $5 + (-1)^3 - (-1)^4 - (-1)^5$

R.: $+4$

e) $[-2-(-2)^3][-(-10)^2]$ R.: -600

f) $[-1-(-6)^2+(-1)^4](-3)$ R.: $+108$

g) $[(-3)(-5)+7](-2)^3$ R.: -176

h) $[(-10)^2:(+2)+6\times 5][-4]$ R.: -320

i) $|-[-(-8)]|-(-7)^2$ R.: -57

j) $-[-(-2)^2]$ R.: $+4$

k) $(-2)^2-(-1)^3-(-3)^2-(-10)$ R.: $+6$

Operaciones con números racionales.

XII)

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}=$$

$$=4^2\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=16\cdot\frac{9}{100}\cdot\frac{25}{36}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)^{-2}=1$$

XIII)

$$\left(\frac{1}{5}:\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=5^3:\left(\frac{3}{2}\right)^3=125:\frac{27}{8}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{1000}{27}$$

XIV)

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^{2-1+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$$

XV)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4-(-2)} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{64}{729}$$

XVI)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{(-1)-(+3)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 16$$

XVII)

$$\left[\left(\frac{10}{3}\right)^{-2}\right]^3 = \left(\frac{10}{3}\right)^{(-2)\cdot 3} = \left(\frac{10}{3}\right)^{-6} = \left(\frac{3}{10}\right)^6$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{10}{3}\right)^{-2}\right]^3 = \frac{729}{1\,000\,000}$$

XVIII)

$$\left[\left(-\frac{1}{10}\right)^{-1}\right]^{-2} = \left[-\frac{1}{10}\right]^{(-1)(-2)} = \left(-\frac{1}{10}\right)^2 = +\frac{1}{100}$$

XIX)

$$\left\{\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}\right]^{-2}\right\}^{-2} = \left[-\frac{1}{4}\right]^{(-1)(-2)(-2)} =$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\right]^{-4} = [-4]^4 = +256$$

XX)

$$\frac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{7}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot\dfrac{1}{2}}=\frac{\dfrac{2\cdot 7-1\cdot 3}{21}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2+3+1}}=\frac{\dfrac{14-3}{21}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^6}$$

$$=\frac{\dfrac{11}{21}}{\dfrac{1}{64}}=\frac{11\cdot 64}{21\cdot 1}=\frac{704}{21}$$

XXI)

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2+2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{9}{25}+\frac{6}{10}+\frac{1}{4}=\frac{36+60+25}{100}=\frac{121}{100}$$

Recuerde que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

XXII)

$$\frac{\dfrac{10}{2}-3}{2-\dfrac{9}{3}}$$ R.: -2

XXIII)

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+10\right)-\left(\frac{5}{4}-6\right)$$ R.: 16

XXIV)

$$\frac{\left(2\dfrac{2}{5}:5^3\right)-1+\dfrac{1}{25}}{(-1)^2:\dfrac{5}{4}}$$ R.: $-\dfrac{147}{125}$

XXV)

$$1 - \frac{4 - \frac{2}{5} \times 3 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{3} : \frac{4}{15} + 6 \times \frac{1}{2} - 1} \qquad \text{R.: } -\frac{1}{5}$$

XXVI)

$$\frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{9} : \frac{5}{18} + \frac{3}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{4}{5}\right) : \left(\frac{5}{2} + \frac{21}{20} - 3\right)} \qquad \text{R.: } \frac{73}{55}$$

XXVII)

$$\frac{\left(\frac{2}{7} + 3\right) \cdot \left(5 + \frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{23}{14} - 1\right) : \left(1 - \frac{15}{23}\right)} \qquad \text{R.: } \frac{92}{9}$$

XXVIII)

$$\frac{\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3} - \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{2}{5}}} \qquad \text{R.: } \frac{89}{54}$$

XXIX)

$$\frac{\sqrt{\frac{7}{12} + \frac{4}{9} - \frac{1}{36}}}{1 - \frac{2}{3}} \qquad \text{R.: } 3$$

XXX)

$$\frac{1}{2} \times 5 - \frac{4}{5} : 8 - \frac{4}{3} + 5 : \frac{1}{4} \qquad \text{R.: } \frac{316}{15}$$

XXXI)

$$\frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) \cdot 4 + \frac{2}{3}}{5 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) - 2 \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)} \qquad \text{R.: } \frac{109}{10}$$

XXXII)

$$\frac{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right)}{\left(3 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)} \qquad \text{R.: } \frac{49}{51}$$

XXXIII)

$$\frac{2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{9}\right) + \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right)} \qquad \text{R.: } \frac{31}{126}$$

XXXIV)

$$\frac{\frac{1}{90} + \frac{1}{5} : \frac{9}{10} + \frac{1}{10}}{\frac{11}{90} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{2}} \qquad \text{R.: } \frac{5}{9}$$

XXXV)

$$\frac{\dfrac{17}{90}:\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}}{\sqrt[3]{27}:\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} \qquad \text{R.: } -\frac{86}{405}$$

XXXVI)

$$\frac{1\dfrac{1}{3}+\dfrac{16}{100}:\dfrac{1}{100}-4}{\sqrt{169}:\dfrac{13}{90}} \qquad \text{R.: } \frac{4}{27}$$

XXXVII)

$$\frac{1\dfrac{2}{9}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{10}{20}}{\dfrac{4}{90}+\dfrac{4}{10}+\dfrac{25}{1000}:\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} \qquad \text{R.: } \frac{100}{49}$$

XXXVIII) Contestar el siguiente cuestionario:

a) Si $a \neq 0$, ¿cuál es el inverso de su inverso?

R.: $a^{-(-1)} = a$

b) Si $a \neq 0$, ¿cuál es el inverso del contrario de (a)?

R.: $(-a)^{-1}$

c) Si $a \neq 0$, ¿cuál es el contrario del inverso de a?

R.: $-(a^{-1})$

d) El contrario de la suma de dos números racionales, ¿es la suma de los contrarios de esos números?

R.: Sí, porque $-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)=-\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}$

e) Si $(a \neq 0) \in \mathbf{Q} \wedge (b \neq 0) \in \mathbf{Q}$ (*), ¿es $(a+b)^{-1}=a^{-1}+$ $+ b^{-1}$?

Se lee: si (a) y (b) son distintos de cero y pertenecen al conjunto de números racionales. . .

R.: No, porque $\dfrac{1}{a+b} \neq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

(*) [Q] representa el conjunto de los números racionales.

3 REVISION DE LOS CONCEPTOS DE RELACION Y FUNCION

Par ordenado.

Definición I. — Un par de elementos, a y b, en el cual con deramos a primer elemento y b segundo elemento, se lla *par ordenado* y se representa por (a, b).

Los elementos a y b se llaman primera y segunda coorder das, respectivamente, del par ordenado (a, b).

Definición II. — Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) se di que son iguales si y solamente si encierran los mismos elemen y en el mismo orden, esto es, si $a = c$ y $b = d$.

Con símbolos:

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Relación de conjuntos.

Sean los conjuntos:

A = {\$ 10.000, \$ 5.000, \$ 1.000, \$ 500}
B = {ficha amarilla, ficha roja, ficha verde}

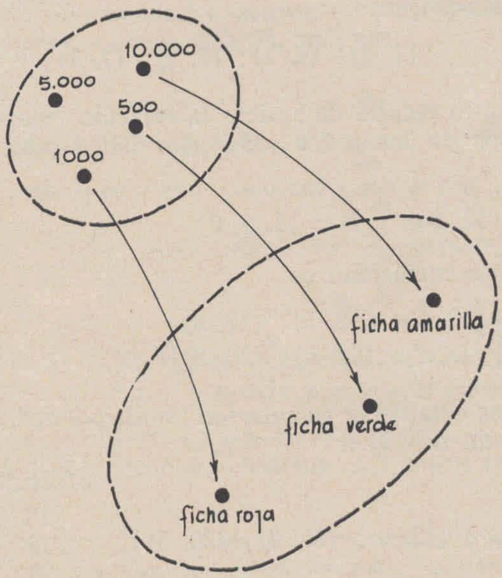
Efectuamos el producto cartesiano:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{cases} (\$\,10.000;\ \text{ficha amarilla}),\ (\$\,10.000;\ \text{ficha roja}), \\ \quad (\$\,10.000;\ \text{ficha verde}) \\ (\$\ \ 5.000;\ \text{ficha amarilla}),\ (\$\ \ 5.000;\ \text{ficha roja}), \\ \quad (\$\ \ 5.000;\ \text{ficha verde}) \\ (\$\ \ 1.000;\ \text{ficha amarilla}),\ (\$\ \ 1.000;\ \text{ficha roja}), \\ \quad (\$\ \ 1.000;\ \text{ficha verde}) \\ (\$\ \ \ \ 500;\ \text{ficha amarilla}),\ (\$\ \ \ \ 500;\ \text{ficha roja}), \\ \quad (\$\ \ \ \ 500;\ \text{ficha verde}) \end{cases}$$

Supongamos que la ficha amarilla vale $ 10.000, la roja $ 1.000 y la verde $ 500. Formemos un nuevo conjunto con pares ordenados que tengan por primera componente uno de los valores monetarios y por segunda componente las fichas de color correspondientes, resulta:

R = { (10.000; f. amarilla) ; (1.000; f. roja) ; (500; f. verde) }

Gráficamente:



Distribución práctica.

Valor monetario	*Ficha*
$ 10.000	amarilla
$ 1.000	roja
$ 500	verde

Es decir, del producto cartesiano **A** × **B** se han elegido los pares que resultan de aplicar una relación. Esta relación es "valor monetario - ficha de color".

• Sea $\mathbf{A} = \{4, 7\}$ y $\mathbf{B} = \{2, 1, 9\}$

Su producto cartesiano es:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left\{ \begin{matrix} (4, 2); & (4, 1); & (4, 9) \\ (7, 2); & (7, 1); & (7, 9) \end{matrix} \right\}$$

Si entre los elementos del conjunto $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se eligen los pares ordenados cuyo primer elemento sea mayor que el segundo, se obtiene el subconjunto:

$$\{(4, 2); (4, 1); (7, 2); (7, 1)\}$$

Este conjunto resulta de aplicar la relación *"mayor que"* entre los elementos de los pares ordenados del producto cartesiano $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

• Sea $\mathbf{A} = \{12, 20)$ y $\mathbf{B} = \{2, 5, 6\}$

Su producto cartesiano es:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left\{ \begin{matrix} (12, 2); & (12, 5); & (12, 6) \\ (20, 2); & (20, 5); & (20, 6) \end{matrix} \right\}$$

Si deseamos establecer la relación *"múltiplo de"*, se obtiene el subconjunto de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

$$\mathbf{R} = \{(12, 2); (12, 6); (20, 2); (20, 5)\}$$

Múltiplo	*Número*
12	2
12	6
20	2
20	5

Este conjunto está formado por pares ordenados tales que la primera componente del par pertenece al conjunto $\mathbf{A}$ y es múltiplo de la segunda componente del par, la cual pertenece al conjunto $\mathbf{B}$.

Ejemplos:

Estos ejemplos de relaciones entre conjuntos nos permiten aceptar la siguiente:

Definición. — *Si entre los pares ordenados que son elementos del producto cartesiano* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *se eligen solamente aquellos en los que el primer elemento del par está conectado con el segundo por alguna propiedad o condición, el subconjunto de* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *así determinado es una relación entre los elementos de los conjuntos dados.*

Con símbolos:

Si entre los elementos de los conjuntos **A** y **B** se aplica la relación **R**, se obtiene el conjunto **M** tal que:

a) $\mathbf{A}\,\mathbf{R}\,\mathbf{B} = \mathbf{M}$

b) $\mathbf{M} = \{(x, y) \,/\, x \in \mathbf{A}\ ;\ y \in \mathbf{B}\ ;\ x\,\mathbf{R}\,y\}$

donde $x\,\mathbf{R}\,y$ expresa que y está conectado con x por la relación **R**.

El elemento y se dice *imagen* de x por la correspondencia o relación **R**.

Ejemplos:

• La *igualdad* entre números es una relación. En lugar de escribirse $x\,\mathbf{R}\,y$ se escribe $x = y$ donde x e y son números.

• El *paralelismo* entre rectas también es una relación. En lugar de indicarse $a\,\mathbf{R}\,b$ se escribe $a \,/\!/\, b$ donde a y b son rectas paralelas.

• La relación "*mayor que*" entre los números enteros es también una relación. En vez de indicarse $x\,\mathbf{R}\,y$ se escribe $x > y$ donde x e y son números enteros.

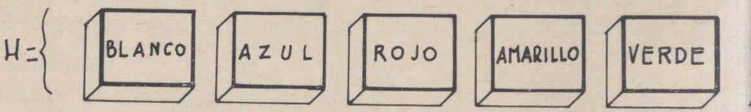
• La *perpendicularidad* entre rectas de un plano también es una correspondencia o relación. En lugar de indicarse $a\,\mathbf{R}\,b$ se escribe $a \perp b$ donde a y b son rectas perpendiculares.

Dominio. — D (R).

Si entre los conjuntos **A** y **H** se establece una relación **R**, se llama *dominio* de la relación **R** al conjunto de los elementos que son *primeros componentes* de los pares ordenados de **R**.

Ejemplo:

$$\mathbf{A} = \{10\,000\,\$, \quad 5\,000\,\$, \quad 1\,000\,\$, \quad 500\,\$, \quad 100\,\$\}$$



El conjunto de los billetes representativos de valores mo tarios que corresponden a los colores del conjunto **H** constitu el dominio.

Rango. — R (R).

Cuando entre los conjuntos **A** y **P** se establece una relación se llama *rango* o *imagen* de la relación **R** al conjunto de los e mentos que son *segundos componentes* de los pares ordenad de **R**.

Ejemplo:

Sean dados los conjuntos

$$\mathbf{A} = \{a, c, h\} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{P} = \{b, j\}$$

El conjunto de los pares ordenados es

$$\{(a, b) \; ; \; (a, j) \; ; \; (c, b) \; ; \; (c, j) \; ; \; (h, b) \; ; \; (h, j)\}$$

Si entre los pares así formados se establece la relación **R**, que el primer elemento figure en el abecedario *antes que segundo*, el conjunto obtenido por esta relación es

$$\mathbf{R} = \{(a, b) \; ; \; (a, j) \; ; \; (c, j) \; ; \; (h, j)\}$$

En este conjunto

$$\mathbf{D}\,(\mathbf{R}) = \{a, c, h\} \qquad \wedge \qquad \mathbf{R}\,(\mathbf{R}) = (b, j)$$

elaciones de equivalencia.

La palabra *igual* tiene en Matemática dos acepciones: *iden-*
dad y equivalencia.

Cuando al significar que el conjunto **A** *es igual* al conjunto **B**
e afirma que ambos constituyen el mismo conjunto, la palabra
ualdad se identifica con *identidad.*

Otras veces la palabra *igual* se utiliza para caracterizar con-
untos u objetos que tienen algunas *propiedades comunes.* Por
jemplo, al considerar dos cubos, uno de metal y otro de madera,
ue tengan la misma capacidad, se dice que son iguales. En este
aso la *igualdad* tiene el sentido de *equivalencia.*

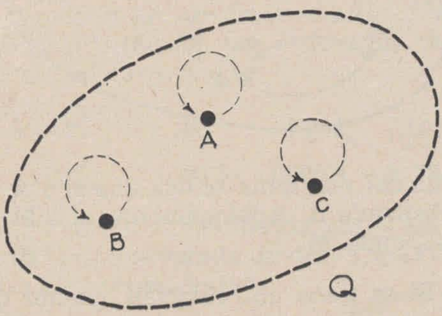
Una *relación* (**R**) de un *conjunto* **A** es una *relación de equi-*
alencia cuando goza de las siguientes propiedades:

a) *Idéntica o reflexiva.* — Una relación entre los elementos
le un conjunto es *reflexiva* si mediante ella, todo el elemento
x de ese conjunto es imagen $x\,\mathbf{R}\,x$ de si mismo.

Gráficamente:

El arco cerrado del diagrama indica que cada elemento es
imagen de sí mismo.

Ejemplo:



Si un conjunto tiene por elementos tres esferas, una de cobre,
otra de madera y otra de níquel que pesan cinco kilogramos
cada una, se puede establecer una relación de equivalencia **R**
"igual peso". Por lo tanto, la relación "igual peso" es reflexiva.

b) *Simétrica o recíproca.* — La relación "primo de" signif
que si Jaime es primo de Daniel, también Daniel es primo
Jaime. Relaciones de este tipo se dice que son *recíprocas* o *si*
tricas.

En símbolos:

$$x \, \mathbf{R} \, y \Rightarrow y \, \mathbf{R} \, x$$

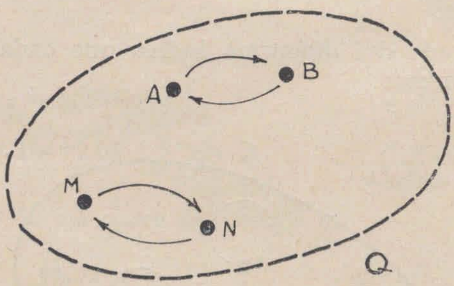
La relación de perpendicularidad entre rectas de un plano
simétrica.

Si

$$a \perp b \Rightarrow b \perp a$$

La relación "madre de" *no es recíproca* pues si María es n
dre de Miguel, Miguel no es madre de María. En este caso
relación es *asimétrica.*

Gráficamente:



La doble flecha del diagrama señala que si a **A** le correspon
B a este le corresponde **A**. Análogamente, si a **M** le correspon
N, a **N** le corresponde **M**.

Transitiva. — Si se tiene una relación "menor que" entre n
meros enteros, resulta que si:

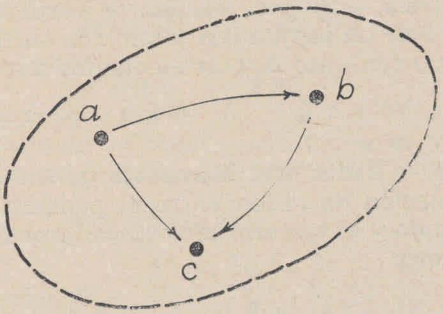
$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$

Las relaciones que satisfacen estas condiciones se dice q
gozan del carácter transitivo.

Simbólicamente:

$$\left.\begin{array}{l} a\,\mathbf{R}\,b \\ b\,\mathbf{R}\,c \end{array}\right\} a\,\mathbf{R}\,c$$

Gráficamente:



La relación **R** transitiva entre los números de un conjunto se indica con tres flechas, de acuerdo al diagrama.

Relaciones de orden.

Al enumerar o considerar los elementos de un conjunto generalmente se disponen en un determinado orden. Por ejemplo, los billetes de banco pueden ser ordenados de mayor a menor valor o de menor a mayor valor:

{10 000 \$, 5 000 \$, 1 000 \$, 500 \$, 100 \$, 50 \$}

{50 \$, 100 \$, 500 \$, 1 000 \$, 5 000 \$, 10 000 \$}

Para que una relación establecida entre los elementos de un conjunto pueda ser considerada de *orden lineal* o *total* debe verificar las siguientes propiedades:

a) **Conexiva.** — Entre dos elementos cualesquiera de un mismo conjunto existe siempre una relación *conexiva*, de conexión

$$\forall a\ ,\ a \in \mathbf{A}\ \wedge\ \forall b : b \in \mathbf{A} \quad \text{siendo} \quad a \neq b$$

$$\Rightarrow \quad a\,\mathbf{R}\,b\ \vee\ b\,\mathbf{R}\,a$$

Ejemplo:

Si $3 \in \mathbf{N} \wedge 10 \in \mathbf{N}$,

es $3 < 10 \vee 10 > 3$

b) **Antisimétrica.** — Si una relación se verifica entre un elemento a y otro b de un conjunto **A** y también entre el elemento b y el a del mismo conjunto **A**, esos elementos son iguales.

$$\forall a \,,\, \forall b : a \mathbf{R} b \wedge b \mathbf{R} a \Rightarrow a = b$$

c) **Transitiva.** — Dados tres elementos de un conjunto, si se cumple una relación de orden entre el primero y el segundo, y entre el segundo y el tercero, se verifica también entre el primero y el tercero.

$$\forall a \,,\, \forall b \,,\, \forall c : a \mathbf{R} b \wedge b \mathbf{R} c \Rightarrow a \mathbf{R} c$$

Ejemplo:

$$\underset{(<)}{4 \mathbf{R} 6} \wedge \underset{(<)}{6 \mathbf{R} 10} \Rightarrow \underset{(<)}{4 \mathbf{R} 10}$$

En este caso se ha considerado que la relación **R** es la de "menor", $<$.

Las relaciones de mayor y de menor entre números, segmentos, ángulos, etc., son relaciones de orden lineal, pues son conexivas, antisimétricas y transitivas.

Relación de orden estricto.

Definición. — Cuando una relación entre los elementos de un conjunto es *conexiva*, *antisimétrica* y *transitiva*, se dice que es una *relación de orden estricto o total.*

Relación binaria.

Se llama *relación binaria* en un conjunto **A** a todo conjunto cuyos elementos son pares ordenados de los elementos del conjunto dado.

Ejemplo:

Dado el conjunto

$$\mathbf{A} = \{1, 2, 3\}$$

una relación binaria, $\mathbf{R}$, entre los elementos del mismo es el conjunto

$$\mathbf{R} = \{ (1, 2) \ ; \ (2, 3) \}$$

en el cual

$$1 \mathbf{R} 2 \quad \wedge \quad 2 \mathbf{R} 3$$

Observación. — Toda *relación binaria* que se verifica en un conjunto **H** es un *subconjunto* del producto cartesiano de **H**.

En efecto, si $\mathbf{H} = \{1, 2, 3\}$

$$\text{es} \qquad \mathbf{H} \times \mathbf{H} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), (1, 3) \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3) \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3) \end{array} \right.$$

Una relación binaria $\mathbf{R}$ es

$$\mathbf{R} = \{ (1, 2), (2, 3) \}$$
$$\Rightarrow \ \mathbf{R} \subset (\mathbf{H} \times \mathbf{H}),$$

es decir, la relación $\mathbf{R}$ es un subconjunto del producto cartesiano $(\mathbf{H} \times \mathbf{H})$.

Función o aplicación.

Definición. — Consideremos los conjuntos A y B. Sea "f" una relación de A en B. Se dice que la relación "f" es una *función.* "f" de A en B, *si y solo si, para todo elemento* $a \in$ B, *existe un único elemento* b $\in$ B.

Por lo tanto, *una función "f" de A en B es un conjunto de pares ordenados* (a, b) *tales que a cada elemento* $a \in$ A *corresponde uno y solamente un elemento* b $\in$ B.

Una función "f" de A en B se indica con la notación:

$$f: A \to B \qquad \text{o bien} \qquad A \xrightarrow{\text{“}f\text{”}} B$$

que se lee "f" es una función de A en B, o "f" aplica A en B.

EJEMPLOS:

I) Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{6, 7, 8\}$. La relació de A en B:

$$f = \{(a, 7), (b, 8), (c, 6)\}$$

es una función porque para todo elemento de A existe un pa ordenado perteneciente a "f" y, además, no existe dos pare ordenados diferentes en "f" con el mismo primer elemento.

II) Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{t, u, x, y, z\}$. L relación de A en B:

$$f = \{(1, t), (2, x), (3, z), (1, z)\}$$

no es una función porque hay dos pares ordenados diferentes e que tienen el mismo primer elemento: $(1, t)$ y $(1, z)$, esto e al mismo elemento $1 \in A$ corresponden a elementos distinto t y z de B.

III) Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$. L relación de A en B:

$$f = \{(1, 2), (2, 6), (3, 4)\}$$

no es una función porque el elemento $4 \in A$ no aparece com primer elemento de ningún par ordenado perteneciente a "f"

IV) Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{m, n, p\}$. L relación de A en B:

$$f = \{(a, m), (a, n), (c, p)\}$$

no es una función por dos razones:

a) Existen dos pares ordenados diferentes con el mismo pri mer elemento: (a, m) y (a, n).

b) El elemento $b \in A$ no figura como primer elemento d ningún par ordenado perteneciente a "f".

V) La longitud de la circunferencia es función del radio.

VI) La tarifa de un pasaje ferroviario es función de la distancia al punto de destino.

Expresiones de funciones mediante fórmulas.

La función por la cual a cada número se le hace corresponder el triplo del mismo, menos 2, se puede expresar mediante la fórmula:

$$y = 3x - 2$$

o sea, a cada número x le corresponde el número y igual a $3x - 2$.

En general las funciones se expresan con la notación:

$$y = f(x)$$

donde f indica las operaciones o mandatos que establece la función.

En particular, si:

$$f(x) = y = 3x - 2$$

f señala un mandato tal que hay que multiplicar x por 3 y a ese producto restarle 2.

Variables. — Dado que x designa cualquier valor del *dominio*, recibe el nombre de *variable independiente*; en cambio y es función de x y representa un elemento arbitrario del *contradominio* pero que corresponde a un valor de x. Por tal razón y se llama *variable dependiente*.

• La función que expresa el área de un círculo se simboliza:

$$A = \pi \cdot r^2$$

donde la variable independiente es el radio r y A indica el área.

• La función que expresa la velocidad con movimiento uniforme en relación con el tiempo es:

$$v = \frac{c}{t}$$

En este caso la velocidad es la variable dependiente y el tiempo la variable independiente.

Tablas de funciones.

Es muy conveniente tabular los pares ordenados que son elementos de una función de modo que en la *primera columna* figuren elementos del *dominio* y en la *segunda* los del *contradominio* o *imagen*.

Ejemplos:

- Disponer en tabla de dos columnas la siguiente función:

$$v = \frac{1.200 \text{ km}}{t}$$

t	v
1 h	1.200 km
2 h	600 km
3 h	400 km
6 h	200 km
10 h	120 km
12 h	100 km

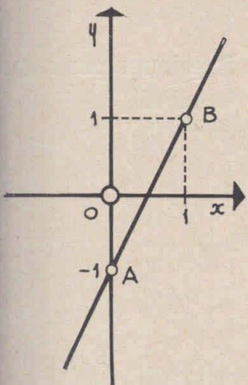
- Tabular la siguiente función:

$$y = 3x - 2$$

x	y
0	-2
1	1
2	4
-1	-5
-2	-8

Representación gráfica.

Para obtener la representación gráfica de una función referida a ejes cartesianos rectangulares se marca sobre el eje de las x cada uno de los números del *dominio* y sobre el de las y los correspondientes del *contradominio*. Por cada par de puntos marcados que formen un par ordenado se trazan perpendiculares a los ejes, obteniéndose un conjunto de puntos que se llama *gráfica de la función*.



Ejemplos:

• Graficar la función:

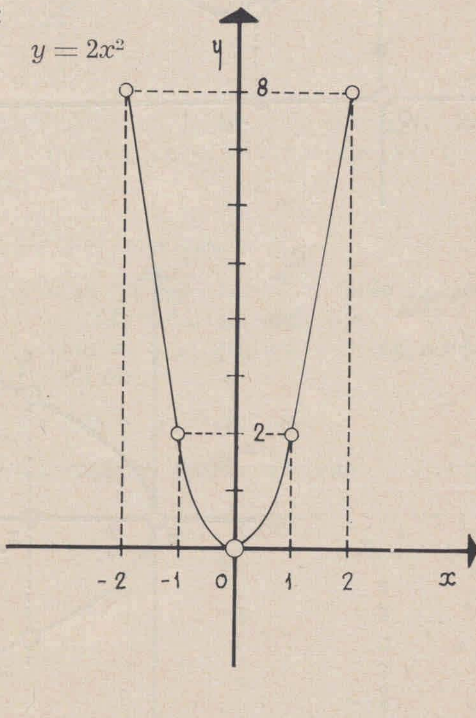
$$y = 2x - 1$$

x	y
0	-1
1	1
-1	-3

• Representar la función:

$$y = 2x^2$$

x	y
0	0
1	2
-1	2
2	8
-2	8



• Graficar las siguientes funciones:

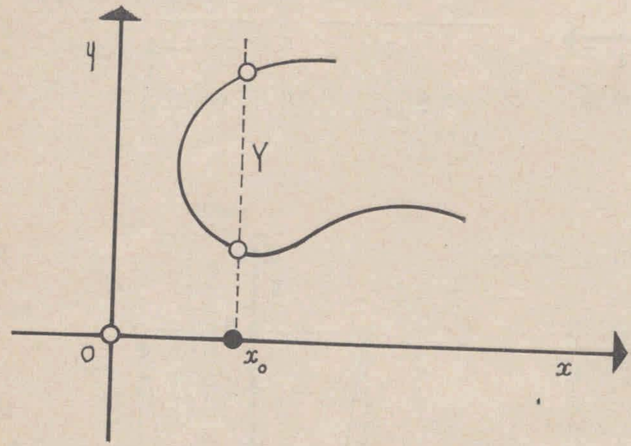
a) $y = 2x - 1$

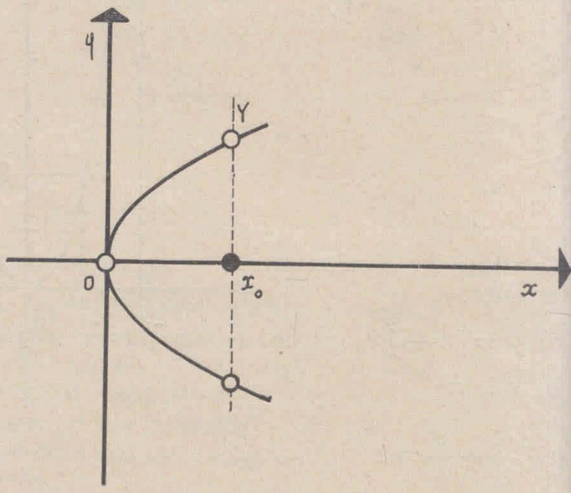
b) $y = x^2$

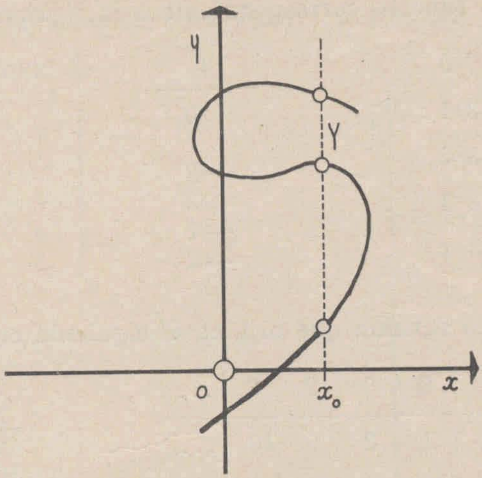
c) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1$

Gráficas que no corresponden a funciones.

Las gráficas siguientes no corresponden a funciones por cuanto, de acuerdo con la definición de función, *dos puntos distintos de la gráfica no pueden tener la misma abscisa.*







En el primero y en el segundo caso, la recta y que pasa por x_0 corta a la gráfica en dos puntos; en el último caso, en tres puntos.

Funciones dadas por tablas y por gráficas.

Hasta ahora dada la función se ha construido su tabla de valores y se ha trazado luego la gráfica correspondiente.

A veces se da la tabla de valores o la gráfica y se pretende determinar la función correspondiente.

• Dada la tabla siguiente, establecer la función.

Observando atentamente los valores que corresponden a cero y a uno, se establece:

$$1 = 0 + 1$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$
$$\Rightarrow y = 2x + 1$$

x	y
0	1
1	3
2	5
3	7
—1	—1
—2	—3

• Obtener la función correspondiente a la siguiente tabla:

$$0 = 3 \cdot 0$$
$$3 = 3 \cdot 1$$
$$6 = 3 \cdot 2$$
$$9 = 3 \cdot 3$$
$$\Rightarrow \quad y = 3 \cdot x$$

x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
—1	—3
—2	—6

• Encontrar la función que origina el siguiente cuadro:

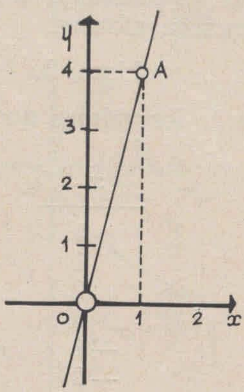
Dominio	x	0	1	2	3	...
Imagen	y	1	2	5	10	...

$$1 = 0^2 + 1$$
$$2 = 1^2 + 1$$
$$5 = 2^2 + 1$$
$$10 = 3^2 + 1$$
$$\Rightarrow \quad y = x^2 + 1$$

• Encontrar la función por la cual los puntos de la gráfica son tales que su ordenada es igual al cuádruplo de la abscisa.

De acuerdo a la condición establecida, la función está dada por:

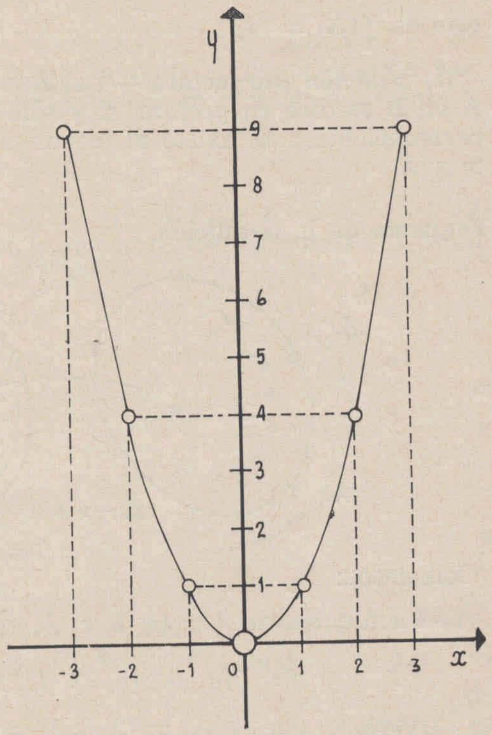
$$y = 4x$$



Obtener la función correspondiente a la siguiente gráfica:

Se observa que:

$$\begin{array}{c} 1 \leftarrow 1 \\ 4 \leftarrow 2 \\ 9 \leftarrow 3 \\ \hline \Rightarrow \quad y = x^2 \end{array}$$



Diferentes tipos de funciones.

I) **Función Constante.** — Dados los conjuntos A y B, se dice que una función "f" es *constante*, si y sólo si, para todo elemento a perteneciente a A, la imagen $f(a)$ de a es un mismo elemento b, perteneciente a B.

EJEMPLOS:

1) Siendo "f" de $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{1, 2, 3\}$ el conjunto

$$f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3)\}$$

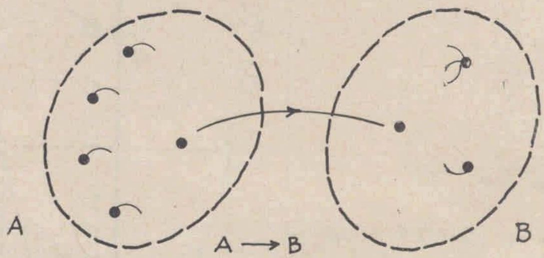
se dice que es una *función constante*, pues

$$f(a) = f(b) = f(c) = 3,$$

esto es, $f(A) = \{3\}$.

II) **Función Suryectora.** — Definición. — Una función "f" d A en B se dice *suryectora*, si y sólo si, para todo elemento perteneciente a B, existe al menos un elemento a pertenecien te a A.

Esquema de la definición.



Ejemplos:

1) La función de $A = \{a, b, c, d\}$ en $B = \{1, 2, 3\}$ expresad por

$$f = \{ (a, 2), (b, 3), (c, 2), (d, 1) \}$$

es *suryectora*, pues $f(A) = \{2, 3, 1\} = B$.

2) La función $f: R \to R$ definida por la fórmula $f(x) = x^2$ no es suryectora porque los números reales negativos no pertenecen a la imagen del dominio.

3) Cuando se juega al bridge y se distribuyen las cartas entre cuatro jugadores se define una suryección $f: C \to J$ del conjunto C de las cartas sobre el conjunto J de los jugadores.

4) Sea n un elemento perteneciente al conjunto de los números naturales. Si designamos por "αn" la cifra de unidades de n expresada en el sistema decimal, resulta que la función

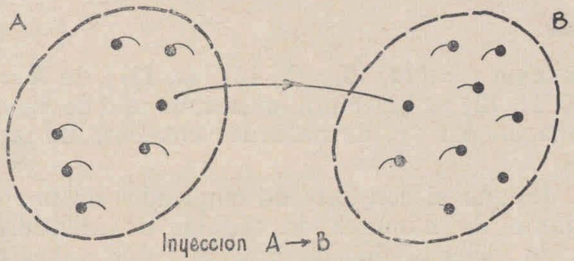
$$(\alpha): N \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

es suryectiva.

III) **Función Inyectora.** — DEFINICIÓN. — Una función "f" de A en B se dice *inyectora, si y solamente si, dos elementos distintos cualesquiera* a_1 *y* a_2 *de* A *tienen en* B *imágenes también distintos* b_1 *y* b_2.

EJEMPLO:

La función $f = \{a, 7), (b, 9), (c, 6)\}$ de $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{6, 7, 8, 9\}$ es *inyectora,* pues elementos distintos de A están transformados en elementos distintos de B.



EJEMPLOS:

1) La función $f = \{(a, 7), (b, 9), (c, 6)\}$ de $A = \{a, b, c\}$ en

2) La función

$$y = 3x - 1$$

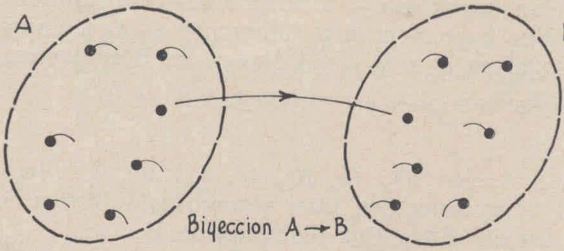
en N es *inyectiva* por cuanto a valores distintos de x corresponden valores distintos en la imagen y.

Dominio	0	1	2	3	...
Imagen	—1	2	5	8	...

3) A cada espectador de un cine le corresponde una butaca.

4) El número de días trabajados y los sueldos percibidos para igual jornal.

IV) **Función Biyectora.** — DEFINICIÓN. — *Una función "f" de A en B se dice biyectora, si y sólo si, "f" es al mismo tiempo suryectora e inyectora.*



EJEMPLOS:

1) La función $f = \{(a, 10), (b, 12), (c, 11)\}$ de $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{10, 11, 12\}$ es biyectora, pues cada uno de los elementos de B es imagen por "f" de un único elemento de A.

2) Si A designa al conjunto de empleados de una oficina y B al conjunto de números de cédulas de identidad de los empleados de dicha oficina, la función f que aplica cada empleado sobre su número de cédula es una biyección:

$$f: A \to B$$

3) La relación

$$f: \ldots\ldots \text{ tiene por duplo } \ldots\ldots$$

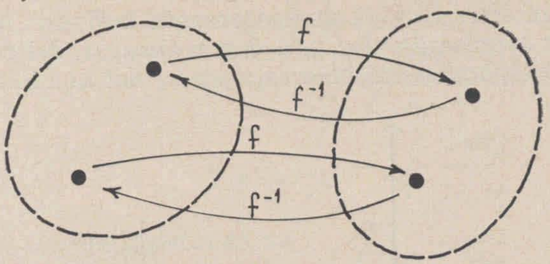
es una biyección

$$x \to 2x$$

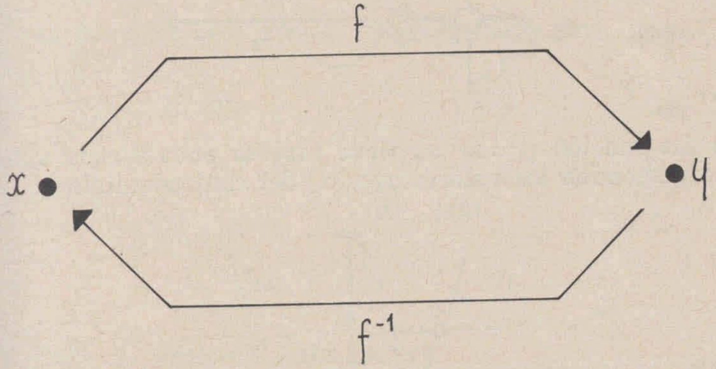
del conjunto de los números naturales sobre el conjunto de los números naturales pares.

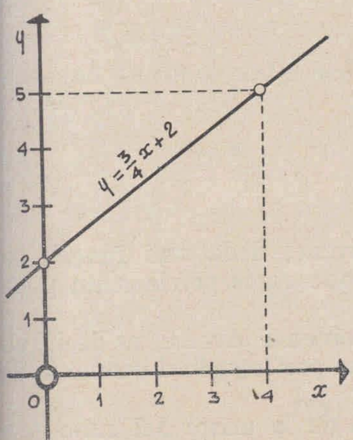
V) **Función Inversa.** — DEFINICIÓN. — *Se llama función inversa* (f^{-1}) *de una función biyectora "f" de A en B a la función de B en A tal a que todo elemento b perteneciente a B le hace corresponder un único elemento a perteneciente a A.*

O sea, en f^{-1} la imagen de b es únicamente a.



Observación. — Cuando una función admite inversa se llama *biyectiva.*





EJEMPLOS:

1) Sean los conjuntos A = {a, b, c} y B = {1, 2, 3}. La función biyectora "f" de A en B es:

$$f = \{ (a, 3), (b, 1), (c, 2) \}$$

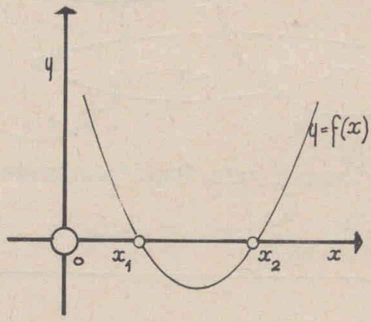
La función inversa es $f^{-1} = \{ (3, a), (1, b), (2, c) \}$.

2) La función

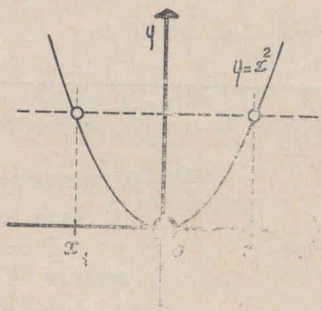
$$y = \frac{3}{4} x + 2$$

es biyectiva pues a cada valor de x le corresponde un solo valor de y, o sea, *la función tiene inversa.*

3) La función $y = f(x)$ que representa la figura, no tiene in
versa pues al mismo valor $y_1 = 0$ por ejemplo, del contradomi
nio, le corresponden los valores x_1 y x_2 del dominio.



4) La función $y = x^2$ *no tiene inversa* pues a cada valor y
le corresponden los valores x_1 y x_2 del contradominio.



Ecuaciones.

Hasta ahora hemos estudiado cómo, dada una función, se halla el punto del contradominio que corresponde a un punto del dominio.

También podemos resolver el problema inverso, es decir, obtener el punto del dominio que tiene por imagen a un punto del contradominio.

Por ejemplo, calcular la medida de la arista del cubo cuy lumen es dado. Estos problemas se llaman *ecuaciones*, y los ntos del dominio que se buscan, son raíces de la ecuación. El estudio de las ecuaciones se realiza más adelante.

Problemas

) Dada la función f definida así

$$f(x) = 4 - \frac{x}{8} \quad \text{siendo} \quad x \in \mathbf{R}$$

ecir qué números reales están representados por:

a) $f(8)$ R.: 3

b) $f(2)$ R.: $\frac{15}{4}$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ R.: $\frac{63}{16}$

d) $f(0)$ R.: 4

e) $f(-8)$ R.: 5

II) Dada la función $\mathbf{F}$ definida por

$$\mathbf{F}(u) = u^2 - 1 \qquad \text{siendo} \qquad -4 < u < 4$$

lecir qué números reales son los representados por

a) $\mathbf{F}(2)$ R.: 3

b) $\mathbf{F}\left(\frac{1}{5}\right)$ R.: $-\frac{24}{25}$

c) $\mathbf{F}\left(-\frac{1}{5}\right)$ R.: $-\frac{24}{25}$

d) $\mathbf{F}(-3)$ R.: 8

III) Dada la función

$$f(x) = 4 - \frac{x}{4}$$

determinar cuál es el conjunto de validez de cada uno de l[os]
siguientes enunciados:

a) $f(x) = 2$ c) $f(x) < 0$ e) $f(x) > 4$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}$ d) $f(x) = 16$ f) $f(x) \leqq 1$

R.: a) $x = 8$ d) $x = -48$
b) $x = 17$ e) $x = \mathbf{Z}^-$ (números negativ[os]
enteros)
c) $x > 16$ f) $x \geqq 12$

IV) Hallar la expresión de las funciones correspondientes [a]
las siguientes tablas:

(1)

x	y
0	0
1	4
-1	-4
2	8
-2	-8

(2)

x	y
0	-2
1	2
-1	-6
2	6
-2	-10

(3)

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
-1	1

(4)

x	y
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9

R.: (1) $y = 4x$ (3) $y = x^2$
(2) $y = 4x - 2$ (4) $y = 2x + 1$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS 4

Ventajas del uso de símbolos literales para la representación de números. — Se ha estudiado que al emplear cifras para representar a los números, con cada una de ellas o con un conjunto de ellas sólo se expresa a un número particular.

Así, por ejemplo:

2 representa al dos, y no al cero, ni al uno ni al tres, etc.

— 0,85 expresa *únicamente* al número *menos* 85 centésimos.

Dado que la Aritmética estudia las propiedades generales de los números, conviene usar también símbolos que puedan representar a cualquier número, es decir, que puedan indicar tanto al cero, como al uno, al dos, al cien, al menos un cuarto, etc., pues las propiedades que hemos comprobado o demostrado para los números enteros, fraccionarios o racionales, no sólo valen, para números particulares, sino también para números cualesquiera.

Lenguaje algebraico. — El dominio del "Algebra simbólica" es una de las cuestiones más importantes en el estudio de la Matemática.

El "objeto" reemplazado *por una letra,* se convierte en una abstracción, en un simple "operando", sujeto a ciertas combinaciones. Las expresiones literales se transforman en otras equivalentes, más simples y el Algebra se eleva así muy por encima de una estenografía apropiada.

Claro está que el Algebra desprovista de símbolos se reduce a una colección de reglas, establecidas al azar, para la solución de ecuaciones numéricas.

Resolver un problema, significa traducirlo de tal manera que su significado resulte evidente. La dificultad consiste en saber volcar el enunciado del problema propuesto en el lenguaje corriente, al *lenguaje algebraico.*

Cuando se ha logrado traducir un problema en forma de "oración" matemática su resolución no es sino el arte de aplicar correctamente reglas "gramaticales" invariables.

La práctica de resolver problemas de este modo, favorece el desarrollo de un sexto sentido, pues la matematización de la mente es un fenómeno casi físico, de la misma naturaleza subconsciente que la acción de nadar o montar en bicicleta.

Expresiones algebraicas. — DEFINICIÓN. — Se llama *expresión algebraica* a una combinación cualquiera de números representados por *letras,* o por *letras y cifras,* relacionadas entre sí por las operaciones de *suma, resta, multiplicación, división, potenciación* y *radicación.*

Ejemplos:

Son expresiones algebraicas:

a) $6x^4 - 0{,}3yz + 3$

b) $(\sqrt{ab^5} - 0{,}8585\ldots)\left(\frac{1}{3} - 5x\right)$

c) $(a + b)^3 : \frac{1}{2}y^3$

Expresión algebraica entera. — Llamamos expresión algebraica *entera* a aquella que no contiene denominador literal.

La expresión

$$\frac{3a^2b}{4} - \frac{5}{3}ab^3 + 0{,}5ab^2$$

es *entera* porque los denominadores que figuran son números expresados por cifras y no por letras.

Una expresión algebraica se llama fraccionaria cuando figuran en ella denominadores literales

La expresión

$$\frac{2a + 3ab^2}{5ab}$$

es *fraccionaria*, puesto que contiene en el denominador los factores literales (a) y (b).

Cuando una expresión algebraica no contiene radicales algebraicos recibe el nombre de *expresión racional.*

La expresión

$$\sqrt{3}\ ab^2 - \frac{2}{5} a^3b + \frac{\sqrt{2}\ ab}{3m}$$

es *racional*, porque los radicales que contiene no son algebraicos, es decir, en ellos no figuran letras.

La expresión

$$3a\sqrt{b} + 5\sqrt[3]{ab^2}$$

recibe el nombre de *irracional* por contener radicales algebraicos.

Monomio. — Definición. — Se llama monomio al *producto, cociente, potencia* o *raíz* de números racionales representados por cifras, letras o bien por cifras y letras.

Ejemplos:

$$-8ab \quad ; \quad \frac{5}{4} \quad ; \quad a^3\sqrt{c} \quad ; \quad \frac{4a}{\sqrt{2}}$$

Ejemplos particulares:

$$a \quad ; \quad 6 \quad ; \quad -b^2 \quad ; \quad \sqrt{4}$$

No son monomios, por ejemplo:

$6a - 5$, pues están ligados por la operación de *restar*.

$3 + 4m$, pues están ligados por la operación de *sumar*.

El *coeficiente* de un monomio, es el número que resulta d multiplicar los factores expresados por cifras.

Ejemplos:

En el monomio:

$$2a\,(-3)\ cb^3, \text{ el coeficiente es } 2\,(-3) = -6$$

En el monomio:

$$\frac{1}{3} \cdot a \cdot 6cxy \cdot (-8)\,z \text{ el coeficiente es } \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (-8) = -16$$

Suele escribirse el coeficiente delante de los factores literale y no hacerlo constar cuando es igual a 1.

Polinomio. — Definición. — Se llama *polinomio* a toda sum algebraica de monomios. Estos monomios reciben el nombre d *términos* del polinomio.

Ejemplos:

$$5a - 4b^2 \quad ; \quad \frac{2}{3}a^3b - \frac{1}{5}a + ab \quad ; \quad a + b + c - d$$

son polinomios.

Cuando un polinomio tiene dos términos solamente, se llam *binomio*.

Ejemplos:

$$a + b \quad ; \quad 3x^2y + \frac{1}{4}xy^3 \qquad \text{son binomios}$$

Cuando un polinomio tiene tres términos, se llama *trinomio* si tiene cuatro términos *cuatrinomio* y en general se llama polinomios de cinco términos, de n términos, etc.

GRADO DE UN MONOMIO: es el número de factores literales que ontiene. Para hallarlo, se suman los exponentes de dichos factores.

Así:

$3a$ es de *primer* grado, pues 1 es el exponente de a.

$\frac{3}{5}\, a^3bc^4$ es de *octavo* grado porque la suma de los exponentes es $3 + 1 + 4 = 8$.

NOTA. — Recuérdese que cuando el exponente es de grado 1 no se hace constar.

En realidad el número de factores literales del último ejemplo es 8, porque el monomio dado se puede escribir así:

$$\frac{2}{5}\, aaabcccc$$

GRADO DE UN POLINOMIO. — *Definición.* — Se llama grado de un polinomio al mayor de los grados de sus términos.

Para hallarlo se calcula primero el de cada uno de sus términos. El grado mayor que se obtenga, es el grado del polinomio.

Así en:

$3a^2 - \frac{1}{5}\, ab^3 + 7b$, el primer término $3a^2$, es de segundo grado; el segundo término $\frac{1}{5}\, ab^3$, es de cuarto grado y el tercer término $7b$, es de primer grado.

Decimos entonces que el polinomio es de *cuarto* grado.

Polinomio homogéneo.

Un polinomio se llama *homogéneo* cuando todos sus términos son del mismo grado.

El polinomio $5x^3y - \frac{1}{2}\, x^2y^2 + xy^3$ es homogéneo de cuarto grado porque todos sus términos son de cuarto grado.

Polinomio ordenado.

Decimos que un polinomio está *ordenado en forma creciente o decreciente con respecto a una letra,* cuando los exponentes de la misma van aumentando o disminuyendo término a término, respectivamente.

La expresión:

$2a^3 - 5a^2 + 3a - 4$ es un polinomio ordenado en forma decreciente con respecto a la letra a.

La expresión:

$4x^3 + 2x^2y + 5xy^2 - y^3$ es un polinomio ordenado en forma decreciente con respecto a la letra x, y ordenado en forma *creciente* con respecto a la letra y.

Cuando en uno de los términos no figura la letra que sirve para ordenar el polinomio, llamada letra *ordenatriz,* lo llamaremos *término independiente.* Así en el primer ejemplo, 4 es un término independiente, y en el segundo ejemplo, $4x^3$ es término independiente con respecto a y, siendo $-y^3$ independiente con respecto a x. En los términos independientes se puede considerar que la letra ordenatriz está elevada al exponente cero puesto que -4 es igual a $-4a^0$.

Caso particular de polinomio ordenado.

El polinomio $4x^4 - 2x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 2x^2 + 8x + 2$ se considera ordenado en forma *decreciente* según las potencias de x no obstante ser los exponentes de dicha letra, iguales en algunos términos.

Ejercicios:

Ordenar los siguientes polinomios en forma creciente para una letra.

1) $4a^2 - a + 5a^4 + 6 - 3a^3$

2) $-4xy^3 + 2y^4 - 3x^4 + 5x^2y^2 - x^3y$

Polinomio incompleto.

Cuando al ordenar un polinomio vemos que es *incompleto*, es decir, que los exponentes de su letra ordenatriz no aumentan o disminuyen de uno en uno, podemos completarlo agregándole nuevos términos que deben llevar como coeficiente, cero, para que no altere el valor del polinomio.

El polinomio $5x^4 - 3x^2 + 4$ es incompleto porque faltan los términos en que x debe figurar con exponentes 3 y 1. Este polinomio se puede completar de la siguiente manera:

$$5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 4$$

Veamos cómo se completa el polinomio.

$$2x^5 - 3x^3y^2 - 5xy^4 - y^5$$

Con respecto a x, faltan los términos en x^4 y en x^2 y con respecto a y, faltan los términos en y e y^3. Agregando dichos términos en el lugar correspondiente, se tiene:

$$2x^5 + 0x^4y - 3x^3y^2 + 0x^2y^3 - 5xy^4 - y^5$$

Completemos el polinomio $a^4 + 1$, en forma decreciente, con respecto a la letra a. Agregados los términos que faltan, se tiene:

$$a^4 + 0a^3 + 0a^2 + 0a + 1$$

Ejercicios:

Completar los siguientes polinomios:

$$3a^4 + 7a^2y^2 - y^4$$
$$2x^3 - y^3$$
$$1 + x^4$$

Polinomio alternado.

Un polinomio se dice que es *alternado* cuando sus términos son, alternadamente, uno positivo y uno negativo.

Ejemplo:

$$5x - 2x^3 + 4x^2 - 3$$

Veamos todo lo que se puede decir del polinomio:

$5x^4 - 4x^3y + 7x^2y^2 - 3xy^3 + 2y^4$, resumiendo todo lo expresado hasta ahora.

El polinomio dado es:

1º) Expresión algebraica racional entera.

2º) Polinomio de cinco términos.

3º) Polinomio homogéneo de cuarto grado.

4º) Ordenado en forma decreciente para x y en forma creciente para y.

5º) Completo.

6º) Alternado.

Valor numérico de una expresión algebraica.

Se llama *valor numérico* de una expresión algebraica, para un sistema de valores determinados dados a sus letras, al número que se obtiene *sustituyendo las letras por los valores numéricos* asignados, y efectuando con éstos las operaciones indicadas.

I) *Calcular el valor numérico de la expresión algebraica entera racional*

$$5a^3 - \frac{2}{3}ab^2 + 2\,\tfrac{1}{4}\,ab,$$

para el sistema de valores

$$a = -3 \quad \text{y} \quad b = 4$$

Reemplazando en esta expresión a y b por los valores particulares asignados:

$$5a^3 - \frac{2}{3}ab^2 + 2\,\tfrac{1}{4}\,ab$$

e transforma en:

$$5(-3)^3 - \frac{2}{3}\cdot(-3)(4)^2 + 2\,^1\!/\!_4\,(-3)\cdot(4) =$$

$$= 5\cdot(-27) - \frac{2}{3}(-3)(16) + \frac{9}{4}(-3)(4)$$

$$= -135 + 32 - 27$$

$$= 32 - 162 = -130$$

Luego:

$$5a^3 - \frac{2}{3}ab^2 + 2\,^1\!/\!_4\,ab = -130, \text{ para } a = -3 \quad \text{y} \quad b = 4$$

II) *Calcular el valor numérico* **de** *la expresión racional*

$$\frac{3ab - 5a^2 + b}{2a - 4ab^2}$$

para el sistema de valores

$$a = \frac{1}{5} \qquad b = -1$$

Reemplazando las letras por sus valores numéricos, se tiene:

$$\frac{3\cdot\frac{1}{5}(-1) - 5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2 + (-1)}{2\cdot\left(\frac{1}{5}\right) - 4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)\cdot(-1)^2} = \frac{\frac{-3\cdot1\cdot1}{5} - 5\frac{1}{25} - 1}{\frac{2\cdot1}{5} - \frac{4\cdot1\cdot1}{5}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{5} - \frac{1}{5} - 1}{\frac{2}{5} - \frac{4}{5}} = \frac{-\frac{9}{5}}{-\frac{2}{5}}$$

$$= \frac{9\cdot5}{5\cdot2} = \frac{9}{2}$$

EJERCICIOS

I)

a) Indicar el grado del polinomio:

$$5xy - \frac{2}{3}x^4 + 3x^3y^2$$

b) Señalar las características del polinomio:

$$5a^3 - 7a^2b + 2ab^2 + b^3$$

c) Indicar el grado del binomio $x - 1$.

d) Ordenar el polinomio siguiente en forma decreciente respecto de x.

$$3 + x^4 - 7x - 3x^3 + 2x^2$$

e) Completar el polinomio:

$$a^3 - 7a + 2$$

f) Completar el polinomio:

$$x^4 + 1$$

g) Completar el polinomio $a^3 - b^3$ en forma decreciente con respecto a a y en forma creciente con respecto a b.

II) Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3a^2 - ab + b^2$ para $a = -3$, $b = 2$

R.: 37

b) $\frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{5}xy$ para $x = \frac{1}{2}$, $y = 3$

R.: 0,2

c) $1 - a^2 + 5a^3$ para $a = -\dfrac{3}{5}$

R.: $-\dfrac{11}{25}$

d) $(3a + 4b)(4b - 3a) - 36a^2b$ para $a = \dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{1}{2}$

R.: 1

e) $\dfrac{-\dfrac{1}{5}a^2 + 2ab - b^2}{(4a - 1)(2a^2b - b)}$ para $a = 0{,}2$, $b = \dfrac{1}{2}$

R.: $-\dfrac{29}{46}$

f) $\dfrac{-\dfrac{4}{5}m^4 + 2m^2 - 1}{3mn^2 - 6n^3}$ para $m = \dfrac{5}{2}$, $n = \dfrac{1}{3}$

R.: $-\dfrac{711}{22}$

g) $\dfrac{2a^3 - 3a^2b + 5ab^2 - b^3}{4a^2 - 3ab + b^2}$ para $a = 0{,}3$, $b = -1$

R.: $\dfrac{706}{565}$

h) $4a^2b^3 - 6a^3b^2 + a^4b - 64ab^4$ para $a = 4$, $b = -\dfrac{1}{4}$

R.: 90

i) $a^4b^4 - a^3c + a^3b^3 - a^2bc + a^2b^2 + a^2c^2 + abc^3 + ac^4$

para $a = -1$, $b = 0$, $c = -2$

R.: -14

j) $\dfrac{\dfrac{a}{a-x}-1}{1-\dfrac{a}{a-x}}$ para $a=-0{,}5$, $x=-1$

R.: 1

k) $\dfrac{a^2+b^2}{\dfrac{1}{2}-1}+\dfrac{a^2-b^2}{\dfrac{1}{2}+1}$ para $a=-1$, $b=0{,}5$

R.: $\dfrac{2}{3}$

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS 5

SUMA

Monomios o términos semejantes.

DEFINICIÓN. — Dos monomios o términos son *semejantes* cuando tienen los mismos factores literales, es decir, las mismas letras afectadas por los mismos exponentes. Pueden diferir estos monomios en sus coeficientes con sus respectivos signos.

Ejemplos:

Son monomios semejantes las expresiones:

$$-a^2b \quad ; \quad 3a^2b \quad ; \quad \frac{2}{3}a^2b \quad ; \quad 0{,}5a^2b$$

En cambio, no son monomios semejantes:

$$\frac{3}{5}am^2 \quad ; \quad \frac{3}{5}a^2m \quad ; \quad \frac{3}{5}a^2m^2$$

porque sus factores literales no están elevados a los mismos exponentes.

Suma de monomios semejantes.

I) Sea, por ejemplo, sumar los siguientes monomios seme-
jantes:

$$5x^2y^3 \quad ; \quad \frac{2}{3}x^2y^3 \quad ; \quad 0{,}3x^2y^3$$

Expresamos su suma así:

$$5x^2y^3 + \frac{2}{3}x^2y^3 + 0{,}3x^2y^3$$

Como figura x^2y^3 en todos los términos de la suma, se sac
x^2y^3 como factor común y resulta:

$$5x^2y^3 + \frac{2}{3}x^2y^3 + 0{,}3x^2y^3 = (5 + \frac{2}{3} + 0{,}3)\ x^2y^3$$

Se efectúa luego la suma algebraica indicada dentro del parén-
tesis y se coloca el resultado como coeficiente de los factore
literales comunes.

$$5x^2y^3 + \frac{2}{3}x^2y^3 + 0{,}3x^2y^3 = \frac{179}{30}x^2y^3$$

Cálculo auxiliar

$$5 + \frac{2}{3} + 0{,}3 = \frac{5}{1} + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} = \frac{150 + 20 + 9}{30} = \frac{179}{30}$$

II) Sumar los monomios semejantes

$$2m^2n \quad ; \quad 7m^2n \quad ; \quad -\frac{1}{5}m^2n$$

Su suma será:

$$2m^2n + 7m^2n + (-\frac{1}{5}m^2n) = m^2n\left(2 + 7 - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{44}{5}m^2n$$

Cálculo auxiliar

$$2+7-\frac{1}{5}=\frac{10+35-1}{5}=\frac{45-1}{5}=\frac{44}{5}$$

De acuerdo al procedimiento seguido, se puede enunciar la siguiente

REGLA. — *La suma de varios monomios semejantes, es otro monomio semejante a los dados, cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes de los monomios dados.*

Suma de monomios no semejantes.

Cuando los monomios no son semejantes, no se puede sacar el o los factores comunes y, por lo tanto, es imposible efectuar la suma, debiendo el ejercicio limitarse a indicar la operación.

Ejemplo:

Sumar los monomios

$$3a^2m \quad ; \quad \frac{2}{5}xy^2 \quad ; \quad 7bc$$

La suma se expresará así:

$$3a^2m+\frac{2}{5}xy^2+7bc$$

Suma de polinomios.

Teniendo en cuenta que todo polinomio es una suma algebraica de números, para efectuar la suma de dos o más polinomios, debemos formar otro polinomio cuyos términos sean todos los términos de los polinomios sumandos. Si en el resultado figuran términos semejantes, se debe efectuar la suma de ellos, de acuerdo a la regla anterior. A esta última operación de sumar términos semejantes se llama *reducción de términos semejantes.*

Ejemplos:

I) Sea efectuar la suma de los polinomios:

$$(3a^2+5am+4m^3) \quad ; \quad (6am-2a^2+m^3)$$

Formamos el polinomio suma con los términos de ambos po-
nomios.

$$(3a^2 + 5am + 4m^3) + (6am - 2a^2 + m^3) =$$
$$= 3a^2 + 5am + 4m^3 + 6am - 2a^2 + m^3$$

por propiedad conmutativa y asociativa de la suma, se tiene:

$$= \underbrace{(3a^2 - 2a^2)}_{\text{términos semejantes}} + \underbrace{(5am + 6am)}_{\text{términos semejantes}} + \underbrace{(4m^3 + m^3)}_{\text{términos semejantes}}$$

por reducción de términos semejantes, resulta:

$$= a^2 + 11am + 5m^3$$

Luego:

$$(3a^2 + 5am + 4m^3) + (6am - 2a^2 + m^3) = a^2 + 11am + 5m^3$$

En la práctica se coloca un polinomio debajo del otro, cuida-do que figuren en la misma columna los términos semejant-
En el caso del ejemplo anterior, se tiene:

$$\begin{array}{rrrr} & 3a^2 + & 5am + & 4m^3 \\ + & -2a^2 + & 6am + & m^3 \\ \hline & a^2 + & 11am + & 5m^3 \end{array}$$

II) Efectuar la suma de los polinomios

$$\left(5x^3y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{1}{5}x^2y^2\right) \quad ; \quad \left(4xy^2 - \frac{1}{4}x^3y + 3x^2y^3\right)$$

Formamos el polinomio suma:

$$\left(5x^3y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{1}{5}x^2y^2\right) + \left(4xy^2 - \frac{1}{4}x^3y + 3x^2y^3\right) =$$

$$= 5x^3y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{1}{5}x^2y^2 + 4xy^2 -$$

$$- \frac{1}{4}x^3y + 3x^2y^3 =$$

$$= \left(5x^3y - \frac{1}{4}x^3y\right) + \left(\frac{2}{3}xy^2 + 4xy^2\right) -$$

$$- \frac{1}{5}x^2y^2 + 3x^2y^3 =$$

$$= \frac{19}{4}x^3y + \frac{14}{3}xy^2 - \frac{1}{5}x^2y^2 + 3x^2y^3$$

(por reducción de términos semejantes)

En la práctica:

$$\begin{array}{rllll}
 & 5x^3y & + \frac{2}{3}xy^2 & - \frac{1}{5}x^2y^2 & \\
+ & & & & \\
 & -\frac{1}{4}x^3y & + 4xy^2 & & + 3x^2y^3 \\
\hline
 & \frac{19}{4}x^3y & + \frac{14}{3}xy^2 & - \frac{1}{5}x^2y^2 & + 3x^2y^3
\end{array}$$

RESTA ALGEBRAICA

Resta de monomios semejantes.

I) Nos proponemos restar de $5mx^2$ el monomio $2mx^2$.

Recordemos que la resta entre números racionales se obtiene sumando al minuendo, el sustraendo con signo cambiado, y como los monomios son números, se tiene:

$$\begin{aligned}
(5mx^2) - (2mx^2) &= 5mx^2 + (-2mx^2) \\
&= mx^2\,[5 + (-2)] \\
&= mx^2\,[5 - 2] \\
&= 3mx^2
\end{aligned}$$

II) Restar el monomio $-x^3y^2c$, del monomio $-0{,}2x^3y^2c$:

$$\begin{aligned}
(-0{,}2x^3y^2c) - (-x^3y^2c) &= (-0{,}2x^3y^2c) + \\
+ (+x^3y^2c) &= (-0{,}2 + 1)\,x^3y^2c = \\
&= 0{,}8x^3y^2c
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos aceptar la siguiente

REGLA. — *La diferencia de dos monomios semejantes, es monomio semejante a los dados cuyo coeficiente es la difere de los coeficientes de los monomios dados.*

Resta de dos polinomios.

Teniendo en cuenta la regla anterior, resulta lícito que el p nomio diferencia se obtenga sumando al polinomio minuendo polinomio sustraendo con sus términos cambiados de signo, que este último va precedido por el signo menos:

Ejemplos:

I) Sea restar del polinomio $(5x^2y - 2xy^2 + xy)$, el polinor $(4xy^2 - 3x^2y + 2xy)$.

Se tiene:

$$\begin{aligned}(5x^2y - 2xy^2 + xy) - (4xy^2 - 3x^2y + 2xy) &= \\ = (5x^2y - 2xy^2 + xy) + (-4xy^2 + 3x^2y - 2xy) &= \\ = 5x^2y - 2xy^2 + xy - 4xy^2 + 3x^2y - 2xy &= \\ = 8x^2y - 6xy^2 - xy &\end{aligned}$$

En la práctica se colocan en columna los términos semejant

$$\begin{array}{r} 5x^2y - 2xy^2 + xy \\ -3x^2y + 4xy^2 + 2xy \end{array}$$

Luego se cambian los signos del sustraendo:

$$\begin{array}{r} 5x^2y - 2xy^2 + xy \\ +3x^2y - 4xy^2 - 2xy \\ \hline 8x^2y - 6xy^2 - 3xy \end{array}$$

Por lo tanto, podemos aceptar la siguiente

REGLA. — *Para restar dos polinomios, se suma al polinom minuendo el polinomio sustraendo cambiados los signos de t dos sus términos.*

II) Sea restar el polinomio

$$\left(\frac{1}{4}a^3 - ab^2 - 6 - \frac{1}{2}x^2\right)$$

del polinomio

$$\left(a^3 - \frac{6}{5}x^2 + 3ab^2 - 4\right)$$

Vamos a escribir en columna los dos polinomios, de manera que queden uno debajo del otro y además cambiaremos los signos de los términos del polinomio sustraendo.

$$\begin{array}{l} a^3 - \frac{6}{5}x^2 + 3ab^2 - 4 \\ -\frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{2}x^2 + ab^2 + 6 \\ \hline \frac{3}{4}a^3 - \frac{7}{10}x^2 + 4ab^2 + 2 \end{array}$$

Cálculo auxiliar

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$-\frac{6}{5} + \frac{1}{2} = \frac{-12+5}{10}$$

$$= -\frac{7}{10}$$

MULTIPLICACION ALGEBRAICA

Producto de monomios.

I) Sea multiplicar los monomios

$$a^2b \quad \text{y} \quad ab^3c$$

El primer monomio se puede indicar $a \cdot a \cdot b$ y el segundo

$$a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c$$

Por lo tanto, el producto:

$$(a^2b) \cdot (ab^3c) = a \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c$$

Aplicando la propiedad conmutativa al segundo miembro, tiene:

$$= a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c$$

y como el producto de potencias de igual base es igual a ot potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de l exponentes de las potencias dadas, resulta:

$$(a^2b) \cdot (ab^3c) = a^3b^4c$$

II) Veamos ahora, otro ejemplo de producto:

$$(-3a^2mx) \cdot \left(\frac{2}{5} am^2z\right) = (-3) \cdot a^2 \cdot m \cdot x \cdot \left(+\frac{2}{5}\right) \cdot am^2 \cdot z$$

Cambiando el orden de los factores:

$$= (-3) \cdot \left(+\frac{2}{5}\right) \cdot a^2 \cdot a \cdot m \cdot m^2 \cdot x \cdot z$$

De acuerdo a la regla de los signos de la multiplicación y a l propiedad del producto de potencias de igual base, resulta:

$$(-3a^2mx) \cdot \left(\frac{2}{5} am^2z\right) = -\frac{6}{5} a^3m^3xz$$

La observación de los ejemplos anteriores, nos permite enun ciar la siguiente

Regla. — *El producto de dos o más monomios, es otro mono mio cuyo signo está dado por la regla de los signos de la multi plicación, su coeficiente es el producto de los coeficientes dado y sus factores literales con sus respectivos exponentes, son lo mismos de los monomios dados, pero haciendo figurar las letra comunes a dos o más monomios una sola vez con un exponent igual a la suma de los exponentes que tienen en dichos mo nomios.*

Ejemplo:

$$(-2a^3bc) \cdot \left(\frac{3}{5}ab^2d\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}bcd\right) =$$

$$= +2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}\ a^{3+1} \cdot b^{1+2+1} \cdot c^{1+1} \cdot d^{1+1}$$

$$= +\frac{6}{10}a^4b^4c^2d^2$$

Regla de los signos:

$(-) \cdot (+) \cdot (-) = +$

Producto de un polinomio por un monomio.

Como un polinomio es una suma algebraica indicada de monomios llamados términos, para multiplicarlo por un monomio, se puede aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma algebraica.

Sea efectuar el producto:

$$\left(3x^2 - \frac{2}{5}xy + 5y^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}xy^2\right)$$

Aplicando la propiedad antes nombrada, se tiene:

$$\left(3x^2 - \frac{2}{5}xy + 5y^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}xy^2\right) =$$

$$= (3x^2) \cdot \left(-\frac{1}{4}xy^2\right) + \left(-\frac{2}{5}xy\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}xy^2\right) +$$

$$+ (5y^2) \cdot \left(-\frac{1}{4}xy^2\right)$$

Efectuando ahora los productos indicados:

$$= -\frac{3}{4}x^3y^2 + \frac{2}{20}x^2y^3 - \frac{5}{4}xy^4$$

Por lo tanto, podemos enunciar la siguiente

REGLA. — *El producto de un polinomio por un monomio es u polinomio que se obtiene multiplicando cada término del poli nomio dado por el monomio.*

En la práctica la operación se dispone así:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - \frac{2}{5}xy + 5y^2 \\ \times \qquad -\frac{1}{4}xy^2 \\ \hline -\frac{3}{4}x^3y^2 + \frac{2}{20}x^2y^3 - \frac{5}{4}xy^4 \end{array}$$

Producto de polinomios.

I) Sea multiplicar los polinomios:

$$a + b - c \qquad y \qquad m - n$$

Considerando al segundo polinomio como un solo número, podemos aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma algebraica:

$$(a + b - c) \cdot (m - n) =$$
$$= a \cdot (m - n) + b \cdot (m - n) - c \cdot (m - n)$$

Volviendo a aplicar la misma propiedad distributiva, resulta:

$$(a + b - c) \cdot (m - n) =$$
$$= a \cdot m - a \cdot n + b \cdot m - b \cdot n - c \cdot m + c \cdot n$$

II) Veamos otro ejemplo, disponiendo luego prácticamente la operación.

Sea multiplicar:

$$3a - b \quad \text{por} \quad a + 2b$$

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación, se tiene:

$$(3a - b) \cdot (a + 2b) = 3a^2 - ab + 6ab - 2b^2$$

Reduciendo los términos semejantes:

$$(3a - b) \cdot (a + 2b) = 3a^2 + 5ab - 2b^2$$

En la práctica:

$$\begin{array}{rr}
 & 3a - b \\
\times & a + 2b \\
\hline
 & 3a^2 - ab \qquad \\
 & + 6ab - 2b^2 \\
\hline
 & 3a^2 + 5ab - 2b^2
\end{array}$$

Generalizando el procedimiento, podemos enunciar la siguiente

REGLA. — *Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término de uno de ellos por todos los del otro polinomio y luego se reducen los términos semejantes.*

Disposición abreviada de un producto de polinomios.

Los términos que resultan semejantes, se pueden escribir uno debajo del otro, sin expresar los factores literales.

Sea multiplicar el polinomio

$$5a^3 - 2a^2b + ab^2 - 4b^3 \quad \text{por} \quad 3a - 2b$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 5a^3 - 2a^2b + ab^2 - 4b^3 & & & \\
\times & 3a - 2b & & & \\
\hline
15a^4 & - 6a^3b & + 3a^2b^2 & - 12ab^3 & \\
 & - 10 & + 4 & - 2 & + 8b^4 \\
\hline
15a^4 & - 16a^3b & + 7a^2b^2 & - 14ab^3 & + 8b^4
\end{array}$$

OBSERVACIÓN. — I) El número de términos de un producto de dos polinomios, sin reducir los términos semejantes, es igual al número de términos del primer polinomio por el número de términos del segun polinomio. En el ejemplo anterior, el número de términos del produc es igual a 8, puesto que $4 \times 2 = 8$.

II) El producto reducido de dos polinomios tiene al menos dos té minos irreducibles.

DIVISION ALGEBRAICA

Cociente de dos monomios.

I) Sea dividir los monomios:

$$-12xy^2 \qquad \text{y} \qquad 4xy$$

El cociente será otro monomio que multiplicado por el diviso dé por resultado el monomio dividendo. Para hallarlo tenemo que aplicar la regla de los signos de la división y obtener el co ciente de los coeficientes. En cuanto a las letras comunes de dividendo y divisor, se tiene en cuenta la propiedad del cocient de potencias de igual base.

$$\begin{aligned}(-12xy^2) : (4xy) &= -(12:4)\,x^{1-1}\,y^{2-1}\\ &= -3x^0y^1\\ (-12xy^2) : (4xy) &= -3y \qquad \text{puesto que } x^0 = 1\end{aligned}$$

COMPROBACIÓN. — Cociente por divisor = dividendo.

En efecto:

El cociente $-3y$ multiplicado por el divisor $4xy$ da el divi dendo $-12xy^2$.

$$(-3y) \cdot (4xy) = -12xy^2$$

Colocando los monomios del mismo ejemplo en forma de frac ción, podemos llegar al resultado, simplificando sus factores.

$$(-12xy^2) : (4xy) = \frac{-4 \cdot 3xyy}{4xy} = -3y$$

II) Sea dividir los monomios:

$$(15x^3z^2) \quad \text{y} \quad (3xyz^5)$$

Como el factor y figura en el divisor, pero no en el dividendo, consideramos que forma parte de éste, pero con exponente cero, lo cual no altera el valor, ya que sabemos que cualquier número elevado a cero, es igual a 1.

$$\begin{aligned} 15x^3z^2 : 3xyz^5 &= 15x^3y^0z^2 : 3x^1y^1z^5 \\ &= (15 : 3)\, x^{3-1}y^{0-1}z^{2-5} \\ &= 5x^2y^{-1}z^{-3} \end{aligned}$$

La observación de los casos precedentes nos permite enunciar la siguiente

REGLA. — *El cociente de dos monomios es otro monomio cuyo signo está dado por la regla de los signos de la división, su coeficiente es el cociente de los coeficientes dados y cuya parte literal consta de las letras comunes expresadas una sola vez, afectadas por un exponente igual a la diferencia de los exponentes que figuran en el dividendo y en el divisor y, además, por las letras del dividendo, con sus respectivos exponentes.*

Cuando una letra figura en el divisor solamente, se escribe en el cociente con su exponente, pero con signo contrario (*). Cuando resulta en el cociente una potencia de exponente cero, no se hace constar en el mismo.

(*) Todo número elevado a una potencia de exponente negativo es igual a una fracción cuyo numerador es la unidad y su denominador es la misma potencia, pero de exponente positivo:

Ejemplos:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{-64}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^1} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$$

Ejemplo:

$$0{,}05a^4b^2c : 0{,}1abd^3 = 0{,}5a^{4-1}b^{2-1}cd^{-3}$$
$$= 0{,}5a^3bcd^{-3}$$

Cálculo auxiliar

$$0{,}05 \;\underline{|\; 0{,}1\quad} \qquad\qquad 0{,}5 \;\underline{|\; 1\quad}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad 0{,}5$$

OBSERVACIÓN. — Cuando el cociente resulta un monomio en el que no figuran letras en el denominador ni factores con exponentes negativos, se dice que es un *cociente entero* y que el monomio dividendo es *divisible* por el monomio divisor.

Cociente de un polinomio por un monomio.

Teniendo en cuenta que un polinomio es una suma algebraica de monomios y que la división es distributiva con respecto a la suma algebraica, efectuaremos la siguiente división:

$$(8x^3yz^2 - 6x^4y^3z + 2x^5y^2z) : 3x^2yz =$$
$$= (8x^3yz^2) : (3x^2yz) - (6x^4y^3z) : (3x^2yz) +$$
$$+ (2x^5y^2z) : (3x^2yz) =$$
$$= \frac{8}{3}xz - 2x^2y^2 + \frac{2}{3}x^3y$$

La observación del caso anterior nos permite enunciar la siguiente

REGLA. — *El cociente de un polinomio por un monomio es igual a la suma algebraica de los cocientes de cada término del polinomio por el monomio.*

Otro ejemplo:

$$(0{,}4a^5b - 0{,}02a^3b^2c + 2a^5b^4) : 0{,}2a^2bc =$$
$$= 2a^3c^{-1} - 0{,}1ab + 10a^3b^3c^{-1}$$

Cálculos auxiliares

1)

$$0{,}4 \;|\; \underline{0{,}2}$$
$$2$$

2)

$$0{,}02 \;|\; \underline{0{,}2}$$

Multiplicando dividendo y divisor por 10 queda

$$0{,}2 \;|\; \underline{2}$$
$$0{,}1$$

3)

$$2 \;|\; \underline{0{,}2}$$

Multiplicando dividendo y divisor por 10 resulta

$$20 \;|\; \underline{2}$$
$$10$$

Cociente de polinomios

DEFINICIÓN. — Dado un polinomio $\mathbf{D}\,(x)$, llamado dividendo, ordenado según las potencias decrecientes de una letra, y otro polinomio $d\,(x)$, llamado divisor, ordenado en la misma forma, se denomina *cociente*, $c\,(x)$, a un polinomio o monomio tal que, multiplicado por el divisor más un monomio o polinomio **R**, *resto*, dé por resultado al polinomio dividendo. El grado del resto debe ser menor que el grado del divisor.

Notación.

$$\text{Si} \quad \begin{array}{l|l} \mathbf{D}\,(x) & d\,(x) \\ \cline{2-2} \mathbf{R} & c\,(x) \end{array}$$

$$\text{Es:} \quad \mathbf{D}\,(x) = d\,(x) \cdot c\,(x) + \mathbf{R}$$

$$\text{grado de } \mathbf{R} < \text{grado de } d\,(x)$$

Cuando $\mathbf{R} = 0$ se dice que *el cociente es exacto* y que el polinomio dividendo es *divisible* por el polinomio divisor.

Nos proponemos ahora, *calcular el cociente y resto entre el polinomio* $-2a + 4 + a^2$ *y el polinomio* $1 + a$.

1º *Se ordenan los polinomios* dividendo y divisor según las potencias decrecientes de una misma letra ordenatriz, en este caso, *a*, y *se efectúa luego el cociente del primer término del dividendo por el primer término del divisor,* obteniéndose como primer término del cociente, el número *a*.

$$\begin{array}{l|l} a^2 - 2a + 4 & a + 1 \\ \cline{2-2} & a \end{array}$$

2º *Se multiplica el cociente a* hallado, *por todos los términos del divisor y su producto se resta del dividendo.* debiéndose tener en cuenta que para restar polinomios se cambian todos los signos del polinomio sustraendo.

$$\begin{array}{r|l} a^2 - 2a + 4 & a + 1 \\ \cline{2-2} -a^2 - a & a \\ \hline -3a + 4 & \end{array}$$

3º *Se divide el primer término de la diferencia* hallada, (—3*a*), *por el primer término del divisor,* (*a*); luego *se multiplica el nuevo término del cociente,* (— 3), *por todo el divisor,* y el producto, (— 3*a* — 3), *se resta del nuevo dividendo,* (— 3*a* + 4).

$$\begin{array}{r|l} a^2 - 2a + 4 & a + 1 \\ \cline{2-2} -a^2 - a & a - 3 \\ \hline -3a + 4 & \text{(nuevo dividendo)} \\ +3a + 3 & \\ \hline +7 & \end{array}$$

(el producto obtenido $-3a-3$ se cambió de signo para restar).

4º *La operación se sigue en la misma forma* hasta hallar una diferencia en la que no figure la letra ordenatriz, caso del ejercicio propuesto, o bien que el grado del resto sea menor que el grado del divisor.

Comprobación. — De acuerdo a la definición de cociente, el lector puede comprobar que el cociente hallado, $(a - 3)$, multiplicado por el divisor, $(a + 1)$, más el resto, $(+ 7)$, es igual al dividendo, $(a^2 - 2a + 4)$.

Hallar el cociente de los polinomios:

$$8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 \quad \text{y} \quad 2a - 3b$$

$$\begin{array}{lll}
 & \overbrace{8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3}^{\mathbf{D}\,(x)} & \left|\, \overbrace{2a - 3b}^{d\,(x)} \right. \\
 & -8a^3 + 12a^2b & \underbrace{4a^2 - 12ab + 9b^2}_{c\,(x)} \\
 & \scriptstyle c_1 \quad c_2 \quad c_3 & \\
\text{1er. resto} & \quad -24a^2b & \\
 & \quad +24a^2b - 36ab^2 & \\
 & \text{2do. resto} + 18ab^2 & \\
 & \qquad -18ab^2 + 27b^3 & \\
 & \text{3er. resto } \mathbf{R} = 0 &
\end{array}$$

Observación. — El *dividendo* es *múltiplo* del divisor porque *el resto es cero.*

Hallar el cociente de los polinomios:

$$3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x + 3 \quad \text{y} \quad x^3 - 2$$

Conviene *completar* únicamente el polinomio dividendo:

$$\begin{array}{lll}
 & 3x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 3 & \left|\, \underline{x^3 - 2} \right. \\
 & -3x^5 \qquad\qquad\qquad + 6x^2 & \quad 3x^2 - 4 \\
\text{1er. resto} & \qquad\quad -4x^3 + 8x^2 - x + 3 & \\
 & \qquad\quad +4x^3 \qquad\qquad\quad - 8 & \\
\text{2do. resto} & \qquad\qquad\quad + 8x^2 - x - 5 &
\end{array}$$

Observación. — La división está terminada, puesto que el grado del resto es menor que el grado del divisor.

La observación de los casos anteriores nos permite generalizar, aceptando la siguiente

Regla. — *Para dividir dos polinomios se ordenan según las potencias decrecientes de una misma letra y se efectúa el cociente del primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniéndose el primer término del cociente. Se multiplica el cociente hallado por todo el divisor, y el resultado* *se resta del dividendo. El primer término de esta diferencia se divide por el primero del divisor, obteniéndose el segundo término del cociente, repitiéndose luego todas las operaciones indicadas hasta llegar a un resto igual a cero o a una expresión de grado menor que el divisor.*

Polinomio entero. — Un polinomio se dice que es *entero* con respecto a una de sus letras, cuando ésta no figura como denominador de ninguno de sus términos, o cuando dicha letra no se halla afectada por ningún exponente negativo.

Ejemplo:

$8a^4 - \frac{2}{5} a^2 - \frac{6}{c}$ es un polinomio *entero* respecto de a.

$12x^{-2} + 6ax$ no es un polinomio *entero* con respecto a la letra x.

Regla de Ruffini

Caso particular de la división.

Obtención mental del cociente de un polinomio entero en x, dividido por un binomio de la forma $x + a$.

Sea dividir:

$$4x^3 - 5x^2 + 6x - 2 \quad \text{por} \quad x - 3$$

Efectuando la operación:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\multicolumn{4}{c|}{\overbrace{\hphantom{4x^3 - 5x^2 + 6x - 2}}^{\mathbf{D}\ (x)}} & \overbrace{\hphantom{x-3}}^{d\ (x)} \\
4x^3 - & 5x^2 + & 6x - & 2 & x - 3 \\
\cline{5-5}
-4x^3 + & 12x^2 & & & 4x^2 + 7x + 27 \\
\cline{1-2}
& +7x^2 & & & \quad c\ (x) \\
& -7x^2 + & 21x & & \\
\cline{2-3}
& & +27x & & \\
& & -27x + & 81 & \\
\cline{3-4}
& & \mathbf{R} = & 79 &
\end{array}
$$

En esta división puede observarse:

1º Que el dividendo es un polinomio de tercer grado y que el cociente es un polinomio de segundo grado, es decir, que el grado de éste es menor en una unidad que el grado del dividendo.

2º Que existen las siguientes relaciones entre los coeficientes del dividendo **D** (x) y del cociente c (x).

El coef. del 1er. térm. del c (x) es 4 = coef. del 1er. térm. del **D** (x)

El coef. „ 2º „ „ „ „ 7 = producto del coef. anterior del c (x) por el 2º coef. del d (x), cambiado de signo, más el 2º coef. del dividendo.

$$4 \cdot 3 - 5 = 7$$

El coef. „ 3er. „ „ „ „ 27 = producto del coef. anterior del c (x) por el 2º coef. del d (x), cambiado de signo, más el 3er. coef. del **D** (x).

$$7 \cdot 3 + 6 = 27$$

Resto = producto del último coeficiente del c (x) por el 2º término del d (x), con signo cambiado más el último coeficiente del **D** (x).

$$27 \cdot 3 - 2 = 81 - 2 = 79$$

Sintetizando, podemos aceptar la siguiente regla conocida como

Regla de Ruffini (*). — *El cociente de un polinomio entero en* x *por otro de la forma* x + a, *es otro polinomio cuyo grado es menor en una unidad que el grado del dividendo y su primer coeficiente es igual al primer coeficiente del dividendo. El segundo coeficiente es igual al primer coeficiente obtenido multiplicado por* a *cambiado de signo, más el segundo coeficiente del*

(*) Pablo Ruffini (1765-1822) matemático y médico italiano. A él se debe el valioso descubrimiento de la teoría de las ecuaciones. Además demostró la imposibilidad de dar una solución general a las ecuaciones algebraicas de grado superior al 4º.

dividendo. En general un coeficiente cualquiera del cociente es igual al coeficiente anterior por a cambiado de signo más el coeficiente correspondiente del dividendo.

El resto de la división se obtiene multiplicando el último coeficiente del cociente por a cambiado de signo y sumándole a este producto el último coeficiente del dividendo.

En esta regla se ha supuesto que el dividendo es un polinomio completo. Si no lo es, se añaden los términos que faltan, pero afectados de un coeficiente cero.

Ejemplos:

Hallar mentalmente el cociente y el resto de la división, utilizando la regla de Ruffini.

I) $$(-3x^4 + 2x^3 - x + 4) : (x + 2)$$

Completando el polinomio dividendo, se tiene:

$$(-3x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x + 4) : (x + 2)$$

1er. coef. del cociente $= -3$

2º coef. del cociente $= (-3)\cdot(-2) + 2 = 6 + 2 = 8$

3er. coef. del cociente $= 8\,(-2) + 0 = -16 + 0 = -16$

4º coef. del cociente $= (-16)\cdot(-2) - 1 = +32 - 1 = +31$

Resto $= (+31)\cdot(-2) + 4 = -62 + 4 = -58$

Luego el cociente $c\,(x) = -3x^3 + 8x^2 - 16x + 31$

$$\mathbf{R} = -58$$

Efectúe el lector la división para comprobar la veracidad del resultado.

II) $$(0{,}5x^3 + 0{,}03) : (x + 0{,}1)$$

Completando el dividendo, resulta:

$$(0{,}5x^3 + 0x^2 + 0x + 0{,}03) : (x + 0{,}1)$$

1er. coef. del $c(x) = 0{,}5$

2º coef. „ „ $= (0{,}5) \cdot (-0{,}1) + 0 = -0{,}05$

3er. coef. „ „ $= (-0{,}05) \cdot (-0{,}1) + 0 = +0{,}005$

$$\text{Resto} = (+0{,}005) \cdot (-0{,}1) + 0{,}03 =$$
$$= -0{,}0005 + 0{,}03 = +0{,}0295$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} 0{,}0300 \\ -\;0{,}0005 \\ \hline 0{,}0295 \end{array}$$

Luego

$$c\ (x) = 0{,}5x^2 - 0{,}05x + 0{,}005$$
$$R = 0{,}0295$$

III)

$$-\frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \quad \Big| \; x - \frac{1}{4}$$

1er. coef. del $c(x) = \quad -\dfrac{1}{2}$

2º coef. del $c(x) = \quad -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} + 1 = -\dfrac{1}{8} + 1 = \dfrac{-1+8}{8} = \dfrac{7}{8}$

3er. coef. del $c(x) = \dfrac{7}{8} \cdot \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{32} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{7-24}{32} = \dfrac{-17}{32}$

Resto $= \quad -\dfrac{17}{32} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{17}{128} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-17+64}{128} = \dfrac{47}{128}$

Luego: $c\ (x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{7}{8}x - \dfrac{17}{32}$

R.: $\dfrac{47}{128}$

Teorema del resto. — Como hemos observado, la regla de Ruffini nos permite calcular el resto de la división de un polinomio entero en (x) por otro de la forma $(x + a)$ conociendo el último coeficiente del cociente. Pero ahora vamos a calcular directamente el resto, aplicando el

TEOREMA DEL RESTO. — *El resto de la división de un polinomio entero en* (x) *por otro, de la forma* (x + a) *es el valor numérico del polinomio dividendo para* (x) *igual a* (a) *cambiado de signo*

H) $\mathbf{D}\ (x)$ *Dividendo*

$x + a$ *Divisor*

$\mathbf{C}\ (x)$ *Cociente*

$\mathbf{R}$ *Resto*

T) $\mathbf{R} = \mathbf{D}\ (-a)$

D) Por definición de cociente

$$\textit{Dividendo} = \textit{divisor} \times \textit{cociente} + \textit{resto}$$

o sea:

$$\mathbf{D}\ (x) = (x + a) \cdot \mathbf{C}\ (x) + \mathbf{R} \qquad \text{(I}$$

y, por lo tanto, si

$$x = -a$$

se cumple también la igualdad (I)

$$\mathbf{D}\ (-a) = (-a + a) \cdot \mathbf{C}\ (-a) + \mathbf{R} \qquad \text{(II}$$

pero

$$-a + a = 0$$

luego

$$\mathbf{D}\ (-a) = 0 \cdot \mathbf{C}\ (-a) + \mathbf{R}$$

o bien

$$\mathbf{D}\ (-a) = \mathbf{R}$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{D}\ (-a)}$$

que es la expresión de la tesis.

EJERCICIOS

I) Calcular el resto de la división

$$(-3x^4 + 2x^3 - x + 4) : (x + 2)$$

En este ejemplo (a) cambiado de signo es (-2); por lo tanto, debemos reemplazar en el dividendo (x) por (-2), o sea:

$$\mathbf{R} = -3\,(-2)^4 + 2\,(-2)^3 - (-2) + 4$$
$$\mathbf{R} = -3\,(+16) + 2\,(-8) + 2 + 4$$
$$\mathbf{R} = -48 - 16 + 2 + 4$$
$$\mathbf{R} = -64 + 6$$
$$\mathbf{R} = -58$$

II) Calcular el resto de la división

$$(2t^4 - 9t^3 + 3t^2 + 7t - 12) : (t - 4)$$

R.: 0

III) Aplicar el teorema del resto

$$(x^4 - 1) : (x + 1)$$

R.: 0

IV) Calcular el resto

$$(x^3 + 4x^2 + 6x - 2) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

R.: $-\dfrac{33}{8}$

V) Calcular el resto

$$(x^4 - 5x^2 + 4x - 4) : (x - 2)$$

R.: 0

VI) Calcular directamente el resto

$$(2x^3 - 4x^2 - 5x - 3) : (x + 1)$$

R.: -4

VII) Calcular el resto

$$\left(2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 0{,}5x + \frac{1}{10}\right) : \left(x + \frac{3}{10}\right)$$

R.: $-\dfrac{59}{1000}$

VIII) Calcular el resto

$$\left(\frac{1}{5}x^3 - 4x^2 - \frac{1}{2}x + 5\right) : (x - 2{,}5)$$

R.: $-18{,}125$

Expresión algebraica fraccionaria.

Se llama *expresión algebraica fraccionaria* al cociente indicado de dos expresiones algebraicas enteras.

Por lo tanto, son expresiones algebraicas racionales o fracciones algebraicas, las siguientes:

$$\frac{ab^2}{2mn} \; ; \; \frac{xy^3}{5a} \; ; \; \frac{2a - 3b^2 + c}{m}$$

No son expresiones algebraicas racionales (fraccionarias), las siguientes expresiones:

$$\frac{8x^4 - 2x + 2y}{6} \; ; \; \frac{8t - t^3}{\frac{2}{3}}$$

pues no figuran letras en los denominadores.

Potenciación

Potencia enésima de un monomio.

Sea elevar el monomio $-3x^4yz^3$ a la segunda potencia.

Siendo los monomios números, conviene aplicar la propiedad istributiva de la potenciación con respecto al producto, y se iene:

$$(-3x^4yz^3)^2 = (-3)^2 \cdot (x^4)^2 \cdot (y)^2 \cdot (z^3)^2$$
$$= +9(x^4)^2 \cdot (y)^2 \cdot (z^3)^2$$

ues la potencia par de un número negativo, es positiva.

$$= +9x^{4\cdot 2}y^2z^{3\cdot 2}$$

ues la potencia de una potencia es otra potencia de igual base uyo exponente es el producto de los exponentes.

Luego:

$$(-3x^4yz^3)^2 = 9x^8y^2z^6$$

Lo expresado nos permite enunciar la siguiente

REGLA. — *La potencia enésima de un monomio es igual a otro monomio cuyo signo está dado por la regla de los signos de la potenciación de los números enteros, su coeficiente es la potencia enésima del coeficiente dado y la parte literal está compuesta por las mismas letras con un exponente igual al producto del exponente dado por el número* n.

Ejemplo:

$$\left(-\frac{2}{5}a^3b^2c\right)^4 = \left(-\frac{2}{5}\right)^4 (a^3)^4\ (b^2)^4\ c^4$$
$$= +\frac{16}{625}a^{12}b^8c^4$$

Cuadrado de un binomio.

I) *Elevar al cuadrado el binomio* $a+b$

$$(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b)$$

por definición de potencia.

Efectuando la multiplicación indicada en el segundo miembro, se tiene:

$$= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$$
$$= a\cdot a + a\cdot b + a\cdot b + b\cdot b$$

reduciendo términos semejantes y aplicando la definición d
cuadrado de un número:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

II) *Elevar al cuadrado el binomio* $a - b$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

por definición de potencia.

$$= a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b$$

por producto de dos diferencias.

$$= a \cdot a - a \cdot b - a \cdot b + b \cdot b$$

por propiedad conmutativa del producto.

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

por definición de potencia y reducción de términos semejante

En general, se puede enunciar la siguiente

REGLA. — *El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado d primer término más (menos en el caso del binomio diferencia el duplo del producto del primero por el segundo, más el cu drado del segundo término.*

Ejemplo:

Elevar al cuadrado el binomio $3xy^2 - 4y^3$

$$(3xy^2 - 4y^3)^2 = (3xy^2)^2 - 2 \cdot 3xy^2 \cdot 4y^3 + (4y^3)^2$$
$$= 9x^2y^4 - 24xy^5 + 16y^6$$

OBSERVACIÓN. — *El cuadrado de un número compuesto de decenas unidades es igual al cuadrado de las decenas más el duplo de decen por las unidades, más el cuadrado de las unidades.*

En efecto:

$$56^2 = (50 + 6)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 6 + 6^2 = 3\,136$$

$$24^2 = (20 + 4)^2 = 400 + 2 \cdot 20 \cdot 4 + 16$$
$$= 400 + 160 + 16 = 576$$

$$35^2 = (30 + 5)^2 = 900 + 2 \cdot 30 \cdot 5 + 25$$
$$= 900 + 300 + 25$$
$$= 1225$$

Cubo de un binomio.

I) *Sea elevar al cubo el binomio* $a + b$

$$(a + b)^3 = (a + b)\,(a + b)\,(a + b)$$

por definición de cubo.

$$= (a + b)^2 \cdot (a + b)$$

por propiedad asociativa de la multiplicación y definición de potencia.

$$= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b)$$

por cuadrado de un binomio.

$$= a^2 \cdot a + a^2 \cdot b + 2ab \cdot a + 2ab \cdot b + $$
$$+ b^2 \cdot a + b^2 \cdot b$$

por producto de dos sumas.

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

Luego:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

por reducción de términos semejantes.

II) *Sea elevar al cubo el binomio* $a - b$

$$(a - b)^3 = [\,(a - b) \cdot (a - b)\,] \cdot (a - b)$$

por definición de cubo.

$$= (a - b)^2 \cdot (a - b)$$

por propiedad asociativa de la multiplicación y definición potencia.

$$= (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$

por cuadrado de un binomio.

$$= a^2 \cdot a - a^2 \cdot b - 2ab \cdot a + 2ab \cdot b + \\ + b^2 \cdot a - b^2 \cdot b$$

por producto de dos sumas algebraicas.

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$$

por reducción de términos semejantes.

Luego:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

De acuerdo a lo observado, podemos enunciar la siguier regla, que es general

Regla. — *El cubo de un binomio es igual al cubo del prim término más (menos en el caso del binomio diferencia) el trip del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del p mero por el cuadrado del segundo, más (menos, si el binom es una diferencia) el cubo del segundo término.*

Ejercicios:

I) Elevar al cubo el binomio

$$\frac{2}{5} a^3b + 4b^2c$$

$$\left(\frac{2}{5} a^3b + 4b^2c \right)^3 = \left(\frac{2}{5} a^3b \right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{2}{5} a^3b \right)^2 \cdot (4b^2c) +$$

$$+ 3 \cdot \left(\frac{2}{5} a^3b \right)(4b^2c)^2 + (4b^2c)^3$$

$$= \frac{8}{125} a^9b^3 + 3 \cdot \frac{4}{25} a^6b^2 \cdot 4b^2c + 3 \cdot \frac{2}{5} a^3b \cdot 16b^4c^2 + 64b^6c^3$$

$$= \frac{8}{125} a^9b^3 + \frac{48}{25} a^6b^4c + \frac{96}{5} a^3b^5c^2 + 64b^6c^3$$

II) Elevar al cubo el binomio $2a - 5b$

$$(2a - 5b)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 (-5b) +$$
$$+ 3 \cdot (2a) (-5b)^2 + (-5b)^3$$
$$= 8a^3 - 3 \cdot 4a^2 \cdot 5b + 3 \cdot 2a \cdot 25b^2 - 125b^3$$
$$= 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$$

OBSERVACIÓN. — *El cubo de un número compuesto de decenas y unidades es igual al cubo de las decenas más el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades.*

En efecto:

$$52^3 = (50 + 2)^3$$
$$= 50^3 + 3 \cdot 50^2 \cdot 2 + 3 \cdot 50 \cdot 2^2 + 2^3$$
$$= 125000 + 6 \cdot 2500 + 12 \cdot 50 + 8$$
$$= 125000 + 15000 + 600 + 8$$
$$= 140608$$

EJERCICIOS

I) *Suma y resta de expresiones algebraicas.*

— Sumar o restar los monomios:

a) $-3a^2b \; ; \; \frac{2}{5} a^2b$

b) $2\frac{1}{3} a^3b \; ; \; -4a^3b \; ; \; 0{,}3a^3b$

c) $0{,}1a \; ; \; 7a \; ; \; \frac{1}{3} a$

d) $4am \; ; \; \frac{2}{5} am \; ; \; -1\frac{2}{3} am$

e) $ab \; ; \; -\frac{3}{5} ab$

f) $\frac{3}{4} x^3 \; ; \; -2x^3 \; ; \; 7x^3$

g) $mm, \; 4mb.$

II) Sumar los polinomios:

a)

$$(0{,}1a^2 - 0{,}05ab + 0{,}7b^2) \;\; ; \;\; (0{,}3ab + b^2 - a^2) \;\; ;$$

$$\left(\frac{3}{2} a^2 - \frac{1}{2} b^2 - ab \right)$$

R.: $0{,}6a^2 - 0{,}75ab + 1{,}2b^2$

b)

$$\left(\frac{4}{3} a^3 - 0{,}7a^2b - \frac{2}{5} ab^2 \right) ; \left(- 0{,}1a^3 + \frac{7}{2} ab^2 - a^2b \right);$$

$$\left(a^3 - a^2 + \frac{4}{3} b^2 \right)$$

R.: $\frac{67}{30} a^3 - 1{,}7a^2b + \frac{31}{10} ab^2 - a^2 + \frac{4}{3} b^2$

c) $(- 7a^5b^3 + 8a^4b^2 + 5a^3b^4) + (12a^5b^3 - 5a^4b^2 - 8a^3b^4) +$
$+ (- 15a^5b^3 + 12a^4b^2 + 6a^3b^4 - 8a)$

R.: $- 10a^5b^3 + 15a^4b^2 + 3a^3b^4 - 8a$

d) $(0{,}2zh^3 + 3 - 0{,}04hv^5) + (- 0{,}52zh^3 + 0{,}5hv^5 - 0{,}09)$

R.: $- 0{,}32zh^3 + 0{,}46hv^5 + 2{,}91$

III) Sumar o restar los polinomios:

a)

$$\left(3a^2b + \frac{4}{5} ab^2 - \frac{1}{3} a^2 + 2b^2\right) \;\; ; \;\; \left(4ab^2 - \frac{1}{3} a^2b + 2a^2b^2 - 5b^2\right)$$

$$\text{R.:} \begin{cases} \text{Suma} = \frac{8}{3} a^2b + \frac{24}{5} ab^2 - \frac{1}{3} a^2 - 3b^2 + 2a^2b \\[2ex] \text{Resta} = \frac{10}{3} a^2b - \frac{16}{5} ab^2 - \frac{1}{3} a^2 + 7b^2 - 2a^2b^2 \end{cases}$$

b)

$(4ab^2 - 7a^3b + 2a)$; $(2a^3b - 2a + 3a^2b^2)$

$$\text{R.: } \begin{cases} \text{Suma} = 4ab^2 - 5a^3b + 3a^2b^2 \\ \text{Resta} = 4ab^2 - 9a^3b + 4a - 3a^2b^2 \end{cases}$$

c) Siendo

$$A_1 = x^2y + 3xy - 4x^2y^2$$
$$A_2 = 3x^2y^2 - 4x^2y - x^3y^3$$
$$A_3 = -2x^3y^3 + 4x^2y^2 - xy$$

calcular

1 $(A_1 + A_2) - A_3$; 2) $A_5 - A_1$; 3) $A_2 - (A_1 + A_3)$

1) R.: $-3x^2y + 4xy - 5a^2y^? + x^3y^3$

2) R.: $-2x^3y^3 + 8x^2y^2 - 4xy - x^2y$

3) R.: $3x^2y^2 + x^3y^3 - 2xy - 5x^2y$

d) $(15x^4 - 7x^3 + \frac{3}{8}x^2 - 5x - 10) +$

$$+ (-27x^4 + 4 + 12x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{22}{3}x)$$

R.: $-12x^4 + 5x^3 - \frac{11}{24}x^2 + \frac{7}{3}x - 6$

e) $(3a^3b + 10a^4 - 7a^2b^2 +) -$

$- (7a^4 + 2 + 8ab^3 - 6a^2b^2 + 12a^3b)$

R.: $3a^4 - 9a^3b - a^2b^2 - 8ab^3 + 6$

f) $(3x^2 - 4x + 2) + x^2 - (2x - 3)$

R.: $4x^2 - 6x + 5$

IV) Quitar paréntesis y efectuar las reducciones:

$$(2a - b) - (b - a) + (-2a - 2b) - (a + b)$$

R.: $-5b$

V) Ordenar y restar del polinomio:

$$\left(\frac{2}{5} x^2y - 7x^3 + 4y^3 - 2xy^2 \right), \text{ el polinomio}$$

$$\left(-2xy^2 + 4y^3 + \frac{2}{5} x^2y - 7x^3 \right)$$

R.: 0

VI) *Multiplicación de expresiones algebraicas.*

— Multiplicar los monomios:

a) $\frac{3}{5} x^3y^2z \ ; \ -2xy^3$

b) $\frac{1}{5} amz^2 \ ; \ \frac{2}{3} a^3z \ ; \ -bm^2z^3$

c) $2ab \ ; \ 4ab^2 \ ; \ 7a^2b$

d) $\frac{3}{5} x^2y \ ; \ -\frac{1}{2} x^3y^2$

e) $3ab^2 \ ; \ \frac{2}{5} a^3 \ ; \ -0{,}5a^2b^3$

f) $-x^2y^3 \ ; \ 2xy^2z \ ; \ x^0y^3z^2$

VII) Multiplicación de un polinomio por un monomio:

a) $\left(\frac{3}{2} abc^4 + 0{,}2a^3b^2 - \frac{1}{3} a^2b \right) \cdot \left(-\frac{1}{3} ab^3c^2 \right)$

b) $(-a^3 + 3a^2 - 3ab^2 + b^3) \cdot (-a)$

c) $\left(-\frac{5}{2} ab + a^3b^2 - 3a^2 \right) \cdot (0{,}3ab^2m)$

d) $\left(x^3 - 3xy^2 + \frac{1}{3} y^3 \right) \cdot \left(-\frac{2}{5} x^2y \right)$

e) $\left(-0{,}2a + \frac{1}{5} b - 0{,}03ab \right) \cdot (-2a^2b^3c)$

VIII) Multiplicación de polinomios:

a) $(a^2 - 3ab^2 + 2a)(2a^2b^2 - 5ab + 1)$

R.: $2a^4b^2 - 6a^3b^4 + 4a^3b^2 - 5a^3b + 15a^2b^3 - 10a^2b +$
$+ a^2 - 3ab^2 + 2a$

b) $\left(\frac{3}{5}x^3 - y^3\right)(4x^3 + y^3)$

R.: $\frac{12}{5}x^6 - \frac{17}{5}x^3y^3 - y^6$

c) $(2a - 3b^2)(2a + 3b^2)$

R.: $4a^2 - 9b^4$

d) $\left(4a^2b - \frac{1}{3}ab^2 + 5ab\right)(-a^2b^2 - ab)$

R.: $-4a^4b^3 + \frac{1}{3}a^3b^4 - 5a^3b^3 - 4a^3b^2 + \frac{1}{3}a^2b^3 - 5a^2b^2$

e) $(a^3 - b^3)(1 - a^3)$

R.: $a^3 - b^3 - a^6 + a^3b^3$

f) $(1 - x)(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10)$

R.: $5x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 18x + 10 - x^5$

g) $(2a - 3b + 5c)(0{,}05a - 0{,}3b - c)$

R.: $0{,}1a^2 + 0{,}9b^2 - 5c^2 - 0{,}75ab - 1{,}75ac + 1{,}5bc$

h) $(a - 2b)(3a - 4b)(a + 2b)$

R.: $3a^3 + 16b^3 - 12ab^2 - 4a^2b$

i) $(x^3 + 5x^2 + 5x + 1)(x^2 + 2x + 1)$

R.: $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 7x + 1$

j) $2a^2x\,[-ay - x^3 + 2xa + a\,(x^2 + y) + x^3]$

R.: $4a^3x^2 + 2a^3x^3$

k) $[x\,(x + a) - a\,(x - a)]\,[x\,(x - a) - a\,(a - x)]$

R.: $x^4 - a^4$

l) $(3a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 2b^3)(2a^2 + 4ab - b^2)$

R.: $6a^5 + 4a^4b - 9a^3b^2 + 20a^2b^3 - 13ab^4 + 2b^5$

m) $(3a^3 - 4a^2b + 2ab^2 - b^3)(ab + 2a^2 - 3b^2)$

R.: $6a^5 - 5a^4b - 9a^3b^2 + 12a^2b^3 - 7ab^4 + 3b^5$

n) $\left(0{,}5x^2y + xy^2 - \dfrac{1}{4}y^3\right)(8xy - 6y^2)$

R.: $4x^3y^2 + 5x^2y^3 - 8xy^4 + 1{,}5y^5$

o) $(8xy^2z^3 - 5x^2y^3z + 4x^3yz^2)(2xy^2 + xy^2)$

R.: $12x^4y^3z^2 - 15x^3y^5z + 24x^2y^4z^3$

p) $(a^2z - 0{,}5az^2 + 0{,}5z^3)\left(3a^3 + \dfrac{2}{3}a^2z - az^2 + z^3\right)$

R.: $3a^5z - \dfrac{5}{6}a^4z^2 + \dfrac{1}{6}a^3z^3 + \dfrac{11}{6}a^2z^4 - az^5 + 0{,}5z^6$

q) $(z^2 + 11z + 30)(6 + z)$

R.: $z^3 + 17z^2 + 96z + 180$

r) $(3a - a^2 + 3)\left(a + \dfrac{1}{5}a^2 - a^3 - 0{,}25\right)$

R.: $a^5 - \dfrac{16}{5}a^4 - \dfrac{17}{5}a^3 + \dfrac{77}{20}a^2 + \dfrac{9}{4}a - 0{,}75$

s) $(3b - 5 + 7a)(5 + 3b + 7a)$

R.: $9b^2 + 49a^2 + 42ab - 25$

t) $\left(t^3x - \dfrac{5}{8}t^4 - 0{,}5t^2x^2 + 0{,}75tx^3\right)(2tx + 4t^2 - 2x^2)$

R.: $\dfrac{5}{4}t^4x^2 + \dfrac{11}{4}t^5x + \dfrac{5}{2}t^2x^4 - \dfrac{5}{2}t^6 - \dfrac{3}{2}tx^5$

u) $(t^2 - tx + x^2)$

R.: $t^3 + x^3$

v) $\left(\frac{1}{5}a^2x + \frac{1}{10}a^3 - \frac{3}{10}ax^2 - \frac{2}{5}x^3\right)(7x^2 - 2ax + a^2)$

R.: $\frac{1}{10}a^5 - \frac{13}{10}ax^4 + \frac{8}{5}a^2x^3 - \frac{14}{5}x^5$

w) $(2t - 1)(1 - 3t)(1 + 5t)$

R.: $19t^2 - 30t^3 - 1$

IX) *División de expresiones algebraicas.*

— División de dos monomios.

Hallar el cociente de:

a) $(3a^2bc^4) : (-2a^2c)$

b) $\left(-\frac{1}{3}a^5b^3c\right) : (-3ab^2c^2)$

c) $(3m^2n^3p) : (0{,}09mn^3p^2)$

d) $\left(-\frac{1}{2}a^4bm^5n\right) : (-3a^5bmn^4)$

— División de dos polinomios:

a) $(a^3 - 3a^2 + 3a - 1) : (a - 1)$

R.: $a^2 - 2a + 1$

b) $(4a^4 - 3a^2 + 1) : (2a - 1)$

R.: $2a^3 + a^2 - a - ½$

c) $(x^5 + 7x^4 - x^2 + 1) : (x^2 - 3x + 2)$

R.: $x^3 + 10x^2 + 28x + 63$

d) $(a^4x^4 - m^4y^4) : (a^2x^2 - m^2y^2)$

R.: $a^2x^2 + m^2y^2$

e) $\left(\frac{1}{27}+a^3\right):\left(\frac{1}{3}+a\right)$

R.: $\frac{1}{9}-\frac{1}{3}a+a^2$

f) $(25a^4-9b^2):(5a^2-3b)$

R.: $5a^2+3b$

g) $\left(x^4-\frac{5}{4}x^3+\frac{11}{8}x^2-\frac{1}{2}x\right):\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)$

R.: $x^2-\frac{3}{4}x+1$

h) $\left(\frac{1}{3}-6a^2+27a^4\right):\left(\frac{1}{3}+2a+3a^2\right)$

R.: $1-6a+9a^2$

i) $(2x^3-20x^2+62x-60):(x-5)$

R.: $2x^2-10x+12$

j) $(6x-4+10x^2):(5x-2)$

R.: $2x+2$

k) $(22x^2-11x+5x^4-13x^3+3):(x^2-2x+3)$

R.: $5x^2-3x+1$

l) $(-2a^3b-13a^2b^2-3ab^3+8a^4):(4a^2+5ab+b^2)$

R.: $2a^2-3ab$

m) $(6a^5+4a^4b-9a^3b^2+20a^2b^3-13ab^4+2b^5):$
$:(2a^2+4ab-b^2)$

R.: $3a^3-4a^2b+5ab^2-2b^3$

n) $(9t+6t^3-2t^2+0{,}5):(3t^2-2t+2)$

R.: $2t+\frac{2}{3}$

Resto: $\frac{19}{3}t-\frac{5}{6}$

o) $(1 + 6x^3 + 8x^9 + 12x^6) : (1 + 4x^6 + 4x^3)$

R.: $2x^3 + 1$

p) $\left(6a^4b - \frac{2}{3}a^2b^3 - \frac{1}{3}ab^4\right) : \left(\frac{3}{2}ab - b^2\right)$

R.: $4a^3 + \frac{8}{3}a^2b + \frac{4}{3}ab^2 + \frac{2}{3}b^3$

q) $\left(t^6 + 4t^3 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{16}t^4\right)2t^2 - \frac{1}{2}t$

R.: $\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{8}t^3 + 2t + \frac{1}{2}$

r) $\left(\frac{1}{2}a^2b^2 + 4a^4 - 3a^3b + 0{,}25ab^3 - 5b^4\right) : \left(\frac{4}{5}a - b\right)$

R.: $5a^3 + 2{,}5a^2b + \frac{15}{4}ab^2 + 5b^3$

s) $(6a^2b^4 + 0{,}5a^5b - a^4b^2 - a^3b^3) : (0{,}5a^3 + 2ab^2 - a^2b)$

R.: $a^2b - 6b^3$

Resto: $12\ a\ b^5$

t) $(y^3 - 9y - y^2 - 12) : (3y + y^2 + 3)$

R.: $y - 4$

X) Aplicar la regla de Ruffini:

a) $(x^3 - 5x^2 + 3x - 2) : (x - 1)$

R.: cociente $x^2 - 4x - 1$; resto -3

b) $(4x^2 - 5x + 3) : (x + 3)$

R.: cociente $4x - 17$; resto 54

c) $(4a^4 - 3a^3 + 2) : (a - 2)$

R.: cociente $4a^3 + 5a^2 + 10a + 20$; resto 42

d) $(1 + a + a^2 + a^3) : (1 + a)$

R.: cociente $1 + a^2$; resto 0

e) $(a^5 - b^5) : (a - b)$

R.: $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$; resto 0

f) $(x^4 - y^4) : (x + y)$

R.: $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$; resto 0

g) $(3t^3 + 2t^4 - t^2 + 3t - 3) : (t + 0{,}5)$

R.: $2t^3 + 2t^2 - 2t + 4$

Resto: -5

h) $\left(\frac{13}{10} + \frac{5}{2}x - x^2 + \frac{3}{10}x^4 - \frac{2}{5}x^3\right) : (t + 2)$

R.: $\frac{3}{10}x^3 - x^2 + x + \frac{1}{2}$

Resto: $\frac{3}{10}$

i) $(0{,}4y^2 + 3y^3 + 0{,}3y - 0{,}2) : (y - 0{,}2)$

R.: $3y^2 + y + 0{,}5$

Resto: $-0{,}1$

XI) *Potenciación de expresiones algebraicas.*

— Efectuar las siguientes potencias:

a) $\left(-\frac{3}{5}a^4bc^2\right)^3$

b) $(0{,}2ab^3c^2)^4$

c) $(2a^3m^2)^2$

d) $(-3x^4y^3z)^1$

e) $\left(\frac{4}{3}x^3y^2\right)^3$

f) $\left(-\frac{2}{3}x^3y^2z\right)^0$

g) $(2a^2 - 3b^3)^2$

h) $\left(\frac{5}{3}mn + \frac{4}{5}n^2\right)^2$

i) $\left(3 + \frac{2}{3}a^3b\right)^2$

j) $(-2m - 5n)^2$

k) $\left(\frac{2}{3}x^2yz\right)^2$ l) $(a - 2b)^3$

m) $(4m - 2n)^3$ n) $(l - q^2)^3$

p) $2h(h - 3p)^2 - 4p(2h - p)^2 - 2(h - p)^3$

R.: $28hp^2 - 22h^2p - 2p^3$

q) $\left(2\sqrt{\frac{32}{100}x^3} - \sqrt{2x}\right)^2$

R.: $\frac{32}{25}x^3 + 2x - 3{,}2x^2$

r) $(0{,}1ax^4 - 1{,}2a^2x^3y)^2$

R.: $0{,}01a^2x^8 + 1{,}44a^4x^6y^2 - 0{,}24a^3x^7y$

Calcular directamente el resto:

a) $(16 - y^4) : (2 - y)$

R.: 0

b) $\left(2y^3 + \frac{4}{3}y^2 - \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}\right) : \left(y - \frac{1}{3}\right)$

R.: $-\frac{11}{9}$

c) $(x^2 - 7x + 12) : (x - 3)$

R.: 0

d) $(0{,}25y^3 + 0{,}375y^2 + 0{,}125y + 0{,}25) : (y - 1)$

R.: 1

e) $\left(\frac{3}{10}x^4 - \frac{2}{5}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{13}{10}\right) : (x + 2)$

R.: $\frac{3}{10}$

f) $(3x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}3x - 0{,}2) : (x - 0{,}2)$

R.: $-0{,}1$

6 FACTOREO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Concepto general.

Factorear una suma algebraica, o un polinomio, significa transformar dicha expresión en un producto.

En multitud de cuestiones conviene factorear los polinomios pues de esta manera se pueden efectuar los cálculos utilizando logaritmos.

Cuando la operación de factoreo es posible, algunos de los casos que suelen presentarse son los que se resuelven a continuación.

Factor común.

Teniendo en cuenta la propiedad distributiva de la multiplicación se tiene:

$$(a + b - c)\ p = ap + bp - cp$$

luego puede aceptarse que

$$ap + bp - cp = (a + b - c)\ p$$

por propiedad recíproca.

Inspirándonos en esta propiedad, vamos a factorear el siguiente polinomio:

$$am + bm + cm$$

En el mismo se aprecia que el factor m figura en todos sus términos, por lo que puede sacarse fuera de un paréntesis en cuyo interior figure el polinomio que se obtiene al dividir cada término por dicho factor:

$$am + bm + cm = m\left(\frac{am}{m} + \frac{bm}{m} + \frac{cm}{m}\right)$$
$$= m\,(a + b + c)$$

Sea ahora factorear la siguiente expresión:

$$ab^2c - ac^2d + acm$$

Los factores comunes son a y c, luego:

$$ab^2c - ac^2d + acm = ac\left(\frac{ab^2c}{ac} - \frac{ac^2d}{ac} + \frac{acm}{ac}\right)$$

$$= ac\,(b^2 - cd + m)$$

Se advierte fácilmente en los ejemplos dados que, al sacar factor común, el polinomio se convierte en un producto; es decir, se ha factoreado. En consecuencia, puede aceptarse la siguiente

REGLA. — *Cuando en todos los términos de un polinomio figura uno o varios factores comunes, el polinomio dado es igual al producto de ese o esos factores por el polinomio que se obtiene al dividir cada término por el factor o factores comunes.*

Ejercicios resueltos:

I) $3a^4b - 9a^2b^3c + 12a^3bd^2 = 3a^2b\,(a^2 - 3b^2c + 4ad^2)$

Obsérvese que se ha sacado como coeficiente al m. c. d de los coeficientes dados.

II) $15xy^2 - 20x^3y + 5xy = 5xy\,(3y - 4x^2 + 1)$

El último término es 1, pues es el cociente de dos cantidades iguales: $5xy$ (último término del ejercicio) y $5xy$ (factor común).

III) $\dfrac{2}{5}xy^2z + \dfrac{7}{5}y^2 - \dfrac{3}{5}y^3z^2 = \dfrac{1}{5}y^2\ (2xz + 7 - 3yz^2)$

IV) En los casos que los coeficientes sean fraccionarios cualquier fracción puede tomarse como factor común, siempre que se admitan fracciones dentro del paréntesis.

$$\frac{5}{4}m^2n - \frac{2}{5}m + \frac{1}{2}mn^2 = \frac{3}{7}m\left(\frac{35}{12}mn - \frac{14}{15} + \frac{7}{6}n^2\right)$$

Cuando se desean números enteros en el interior del paréntesis se saca como factor común una fracción de denominador igual al m. c. m. de los denominadores y cuyo numerador sea la unidad:

$$\frac{5}{4}m^2n - \frac{2}{5}m + \frac{1}{2}mn^2 = \frac{1}{20}\ m\ (25\,mn - 8 + 10n^2)$$

Factoreo por grupos.

Veamos como se opera cuando el polinomio es de la forma:

$$ax + bx + ay + by$$

Es decir, que no figura un factor común en todos los términos. Primeramente se saca factor común en los dos primeros términos y luego en los dos últimos:

$$ax + bx + ay + by = x\ (a + b) + y\ (a + b)$$

Se observa que el resultado obtenido está compuesto de dos términos con un factor común, $(a + b)$, por lo cual se aplica nuevamente la regla anterior de factoreo:

$$ax + bx + ay + by = (a + b)\left[\frac{x\,(a + b)}{a + b} + \frac{y\,(a + b)}{a + b}\right] =$$
$$= (a + b)\ (x + y)$$

por simplificación.

Se ha conseguido así transformar al polinomio dado en un producto.

Por lo tanto, cuando se trata de factorear un polinomio del tipo dicado, se debe observar la siguiente

REGLA. — *Cuando los términos de una suma algebraica no pre-ntan un factor común, se debe tratar de descomponer la suma lgebraica en grupos de igual número de términos, que tengan n factor común. Una vez sacados esos factores comunes se esta-lece si el polinomio que queda dentro de cada paréntesis es el ismo; si lo es, se lo saca a su vez como factor común.*

I) Sea, por ejemplo, factorear la expresión:

$$10am + 6bm + 35an + 21bn$$

Se agrupan los términos de a dos, y sacando factor común n cada uno de los grupos, se tiene:

$$\begin{aligned} 10am + 6bm + 35an + 21bn &= \\ &= (10am + 6bm) + (35an + 21bn) \\ &= 2m\,(5a + 3b) + 7n\,(5a + 3b) \end{aligned}$$

Como se han obtenido paréntesis iguales, se sacan estos como factor común, y queda:

$$\begin{aligned} 10am + 6bm + 35an + 21bn &= \\ &= (5a + 3b)\,(2m + 7n) \end{aligned}$$

II) Sea ahora factorear la siguiente expresión:

$$(20dx - 15dz) - (28ex + 21ez)$$

Agrupando términos y sacando luego factor común:

$$\begin{aligned} 20dx - 15dz - 28ex + 21ez &= \\ &= (20dx - 15dz) + (-28ex + 21ez) \\ &= 5d\,(4x - 3z) + 7e\,(-4x + 3z) \end{aligned}$$

Se observa que los términos de los paréntesis son iguales en valor absoluto, pero de diferente signo. En los casos como el propuesto se cambia el signo del segundo factor común, $7e$, lo cual origina un cambio de signos de los términos encerrados dentro del paréntesis correspondiente.

En efecto:

$$20dx - 15dz - 28ex + 21ez =$$
$$= 5d\,(4x - 3z) - 7e\,(4x - 3z)$$

Se saca ahora como factor común el paréntesis que figura ambos términos:

$$20dx - 15dz - 28ex + 21ez =$$
$$= (4x - 3z)\,(5d - 7e)$$

OBSERVACIONES:

I) El resultado del factoreo es siempre el mismo, cualquiera sea número de términos que se agrupen o el orden con que se opere.

II) Para que la suma algebraica pueda factorearse siguiendo el pr cedimiento de descomposición en grupos, es condición imprescindib que el número de sus términos no sea primo y que el polinomio cada grupo conste de un número de términos que sea divisor del n mero total de términos de la expresión dada.

Ejercicios resueltos:

I) $20amxy - 4am + 5xy - 1 =$

$$= (20amxy - 4am) + (5xy - 1)$$
$$= 4am\,(5xy - 1) + 1\,(5xy - 1)$$

Obsérvese que en el segundo grupo no se ha podido sac factor común, por lo que se considera como factor común número 1.

Finalmente:

$$20amxy - 4am + 5xy - 1 =$$
$$= (5xy - 1)\,(4am + 1)$$

II) Sea factorear

$$12a + 8b - 4c - 3am - 2bm + cm$$

Se agrupan los términos de a tres y luego se saca factor comú en cada grupo:

$$12a + 8b - 4c - 3am - 2bm + cm =$$
$$= (12a + 8b - 4c) + (-3am - 2bm + cm)$$
$$= 4\,(3a + 2b - c) + m\,(-3a - 2b + c)$$

Como los paréntesis difieren en el signo se cambia el del factor común m:

$$= 4\,(3a + 2b - c) - m\,(3a + 2b - c)$$

Luego

$$12a + 8b - 4c - 3am - 2bm + cm =$$
$$= (3a + 2b - c)\,(4 - m)$$

III) Sea factorear

$$10a^2m - 8abm - 35a^2n + 28abn$$

a) Agrupando y sacando factor común se tiene:

$$10a^2m - 8abm - 35a^2n + 28abn =$$
$$= (10a^2m - 8abm) + (-35a^2n + 28abn)$$
$$= 2am\,(5a - 4b) + 7an\,(-5a + 4b)$$

Cambiando el signo del factor $7an$.

$$= 2am\,(5a - 4b) - 7an\,(5a - 4b)$$

Luego

$$10a^2m - 8abm - 35a^2n + 28abn =$$
$$= (5a - 4b)\,(2am - 7an)$$

b) Sea resolver el mismo ejercicio como combinación de los casos de factoreo vistos hasta ahora: factor común y factoreo por grupos:

$$10a^2m - 8abm - 35a^2n + 28abn =$$
$$= a\,(10am - 8bm - 35am + 28bn)$$
$$= a[\,(10am - 8bm) + (-35an + 28bn)\,]$$
$$= a[2m\,(5a - 4b) - 7n\,(5a - 4b)\,]$$
$$= a[\,(5a - 4b)\,(2m - 7n)\,] = a\,(5a - 4b)\,(2m - 7n)$$

Se obtiene el mismo resultado que en el caso anterior, y que en el segundo paréntesis de aquél se podía sacar el facto común a.

Trinomio cuadrado perfecto.

Debemos recordar que

$$(a+b)\,(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y que

$$(a-b)\,(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

por lo tanto, se cumple que

y que

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)\,(a+b) \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)\,(a-b) \end{aligned}}$$

donde se ve que los polinomios del primer miembro se ha transformado en producto de factores iguales.

Para que esto sea posible el polinomio que se desea factorea debe reunir ciertas condiciones que son:

a) El polinomio debe constar de tres términos, es decir, deb ser un trinomio.

b) Dos de sus términos deben ser cuadrados perfectos.

c) El término restante, positivo o negativo, debe ser igual a duplo del producto de las bases de dichos cuadrados.

El polinomio que cumple estas condiciones recibe el nombr de *trinomio cuadrado perfecto* y puede transformarse en u producto operando de acuerdo a la siguiente

REGLA. — *Todo trinomio cuadrado perfecto se puede transfor mar en un producto de factores binomios iguales, los cuale serán sumas de las bases de los cuadrados si el término formad por el duplo de dichas bases es positivo, y serán diferencias e caso contrario.*

Ejercicios resueltos:

I) Factorear

$$25a^2 + 70ab + 49b^2$$

El polinomio dado es un trinomio en el que

$$25a^2 = (5a)^2$$
$$49b^2 = (7b)^2$$

y en el término restante se cumple que

$$70ab = 2 \cdot (5a) \cdot (7b)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 25a^2 + 70ab + 49b^2 &= (5a + 7b)^2 \\ &= (5a + 7b) \cdot (5a + 7b) \end{aligned}$$

II) Sea factorear el trinomio

$$\frac{9}{16} x^2 - \frac{1}{2} xy + \frac{1}{9} y^2$$

Para que sea cuadrado perfecto, dos de sus términos deben ser cuadrados y el otro término debe ser igual al duplo de las bases de las potencias.

En efecto

$$\frac{9}{16} x^2 = \left(\frac{3}{4} x \right)^2$$
$$\frac{1}{9} y^2 = \left(\frac{1}{3} y \right)^2$$

y también

$$\frac{1}{2} xy = 2 \cdot \left(\frac{3}{4} x \right) \cdot \left(\frac{1}{3} y \right)$$

pues

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{3}{4} x \right) \cdot \left(\frac{1}{3} y \right) &= 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} xy = \frac{6}{12} xy \\ &= \frac{1}{2} xy \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{9}y^2 = \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}y\right)^2$$
$$= \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}y\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}y\right)$$

Cuatrinomio cubo perfecto.

Sabemos que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

y que

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

por lo tanto, se cumple que

$$\boxed{\begin{array}{l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3 = (a+b)\,(a+b)\,(a+b) \\ \text{y que} \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3 = (a-b)\,(a-b)\,(a-b) \end{array}}$$

Luego el polinomio del primer miembro se ha transforma en producto.

Para que esto sea posible el polinomio dado debe cumplir cie tas condiciones:

a) Que conste de 4 términos.

b) Dos de ellos deben ser cubos perfectos y los otros dos debe ser el triplo del cuadrado de cada uno por el otro.

c) Que los signos deben ser todos positivos o alternados.

Cumpliendo todas estas condiciones el polinomio recibe nombre de *cuatrinomio cubo perfecto.*

REGLA. — *Todo cuatrinomio cubo perfecto es igual al product de tres factores binomios iguales a la suma o la diferencia de la bases de los términos cubos perfectos del cuatrinomio, según qu los signos del polinomio sean iguales o alternados.*

Ejercicios resueltos:

I) Factorear el cuatrinomio

$$8 + 12b + 6b^2 + b^3$$

Para que sea cuatrinomio cubo perfecto dos de sus términos eben ser cubos perfectos y los otros dos deben ser iguales al riplo del cuadrado de cada base por la otra base.

En efecto:

$$8 = (2)^3$$
$$b^3 = (b)^3$$

y también

$$12b = 3 \cdot (2)^2 \cdot b$$
$$6b^2 = 3 \cdot 2 \cdot (b)^2$$

Por lo tanto,

$$8 + 12b + 6b^2 + b^3 = (2 + b)^3$$
$$= (2 + b)(2 + b)(2 + b)$$

II) Factorear el cuatrinomio

$$8a^6b^3 - 12a^4b^2 + 6a^2b - 1$$

Se cumple que

$$8a^6b^3 = (2a^2b)^3$$
$$1 = (1)^3$$

y que

$$12a^4b^2 = 3 \cdot (2a^2b)^2 \cdot 1$$
$$6a^2b = 3 \cdot (2a^2b) \cdot (1)^2$$

Luego

$$8a^6b^3 - 12a^4b^2 + 6a^2b - 1 = (2a^2b - 1)^3$$
$$= (2a^2b - 1)(2a^2b - 1)(2a^2b - 1)$$

Diferencia de cuadrados.

Sea la diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2$$

Si deseamos factorizar la misma, debemos tener en cuen
que

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 + ab - ab - b^2$$

o bien

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Por ello, por el carácter recíproco de la igualdad

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$$

Se nota que el segundo miembro es el producto de la sum
por la diferencia de las bases de las mismas potencias del prim
miembro, por lo que se obtiene la siguiente

REGLA. — *La diferencia de cuadrados se puede transformar e
un producto de dos factores binomios. Uno de ellos es la sum
de las bases de dichos cuadrados, y el otro es la diferencia d
las mismas.*

Ejercicios resueltos:

I) Factorizar

$$x^2 - 25$$

Dado que

$$x^2 = (x)^2 \quad \text{y} \quad 25 = (5)^2$$

resulta

$$x^2 - 25 = (x + 5) \cdot (x - 5)$$

II) Factorizar

$$h^2 - 1$$

Dado que

$$h^2 - 1 = h^2 - 1^2$$

resulta

$$h^2 - 1 = (h + 1) \cdot (h - 1)$$

III) Factorizar

$$16x^4 - 0{,}0001$$

$$16x^4 - 0{,}0001 = (4x^2)^2 - (0{,}01)^2$$

$$\Rightarrow 16x^4 - 0{,}0001 = (4x^2 + 0{,}01) \cdot (4x^2 - 0{,}01)$$

Pero, además, el segundo paréntesis es diferencia de cuadrados

$$4x^2 - 0{,}01 = (2x)^2 - (0{,}1)^2$$
$$= (2x + 0{,}1) \cdot (2x - 0{,}1)$$

Reemplazando en el ejercicio propuesto se tiene

$$16x^4 - 0{,}0001 = (4x^2 + 0{,}01) \cdot (2x + 0{,}1) \cdot (2x - 0{,}1)$$

Suma o diferencia de potencias de igual grado. (Binomio homogéneo.)

Sea por ejemplo, factorear una expresión del tipo

$$a^3 + b^3$$

Se averigua primeramente si es divisible por la suma o por la diferencia de las bases.

Para ello consignaremos un cuadro donde consta cuándo $(a^m \pm b^m)$ es divisible por $(a \pm b)$.

$$\frac{a^m \pm b^m}{a \pm b} \left\{ \begin{array}{llll} 1º) & a^m + b^m & \text{es divisible por} & a + b \text{ si } m \text{ es } \textit{impar} \\ 2º) & a^m + b^m & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & a - b \ \textit{nunca} \\ 3º) & a^m - b^m & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & a - b \ \textit{siempre} \\ 4º) & a^m - b^m & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & a + b \text{ si } m \text{ es } \textit{par} \end{array} \right.$$

Una vez que se ha establecido que el dividendo es divisible por la suma o por la diferencia de las bases se efectúa la división, y el binomio dado será entonces igual al producto del divisor por el cociente. En nuestro caso $a^3 + b^3$ es un binomio de grado impar. Por lo tanto, de acuerdo al cuadro, es divisible por la suma de las bases, $a + b$.

Efectuaremos la división: $a^3 + b^3 \ \underline{| \ a + b \quad}$

Completando el dividendo

$$\begin{array}{rrrr|l} a^3 & + 0a^2b & + 0ab^2 & + b^3 & a + b \\ \cline{5-5} -a^3 & - a^2b & & & a^2 - ab + b^2 \\ \cline{1-2} & - a^2b & & & \\ & + a^2b & + ab^2 & & \\ \cline{2-3} & & + ab^2 & & \\ & & - ab^2 & - b^3 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto, como el resto es cero, el dividendo será igual producto del divisor por el cociente, o sea:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Por todo lo expuesto, podemos admitir la siguiente

Regla. — *La suma o diferencia de potencias homogéneas pu de transformarse en un producto de dos factores, uno de l cuales es la suma o diferencia de las bases de las potencias dada según convenga, y el otro es el cociente de dividir la suma o dif rencia propuesta por el factor ya obtenido.*

Observación. — Cuando se trata de *suma* de potencias de grad *par* no se puede factorear siguiendo este procedimiento.

Ejercicios resueltos:

I) Factorear

$$a^2 - b^2$$

Como se trata de una diferencia de potencias homogénea resulta divisible por la diferencia de las bases, por lo que primer factor será $(a - b)$. El otro factor se obtiene efectuand la división

$$\begin{array}{rr|l}
a^2 & -b^2 & a - b \\ \cline{3-3}
-a^2 + ab & & a + b \\ \cline{1-1}
+ab & & \\
-ab & +b^2 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Por lo tanto

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

II) Factorear

$$27a^6b^3 - 125\,m^3$$

Se determinan las bases de las potencias, obteniéndose

$$(3a^2b)^3 - (5\,m)^3$$

Como la diferencia de potencias de igual grado es siempr divisible por la diferencia de las bases, uno de los factores es $(3a^2b - 5\,m)$; el otro factor se obtiene calculando el cociente

$$\begin{array}{ll|l} 27a^6b^3 & -125m^3 & 3a^2b - 5m \\ \cline{3-3} -27a^6b^3 + 45a^4b^2m & & 9a^4b^2 + 15a^2bm + 25m^2 \\ \cline{1-1} \qquad \text{etc., etc} & & \end{array}$$

Luego

$$27a^6b^3 - 125\,m^3 = (3a^2b - 5\,m)\,(9a^4b^2 + 15a^2bm + 25\,m^2)$$

Observación. — Este mismo ejercicio se puede resolver más sencillamente de la siguiente manera:

$$27a^6b^3 - 125\,m^3 = (3a^2b)^3 - (5\,m)^3$$

Haciendo

$$3a^2b = x$$

y

$$5\,m = y$$

se tiene

$$27a^6b^3 - 125\,m^3 = x^3 - y^3$$

Factoreando

$$x^3 - y^3 = (x - y)\,(x^2 + xy + y^2) \qquad (1)$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{ll|l} x^3 & -y^3 & x - y \\ \cline{3-3} -x^3 + x^2y & & x^2 + xy + y^2 \\ \cline{1-1} \quad x^2y & & \\ \quad -x^2y + xy^2 & & \\ \cline{1-1} \qquad xy^2 & & \\ \qquad -xy^2 + y^3 & & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 0 & & \end{array}$$

Reemplazando en (1) x por su valor $3a^2b$ e y por su valor $5\,m$ se tiene:

$$\begin{aligned} 27a^6b^3 - 125\,m^3 &= (3a^2b - 5\,m)\,[(3a^2b)^2 + (3a^2b)\cdot(5\,m) + (5\,m)^2] \\ &= (3a^2b - 5\,m)\,[9a^4b^2 + 15a^2b\,m + 25\,m^2] \end{aligned}$$

que es el mismo resultado anterior.

Expresiones enteras primas y compuestas

Una expresión algebraica entera se dice *prima* cuando no pue de factorearse, o sea, cuando sólo es divisible por sí misma y po la unidad. En caso contrario, esto es, cuando puede factorearse la expresión algebraica se llama *compuesta.*

Ejemplos:

$a + b \;;\; x^2 + y,$ son expresiones primas

$x^2 - y^2 \;;\; ax^2 + a,$ son expresiones compuestas

pues

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

y

$$ax^2 + a = a(x^2 + 1)$$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas enteras

Las definiciones de máximo común divisor y mínimo comú múltiplo dadas en Aritmética para números enteros son apl cables a las expresiones algebraicas enteras.

Máximo común divisor.

Por lo expresado podemos establecer la siguiente

Definición. — *Se llama máximo común divisor de dos o má expresiones algebraicas enteras al mayor divisor literal comú de las mismas.*

Recordemos que para hallar el máximo común divisor de va rios *números* se descomponen éstos en sus divisores primos, mu tiplicándose luego los divisores comunes con su menor exp nente

Así, para obtener el máximo común divisor de 60 y 24 descomponemos ambos números en sus divisores primos y hallamos la *intersección* de dichos divisores.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 60 = 2^2 \times 3 \times 5 \\ \\ 24 = 2^3 \times 3 \end{array}$$

Luego el máximo común divisor $(60 \text{ y } 24) = 2^2 \times 3 = 12.$

Análogamente, *para hallar el máximo común divisor de varias expresiones algebraicas enteras se las descompone en sus divisores primos y luego se multiplican los divisores literales comunes con su menor exponente.*

Ejemplo:

Hallar el máximo común divisor de las expresiones

$$x^2 - 1 \; ; \; x^2 - 2x + 1$$

Factoreando:

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x + 1)(x - 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

De donde,

$$\text{m. c. d.} \; (x^2 - 1 \; ; \; x^2 - 2x + 1) = x - 1$$

Mínimo común múltiplo.

Igualmente podemos aceptar la siguiente

Definición. — *Se llama mínimo común múltiplo de varias expresiones algebraicas enteras al menor de los múltiplos comunes de las mismas.*

Recordemos que el mínimo común múltiplo de varios *números* es igual al producto de sus factores primos, comunes y no comunes, afectados con el mayor de los exponentes con que figuran en la descomposición de los números dados.

Ejemplos:

I) *Hallar el mínimo común múltiplo de*

$$3am - 3bm \quad ; \quad 3a^2 - 6ab + 3b^2$$

Factoreando, resulta

$$3am - 3bm = 3m\,(a - b)$$

$$3a^2 - 6ab + 3b^2 = 3\,(a^2 - 2ab + b^2) = 3\,(a - b)^2$$

Por lo tanto,

$$\text{m. c. m.}\ (3am - 3bm \quad ; \quad 3a^2b - 6ab + 3b^2) = 3m\ (a - b)^2$$

II) *Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de las siguientes expresiones algebraicas:*

$$a^3 + b^3 \quad ; \quad 2am + 2bm + an + bn$$

Factoreando, se tiene:

$$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$$

por suma de potencias de igual grado.

$$2am + 2bm + an + bn = (a + b)\,(2m + n)$$

por descomposición en grupos.

Por lo tanto, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de las expresiones dadas son, respectivamente,

$$\text{m. c. d.} = a + b \quad ; \quad \text{m. c. m.} = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)\,(2m + n)$$

Observación importante. — La teoría de la divisibilidad algebraica se asemeja a la de la divisibilidad numérica, pero, en rigor, existen diferencias, a saber:

I) Toda función entera es divisible por cualquier factor numérico distinto de cero.

II) Si una expresión algebraica es divisible por otra, también es divisible por ésta multiplicada por un factor numérico distinto de cero.

En consecuencia, los factores numéricos o constantes desempeñan el mismo papel que en la teoría de la divisibilidad numérica desempeña la unidad.

EJERCICIOS

Factorear las siguientes expresiones:

I) *Factor común.*

a) $ab^3c - 3a^2b^2 + 2ab^2c$

R.: $ab^2(bc - 3a + 2c)$

b) $ax^2 - ay + a$

R.: $a(x^2 - y + 1)$

c) $6a^2b - 4ab - 8b^2$

R.: $2b(3a^2 - 2a - 4b)$

d) $\frac{2}{3}am - \frac{2}{5}mn$

R.: $2m\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{5}n\right)$

e) $18x^2y - 27xy^6 + \frac{9}{2}xyz - 18xy$

R.: $9xy\left(2x - 3y^5 + \frac{1}{2}z - 2\right)$

f) $\frac{1}{3}ab - \frac{5}{6}a^2b^2 - \frac{1}{2}a$

R.: $\frac{1}{6}a(2b - 5ab^2 - 3)$

g) $8a^5 - 4a^2 + 12a^6$

R.: $4a^2(2a^3 - 1 + 3a^4)$

h) $28t^4x^3 - 32t^5x^4 - 16t^3x^2$

R.: $4t^3x^2(7tx - 8t^2x^2 - 4)$

i) $40xy^3 - 10x^2y^3 - 15xy^4$

R.: $5xy^3(8 - 2x - 3y)$

j) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{12}x^2$

R.: $\frac{1}{3}x\left(2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x\right)$

k) $y^4c + y^5 - y^6 - y^7$

R.: $y^4(c + y - y^2 - y^3)$

l) $16t^2u^3x + 2ut^2x - 8t^5ux^2$

R.: $2t^2ux(8u^2 + 1 - 4t^3x)$

m) $\frac{1}{2}x^3y - \frac{1}{12}x^5y^2z + \frac{1}{6}x^4y^2$

R.: $\frac{1}{4}x^3y\left(2 - \frac{1}{3}x^2yz + \frac{2}{3}xy\right)$

II) *Factoreo por grupos.*

a) $x^2 + ax - bx - ab$

R.: $(x - b)(x + a)$

b) $a^4 - 4a^2 - a^3x + 4ax$

R.: $(a + 2)(a - 2)(a - x)a$

c) $gh + 4g - 9h - 36$

R.: $(g - 9)(h + 4)$

d) $a^2b^2 - 2b^2cz^3 + 8a^2c^3 - 16c^4z^3$

R.: $(a^2 - 2cz^3)(b^2 + 8c^3)$

e) $a^2 - b + a^2b - 1$

R.: $(a + 1)(a - 1)(b + 1)$

f) $a^4 + a^3 - a - 1$

R.: $(a^3 - 1)(a + 1)$

g) $\frac{1}{3}at - 5bt - \frac{1}{3}ac + 5bc$

R.: $\left(\frac{1}{3}a - 5b\right)(t - c)$

h) $2 + 6t + t^2 + 3t^3$

R.: $(3t + 1)(t^2 + 2)$

i) $10x^3 + 2xy^3 + y^4t + 5x^2yt$

R.: $(5x^2 + y^3)(2x + yt)$

j) $10yt + 2t^2 + 2u + 20txy + 4xt^2 + 4xu + 40y^2t + 8yt^2 + 8yu$

R.: $(2 + 4x + 8y)(5yt + t^2 + u)$

k) $xy - x - y + 1$

R.: $(x - 1)(y - 1)$

l) $a + 5b - 5 - ab$

R.: $(5 - a)(b - 1)$

m) $3bc - 6ab + 4at - 2ct$

R.: $(c - 2a)(3b - 2t)$

n) $x^5 - y - x^2y + x^3$

R.: $(x^3 - y)(x^2 + 1)$

III) *Trinomio cuadrado perfecto.*

a) $x^2 + 2x + 1$

R.: $(x + 1)(x + 1)$

b) $a^2 - 2ax + x^2$

R.: $(a - x)(a - x)$

c) $\frac{9}{4}a^6b^4 + \frac{4}{9}a^2b^2z^6 + 2a^4b^3z^3$

R.: $\left(\frac{3}{2}a^3b^2 + \frac{2}{3}abz^3\right)^2$

d) $\frac{1}{9}a^4b^6 - \frac{8}{15}a^2b^3c + \frac{16}{25}c^2$

R.: $\left(\frac{1}{3}a^2b^3 - \frac{4}{5}c\right)^2$

e) $36x^4y^6 + 6x^2y^5z + \frac{1}{4}y^4z^2$

R.: $\left(6x^2y^3 + \frac{1}{2}y^2z\right)^2$

f) $4x^6 - 12x^3y^2 + 9y^4$

R.: $(2x^3 - 3y^2)^2$

g) $a^2 - 6ab + 9b^2$

R.: $(a - 3b)^2$

h) $\frac{x^2}{4} + 3x + 9$

R.: $\left(\frac{x}{2} + 3\right)^2$

i) $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}$

R.: $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2$

j) $a^6 + \frac{2}{5}a^5 + \frac{1}{25}a^4$

R.: $\left(a^3 + \frac{1}{5}a^2\right)^2$

k) $a^2b^4 - 2ab^2 + 1$

R.: $(ab^2 - 1)^2$

IV) *Cuatrimonio cubo perfecto.*

a) $\dfrac{x^3}{y^3} - 3\dfrac{x}{y} + 3\dfrac{y}{x} - \dfrac{y^3}{x^3}$

R.: $\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right)$

b) $\dfrac{1}{8}a^3 - \dfrac{9}{4}a^2bc + \dfrac{27}{2}ab^2c^2 - 27b^3c^3$

R.: $\left(\dfrac{1}{2}a - 3bc\right)^3$

c) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

R.: $(2x - 1)^3$

d) $1 - 3x + 3x^2 - x^3$

R.: $(1 - x)^3$

e) $\dfrac{8}{27} - \dfrac{16}{3}p + 32p^2 - 64p^3$

R.: $\left(\dfrac{2}{3} - 4p\right)^3$

f) $125x^6 - 225x^4y + 135x^2y^2 - 27y^3$

R.: $(5x^2 - 3y)^3$

V) *Diferencia de cuadrados.*

a) $81a^4 - 1$

R.: $(9a^2 + 1)(3a + 1)(3a - 1)$

b) $x^4 - 16$

R.: $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

c) $0{,}0025y^4 - 0{,}0009z^2$

R.: $(0{,}05y^2 + 0{,}03z)(0{,}05y^2 - 0{,}03z)$

d) $x^2 - (y + z)^2$

R.: $(x + y + z)(x - y - z)$

e) $a^2 - (b - r)^2$

R.: $(a + b - r)(a - b + r)$

f) $81a^{24}b^8 - 1$

R.: $(9a^{12}b^4 + 1)(3a^6b^2 + 1)(3a^6b^2 - 1)$

g) $\dfrac{1}{4} - t^2$

R.: $\left(\dfrac{1}{2} + t\right)\left(\dfrac{1}{2} - t\right)$

h) $9x^4 - 25y^2$

R.: $(3x^2 + 5y)(3x^2 - 5y)$

i) $\dfrac{4}{25}a^4b^6 - \dfrac{9}{16}x^2y^2$

R.: $\left(\dfrac{2}{5}a^2b^3 + \dfrac{3}{4}xy\right)\left(\dfrac{2}{5}a^2b^3 - \dfrac{3}{4}xy\right)$

j) $10.000a^2 - 1$

R.: $(100a + 1)(100a - 1)$

k) $0{,}49x^{-2}y^4 - 0{,}04y^6$

R.: $(0{,}7x^{-1}y^2 + 0{,}2y^3)(0{,}7a^{-1}y^2 - 0{,}2y^3)$

l) $-0{,}16a^4b^6 + 0{,}04t^2u^{-6}$

R.: $(0{,}2tu^{-3} + 0{,}4a^2b^3)(0{,}2tu^{-3} - 0{,}4a^2b^3)$

m) $x^{4t}y^{2u} - 1$

R.: $(x^{2t}y^u + 1)(x^{2t}y^u - 1)$

n) $0{,}04 - x^2 - 2xc - c^2$

R.: $(0{,}2 + x + c)(0{,}2 - x - c)$

VI) *Suma o diferencia de potencias de igual grado.*

a) $8x^3 - y^6$

R.: $(2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4)$

b) $m^3 - 27n^3$

R.: $(m - 3n)(m^2 + 3nm + 9n^2)$

c) $y^5 + 32$

R.: $(y + 2)(y^4 - 2y^3 + 4y^2 - 8y + 16)$

d) $x^3 - 1$

R.: $(x-1)(x^2+x+1)$

e) $x^3 + 1$

R.: $(x+1)(x^2-x+1)$

f) $x^6 - y^3$

R.: $(x^2-y)(x^4+x^2y+y^2)$

g) $x^3 + 8$

R.: $(x+2)(x^2-2x+4)$

h) $8x^3 + y^3$

R.: $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$

i) $x^4 - 16$

R.: $(x^2+4)(x+2)(x-2)$

j) $y^4 - 81$

R.: $(y^2+9)(y+3)(y-3)$

k) $x^5y^5 + 243$

R.: $(xy+3)(x^4y^4-3x^3y^3+9x^2y^2-27xy+81)$

l) $\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{27}b^3$

R.: $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{6}ab+\frac{1}{9}b^2\right)$

m) $27t^3 - 64u^6$

R.: $(3t-4u^2)(9t^2+12tu^2+16u^4)$

n) $1 - t^3$

R.: $(1-t)(1+t+t^2)$

o) $10.000x^8 - 1$

R.: $(100x^4+1)(10x^2+1)(10x^2-1)$

VII) *Combinación de casos de factoreo.*

a) $\pi R^2 - \pi r^2$

R.: $\pi(R+r)(R-r)$

b) $5x^3 + 15x^2y + 15xy^2 + 5y^3$

R.: $5(x+y)(x+y)(x+y)$

c) $a^2 - x^2 + 2a + 1$

R.: $(a + 1 + x)(a + 1 - x)$

d) $8a^4b^4 - 2a^4b^2 + 4a^3b^3 - 2a^2b^4$

R.: $2a^2b^2(2ab + a - b)(2ab - a + b)$

e) $2a^3 - 2ab^2$

R.: $2a(a + b)(a - b)$

f) $5mx^2 - 5mxy + mxy - my^2$

R.: $m(x - y)(5x + y)$

g) $24xut - 12x^2u + 4atx - 8at^2$

R.: $4(x - 2t)(at - 3xu)$

h) $12ac - 6bc + 4ab - 2b^2 + 18ach - 9bch + 6abh - 3hb^2$

R.: $(2a - b)(3c + b)(2 + 3h)$

i) $x^2 + 6x + 9 - 2x^2y^2 - 12xy^2 - 18y^2$

R.: $(x + 3)(x + 3)(1 - 2y^2)$

j) $x^2t + 2xyt + y^2t$

R.: $t(x + y)^2$

k) $0{,}5x^2y^4 - \frac{1}{16}x^2y$

R.: $0{,}5x^2y(y - 0{,}5)(y^2 + 0{,}5y + 0{,}25)$

l) $x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}$

R.: $\left(x + \frac{1}{6}\right)(x - 1)$

m) $x^4 - 4x^2 - x^3t + 4xt$

R.: $x(x + 2)(x - 2)(x - t)$

n) $x^2b^4 + b^6t^8 - 2xt^4b^5$

R.: $b^4(x - bt^4)^2$

o) $a^4 + a^2b^2 - 1 - b^2a^2$

R.: $(a + 1)(a - 1)(a^2 + 1 + b^2)$

p) $4x^2 - 2xc - y^2 + yc$

R.: $(2x - y)(2x + y - c)$

q) $10xy + 10xm + 10yu + 10um$

R.: $10(x + u)(y + m)$

Calcular el máximo común divisor:

1) $7x^2$; $14y^2$; $21xy$; $6x^2y$

R.: 1

2) $a^4x - a^3x^2$; $a^2 - 2ax + x^2$; $a^2 - x^2$

R.: $a - x$

3) $x^4 - y^4$; $2x^2y^2 + 2y^4$

R.: $x^2 + y^2$

4) $a^3 - 1$; $(a - 1)^2$

R.: $a - 1$

5) $6(a - b)$; $9a^2 - 9b^2$

R.: $a - b$

6) $x^2 - y^2$; $y - x$

R.: $x - y$

7) $3(x^2 - y^2)$; $x^2 - 2xy + y^2$; $5(x - y)^3$

R.: $x - y$

8) $x^4 - 27a^3x$; $(x - 3a)^2$

R.: $x - 3a$

9) $x^4 - 2x^2y^2 - y^4$; $x^4 - y^4$

R.: $x^2 - y^2$

10) $2a^5 - 4a^3b^2 - 2ab^4$; $a^4 - 2a^3b + a^2b^2$

R.: $a(a - b)^2$

11) $1 - x^2$; $x - x^2$; $1 - x$

R.: $1 - x$

12) $x^2 - 2xa + a^2$; $x^2 - a^2$

R.: $x - a$

13) $x^3 - 27$; $x^2 - 6x + 9$; $x^2 - 9$

R.: $x - 3$

14) $9a^2 - 1$; $3a - 1$; $3a + 1$

R.: 1

15) $x^2 + 2xy + y^2$; $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$; $(x + y)^4$

R.: $(x + y)^2$

16) $4a^2 - 4a + 1$; $4a^2 - 1$; $6a^3 - 3a^2$

R.: $2a - 1$

17) $x - y$; $x^3 - y^3$; $x^2 - y^2$

R.: $x - y$

18) $a^4 - b^4$; $2a^2b^2 + 2b^4$

R.: $a^2 + b^2$

19) $1 + 8x^3$; $4x^2 - 1$; $1 + 4x + 4x^2$

R.: $1 + 2x$

20) $x^2 - 2xy + y^2$; $x^4 - y^4$

R.: $x - y$

Calcular el mínimo común múltiplo:

(se excluye el M.C.D. de los coeficientes)

1) $7x^2$; $14y^2$; $21xy$; $6x^2y$

R.: x^2y^2

2) $a^4x - a^3x^2$; $a^2 - 2ax + x^2$; $a^2 - x^2$

R.: $a^3x(a - x)^2(a + x)$

3) $x^4 - y^4$; $2x^2y^2 + 2y^4$

R.: $y^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$

4) $a^3 - 1$; $(a - 1)^2$

R.: $(a - 1)^2(a^2 + a + 1)$

5) $6(a - b)$; $9a^2 - 9b^2$

R.: $a^2 - b^2$

6) $x^2 - y^2$; $y - x$

R.: $x^2 - y^2$

7) $3(x^2 - y^2)$; $x^2 - 2xy + y^2$; $5(x - y)^3$

R.: $(x - y)^3(x + y)$

8) $x^4 - 27a^3x$; $(x - 3a)^2$

R.: $x(x - 3a)^2(x^2 + 3ax + 9a^2)$

9) $x^4 - y^4$; $x^2 - y^2$; $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

R.: $(x+y)^2(x-y)^2(x^2+y^2)$

10) $a^2 + ab$; $a^2 - b^2$; $ab - b^2$

R.: $ab(a^2 - b^2)$

11) $1 - x^2$; $x - x^2$; $1 - x$

R.: $x(1+x)(1-x)$

12) $x^2 - 2ax + a^2$; $x^2 - a^2$

R.: $(x+a)(x-a)^2$

13) $4x^2 - 2x^3$; $4 - x^2$

R.: $x^2(4 - x^2)$

14) $x^3 - 27$; $x^2 - 6x + 9$; $x^2 - 9$

R.: $(x-3)^2(x+3)(x^2+3x+9)$

15) $3a + 1$; $3a - 1$; $9a^2 - 1$

R.: $9a^2 - 1$

16) $x^2 - 2xy + y^2$; $x^4 - y^4$

R.: $(x^2+y^2)(x-y)^2(x+y)$

17) $0{,}5x^2 + y^2$; $0{,}25x^4 - y^4$

R.: $(0{,}5x^2+y^2)(0{,}5x^2-y^2)$

18) $x^2 - 49$; $x^2 - 14x + 49$; $x^3 - 343$

R.: $(x-7)^2(x+7)(x^2+7x+49)$

19) $a^4 - b^4$; $7a^2 + 7b^2$; $ta^2 + tb^2$

R.: $7t(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

20) $0{,}36 + 1{,}2t + t^2$; $0{,}36 - t^2$; $3a + 5at$

R.: $5a(0{,}6+t)^2(0{,}6-t)$

7 EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

El cociente indicado de dos expresiones algebraicas recibe nombre de *fracción algebraica.*

Por lo tanto, son fracciones algebraicas

$$\frac{3a - b}{m} \cdot \frac{2a}{3m - n} \cdot \frac{5a + 2m}{3a - 5}$$

Pero no será una fracción algebraica la expresión $\frac{2a - }{5}$ pues su denominador no está expresado algebraicamente.

Igualdad de fracciones algebraicas.

Dos fracciones algebraicas son *iguales* cuando tienen el mis valor numérico para cualquier sistema de valores asignado sus letras, siempre que no se anule el denominador.

Simplificación de fracciones algebraicas.

Para simplificar fracciones algebraicas es necesario desco poner numerador y denominador en sus divisores primos y an lar los que sean comunes. Como en las fracciones aritmétic conviene emplear como divisor de los dos términos de la fr ión, su m. c. d.; se reduce así la fracción a su más simple expresión, llamada *fracción irreducible.*

I) *Simplificar la fracción:*

$$\frac{9a^2 - b^2}{9a^2 - 6ab + b^2}$$

Una vez descompuestos numerador y denominador en sus factores, se tiene:

$$\frac{9a^2 - b^2}{9a^2 - 6ab + b^2} = \frac{(3a + b) \cdot (3a - b)}{(3a - b)^2}$$

Simplificando el factor $(3a - b)$ que figura una vez en el numerador y dos veces en el denominador, queda:

$$\frac{9a^2 - b^2}{9a^2 - 6ab + b^2} = \frac{3a + b}{3a - b}$$

que es la más simple expresión de la fracción dada.

II) *Simplificar*

$$\frac{by - b}{y^2 - 1}$$

Factoreando numerador y denominador, se tiene:

$$by - b = b\,(y - 1)$$
$$y^2 - 1 = (y + 1)\,(y - 1)$$

El m. c. d. de estas expresiones es $(y - 1)$.

Luego

$$\frac{by - b}{y^2 - 1} = \frac{b\,(y - 1)}{(y + 1)\,(y - 1)} = \frac{b}{y + 1}$$

Como el divisor $(y + 1)$ se anula para $y = -1$, para este último valor la igualdad anterior no es válida.

Reducción de fracciones a común denominador

Reducir dos o más fracciones algebraicas a común denon nador significa hallar otras fracciones iguales a las dadas que tengan todas igual denominador. Este común denominad puede ser el *mínimo común múltiplo de los denominadores* cuyo caso se dice que las fracciones algebraicas han sido red cidas al *mínimo común denominador.*

I) *Sea reducir a común denominador* las fracciones alg braicas:

$$\frac{a}{mn} \quad . \quad \frac{b}{np}$$

Por analogía con el procedimiento seguido en la reducción fracciones aritméticas a común denominador, vamos a multip car numerador y denominador de cada una de ellas por el den minador de la otra:

$$\frac{a}{mn} = \frac{a \cdot np}{mn \cdot np} = \frac{anp}{mn^2p}$$

$$\frac{b}{np} = \frac{b \cdot mn}{np \cdot mn} = \frac{bmn}{mn^2p}$$

II) Las fracciones dadas se pueden reducir a *mínimo comú denominador,* hallando el m. c. m. de los denominadores y mu tiplicando luego cada numerador por el cociente entre el m. c. n hallado y el denominador respectivo. Claro está que el denom nador de cada una de las nuevas fracciones será el m. c. n hallado.

Así las fracciones dadas, reducidas a mínimo común denom nador son:

$$\frac{a}{mn} = \frac{a\,(mnp : mn)}{mnp} = \frac{ap}{mnp}$$

$$\frac{b}{np} = \frac{b\,(mnp : np)}{mnp} = \frac{bm}{mnp}$$

Ejemplo:

Reducir a mínimo común denominador las siguientes frac-ones:

$$\frac{1}{x^2 - y^2} \quad ; \quad \frac{4(x+y)}{x^2 - 2xy + y^2} \quad ; \quad \frac{2}{(x-y)^2}$$

Factoreando los denominadores:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$
$$(x-y)^2 = (x-y)^2$$

.c.m. de los denominadores: $(x+y)(x-y)^2$.

Los numeradores de las nuevas fracciones se obtienen multi-licando los siguientes cocientes por el numerador respectivo:

$$[(x+y)(x-y)^2] : (x+y)(x-y) = x-y$$
$$[(x+y)(x-y)^2] : (x-y)^2 = x+y$$
$$[(x+y)(x-y)^2] : (x-y)^2 = x+y$$

Luego, las fracciones reducidas son:

$$\frac{x-y}{(x+y)(x-y)^2} \quad . \quad \frac{4(x+y)^2}{(x+y)(x-y)^2} \quad ; \quad \frac{2(x+y)}{(x+y)(x-y)^2}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Las operaciones con fracciones algebraicas son análogas a las que se realizan con fracciones numéricas.

Suma.

Cuando las fracciones algebraicas tienen el mismo denominador, para sumar, se forma otra fracción algebraica de ese mismo denominador, cuyo numerador sea la suma de los numeradores de las fracciones dadas.

Ejemplo:

$$\frac{3a}{a+b}+\frac{5b}{a+b}+\frac{c}{a+b}=\frac{3a+5b+c}{a+b}$$

Si las fracciones algebraicas no tienen igual denominador las reduce a común denominador y se procede como en el párr anterior.

Sea sumar las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{m}{2a-4b} \cdot \frac{n}{a^2-4ab+4b^2}$$

Primer método.

Reducción a común denominador:

$$\frac{m}{2a-4b}+\frac{n}{a^2-4ab+4b^2}=$$

$$=\frac{m}{2(a-2b)}+\frac{n}{(a-2b)^2}$$

$$=\frac{m(a-2b)^2}{2(a-2b)(a-2b)^2}+\frac{n2(a-2b)}{(a-2b)^2\cdot 2(a-2b)}$$

$$=\frac{m(a-2b)^2+2n(a-2b)}{2(a-2b)^3}$$

Ejercicio de aplicación.

Hallar la suma:

$$\frac{3}{4xy}+\frac{y}{x^3a}+\frac{a}{y^3}$$

$$\frac{3}{4xy}+\frac{y}{x^3a}+\frac{a}{y^3}=\frac{3\cdot x^3a\cdot y^3+y\cdot 4xy\cdot y^3+a\cdot 4xy\cdot x^3a}{4xy\cdot x^3a\cdot y^3}$$

$$=\frac{3x^3ay^3+4xy^5+4x^4a^2y}{4x^4y^4a}$$

Dado que numerador y denominador tienen factores comunes, se tiene:

$$\frac{3}{4xy}+\frac{y}{x^3a}+\frac{a}{y^3}=\frac{xy\,(3x^2y^2a+4y^4+4x^3a^2)}{4x^4y^4a}$$

Simplificando xy, queda, en fin:

$$\frac{3}{4xy}+\frac{y}{x^3a}+\frac{a}{y^3}=\frac{3ax^2y^2+4y^4+4a^2x^3}{4ax^3y^3}$$

Segundo método.

Reducción a mínimo común denominador:

Cálculos auxiliares	
$2a-4b=2\,(a-2b)$	$\dfrac{m}{2a-4b}+\dfrac{n}{a^2-4ab+4b^2}=$
$a^2-4ab+4b^2=(a-2b)^2$	$=\dfrac{m}{2\,(a-2b)}+\dfrac{n}{(a-2b)^2}$
m. c. m.: $2\,(a-2b)^2$	$=\dfrac{m\,(a-2b)}{2\,(a-2b)^2}+\dfrac{n\cdot 2}{2\,(a-2b)^2}$

Luego

$$\frac{m}{2a-4b}+\frac{n}{a^2-4ab+4b^2}=\frac{m\,(a-2b)+2n}{2\,(a-2b)^2}$$

Ejercicio de aplicación.

Hallar la suma:

$$\frac{2+x}{x^2-y^2}+\frac{1}{x-y}$$

Cálculos auxiliares	
	$\dfrac{2+x}{x^2-y^2}+\dfrac{1}{x-y}=$
$x^2-y^2=(x+y)\,(x-y)$	$=\dfrac{2+x}{(x+y)\,(x-y)}+\dfrac{1\,(x+y)}{(x+y)\,(x-y)}$
$x-y=x-y$	
m. c. m.: $(x+y)\,(x-y)$	$=\dfrac{2+x+x+y}{(x+y)\,(x-y)}=\dfrac{2+2x+y}{(x+y)\,(x-y)}$

Resta

Igual que en la suma destacaremos dos casos: según que trate de restar fracciones de igual o de distinto denominad

Primer caso.

Restar fracciones de igual denominador.

Para restar fracciones de igual denominador basta form otra fracción algebraica de igual denominador, cuyo numerad sea la diferencia entre los numeradores.

Ejemplo:

$$\frac{2a}{4-5m}-\frac{5b}{4-5m}=\frac{2a-5b}{4-5m}$$

Segundo caso.

Restar fracciones de distinto denominador.

Basta reducir las fracciones algebraicas a común denominad y proceder luego como en el caso anterior.

Ejemplos:

a) *Primer método.* — Restar.

$$\frac{m}{a^2-1}-\frac{mn}{a+1}=\frac{m(a+1)}{(a^2-1)(a+1)}-\frac{mn(a^2-1)}{(a+1)(a^2-1)}=$$

$$=\frac{m(a+1)-mn(a^2-1)}{(a^2-1)(a+1)}$$

b) *Segundo método.* — Efectuemos la resta anterior aplicand el m. c. denominador.

Cálculos auxiliares:

$a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$
$a + 1 = a + 1$
m.c.m.: $(a+1)(a-1)$

$$\frac{m}{a^2-1} - \frac{mn}{a+1} =$$

$$= \frac{m}{(a+1)(a-1)} - \frac{mn(a-1)}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{m - mn(a-1)}{(a+1)(a-1)}$$

Compruebe el alumno la igualdad de los resultados obtenidos con ambos procedimientos.

Multiplicación

Inspirándonos en las reglas operativas de las fracciones numéricas podemos aceptar que: El producto de varias fracciones algebraicas es otra fracción algebraica cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los mismos.

Para la simplificación del resultado es aconsejable expresar previamente los numeradores y los denominadores descompuestos en sus factores primos.

Ejemplo:

$$\frac{3am - 3an}{2b} \times \frac{5ab}{m^2 - 2mn + n^2} = \frac{3a(m-n)}{2b} \times \frac{5ab}{(m-n)^2}$$

$$= \frac{3a(m-n)5ab}{2b(m-n)^2}$$

$$= \frac{15a^2}{2(m-n)}$$

División

Para dividir dos fracciones algebraicas se multiplica la fracción dividendo por la inversa de la fracción divisor.

Ejemplos:

I) $$\frac{5ab^2}{2m-2} : \frac{10a^2}{m^2-1} = \frac{5ab^2}{2m-2} \times \frac{m^2-1}{10a^2}$$

$$= \frac{5ab(m+1)(m-1)}{2(m-1)\cdot 10a^2}$$

$$= \frac{b^2(m+1)}{4a}$$

II) $$\left(1+\frac{a}{b^2}\right) : \left(\frac{1}{b}-\frac{a^2}{b^2}\right) = \frac{b^2+a}{b^2} \cdot \frac{b-a^2}{b^2}$$

$$= \frac{b^2+a}{b^2} \times \frac{b^2}{b-a^2}$$

$$= \frac{(b^2+a)b^2}{b^2(b-a^2)} = \frac{b^2+a}{b-a^2}$$

EJERCICIOS

Simplificar fracciones algebraicas.

1) $$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2b-ab^2}$$ R.: $\frac{4}{a-}$

2) $$\frac{a \perp b}{a^2+2ab+b^2}$$ R.: $\frac{1}{a+}$

3) $$\frac{14a^2-7ax}{10ay-5xy}$$ $\frac{8a(14a-7x)}{20(5y-}$ R.: $\frac{7a}{5y}$

4) $$\frac{a^2-1}{4a^2-8a+4}$$ R.: $\frac{a+1}{4(a-1}$

5) $$\frac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab}$$ R.: $a+b$

6) $\dfrac{ax^3 - a^4}{2am + 3an}$ R.: $\dfrac{x^3 - a^3}{2m + 3n}$

7) $\dfrac{a(x - a)^3}{2xa - 2a^2}$ R.: $\dfrac{(x - a)^2}{2}$

8) $\dfrac{24a^3b + 12a^2b^2}{6a^2b - 3a^2b^2}$ R.: $\dfrac{4(2a + b)}{2 - b}$

9) $\dfrac{a - b}{a^2 - 2ab + b^2} + \dfrac{a + b}{a^2 - b^2} + 1$ R.: $\dfrac{2 + a - b}{a - b}$

10) $\dfrac{1}{x(x + 1)(x - 1)} - \dfrac{1}{x(x - 1)} + \dfrac{2}{x^2 - 1}$ R.: $\dfrac{1}{x^2 - 1}$

11) $\dfrac{y^6 - 1}{3t(y^2 - 1)}$ R.: $\dfrac{y^4 + y^2 + 1}{3t}$

12) $\dfrac{uv - v^2}{uv - u^2}$ R.: $-\dfrac{v}{u}$

13) $\dfrac{t - tx + u - ux}{3x^2 + 1 - 3x - x^3}$ R.: $\dfrac{t + u}{(1 - x)^2}$

14) $\dfrac{x^2 + y^2 - 2xy - t^2}{2x - 2y - 2t}$ R.: $\dfrac{x - y + t}{2}$

15) $\dfrac{a^2 - (b + c)^2}{c^2 - (a + b)^2}$ R.: $\dfrac{a - b - c}{c - a - b}$

Reducir a común denominador o a mínimo común denominador:

1) $\dfrac{a + 1}{2a + 3}$; $\dfrac{3a}{2a^2 + 5a + 3}$

R.: $\dfrac{(a + 1)(2a^2 + 5a + 3)}{(2a + 3)(2a^2 + 5a + 3)}$. $\dfrac{6a^2 + 9a}{(2a + 3)(2a^2 + 5a + 3)}$

2) $\dfrac{2a}{x^2+2x+4} \cdot \dfrac{b}{x^3-8}$

R.: $\dfrac{2a(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+)4} \cdot \dfrac{b}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

3) $\dfrac{x+3}{x^2-25} \cdot \dfrac{5}{x-5}$

R.: $\dfrac{x+3}{(x+5)(x-5)} \cdot \dfrac{5(x+5)}{(x+5)(x-5)}$

4) $\dfrac{5}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a^2b}{3a+3b}$

R.: $\dfrac{15}{3(a+b)(a-b)} \cdot \dfrac{a^2b(a-b)}{3(a+b)(a-b)}$

5) $\dfrac{1}{x+y} \cdot \dfrac{1}{x^2-y^2} \cdot \dfrac{1}{x--y}$

R.: $\dfrac{x-y}{x^2-y^2} \cdot \dfrac{1}{x^2-y^2} \cdot \dfrac{x+y}{x^2-y^2}$

6) $\dfrac{a+b}{a--b}$; $\dfrac{a-b}{a+b} \cdot \dfrac{b}{b^2-a^2}$

R.: $\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$; $\dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$; $-\dfrac{b}{a^2-b^2}$

7) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}$; $\dfrac{a-b}{ab^2-a}$; $\dfrac{b(a-b)}{a^2-2ab+b^2}$

R.: $\dfrac{a(a^2-b^2)(b^2-1)}{a(a-b)^2(a+b)(b^2-1)}$

$\dfrac{(a+b)(a-b)^3}{a(a-b)^2(a+b)(b^2-1)}$

$\dfrac{ab(a^2-b^2)(b^2-1)}{a(a-b)^2(a+b)(b^2-1)}$

8) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}$; $\dfrac{a^2(b+1)}{ab^2-a}$ · $\dfrac{b(a-b)}{a^2-2ab+b^2}$

R.: $\dfrac{a(a^2-b^2)(b^2-1)}{a(a+b)(a-b)^2(b^2-1)}$

$\dfrac{a^2(b+1)(a+b)(a-b)^2}{a(a+b)(a-b)^2(b^2-1)}$

$\dfrac{ab(a^2-b^2)(b^2-1)}{a(a+b)(a-b)^2(b^2-1)}$

9) $\dfrac{xy}{x^2+2xy+y^2}$; $\dfrac{3xy^3}{x+y}$; $\dfrac{2xy^2}{x^2-y^2}$

R.: $\dfrac{x^2y-xy^2}{(x+y)^2(x-y)}$; $\dfrac{2(x^2y^2+xy^3)}{(x+y)^2(x-y)}$;

$\dfrac{3(x^3y^3-xy^5)}{(x+y)^2(x-y)}$

Efectuar la operación que se indica:

1) $\dfrac{2x^2-x}{4x^2-1}-\dfrac{3x}{2x-1}$ R.: $-\dfrac{4x(x+1)}{4x^2-1}$

2) $\dfrac{x}{xy}-\dfrac{y}{yz}+\dfrac{z}{xz}$ R.: $\dfrac{xz-yx+zy}{xyz}$

3) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2x}{1-x^2}$ R.: $\dfrac{2}{1+x}$

4) $\dfrac{1+5x}{1-5x}-\dfrac{1-5x}{1+5x}$ R.: $\dfrac{20x}{1-25x^2}$

5) $\dfrac{1}{4(1+a)}+\dfrac{1}{4(1-a)}$ R.: $\dfrac{1}{2(1-a^2)}$

6) $\dfrac{a^3}{(a+b)^3}-\dfrac{ab}{(a+b)^2}+\dfrac{b}{a+b}$ R.: $\dfrac{a^3+b^3+ab^2}{(a+b)^3}$

7) $\dfrac{a^2 - x^2}{a} \times \dfrac{a^2 + x^2}{ax}$ R.: $\dfrac{a^4 - x^4}{a^2x}$

8) $\dfrac{ax}{a + x} \times \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{x}\right)$ R.: $x - a.$

9) $(a^2 - 1) \times \left(\dfrac{a}{a + 1} + \dfrac{a}{a - 1} - 1\right)$ R.: $a^2 + 1$

10) $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \times \dfrac{a - b}{a + b}$ R.: $\dfrac{a^2 + b^2}{(a + b)^2}$

11) $\dfrac{ax - a}{bx - b} : \dfrac{c - cx}{2b - bx}$ R.: $\dfrac{a(2 - x)}{c(1 - x)}$

12) $\dfrac{a^2 - 6a + 9}{(a + 3)^2} \times \dfrac{a^3 - 3a^2}{a^2 - 9}$ R.: $\dfrac{a^2(a - 3)^2}{(a + 3)^3}$

13) $\left(\dfrac{a - 2}{a - 1} - \dfrac{a - 3}{a + 3}\right) \dfrac{a^2 + 2a - 3}{25a^2 - 81}$ R.: $\dfrac{1}{5a + 9}$

14) $\dfrac{\dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - y^2} - \dfrac{x - y}{x + y}}{\dfrac{6x^2y^3}{x^2 - y^2}}$ R.: $\dfrac{1}{2xy^2}$

15) $\dfrac{a^6 - x^6}{a^2 - 2ax + x^2} : \dfrac{a^2 + ax + x^2}{a - x}$ R.: $a^3 + x^3$

16) $3x + \dfrac{x}{a} - \left(x - \dfrac{x - b}{c}\right)$ R.: $\dfrac{cx(2a + 1) + a(x - b)}{ac}$

17) $\dfrac{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{a^2}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{ax} + \dfrac{1}{a^2}}$ R.: $\dfrac{x^3 - ax^2 + a^2x - a^3}{x + a}$

18) $\dfrac{a^3b}{3a^2b-1}+a$ R.: $\dfrac{a(4a^2b-1)}{3a^2b-1}$

19) $\dfrac{1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x}{(x+1)^2}$ R.: $\dfrac{1}{x+1}$

20) $\dfrac{2}{x+y}+1-\dfrac{2(x+y)}{x^2-y^2}$ R.: $\dfrac{x^2-y^2-4y}{x^2-y^2}$

21) $\dfrac{x+y}{y}+\dfrac{x^2y-x^3}{x^2y-y^3}-\dfrac{2x}{x+y}$ R.: $\dfrac{y}{x+y}$

22) $\dfrac{3t}{9t^2-1}+\dfrac{4}{3t-1}-\dfrac{5}{3t+1}$ R.: $\dfrac{9}{9t^2-1}$

23) $\dfrac{3u-6}{u^2-4}+\dfrac{3tu}{2u^3+4u^2}$ R.: $\dfrac{3(t+2u)}{2u(u+2)}$

24) $\dfrac{t^2-9}{u^2+2u}:\dfrac{2t-6}{u+2}$ R.: $\dfrac{t+3}{2u}$

25) $\dfrac{x+\dfrac{x+1}{x+2}}{3+\dfrac{1}{x^2-4}}$ R.: $\dfrac{(x-2)(x^2+3x+1)}{3x^2-11}$

26) $\left(\dfrac{x^3}{y^3}-\dfrac{y^3}{x^3}\right):\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)$ R.: $\dfrac{x^4+y^4+x^2y^2}{x^2y^2}$

27) $\left(t+\dfrac{t}{t-1}\right):\left(t-\dfrac{t}{t-1}\right)$ R.: $\dfrac{t^2}{t-2}$

28) $\dfrac{(a+b)^2}{a-b}:\dfrac{a+b}{(a-b)^2}$ R.: a^2-b^2

29) $\dfrac{t}{u-1}\left(\dfrac{u+2}{3}-1\right)$ R.: $\dfrac{t}{3}$

30) $\left(1-\dfrac{2t}{1+2t}\right)\left(1+\dfrac{2t}{1-2t}\right)$ R.: $\dfrac{1}{1-4t^2}$

8 ENUNCIADOS - ECUACIONES - INECUACIONES

Enunciados ciertos y falsos.

Cuando se hacen afirmaciones relacionadas con los números se hacen *enunciados*, tales como

$$(8 - 2) \cdot (7 + 1) = 48$$

Claro está que un enunciado puede ser *cierto* o *falso*, pero no ambas cosas. Este enunciado, en particular, es cierto.

Existen otras formas verbales que se usan en enunciados matemáticos. Por ejemplo, el símbolo $\neq$ significará "no es" o "no es igual a".

Por ejemplo:

$$9 + 5 \neq 7 \cdot 2$$

es un enunciado *falso*, y

$$30 : 5 \neq 9 - 2$$

es un enunciado *cierto*.

Enunciados abiertos.

Consideremos el enunciado

$$8 + x = 26$$

Es *cierto* este enunciado? No podemos afirmar si es cierto o also hasta no saber qué número representa x; sin esta información no se puede llegar a una decisión.

Lo mismo acontece con el enunciado "Miguel es un técnico n aparatos de televisión"; no se puede decidir si es cierto o no asta no saber quién es Miguel.

En este sentido, la variable x se usa más o menos en la misma forma en que usamos un pronombre en el lenguaje corriente.

Sea ahora el enunciado

$$12(x-2) = 12x - 24$$

Tampoco en este caso se puede decidir, *en base al enunciado solamente*, si es *cierto* o *falso*; pero aquí se trata de una situación distinta. Como en los casos anteriores se puede decidir si se sabe el número que representa x.

Sin embargo, en este enunciado es posible tomar una decisión aún sin saber el valor de x. Teniendo en cuenta la *propiedad distributiva* del producto con respecto a la diferencia, podemos demostrar que este enunciado es cierto, independientemente del número que x represente.

En general, los enunciados tales como

$$8 + x = 26$$

y

$$12(x-2) = 12x - 24$$

que *contienen variables*, son *enunciados abiertos*.

La circunstancia de que sin más información no se puede decidir si estos enunciados son ciertos o falsos sugiere el empleo de la palabra "*abierto*".

Un *enunciado abierto* es un enunciado que comprende una o más variables y la decisión de si es cierto o no, queda pendiente hasta que se tenga suficiente información adicional.

Valores de la variable.

Consideremos el enunciado abierto

$$4x - 18 = 4$$

Nos proponemos determinar los valores de la variable, si lo[s] hay, para los cuales el enunciado sea *cierto*.

Primeramente tomaremos a x de manera tal que $4x$ sea ma[-] yor que 18. Por ejemplo, asignaremos a x el *valor* 7, obteniend[o]

$$4 \cdot 7 - 18 = 28 - 18 = 10$$

En este caso el primer miembro está igualado a 10, que es diferente de 4 del enunciado dado.

Ensayando con el *valor* 6 se obtiene

$$4 \cdot 6 - 18 = 24 - 18 = 6 \neq 4$$

Si se da a x el *valor* 5 se tiene

$$4 \cdot 5 - 18 = 20 - 18 = 2 \neq 4$$

Dado que 5 resultó muy pequeño, vamos a tomar un número comprendido entre 6 y 5, por ejemplo, 5,5.

Entonces

$$4x - 18 = 4 \cdot 5{,}5 - 18 = 22 - 18 = 4$$

Como

$$4 = 4$$

el enunciado dado es cierto para el *valor* 5,5 de la variable, o sea

$$\boxed{x = 5{,}5}$$

PROBLEMAS

Determinar los valores de la variable, si los hay, que hacen ciertos los siguientes enunciados abiertos:

a) $30 + z = 2$ R.: $z = -28$

b) $5x - 2 = 4$ R.: $x = \frac{6}{5}$

c) $7y - 1 = 13$ R.: $y = 2$

d) $5z + 4z = 10$ R.: $z = \frac{10}{9}$

e) $t + 3 = t + 2$ R.: No existe valor para t

f) $(x + 2) \cdot 3 \neq 4x + 1$ R.: $x \neq 5$

g) $x^2 = 25$ R.: $x = \pm 5$

h) $9 - x^2 = 0$ R.: $x = \pm 3$

i) $8 + x^3 = 0$ R.: $x = \sqrt[3]{-8}$

j) $x^2 + 9 = 9$ R.: $x = 0$

k) $x^2 = \frac{100}{9}$ R.: $x = \frac{10}{3}$

Conjunto de validez de enunciados abiertos.

Sea el dominio de la variable x en el enunciado

$$x + 5 = 8$$

el conjunto de todos los números racionales.

x	ENUNCIADO	RESULTADO	PORQUE
0	$0 + 5 = 5$	falso	$5 \neq 8$
½	$\frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$	falso	$\frac{11}{2} \neq 8$
1	$1 + 5 = 6$	falso	$6 \neq 8$
2	$2 + 5 = 7$	falso	$7 \neq 8$
3	$3 + 5 = 8$	*cierto*	$8 = 8$
4	$4 + 5 = 9$	falso	$9 \neq 8$

El enunciado $x + 5 = 8$ se asimila a una criba, ya que separa el dominio de la variable en dos subconjuntos, uno que contiene todos los números que hacen el enunciado cierto, y otro que contiene todos los números que hacen el enunciado falso.

En nuestro caso, 3 pertenece al primer subconjunto, mientra que $\frac{1}{2}$, 1, 2 y 4 pertenecen al segundo.

En síntesis, *el conjunto de validez de un enunciado abiert que comprende una variable, es el conjunto de todos aquello números del dominio de la variable que hacen cierto el enun ciado.*

EJERCICIOS

I) *Decidir si el número que aparece después del enunciad abierto pertenece al conjunto de validez del mismo.*

a) $22 - x = 18$; 4
R.: cierto

b) $x - 2 \neq 7$; 12
R.: cierto

c) $\frac{20x + 1}{7} \neq 3$; 1
R.: falso

d) $x + \frac{1}{x} = 2$; 1
R.: cierto

II) *A continuación de cada enunciado abierto figura u conjunto que contiene todos o algunos de los números del con junto de validez del enunciado. Hallar el conjunto de valide en cada caso.*

a) $3(1 + z) = 15$: $\{0. 1, \frac{1}{2}, 4, 5\}$ R.: $z = 4$

b) $x^2 - x - 2 = 0$; $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ R.: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

c) $x + 2 = 5x - 1$; $\left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}, 0 \right\}$ R.: $x = \frac{3}{4}$

d) $z + 7 = z + 2$; $\{0, 2, 3\}$ R.: $\varnothing$

III) *Escribir un enunciado abierto cuyo conjunto de valide sea el conjunto vacío,* $\varnothing$.

Enunciados que contienen desigualdades

El conjunto de validez del enunciado $x + 3 = 4$ es uno. ¿Cuál entonces el conjunto de validez del enunciado abierto $+ 3 > 4$?

Cuando x es un número mayor que 1, es $x + 3$ un número ayor que 4.

Cuando x es un número menor que 1, es $x + 3$ un número enor que 4.

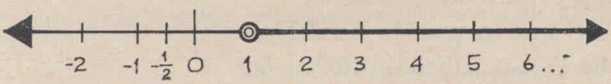
Por lo tanto, todo número mayor que 1 hará el enunciado *erto* y todos los demás números lo harán *falso.*

En síntesis, el conjunto de validez del enunciado

$$x + 3 > 4$$

el conjunto de todos los números mayores que uno.

La gráfica de este conjunto de validez es el conjunto de todos s puntos de la recta numérica cuyas abscisas son mayores que 1. ste es el conjunto de todos los puntos que están a la derecha el punto con abscisa 1.



Ejemplo:

Determinar gráficamente el conjunto de validez de todos los úmeros enteros del enunciado

$$2 + x < 5$$

El conjunto pedido es

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

londe no figura el número 3.

Una *igualdad* que contenga variables se llama *ecuación,* y una *desigualdad* que contenga variables se denomina *inecuación.*

EJERCICIOS

I) *Representar gráficamente el conjunto de validez de núm ros enteros,* **M**, *de*

a) $x + 2 < 7$
b) $x - 1 \geqq 3$
c) $2x - 2 < 1$

II) *Si* x *es un número cardinal, determinar el conjunto validez de*

a) $x + x = 2x$
b) $x + 3 < x$
c) $x \geqq 2x$

III) *Sea* **A** *el conjunto de validez de*

$$x + 4 = 7 \quad \text{o} \quad x + 1 = 5$$

a) ¿Es 3 un elemento de **A**?
b) ¿Es 4 un elemento de **A**?
c) ¿Es $\emptyset$ un subconjunto de **A**?

R.: a) sí; b) sí; c) no

Ecuación de primer grado con una incógnita

Recordemos que *una igualdad que contenga variables se llam ecuación.* En otras palabras, se llaman ecuaciones a las igua dades que sólo se verifican para determinados valores asignad a sus variables, denominadas *incógnitas*.

Las ecuaciones se clasifican en: *enteras, fraccionarias* e *irr cionales.* Se dice que una ecuación es *entera* cuando sus variabl no figuran en el denominador o con exponente negativo.

Se dice que una ecuación es *fraccionaria* cuando por lo men una de las variables figura como *divisor*.

Se dice que una ecuación es *irracional* cuando por lo men una incógnita figura *bajo signo radical,* no siendo reducible.

Ejemplos:

a) $$8 - 2x = \frac{x}{3} + 18$$ (ecuación entera)

b) $$\frac{3}{x} + \frac{10x - 1}{6} = x - 2x$$ (ecuación fraccionaria con una sola incógnita, x)

c) $$\frac{5}{x - y} - 8 = 3x + \frac{y}{x}$$ (ecuación fraccionaria con dos incógnitas, x e y)

d) $$3 - \sqrt{3x} = 10 - 1$$ (ecuación irracional)

Grado de una ecuación.

El grado de una ecuación está dado por el mayor exponente de sus incógnitas en los distintos términos.

Ejemplos:

a) $$2x - 3 + 4x = 6$$

es una ecuación de *primer grado* con una sola incógnita, x.

b) $$3x^2 - 1 + 6x = x^2 - 1$$

es una ecuación de *segundo grado* con una sola incógnita, x.

c) $$x^3 + 2 = 10x$$

es una ecuación de *tercer grado* con una incógnita, x.

Cuando en el mismo término figuran dos o más incógnitas, la suma de sus exponentes indica el grado de dicho término, el que puede resultar grado de la ecuación.

Ejemplo:

$$x^2 - 4x^2y + 10y^2 = 5$$

es una ecuación de tercer grado, pues es igual a tres la suma de los exponentes de las variables del segundo término, que es el de mayor grado.

Resolución de ecuaciones.

Se ha estudiado la resolución de *enunciados abiertos*, esto es se han determinado sus conjuntos de validez. Al principio ensayamos valores de la variable que se suponía verificaban el enunciado, comprobándose en cada caso la verdad de dicho enunciado. Luego se observó que ciertas operaciones, al aplicarlas a los miembros del enunciado, daban origen a otros enunciados con el mismo conjunto de validez que el enunciado dado.

Podemos decir entonces que dos enunciados o ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto de validez.

Por lo tanto, nuestro procedimiento en la resolución de un enunciado consistirá en efectuar operaciones permitidas sobre dicho enunciado para obtener otro equivalente.

Vamos a enumerar las operaciones permitidas, resolviendo la ecuación

$$8x + 3 = x + 10$$

Este enunciado es *equivalente* a

$$(8x + 3) + (-x - 3) = (x + 10) + (-x - 3)$$

obtenido al sumar a ambos miembros una misma expresión $(-x-3)$.

Efectuando operaciones se llega a

$$7x = 7$$

Este enunciado es equivalente a

$$x = \frac{7}{7} \qquad \text{o bien} \qquad x = 1$$

Por ello,

$$8x + 3 = x + 10 \qquad \text{y} \qquad x = 1$$

son enunciados equivalentes; el conjunto de validez buscado es $\{1\}$.

Examinemos el mismo ejemplo con más atención:

Cuando afirmamos que

$$8x + 3 = x + 10 \qquad \text{es equivalente a} \qquad 7x = 7$$

ueremos decir que toda solución del primer enunciado es una lución del segundo y recíprocamente. Para comprobar que sto es así tengamos en cuenta que $(-x-3)$ es un número eal para todo valor de x. Así que cuando sumamos $(-x-3)$ los dos miembros del primer enunciado, obtenemos otro enunciado que es cierto para los mismos valores de x.

Para probar la equivalencia de estos dos enunciados tenemos ambién que verificar que toda solución del segundo enunciado s una solución del primero. Para ello basta sumar $(x+3)$ a los os miembros del segundo enunciado para obtener el primero, mostrando así que toda solución del segundo lo es también del rimero.

En rigor no se necesita efectuar este segundo paso para "invertir" la operación. Sabemos que es posible, ya que el *opuesto* de $(-x-3)$ es también un número real para todo valor de x.

Análogamente sabemos que

$$7x = 7 \qquad \text{es equivalente a} \qquad x = 1$$

porque la operación de multiplicar los miembros de $7x = 7$ por $\frac{1}{7}$ es invertible, siendo la operación inversa la de multiplicar por 7.

Efectivamente, pues todo número real distinto de cero tiene un recíproco que también es un número real.

En síntesis, *dos son las operaciones que dan origen a enunciados equivalentes:*

a) *Sumar un número real a ambos miembros.*

b) *Multiplicar ambos miembros por un número real distinto de cero.*

Aplicaciones

Resolver:

a) $7x - 2 = 5x + 4$ R.: $x = 3$

b) $4x + 2 = 8x$ R.: $x = \frac{1}{2}$

c) $\dfrac{4x-8}{3}=2x-6$ R.: $x=5$

d) $\dfrac{3x}{4}+\dfrac{5x}{2}=\dfrac{x}{3}+1$ R.: $x=\dfrac{12}{35}$

e) $7x-12=3x+9-2x$ R.: $x=\dfrac{7}{2}$

Otros casos de resolución de ecuaciones.

Al resolver ecuaciones se ha tenido siempre en cuenta suma sólo números reales o multiplicar siempre por números reales distintos de cero, porque así se está seguro que tales operaciones dan lugar a enunciados equivalentes.

Surge entonces la pregunta, ¿será posible obtener también enunciados equivalentes empleando otras operaciones

Sea la ecuación

$$x(x-4)=2\ (x-4)$$

Observando este enunciado se puede inferir que las raíces de la ecuación son 2 y 4.

Para obtener un enunciado más simple multipliquemos ambos miembros por $\dfrac{1}{x-4}$, resultando

$$x(x-4)\cdot\frac{1}{x-4}=2\ (x-4)\cdot\frac{1}{x-4}$$

o bien

$$x=2$$

Es decir, 2 es la solución de este nuevo enunciado.

En resumen, la operación de multiplicar por $\dfrac{1}{x-4}$ dio lugar a un nuevo enunciado con un conjunto de validez menor. Por lo tanto, tal operación no dará necesariamente un enunciado equivalente.

Esta incongruencia proviene de que para $x = 4$ el factor $\frac{1}{x-4}$ *no es un número,* siendo por ello la operación de multiplicar por dicha expresión sólo efectiva en este caso para los valores de x diferentes de 4.

Por todo ello, *nunca se debe sumar ni multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión que para algunos valores de la variable no sea un número.*

Regla para resolver ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita.

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita:

1º *Se eliminan los denominadores multiplicando a ambos miembros de la ecuación por el producto de los denominadores o por su mínimo común múltiplo.*

2º *Se efectúan las operaciones indicadas.*

3º *Se agrupan en un miembro todas las incógnitas, y en el otro todos los términos independientes.*

4º *Se efectúan las sumas algebraicas indicadas en ambos miembros.*

5º *Se pasa el coeficiente de la incógnita al otro miembro, obteniéndose finalmente la raíz de la ecuación dada.*

6º *Se verifica la raíz obtenida, desechándola si no satisface a la ecuación dada.*

Discusión de una ecuación

Discutir una ecuación significa analizar la naturaleza de los resultados numéricos e interpretar concretamente los mismos.

Toda ecuación de primer grado con una incógnita, una vez simplificada, nos conduce a otra ecuación de la forma

$$\boxed{a \cdot x = b}$$

Primer caso. — *Ecuación determinada:* Cuando b y a son números distintos de cero, se obtendrá un *valor* de x *único* y *determinado.* En este caso se dice que la *ecuación* es *determinada* y su raíz puede ser un número entero positivo o negativo, o bien un número fraccionario relativo.

Ejemplo:

$$3x = 6 \ ; \ x = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$$

Segundo caso. — *Ecuación imposible:* Cuando $a = 0$, reemplazando este valor en la ecuación (1) resulta:

$$0 \cdot x = b$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{b}{0}$$

cociente que expresa un resultado muy grande (infinito) no determinado. En este caso se dice que la *ecuación es imposible,* pues la incógnita carece de un resultado finito y determinado.

Tercer caso. — *Ecuación de raíz nula:* Cuando $b = 0$, reemplazando este valor en la ecuación (1) resulta:

$$a \cdot x = 0$$

$$x = \frac{0}{a}$$

o bien

$$x = 0$$

es decir, en este caso *la raíz es nula.*

Ejemplo:

$$5x = 0 \quad ; \quad x = \frac{0}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Cuarto caso. — *Ecuación indeterminada:* Supongamos que $a = b = 0$.

Reemplazando estos valores en la ecuación (1), se tiene:

$$0 \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{0}{0}$$

Este cociente expresa un valor *indeterminado,* pues cualquier número puede ser el cociente entre cero y cero, por lo que la ecuación tendría *infinitas raíces.* En este caso la ecuación recibe el nombre de *indeterminada.*

Ejemplo:

$$3x + 7 - x = 3 + 2x + 4$$

$$3x - x - 2x = 3 + 4 - 7$$

$$0x = 0$$

$$x = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \qquad x = m \qquad \text{número cualquiera}$$

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones numéricas de primer grado con una incógnita y verificar las raíces.

1) $x - 3 = 7$ R.: $x = 10$

2) $2x - 4 = x - 7$ R.: $x = -3$

3) $\dfrac{4x - 2}{5} = x + 3$ R.: $x = -17$

4) $\dfrac{3(x - 2)}{5} = 4x - 1$ R.: $x = -\dfrac{1}{17}$

5) $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{2x + 5}{4}$ R.: $x = \dfrac{7}{2}$

6) $2-\dfrac{x-3}{4}=3(x-5)$ R.: $x=\dfrac{71}{13}$

7) $\dfrac{x-3}{4}-1=2x+3$ R.: $x=-\dfrac{19}{7}$

8) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{2}+1=2$ R.: $x=12$

9) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x-1}{4}=1$ x=0,5? R.: $x=\dfrac{9}{5}$

10) $\dfrac{3x-1}{4}+\dfrac{2x+3}{2}=5$ R.: $x=\dfrac{15}{7}$

11) $\dfrac{4x}{3}-\dfrac{x-5}{4}=x-\dfrac{x-2}{2}$ R.: $x=-\dfrac{3}{7}$

12) $\dfrac{3(x-5)+2(x-1)}{4}=\dfrac{x-5}{2}$ R.: $x=\dfrac{7}{3}$

13) $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{4}x-1$ R.: $x=14{,}4$

14) $x-\dfrac{1}{3}=x-\dfrac{3x+5}{2}-\dfrac{x-1}{3}$ R.: $x=-1$

15) $x-\dfrac{2}{5}=\dfrac{x-2}{5}$ R.: $x=0$

16) $\dfrac{2-3(x-4)}{5}=\dfrac{2(x-1)}{3}$ R.: $x=\dfrac{52}{19}$

17) $\dfrac{x}{3}-1+2x=4x-\dfrac{x}{2}$ R.: $x=-\dfrac{6}{7}$

18) $\dfrac{3}{4}(x-1)=\dfrac{2}{3}(2x+5)-1$ R.: $x=-\dfrac{37}{7}$

19) $4x - \frac{2(x-1)}{3} = 7 - x$ R.: $x = \frac{19}{13}$

20) $\frac{2x-4}{5} - \frac{x-1}{6} = \frac{x-3}{2} - 1$ R.: $x = 7$

Ecuaciones fraccionarias.

Recordemos que una ecuación se llama *fraccionaria* cuando la incógnita figura en el *denominador* o tiene *exponente negativo.*

Resolución de ecuaciones fraccionarias:

I) Sea la ecuación

$$\frac{3}{2x} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10} - \frac{6}{x}$$

Para resolverla se suprimen los denominadores multiplicando ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los mismos, que en este caso es igual a $(10x)$.

$$10x \cdot \left[\frac{3}{2x} - \frac{1}{5}\right] = \left[\frac{1}{10} - \frac{6}{x}\right] \cdot 10x$$

o bien

$$15 - 2x = x - 60$$

$$\Rightarrow \qquad 15 + 60 = x + 2x$$

$$75 = 3x$$

o sea

$$\frac{75}{3} = x$$

$$x = 25$$

II) Sea la ecuación

$$\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{3x+3} = \frac{5}{x-1}$$

Para hallar sus raíces debemos calcular primero el mínim común múltiplo de los denominadores:

$$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1)$$
$$3x + 3 = 3 \cdot (x+1)$$
$$x - 1 = x - 1$$
$$\text{m. c. m.} = 3 \cdot (x+1) \cdot (x-1)$$

Multiplicando luego ambos miembros por el mínimo comú denominador hallado, se tiene:

$$3(x+1)(x-1) \cdot \left[\frac{1}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)} \right] =$$
$$= \left[\frac{5}{x-1} \right] \cdot 3(x+1)(x-1$$

$$3 - (x-1) = 15(x+1)$$
$$3 - x + 1 = 15x + 15$$
$$4 - 15 = 15x + x$$
$$-11 = 16x$$
$$-\frac{11}{16} = x$$
$$\Rightarrow \qquad x = -\frac{11}{16}$$

Ecuaciones irracionales.

Sea la ecuación

$$\sqrt{x^2 - 8} = x - 4$$

Elevando ambos miembros al cuadrado, se tiene:

$$x^2 - 8 = (x-4)^2$$

Desarrollando el cuadrado del segundo miembro, resulta:

$$x^2 - 8 = x^2 - 8x + 16$$

luego

$$x^2 - x^2 + 8x = 16 + 8$$
$$8x = 24$$
$$x = \frac{24}{8}$$
$$\Rightarrow \qquad x = 3$$

EJERCICIOS

a) $\dfrac{3-x}{8-x} = \dfrac{x-6}{x+4}$ R.: $x = 4$

b) $\dfrac{2}{x-6} + \dfrac{2x}{x^2-6x} = \dfrac{16}{x^2-6x}$ R.: $x = 4$

c) $\dfrac{2}{5-x} = \dfrac{6-x}{x^2+4x+4} - \dfrac{1}{x+2}$ R.: $x = \dfrac{6}{11}$

d) $\dfrac{3x}{x-2} - 3 = -\dfrac{4}{x}$ R.: $x = \dfrac{4}{5}$

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

Estudiada ya la resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, veamos ahora la aplicación de dichas ecuaciones para resolver ciertos problemas.

Al resolver un problema tenemos que considerar tres partes, que son:

1º *Interpretar el enunciado para ponerlo bajo la forma de una ecuación.*

2º *Resolver la ecuación planteada.*

3º *Discutir la posibilidad de la solución hallada.*

Como la segunda parte ya ha sido estudiada nos dedicaremos a las otras dos.

Interpretación del enunciado para ponerlo bajo la forma de u ecuación.

No hay reglas definidas para poner el enunciado de un p blema bajo la forma de una ecuación. Debemos, por lo tan hacerlo interpretando el enunciado dado. Vamos indicando n méricamente las operaciones que señala el enunciado, asigná dole a la incógnita la letra x, con lo que se obtendrá una igu dad en la que debe figurar como única letra la de la incógnit igualdad que nos da la ecuación pedida. Veamos ejemplos se cillos para mejor ilustración:

Problemas

I) *¿Cuál es el número cuyo triplo, más sus dos quintas part es igual a 34?*

Obtención de la ecuación correspondiente.

Llamando x al número que queremos averiguar y leyen detenidamente el enunciado del problema, podemos ir indican las operaciones: El triplo del número, $3\,x$, más las dos quint partes del número, $\frac{2}{5}x$, debe ser igual a 34.

Luego $3\,x + \frac{2}{5}x = 34$ será la ecuación que permite hallar e número pedido.

II) *Pago $ 250 por un martillo y clavos, habiendo pagad cuatro veces más por el martillo que por los clavos. ¿Cuán pagué por cada cosa?*

Obtención de la ecuación correspondiente.

Llamando x al valor de los clavos, el martillo valdrá $4x$, d acuerdo al enunciado, por lo que la suma del precio del martil y los clavos estará dada por la ecuación

$$4x + x = 250$$

III) *A una reunión asistieron 200 personas entre hombres y ujeres, habiendo pagado los hombres $ 180 por cada entrada y s mujeres $ 100. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres había en total se recaudaron $ 32.000?*

Obtención de la ecuación correspondiente.

Llamando x al número de hombres, como en total había 200 ersonas, el número de mujeres será $200 - x$.

Como cada hombre pagó $ 180, el total de hombres habrá agado $ 180 $\cdot x$.

Como cada mujer pagó $ 100, el total de mujeres habrá pagado 100 $\cdot (200 - x)$.

La suma que han pagado entre ellos, $ 32.000, completa la ecuación, cuya expresión es

$$180 \cdot x + 100 \cdot (200 - x) = 32.000$$

Discusión de la posibilidad de la solución hallada

A veces la solución de un problema, a pesar de ser matemáticamente perfecta, no lo es en la práctica, porque la naturaleza de las cantidades tratadas en el problema no permite la aplicación de las raíces halladas. Por lo tanto, es siempre conveniente una vez hallado el resultado, interpretarlo, es decir, considerar si la solución matemática hallada es o no posible en la práctica. Veamos un ejemplo que nos sacará de toda duda.

La solución del problema III anterior es 150 hombres y 50 mujeres, pues al pagar los hombres $ 180 y los mujeres $ 100 obtenemos:

Pagado por los hombres	$180 \times 150 = 27.000$
Pagado por las mujeres	$100 \times 50 = 5\,000$
Total de lo recaudado	$27.000 + 5.000 = 32.000$

El problema es perfectamente posible en la práctica; pero veamos qué sucede al cambiar algunos datos. Supongamos que el nuevo enunciado es:

Problema. — *A una reunión asisten 200 personas entre hombres y mujeres, habiendo pagado los hombres \$ 180 por cada entrada y las mujeres \$ 100. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres había si en total se recaudaron \$ 35.400?*

La ecuación toma la forma de:

$$180 \cdot x + 100 \cdot (200 - x) = 35.400$$

Cuya solución es:

$$180x + 100 \cdot 200 - 100 \cdot x = 35.400$$
$$180x + 20.000 - 100x = 35.400$$
$$180x - 100x = 35.400 - 20.000$$
$$80x = 15.400$$
$$x = \frac{15.400}{80}$$
$$\Rightarrow \qquad x = 192\frac{1}{2}$$

Por lo que el número de hombres sería 192 ½ y el de mujeres 200 — 192 ½, o sea 7 ½, *solución evidentemente imposible, a pesar de ser matemáticamente indiscutible.*

IV) *La suma de dos resistencias es de 60 ohmios, pero se sabe que sus valores están entre sí en la relación de 1 a 5. ¿Cuál es el valor de cada una de esas resistencias?*

Obtención de la ecuación correspondiente.

Llamando x e y a los valores de las resistencias, resulta que estas cantidades forman una razón igual a $\frac{1}{5}$, luego:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{5}$$

pero como el valor y es igual a $(60 - x)$, la ecuación será:

$$\frac{x}{60 - x} = \frac{1}{5}$$

Interpretación de la solución negativa.

Cuando la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita tiene *un valor negativo*, debemos considerarlo tan bueno como si hubiera sido positivo, pues al reemplazar dicho valor en la ecuación en el lugar de x se obtiene una identidad, luego de efectuar las operaciones correspondientes.

Pero si el valor negativo obtenido corresponde a la solución de un problema, debemos interpretarlo para ver si con los datos dados el problema es posible o no, y en caso de que lo fuera debemos saber qué significado le damos a la solución negativa.

Aclaremos esto con distintos problemas de solución negativa:

Problema I. — *Un padre tiene 47 años y el hijo 15. ¿Dentro de cuánto tiempo la edad del padre será 5 veces mayor que la edad del hijo?*

Llamando x al tiempo que tiene que transcurrir para que la edad del padre sea cinco veces la edad del hijo, tenemos:

Dentro de x años el padre tendrá .... $47 + x$

Dentro de x años el hijo tendrá .... $15 + x$

Por lo tanto, la ecuación toma la forma:

$$47 + x = 5\ (15 + x)$$

Resolviéndola:

$$47 + x = 5 \cdot 15 + 5x$$

$$47 + x = 75 + 5x$$

$$47 - 75 = 5x - x$$

$$-28 = 4x$$

$$-\frac{28}{4} = x$$

$$\Rightarrow \quad -7 = x$$

Discusión: La solución negativa, en este caso, la interpretamos como que indica que *han pasado* 7 años desde que la edad del padre era cinco veces la edad del hijo.

Hace siete años el padre tenía ..... $47 - 7 = 40$ años

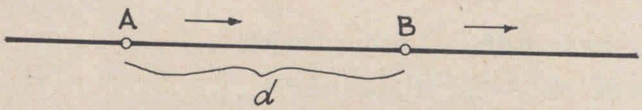
y el hijo tenía ..... $15 - 7 = 8$ años

pero 40 es cinco veces 8, luego la edad del padre era cinco veces la edad del hijo.

Problema II. — *Dos móviles,* **A** **y** **B** *marchan en línea recta y en el mismo sentido, partiendo desde diferentes lugares. Conociendo la distancia que los separa y la velocidad de cada uno de ellos, determinar cuánto tiempo tardarán en encontrarse.*

Solución.

Señalemos sobre una recta el lugar que ocupan los móviles **A** y **B**, la distancia que los separa y el sentido en que marchan.



Llamemos v a la velocidad uniforme del móvil **A** y v' a la del móvil **B**.

Sea x el tiempo buscado. El móvil **A**, cuya velocidad es v km/hora recorrerá en x horas una distancia $v \cdot x$. (Con movimiento uniforme el camino es igual a la velocidad por el tiempo.)

Pero el recorrido del móvil **A** es mayor que el del móvil **B**, pues entre **A** y **B** existe una distancia d. Por lo tanto:

$$vx - v'x = d$$

ecuación literal donde v, v' y d son datos y x es la incógnita.

Sacando x factor común se tiene: $x(v - v') = d$ y trasponiendo el factor $(v - v')$ resulta:

$$x = \frac{d}{v - v'}$$

Discusión:

I) Siendo $v > v'$, *el denominador es positivo,* luego es positivo también el valor de x, con lo que obtendremos el *tiempo que tardan los dos móviles en encontrarse.*

II) Siendo $v = v'$, *el denominador es cero,* por lo que el valor de x sería infinito (∞), lo cual lo interpretaríamos diciendo que los móviles se encuentran en el infinito, o bien que *no se encuentran nunca.*

III) *Siendo* $v < v'$, *el denominador es negativo,* siendo por lo tanto negativo el valor de x. Admitimos que esto indica que los móviles *se han encontrado antes* de ocupar las posiciones A y **B**, señaladas en la figura de análisis del problema.

Caso en que la solución negativa carece de sentido.

En los dos problemas anteriores la solución negativa ha tenido una interpretación práctica, que no admite discusión; pero veamos el problema siguiente donde la solución negativa no tiene sentido.

Problema. — *Una empresa de transporte cobra \$5 por kilogramo de carga transportada a un kilómetro de distancia, además de un recargo de \$120 por bulto. ¿A qué distancia puede transportarse una carga de 300 kilogramos, en 6 paquetes, para que cueste \$400 el transporte?*

Solución:

Por ser 6 paquetes debemos pagar ...... $6 \cdot 120 = 720$

Por transportar 300 kg a x km .... $300 \cdot 5 \cdot x$

Como el gasto debe ser \$400 se obtiene la ecuación:

$$720 + 300 \cdot 5 \cdot x = 400$$

Resolviéndola:

$$720 + 1.500\,x = 400$$
$$1.500\,x = 400 - 720$$
$$x = \frac{-320}{1.500}$$
$$x \cong -0{,}21$$

lo que da un *valor negativo de kilómetros,* el cual *no tiene inte*[r]*pretación práctica* en este problema.

Problemas

1) Los valores de dos resistencias están en la relación de 2 a [5] y, además, se sabe que su suma es de 140 ohmios. ¿Cuál es [el] valor de cada una de esas resistencias?

R.: 40 y 100 ohmios

2) Un obrero gana $ 500 por cada día que trabaja, pero se l[e] descuentan $ 60 por cada día que deja de trabajar. Luego d[e] 25 días cobró $ 6.900. ¿Cuántos días trabajó?

R.: 15 días

3) ¿Qué número es igual a su mitad, más la cuarta part[e] más su quinta parte más uno?

R.: 20

4) Dividir el número 48 en dos partes tales que sean entre s[í] como 7 es a 5.

R.: 28 y 20

5) Encontrar dos números consecutivos tales que su suma se[a] igual a 47.

R.: 23 y 24

6) ¿A qué hora después de las 12 se encontrarán las dos agujas e un reloj?

(Llámese x a la distancia que tiene que recorrer el horario y $60 + x$ la que tiene que recorrer el minutero.)

Resultado: 13 h. 5 m. 5/11.

R.: 13 h. 5 m. 5/11

7) Un comerciante vende la mitad de sus naranjas, más media naranja; luego la mitad de las que le quedan, más media naranja; y, por último, la mitad de lo que le quedaba, más media naranja, quedándose sin ninguna. ¿Cuántas naranjas vendió?

R.: 7 naranjas

8) Dividir 200 en dos partes tales que dividiendo la primera por 16 y la segunda por 10, la diferencia de los cocientes sea 6.

R.: 160 y 40

9) En un gallinero hay gallinas y conejos. ¿Cuántos animales hay de cada clase si hay 144 patas y 50 cabezas?

R.: 28 gallinas y 22 conejos

10) ¿Cuál es el número que aumentado en su mitad, en su cuarta parte, en su quinta parte y en su vigésima parte es igual a 200?

R.: 100

11) Un capataz quiere repartir una gratificación a sus peones; si da \$ 1.400 a cada uno le quedan \$ 2.800; si les da \$ 1.500 le faltan \$ 500. ¿Cuál es el valor de la gratificación y cuántos son los peones.

R.: \$ 49.000; 33 peones

12) Un estanciero vendió lo 5/7 de su tropilla de caballos; en seguida compró 12: teniendo entonces 48 caballos menos que al principio. ¿Cuántos tenía antes de la primera venta?

R.: 84 caballos

13) Dividir el número 60 en dos partes tales que su dife-rencia sea 4.

R.: 32 y 28

14) ¿Cuál es el largo de una pieza de género si la diferencia entre los $\frac{4}{5}$ y los $\frac{3}{4}$ es igual a 6 metros?

R.: 120 m.

15) En el centro de un estanque de base cuadrada que mide 12 metros de lado y que está completamente lleno de agua, crece una planta que se eleva un metro sobre el nivel del agua. Tirando la planta hacia el punto medio de un lado, la punta toca su borde. ¿Qué profundidad tiene el agua?

Aplíquese el teorema de Pitágoras:

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

R.: 17,50 m.

16) Una persona tiene impuesto la mitad de su capital al 3 %; la tercera parte al 5 % y el resto al 8 %. Gana en total \$ 43.200 anuales. ¿Qué capital tiene dicha persona?

R.: \$ 960.000

17) Un obrero puede hacer cierta obra en 8 días y trabajando junto con otro la concluirían en 6 días. ¿En qué tiempo la haría éste solo?

R.: 24 días

INECUACIONES

Recordemos que una *desigualdad* que contenga *variables* se denomina *inecuación*.

Propiedades de la ordenación de los números reales.

Al estudiar los números reales se estableció que en la recta numérica *"es menor que"* significa *"está a la izquierda de"*. Si a y b son dos números reales, *"a menor que b"* lo indicamos "$a < b$".

Decimos que la relación *"es menor que"* para los números reales es una *relación binaria,* ya que relaciona dos números.

Propiedad de comparación.

Si a y b son números reales es cierta solamente *una* de las siguientes relaciones:

$$a < b \quad ; \quad a = b \quad ; \quad b < a$$

Propiedad transitiva.

Si a, b y c son números reales, siendo

$$a < b \quad \wedge \quad b < c$$

$$\Rightarrow \qquad a < c$$

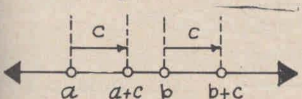
Conexión de la relación de ordenación con la operación de considerar opuestos.

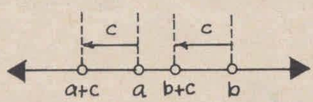
$$\text{Si} \quad \forall \ a \text{ y } b \text{ son números reales} \quad \wedge \quad a < b$$

$$\Rightarrow \quad -a > -b$$

Propiedad aditiva de la ordenación.

Vamos a indicar la suma y la ordenación en la recta numérica para inferir algunas propiedades.





Claro está que sumar un número positivo significa moverse hacia la derecha y sumar un número negativo implica moverse hacia la izquierda.

En la recta numérica consideremos dos puntos o números a y b, tales que $a < b$. Si a cada uno de los números a y b sumamos el mismo número c, nos moveremos hacia la derecha de a y de b, si c es positivo; hacia la izquierda, si c es negativo.

Imaginemos ahora que dos personas caminan sobre la recta numérica cargando entre ambos un tablón. Al principio el hombre en a está a la izquierda del hombre en b. Cuando caminan c unidades en *cualquier dirección,* como el largo del tablón es invariable, la persona de la izquierda seguirá a la izquierda. En su nueva posición el hombre de $(a + c)$ estará a la izquierda del que está en $(b + c)$, como ilustra el dibujo.

Se ha descubierto así una *propiedad de la ordenación*, válida para todos los números reales, la cual se enuncia así:

$$\forall\ a,\ b,\ c \text{ son números reales}$$

$$\text{Si} \qquad a < b \qquad \text{es} \qquad a + c < b + c$$

Esta propiedad se conoce con el nombre de *Propiedad aditiva de la ordenación.*

Ejemplo:

Siendo $a = -8 \;;\; b = -\frac{1}{4} \;\wedge\; c = \left\{-8 \,; \frac{1}{4} \,; 0 \,; -\frac{1}{4}\right\}$

reemplazando las letras de la propiedad por los distintos números del conjunto de validez:

1) Si $c = -8$

como
$$-8 < -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -8 - 8 < -\frac{1}{4} - 8$$

o sea
$$-16 < -\frac{33}{4} \qquad \text{(enunciado cierto)}$$

2) Si $c = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow -8 + \frac{1}{4} < -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$-\frac{31}{4} < 0 \qquad \text{(enunciado cierto)}$$

3) Si $c = 0$

$$\Rightarrow \quad -8 + 0 < -\frac{1}{4} + 0 \text{ (enunciado cierto)}$$

4) Si $c = -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad -8 - \frac{1}{4} < -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$-\frac{33}{4} < -\frac{1}{2} \qquad \text{(enunciado cierto)}$$

ropiedad multiplicativa de la ordenacion.

$\forall$, a, b y c números reales y dada la relación

$$a < b$$

amos a estudiar con algunos ejemplos la ordenación de los roductos

$$(a \cdot c) \quad \text{y} \quad (b \cdot c)$$

a) Dado que

$$4 < 10$$

ultiplicando ambos miembros por 3

s

$$12 < 30 \qquad \text{(enunciado cierto)}$$

b) Como

$$-5 < -2$$

ultiplicando ambos miembros por 4

s

$$-20 < -8 \qquad \text{(enunciado cierto)}$$

c) Dado que

$$3 < 12$$

ultiplicando ambos miembros por -2

s
$$\begin{cases} -6 < -24 & \text{(enunciado falso)} \\ -24 < -6 & \text{(enunciado cierto)} \end{cases}$$

d) Como

$$-5 < -2$$

multiplicando ambos miembros por -10

$$\text{es} \quad \begin{cases} +50 < +20 & \text{(enunciado falso)} \\ +20 < +50 & \text{(enunciado cierto)} \end{cases}$$

Los resultados anteriores sugieren que

Si $\forall, a, b, c$ números reales $\wedge \quad a < b$

se tiene

I)	$a \cdot c < b \cdot c \iff c > 0$	(c es número positivo)
II)	$b \cdot c < a \cdot c \iff c < 0$	(c es número negativo)

Resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnit

Sea la ecuación

$$-7x + 10 < 9x - 6$$

Para resolver este enunciado conviene tener en cuenta l *propiedades de la ordenación.*

Por la *propiedad aditiva* de la ordenación sumamos a amb miembros $(-10 - 9x)$

$$(-7x + 10) + (-10 - 9x) < (9x - 6) + (-10 - 9x)$$

Efectuando las operaciones indicadas, resulta

$$-16x < -16 \qquad \text{(a}$$

Este enunciado tiene el mismo conjunto de validez que el pr mitivo, es decir, es una *inecuación equivalente.*

Por la *propiedad multiplicativa* de la ordenación multiplic remos ambos miembros de (a) por $\left(-\frac{1}{16}\right)$; queda, por l propiedad II

$$+\frac{16}{16} < x$$

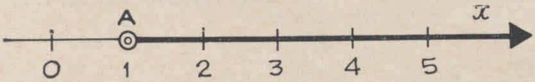
bien

$$\boxed{1 < x}$$

sea, el *conjunto de validez* de $1 < x$ es el conjunto de *todos* *s números mayores que uno, y éste es el conjunto de validez* *la inecuación primitiva.*

Representación gráfica de la inecuación:

$$-7x + 10 < 9x - 6$$



La semirrecta de origen A que no contiene al punto O representa al conjunto de validez de la inecuación dada. (Se excluye origen A.)

otación conjuntista.

La semirrecta pedida se representa así:

$\overrightarrow{\text{A)}}$ (O *conjunto de validez* (se excluye el origen A)

Resolver:

$$-8x - 5 < -8$$

Este enunciado es equivalente a

$$-8x - 5 + (+5) < -8 + (+5)$$
$$-8x < -3$$

Este, a su vez, por la propiedad II multiplicativa de la ordenación es equivalente a

$$\boxed{+\frac{3}{8} < x}$$

Así el *conjunto de validez de la inecuación dada está cons*-*tuido por el conjunto de los números mayores que* $\frac{3}{8}$.

EJERCICIOS

Resolver las inecuaciones siguientes:

a) $x + 15 < 30$

R.: $\{14, 13, 12, 11, \ldots\}$

b) $\frac{x}{2} > 20 - x$

R.: $\left\{ x/x \in \mathbf{R} \land x > 13\frac{1}{3} \right\}$

c) $7z + 2 > 5z - 1$

R.: $\left\{ z/z \in \mathbf{R} \land z > -\frac{3}{2} \right\}$

d) $\frac{x}{4} < 3 - \frac{x}{6} - 1$

R.: $\left\{ x/x \in \mathbf{R} \land x < 4\frac{4}{5} \right\}$

e) $9t + 3 < 0$

R.: $\left\{ t/t \in \mathbf{R} \land t < -\frac{1}{3} \right\}$

f) $9t - 3 > 0$

R.: $\left\{ t/t \in \mathbf{R} \land t < \frac{1}{3} \right\}$

20
-15 < -5
-20 + 5 < -5

g) $-2x + 5 < -5$

-12 + 5
-7 < -5

R.: $\{x/x \in \mathbf{R} \land x > 5\}$

h) $6 - 2x < 4x - 2$

R.: $\left\{ x/x \in \mathbf{R} \wedge x > \frac{4}{3} \right\}$

i) $\frac{2}{3} - \frac{5}{6} < -\frac{1}{6} - 3x$

R.: $\{x/x \in \mathbf{R} \wedge x < 0\}$

j) $\frac{x}{2} - 2 < -5 + \frac{5}{2}x$

R.: $\left\{ x/x \in \mathbf{R} \wedge x > \frac{3}{2} \right\}$

k) $-(2 + x) < 3 - 7$

R.: $\{x/x \in \mathbf{R} \wedge x > 2\}$

l) $4s + 7 - 2s > -2 + 5 - 3s$

R.: $\left\{ s/s \in \mathbf{R} \wedge s > -\frac{4}{5} \right\}$

m) $2x - 4 > 5x - 1$

R.: $\{x/x \in \mathbf{R} \wedge x < -1\}$

n) $\frac{5x}{6} - \frac{1}{3} < \frac{2x}{3} - 1$

R.: $\{x/x \in \mathbf{R} \wedge x < -4\}$

9 SISTEMA DE ECUACIONES Y DE INECUACIONES

Sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Al considerar la ecuación $5x - 4y = 2$ (1) se establece qu aisladamente admite infinidad de soluciones, cuyo cuadro d valores de x e y, obtenido luego de despejar una de las incóg nitas, es el siguiente conjunto de validez:

$$x = \{-2 \quad -6/5 \quad -2/5 \quad 2/5 \quad 6/5 \quad 0 \quad 1 \quad 6 \quad 2 \ldots\}$$
$$y = \{-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad -½ \quad ¾ \quad 7 \quad 2 \ldots\}$$

Vamos ahora a considerar la ecuación

$$2x + 3y = \frac{17}{4} \qquad (2)$$

que también tiene muchas soluciones, formándose un cuadro d valores como en la primera ecuación:

$$x = \{\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \quad ½ \ \ldots\}$$
$$y = \{17/12 \quad ¾ \quad 1/12 \quad 25/12 \quad 13/12 \ldots\}$$

Comparando estos pares de valores de x e y con los que obtu vimos de la ecuación (1) se observa que existe un par de valore $x = 1$, $y = \frac{3}{4}$ que verifica a ambas ecuaciones.

Las ecuaciones (1) y (2) $\begin{cases} 5x - 4y = 2 \\ 2x + 3y = \dfrac{17}{4} \end{cases}$

rman un *sistema,* siendo el conjunto de validez

$$x = 1,\ y = \frac{3}{4}$$

s raíces o solución del sistema. Por ello se acepta la siguiente

DEFINICIÓN. — *Se llama sistema de dos ecuaciones de primer rado con dos incógnitas a todo par de ecuaciones de primer rado con dos incógnitas que tengan raíces comunes.*

Se indica que dos ecuaciones forman un sistema escribiendo na debajo de la otra y colocando a la izquierda de las mismas na llave.

Sistema de ecuaciones determinado

Cuando un sistema de ecuaciones con dos incógnitas *sólo dmite un par de raíces comunes,* se llama *determinado.*

El sistema: $\begin{cases} 5x - 4y = 2 \\ 2x + 3y = \dfrac{17}{4} \end{cases}$

s determinado, pues sólo admite la solución $x = 1$, $y = 3/4$.

Expresión conjuntista

$$\left\{ 5x - 4y = 2 \cap 2x + 3y = \frac{17}{4} \right\} = \left\{ 1, \frac{3}{4} \right\}$$

Sistema de ecuaciones indeterminado

Existen sistemas de ecuaciones tales que los infinitos valores que satisfacen a una de las ecuaciones, satisfacen también a la otra y recíprocamente. Cuando sucede ésto el sistema se llama *indeterminado.*

Ejemplo de sistema indeterminado.

$$\begin{cases} 4x - \ \ 5y = 2 \\ 8x - 10y = 4 \end{cases}$$

NOTA. — La segunda ecuación, equivalente a la primera, se ha obtenido multiplicando ambos miembros de la primera ecuación por un número.

Verifique el lector que cualquier par de valores que satisface a la primera ecuación satisface también a la segunda.

Sistema de ecuaciones incompatible

Cuando un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas no admite ningún par de valores para las mismas, que lo satisfaga, se dice que el sistema es *incompatible*.

Ejemplo de sistema incompatible:

$$\begin{cases} 5x + 2y = \ \ 4 \\ 10x + 4y = 20 \end{cases}$$

$$\{(x\,;\,y) \,/\, (x\,;\,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \wedge 5x + 2y = 4\} \cap \quad (*)$$
$$\cap \{(x\,;\,y) \,/\, (x\,;\,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \wedge 10x + 4y = 20\} = \emptyset$$

NOTA. — Se ha obtenido este sistema incompatible multiplicando el primer miembro de la primera ecuación por un número, 2, y el segundo miembro por otro número, 5.

Sistema de ecuaciones equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones se llaman *equivalentes* cuando el mismo par de valores que satisface al primer sistema de dos ecuaciones, satisface también al segundo sistema; es decir, siendo ambos sistemas determinados, tienen las mismas raíces.

(*) El producto cartesiano **R** $\times$ **R** indica al conjunto de todos los puntos del plano cuando se lo representa por pares ordenados de *números reales* (coordenadas).

Ejemplo de sistemas equivalentes:

El sistema

$$\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 5x + y = 17 \end{cases}$$

es equivalente al sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

pues las raíces de ambos son $x = 3$ e $y = 2$.

Observación. — Generalmente, para que los sistemas de ecuaciones sean determinados deben tener tantas incógnitas como ecuaciones tenga el sistema. Así, un sistema de tres ecuaciones debe tener tres incógnitas, pues con más incógnitas resulta indeterminado. Puede suceder que en un sistema aparentemente determinado, una de las ecuaciones sea equivalente a otra, con lo que se tendría un sistema indeterminado.

RESOLUCION DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

Resolver un sistema consiste en hallar las raíces comunes de sus ecuaciones.

Distintos métodos se emplean para resolver analíticamente un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, los que se explicarán a continuación, aplicados en cada caso a un sistema numérico.

Método de reducción (Suma o resta)

Sea, por ejemplo, hallar la intersección del sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = -16 & (1) \\ 5x + 4y = 10 & (2) \end{cases}$$

Se multiplica la ecuación (1) por 5, que es el coeficiente de x de la ecuación (2), obteniéndose:

$$5 \cdot 3x - 5 \cdot 2y = 5 \cdot (-16)$$

o bien
$$15x - 10y = -80$$

Se multiplica luego la ecuación (2) por 3, coeficiente de la incógnita correspondiente en la primera ecuación, resultando:

$$3 \cdot 5x + 3 \cdot 4y = 3 \cdot 10$$

o sea

$$15x + 12y = 30$$

Por lo tanto, el sistema equivalente al dado es:

$$\begin{cases} 15x - 10y = -80 \\ 15x + 12y = 30 \end{cases}$$

Los coeficientes de x han resultado iguales. Se pretende ahora anular esta incógnita sumando o restando ambas ecuaciones.

Note el lector que si se sumaran las ecuaciones no se anularía el coeficiente de la incógnita x; corresponde, por lo tanto, efectuar una resta, es decir, cambiar los signos del sustraendo y luego realizar la suma indicada.

$$\begin{array}{rl} & 15x - 10y = -\ 80 \\ + & \\ & -15x - 12y = -\ 30 \\ \hline \end{array}$$

de donde

$$-22y = -110$$

luego

$$y = \frac{-110}{-22}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{y = +5}$$

Obtenido el valor de una de las incógnitas se debe ahora obtener el valor de la otra, para lo cual corresponde efectuar el mismo procedimiento anterior, igualando los coeficientes de y:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -16 \\ 5x + 4y = 10 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 4 y la segunda por 2 se tiene:

$$\begin{array}{lrl} & 12x - 8y = & -64 \\ & 10x + 8y = & 20 \\ \hline \text{sumando} & 22x = & -44 \end{array}$$

de donde
$$x = \frac{-44}{22}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x = -2}$$

Verificación. — Para comprobar que los valores hallados para x y para y son raíces del sistema, corresponde reemplazar en cada una de las ecuaciones las incógnitas por los valores hallados.

Verificación de los valores x = — 2 *e* y = 5 *en la primera ecuación:*

Primera ecuación:

$$3x - 2y = -16$$

Reemplazando x por -2 e y por $+5$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (+5) &= -16 \\ -6 - 10 &= -16 \\ -16 &= -16 \end{aligned}$$

Verificación de los valores x = — 2 *e* y = + 5 *en la segunda ecuación.*

Segunda ecuación:

$$5x + 4y = 10$$

Reemplazando x por (-2) e y por $(+5)$:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (-2) + 4 \cdot (+5) &= 10 \\ -10 + 20 &= 10 \\ 10 &= 10 \end{aligned}$$

NOTA. — *En algunos sistemas no es necesario multiplicar una ecuación por el coeficiente de una de las incógnitas de la otra ecuación, pues puede resultar más conveniente hacerlo por otro número, que permita la igualación de los coeficientes en forma más sencilla.*

Véase, por ejemplo, la resolución del sistema siguiente:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 7x + 6y = -1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right.$$

Se multiplica la primera ecuación por 3 y la segunda por 1:

$$\begin{cases} 15x + 6y = 12 \\ 7x + 6y = -1 \end{cases}$$

Donde se ve que los coeficientes de y están ya igualados. Como tienen el mismo signo corresponde restar ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{rl} 15x + 6y = & 12 \\ -\ 7x - 6y = & +\ 1 \\ \hline 8x \quad\quad = & 13 \\ \Rightarrow \quad x = & \dfrac{13}{8} \end{array}$$

KX1)

Una vez hallado el valor de una de las incógnitas, se obtiene el de la otra por cualquiera de estos procedimientos: o bien efectuando el mismo proceso, pero igualando los coeficientes de x, o bien reemplazando el valor hallado para x en una de las ecuaciones dadas y despejando luego el valor de y.

Por todo lo operado, se puede enunciar la siguiente

REGLA. — Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por el método de *reducción (suma o resta)* se procede de la siguiente forma:

1º *Se igualan los coeficientes de una de las incógnitas en* ambas ecuaciones, multiplicando éstas por números convenientes.

2º *Se suman o se restan las ecuaciones resultantes* con el opósito de que desaparezca una de las incógnitas al efectuar operación, obteniéndose una ecuación de primer grado con ıa sola incógnita.

3º *Se resuelve esta ecuación*, quedando determinada una de s raíces del sistema.

4º Para obtener el valor de la otra incógnita se puede seguir mismo procedimiento, pero igualando los coeficientes de la ıcógnita que ya se ha calculado.

5º Se averigua si el par de raíces halladas constituye la solu-ón del sistema.

Método de igualación

Nos proponemos ahora hallar la intersección del siguiente sis-ema, siguiendo otro método, llamado de igualación:

$$\begin{cases} 3x + y = -8 \\ 2x - 5y = -11 \end{cases}$$

Se despeja una de las incógnitas, x, por ejemplo, en ambas cuaciones del sistema:

n la 1ª ecuación:

$$x + y = -8$$

$$x = -8 - y$$

$$x = \frac{-8 - y}{3} \qquad (1)$$

En la 2ª ecuación:

$$2x - 5y = -11$$

$$2x = -11 + 5y$$

$$x = \frac{-11 + 5y}{2} \qquad (2)$$

Como en ambas ecuaciones la misma incógnita tiene el mis-no valor, los primeros miembros de las igualdades (1) y (2) on iguales; por lo tanto, también serán iguales los segundos niembros:

$$\frac{-8 - y}{3} = \frac{-11 + 5y}{2}$$

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones se tiene:

$$2\,(-8-y)=3\,(-11+5y)$$

de donde

$$-8\cdot 2-y\cdot 2=-11\cdot 3+5y\cdot 3$$

o sea

$$-16-2y=-33+15y$$

Agrupando los términos en y en un miembro y los términos independientes en el otro:

$$-2y-15y=-33+16$$

luego

$$-17y=-17$$

o sea

$$y=\frac{-17}{-17}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{y=+1}$$

Encontrado ya el valor de y, se reemplaza en (1) y se tiene:

$$x=\frac{-8-y}{3}$$

luego

$$x=\frac{-8-(+1)}{3}=\frac{-8-1}{3}$$

de donde

$$x=\frac{-9}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x=-3}$$

Verifique el lector en la misma forma que se indicó en el caso anterior, si los valores hallados para las incógnitas satisfacen a ambas ecuaciones del sistema.

De acuerdo al procedimiento empleado se puede enunciar la siguiente

REGLA. — Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por el método de *igualación*, se procede de la siguiente forma:

1º *Se calcula el valor de una misma incógnita en ambas ecuaciones,* en función de la otra, la cual se supone conocida.

2º *Se igualan los segundos miembros* de las expresiones obtenidas, quedando determinada una ecuación de primer grado con una sola incógnita.

3º *Se calcula el valor de la incógnita* que se supuso conocida.

4º Se reemplaza este valor hallado en una de las ecuaciones del sistema, obteniéndose una ecuación de primer grado con una incógnita, cuya resolución nos da la otra raíz del sistema.

5º Se efectúa la verificación.

Método de sustitución

Sea hallar las raíces del siguiente sistema por el método de sustitución:

$$\begin{cases} 4x - y = 12 \\ 2x + 3y = -8 \end{cases}$$

Se despeja una de las incógnitas, x, por ejemplo, en una de las ecuaciones:

$$4x = 12 + y$$

de donde

$$x = \frac{12 + y}{4} \qquad (1)$$

Se *sustituye* el valor hallado en la otra ecuación

$$2\cdot\left(\frac{12+y}{4}\right)+3y=-8$$

$$\frac{24+2y}{4}+3y=-8$$

Multiplicando ambos miembros por el denominador 4:

$$4\cdot\left(\frac{24+2y}{4}\right)+4\cdot 3y=4\cdot(-8)$$

luego

$$24+2y+12y=-32$$

Agrupando los términos independientes y los términos que contienen la incógnita

$$14y=-32-24$$

luego

$$y=\frac{-56}{14}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y=-4}$$

Reemplazando el valor hallado para y en (1), resulta:

$$x=\frac{12+(-4)}{4}=\frac{12-4}{4}=\frac{8}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x=2}$$

Verifique el lector en la misma forma que se hizo anteriormente, si los valores hallados para las incógnitas satisfacen a ambas ecuaciones del sistema.

De acuerdo al procedimiento empleado se puede enunciar la siguiente

Regla. — Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por el método de *sustitución*, se procede de la siguiente forma:

1º *Se calcula el valor de una de las incógnitas* en función de la otra en una de las ecuaciones del sistema.

2º *Se reemplaza el valor hallado* por la incógnita correspondiente *en la otra ecuación*, obteniéndose una ecuación de primer grado con una sola incógnita.

3º *Resolviéndola* queda determinada una de las raíces del sistema.

4º En una de las ecuaciones del sistema *—la más conveniente—* se reemplaza la raíz hallada, obteniéndose así una ecuación de primer grado con una incógnita.

5º Se resuelve dicha ecuación, quedando así determinada la otra raíz del sistema.

6º Se efectúa la verificación.

Resolución de un sistema de dos ecuaciones literales de primer grado con dos incógnitas

Sea *resolver por cualquiera de los métodos* anteriores el sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$$

Empleando el método de reducción:

$$n \cdot ax + n \cdot by = n \cdot c$$

Se multiplicaron ambos miembros de la primera ecuación por n.

$$b \cdot mx + b \cdot ny = b \cdot p$$

Se multiplicaron ambos miembros de la segunda ecuación por b.

Restando y simplificando, resulta

$$nax - bmx = nc - bp$$

Sacando x como factor común

$$x(na - bm) = nc - bp$$

Pasando el paréntesis al segundo miembro como divisor se tiene:

$$x = \frac{nc - bp}{na - bm} \qquad (1)$$

Calculemos la otra incógnita igualando los coeficientes de x

$$a \cdot mx + a \cdot ny = ap$$

Se multiplicaron ambos miembros de la segunda ecuación por a.

$$m \cdot ax + m \cdot by = mc$$

Se multiplicaron ambos miembros de la primera ecuación por m.

Restando y simplificando, resulta

$$any - mby = ap - mc$$

Sacando y como factor común

$$y(an - mb) = ap - mc$$

Pasando el paréntesis al segundo miembro como divisor, se tiene:

$$y = \frac{ap - mc}{an - mb} \qquad (2)$$

Las fórmulas (1) y (2) permiten hallar el valor de cada una de las incógnitas reemplazando los coeficientes literales por los coeficientes numéricos del sistema que se dé como jercicio.

Para recordar dichas fórmulas se utiliza el

Método de los determinantes

Un binomio como $an - bm$ suele expresarse con el símbolo

$\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}$ y se llama *determinante de 2º orden.*

En consecuencia, un determinante, por ejemplo $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}$ representa los productos cruzados

$$3 \cdot 8 - 5 \cdot (-4) = 24 + 20 = 44$$

$$\text{o sea} \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 44$$

Vamos a ver ahora como se puede resolver el sistema anterior

$$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$$

estando los valores de las incógnitas dados por las fórmulas

$$x = \frac{cn - bp}{an - bm} \ (1) \quad ; \quad y = \frac{ap - cm}{an - bm} \ (2)$$

Con la introducción de los determinantes de 2º orden pueden representarse las fórmulas (1) y (2) de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ p & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}} = \frac{cn - bp}{an - bm}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}} = \frac{ap - cm}{an - bm}$$

Para recordar daremos la siguiente

Regla, *llamada de* Cramer (*). — *El valor de cada una de las raíces de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se determina formando una fracción que tenga por denominador el determinante compuesto por los coeficientes de las incógnitas, escritos en columna, y por numerador, al determinante que resulta de reemplazar en el anterior la columna de los coeficientes de la incógnita que se quiere calcular por la de los términos independientes.*

Ejemplo de aplicación.

Resolver por el método de los determinantes el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 7x - 8y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Cálculo de x:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3 \times 1 - 4 \times (-8)}{7 \times 1 - 2 \times (-8)} = \frac{3 + 32}{7 + 16}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{35}{23}$$

Cálculo de y:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7 \times 4 - 2 \times 3}{7 \times 1 - 2 \times (-8)} = \frac{28 - 6}{7 + 16}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{22}{23}$$

Gabriel Cramer (1704-1752). De origen suizo, fue profesor de matemáticas en Ginebra. Su obra más importante, *Tratado sobre curvas algebraicas*. Prosiguió el estudio de los determinantes, introducidos por Leibnitz.

)BSERVACIONES.

I) Siendo iguales los determinantes de los denominadores, na vez calculado el denominador para una de las incógnitas no ay necesidad de calcularlo para la otra.

II) Es necesario que el determinante formado por los coefi- ientes de las incógnitas sea distinto de cero para que el sistema enga una sola solución.

EJERCICIOS

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 4x + y = 14 \end{cases}$ R.: $x = 3$; $y = 2$

b) $\begin{cases} 4x - y = 15 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$ R.: $x = \dfrac{38}{11}$; $y = -\dfrac{13}{11}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{4}y = 5 \\ x + \dfrac{3}{2}y = 12 \end{cases}$ R.: $x = 6$; $y = 4$

d) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -3y = 6 \end{cases}$ R.: $x = 2$; $y = -2$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - y = 2 - 3x \\ \dfrac{4}{3}x = 2y - 1 \end{cases}$ R.: $x = \dfrac{15}{17}$; $y = \dfrac{37}{34}$

f) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + y = -2 \end{cases}$ R.: $x = \dfrac{7}{2}$; $y = \dfrac{3}{2}$

g) $\begin{cases} \dfrac{1}{5}x - y = -2 \\ 4x + \dfrac{y}{4} = 41 \end{cases}$ R.: $x = 10$; $y = 4$

h) $\begin{cases} -2x = 3y \\ 2y - x = 4 \end{cases}$ R.: $x = -\dfrac{12}{7}$; $y = \dfrac{8}{7}$

i) $\begin{cases} x + y = 50 \\ \dfrac{x}{y} = 4 \end{cases}$ R.: $x = 40$; $y = 10$

j) $\begin{cases} 4x + 3y - 27 = 0 \\ 6x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$ R.: $x = 3$; $y = 5$

k) $\begin{cases} 7x - 16y + 2 = 0 \\ x - 9y + 7 = 0 \end{cases}$ R.: $x = 2$; $y = 1$

l) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{10} + \dfrac{y-4}{6} = x - 7 \\ \dfrac{x+5}{7} - \dfrac{y-7}{3} = 3y - x \end{cases}$ R.: $x = \dfrac{461}{59}$; $y = \dfrac{212}{59}$

m) $\begin{cases} 5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 8 \\ 3\sqrt{x} - 7 = -4\sqrt{y} \end{cases}$ R.: $x = 1$; $y = 1$

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

Numerosos problemas tienen solución mediante la aplicació de los sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incóg nitas. En ellos, como en los problemas de primer grado con un incógnita, tenemos que considerar tres partes, que son:

1ª *Interpretar el enunciado para ponerlo bajo la forma de n sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógitas.*

2ª *Resolver el sistema planteado.*

3ª *Discutir la posibilidad de la solución hallada.*

ROBLEMA I.

Descomponer el número 80 en dos partes tales que su razón ea igual a 3.

Obtención del sistema de ecuaciones correspondiente.

Llamando x a una de las partes, e y a la otra, su suma debe er igual a 80, por lo tanto $x + y = 80$ y su cociente igual a 3, sea $\frac{x}{y} = 3$, de donde $x = 3y$, o bien $x - 3y = 0$.

Por lo tanto, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Mediante uno cualquiera de los métodos de resolución explicados se obtiene la solución, que es $x = 60$, $y = 20$.

Evidentemente el resultado es posible, cumpliéndose que la suma de las raíces es 80 y su cociente es 3.

PROBLEMA II.

Hallar dos números sabiendo que su suma es 78 y su diferencia 6.

Obtención del sistema de ecuaciones correspondiente.

Llamando x e y a los números; el sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 78 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

cuya solución es $x = 42$, $y = 36$.

PROBLEMA III.

Hallar el número de tornillos que poseen dos operarios, sabiendo que si el primero da 9 tornillos al segundo, ambos tienen igual cantidad, que si el segundo da 6 de sus tornillos al primero, éste tiene el duplo de lo que le queda al segundo.

Obtención del sistema de ecuaciones correspondiente.

Llamando x e y a los tornillos que cada uno de los operarios posee, y teniendo en cuenta que al dar el primero 9 tornillos al segundo, x disminuye en 9 unidades e y las aumenta, y que se obtienen cantidades iguales, resulta:

$$x - 9 = y + 9, \quad \text{o bien} \quad x - y = 9 + 9$$

luego $x - y = 18$ es la primera ecuación.

Si el segundo operario da 6 tornillos al primero, éste aumenta en 6 unidades, que el segundo disminuye, teniendo entonces el primero un número de tornillos igual a dos veces lo que tiene el segundo; luego

$$x + 6 = 2\,(y - 6), \quad \text{o bien} \quad x + 6 = 2y - 12,$$

de donde $x - 2y = -12 - 6$, o sea $x - 2y = -18$ es la segunda ecuación.

El sistema, por lo tanto, es el siguiente:

$$\begin{cases} x - y = 18 \\ x - 2y = -18 \end{cases}$$

cuya solución es $x = 54$, $y = 36$.

Verifique el lector si la solución dada satisface al enunciado del problema.

PROBLEMA IV.

Dadas dos dínamos de corriente continua tales que conectadas de un cierto modo sus tensiones se sumen, produciendo una nsión de 48 voltios, y al conectarse en oposición, se obtengan 2 voltios, se desea saber cuál es la tensión de cada generatriz.

$$x + y = 48 \quad (1)$$

$$x - y = 12 \quad (2)$$

Sumando (1) y (2): $2x = 60$

$$x = \frac{60}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = 30 \textit{ voltios}$$

Restando (1) y (2): $2y = 36$

$$y = \frac{36}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = 18 \textit{ voltios}$$

Problemas

—Repartir 800 $ en partes directamente proporcionales a 3 y 5.

R.: 300 y 500

—Dividir el número 600 en forma inversamente proporcional a 4 y 8.

R.: 200 y 400

—¿Qué edad tendrán dos personas si la tercera parte de la edad de la primera más la edad de la segunda suman 30 años, siendo la edad de la primera más la mitad de la de la segunda igual a 45 años?

R.: 36 y 18

—Dos clases tienen un número tal de alumnos que si se pasan 7 alumnos de la primera a la segunda clase tienen el mismo número, pero si se pasan 7 de la segunda a la primera, en ésta habrá el triplo del número de alumnos de la segunda. ¿Cuántos alumnos hay en cada clase?

R.: 35 y 21

— Dos depósitos abastecen a un estanque que puede conten 60 metros cúbicos de agua; cada depósito sólo no puede llen el estanque, pero sí los dos juntos de las siguientes maneras el primero llenaría el estanque junto con las dos terceras parte del agua que tiene el segundo, y éste podría llenarlo con las tre cuartas partes del agua del primero. Dígase cuántos metr cúbicos de agua contiene cada depósito.

R.: 40 y 30

— Divídase 1836 en dos partes, de modo que la parte primer sea los $\frac{5}{4}$ de la parte segunda

R.: 816 y 1020

— Un número está formado por dos cifras, siendo la suma d sus valores absolutos igual a 9; cuando se invierte el orden d las cifras, se obtiene un segundo número que excede en 9 a cuádruplo del primero. ¿Cuál es este número?

R.: 18

— Hallar la edad de una persona y la de su hijo sabiend que la suma de esas edades es la mitad de la que tendrán a cabo de 25 años, y la diferencia es la tercera parte de la sum de las que tendrán dentro de 20 años.

R.: 40 y 10

— Un joven preguntó a su padre qué edad tenían ambos, a lo que el padre contestó: hace 3 años que la undécima parte d mi edad era igual a la tercera parte de la tuya, y dentro de años, tres veces la quinta parte de tu edad equivaldrá a la cuar- ta parte de la que yo tenga, menos un año. ¿Cuántos años tenía ambos?

R.: 15 años y 47 años

— Entre las cincuenta personas de una reunión se recolecta $ 18.300, habiendo puesto los hombres $ 400 cada uno y las muje- res $ 300 cada una. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres había?

R.: 33 y 17

Sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

Determinantes de tercer orden.

Definición. — Se llama *determinante de tercer orden* a un uadro compuesto de nueve números dispuestos en tres filas y res columnas.

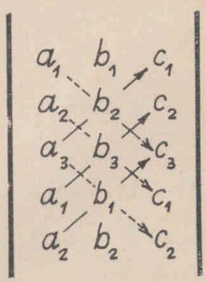
$$
\begin{array}{cc}
\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{fila} \\ \leftarrow \text{fila} \\ \leftarrow \text{fila} \end{array} \\
\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} & \\
\text{columnas} &
\end{array}
$$

Producto diagonal.

Dado un determinante de orden tres al cual se le agregan ordenadamente las dos primeras filas, se llama *producto diagonal* del mismo a los productos formados por tres factores, tomados de modo tal que en cada uno de esos productos figure un elemento de cada fila y uno de cada columna, pero no dos de una misma fila o columna.

Producto diagonal principal o descendente.

$$a_2 \times b_3 \times c_1$$
$$a_1 \times b_2 \times c_3$$
$$a_3 \times b_1 \times c_2$$



Producto diagonal secundario o ascendente.

$$a_3 \times b_2 \times c_1$$
$$a_1 \times b_3 \times c_2$$
$$a_2 \times b_1 \times c_3$$

Regla de Sarrus. — *El valor de un determinante de tercer orden es igual a la suma algebraica de todos sus productos diago-*

nales, tomados con su signo o con signo contrario, según que lo productos diagonales sean principales o secundarios, respectiva-mente.

Ejemplos:

a) Resolver

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando la regla de Sarrus, resulta

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 1 + 6\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 8 - 1\cdot 0\cdot 4 - 2\cdot 1\cdot 8 - 6\cdot 1\cdot 1$$

$$= 24 + 8 - 16 - 6 = 10$$

b) Resolver

$$\triangle = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 0{,}2 & 5 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 0{,}2 & 5 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 0{,}2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + \frac{3}{4} + 0 + 0{,}1 - 15 + 0 = -14{,}15$$

Resolución de un sistema de primer grado con tres incógnitas.

Método de determinantes.

Sea el sistema

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 3x+5y+z=18 \\ 4x+y+2z=12 \end{cases}$$

REGLA. — *El valor de cada incógnita está dado por una fracción que tiene por denominador el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas y por numerador el determinante que resulta de reemplazar en el denominador la columna de los coeficientes de la incógnita que se quiere hallar por la columna de los términos independientes.*

Luego

$$x=\frac{\triangle x}{\triangle}=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 18 & 5 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=3$$

$$y=\frac{\triangle y}{\triangle}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 18 & 1 \\ 4 & 12 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=2$$

$$z=\frac{\triangle z}{\triangle}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 18 \\ 4 & 1 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=-1$$

EJERCICIOS

a) $\begin{cases} 5x + 3y - 4z = -15 \\ 2x - 5y + 7z = \quad 47 \\ 3x + 4y + 2z = \quad 2 \end{cases}$ R.: $x = 2$; $y = -3$; $z = 4$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = \dfrac{61}{144} \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{52}{144} \\ \dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{3} = \dfrac{29}{144} \end{cases}$ R.: $x = \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1}{3}$; $z = \dfrac{1}{4}$

c) $\begin{cases} -x + \dfrac{1}{3}y = 1{,}5 + 2z \\ 3y + z + x = 18 \\ 2x + 0{,}5y - 4x = 0 \end{cases}$ R.: $x = -0{,}5$; $y = 6$; $z = 0{,}5$

d) $\begin{cases} -x + \dfrac{1}{3}y = 1{,}5 + 2x \\ x - 5y + 4z = 40 \\ 2z = 10 - 3x + y \end{cases}$ R.: $x = -1$; $y = -5$; $z = 4$

e) $\begin{cases} 5x - 6y - 3z = 12 \\ 4x + y + 6z = -4 \\ 12x - 8y - z = 23 \end{cases}$ R.: $x = 3$; $y = 2$; $z = -3$

f) $\begin{cases} x + 8y - z = 0 \\ 3x - 4z = -3 \\ 2x + y + 2z = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$ R.: $x = -\dfrac{1}{3}$; $y = -1$; $z = 0{,}5$

SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA

Dos o más inecuaciones, con respecto a la misma variable, forman un sistema cuando están conectadas entre sí en forma tal que admiten soluciones comunes.

I) Sea el sistema formado por las inecuaciones

$$\begin{cases} 6x - 6 < 0 & \text{(a)} \\ x - 3 > 4x + 3 & \text{(b)} \end{cases}$$

Resolución del enunciado abierto (a):

$$6x - 6 + 6 < 0 + 6$$

$$6x < 6$$

$$6x \cdot \frac{1}{6} < 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$x < 1 \qquad \text{(c)}$$

Resolución del enunciado abierto (b):

$$x - 3 > 4x + 3$$

$$x - 3 + (3 - 4x) > 4x + 3 + (3 - 4x)$$

$$-3x > 6$$

$$-3x \cdot (-1) < 6 \cdot (-1)$$

$$3x < -6$$

$$3x \cdot \frac{1}{3} < -6 \cdot \frac{1}{3}$$

$$x < -2 \qquad \text{(d)}$$

De (c) y (d) se deduce que las inecuaciones se satisfacen para todo valor de x menor que -2, ya que si $\qquad x < -2 \qquad$ y dado que $\qquad -2 < 1$

es

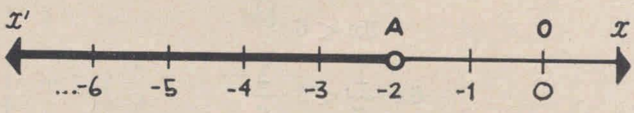
$$\boxed{x < -2}$$

Expresión conjuntista de la solución del sistema dado.

$$\{x/x \in \mathbf{R} \wedge 6x - 6 < 0\} \cap \{x/x \in \mathbf{R} \wedge x - 3 > 4x + 3\} =$$
$$= \{x/x \in \mathbf{R} \wedge x < -2\}$$

Representación gráfica.

El conjunto representado por la semirrecta $\overrightarrow{\mathbf{AX}'}$ satisface al sistema dado



II) Resolver el sistema o hallar la intersección de las inecuaciones

$$\begin{cases} 4x < 5 & \text{(a)} \\ -3 < 4x - x & \text{(b)} \end{cases}$$

El conjunto de validez de (a) se determina así:

$$4x \cdot \frac{1}{4} < 5 \cdot \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{5}{4} \qquad \text{(c)}$$

El conjunto de validez de (b) se obtiene así:

$$-3 < 4x - x$$

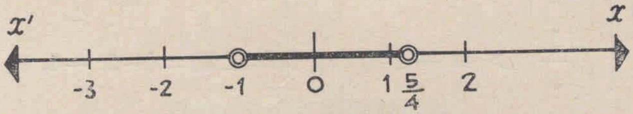
$$-3 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) < 3x \cdot \left(+\frac{1}{3}\right)$$

$$-1 < x \qquad \text{(d)}$$

De (c) y (d), resulta

$$-1 < x < \frac{5}{4}$$

or lo tanto, la *intersección* del sistema es el conjunto de los úmeros comprendidos entre -1 y $\frac{5}{4}$.



Si el dominio de validez de x es el conjunto **Q** de los números racionales, o el **R** de los reales, el sistema admite infinitas soluciones.

Si, en cambio, el dominio es el **Z** de los números enteros, la intersección es

$$\{0, 1\}$$

Expresión conjuntista del sistema.

$$\{x/x \in \mathbf{Z} \wedge 4x < 5\} \cap \{x/x \in \mathbf{Z} \wedge -3 < 4x - x\} =$$
$$= \{0, 1\}$$
$$= \left\{ x/x \in \mathbf{R} \wedge -1 < x < \frac{5}{4} \right\}$$

$$\text{III)} \begin{cases} 8x - 2 < 2 - 6x \\ 9 + x > 5 + \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\text{R.:} \begin{cases} x/x \in \mathbf{R} \wedge \dfrac{2}{7} > x > -8 \\ \end{cases}$$

$$\{x/x \in \mathbf{Z}\} = \{0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7\}$$

$$\text{IV)} \begin{cases} -\dfrac{5}{2}x > 4 - x \\ \dfrac{1}{5} \quad > 4x - 1 \end{cases}$$

R.: $\left\{x/x \in \mathbf{R} \wedge \dfrac{3}{10} > x < -\dfrac{8}{3}\right\}$

$\{x/x \in \mathbf{Z}\} = \{-3, -4, -5, \ldots\}$

$$\text{V)} \begin{cases} -\dfrac{5}{2}x < 4 - x \\ \dfrac{1}{5} \quad > 4x - 1 \end{cases}$$

R.: $\left\{x/x \in \mathbf{R} \wedge \dfrac{3}{10} > x > -\dfrac{8}{3}\right\}$

$\{x/x \in \mathbf{Z}\} = \{-2, -1, 0\}$

$$\text{VI)} \begin{cases} -\dfrac{x}{2} < 4 \\ 5x < 10 \end{cases}$$

R.: $\{x/x \in \mathbf{R} \wedge -8 < x < 2\}$

$\{x/x \in \mathbf{Z}\} = \{-7, -6, -5, \ldots\}$

$$\text{VII)} \begin{cases} -\dfrac{x}{2} < 4 \\ 5x \geqslant 10 \end{cases}$$

R.: $\{x/x \in \mathbf{R} \wedge -8 < x \geqslant 2\}$

$\{x/x \in \mathbf{Z}\} = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$$\text{VIII)} \begin{cases} x \geqslant 2 \\ -x \geqslant 1 \end{cases}$$

R.: $\{x \geqslant 2 \cap -x \geqslant 1\} = \varnothing$

REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES 10

Variables y constantes

Se denomina *variable* todo símbolo que represente indistinta-
ıente cada uno de los números de un conjunto.

Ejemplos de variables: el precio de un producto, el tiempo, etc.

Se llama *constante* todo símbolo que represente un solo nú-
ıero de un conjunto.

Ejemplos de constantes: el número 6, 5 toneladas, etc.

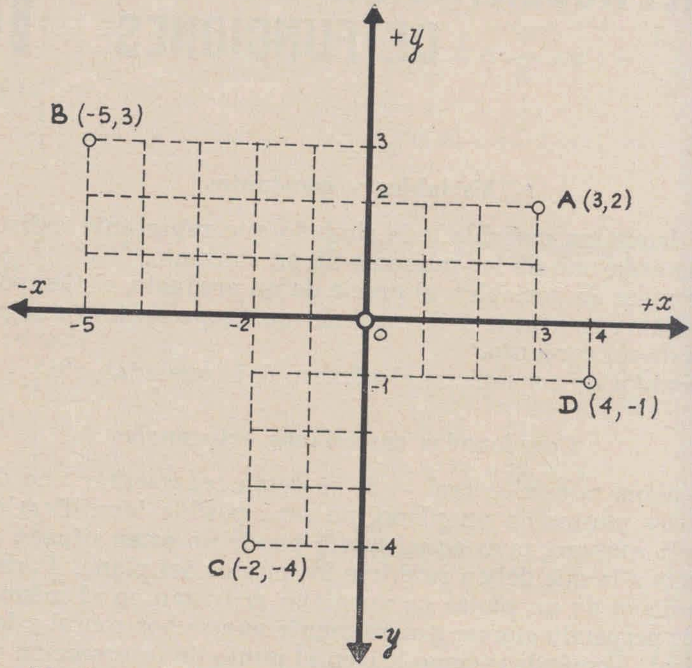
Coordenadas cartesianas ortogonales

El plano numérico real. — Si se desea representar uno de los nfinitos puntos de un plano, no será posible identificarlo con ın solo número, pues aquel punto puede no estar situado sobre a recta a la que deben referirse los puntos del plano. Para *fijar a posición de un punto en un plano* se trazan en el mismo dos ectas perpendiculares; generalmente una es horizontal y la otra vertical. Tomándose como origen el punto de intersección de las mismas, se señalan en ellas los puntos correspondientes a los números enteros —positivos y negativos— habiendo fijado previamente un segmento unidad. Generalmente el eje horizontal recibe el nombre de *eje de la equis*, llamándose *abscisas* los números correspondientes a él, recibiendo el nombre de *eje de las íes* el eje vertical, llamándose *ordenadas* sus números correspondientes. En el eje de las equis se consideran abscisas positivas las que figuran a la derecha del origen y negativas las que figuran a la izquierda. En el eje de las íes se consideran ordenadas positivas las que figuran sobre el origen, y negativas las situadas

debajo de él. El conjunto de abscisa y ordenada de un pun
recibe el nombre de *coordenadas del punto.*

Ejercicio:

Fijar la posición de los siguientes puntos: **A** ≡ (3/2), que
lee coordenadas $x = +3$, $y = +2$; **B** ≡ (— 5/3); **C** ≡ (— 2/—
D ≡ (4/— 1).



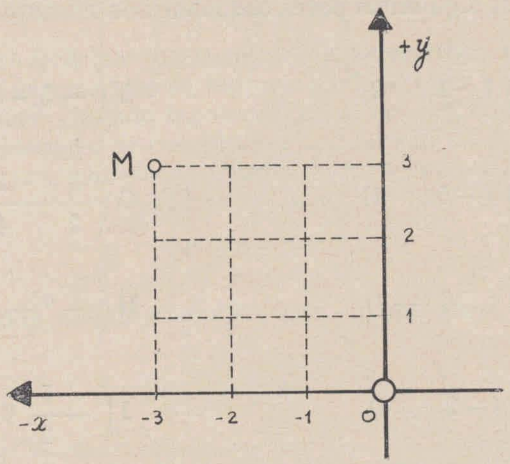
Para fijar la posición del punto **A** ≡ (3/2), por ejemplo, se de
termina la abscisa 3 y por ella se traza la paralela al eje y; lueg
se determina la ordenada 2, y por ella se traza la paralela a
eje x. El punto de intersección de ambas paralelas a los ejes e
el punto **A** buscado.

Análogamente se determinan los otros puntos pedidos.

Determinación de las coordenadas de un punto dado.

En los casos anteriores se ha encontrado el punto dadas su
coordenadas. Se puede, recíprocamente, *dado el punto encon*

trar sus coordenadas. Para ello se trazan desde el punto dado las paralelas a los ejes, y en éstos quedan determinados números que expresan las coordenadas del punto.



En el caso de la figura, dado el punto **M** se han encontrado sus corddenadas, que son:

$$x = -3 \qquad y = +3$$

De acuerdo a lo visto anteriormente puede admitirse que:

Dados dos números en un cierto orden, corresponde a ellos un solo punto del plano; y recíprocamente: Dado un punto en un plano le corresponden a él solamente dos números.

El sistema de ejes que se utiliza para determinar los puntos de un plano se llama de *coordenadas cartesianas ortogonales* (*).

(*) El *sistema* se llama *ortogonal* porque sus ejes son *perpendiculares.*

Fue ideado por el célebre filósofo y matemático del siglo XVII, *Renato Descartes,* conocido también con el nombre de Cartesio, lo que ha dado origen a la palabra *"cartesianas".*

La correspondencia entre los números y los puntos constituye una importante orientación dada a las Matemáticas por Descartes, siendo el origen de la Geometría Analítica, la cual reemplaza los puntos por números y opera algèbraicamente con éstos, interpretando luego geométricamente el resultado.

Problemas

I) Utilizando los ejes coordenados localizar los puntos asociados con los siguientes pares ordenados de números:

A $(1, \quad 2)$ **F** $\left(-5, -\frac{1}{2}\right)$

B $(-5, \quad 4)$ **G** $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)$

C $(0, -7)$ **H** $\left(-3 - \frac{3}{4}\right)$

D $(-2, \quad 0)$ **I** $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

E $(0, \quad 0)$ **J** $(0{,}4, -1)$

II) Marcar los puntos con coordenadas:

$$(3, -1) \quad ; \quad (3, -2) \quad ; \quad (3, 0) \quad ; \left(3, \frac{1}{2}\right) ;$$

$$(3, 4{,}5) \quad ; \quad (3, 4)$$

Describir el conjunto de todos los puntos cuyos pares ordenados tienen abscisa igual a 3.

III) Si se localizan varios puntos cuyos pares ordenados tengan ordenada igual a 2, ¿dónde estarán esos puntos?

IV) Localizar con referencia a un sistema de ejes coordenados 6 puntos que tengan las ordenadas iguales. ¿Qué figura formarán?

Representación gráfica de enunciados abiertos: Ecuaciones

Graficar el enunciado abierto

$$3x + 2y = 4$$

Vamos a convenir en que siempre que se escriba un enunciado abierto con dos variables se indique cuál de ellas se ha de considerar primero. Cuando las variables son x e y, como en nuestro ejemplo, siempre se considerará primero la x.

Para graficar el enunciado abierto dado, despejamos y, sumando a ambos miembros $-3x$, y se tiene

$$2y = 4 - 3x$$

Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{2}$, resulta

$$y = \frac{4 - 3x}{2} \qquad (1)$$

Se obtiene con esto una función llamada lineal en la que y es función de x, es decir, el valor de y depende del que se asigne a x, y como x puede tener cualquier valor, obtendremos infinitos valores para y.

En consecuencia, los pares de números que satisfacen la ecuación propuesta son también infinitos. Las representaciones gráficas de esos pares de valores son puntos que *comprobaremos* están situados todos sobre una misma recta. Esta recta constituye la *representación gráfica de la ecuación dada* (*).

Obtengamos ahora algunos de los pares de valores que corresponden a las incógnitas de la ecuación anterior (1).

Dándole a x un valor cualquiera, 2, por ejemplo, se tiene:

$$y = \frac{4 - 3 \cdot (2)}{2} \text{ o sea, } y = \frac{4 - 6}{2} \text{ o bien, } y = \frac{-2}{2}$$

$$\text{de donde } y = -1$$

(*) En Matemática superior *se demuestra que la representación gráfica* de los infinitos pares de valores que satisfacen a una ecuación de primer grado con dos incógnitas *es una línea recta.*

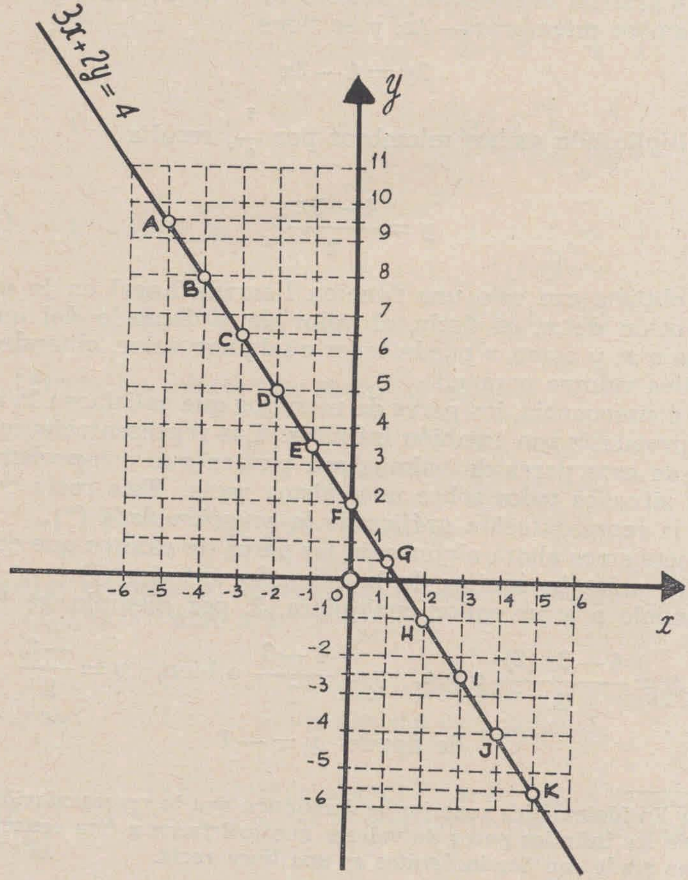
El primer par de valores obtenidos, el cual representa un punto de la recta, es: $x = 2$, $y = -1$.

Démosle a x otro valor cualquiera, -4, por ejemplo.

Reemplazando en (1):

$$y = \frac{4 - 3 \cdot (-4)}{2}; \text{ o sea, } \quad y = \frac{4 + 12}{2}; \text{ o bien, } \quad y = \frac{+16}{2}$$

$$\text{de donde} \quad y = +8$$



El segundo par de valores obtenidos es: $x = -4$, $y = +8$.

Análogamente se podrían obtener otros pares de valores correspondientes a la ecuación dada, algunos de los cuales figuran en la siguiente tabla en la que se indica la letra asignada a cada punto.

Valores de x	-5	-3	-1	0	2	5
Valores de y	$19/2$	$13/2$	$7/2$	2	-1	$-11/2$
Puntos correspondientes	A	C	E	F	H	K

La recta que une los puntos representativos de estos pares de valores constituye la representación gráfica de la ecuación dada, que es una *función lineal.*

Gráfico de conversión de monedas.

El día x en el Mercado de Cambios, al cerrar sus operaciones, se cotizó la compra de un dólar norteamericano en \$ 350. Construir la gráfica que permita la conversión de dólares en pesos moneda nacional y recíprocamente.

Planteamiento:

1 dólar	cuesta	\$ 350
x dólares	costarán	\$ y

$$\rightarrow \qquad \frac{1}{x} = \frac{350}{y}$$

o bien

$$\boxed{y = 350 \cdot x}$$

que es una función lineal y permite convertir los dólares norteamericanos en pesos moneda nacional.

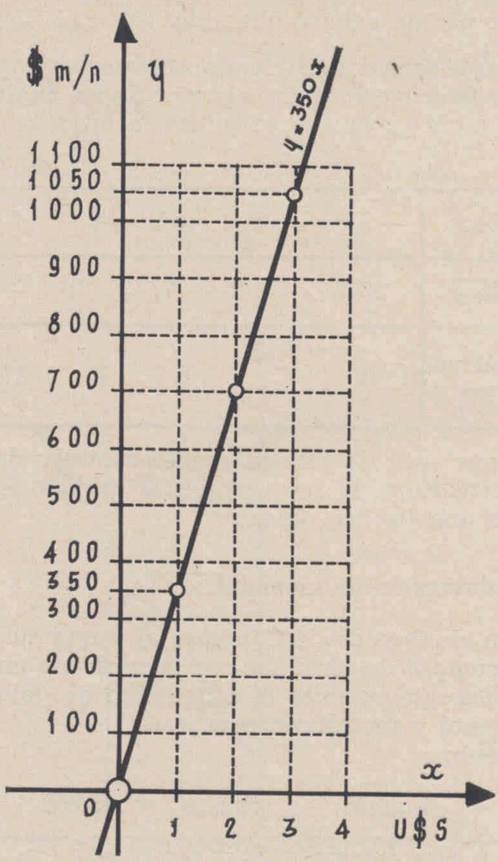


TABLA DE VALORES

x	0	1
y	0	350

Calcular empleando este gráfico:

a) ¿Cuántos dólares se obtienen con $ 700?

b) ¿Cuántos pesos moneda nacional se compran con 3 dólares?

R.: a) 2 dólares
b) $ 1050.

Representación gráfica de enunciados abiertos: Inecuaciones

Nos proponemos representar al enunciado abierto

$$y > 2x$$

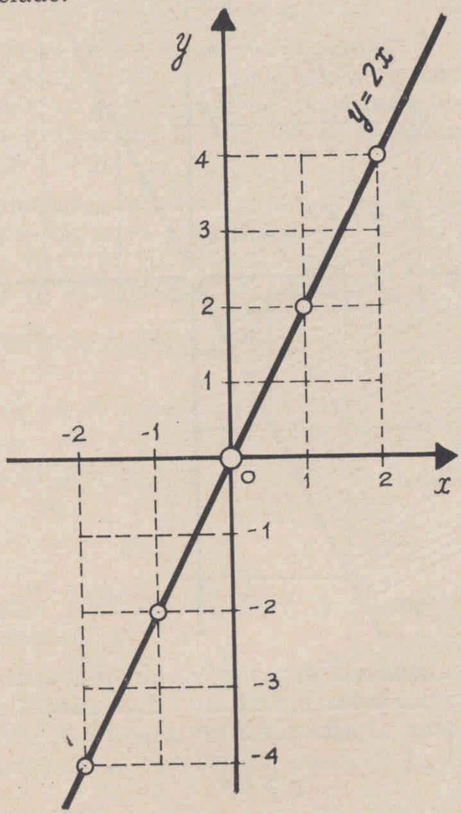
Vamos a localizar, con referencia a un sistema de ejes rectangulares, los puntos cuyas *abscisas* son

$$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

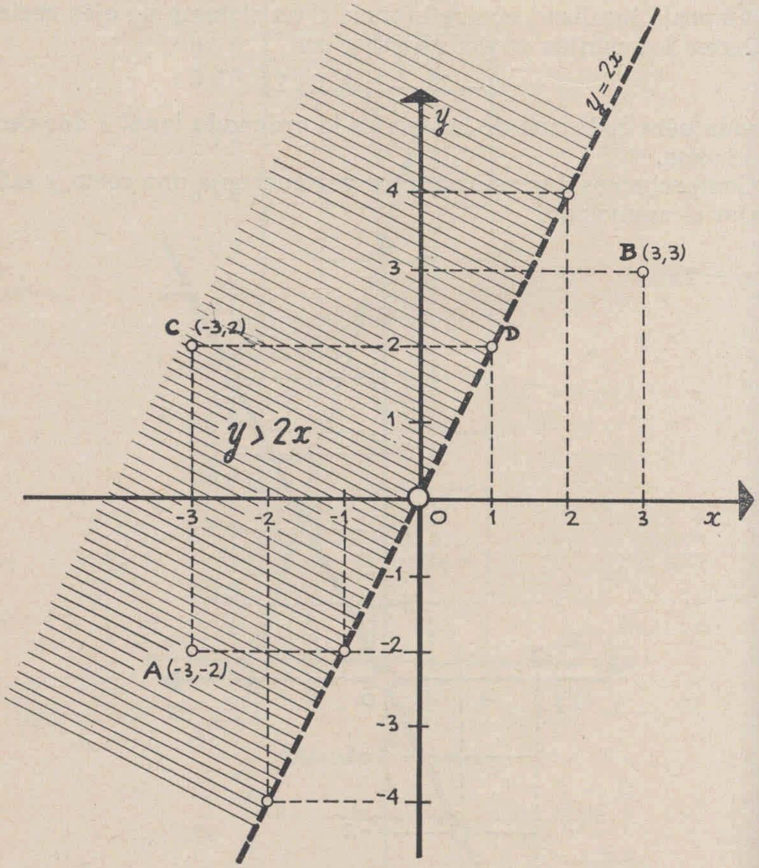
siendo para cada una de las cuales *la ordenada igual a dos veces la abscisa.*

Comprobamos que estos puntos pertenecen a una recta y satisfacen al enunciado.

$y = 2x$



Sc localizan luego los puntos que tienen estas mismas abscisas, pero tales que en cada uno de los cuales *la ordenada sea mayor que dos veces la abscisa.*



Se comprueba que *estos puntos están por encima* del punto correspondiente del primer conjunto. Los puntos de este nuevo conjunto satisfacen al enunciado

$$y > 2x$$

La gráfica de $y > 2x$ es el conjunto de todos los puntos que tán por "encima" de esta recta, como muestra la porción somreada de la figura.

La gráfica de un enunciado tal como $y > 2x$ es el conjunto e todos los puntos del plano que hacen cierto el enunciado. Por jemplo, el punto **A** $(-3, -2)$ da la solución numérica $x = -3$, $= -2$; el **C** $(-3, 2)$, da $x = -3$, $y = 2$, etc.

Si el símbolo es el de la relación *"mayor que o igual a"*, es ecir, "$\geqq$", se marca una recta marginal con trazo más grueso; l símbolo *"mayor que"*, se indicará marcando una recta querada entre el área sombreada y la que no lo está. En estos iagramas la recta es la *gráfica* del enunciado $y = 2x$.

Esta recta divide el plano en dos semiplanos. La gráfica de $< 2x$ es el semiplano en el cual toda *ordenada es menor* que los veces la abscisa; es el conjunto de *puntos por debajo* de la ecta $y = 2x$. La gráfica de $y \leqq 2x$ es el semiplano inferior, ncluyendo la recta $y = 2x$.

Para obtener soluciones numéricas de $y \leqq 2x$ se toman puntos del semiplano representativo y se hallan sus coordenadas. Por ejemplo, el punto **B** (3, 3) da solución numérica $x = 3$, $y = 3$; el punto **D** (1, 2) da solución $x = 1$, $y = 2$, etc.

Resolver gráficamente la inecuación

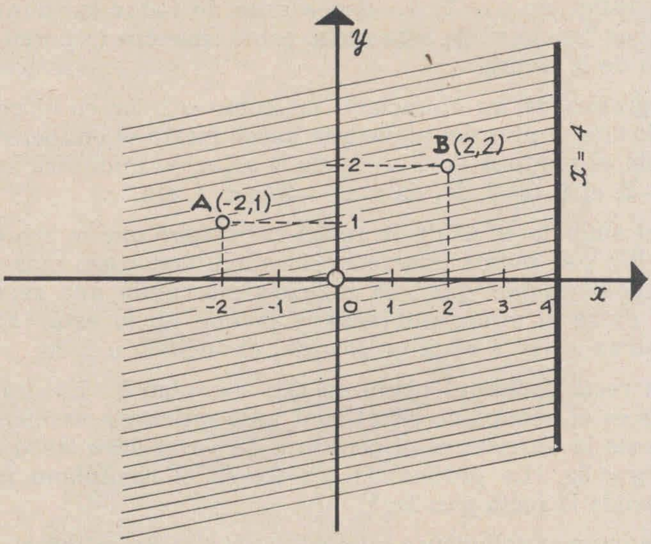
$$x \leqq +4$$

Considerando sólo la igualdad, se obtiene la ecuación

$$x = 4$$

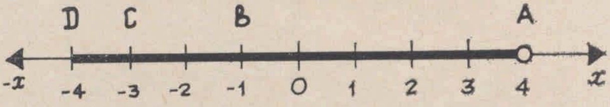
cuya representación gráfica es la recta a, paralela al eje **OY**, trazada por el punto (4, 0).

La gráfica de $x \leqq 4$ es el conjunto de todos los puntos que figuran del lado izquierdo de la recta, incluyendo a la recta $x = 4$. Por ejemplo, la abscisa del punto **A** $(-2, 1)$ da la solución numérica $x = -2$; la abscisa del punto **B** (2, 2) da $x = 2$, etcétera.



También se puede representar a la inecuación original po

conjunto semirrecta $\overrightarrow{\mathbf{AD}}$.



Las abscisas correspondientes a los puntos **B** (-1), **C** (-3),

de la $\overrightarrow{\mathbf{AD}}$ son soluciones de la inecuación dada $x \leqq 4$.

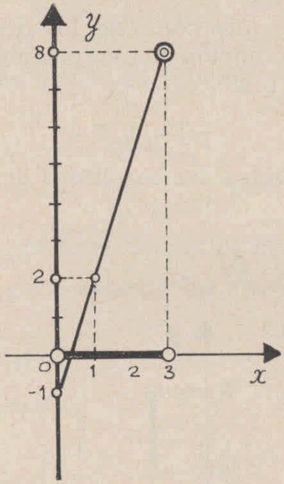
Ejemplos:

I) Dibujar la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = 3x - 1 \iff 0 \leqq x < 3$$

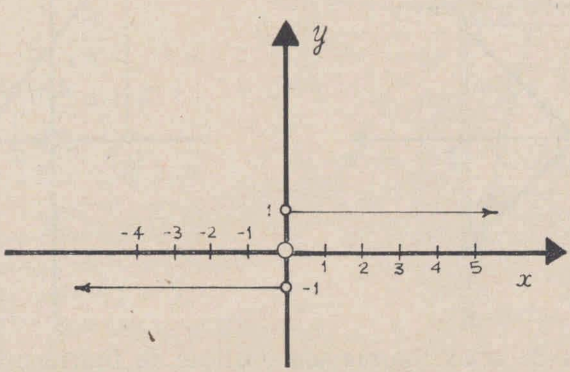
TABLA DE VALORES

x	0	1	3
y	-1	2	8



II) Dibujar la gráfica de la función **F** definida por

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} -1 & \Longleftrightarrow \quad x < 0 \\ 0 & \Longleftrightarrow \quad x = 0 \\ 1 & \Longleftrightarrow \quad x > 0 \end{cases}$$



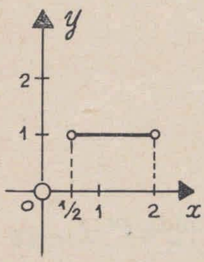
Problemas

I) Si r es la recta que contiene los dos puntos $(-3, 1$
$(1, -1)$, describir la función f cuya gráfica consiste en los p
tos (x, y) de r tales que

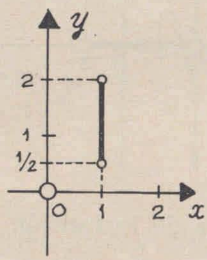
$$-2 < y < 2$$

II) Ténganse en cuenta los conjuntos de puntos indicados
las figuras siguientes

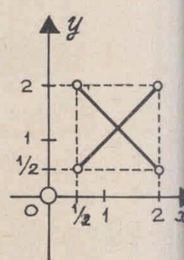
a)



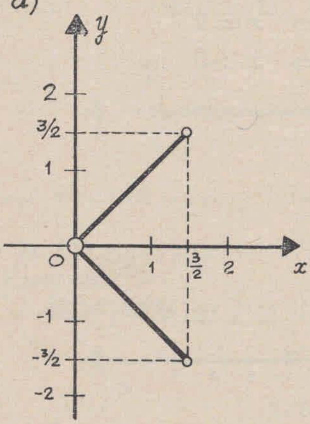
b)



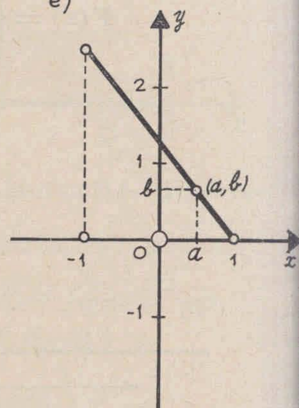
c)



d)



e)



¿Cuáles de estas figuras son gráficas de funciones? Expli
la respuesta en cada caso. Como ejemplo, consideremos la fig

e), de la que podemos decir que es la gráfica de una función **F** uyo dominio de definición es el conjunto de todas las x tales que

$$-1 \leq x \leq 1$$

La regla correspondiente a la función puede establecerse así:

Si

$$-1 \leq a \leq 1$$

es

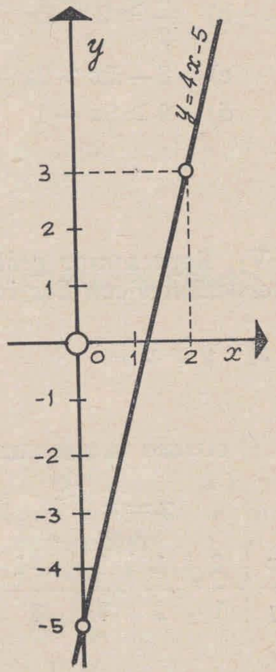
$$F(a) = b$$

donde (a, b) es el punto de la gráfica cuya abscisa es a.

III) Representar gráficamente las siguientes funciones lineales:

a) $y = 4x - 5$

Solución de la función a)



CUADRO DE VALORES

x	0	2
y	-5	3

b) $y = 5x$

c) $y = \frac{2}{3}x + 4$

d) $y = -3x$

e) $y = \frac{5}{4}x$

f) $y = x + 6$

g) $12x - y = -3$

h) $30x + 6y = 5$

i) $3y - 18 = \frac{x}{2}$

j) $5x - y = 7$

k) $2x - 3y = -6$

l) $8y = -x$

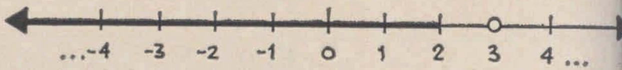
IV) Representar gráficamente el conjunto de validez de la *inecuaciones:*

a) $4x - 4 < 8$

Solución: Representación gráfica

$4x < 8 + 4$

$4x < 12$



$x < \frac{12}{4}$

$x < 3$

R.: $\{x / x \in \mathbf{Z} \wedge x < 3\} = \{2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots$

b) $\frac{x}{2} \geqq 2 - 5x$

c) $8 - 5x > 7x + 3$

d) $9 \geqq 5x - 1$

e) $7 \geqq -9x + 3$

f) $9x - 2 > 0$

g) $9x - 2 < 0$

h) $5x > \frac{x}{8} + 5$

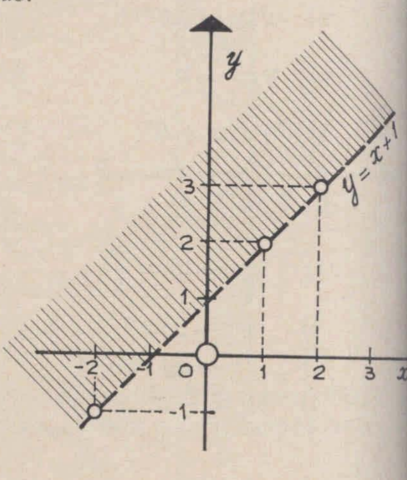
V) Representar gráficamente el conjunto de validez de la *inecuaciones con dos incógnitas:*

a) $y > x + 1$

CUADRO DE VALORES

$y = x + 1$

x	0	1	2	-1	-2
y	1	2	3	0	-1



Según el enunciado $y > x + 1$ para $x = 2$, por ejemplo, la función y puede ser cualquier número mayor que 3, es decir, puede ser 3,5; 3,9; ... ; 4; 5; 6; ... Por ello, la gráfica de $y > x + 1$ tiene la forma que indica la figura. La representación no incluye la recta $y = x + 1$.

R.: {3,5 ; 3,9 ; ... ; 4 ; 5 ; 6 ; ... }

b) $y > -3 + x$

c) $y - 1 > 3x$

d) $y + \frac{1}{2} < 7x + 3$

e) $y + 2x > 0$

f) $y < 6x - \frac{1}{2}$

g) $6x < -3 + 5y$

h) $7x \leqq 2y + 2$

i) $-y \geqq 2x + 2$

VI) Construir la gráfica de conversión de dólares norteamericanos en pesos Ley 18.188 (1 dólar = 3,50 \$).

Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Sea el sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y = -10 \\ 2x + \ \ y = -\ 3 \end{cases}$$

La representación gráfica de la primera ecuación es una recta tal que todos los puntos de la misma tienen coordenadas que satisfacen la ecuación; análogamente la representación gráfica de la segunda es otra recta cuyos puntos tienen la misma propiedad enunciada.

Las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas satisfacen a la primera ecuación y también a la segunda. Vale decir, que *los dos números que forman las coordenadas del pun-*

to de intersección constituyen la solución del sistema de ec-
ciones.

El cuadro de valores de la primera ecuación

$$3x - 4y = -10$$

se puede obtener despejando x; pasemos para ello $(4y)$ al seg-
do miembro

$$3x = -10 + 4y$$

de donde

$$x = \frac{4y - 10}{3}$$

luego el cuadro de valores es el siguiente:

Puntos correspondientes	A	B	C
y	1	4	-2
x	-2	2	-6

El cuadro de valores de la segunda ecuación

$$2x + y = -3$$

se puede obtener despejando x; pasemos para ello y al segun-
miembro

$$2x = -3 - y$$

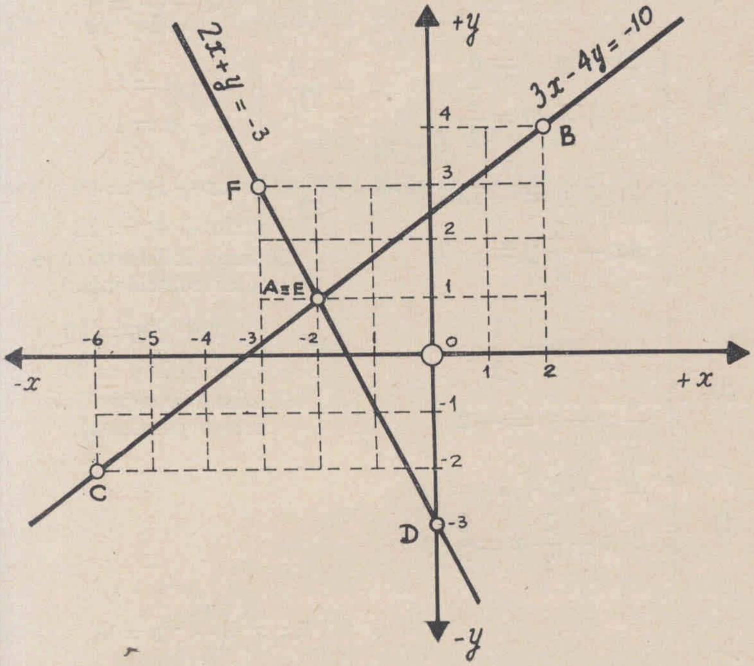
de donde

$$x = \frac{-3 - y}{2}$$

luego el cuadro de valores es el siguiente:

Puntos correspondientes	D	E	F
y	-3	1	3
x	0	-2	-3

Claro está que la representación gráfica de ambas ecuaciones ebe hacerse sobre el mismo sistema de ejes. ¡ Tarado!



El punto de intersección de ambas rectas, de coordenadas $x = -2$, $y = 1$ es la solución del sistema.

A veces, como en el caso propuesto, se ve que en ambas tablas existe *un mismo par de valores,* por lo que inmediatamente se puede dar como la solución del sistema.

EJERCICIOS

Resolver gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ 2x - 5y = 11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + \dfrac{y}{2} = \dfrac{9}{2} \\ x - \dfrac{y}{5} = \dfrac{9}{5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + \dfrac{1}{4} y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = -12 \\ 4x - \dfrac{1}{2} y = -7 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x + 8y = 44 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$

(Sistema indeterminado rectas coincidentes)

d) $\begin{cases} 3x - 16 = \dfrac{1}{2} y \\ \dfrac{1}{2} x - y = -2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 5x + 10y = 30 \end{cases}$

(Sistema incompatible rectas paralelas)

i) $\begin{cases} 5x - 3y + 21 = 0 \\ 24{,}4 + \dfrac{1}{3} x = \dfrac{5}{2} y \end{cases}$

R.: $x = \dfrac{9}{5} \cdot y = 10$

j) $\begin{cases} 45x + 9(3x - y) = 5(6x - 4y - 15) \\ \dfrac{3}{2} x + 0{,}75 = -\dfrac{11}{4} y \end{cases}$

R.: $x = -2 \cdot y = \dfrac{9}{11}$

k) $\begin{cases} 2x - \dfrac{9}{2} = \dfrac{1}{3} y \\ 5y + 61 - 4x = 0 \end{cases}$

R.: $x = \dfrac{1}{4} \cdot y = -12$

Resuelva el lector gráficamente los sistemas indeterminados nteriores y compruebe su indeterminación.

(Resultarán rectas coincidentes)

Represéntese gráficamente el sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = 2 \\ x - 4y = 3 \end{cases}$$

(Resultarán dos rectas paralelas, pues es un sistema incompatible.)

11 RESOLUCION ANALITICA DE SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

I) Sea el sistema

$$\begin{cases} 3x - 3y < 0 & \text{(a)} \\ x - 2y < 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

Para resolverlo, es decir, para determinar el conjunto de validez de x e y que satisface a ambos enunciados se despeja una misma incógnita, la y, por ejemplo, de esas inecuaciones, y resulta

$$3x - 3y < 0 \qquad\qquad x - 2y < 0$$

$$3x < 3y \qquad\qquad x < 2y$$

$$x < y$$

o bien $\qquad y > \dfrac{x}{2} \qquad$ (d)

$$y > x \qquad \text{(c)}$$

Para cada valor asignado a x se toma para y cualquier valor mayor que el mayor de los valores que resultan de (c) y (d).

Por ejemplo:

Para $\boxed{x=1}$ el enunciado (c) da $y>1$

y (d) da $y>\frac{1}{2}$

r lo tanto, tomando $y=2$ se tiene la solución $\{\mathbf{1},\ 2\}$ *para el sistema*

para $y=3$, la solución $\{\mathbf{1},\ 3\}$

para $y=4$, resulta $\{\mathbf{1},\ 4\}$, etc.

Para $\boxed{y=1}$ el enunciado (c) da $x<1$

y (d) da $x<2$

r ello, tomando $x=0$ se tiene la solución $\{\ 0,\ \mathbf{1}\}$ *para el sistema*

para $x=-1$, la solución $\{-1,\ \mathbf{1}\}$

para $x=-2$, resulta $\{-2,\ \mathbf{1}\}$, etc

esolución gráfica.

Primero se construye la gráfica de

$$3x-3y=0 \qquad \text{o bien} \qquad y=x$$

TABLA DE VALORES

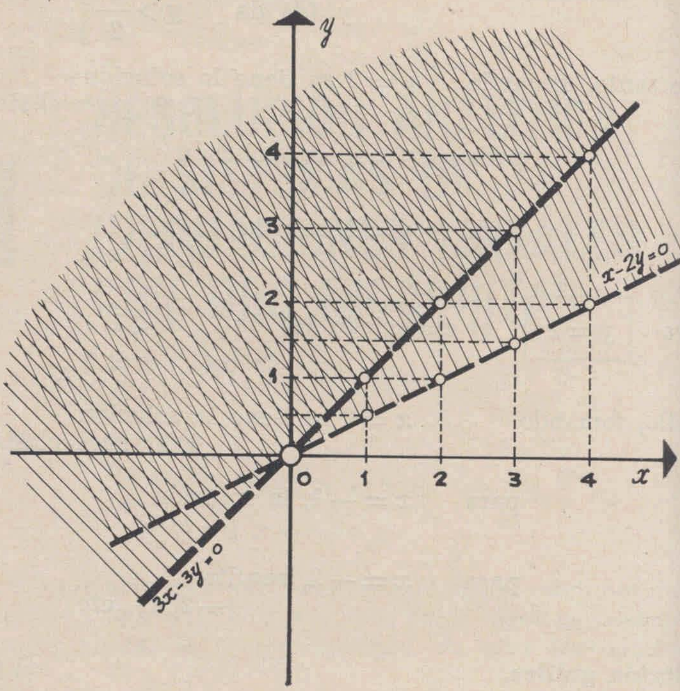
x	0	3
y	0	3

Luego se construye la gráfica de

$$x-2y=0 \qquad \text{o bien} \qquad y=\frac{x}{2}$$

TABLA DE VALORES

x	2	4
y	1	2



Sombreamos la región por "encima" de la recta $3x - 3y = 0$ ya que la gráfica de $3x - 3y < 0$, es decir, $y > x$, consiste en todos aquellos puntos para los cuales la ordenada es mayor que la abscisa.

Análogamente sombreamos la región donde $x - 2y < 0$, es decir, donde $y > \frac{x}{2}$. Esta es la región por encima de la recta $x - 2y = 0$.

El conjunto de validez del sistema dado es la región doblemente sombreada en la figura.

Verifique el lector si las soluciones obtenidas

$$\{1, 2\}\ ,\ \{1, 3\}\ ,\ \{1, 4\}\ ,\ \{0, 1\}\ , \ldots$$

son puntos de la región doblemente sombreada del gráfico.

Expresión conjuntista de la solución del sistema.

$\{(x\ ;\ y) \,/\, (x\ ;\ y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \wedge 3x - 3y < 0\} \cap$ (*)

$\cap \{(x\ ;\ y) \,/\, (x\ ;\ y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \wedge x - 2y < 0\} =$

= {Los puntos de la superficie doblemente sombreada}

= {Coordenadas de los puntos de la superficie doblemente sombreada}

II) Sea el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 4 > 0 & \text{(a)} \\ 2x - y - 3 > 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

Despejando y en las dos inecuaciones, se tiene:

$$x + 2y - 4 > 0$$

$$x + 2y - 4 + (-x + 4) > 0 + (-x + 4)$$
$$2y > -x + 4$$

$$2y \cdot \left(\frac{1}{2}\right) > (-x + 4) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{(c)} \qquad \boxed{y > -\frac{x}{2} + 2}$$

Despejando y en (b)

$$2x - y - 3 > 0$$

$$2x - y - 3 + (-2x + 3) > 0 + (-2x + 3)$$

---

* El producto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ designa al conjunto de todos los puntos del plano cuando se lo representa mediante pares ordenados de números reales (coordenadas).

$$-y > -2x + 3$$
$$-y \cdot (-1) > (-2x + 3) \cdot (-1)$$
$$\text{(d)} \quad \boxed{y < 2x - 3}$$

Para	$x = 4$	Para	$x =$
el enunciado (c) da	$y > 0$	el enunciado (d) da	$y <$
Para	$x = 8$	Para	$x =$
el enunciado (c) da	$y > -2$	el enunciado (d) da	$y < 1$

Las soluciones de la inecuación (a) con respecto a los valore $x = 4$ y $x = 8$ son:

$$\{4, \quad 1\} \ ; \{4, 2\} \ ; \{4, 3\} \ ; \ldots$$
$$\{8, -1\} \ ; \{8, 0\} \ ; \{8, 1\} \ ; \ldots$$

Las soluciones de la inecuación (b) con respecto a los mismo valores de x son:

$$\{4, \quad 4\} \ ; \{4, \quad 3\} \ ; \{4, \quad 2\} \ ; \ldots$$
$$\{8, 12\} \ ; \{8, 11\} \ ; \{8, 10\} \ ; \ldots$$

Resolución gráfica.

Primero se construye la gráfica de

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad y = \frac{-x + 4}{2}$$

TABLA DE VALORES

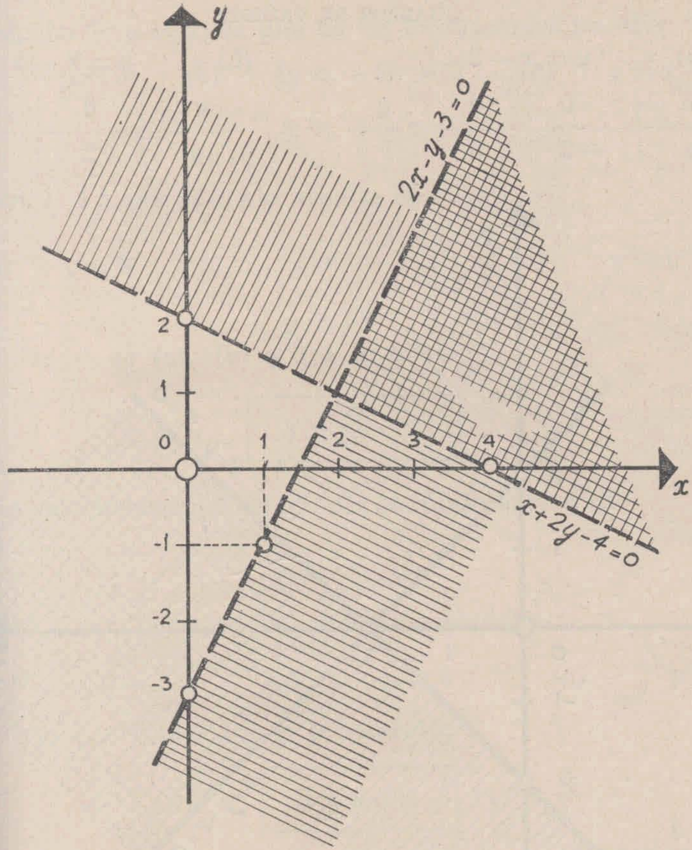
x	0	4
y	2	0

Luego se construye la gráfica de

$$2x - y - 3 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad y = 2x - 3$$

TABLA DE VALORES

x	0	1
y	-3	-1



El conjunto de validez del sistema, o sea, la *intersección* de las inecuaciones, es la región doblemente sombreada en la figura, cuya expresión conjuntista es

$$\{x + 2y - 4 > 0\} \cap \{2x - y - 3 > 0\} =$$
$$= \{\text{Coordenadas de los puntos de la región intersección}\}$$

III) Resolver gráficamente el sistema

$$\begin{cases} x - y - 2 \geqq 0 & \text{(a)} \\ x + y - 2 \geqq 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

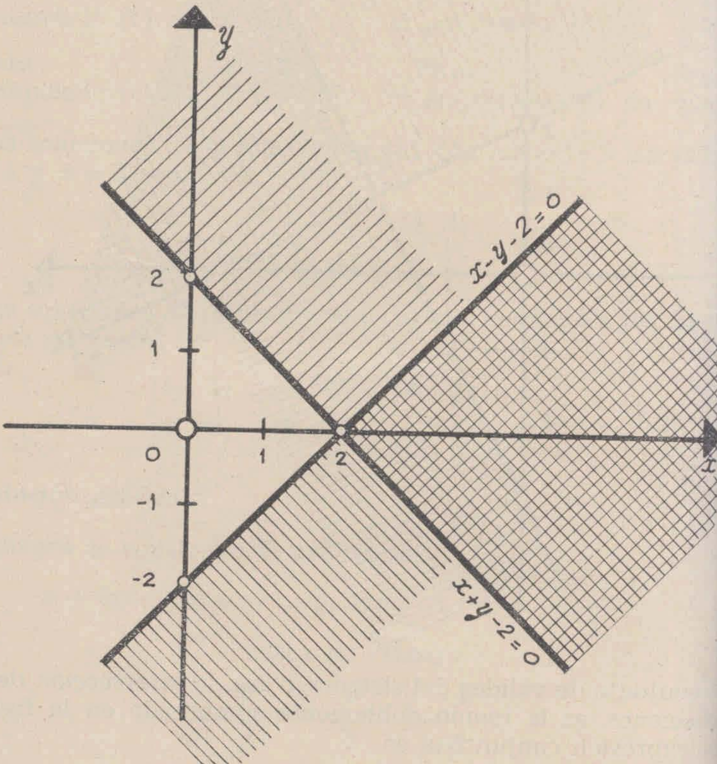
CUADROS DE VALORES

(a) $y = x - 2$

x	0	2
y	-2	0

(b) $y = 2 - x$

x	0	2
y	2	0



IV) Hallar la intersección del sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} y - 3 \leq 0 & \text{(a)} \\ 3x + 4y - 12 \geq 0 & \text{(b)} \\ x - y - 2 \leq 0 & \text{(c)} \end{cases}$$

Despejando y en cada una de las inecuaciones, resulta

(a) $y \leq 3$ (b) $4y \geq -3x + 12$ (c) $y \geq x - 2$

$$y \geq -\frac{3}{4}x + 3$$

Para $x = 2$, por ejemplo, resulta en cada caso

(a) $y \leq 3$ (b) $y \geq -\frac{6}{4} + 3$ (c) $y \geq 0$

$$y \geq 1{,}5$$

$\Rightarrow$ de (a), (b) y (c) se tiene

$$\boxed{3 \geq y \geq 1{,}5}$$

Son soluciones en el campo del conjunto entero $\{\mathbf{Z}\}$

$$\{2,\ 3\} \quad ; \quad \{2,\ 2\}$$

Para $x = 4$, por ejemplo, se tiene

(a) $y \leq 3$ (b) $y \geq 0$ (c) $y \geq 2$

$\Rightarrow$ de (a), (b) y (c), resulta

$$\boxed{2 \leq y \leq 3}$$

Son soluciones del conjunto $\mathbf{Z}$

$$\{4,\ 3\}\ ,\ \{4,\ 2\}$$

Resolución gráfica.

Se construyen las gráficas de las ecuaciones

(a) $y = 3$ (b) $y = -\frac{3}{4}x + 3$ (c) $y = x - 2$

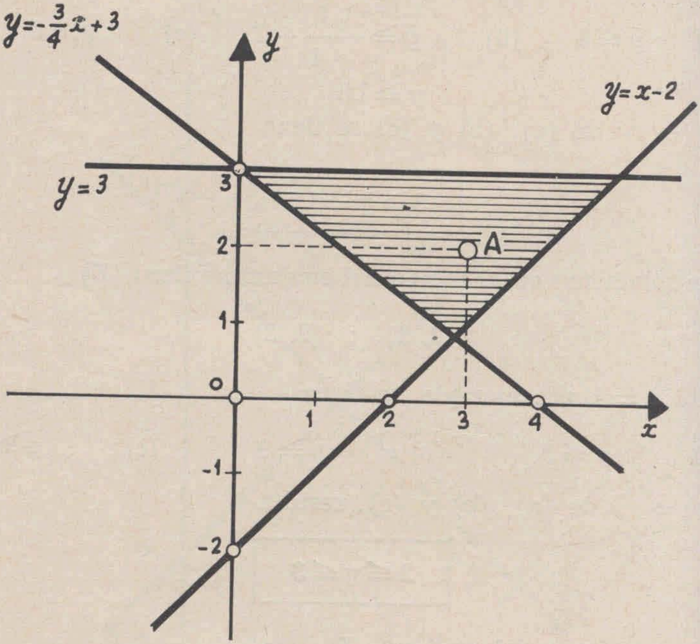
TABLAS DE VALORES

(b)

x	4	0
y	0	$+3$

(c)

x	0	2
y	-2	0



El conjunto de validez del sistema es la región sombreada. Por ejemplo, las coordenadas del punto **A** (3, 2) de la superficie sombreada son valores que satisfacen al sistema dado.

EJERCICIOS ..

I) Construir la gráfica de cada uno de los siguientes enunciados

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 2x + 4y > 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 4y = 4 \\ 5x - 4y < 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y < 5 \\ 2x + 4y \leqq 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ 4x - 2y \geqq -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = -3 \\ x < -3 \end{cases}$

II) Resolver analíticamente y construir las gráficas de los conjuntos de validez de las siguientes inecuaciones:

a) $\begin{cases} x - 3y - 6 > 0 \\ 3x + y + 2 > 0 \end{cases}$

R.: $\{3, -2\}$; $\{3, -3\}$; $\{3, -4\}$; ... ; $\{3, -10\}$
$\{6, -1\}$; $\{6, -2\}$; $\{6, -3\}$; ... ; $\{6, -19\}$

b) $\begin{cases} x - 3y - 6 < 0 \\ 3x + y + 2 < 0 \end{cases}$

R.: $\{-6, -3\}$; $\{-6, -2\}$; $\{-6, -1\}$; ... ; $\{-6, 15\}$
$\{-3, 6\}$; $\{-3, 5\}$; $\{-3, 4\}$; ... ; $\{-3, -2\}$

c) $\begin{cases} x - 3y - 6 > 0 \\ 3x + y + 2 \geqq 0 \end{cases}$

R.: $\{1, -3\}$; $\{2, -3\}$; $\{3, -3\}$; $\{4, -3\}$; ...
$\{4, -1\}$; $\{4, -2\}$; $\{4, -3\}$; ... ; $\{4, -14\}$

d) $\begin{cases} x - 3y - 6 < 0 \\ 3x + y + 2 \leqq 0 \end{cases}$

R.: $\{-3, 7\}$; $\{-3, 6\}$; $\{-3, 5\}$; ... ; $\{-3, -2\}$
$\{-6, -3\}$; $\{-6, -2\}$; $\{-6, -1\}$; ... ; $\{-6, 16\}$

e) $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ x + y > 3 \end{cases}$

R.: $\{x < 0 \cap y < 0 \cap x + y > 3\} = \varnothing$

f) $\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ 2x + 3y \leqq 6 \end{cases}$

R.: $\{0, 1\}$; $\{0, 2\}$

$\left\{1, \frac{4}{3}\right\}$

$\{3, 0\}$

III) Resolver gráfica y analíticamente los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} \frac{4}{5}x - y - 3 > 0 \\ -x - y + 4 > 0 \end{cases}$

R.: $\{0, -4\}$; $\{0, -5\}$; $\{0, -6\}$; $\{0, -7\}$; ...
$\{5, -2\}$; $\{5, -3\}$; $\{5, -4\}$; $\{5, -5\}$; ...
$\{-5, -8\}$; $\{-5, -9\}$; $\{-5, -10\}$; $\{-5, -11\}$; ...

b) $\begin{cases} \frac{4}{5}x - y - 3 < 0 \\ -x - y + 4 < 0 \end{cases}$

R.: $\{0, 5\}$; $\{0, 6\}$; $\{0, 7\}$; $\{0, 8\}$; ...
$\{5, 2\}$; $\{5, 3\}$; $\{5, 4\}$; $\{5, 5\}$; ...
$\{-5, 10\}$; $\{-5, 11\}$; $\{-5, 12\}$; $\{-5, 13\}$; ...

c) $\begin{cases} x + 2y > 4 \\ 2x - y > 3 \end{cases}$

R.: $\{4, 1\}$; $\{4, 2\}$; $\{4, 3\}$; $\{4, 4\}$
$\{8, -1\}$; $\{8, 0\}$; $\{8, 1\}$; ... ; $\{8, 12\}$

d) $\begin{cases} x - t > 2 \\ x + t > 2 \end{cases}$

R.: $\{8, 5\}$; $\{8, 4\}$; $\{8, 3\}$; ... ; $\{8, -5\}$
$\{6, 3\}$; $\{6, 2\}$; $\{6, 1\}$; ... ; $\{6, -3\}$

GEOMETRIA

VECTORES EN EL PLANO 1

MAGNITUDES.

Magnitudes escalares. — Las magnitudes tales como longitud, superficie, volumen, masa, capacidad, intervalo de tiempo, costo, etc., *que se definen por un número real,* tienen la propiedad de que sus cantidades pueden ordenarse en escala creciente o decreciente. Por tal razón estas magnitudes se denominan *escalares.*

Magnitudes vectoriales. — Las magnitudes tales como las fuerzas, las velocidades, etc., no pueden ordenarse de ese modo por cuanto necesitan tres elementos para su definición: *un número real* que es su *módulo,* una *dirección* y un *sentido.* Estas magnitudes se denominan *vectoriales.*

Ningún critierio de ordenación puede adoptarse para comparar dos fuerzas. Puede considerarse mayor a la de mayor intensidad, pero ¿qué diremos si ambas tienen la misma intensidad y *difieren en el sentido?*

Cualquier cantidad de una *magnitud vectorial* se representa por un vector.

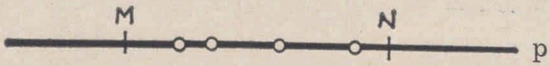
VECTOR.

Una *recta* puede trazarse marcando algunos de sus puntos de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Es decir, una recta puede imaginarse recorrida en *dos sentidos distintos* por un punto generador; a uno de ellos lo llamaremos *sentido positivo* y al opuesto *sentido negativo.*

Orientar una recta es elegir uno de los dos sentidos como sentivo positivo.

Llamaremos *eje* a una *recta orientada.*

Por el postulado de ordenación de los puntos de una recta estudiado en el primer curso, se infiere que entre dos puntos



M y N de una recta p hay infinitos puntos, todos pertenecientes a p. El conjunto de los puntos M y N y de los infinitos puntos de p comprendidos entre ellos, se llama *segmento*, del cual M y N son los *extremos.* Este segmento se representa simbólicamente por $\overline{MN}$.

El segmento $\overline{MN}$ perteneciente a la recta p se indica:

$$\overline{MN} \equiv p \qquad \text{o bien} \qquad \overline{MN} \in p$$

Dada la recta p y el segmento $\overline{MN} \in p$, los puntos de dicha recta se clasifican en *interiores* y *exteriores* a $\overline{MN}$.

Al segmento determinado por los puntos M y N se lo llama también *distancia entre los dos puntos.*

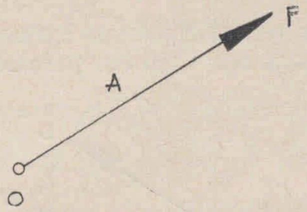
Un segmento que tenga a los puntos A y B por extremos, y pertenezca a una recta orientada r, puede considerarse asociado al sentido de r; es decir, al sentido que lleve el punto generador de r. En este caso se dice que el segmento $\overline{AB}$ está *orientado.*

El segmento de los mismos extremos, ordenado en sentido opuesto, se llama segmento opuesto al $\overline{AB}$, y se indica por $\overline{BA}$.

Si entre los extremos distinguimos como primero al A y como segundo al B, al segmento orientado $\overline{AB}$, le llamaremos *vector* de *origen* A y *extremo* B, y lo representaremos por el símbolo $\overrightarrow{AB}$.

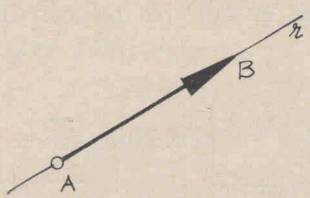
DEFINICIÓN. — Se llama *vector* a todo *segmento orientado*.

NOTACIÓN.



vector $\overrightarrow{A}$ o bien vector $\overrightarrow{OP}$

Elementos de un vector. — Los elementos de un vector $\overrightarrow{AB}$ son: el *origen*, el *extremo*, la *dirección* y el *sentido*.



Su *dirección* es la de la recta r de acción $\overrightarrow{AB}$ o de cualquiera de las rectas paralelas a ella.

Su *sentido* es el sentido de la semirrecta de origen A que contiene el punto B.

Se considera también el *módulo* o *intensidad*, que es la *longitud* del segmento orientado que lo define.

El módulo de un vector es siempre un *número positivo*.

Si el vector es

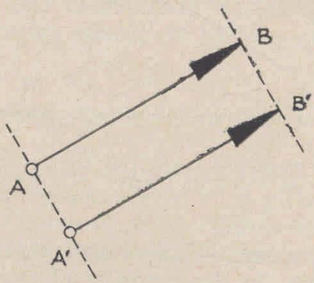
$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{OP}$$

el módulo se representa por cualquiera de las siguientes formas:

$$\text{módulo } A = |\overrightarrow{A}| = |\overrightarrow{OP}|$$

Vectores equipolentes o iguales.

Dos vectores, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ se llaman *equipolentes* o *iguales* si siendo paralelas sus rectas soportes, los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ que unen sus extremos son también paralelos.



En otras palabras, dos vectores son equipolentes cuando ambos tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

NOTACIÓN.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \iff \begin{cases} \text{módulo } \overrightarrow{AB} = \text{módulo } \overrightarrow{A'B'} \\ AB \parallel A'B' \\ \text{sentido } \overrightarrow{AB} = \text{sentido } \overrightarrow{A'B'} \end{cases}$$

La equipolencia la representaremos por el signo de igualdad, así:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

• Esta definición de equipolencia tiene su excepción: por ejemplo, el efecto que producirá el vector $\overrightarrow{AB}$ aplicado en un punto A de un prisma, diferente al obtenido cuando se aplica en otro punto B de dicho cuerpo.

Vectores libres. — Los *vectores equipolentes* que están caracterizados porque entre ellos *se puede establecer un criterio de igualdad, teniendo orígenes diferentes,* se llaman *vectores libres.*

Los vectores libres se representan simbólicamente por

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A},\ \overrightarrow{V},\ B - A, \text{ etc.}$$

La notación B — A, que se lee "B menos A", se llama notación de Grassmann.

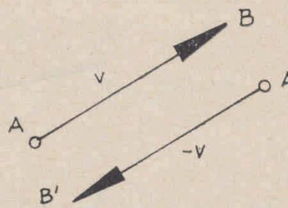
Si un vector se indica con $\overrightarrow{AB}$, su módulo se expresa así: $|\overrightarrow{AB}|$; si un vector se indica con $\overrightarrow{A}$, o con $\overrightarrow{V}$, el módulo respectivo se expresa con $|\overrightarrow{A}| = a$, o con $|\overrightarrow{V}| = v$; si un vector se indica con B — A su módulo se representa con $|B - A|$.

Vector nulo. — Cuando el módulo es nulo el segmento orientado se reduce a un punto, y no puede hablarse de vector puesto que faltan la *dirección* y el *sentido*. No obstante, por comodidad de expresión en muchos enunciados, se conviene en definir como *vector nulo* al que tiene su *módulo igual a cero*.

Vectores opuestos. — Se dice que dos vectores son opuestos cuando sólo difieren en su sentido.

NOTACIÓN.

$-\overrightarrow{V}$ opuesto a $\overrightarrow{V}$



Versores. — Los vectores de módulo unidad se llaman *versores*.

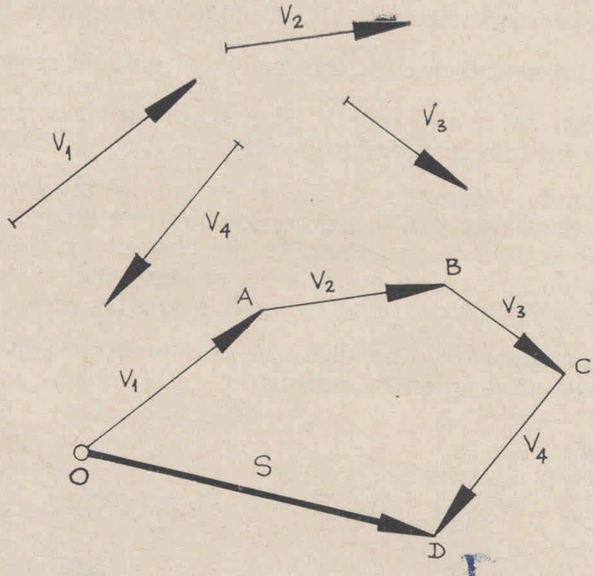
NOTACIÓN.

$$\textit{versor } V = v$$

SUMA VECTORIAL O SUMA DE VECTORES

Consideremos varios vectores: $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$, $\overrightarrow{V_4}$. Si desde un punto cualquiera O se construye el vector $\overrightarrow{OA}$ equipolente a $\overrightarrow{V_1}$, a partir de A, como origen, el $\overrightarrow{AB}$, equipolente al $\overrightarrow{V_2}$, etc., se obtendrá una línea quebrada OABCD.

Al *vector libre* de origen O y extremo D, se le llama *suma vectoral* de $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$, $\overrightarrow{V_4}$.



Se simboliza, en general:

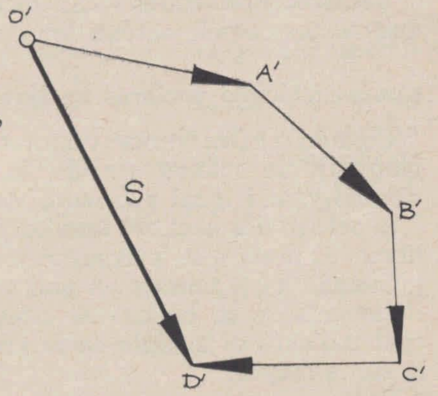
$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} + \ldots + \overrightarrow{V_n}$$

Propiedades de la suma vectorial.

La suma de vectores tiene las mismas propiedades fundamentales que la suma de números.

a) *Propiedad uniforme.*

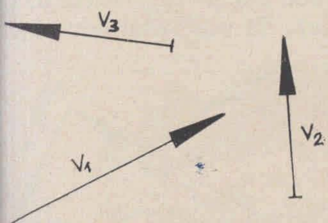
Si en el caso anterior de suma vectorial tomamos un origen O', distinto de O, y hacemos la construcción indicada, obtendremos una figura O'A'B'C'D' que, teniendo todos sus lados iguales y aralelos a los del OABCD, ará que:



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{O'D'}$$

b) *Propiedad conmutativa.*

Si primero trazamos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}_2$, y luego $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{V}_3$, nos da $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{V}_2 + \overrightarrow{V}_3$, que es la diagonal del paralelogramo cuyos otros os lados son $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{V}_3$, $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{V}_2$, tales que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{V}_3 + \overrightarrow{V}_2$.

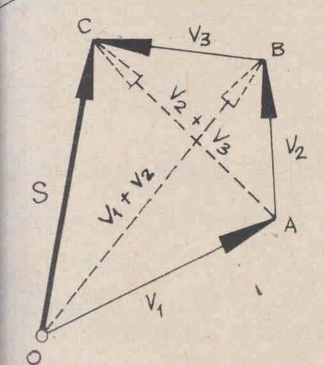


c) *Propiedad asociativa.*

Efectuar la suma $\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2 + \overrightarrow{V}_3$ quiere decir

$$(\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2) + \overrightarrow{V}_3$$

o $\qquad \overrightarrow{V}_1 + (\overrightarrow{V}_2 + \overrightarrow{V}_3)$



En la figura se observa cómo

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

o bien

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

siendo $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AC}$ las sumas de $\overrightarrow{V}_1$ y $\overrightarrow{V}_2$ y de $\overrightarrow{V}_2$ y $\overrightarrow{V}_3$, respectivamente.

Vectores deslizantes. — Se dice que dos o más vectores son deslizantes cuando actúan sobre una misma recta.

Composición de vectores en línea recta.

Cuando actúan varios vectores según una recta y están dirigidos en un mismo sentido, la resultante tendrá ese mismo sentido y será igual a la suma de todos ellos.

Si actúan dos vectores iguales y en sentido opuesto habrá equilibrio, es decir que la resultante será nula.

Cuando haya fuerzas en uno u otro sentido se sumarán separadamente, y se hallará la diferencia entre las dos sumas, la cual indicará el módulo de la resultante. Su sentido será el de la suma mayor.

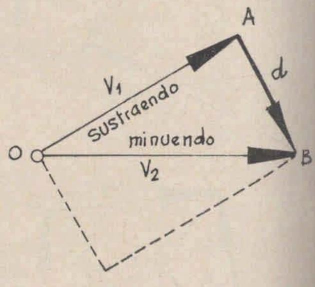
Para que un cuerpo esté en equilibrio es necesario que sea imposible toda traslación y también toda rotación.

DIFERENCIA DE DOS VECTORES

Dados dos vectores, $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$, se llama *vector diferencia* al que sumado con uno de ellos (sustraendo), da por resultado el otro (minuendo).

En símbolos:

$$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{d} \iff \vec{V}_1 + \vec{d} = \vec{V}_2$$



La operación se efectúa trazando por un punto cualquiera O los vectores

$$\vec{OA} = \vec{V}_1 \quad \text{y} \quad \vec{OB} = \vec{V}_2$$

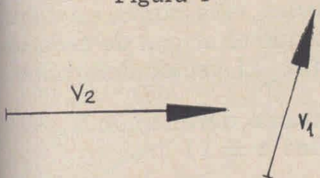
El vector que tiene por origen el extremo B del sustraendo y por extremo al A del minuendo, es el vector diferencia.

Regla del paralelogramo.

Si con origen O se construyen los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ respecti-mente equipolentes a los vectores $\overrightarrow{V_1}$ y $\overrightarrow{V_2}$, dados, y luego se completa el paralelogramo OACB, resulta que el vector representado por la diagonal OC de ese paralelogramo, orientado de O a C, es, por definición de suma vectorial, la suma de $\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$ (fig. 2).

El vector $\overrightarrow{BA}$ (fig. 3), orientado del mismo extremo de $\overrightarrow{V_2}$ al de $\overrightarrow{V_1}$ es la diferencia $\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$ porque $\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{V_1}$.

Figura 1



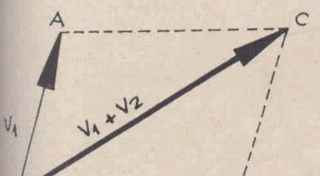


Figura 2

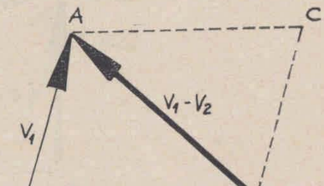
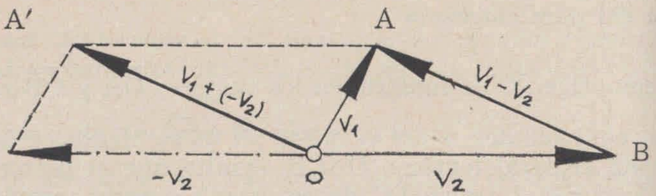


Figura 3

También se puede definir la *diferencia* $\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$ como la suma del vector $\overrightarrow{V_1}$ y el vector $-\overrightarrow{V_2}$, opuesto a $\overrightarrow{V_2}$.

VERIFICACIÓN.

$$\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{BA}$$

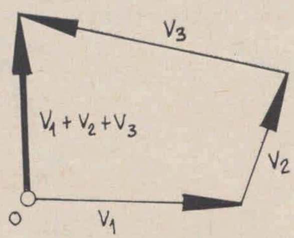


Suma algebraica de varios vectores.

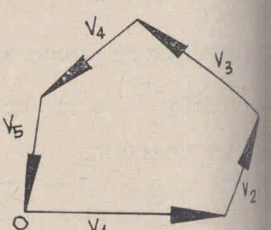
Puesto que restar el vector $\vec{V}_2$ es lo mismo que sumar el vector $-\vec{V}_2$, cuando se tengan varios vectores para sumar o restar entre sí, bastará considerar únicamente el caso de suma

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_n$$

Para representar en forma geométrica esta suma, se llevan sucesivamente los vectores de manera que el origen de cada uno coincida con el extremo del precedente. El vector determinado por el origen del primero $\vec{V}_1$ y el extremo del último, $\vec{V}_n$, es el vector suma. (En la figura el subíndice $n = 3$.)



En el caso particular en que los vectores $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots \vec{V}_n$ formen una *poligonal cerrada,* el vector suma tiene su origen y extremos coincidentes; es decir, se ha obtenido el *vector nulo.*



En símbolos:

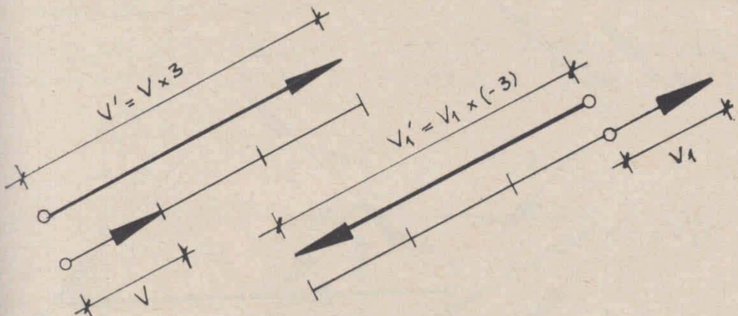
$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 + \vec{V}_5 = \vec{0}$$

Producto de un vector por un escalar.

El *producto* de un vector libre $\vec{V}$, no nulo, por el número algebraico n, distinto de cero, al cual se lo denomina *escalar*, es el vector $\vec{V'}$ de la misma dirección que $\vec{V}$ y cuyo módulo es el producto del módulo de $\vec{V}$ por el valor absoluto de n, y del mismo u opuesto sentido que $\vec{V}$, según que n sea positivo o negativo.

$$\vec{V'}_1 = \vec{V} \cdot 3$$

$$\vec{V'}_1 = \vec{V}_1 \cdot (-3)$$



En símbolos:

Si $\qquad \vec{V} \neq 0 \wedge n \in \mathbf{R} \wedge n \neq 0$

Resulta

$$\vec{V} \cdot n = \vec{V'} \iff \begin{cases} \text{dirección } \vec{V'} = \text{dirección } \vec{V} \\ \text{módulo } \vec{V'} = \text{módulo } \vec{V} \cdot |n| \\ \text{sentido } \vec{V'} = \text{sentido } \vec{V} \quad \text{si} \quad n > 0 \\ \text{sentido } \vec{V'} \neq \text{sentido } \vec{V} \quad \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

Casos particulares. — El producto del *vector nulo* por un número real cualquira es el mismo vector nulo.

En símbolos:

$$\vec{0} \cdot n = \vec{0}$$

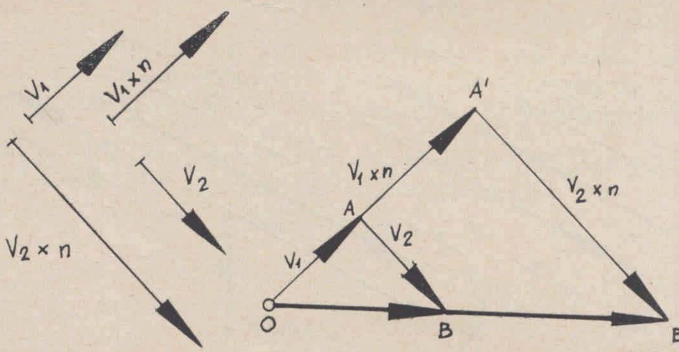
El producto de un vector por el número uno es ese mism vector.

En símbolos:

$$\vec{V} \cdot 1 = \vec{V}$$

Producto de varios vectores por un escalar.

Si se multiplica cada uno de varios vectores por un mism escalar, el vector suma queda multiplicado por dicho escalar



Consideremos primero dos vectores, $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ cuya suma es el vector $\vec{OB}$. Sea n un número positivo y

$$\vec{OA'} = \vec{V}_1 \cdot n \ ; \ \vec{A'B'} = \vec{V}_2 \cdot n$$

La suma de estos dos nuevos valores será $\vec{OB'}$, de la misma dirección que $\vec{OB}$ y tal que $\vec{OB'} = \vec{OB} \cdot n$; luego si

$$\vec{OB'} = \vec{OA'} + \vec{A'B'} \Rightarrow n \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = n \cdot \vec{V}_1 + n \cdot \vec{V}_2$$

El procedimiento anterior, aplicado sucesivamente para el caso de varios vectores, nos llevará al mismo resultado.

Propiedades. — En virtud de la definición de producto de un ector por un escalar y de las propiedades de la multiplicación e los números reales, se tiene que: *la multiplicación de un vec-r por un escalar es uniforme, conmutativa y asociativa.*

Uniforme:

$$n \in \mathbf{R} \Rightarrow \overrightarrow{V}_1 \cdot n = \overrightarrow{V}_2 \text{ (único)}$$

Conmutativa:

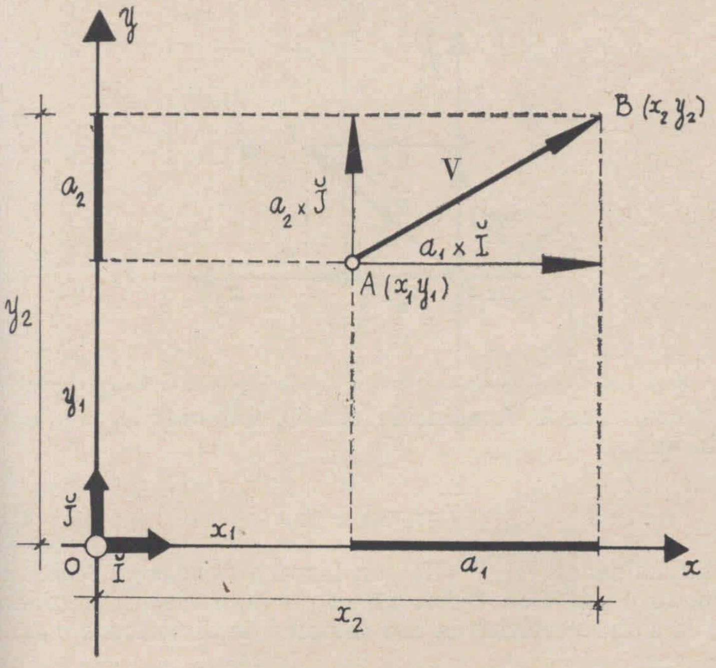
$$\overrightarrow{V}_1 \cdot n = n \cdot \overrightarrow{V}_1$$

Asociativa:

$$n \in \mathbf{R} \; ; \; k \in \mathbf{R} \Rightarrow (n \cdot k) \cdot \overrightarrow{V}_1 = n \cdot (k \cdot \overrightarrow{V}_1)$$

escomposición de un vector.

Supongamos en el plano un sistema de coordenadas rectan-ulares de origen 0 y ejes x e y. Sean A $(x_1; y_1)$ y B $(x_2; y_2)$



el origen y el extremo de un vector dado $\vec{V}$.

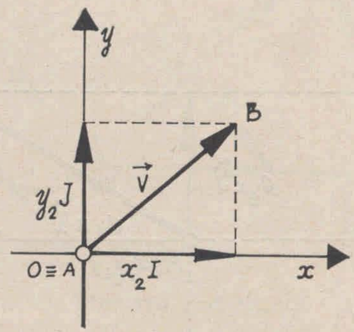
Se llaman *componentes* de un vector $\vec{V}$, respecto del sistema $(0, x, y)$ a las proyecciones de $\vec{V}$ sobre los ejes, o sea los números

$$a_1 = x_2 - x_1 \quad ; \quad a_2 = y_2 - y_1$$

En general, pondremos $\vec{V}(a_1; a_2)$ para indicar que a_1 y a_2 son las componentes del vector $\vec{V}$. Estos componentes son números que pueden ser positivos o negativos.

Si designamos por I y J los versores de OX y OY, respectivamente, se tiene, por definición de suma de vectores,

$$\vec{V} = (x_2 - x_1)\,I + (y_2 - y_1)\,J \qquad \text{(I)}$$



Además, cuando A coincide con O, entonces $x_1 = y_1 = 0$ y, por lo tanto,

$$\vec{V} = x_2\,I + y_2\,J \qquad \text{(II)}$$

Las igualdades (I) y (II) son las *expresiones cartesianas* de un vector o sea, todo vector de un plano puede ser considerado como la suma vectorial de dos vectores de direcciones distintas, dados en el plano, siendo los escalares a_1 y a_2 los módulos de los vectores componentes.

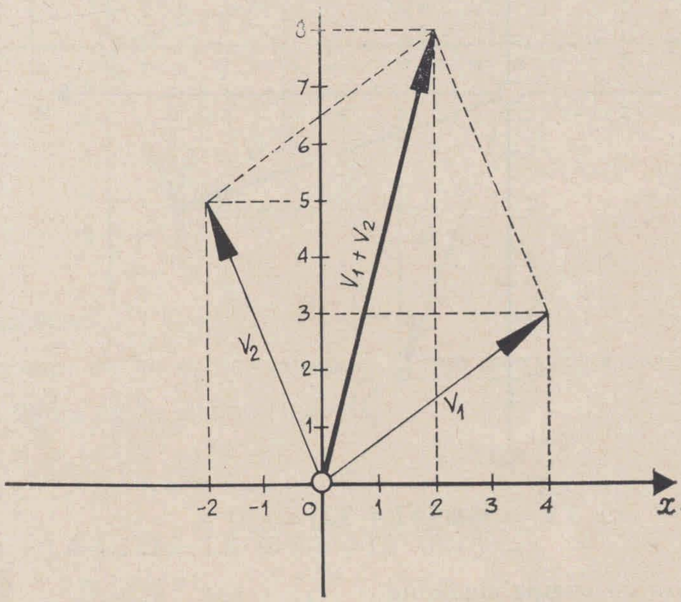
APLICACIONES.

Dados

$$\vec{V}_1 = 4I + 3J \qquad y \qquad \vec{V}_2 = -2I + 5J$$

calcular

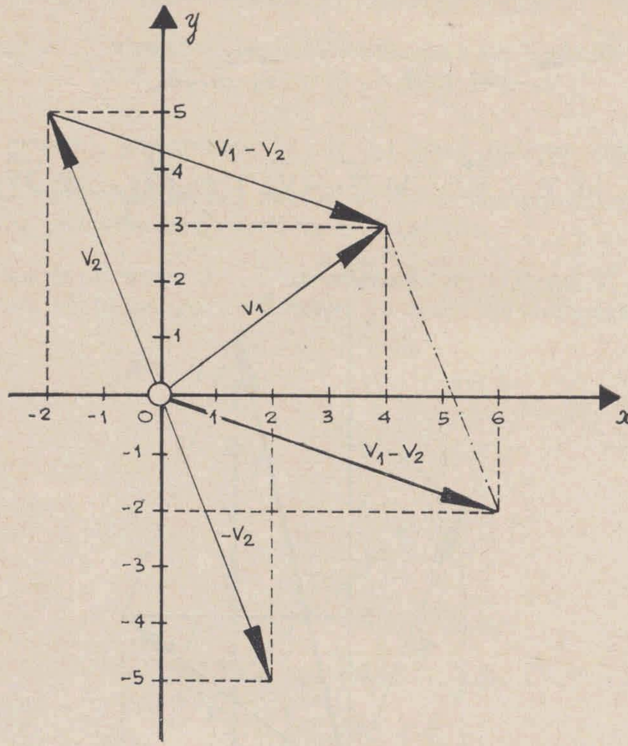
$$a)\ \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \ ;\ b)\ \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \ ;\ c)\ 3\vec{V}_1 \ ;\ d)\ 3\vec{V}_1 - \vec{V}_2$$



Solución:

$$a)\ \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = [4 + (-2)]\,I + (3 + 5)\,J$$
$$= 2\,I + 8\,J$$

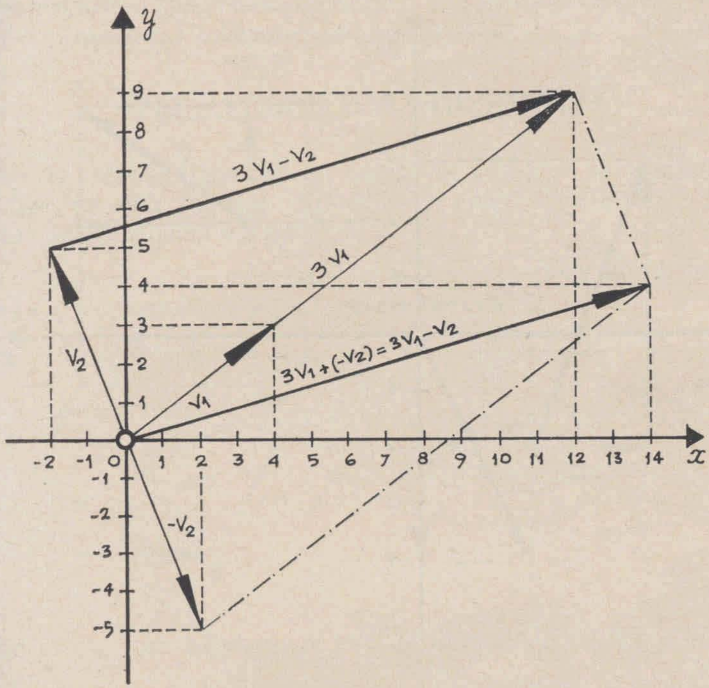
b) $\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} = [4 - (-2)]\, I + [3 - 5]\, J$
$= 6\, I - 2\, J$



c) $3\,\overrightarrow{V_1} = +3\,[4\, I + 3\, J] =$
$= (+3) \cdot 4\, I + (+3) \cdot 3\, J = 12\, I + 9\, J$

Figura en página siguiente

d) $3\,\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} = [12\, I + 9\, J] - [-2\, I + 5\, J]$
$= [12 - (-2)]\, I + [9 - 5]\, J$
$= 14\, I + 4\, J$



EJEMPLOS.

Expresar en forma cartesiana el vector correspondiente.

La figura en la página siguiente.

I) Dados los puntos

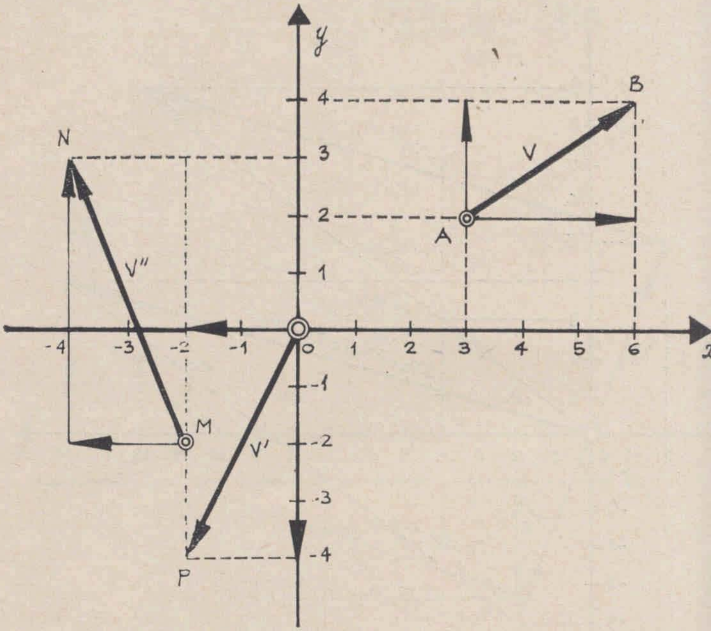
$$A\ (3, 2) \quad \text{y} \quad B\ (6, 4)$$

es

$$\begin{aligned} \vec{V} &= (6 - 3)\,I + (4 - 2)\,J \\ &= 3\,I + 2\,J \end{aligned}$$

II) Dados los puntos

$$O\ (0,\ 0) \quad \text{y} \quad P\ (-2,\ -4)$$



es

$$\vec{V'} = (-2-0)\,I + (-4-0)\,J$$
$$= -2\,I - 4\,J$$

III) Dados los puntos

$$M(-2,\ -2) \quad \text{y} \quad N(-4,\ 3)$$

es

$$\vec{V''} = [(-4) - (-2)]\,I + [3 - (-2)]\,J$$
$$= -2\,I + 5\,J$$

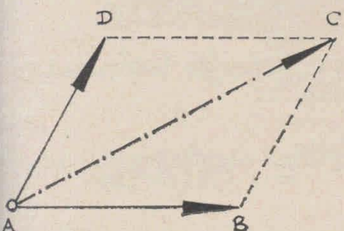
Igualdad de vectores. — Dado que todo vector queda individualizado por sus compoentes, se acepta la siguiente

DEFINICIÓN. — *Dos vectores se dice que son equipolentes cuando sus respectivos componentes son iguales.*

APLICACIONES A LA GEOMETRIA

Con la introducción del concepto de vectores se pueden demostrar de una manera diferente y elegante algunos de los teoremas estudiados en Geometría.

I) TEOREMA.— *Si un cuadrilátero convexo tiene dos lados paralelos y congruentes, es un paralelogramo.*



En símbolos:

$$\forall \quad ABCD : \overline{AB} \overset{//}{=} \overline{DC}$$

es ABCD paralelogramo.

En efecto, por hipótesis y por definición de vectores equipolentes

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \qquad \text{o bien} \qquad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \qquad (1)$$

Por suma de vectores

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

consecuencia del carácter transitivo

pero

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \quad \text{por (1)}$$

Sumando

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD})$$

por propiedad uniforme y asociativa de la suma de vectores y como $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}$ son vectores nulos, resulta

$$\overrightarrow{O} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{O}$$

pero como $\overrightarrow{0}$ es el *elemento neutro* de la suma, se tiene

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

Es decir, por definición de vectores equipolentes

$$\overline{BC} \mathrel{\overset{/\!/}{=}} \overline{AD}$$

Como la figura ABCD presenta sus pares de lados iguales y paralelos, ABCD es un *paralelogramo.*

II) Teorema. — *En todo paralelogramo las diagonales se cortan en partes iguales.*

En símbolos:

$$\forall \quad \overset{\square}{ABCD}$$

$$\overline{AC} \cap \overline{BD} = O \quad \text{es} \quad \overline{AO} = \overline{OC} \ \wedge \ \overline{BO} = \overline{OD}$$

Supongamos que O′ es el punto de la diagonal $\overline{BD}$, o sea

$$\overline{BO'} = \overline{O'D} \qquad \text{(I)}$$

Debemos probar que O′ es también punto medio de $\overline{AC}$.

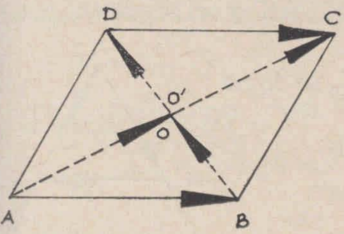
Considerando los vectores $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$, resulta

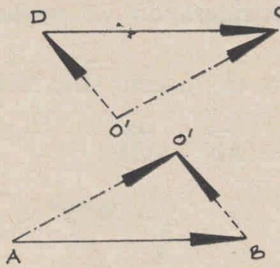
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ por definición de vectores

Sumando $\overrightarrow{BO'} = \overrightarrow{O'D}$ iguales por (I)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO'} = \overrightarrow{O'D} + \overrightarrow{DC}$$

or definición de suma de vectores y de igualdad de los mismos.





Pero como

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO'} = \overrightarrow{AO'}$$

$$\overrightarrow{O'D} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{O'C}$$

esulta

$$\overrightarrow{AO'} = \overrightarrow{O'C} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{AO'} = \overline{O'C} \quad \text{(II)} \\ \text{sentido } \overrightarrow{AO'} = \text{sentido } \overrightarrow{O'C} \end{cases}$$

Es decir, O′ es el punto medio de $\overline{AC}$, pero por (I) es también punto medio de $\overline{BD}$; luego podemos afirmar

$$\overline{AC} \cap \overline{BD} = O' = O$$

ya que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son segmentos distintos por ser las diagonales del ABCD.

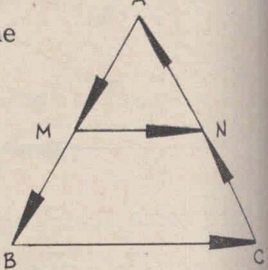
III) Teorema. — *La base media de un triángulo es paralela al tercer lado e igual a su mitad.*

En símbolos:

$$\forall \quad \triangle ABC$$

$$\wedge \quad \left.\begin{array}{l} \overline{AM} = \overline{MB} \\ \overline{AN} = \overline{NC} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \wedge \quad \begin{array}{l} MN \parallel BC \\ \overline{MN} = \dfrac{1}{2}\,\overline{BC} \end{array}$$

Considerando los vectores $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ y el opuesto $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y el opuesto $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{BC}$, se tiene



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$$ por resta de vectores y por hipótesis;

pero

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$ por producto de un escalar por un vector y por hipótesis;

y

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$ por igual razon.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

o bien

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

pues

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$$ por resta de vectores

por lo tanto,

$$\boxed{\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}} \quad \wedge \quad \boxed{MN \parallel BC}$$

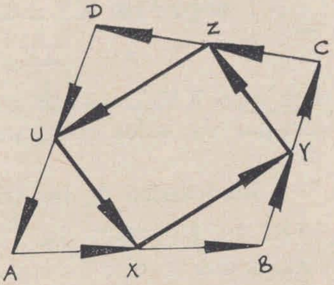
por definición de vectores equipolentes o iguales.

IV) TEOREMA. — *Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son vértices de un paralelogramo.*

$$\forall \ ABCD$$

$$\overline{AX} = \overline{XB} \wedge \overline{BY} = \overline{YC} \wedge \overline{CZ} = \overline{ZD} \wedge \overline{DU} = \overline{UA}$$

$\Rightarrow \quad \overset{\square}{UXYZ}$



En efecto, considerando los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DA}$, resulta, por la definición de suma de varios vectores, que forman una poligonal cerrada, siendo la resultante el *vector nulo.*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{O}$$

o bien

$$2\overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{BY} + 2\overrightarrow{ZD} + 2\overrightarrow{DU} = \overrightarrow{O} \quad \text{por hipótesis.}$$

Dividiendo ambos miembros por 2 y aplicando la propiedad asociativa, resulta

$$(\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BY}) + (\overrightarrow{ZD} + \overrightarrow{DU}) = \overrightarrow{O}$$

Efectuando la suma de vectores dentro de cada paréntesis, se tiene

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{ZU} = \overrightarrow{O}$$

Transportando el segundo miembro

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{O} - \overrightarrow{ZU} = -\overrightarrow{ZU}$$

por lo tanto,

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{UZ}$$

pues

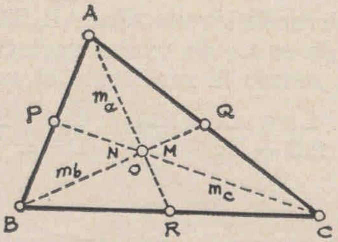
$$-\overrightarrow{ZU} = \overrightarrow{UZ} \quad \text{por ser vectores opuestos}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{segmento } \overline{XY} = \text{segmento } \overline{UZ} \\ \quad \wedge \quad XY \parallel UZ \end{array} \right.$$

lo que nos dice que XYZU es un paralelogramo por tener e cuadrilátero un par de lados congruentes y paralelos.

Baricentro de los triángulos

V) TEOREMA. — *En todo triángulo las medianas concurren en un punto situado a dos tercios de cada uno de ellas a partir de vértice respectivo.*



En símbolos:

$$\forall \quad \triangle ABC \; ; \; m_a \cap m_b \cap m_c = \{\text{punto O}\}$$

tal que

$$\overline{AO} = \frac{2}{3} m_a \; ; \; \overline{BO} = \frac{2}{3} m_b \; ; \; \overline{CO} = \frac{2}{3} m_c$$

Sea O un punto de m_a, N un punto de m_b y M un punto de m_c cuyas distancias a los vértices son, respectivamente, los dos tercios de la mediana a la cual pertenecen dichos puntos.

El teorema queda demostrado si se prueba que

$$O \equiv M \equiv N$$

es decir, que los tres puntos son coincidentes.

Probaremos que $O \equiv N$ demostrando que $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AN}$.

Cálculo de $\overrightarrow{AO}$.

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CR}) = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \frac{\overrightarrow{CB}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)$$ por suma de vectores y definición de vectores equipolentes.

Efectuando el producto y simplificando

$$\boxed{\overrightarrow{AO} = \frac{\overrightarrow{AC}}{3} + \frac{\overrightarrow{AB}}{3}} \qquad \text{(I)}$$

Cálculo de AN.

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ})$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{3} + \frac{\overrightarrow{BC}}{3} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AB}}{3} + \frac{\overrightarrow{BA}}{3} + \frac{\overrightarrow{AC}}{3}$$

$$\boxed{\vec{AN} = \frac{\vec{AB}}{3} + \frac{\vec{AC}}{3}} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\vec{AO} = \vec{AN} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} |\vec{AO}| = |\vec{AN}| \\ \text{sentido } \vec{AO} = \text{sentido } \vec{AN} \\ AO \parallel AN \end{array} \right.$$

Como estos vectores tienen el origen A común, son coincidentes, o sea que O y N son puntos también coincidentes.

Análogamente se demostraría que

$$N \equiv M$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{m_a \cap m_b \cap m_c = \{\text{punto O}\}}$$

Baricentro (Centro de gravedad)

El punto de intersección de las medianas de un triángulo se llama *baricentro o centro de gravedad.* En efecto, bastaría que un triángulo formado con una sustancia homogénea se apoyara sobre un alfiler en ese punto notable para que se mantuviera horizontal. En el baricentro se condensa, diríamos, toda la masa del cuerpo que se considera.

PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS 2

Razón de segmentos. — Se llama *razón entre dos segmentos* dos en un cierto orden, a un número entero, fraccionario o racional, tal que multiplicado por el segundo segmento dé por sultado al primero.

En símbolos:

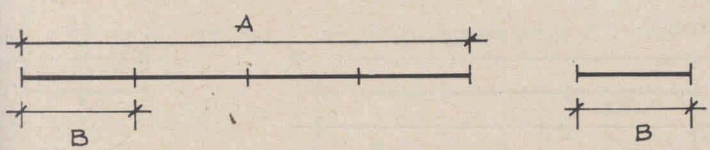
$$\frac{\text{segmento A}}{\text{segmento B}} = a$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$a \cdot \text{segmento B} = \text{segmento A}$$

Ejemplos:

I) Si el segmento B está contenido en el segmento A un número exacto de veces, 4 en el caso de la figura, se tiene:

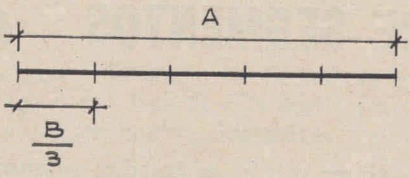


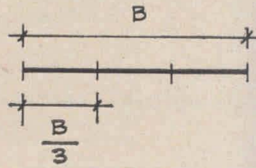
$$\frac{\text{segmento A}}{\text{segmento B}} = 4$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$4 \cdot \text{segmento B} = \text{segmento A}$$

II) Si el segmento B no está contenido un número exacto veces en el segmento A, pero lo está una de sus partes, en caso de la figura, la tercera parte del segmento B está con nida 5 veces en A, resulta:





$$\frac{\text{segmento A}}{\text{segmento B}} = \frac{5}{3}$$

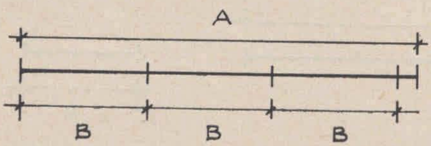
$$\Longleftrightarrow$$

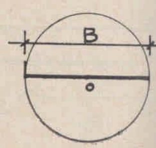
$$5 \cdot \frac{\text{segmento B}}{3} = \text{segmento A}$$

o bien

$$\overbrace{\frac{\text{segm. B}}{3} + \frac{\text{segm. B}}{3} + \cdots + \frac{\text{segm. B}}{3}}^{\text{5 veces}} = \text{segmento A}$$

III) En fin, si segmento A y segmento B son inconmensu rables (no tienen medida común), o sea ninguna parte alícuot de B está contenida un número exacto de veces en A, su razó resultará un número irracional.





$$\frac{\text{segmento A}}{\text{segmento B}} = 3{,}14159\ldots$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$3{,}14159\ldots \times \text{segmento B} = \text{segmento A}$$

Segmentos proporcionales.

Definición. — Dados los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, ..., $\overline{MN}$ se dice que son *proporcionales* a otros, $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$, ... $\overline{M'N'}$, cuando cada uno de los primeros tiene un segmento correspondiente entre los segundos y recíprocamente, siendo además iguales las razones entre los segmentos correspondientes (homólogos).

En símbolos

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$, ..., $\overline{MN}$ son proporcionales a $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$, ... $\overline{M'N'}$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \ldots = \frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}}$$

Ejemplos:

I) Si $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son triángulos equiláteros, se tiene:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} \quad \text{y} \quad \overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'A'}$$

luego resulta

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = a$$

siendo a un número racional o irracional.

$\Rightarrow$ *los lados de dos triángulos equiláteros son segmentos proporcionales.*

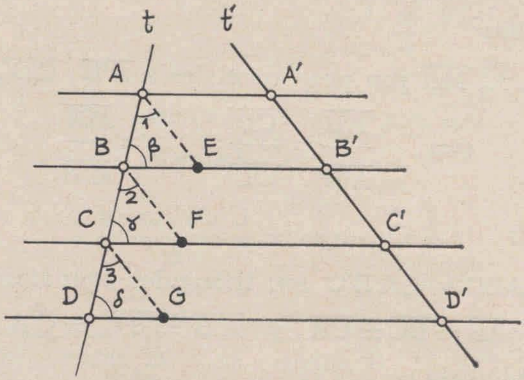
II) Si $\overline{A'B'} = \dfrac{\overline{AB}}{3}$; $\overline{B'C'} = \dfrac{\overline{BC}}{3}$ y $\overline{C'D'} = \dfrac{\overline{CD}}{3}$

se tendrá:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = 3$$

luego $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ y $\overline{C'D'}$

TEOREMA. — *Si varias paralelas son cortadas por dos transversales, a segmentos iguales de una de ellas, corresponden segmentos iguales de la otra.*



H) $AA' /\!/ BB' /\!/ CC' /\!/ DD'$

t y t' transversales

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$

T) $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'}$

D) Por los puntos A, B y C se trazan paralelas a t, determinándose

$$\begin{array}{c}\triangle ABE = \triangle BCF = \triangle CDG \\ \text{(segundo criterio)}\end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} & \text{por hipótesis} \\ \beta = \gamma = \delta & \begin{array}{l}\text{por correspondien-} \\ \text{tes entre} \\ \qquad BB' /\!/ CC' /\!/ DD' \\ \text{y } t \text{ transversal}\end{array} \\ \hat{1} = \hat{2} = \hat{3} & \begin{array}{l}\text{por la misma razón} \\ \text{anterior, siendo } t \text{ la} \\ \text{la transversal y} \\ \qquad \overline{AE} /\!/ \overline{BF} /\!/ \overline{CG} \\ \text{por ser paralelas a} \\ \text{una misma recta } t'.\end{array} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} \qquad (1)$$

por oponerse a ángulos iguales en triángulos iguales.

Pero, por lados opuestos de paralelogramos

$$\overline{AE} = \overline{A'B'} \quad ; \quad \overline{BF} = \overline{B'C'} \quad ; \quad \overline{CG} = \overline{C'D'}$$

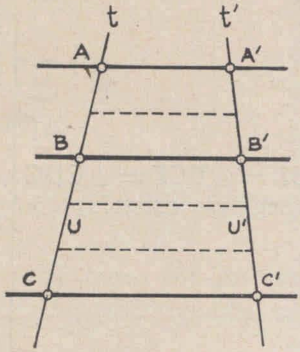
Como los primeros miembros de las tres igualdades son iguales por (1), resulta

$$\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'}$$

Teorema de Thales (*). — *Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas, es igual a la razón de los segmentos correspondientes de la otra.*

(*) Thales (640-546 a. C.) natural de la ciudad de Mileto (Asia Menor). A él se debe el comienzo del estudio razonado de la Geometría, por cuanto sus demostraciones de las propiedades de las figuras se fundaban en razonamientos lógicos, prescindiendo de la intuición y experimentación.

Organizó una escuela llamada Jónica, que era un verdadero centro de investigación, logrando aportaciones importantes, tales como el teorema de los ángulos inscriptos, trazado de perpendiculares, teorema de los segmentos proporcionales, etc., y en fin, la sistematización deductiva de la Geometría.



H) $AA' /\!/ BB' /\!/ CC'$

t y t' transversales

T) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$

D) Recordemos que *medida* de una cantidad con respecto otra, que se elige como unidad, es un *número* que resulta d efectuar la razón (cociente) de la primera cantidad por la se gunda.

Supongamos que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ sean conmensura bles, es decir que cada una de las medidas de estos segmento con respecto a (U), que se elige como unidad, sean un númer racional. Que la común unidad de medida (U) esté contenid (m) veces en $\overline{AB}$, en la figura $m = 2$, y (n) veces en $\overline{BC}$, en l figura $n = 3$.

Por ello, podemos expresar

$$\overline{AB} = m \cdot U$$

$$\overline{BC} = n \cdot U$$

Dividiendo $$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m \cdot U}{n \cdot U}$$

y simplificando $$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Dibujando por los puntos de división paralela a las rectas

AA'//BB'//CC' dadas, queda dividido $\overline{A'B'}$ en m partes iguales y $\overline{B'C'}$ en n partes iguales. (Teorema relativo al haz de rectas paralelas.)

Llamando U' a cualquiera de esas partes iguales, se tiene:

$$\overline{A'B'} = m \cdot U' \qquad \text{(en la fig. } m = 2\text{)}$$

$$\overline{B'C'} = n \cdot U' \qquad \text{(en la fig. } n = 3\text{)}$$

Dividiendo
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m \cdot U'}{n \cdot U'}$$

y simplificando
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n} \qquad (2)$$

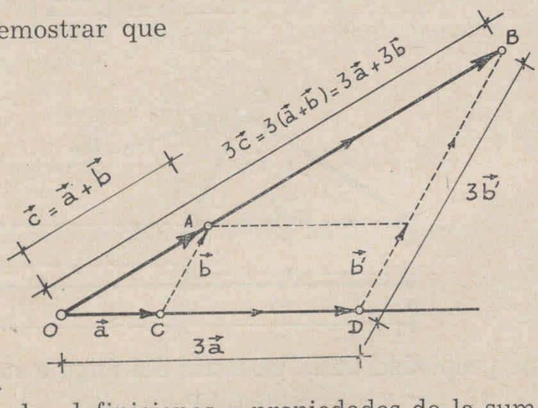
De (1) y (2), por consecuencia del carácter transitivo, se tiene:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

Desarrollo del Teorema de Thales por vectores.

Nos proponemos demostrar que

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$$



Teniendo en cuenta las definiciones y propiedades de la suma de vectores y producto de un vector por un escalar, se tiene:

$$\vec{b}' = \vec{b}$$
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$3\,\vec{c} = 3\,\vec{a} + 3\,\vec{b}' = 3\,\vec{a} + 3\,\vec{b} = 3\,(\vec{a} + \vec{b})$$

La traducción geométrica, es la siguiente:

$$\overline{OC} = \frac{1}{3}\,\overline{OD}$$

$$\overline{OA} = \frac{1}{3}\,\overline{OB}$$

Dividiendo y simplificando, resulta:

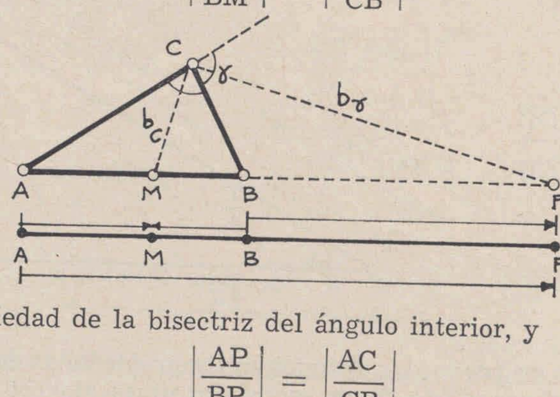
$$\boxed{\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}}$$

que es la expresión de la tesis.

Nota ilustrativa.

Se considera un triángulo escaleno ABC. Trazando la bisectriz interior b_c y la bisectriz b_γ del ángulo exterior γ, adyacente a $\hat{C}$, resulta

$$\left|\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}\right| = \left|\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right|$$



por propiedad de la bisectriz del ángulo interior, y

$$\left|\frac{AP}{BP}\right| = \left|\frac{AC}{CB}\right|$$

$$\text{lado opuesto } \hat{\gamma} = \text{lado opuesto } \hat{E}$$

es decir,

$$\overline{BE} = \overline{BC}$$

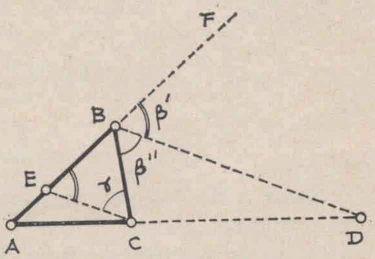
Reemplazando en (1), se obtiene

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

TEOREMA. — *La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos sustractivos* (*) *proporcionales a los otros dos lados.*

H) $\triangle ABC$; CBF exterior

BD bisectriz $C\hat{B}F$



T) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

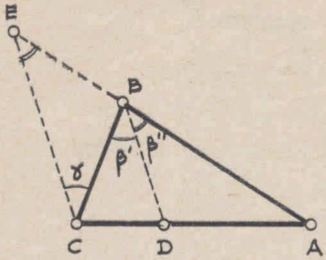
D) En el $\triangle ABD$ se traza $CE /\!/ BD$ y, por consecuencia del teorema de Thales, se tiene:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EB}} \qquad (1)$$

Pero por ángulos *correspondientes* entre paralelas es

$$\hat{\beta}'' = \hat{E}$$

(*) Se dice que los dos segmentos son sustractivos porque su diferencia es igual al lado del triángulo.



H) $\triangle ABC$

BD bisectriz de $\hat{B}$

T) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

D) Se traza la semirrecta $\overrightarrow{BE}$ opuesta a la $\overrightarrow{BA}$ y por C se construye CE paralela a BD.

Considerando el triángulo ACE se tiene que $BD /\!/ EC$ por construcción y, por lo tanto, por una consecuencia del teorema de Thales.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \qquad (1)$$

Vamos a demostrar ahora que $\overline{BE} = \overline{BC}$ para obtener la proporción de la tesis.

Por ángulos *correspondientes entre* paralelas

$$\hat{\beta}' = \hat{E} \qquad (2)$$

y por ángulos *alternos internos* entre paralelas:

$$\hat{\beta}' = \hat{\gamma}$$

Como

$$\hat{\beta}' = \hat{\beta}'' \quad \text{por ser } \overline{BD} \text{ bisectriz de } \hat{B}$$

resulta

$$\hat{\gamma} = \hat{E} \quad \text{por consecuencia del carácter transitivo}$$

Luego en el $\triangle EBC$, se tiene:

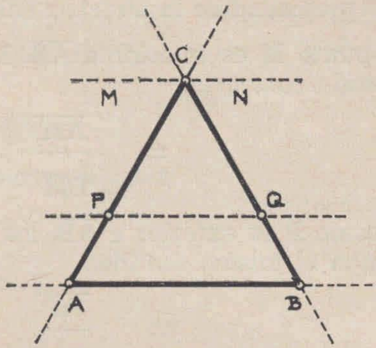
H) $\triangle ABC$

$PQ \parallel AB$

$\overline{PQ} \cap \overline{AC} =: \{P\}$

$\overline{PQ} \cap \overline{CB} =: \{Q\}$

T) $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \dfrac{\overline{CQ}}{\overline{QB}}$



D) Por el punto C se traza $MN \parallel PQ$; como $PQ \parallel AB$, por hipótesis se tiene $MN \parallel PQ \parallel AB$, que cortan a las transversales CA y CB.

Luego por el teorema de Thales, resulta:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}}$$

Consecuencia. — Considerando la figura anterior se puede establecer por el teorema de Thales que:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CQ}} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{CA}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{QB}}$$

Teorema de la bisectriz interior y exterior de un triángulo

TEOREMA. — *La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados.*

por propiedad de la bisectriz del ángulo exterior. Pero dado que el punto M es interior a $\overline{AB}$, los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ tienen *sentido contrario,*

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \quad \text{es negativa}$$

y como P es exterior a $\overline{AB}$, los segmentos orientados $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ tienen el mismo sentido,

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \quad \text{es positiva}$$

o sea

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = -\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$$

en este caso los puntos A, B, M y P forman un *grupo armónico.*

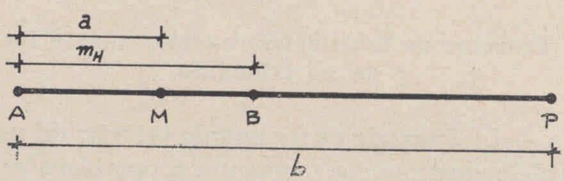
Los pitagóricos descubrieron que la relación armónica se presenta tanto en Geometría como en la Naturaleza, principalmente en Acústica y Optica.

Se puede demostrar que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = -\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$$

es equivalente a

$$m_H = \frac{2\,ab}{a+b}$$



vale decir, que m_H es la *media armónica* entre a y b. En Música se tiene que la cuarta es la media armónica entre el tono fundamental y la octava.

Problemas

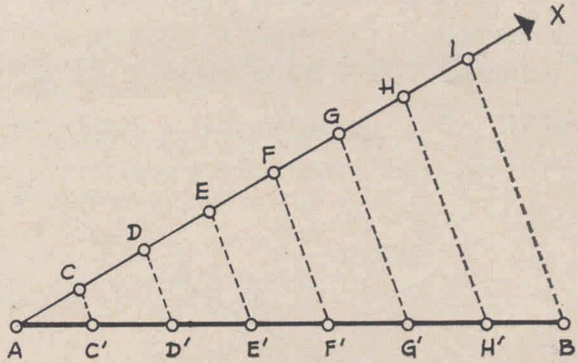
I) *Dividir un segmento en partes iguales.*

Datos

Segmento $\overline{AB}$

$n = 7$

Construcción



SOLUCIÓN. — Se traza, con origen A, una semirrecta $\overrightarrow{AX}$ y se dibujan en la misma 7 segmentos *consecutivos iguales* a partir de A:

$$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI}$$

Se une I con B y luego se trazan, por los puntos H, G, F... paralelas a IB. Estas cortan al $\overline{AB}$ dado en 7 partes iguales:

$$\boxed{\overline{AC'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'G'} = \overline{G'H'} = \overline{H'B}}$$

Justificación:

En efecto, las rectas p // CC' // DD' // EE' // FF' // ... son cortadas por las transversales AX y AB, y como:

$$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI}$$

por construcción, resulta

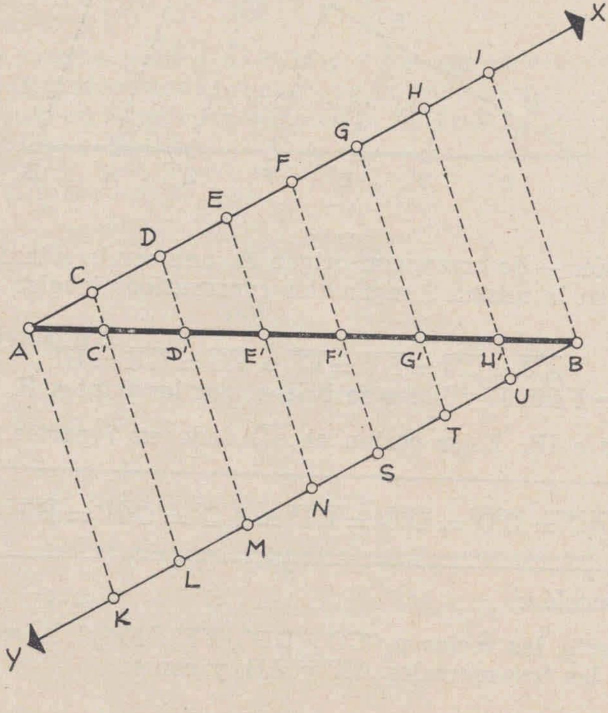
$$\overline{AC'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'G'} = \overline{G'H'} = \overline{H'B}$$

porque a *segmentos iguales en una transversal, corresponden segmentos iguales en la otra.*

OBSERVACIÓN. — Este método de división de un segmento en partes iguales, *es independiente de la semirrecta y del segmento unidad* que se eligen para efectuar la construcción.

Otro procedimiento:

Por los extremos A y B del segmento dado, se trazan las semirrectas $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{BY}$, que pertenezcan a distintos semiplanos,



respecto del segmento $\overline{AB}$ y que sean *paralelas*.

Se dibuja el segmento $\overline{AC}$, por ejemplo, 7 veces consecutivas, a partir del origen, sobre cada semirrecta, determinándose los puntos C, D, E, F, G, H, I, en la $\overrightarrow{AX}$ y los puntos U, T, S, N, M, L, K en la $\overrightarrow{BY}$. Uniendo I con B, H con U, G con T, etc., se obtienen los puntos C′, D′, E′, F′, G′ y H′, y por lo tanto:

$$\overline{AC'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'G'} = \overline{G'H'} = \overline{H'B}$$

en virtud de la propiedad anterior.

Esta construcción es *independiente* del *segmento unidad y de las semirrectas auxiliares elegidas.*

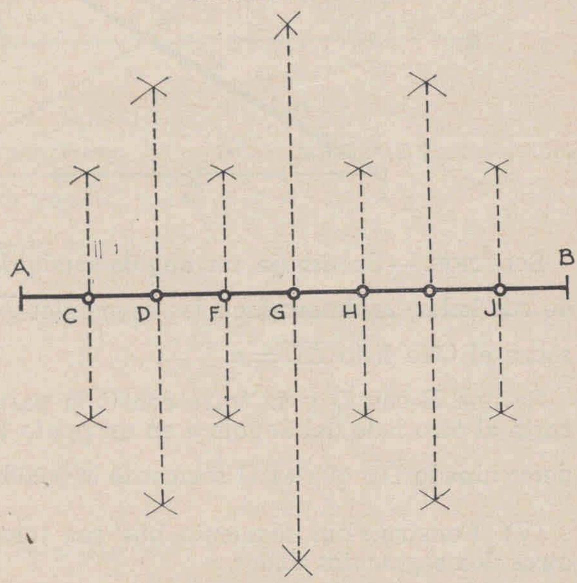
II) Si se quiere dividir un segmento en 2, 4, 8, 16, etc., partes iguales, el problema puede resolverse dibujando mediatrices.

Dividir un segmento en 8 partes iguales.

Dato

Segmento $\overline{AB}$

Construcción



Resulta, por definición de mediatriz,

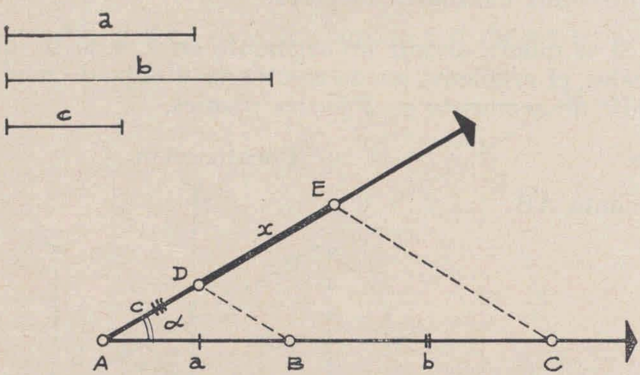
$$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI} = \overline{IJ} = \overline{JB}$$

III) Construir un segmento que sea cuarto proporcional a tres segmentos dados.

Datos.

Segmentos a, b y c.
Incógnita: Segmento x tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$



Solución. — Se dibuja un ángulo cualquiera α y sobre uno de sus lados, se determinan los segmentos $\overline{AB} = a$ y $\overline{CB} = b$ y sobre el otro lado $\overline{AD} = c$.

Se une B con D y se traza con C la paralela a $\overline{BD}$, la cual corta al otro lado del ángulo α en un punto E, con lo que queda determinado $\overline{DE}$ que es el segmento x pedido.

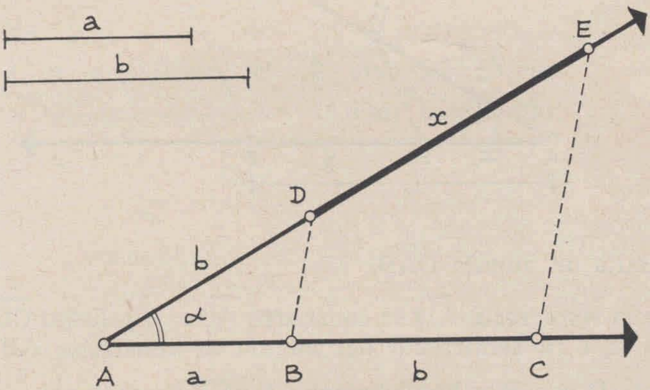
IV) Construir un segmento que sea tercero proporcional a otros dos segmentos dados.

Datos.

Segmentos a y b.

Incógnita: Segmento x tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$



Solución. — Se construye, como en el problema anterior, pero teniendo en cuenta que $\overline{BC} = \overline{AD} = b$.

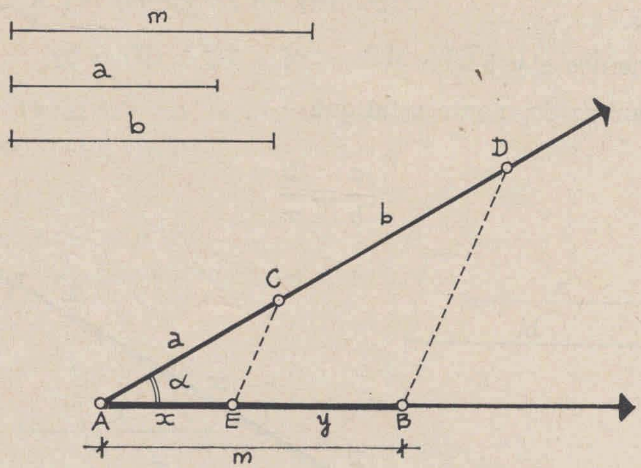
$\overline{DE}$ es el segmento x pedido.

V) Dividir un segmento en dos partes proporcionales a dos segmentos dados.

Datos.

Incógnitas: Segmentos x e y tales que

$$x + y = m \quad ; \quad \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Se dibuja un ángulo $\widehat{DAB}$.

Sobre la semirrecta $\overrightarrow{AD}$ se construye $\overline{AC} = a$ y luego $\overline{CD} = b$. Sobre la otra semirrecta del ángulo se construye $AB = m$.

Al unir D con B y luego trazar $CE /\!/ \overline{DB}$ se obtienen

$$\overline{AE} = x \qquad \text{y} \qquad \overline{EB} = y$$

tales que

$$x + y = m \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

por el teorema anterior.

VI) Dividir un segmento en tres partes iguales.

VII) Dividir un segmento en cuatro partes iguales (dos procedimientos).

VIII) Hallar el segmento *cuarto proporcional* a otros de 2 cm, 6 cm y 8 cm, respectivamente.

IX) Hallar cuatro segmentos que formen proporción.

X) Hallar el segmento *tercero proporcional* entre el segmento $\overline{AB}$ de 6 cm y el $\overline{CD}$ de 10 cm.

XI) Dividir un segmento en dos partes cuya razón sea igual un número dado.

XII) Cuatro paralelas son cortadas por dos trasnversales t y t'. Las paralelas determinan los segmentos a, b y c sobre t; x, y y z sobre t'.

Calcular

) b y c si $a = 10$ cm; $x = 8$ cm; $y = 13$ cm; $z = 14$ cm

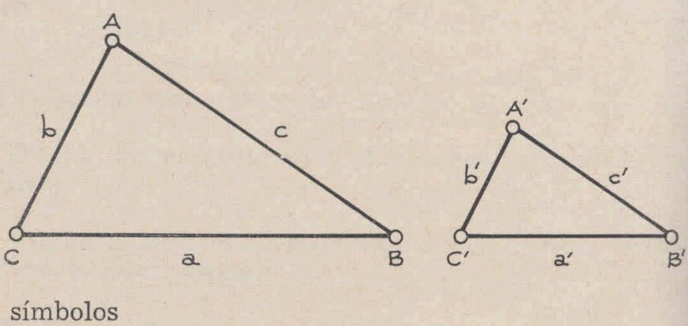
) y y x si $a = 4$ mm; $b = 10$ mm; $c = 12$ mm; $z = 8$ mm

3 TRIANGULOS SEMEJANTES

Al ampliar o reducir una fotografía, se obtiene una reprodu- ción de ésta que presenta la particularidad de tener la mism forma, pero distinto tamaño; se dice que las figuras, original reproducción, son *semejantes.*

Esta observación nos inspira la siguiente

DEFINICIÓN. — Dos triángulos son *semejantes* cuando sus ángu los son respectivamente iguales y sus lados homólogos (corre pondientes) son proporcionales.



En símbolos

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \iff \begin{cases} \overset{<}{A} = \overset{<}{A'} \\ \overset{<}{B} = \overset{<}{B'} \\ \overset{<}{C} = \overset{<}{C'} \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \end{cases}$$

Con otras palabras:

Si existe una correspondencia (S) entre los vértices de dos triángulos

$$\triangle ABC \leftrightarrow \triangle A'B'C'$$

si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados homólogos son proporcionales, entonces la correspondencia (S) es una semejanza, y decimos que los triángulos son *semejantes.*

Razón de semejanza. — El valor de las razones iguales entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes se llama razón de semejanza.

Sea

$$\overset{\triangle}{ABC} \text{ y } \overset{\triangle}{A'B'C'} \text{ y un segmento U}$$

si

$$\overline{AB} = 4\,U \;\; ; \;\; \overline{BC} = 8\,U \text{ y } \overline{CA} = 10\,U$$

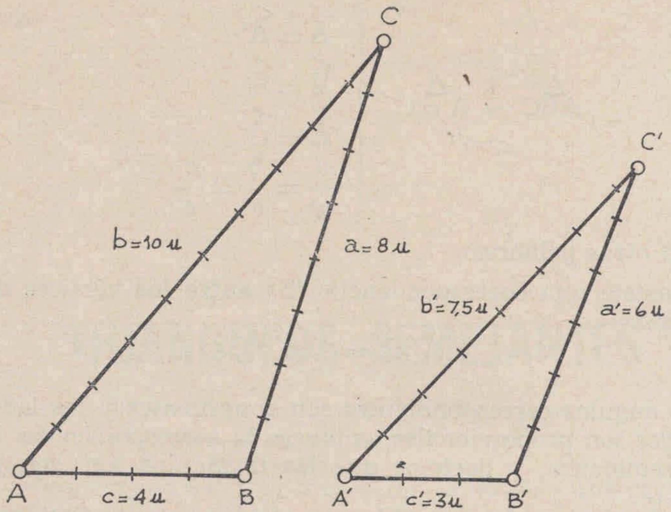
$$\text{y } \overline{A'B'} = 3\,U \;\; ; \;\; \overline{B'C'} = 6\,U \text{ y } \overline{C'A'} = 7{,}5\,U$$

se tiene

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = \frac{4}{3}$$

vale decir, que la razón de semejanza de los triángulos dados es igual a $\dfrac{4}{3}$.

En particular, si la razón de semejanza de dos triángulos es igual a la unidad, los dos triángulos son iguales.



Propiedades

I) Dos triángulos iguales son semejantes.

En efecto: sus ángulos son respectivamente iguales y sus lados homólogos, al ser también iguales. son proporcionales de razón *uno*.

II) Dos triángulos equiláteros son semejantes.

En efecto: sus ángulos son iguales a 60°. (1)

Los lados son iguales por ser equiláteros los triángulos, es decir:

$$a = b = c \quad \text{(lados del primer triángulo)}$$

y $$a' = b' = c' \quad \text{(lados del segundo triángulo)}$$

por lo tanto

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad (2)$$

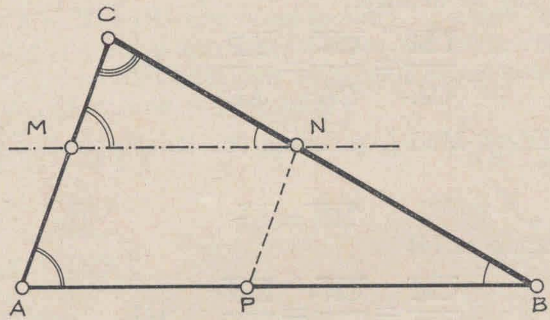
De (1) y (2) resulta que los triángulos equiláteros son semejantes.

Caracteres de la semejanza. — La semejanza de triángulos cumple, como las relaciones de igualdad, los tres caracteres: igualiforme, reflexivo o idéntico, simétrico o recíproco y transitivo y su consecuencia.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS. — *Toda paralela a un lado de un triángulo determina con las rectas a las que pertenecen los otros dos lados un triángulo semejante al primero.*

H) $\triangle ABC$
$MN /\!/ AB$
MN corta a las rectas AC y BC.

T) $\triangle MNC \sim \triangle ABC$.



D) Suponiendo que MN corta a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en los puntos interiores M y N, respectivamente:

$$\overline{MN} \cap \overline{AC} = M$$
$$\overline{MN} \cap \overline{BC} = N$$

a) *Igualdad de los ángulos.*

Los $\triangle MNC$ y $\triangle ABC$ (1) tienen
$\left\{\begin{array}{l} \hat{M} = \hat{A} \text{ por correspondientes entre } MN /\!/ AB \text{ y secante } AC \\ \hat{N} = \hat{B} \text{ por correspondientes entre } MN /\!/ AB \text{ y secante } BC \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ por común} \end{array}\right.$

b) *Proporcionalidad de los lados.*

Por el corolario del teorema de Thales, se verifica:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} \qquad (2)$$

Trazando por el punto N la NP∥AC, resulta por el corolari del teorema de Thales que:

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \qquad (3)$$

De (2) y (3) se deduce:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \qquad (4)$$

El cuadrilátero MNPA presenta sus lados opuestos paralelos por lo tanto:

$$\overline{MN} = \overline{AP}$$

Reemplazando en (4)

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} \qquad (5)$$

Las relaciones (1) y (5), por definición de triángulos seme- jantes, establecen que

$$\boxed{\triangle ABC \sim \triangle MNC}$$

Demuestre el lector el mismo teorema para el caso que M y N sean puntos exteriores a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, ya sea perteneciendo a las semirrectas $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$, respectivamente, o a $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$.

Sugerencia: La demostración es una consecuencia directa del teorema desarrollado (primer caso).

Condiciones que bastan para asegurar la semejanza de triángulos

CASOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.

Se estableció que dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales; pero se puede comprobar que si se cumplen algunas de estas relaciones forzosamente se verifican las otras.

Las condiciones que deben cumplir los elementos de dos triángulos para que pueda asegurarse que ellos son semejantes dan origen a los llamados *Casos de semejanza de triángulos.*

Primer caso de semejanza de triángulos.

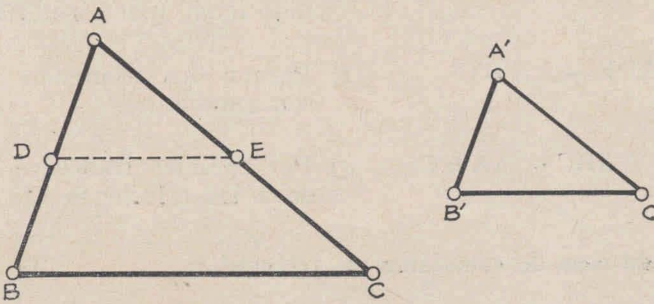
TEOREMA. — *Sea* (S) *una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los dos ángulos comprendidos son congruentes, entonces la correspondencia* (S) *es una semejanza.*

H) $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

T) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



D) Sobre el lado $\overline{AB}$, a partir de A, se construye $\overline{AD} = \overline{A'B'}$.
Se traza

$$DE \parallel BC$$

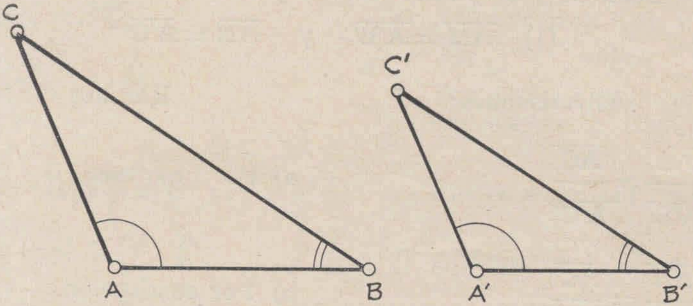
(Continuaremos la demostración en dos columnas.)

Relación	Razón o motivo
a) $\triangle ABC \sim \triangle ADE$	a) Por teorema fundamental d semejanza de triángulos.
b) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$	b) Por definición de triángulos semejantes.
c) O bien $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$	c) Por ser $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ por construcción.
d) $\Rightarrow \overline{A'C'} = \overline{AE}$	d) Al comparar la relación (c) co la hipótesis vemos que tres d sus términos son iguales, lueg el cuarto en la proporción también lo será.
e) Por otra parte, $\triangle ADE = \triangle A'B'C'$	e) Por tener dos lados iguales (un por construcción y otro por relación (*d*), y el ángulo comprendido igual (por hipótesis).
f) $\triangle ADE \sim \triangle A'B'C'$	f) Porque dos triángulos iguales son semejantes.
g) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$	g) Por carácter transitivo aplicado a las relaciones (*a*) y (*f*).

Segundo caso de semejanza de triángulos.

POSTULADO. — *Sea* (S) *una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia* (S) *es una semejanza.*

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \iff \begin{cases} \overset{<}{A} = \overset{<}{A'} \\ \overset{<}{B} = \overset{<}{B'} \\ \overset{<}{C} = \overset{<}{C'} \end{cases}$$

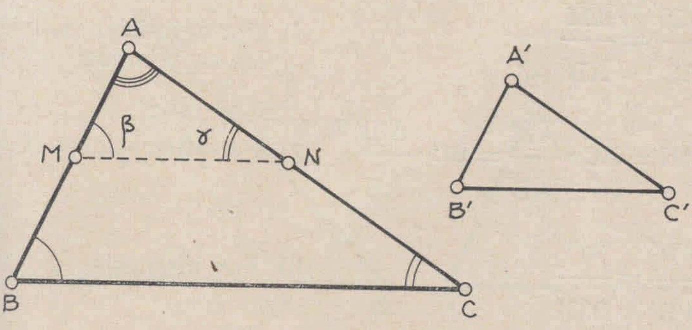


Se puede demostrar en forma análoga al primer caso, sin considerar las relaciones (b), (c) y (d).

Tercer caso de semejanza de triángulos.

TEOREMA. — *Sea* (S) *una correspondencia entre dos triángulos. Si los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia* (S) *es una semejanza.*

H) $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

T) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

D) Sean M y N puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, tales que

(1) $\overline{AM} = \overline{A'B'}$ y $\overline{AN} = \overline{A'C'}$

Afirmaciones	**Razones**
a) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$	a) Por hipótesis.
b) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AN}}$	b) Por sustitución.
c) $\overline{MN} \cap \overline{BC} = \emptyset$	c) Por la afirmación (b) y teorema de Thales.
d) $\hat{\beta} = \hat{B}$ y $\hat{\gamma} = \hat{C}$	d) Por ser correspondientes entre paralelas.
e) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AMN}$	e) Por segundo caso de semejanza.
f) $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$	f) Por definición de triángulos semejantes
g) $\overline{MN} = \overline{BC} \cdot \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = BC \cdot \dfrac{A'B'}{\overline{AB}}$	g) Por afirmaciones (f) y (1).
h) $\dfrac{\overline{AB}}{A'B'} = \dfrac{\overline{BC}}{B'\overline{C'}}$	h) Por hipótesis.

o bien

$$\overline{B'C'} = \overline{BC} \cdot \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

i) $\overline{MN} = \overline{B'C'}$ — i) Afirmaciones (g) y (h).

j) $\overset{\triangle}{AMN} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$ — j) Por tercer criterio de igualdad de triángulos.

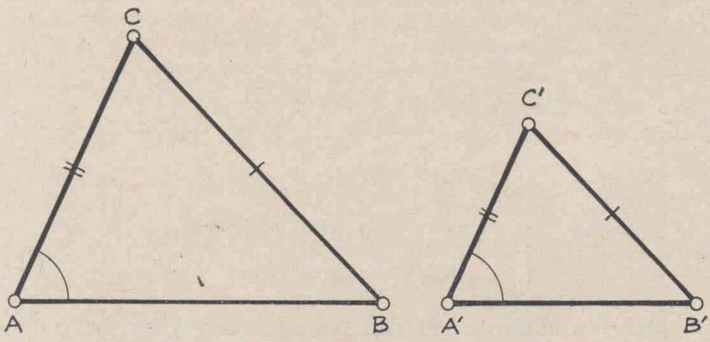
k) $\hat{\beta} = \hat{B}'$ y $\hat{\gamma} = \hat{C}'$ — k) Partes correspondientes.

l) $\hat{B} = \hat{B}'$ y $\hat{C} = \hat{C}'$ — l) Afirmaciones (d) y (k).

m) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ — m) Segundo caso de semejanza.

Cuarto caso de semejanza de triángulos.

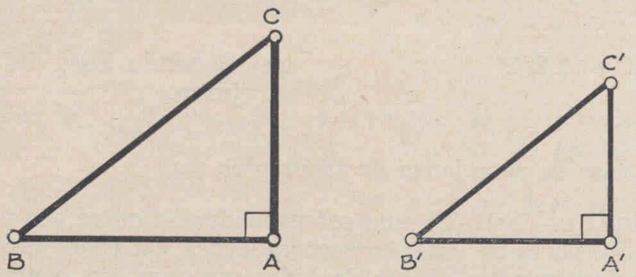
Postulado. — *Sea* (S) *una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos opuestos al par de lados mayores son congruentes, entonces la correspondencia* (S) *es una semejanza.*



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \iff \begin{cases} \dfrac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} \\ \overline{CB} > \overline{CA} \\ \overline{C'B'} > \overline{C'A'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \end{cases}$$

Este caso se puede demostrar en forma análoga a los anteriores.

Casos de semejanza de triángulos rectángulos. — Cuando los triángulos son rectángulos ya poseen un ángulo igual, el recto; por lo tanto, los casos de semejanza se enuncian como sigue:



PRIMER CASO. — *Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen sus dos catetos respectivamente proporcionales.*

Siendo en

$$\triangle BAC \text{ y } \triangle B'A'C' \begin{cases} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \end{cases}$$

como

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \text{ por rectos}$$

$$\text{es} \quad \overset{\triangle}{BAC} \sim \overset{\triangle}{B'A'C'}$$

por reunir las condiciones del primer caso anterior.

SEGUNDO CASO. — *Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen un ángulo agudo igual.*

Siendo $\hat{B} = \hat{B}'$

es $$\overset{\triangle}{BAC} \sim \overset{\triangle}{B'A'C'}$$

por ser $\hat{A} = \hat{A}'$ por rectos

luego reúnen las condiciones del segundo caso anterior.

TERCER CASO. — *Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen la hipotenusa y un cateto respectivamente proporcionales.*

Siendo

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{B'A'}}$$

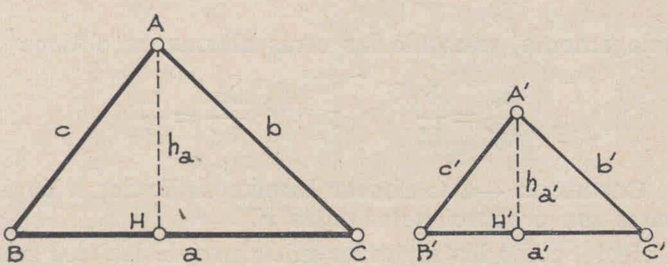
por ser $\hat{A} = \hat{A}'$ por rectos

es $BAC \sim B'A'C'$

pues reúnen las condiciones del cuarto caso anterior.

Propiedades de las alturas de los triángulos semejantes.

I) TEOREMA. — *Las alturas homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales a los lados correspondientes.*



H) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

T) $\frac{h_a}{h_a'} = \frac{a}{a'}$; $\frac{h_b}{h_b'} = \frac{b}{b'}$; $\frac{h_c}{h_c'} = \frac{c}{c'}$

D) Considerando en el dibujo únicamente las alturas h_a y h_a', se observa que quedan formados triángulos, siendo

$$\overset{\triangle}{AHC} \sim \overset{\triangle}{A'H'C'} \text{ por tener } \begin{cases} \hat{C} = \hat{C'} & \text{por ser los triángulos totales semejantes} \\ \hat{H} = \hat{H'} & \text{por rectos} \end{cases}$$

Por definición de triángulos semejantes es

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{H'C'}}$$

Escribiendo convenientemente las dos primeras razones

$$\frac{h_a}{h_a'} = \frac{b}{b'} \qquad (1)$$

Como por hipótesis los triángulos totales son semejantes, es

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad (2)$$

De (1) y (2)

$$\frac{h_a}{h_a'} = \frac{a}{a'}$$

Análogamente, trazando las otras alturas, se obtiene

$$\frac{h_b}{h_b'} = \frac{b}{b'} \quad \text{y} \quad \frac{h_c}{h_c'} = \frac{c}{c'}$$

II) Corolario. — *Las alturas homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales entre sí.*

En efecto, como los segundos miembros de las tres relaciones finales del teorema anterior son iguales, por ser los triángulos semejantes, también lo serán los primeros miembros.

$$\Rightarrow \qquad \frac{h_a}{h_a'} = \frac{h_b}{h_b'} = \frac{h_c}{h_c'}$$

III) Postulado. — *Las alturas* (h_a, h_b, h_c) *de un triángulo ABC son inversamente proporcionales a los lados del mismo.*

En símbolos:

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} \qquad \frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b} \qquad \frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a}$$

HOMOTECIA

Método para hacer ampliaciones.

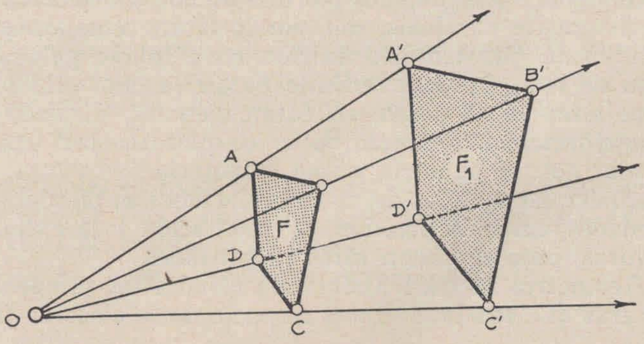
La figura ABCD se ha ampliado eligiendo un punto cualquiera O y trazando los rayos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$. Se han localizado luego los puntos A′, B′, C′ y D′, de modo que

$$\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$$

$$\overline{OB'} = k \cdot \overline{OB}$$

$$\overline{OC'} = k \cdot \overline{OC}$$

$$\overline{OD'} = k \cdot \overline{OD}$$



En el caso de la figura $k = 2$.

Por último, se han dibujado los segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'}$
y $\overline{D'A'}$.

Homotecia. — Teniendo en cuenta el grabado anterior podem decir que los puntos deducidos de una figura F por una *transfo mación* constituyen una figura F_1 que se dice obtenida de mediante *homotecia* (O, k). El punto O se llama centro y k el número característico de la homotecia.

Cada punto de F_1 es el homólogo de F del cual se ha deducid Los pares de puntos homólogos se expresan simbólicamente p $A' \equiv H(A)$. Las figuras F y F_1 se llaman *homotéticas.*

Ejercicio. — Dibujar una figura cuyos lados sean la mitad c los de otra dada.

Téngase en cuenta que $k = \frac{1}{2}$

Geometría Métrica Euclidiana

Hemos estudiado en el primero y segundo curso las *figur congruentes.* Euclides también abordó a las *figuras semejante*

Una semejanza es, en general, *una transformación.* Por ejem plo, una lámina de latón homogéneo que se contrae o se dilat por la acción del frío o del calor. Es decir, de la forma origin de la lámina se puede obtener otra configuración, mediante un transformación llamada *homotecia.*

Dos polígonos relacionados por una homotecia tienen sus lado respectivamente paralelos; son, por lo tanto, semejantes.

Se advierte que también existen en el plano polígonos qu carecen de lados respectivamente paralelos. Por ello se defin la semejanza en el plano, en forma general, diciendo que e *"la transformación producto de un desplazamiento"*, como cas particular de una simetría y una homotecia.

Al aplicar estas clases de transformaciones se pierden alguna propiedades, como la posición, la orientación y la extensión d las figuras, pero subsisten otras propiedades.

La Geometría Métrica Euclidiana estudia las propiedades d las figuras que son *invariantes* respecto de la clase de transfor maciones geométricas constituidas por todos los *desplazamientos*, más todas las *simetrías*, más todas las *semejanzas*. Todas estas *transformaciones* forman un *grupo*, el cual es el grupo fundamental de la Geometría Métrica Euclidiana.

Uno de los precursores de la *Teoría de Grupos*, tan importante en la Matemática Moderna, fue el joven matemático francés Galois, muerto en un duelo a los veinte años de edad. Pero el creador de la teoría de los grupos de transformaciones y de su técnica fue el matemático noruego Sophus Lie. La idea de aplicar esta teoría a la sistematización de la Geometría es de Felix Klein.

Problemas

I) Dibujar dos triángulos semejantes tales que la razón de sus lados sea igual a $\frac{2}{3}$.

II) El mismo ejercicio siendo 4 la razón.

III) Siendo a', b' y c' los lados correspondientes a $a = 4$ cm, $b = 6$ cm y $c = 8$ cm, de dos triángulos semejantes, calcular b' y c' si $a' = 3$ cm.

IV) Calcular a qué distancia de la base mayor de un trapecio se cortan los lados no paralelos del mismo, sabiendo que
base mayor $= 80$ cm; base menor $= 60$ cm; $h = 30$ cm

(Téngase en cuenta que las alturas homólogas son proporcionales a los lados correspondientes.)

R.: 120 cm

V) Calcular la altura de un poste que proyecta una sombra de 9 m en el instante en que un jalón de 1,80 m de longitud, colocado verticalmente, proyecta una sombra de 1,20 m.

R.: 13,50 m.

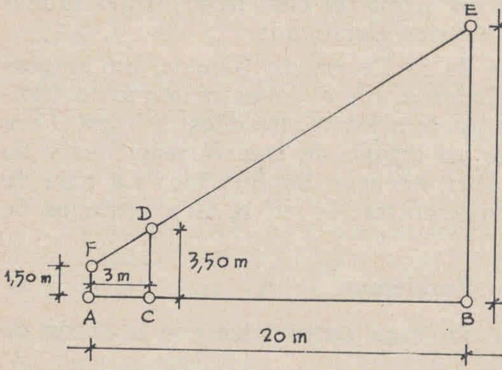
VI) Calcular el valor del lado de un triángulo equilátero sabiendo que su altura es la mitad de la de otro triángulo equilátero cuyo perímetro es de 90 cm.

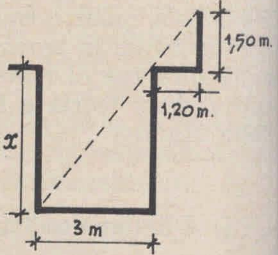
Aplicar la misma propiedad del ejercicio IV.

R.: 15 cm

VII) Con los datos que figuran en el croquis, calcular la distancia x.

R.: $x = 14{,}83$ m





VIII) Calcular con los datos del croquis la profundidad x del pozo.

R.: $x = 3{,}75$ m

IX) La altura (h) de un obelisco, por ejemplo, se calcula midiendo su sombra, así como la longitud de una estaca vertical y la de su sombra. La sombra del obelisco: $h' = 50$ m; la altura de la estaca: $e = 2$ m y su sombra: $e' = 1{,}40$ m. De la proporcionalidad de los catetos homólogos de los triángulos semejantes formados se obtiene la medida de la altura pedida.

R.: $h = 71{,}43$ m

X) Con los datos del croquis calcular la altura del triángulo DCE. (Figura a.)

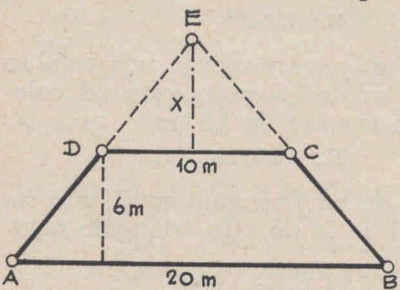


Figura a

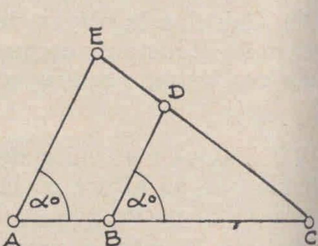


Figura b

R.: $x = 6$ m

XI) En la figura b

a) Si $\overline{ED} = 8$, $\overline{DC} = 16$ y $\overline{BC} = 20$, ¿cuánto mide $\overline{AB}$?

b) Si $\overline{ED} = 18$, $\overline{DC} = 30$ y $\overline{AB} = 9$, ¿cuánto mide $\overline{BC}$?

c) Si $\overline{ED} = 2{,}5$, $\overline{EC} = 10$ y $\overline{AC} = 9$, ¿cuánto mide $\overline{BC}$?

R.: a) 10
b) 15
c) 6,75

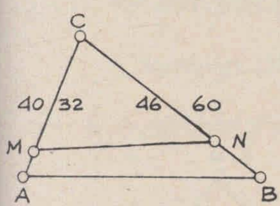


Figura c

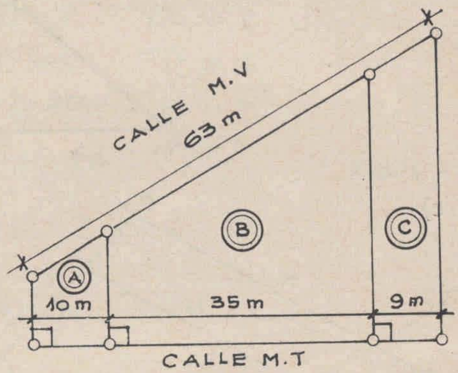


Figura d

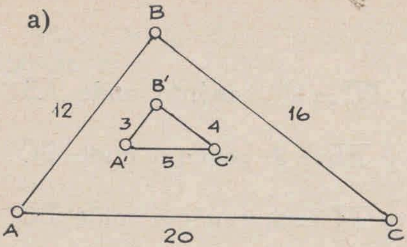
XII) Teniendo en cuenta los datos del croquis, ¿será posible que sea MN // AB? Justificar la respuesta. (Figura c).

XIII) Tres terrenos están ubicados entre las calles M. T. y M. V., como muestra la figura. El frente total de los terrenos en la calle M. V. mide 63 m. Calcular el frente de cada solar en esta calle. (Figura d).

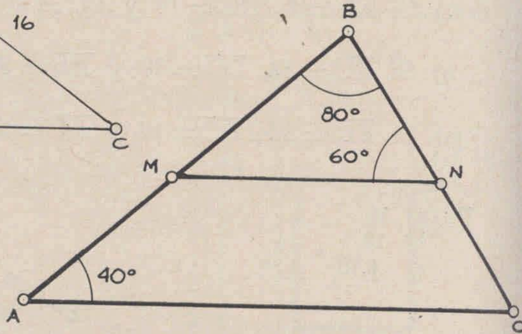
R.: 11,66 ; 40,83 ; 10,50

XIV) El grabado muestra cuatro pares de triángulos. En cada caso indicar si los dos triángulos son semejantes. Si lo son, enunciar el caso de semejanza correspondiente. (Figura en página siguiente.)

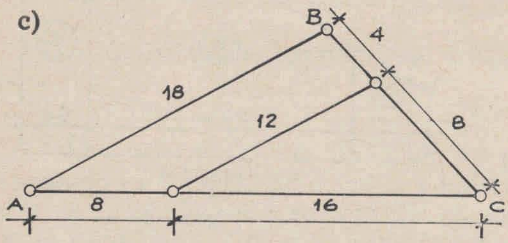
a)



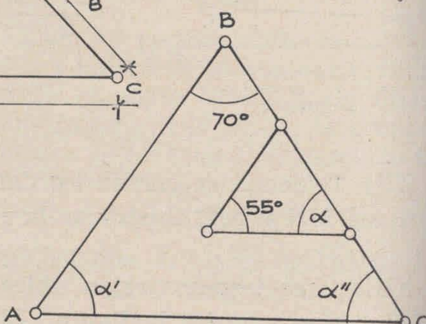
b)



c)



d)



R.: a) sí; 3º; b) sí; 2º; c) sí; 3º; d) no

XV) Dadas las longitudes de los lados de pares de triángulos, establecer para cada par si los triángulos son semejantes. Justificar las respuestas.

$$\text{a)} \begin{cases} \overline{AB} = 5 \quad ; \quad \overline{BC} = 6 \quad ; \quad \overline{CD} = 8 \\ \overline{A'B'} = \dfrac{5}{3} \quad ; \quad \overline{B'C'} = 2 \quad ; \quad \overline{C'D'} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \overline{AB} = 12 \;;\; \overline{BC} = 8 \;;\; \overline{CD} = 9 \\ \overline{A'B'} = 4 \;;\; \overline{B'C'} = \dfrac{8}{3} \;;\; \overline{C'D'} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \overline{AB} = 6 \;;\; \overline{BC} = 8 \;;\; \overline{CD} = 12 \\ \overline{A'B'} = 3 \;;\; \overline{B'C'} = 4 \;;\; \overline{C'D'} = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \overline{AB} = 3 \;;\; \overline{BC} = 7 \;;\; \overline{CD} = 5 \\ \overline{A'B'} = 4 \;;\; \overline{B'C'} = 8 \;;\; \overline{C'D'} = 6 \end{cases}$

R.: a) sí; b) sí; c) sí; d) no

XVI) En el croquis es $\overline{DB} \perp \overline{AC}$ Figura a

y también $\overline{DM} = \overline{MB} = 2\,\overline{AM} = \dfrac{1}{2}\,\overline{MC}$

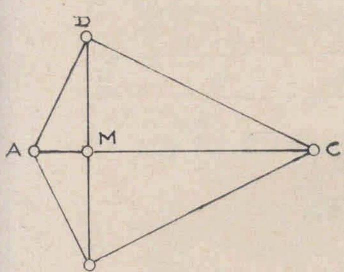


Figura a

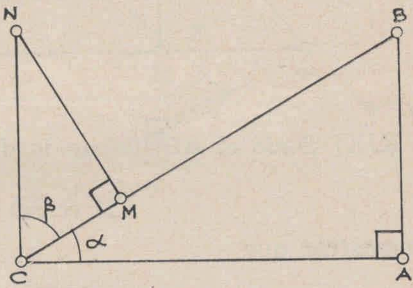


Figura b

Demostrar que: a) $\overset{\triangle}{AMD} \sim \overset{\triangle}{DMC}$

b) $\overset{\triangle}{BMC} \sim \overset{\triangle}{AMD}$

c) $\overline{AD} \perp \overline{DC}$

XVII) En el croquis se tiene

$\overline{NC} \perp \overline{CA} \;;\; \overline{BA} \perp \overline{CA}$

Figura b

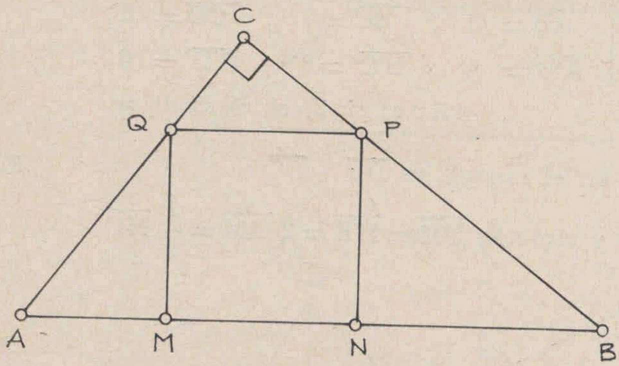
$\wedge \;\; \overline{MN} \perp \overline{CB}$

Demostrar que

$$\triangle NMC \sim \triangle BAC \quad \wedge \quad \overline{MN} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \overline{MC}$$

VIII) Con los datos del croquis demostrar que

a) $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MQ}} = \dfrac{\overline{CQ}}{\overline{CP}}$ b) $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MQ}} = \dfrac{\overline{PN}}{\overline{NB}}$

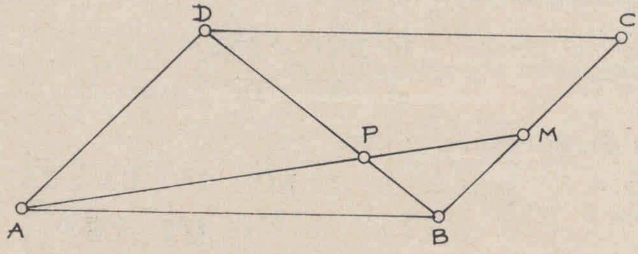


XIX) Dado el $\square ABCD$ con la diagonal $\overline{BD}$ tal que

$$\overline{AM} \cap \overline{BD} = \{P\},$$

demostrar que

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PM}}$$

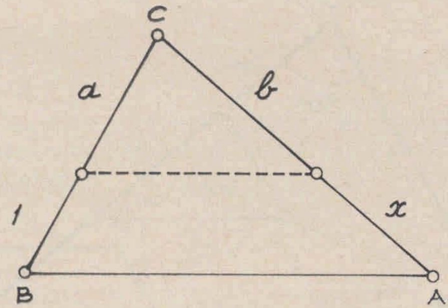


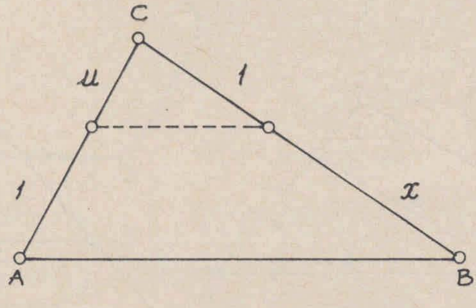
XX) En cada figura se ha dibujado un segmento paralelo a la base de un triángulo y se han marcado algunos segmentos.

a) Demostrar que $x = \dfrac{b}{a}$

(Sugerencia: conviene escribir una proporción.)

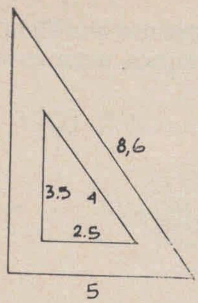
b) Demostrar que $x = \dfrac{1}{u}$



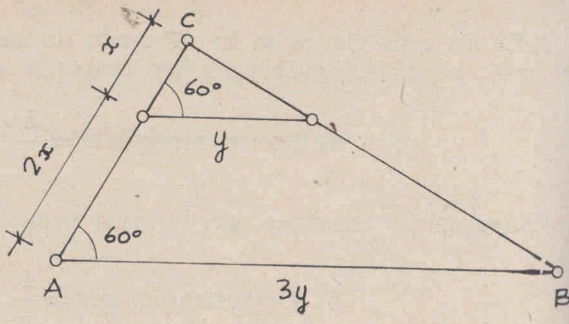


XXI) En el grabado figuran cinco pares de triángulos. En cada caso indicar si los dos triángulos son semejantes. Si lo son, enunciar el caso de semejanza correspondiente y su justificación. (Figura en página siguiente.)

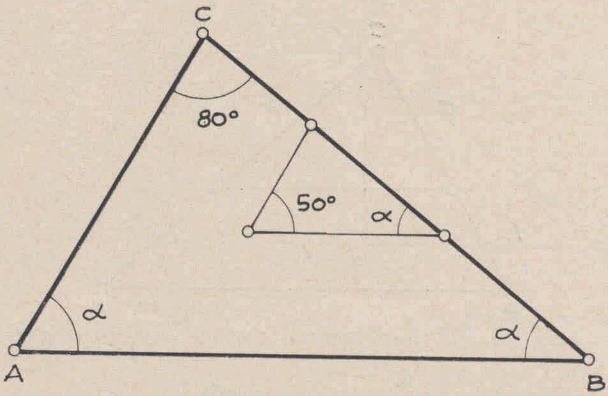
a)



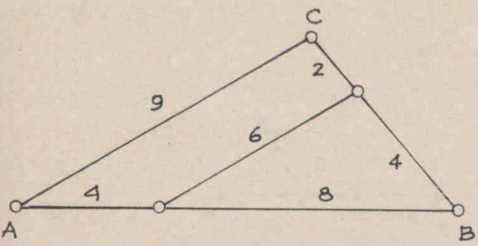
b)



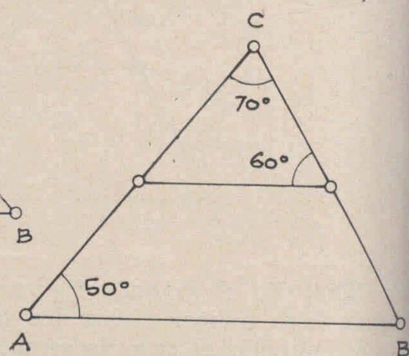
c)



d)



e)



R.: a) No son semejantes

b) Sí

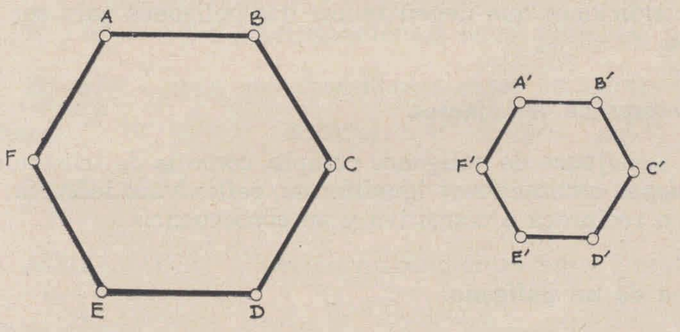
c) Sí

d) Sí

e) Sí

POLIGONOS SEMEJANTES 4

Definición. — Se dice que un *polígono es semejante* a otro, cuando sus ángulos son respectivamente iguales y sus lados homólogos, proporcionales.



En símbolos

Polígono ABCDEF $\sim$ Polígono A'B'C'D'E'F'

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \overset{<}{A} = \overset{<}{A'} \; ; \; \overset{<}{B} = \overset{<}{B'} \; ; \; \overset{<}{C} = \overset{<}{C'} \; ; \; \overset{<}{D} = \overset{<}{D'} \; ; \; \overset{<}{E} = \overset{<}{E'} \text{ y } \overset{<}{F} = \overset{<}{F'} \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}} = \dfrac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}} \end{cases}$$

Ordenación de vértices, lados y diagonales de un polígono.

Convención. — Se ha convenido enunciar un polígono leyendo las letras de sus vértices, a partir de uno de ellos, en un sentido denominándose por ello al origen como primer vértice, siguiéndolo el segundo, el tercero, etc.

Llamaremos primer lado al comprendido entre el primero y el segundo vértice, y así sucesivamente, segundo lado, tercero, etc., en el sentido establecido.

Si se trazan las diagonales correspondientes al primer vértice, designaremos primera diagonal a la que une dicho vértice con el tercero, segundo diagonal a la que lo une con el cuarto, etc.

Dos polígonos iguales son semejantes.

En efecto, por ser iguales los polígonos, *sus ángulos* también *son iguales*. En cuanto a la *proporcionalidad de lados*, como los de un polígono son iguales a los del otro, las *razones* son todas iguales entre sí por tener como valor *uno*, luego se cumplen las dos condiciones que deben reunir dos polígonos para ser semejantes.

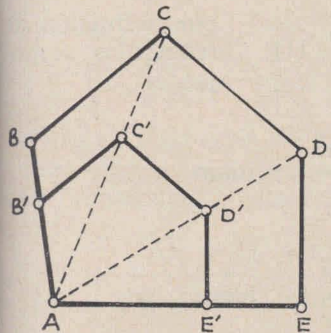
Caracteres de semejantes.

La semejanza de polígonos cumple, como la de triángulos, las relaciones o caracteres: igualiforme, reflexiva o idéntica; simétrica o recíproca o transitiva y su consecuencia

Forma de un polígono.

Definición. — Se llama *forma* a lo que tienen de igual dos polígonos semejantes. Es común decir que dos polígonos semejantes tienen igual forma, pero distinto tamaño.

Teorema fundamental de semejanza de polígonos. — *Si se ordenan los vértices consecutivos de un polígono a partir de uno de ellos y por un punto del primer lado se traza la paralela al segundo hasta cortar a la primera diagonal, por este punto la paralela al tercer lado hasta cortar a la segunda diagonal y así* *sucesivamente hasta cortar al último lado, el polígono que así se forma es semejante al lado.*



H) ABCDE polígono

B′ punto de $\overline{AB}$

B′C′ // CD; C′ punto de $\overline{AC}$

C′D′ // CD; D′ punto de $\overline{AD}$

D′E′ // DE; E′ punto de $\overline{AE}$

T) AB′C′D′E′ ~ ABCDE

D) Para demostrar la tesis se debe probar la *igualdad de los ángulos* y la *proporcionalidad de los lados.*

1) $\hat{A} = \hat{A}$ por carácter idéntico

$\hat{B} = \hat{B}'$ por correspondientes entre paralelas

$\hat{E} = \hat{E}'$ por correspondientes entre paralelas

Además:

$B'\hat{C}'A = B\hat{C}A$ por correspondientes entre paralelas

$+$

$A\hat{C}'D' = A\hat{C}D$ por correspondientes entre paralelas

$\Rightarrow \quad \hat{C}' = \hat{C}$

Análogamente $\hat{D}' = \hat{D}$

2) Siendo, por hipótesis

C′D′ // CD en el △ACD

$\overline{B'C'}$ // BC en el △ABC

D′E′ // DE en el △ADE

Se tiene, por el teorema fundamental de semejanza de lo triángulos:

$$\overset{\triangle}{AB'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \quad (1)$$ por definición d triángulos seme jantes

$$\overset{\triangle}{AC'D'} \sim \overset{\triangle}{ACD} \Rightarrow \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD}} \quad (2)$$ Idem.

$$\overset{\triangle}{AD'E'} \sim \overset{\triangle}{ADE} \Rightarrow \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AE}} \quad (3)$$ Idem.

De (1), (2), y (3), resulta por carácter transitivo de la igualdad que todas esas razones son iguales y en particular:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AE}}$$

Luego, por tener los polígonos sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales resulta, por definición de polígonos semejantes,

$$\boxed{AB'C'D'E' \sim ABCDE}$$

Relación de los perímetros de polígonos semejantes.

TEOREMA. — *La razón de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de dos de sus lados homólogos cualesquiera.*

H) Polígono $ABCDEF \sim A'B'C'D'E'F'$

T) $$\frac{\text{Perímetro } ABCDEF}{\text{Perímetro } A'B'C'D'E'F'} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

D) Por ser los dos polígonos semejantes sus lados homólogos son proporcionales, luego:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}}=\frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}}$$

Pero en toda serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente, luego:

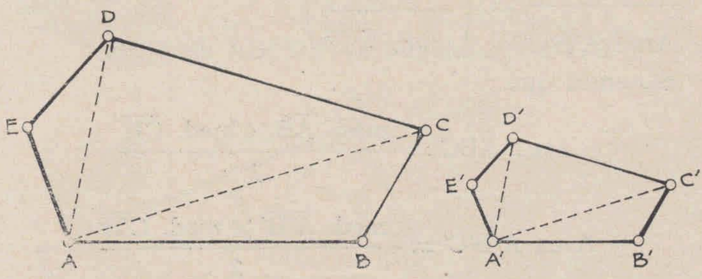
$$\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA}}{\overline{A'B'}+\overline{B'C'}+\overline{C'D'}+\overline{D'E'}+\overline{E'F'}+\overline{F'A'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

o bien

$$\frac{\text{Perímetro ABCDEF}}{\text{Perímetro A'B'C'D'E'F'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

que es la expresión de la tesis.

Propiedad. — *Si por dos vértices homólogos de dos polígonos semejantes se trazan en cada uno de éstos todas las diagonales posibles, los polígonos quedan descompuestos en igual número de triángulos ordenadamente semejantes.*



Siendo: polígono ABCDE $\sim$ polígono A'B'C'D'E'

A y A' vértices homólogos; $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{A'C'}$ y $\overline{A'D'}$ diagonales $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$; $\triangle ACD$ y $\triangle A'C'D'$; $\triangle ADE$ y $\triangle A'D'E'$ triángulos ordenadamente resultante.

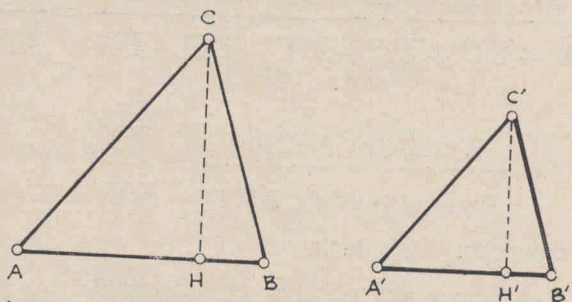
Se cumple que:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$; $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$

Sugerencia. — Se demuestra esta propiedad teniendo en cuenta la proporcionalidad de los lados homólogos y la igualdad de los ángulos.

Razón de las áreas de los polígonos semejantes.

TEOREMA. — *La razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de las medidas de dos de sus lados homólogos, con respecto a la misma unidad.*



H) $\overset{\triangle}{ABC} \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$

T) $$\frac{\text{Area } \overset{\triangle}{ABC}}{\text{Area } A'\overset{\triangle}{B'}C'} = \left(\frac{\text{med. } \overline{AB}}{\text{med. } \overline{A'B'}}\right)^2$$

D) Sabemos que

$$\text{Area } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{\text{med. } \overline{AB} \times \text{med. } \overline{CH}}{2}$$

y que

$$\text{Area } A'\overset{\triangle}{B'}C' = \frac{\text{med. } \overline{A'B'} \times \text{med. } \overline{C'H'}}{2}$$

Dividiendo miembro a miembro

$$\frac{\text{Area } \overset{\triangle}{ABC}}{\text{Area } A'\overset{\triangle}{B'}C'} = \frac{\text{med. } \overline{AB} \times \text{med. } \overline{CH}}{\text{med. } \overline{A'B'} \times \text{med. } \overline{C'H'}} \quad (1)$$

donde se ha simplicado el divisor 2.

Por propiedad de las alturas de dos triángulos semejantes, se tiene:

$$\frac{\text{med. } \overline{CH}}{\text{med. } \overline{C'H'}} = \frac{\text{med. } \overline{AB}}{\text{med. } \overline{A'B'}}$$

Reemplazando en (1)

$$\frac{\text{Area } \overset{\triangle}{ABC}}{\text{Area } \overset{\triangle}{A'B'C'}} = \frac{\text{med. } \overline{AB}}{\text{med. } \overline{A'B'}} \times \frac{\text{med. } \overline{AB}}{\text{med. } \overline{A'B'}}$$

o bien

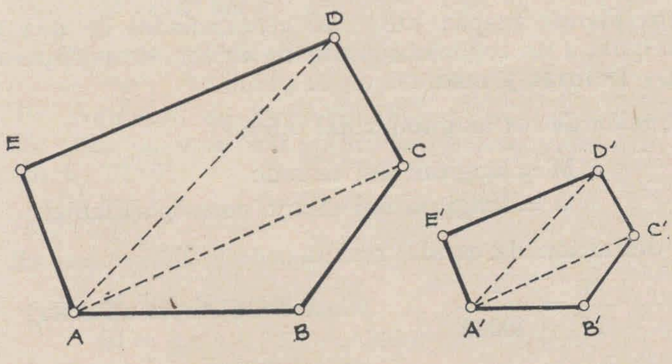
$$\frac{\text{Area } \overset{\triangle}{ABC}}{\text{Area } \overset{\triangle}{A'B'C'}} = \left(\frac{\text{med. } \overline{AB}}{\text{med. } \overline{A'B'}} \right)^2$$

que es la expresión de la tesis.

Propiedad. — *La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de las medidas de dos de sus lados homólogos, con respecto a la misma unidad.*

Siendo:

Polígono ABCDE $\sim$ Polígono A'B'C'D'E'



Se cumple que:

$$\frac{\text{Area ABCDE}}{\text{Area A'B'C'D'E'}} = \left(\frac{\text{med. AB}}{\text{med. A'B'}}\right)^2$$

Sugerencia. — Para demostrar esta propiedad conviene tener en cuenta el teorema anterior y la proporcionalidad de los lados homólogos.

ESCALA

Plano del terreno. — Si se dibuja sobre un papel una figura de la *misma forma* que un lote de un terreno, un campo de fútbol, etc., se obtiene lo que se denomina el plano del terreno.

Ahora bien, para trazar un plano de terreno es necesario conocer la razón de semejanza, la cual, tratándose de un dibujo, un mapa, etc., se llama *escala.* Escala es, por lo tanto, *la razón entre una longitud cualquiera del dibujo y la longitud homóloga del terreno y objeto representado.*

Claro está que las escalas son números, por ser razones entre cantidades de la misma magnitud. Suelen elegirse números fraccionarios de manera que el numerador sea la unidad y el denominador sea el número de veces que dicha unidad está contenida en la longitud correspondiente del objeto a representar. Así, un plano de escala 1 : 10000, significa que una longitud cualquiera del plano es, en el terreno, 10000 veces mayor; recíprocamente, una longitud del terreno se representa en el plano por otra 10000 veces menor.

Algunos planos, mapas, etc., van acompañados de una *escala* que es igual a un segmento graduado en km, m, etc., para facilitar las lecturas y medidas en el plano.

Obtención de las longitudes del dibujo.

M = longitud del terreno

m = longitud del dibujo correspondiente.

Por definición de escala, resulta

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{10000} \qquad \text{(Caso del ejemplo anterior)}$$

$$\text{luego} \quad m = \frac{M}{10000}$$

Lo cual se expresa: *la longitud del dibujo se obtiene dividiendo la longitud del terreno por el divisor de la escala.*

Obtención de las longitudes del terreno.

$$\text{Siendo} \quad \frac{m}{M} = \frac{1}{10000}$$

$$\text{resulta} \quad M = m \times 10000$$

Vale decir: *la longitud del terreno se obtiene multiplicando la longitud del dibujo por el divisor de la escala.*

Problemas

I) En un plano de la provincia de Buenos Aires dibujado de acuerdo a la escala 1 : 1000000, ¿cuál es la distancia real entre Tandil y Mar del Plata si dicha distancia medida en el plano es de 15 cm?

Solución:

$$M = m \times 1000000$$
$$M = 15 \text{ cm} \times 1000000 = 15000000 \text{ cm}$$
$$M = 150000 \text{ m}$$
$$M = 150 \text{ km}$$

R.: La distancia pedida es de 150 km.

II) Un segmento de 8 cm medido en un plano de escala 1 : 10000. ¿Con cuántos centímetros se representa en otro plano de escala 1 : 25000?

Solución:

La dimensión real se obtiene

$$M = m \times 10000$$
$$M = 8 \text{ cm} \times 10000 = 80000 \text{ cm} = 800 \text{ m}$$

La longitud del segmento en el nuevo plano de escala 1 : 25000, se obtiene

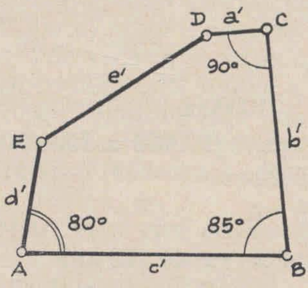
$$m = \frac{M}{25000}$$

$$m = \frac{800 \text{ m}}{25000} = 0{,}032 \text{ m}$$

$$\text{luego} \quad m = 3{,}2 \text{ cm}$$

R.: La longitud del segmento en el nuevo plano será igual a 3,2 cm.

III) Construir en escala 1 : 500 el plano de un terreno, siendo las dimensiones de cuatro de sus lados consecutivos: $a = 8{,}66$ m, $b = 30$ m, $c = 35$ m, $d = 15$ m; el ángulo comprendido entre los dos primeros de 90°, el $\overset{<}{bc} = 85°$ y el $\overset{<}{cd} = 80°$. Calcular los valores del quinto lado y de los otros dos ángulos $\overset{<}{de}$ y $\overset{<}{ea}$.



Solución:

$a = 8{,}66$ m, en el plano estará representado por

$$a' = \frac{8{,}66 \text{ m}}{500} = 0{,}01732 \text{ m} = 1{,}732 \text{ cm}$$

$$b = 30 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad b' = \frac{30 \text{ m}}{500} = 0{,}06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$$

$$c = 50\text{ m} \Rightarrow c' = \frac{35\text{ m}}{500} = 0{,}07\text{ m} = 7\text{ cm}$$

$$d = 15\text{ m} \Rightarrow d' = \frac{15\text{ m}}{500} = 0{,}03\text{ m} = 3\text{ cm}$$

Los ángulos no se reducen con la escala.

Como $e' = 4{,}1$ cm en el plano su dimensión real

$$e = 4{,}1\text{ cm} \times 500 = 2300\text{ cm, luego } e = 23\text{ m}$$

El $\overset{<}{de} = 141°$ y $\overset{<}{ea} = 144°$.

NOTA. — El grabado debe considerarse únicamente como figura de análisis.

IV) En un plano de la provincia de Buenos Aires dibujado a escala 1 : 1000000. ¿Con cuántos mm se representará un km del terreno?

R.: 1 mm

V) En un plano construido en la escala 1 : 1000 se han medido las longitudes siguientes: $a = 4$ cm; $b = 9$ cm; $c = 12$ cm, $d = 30$ cm. ¿Qué longitud del terreno representan?

R.: $a = 40$ m; $b = 90$ m; $c = 120$ m; $d = 300$ m

VI) Construir en escala 1 : 500 el plano de un trreno sabiendo que tres de sus lados consecutivos tienen 10 m; 30 m y 12 m, respectivamente, y que el ángulo comprendido entre los dos primeros es de 82° y entre los dos últimos 112°. Calcular los valores del otro lado; de los otros dos ángulos y de las diagonales de ese terreno.

R.: El cuarto lado = 32,50 m
Diagonal $d_1 = 36$ m
Diagonal $d_2 = 30$ m
$\hat{C} = 69°$
$\hat{D} = 97°$

VII) Construir en la escala 1 : 500 el plano de un terreno de forma cuadrangular, sabiendo que:

$$\overline{AB} = 8{,}66 \text{ m} \qquad \overline{AD} = 32 \text{ m} \qquad \overline{DC} = 12 \text{ m}$$

$$\hat{A} = 89° \qquad \hat{D} = 105°$$

Calcular los valores del cuarto lado y de las dos diagonales.

R.: $\overline{CB} = 28{,}50$ m

$\overline{BD} = 33$ m

$\overline{AC} = 33{,}50$ m

VIII) La razón de semejanza de dos polígonos semejantes es $\frac{4}{3}$. La superficie del mayor es de 100 dm². ¿Cuántos centímetros cuadrados de superficie tiene el menor?

R.: S = 5.625 cm²

IX) Calcular el área del $\triangle$MNP sabiendo que es semejante al $\triangle$ABC; que $\overline{MN} = 1{,}2$ dm; $\overline{AB} = 300$ dm y que la superficie de $\triangle$ABC es de 180.000 dm².

R.: Sup. $\triangle$MNP = 28.800 dm²

X) Constrúyase un $\triangle$ABC de 30, 35 y 40 mm de lado y luego otro que sea semejante y tenga 146 mm de perímetro.

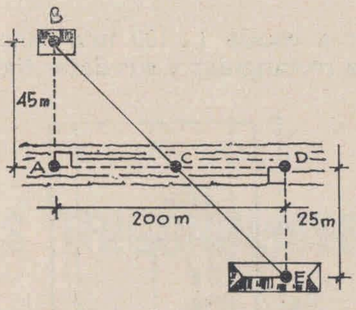
R.: El lado homólogo del primero sale 41,7 m.

XI) Una hacienda y un mercado están en lados opuestos de un arroyo que fluye en línea recta. Los datos figuran en el croquis.

Hacer un dibujo a escala y usarlo para determinar las siguientes distancias:

a) La longitud aproximada del camino más corto entre la hacienda y el mercado, o sea, de B a E.

b) Si este camino cruza el arroyo en C, hallar las distancias de D a C y de C a A.



XII) En un plano de escala 1 : 200 el segmento mide 5 cm. ¿Cuál es su medida real?

R.: 10 m

XIII) Dos triángulos son semejantes: el perímetro de uno de ellos vale 240 m y los lados del otro son respectivamente 15,20 y 25 m. Calcular los lados del primero.

R.: 60 m, 80 m y 100 m

XIV) Siendo $\frac{3}{5}$ la razón de semejanza de dos polígonos y 60 m el perímetro del menor, calcular el otro perímetro.

R.: 100 m

XV) En un mapa de escala 1 : 5.000.000, se ha medido un segmento de recta igual a 2 cm. ¿Cuál es la distancia real?

R.: 100 m

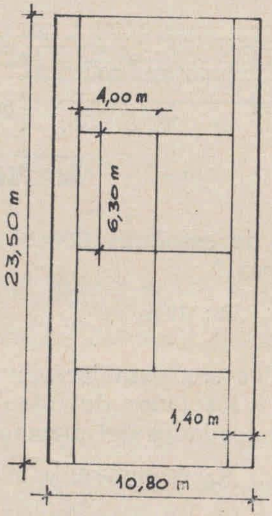
XVI) ¿Una distancia real de 500 km con la escala anterior con qué segmento se representa?

R.: 1 dm

XVII) Se ha medido un segmento de 170 mm en un mapa de escala 1 : 5.000.000. ¿Cuál es la distancia real que representa?

R.: 850 km

XVIII) Dibujar a escala 1 : 100 una cancha de tenis. Este campo es de forma rectangular y sus datos figuran en el croquis.



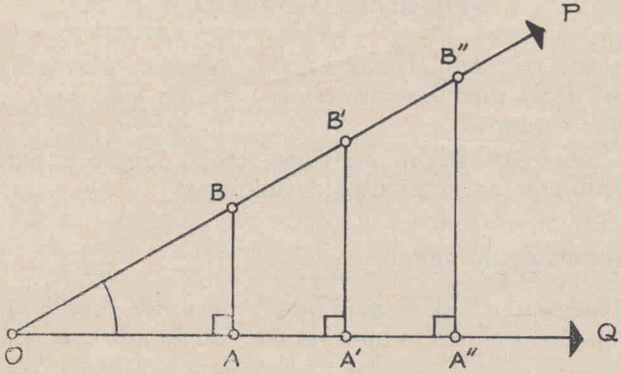
XIX) Cuál es la razón de semejanza de dos triángulos equiláteros cuyos perímetros miden 156 cm y 234 cm, respectivamente.

R.: $\frac{2}{3}$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS 5

Funciones trigonométricas o goniométricas (*).

Consideremos un ángulo agudo cuyo vértice sea O y sobre uno de los lados, OQ, levantemos perpendiculares tales como AB, A'B', A"B", etc. Se forma una serie de triángulos rectán-



gulos OAB, OA'B', OA"B", etc., que son semejantes por tener dos ángulos iguales: el recto y el ángulo en O, por común; luego como los lados homólogos son proporcionales, resulta

(*) *Gono* = ángulo, proviene del griego.

que se pueden establecer varias razones iguales —entre catetos opuestos o adyacentes al ángulo O e hipotenusa correspondientes—, es decir, relaciones constantes.

Veamos algunas de dichas relaciones:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{OB''}} = \frac{\text{cateto opuesto al } \hat{O}}{\text{hipotenusa}} = \text{constante}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{OA''}} = \frac{\text{cateto opuesto al } \hat{O}}{\text{cateto adyac. al } \hat{O}} = \text{constante}$$

Los diversos segmentos AB, OA, A'B', etc., son cantidades homogéneas y, por consiguiente, la *razón* entre dos elementos de un triángulo (**) es un número *abstracto*, que es *independiente de las dimensiones de los lados del triángulo, dependiendo exclusivamente del valor del ángulo.*

Funciones trigonométricas

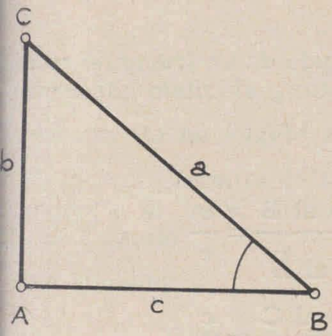
Funciones trigonométricas son los números abstractos que se obtienen al calcular las razones entre los pares de lados de un triángulo rectángulo.

Estas funciones trigonométricas toman nombres particulares de acuerdo con las siguientes definiciones:

Seno de un ángulo agudo.

Se llama seno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo a la razón entre el cateto opuesto a dicho ángulo y la hipotenusa.

(**) La razón entre 2 cantidades es siempre un número abstracto. Este número cumple la condición que al multiplicarlo por la segunda cantidad (consecuente) debe resultar igual a la primera cantidad (antecedente).



En símbolos:

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto al } \hat{B}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{\text{cateto opuesto al } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Coseno de un ángulo agudo.

Se llama coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, a la razón entre el cateto adyacente a dicho ángulo y la hipotenusa.

En símbolos:

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{cateto adyacente al } \hat{B}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\text{cateto adyacente al } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Regla mnemotécnica:

Para recordar la relación correspondiente a seno, coseno o tangente es conveniente tener presente las sílabas **SOR - CAR - TOA.** Las letras de **SOR** corresponden a las primeras letras de *seno, opuesto* y *radio* o hipotenusa; por lo tanto, nos recuerdan que el *seno* de un ángulo es igual a la relación entre el cateto *opuesto* y el *radio* o hipotenusa.

Las letras de **CAR** corresponden a las primeras letras del coseno, adyacente y radio o hipotenusa; luego recordamos que el coseno de un ángulo es igual a la relación entre el cateto adyacente y el radio o hipotenusa.

Análogamente las letras de **TOA** corresponden a *tangente, opuesto* y *adyacente;* luego la *tangente* de un ángulo es igual a la relación entre el cateto *opuesto* y el cateto *adyacente.*

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cat. opuesto } \alpha}{\text{radio o hipot.}} \; ; \; \cos \alpha = \frac{\text{cat. adyac. } \alpha}{\text{radio o hipot.}} \; ; \; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cat. opuesto } \alpha}{\text{cat. adyac. } \alpha}$$

Tangente de un ángulo agudo.

Se llama tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo a la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente a dicho ángulo.

En símbolos:

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto al } B}{\text{cateto adyac al } \hat{B}} = \frac{b}{c}\ .$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{\text{cateto opuesto al } C}{\text{cateto adyac. al } \hat{C}} = \frac{c}{b}$$

Contangente de un ángulo agudo.

Se llama cotangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo a la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto a dicho ángulo.

En símbolos:

$$\operatorname{cotg} \hat{B} = \frac{\text{cateto adyacente al } \hat{B}}{\text{cateto opuesto al } \hat{B}} = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{cotg} \hat{C} = \frac{\text{cateto adyacente al } \hat{C}}{\text{cateto opuesto al } \hat{C}} = \frac{b}{c}$$

Secante de un ángulo agudo.

Se llama secante de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo a la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente a dicho ángulo.

En símbolos:

$$\sec \hat{B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyac. al } \hat{B}} = \frac{a}{c}$$

$$\sec \hat{C} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyac. al } \hat{C}} = \frac{a}{b}$$

Cosecante de un ángulo agudo.

Se llama cosecante de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, a la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto a dicho ángnulo.

En símbolos:

$$\operatorname{cosec} \hat{B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto al } \hat{B}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{cosec} \hat{C} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto al } \hat{C}} = \frac{a}{c}$$

Obsérvese que cotangente, secante y cosecante son las razones inversas a tangente, coseno y seno, respectivamente.

Problema

Calcular el valor aproximado de seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de un ángulo de 59°, utilizando la regla graduada y el transportador.

Solución:

Con el transportador se toma un ángulo de 59° y desde un punto cualquiera de uno de sus lados se traza la perpendicular al otro, obteniéndose un triángulo rectángulo. La razones entre las medidas de los lados del mismo nos dan las funciones pedidas.

En consecuencia:

$$\text{sen } 59° = \frac{3{,}4 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 0{,}86$$

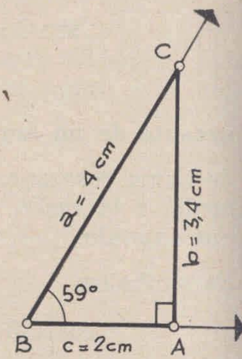
$$\cos 59° = \frac{2 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 0{,}5$$

$$\operatorname{tg} 59^\circ = \frac{3{,}4 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 1{,}7$$

$$\operatorname{cotg} 59^\circ = \frac{2 \text{ cm}}{3{,}4 \text{ cm}} = 0{,}58$$

$$\sec 59^\circ = \frac{4 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 2$$

$$\operatorname{cosec} 59^\circ = \frac{4 \text{ cm}}{3{,}4 \text{ cm}} = 1{,}17$$



OBSERVACIÓN. — Tanto los valores de los lados como los de las funciones trigonométricas son aproximados.

Notas importantes.

a) En todo triángulo rectángulo cada cateto es menor que la hipotenusa; en consecuencia:

El valor del seno y del coseno de un ángulo agudo —relaciones entre catetos e hipotenusas— es siempre menor que 1.

b) En todo triángulo rectángulo los catetos pueden ser iguales o desiguales; por lo tanto:

Las tangentes y las cotangentes de un ángulo agudo —relaciones entre catetos— pueden ser mayores, iguales o menores que 1.

c) En todo triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios, y el cateto opuesto a un ángulo agudo es adyacente al otro ángulo agudo y recíprocamente; por lo que puede aceptarse que:

El seno, la tangente y la secante de un ángulo son respectivamente iguales al coseno, la cotangente y la cosecante de su complemento y recíprocamente.

Si los ángulos B y C son complementarios, se tiene:

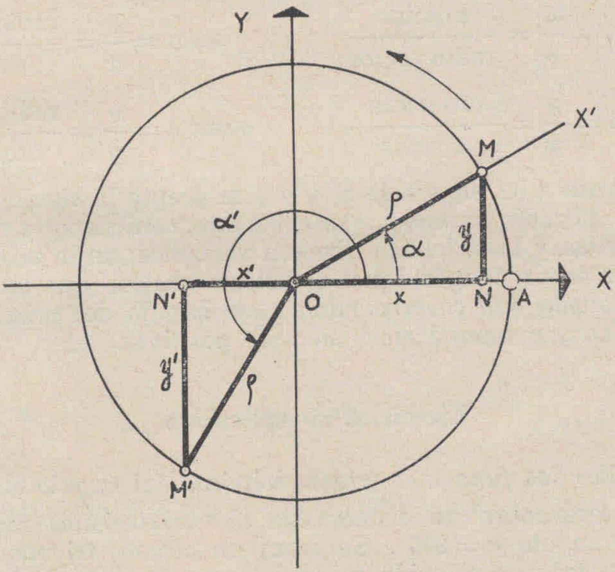
sen B = cos C	y también	cos B = sen C
tg B = cotg C	„ „	cotg B = tg C
sec B = cosec C	„ „	cosec B = sec C

El seno, la tangente y la secante se llaman *funciones;* el coseno, a cotangente y la cosecante se suelen llamar *cofunciones.*

Las funciones de un ángulo menor que 90° crecen, al aumentar u valor, mientras que las cofunciones decrecen.

Funciones en el círculo trigonométrico (*). — Consideremos un ngulo variable α y sea OX′ una posición determinada de uno de os lados del ángulo que corta al crculo trigonométrico de centro O en el punto M. Desde este punto se traza el segmento MN perpendicular al eje equis, obteniéndose los segmentos:

ON $= x$ que llamaremos *abscisa*
NM $= y$ „ „ *ordenada*
OM $= \varrho$ „ „ *radio vector.*



(*) Se llama *círculo trigonométrico* a todo círculo cuyo radio se considere unidad de longitud y en el cual se haya fijado un sentido positivo para los ángulos o arcos.

Claro está que, al variar la posición de la $\overrightarrow{OX'}$ varía α, y varían también la abscisa y la ordenada, no así el radio vector.

Con la *abscisa*, la *ordenada* y el *radio vector* se pueden formar 6 razones:

$$\frac{y}{\varrho}, \frac{x}{\varrho}, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}, \frac{\varrho}{x}, \frac{\varrho}{y}$$

análogas a la que obteníamos al definir el seno, coseno, tangente, etc., de un ángulo agudo.

En consecuencia, aceptamos por definición que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{\varrho} = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio vector}} \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\varrho} = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio vector}} \qquad \sec \alpha = \frac{\varrho}{x} = \frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} \qquad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\varrho}{y} = \frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada}}$$

En cuanto a los signos de x, y y ϱ se acepta la siguiente convención: *El radio vector, que es constante, será siempre positivo.*

La *abscisa* y la *ordenada* que son variables, serán *positivas* o *negativas* según tengan igual o distinto sentido que la abscisa y la ordenada que corresponden a un ángulo del primer cuadrante, las que supondremos siempre positivas.

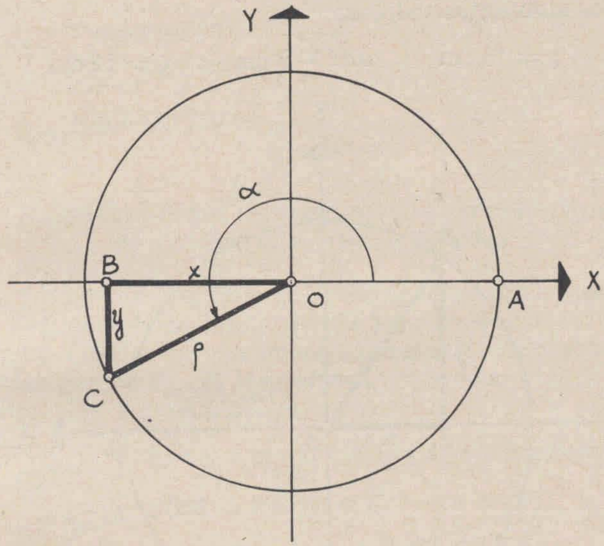
Ejercicios de aplicación

I) *Hallar las funciones trigonométricas del ángulo* $\alpha = 206°$.

Dibujamos sobre un sistema de ejes cartesianos rectangulares un ángulo $\alpha = 206°$. Se traza un círculo trigonométrico arbitrario, tal que coincida su centro con el punto de intersección de los ejes.

Sean los siguientes valores:

$$x = -2{,}5 \text{ cm}; \quad y = -1{,}2 \text{ cm}; \quad \varrho = 2{,}8 \text{ cm}$$



Luego:

$$\text{en } 206° = \frac{-1{,}2 \text{ cm}}{2{,}8 \text{ cm}} \cong -0{,}43$$

$$\cos 206° = \frac{-2{,}5 \text{ cm}}{2{,}8 \text{ cm}} \cong -0{,}89$$

$$\text{tg } 206° = \frac{-1{,}2 \text{ cm}}{-2{,}5 \text{ cm}} = +0{,}48$$

$$\text{cotg } 206° = \frac{-2{,}5 \text{ cm}}{-1{,}2 \text{ cm}} \cong +2{,}08$$

$$\sec 206° = \frac{2{,}8 \text{ cm}}{-2{,}5 \text{ cm}} = -1{,}12$$

$$\text{cosec } 206° = \frac{2{,}8 \text{ cm}}{-1{,}2 \text{ cm}} \cong -2{,}33$$

II) *Hallar las funciones trigonométricas del ángulo*

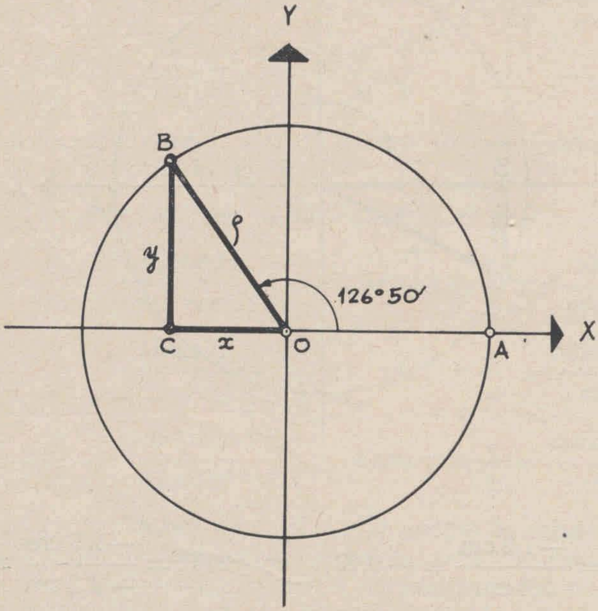
$$\alpha = 126° \, 50'$$

Se dibuja sobre un sistema de ejes cartesianos rectangulares un ángulo $\alpha = 126° \, 50'$.

Se traza un círculo trigonométrico arbitrario tal que su centro coincida con el punto de intersección de los ejes.

Sean los siguientes valores:

$$\varrho = 15 \text{ cm} \quad ; \quad x = -9 \text{ cm} \quad ; \quad y = 12 \text{ cm}$$



$\Rightarrow$

$$\text{sen } 126° \ 50' = \frac{12 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = \quad 0,8$$

$$\cos 126° \ 50' = \frac{-9 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = -0,6$$

$$\text{tg } 126° \ 50' = \frac{12 \text{ cm}}{-9 \text{ cm}} = -1,333\ldots$$

$$\text{cotg } 126° \ 50' = \frac{-9 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = -0,75$$

$$\sec 126^\circ\, 50' = \frac{15\text{ cm}}{-\,9\text{ cm}} = -\,1{,}66\ldots$$

$$\operatorname{cosec} 126^\circ\, 50' = \frac{15\text{ cm}}{12\text{ cm}} = \quad 1{,}25$$

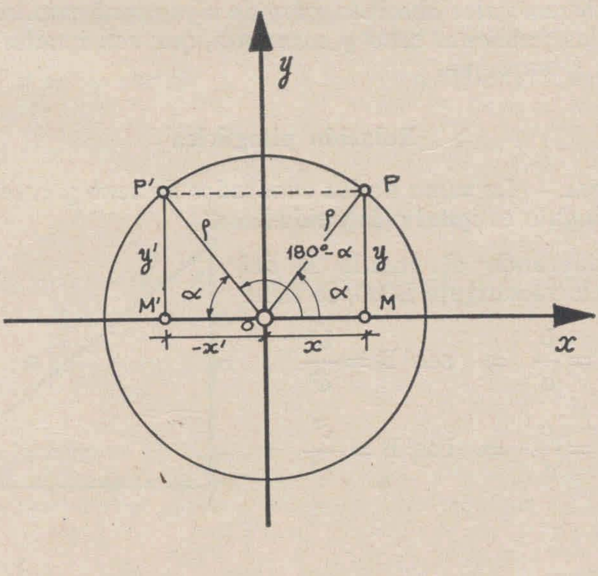
Relaciones entre las funciones trigonométricas de dos ángulos suplementarios

Consideremos un ángulo α del primer cuadrante referido a un írculo trigonométrico de centro O, con lo que resulta que su *uplemento* (180° — α) pertenece al segundo cuadrante. Se tra-an por los puntos P y P′ las perpendiculares al eje de las equis, ormándose los triángulos rectángulos.

$$\overset{\triangle}{OMP} = \overset{\triangle}{OM'P'} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho = \varrho = \text{radio círculo trigonométrico} \\ P\overset{<}{O}M = P'\overset{<}{O}M' = \alpha \end{array} \right.$$

Luego:

$$y' = +\,y \quad ; \quad -\,x' = x \qquad \text{o bien} \qquad x' = -\,x$$



Por lo tanto:

$$\text{sen}\ (180° - \alpha) = \frac{y'}{\varrho} = \frac{y}{\varrho} = \text{sen}\ \alpha$$

$$\cos\ (180° - \alpha) = \frac{x'}{\varrho} = \frac{-x}{\varrho} = -\frac{x}{\varrho} = -\cos\alpha$$

$$\text{tg}\ (180° - \alpha) = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\text{tg}\ \alpha$$

$$\text{cotg}\ (180° - \alpha) = \frac{x'}{y'} = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y} = -\text{cotg}\ \alpha$$

$$\sec\ (180° - \alpha) = \frac{\varrho}{x'} = \frac{\varrho}{-x} = -\frac{\varrho}{x} = -\sec\alpha$$

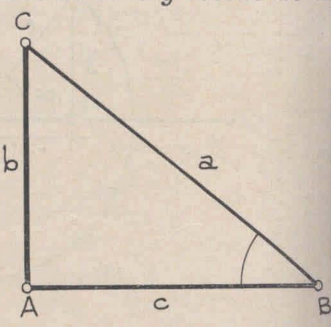
$$\text{cosec}\ (180° - \alpha) = \frac{\varrho}{y'} = \frac{\varrho}{y} = \text{cosec}\ \alpha$$

En consecuencia, se establece que:

Las funciones trigonométricas de dos ángulos suplementarios son iguales en valor absoluto, pero de signo contrario, con excepción de las funciones seno y cosecante, que son iguales en valor absoluto y en signo.

Relación pitagórica

TEOREMA. — *La suma de los cuadrados de seno y coseno de un mismo ángulo es igual a la unidad.*



Considerando el ángulo B del triángulo rectángulo BAC, se tiene

$$\text{sen}\ B = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{sen}^2 B = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow \cos^2 B = \frac{c^2}{a^2}$$

Sumando las igualdades de la derecha, se tiene:

$$\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

Pero

$$b^2 + c^2 = a^2$$

por el teorema de Pitágoras (*).

Luego

$$\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B = \frac{a^2}{a^2}$$

o sea

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B = 1}$$

Esta igualdad nos permite calcular el *seno en función del coseno*, o bien *el coseno en función del seno.*

En efecto:

$$\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B = 1$$

Luego	o bien
$\operatorname{sen}^2 B = 1 - \cos^2 B$	$\cos^2 B = 1 - \operatorname{sen}^2 B$
$\operatorname{sen} B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$	$\cos B = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 B}$

Ejercicio de aplicación

Calcular el coseno del ángulo B del triángulo rectángulo BAC, sabiendo que $\operatorname{sen} B = 0{,}6$.

$$\cos B = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 B}$$

(*) El *teorema de Pitágoras* establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Ver capítulo VI, *Relaciones métricas en los triángulos.*

siendo $\text{sen B} = 0{,}6$ se tiene

$$\cos B = \sqrt{1 - (0{,}6)^2} = \sqrt{1 - 0{,}36}$$

$$\cos B = \sqrt{0{,}64}$$

$$\cos B = 0{,}8$$

Relación entre la tangente, el seno y el coseno

Sabemos que

$$\text{sen B} = \frac{b}{a}$$

y que

$$\cos B = \frac{c}{a}$$

Dividiendo:

$$\text{sen B} : \cos B = \frac{b}{a} : \frac{c}{a}$$

luego

$$\frac{\text{sen B}}{\cos B} = \frac{b}{c} \qquad (1)$$

Pero por definición de tangente, se sabe que

$$\text{tg B} = \frac{b}{c} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce

$$\text{tg B} = \frac{\text{sen B}}{\cos B}$$

luego, la tangente de un ángulo es igual al cociente del seno y el coseno de dicho ángulo.

TABLA DE VALORES NATURALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (*)

Las tablas de *valores naturales* son cuadros donde están consignados los valores numéricos de las funciones trigonométricas de los ángulos de 0° a 90°.

Reproducimos a continuación una parte de esta tabla que consta de 6 columnas: cuatro para las funciones seno, coseno, tangente y cotangente, y dos para los ángulos.

En la primera columna de la parte transcripta están anotados los valores de los ángulos de 20° a 29°, aumentando de 10′ en 10′, hacia abajo; en las filas correspondientes se hallan los valores de las funciones *cuyo nombre figura en la cabeza de la columna.* Así, por ejemplo:

$$\text{sen } 28^\circ\, 20' = 0.47460 \;;\; \text{tg } 25^\circ\, 50' = 0.48414 \;;\; \cos 20^\circ\, 10' = 0.93869$$

En la 6ª columna figuran los ángulos de 61° a 70°, creciendo de 10′ en 10′, hacia arriba; en las filas correspondientes se hallan los valores de las funciones *cuyo nombre figura en la parte inferior de la columna.*

Se observa también, que los ángulos que figuran en la 1ª y 6ª columna de una misma fila son complementarios. Así la fila que comienza por 20° 40′ termina con 69° 20′, circunstancia que permite aplicar la propiedad de las funciones de los ángulos complementarios: *Las funciones de uno son iguales a las respectivas cofunciones del otro.*

Esta propiedad se aprovecha para la construcción de tablas, pues basta calcular solamente seno, coseno, tangente y cotangente de los ángulos de 0° a 45°.

Es importante observar que cuando *un ángulo aumenta, aumentan sus funciones* (seno, tangente y secante) y *disminuyen sus cofunciones* (coseno, cotangente y cosecante).

(*) *Jorge Joachim* (1514-1576) fue quien calculó la primera tabla de valores naturales de los senos y tangentes de ángulos comprendidos entre 0° y 90°, de 10″ en 10″ con 16 cifras decimales.

ANGULOS		SENO	TANGENTE	COTANGENTE	COSENO	ANGULOS	
Grad.	Min.					Grad.	Min.
20°	00'	0.34202	0.36397	2.74748	0.93969	70°	00'
	10'	0.34475	0.36727	2.72281	0.93869		50'
	20'	0.34748	0.37057	2.69853	0.93769		40'
	30'	0.35021	0.37388	2.67462	0.93667		30'
	40'	0.35293	0.37720	2.65109	0.93565		20'
	50'	0.35565	0.38053	2.62791	0.93462		10'
21°	00'	0.35837	0.38386	2.60509	0.93358	69°	00'
	10'	0.36108	0.38721	2.58261	0.93253		50'
	20'	0.36379	0.39055	2.56046	0.93148		40'
	30'	0.36650	0.39391	2.53865	0.93042		30'
	40'	0.36921	0.39727	2.51715	0.92935		20'
	50'	0.37191	0.40065	2.49597	0.92827		10'
22°	00'	0.37461	0.40403	2.47509	0.92718	68°	00'
	10'	0.37730	0.40741	2.45451	0.92609		50'
	20'	0.37999	0.41081	2.43422	0.92499		40'
	30'	0.38268	0.41421	2.41421	0.92388		30'
	40'	0.38537	0.41763	2.39449	0.92276		20'
	50'	0.38805	0.42192	2.37504	0.92164		10'
23°	00'	0.39073	0.42447	2.35585	0.92050	67°	00'
	10'	0.39341	0.42791	2.33693	0.91936		50'
	20'	0.39608	0.43136	2.31826	0.91822		40'
	30'	0.39875	0.43481	2.29984	0.91706		30'
	40'	0.40142	0.43828	2.28167	0.91590		20'
	50'	0.40408	0.44175	2.26374	0.91472		10'
24°	00'	0.40674	0.44523	2.24604	0.91355	66°	00'
	10'	0.40939	0.44872	2.22857	0.91236		50'
	20'	0.41204	0.45222	2.21132	0.91116		40'
	30'	0.41469	0.45573	2.19430	0.90996		30'
	40'	0.41734	0.45924	2.17749	0.90875		20'
	50'	0.41998	0.46277	2.16090	0.90753		10'
25°	00'	0.42262	0.46631	2.14451	0.90631	65°	00'
	10'	0.42525	0.46985	2.12832	0.90507		50'
	20'	0.42788	0.47341	2.11233	0.90383		40'
	30'	0.43051	0.47698	2.09654	0.90259		30'
	40'	0.43313	0.48055	2.08094	0.90133		20'
	50'	0.43575	0.48414	2.06553	0.90007		10'
26°	00'	0.43837	0.48773	2.05030	0.89879	64°	00'
	10'	0.44098	0.49134	2.03526	0.89752		50'
	20'	0.44359	0.49495	2.02039	0.89623		40'
	30'	0.44620	0.49858	2.00569	0.89493		30'
	40'	0.44880	0.50222	1.99116	0.89363		20'
	50'	0.45140	0.50587	1.97680	0.89232		10'
27°	00'	0.45399	0.50953	1.96261	0.89101	63°	00'
	10'	0.45658	0.51320	1.94858	0.88968		50'
	20'	0.45917	0.51688	1.93470	0.88835		40'
	30'	0.46175	0.52057	1.92098	0.88701		30'
	40'	0.46433	0.52427	1.90741	0.88566		20'
	50'	0.46690	0.52798	1.89400	0.88431		10'
28°	00'	0.46947	0.53171	1.88073	0.88295	62°	00'
	10'	0.47204	0.53545	1.86760	0.88158		50'
	20'	0.47460	0.53920	1.85462	0.88020		40'
	30'	0.47716	0.54296	1.84177	0.87882		30'
	40'	0.47971	0.54673	1.82906	0.87743		20'
	50'	0.48226	0.55051	1.81649	0.87603		10'
29°	00'	0.48481	0.55431	1.80405	0.87462	61°	00'
	10'	0.48735	0.55812	1.79174	0.87321		50'
	20'	0.48989	0.56194	1.77955	0.87178		40'
	30'	0.49242	0.56577	1.76749	0.87036		30'
	40'	0.49495	0.56962	1.75556	0.86892		20'
	50'	0.49748	0.57348	1.74375	0.86748		10'
Grad.	Min.	COSENO	COTANGENTE	TANGENTE	SENO	Grad.	Min.

MANEJO DE LAS TABLAS DE VALORES NATURALES

Problema directo

Dado un ángulo, determinar el valor de sus funciones trigonométricas.

a) *Cuando el ángulo dado es menor que* $45°$ el valor de una de las funciones trigonométricas se encuentra en la intersección de la columna encabezada por el nombre de la función cuyo valor se pide, con la fila que comienza con el número de grados y minutos del ángulo dado.

Ejemplos:

$\text{sen } 23° \, 40' = 0.40142$; $\text{cotg } 25° = 2.14451$; $\cos 26° \, 10' = 0.89752$

b) *Cuando el ángulo dado es mayor que* $45°$, los valores de sus funciones trigonométricas se encuentran como en el caso anterior, *pero el nombre de la función se busca en la parte inferior de las columnas y el número de grados y minutos en la 6ª columna.*

$\text{sen } 61° \, 40' = 0.88020$; $\text{tg } 63° \, 40' = 2.02039$; $\cos 66° \, 50' = 0.39341$

Interpolación

Cuando el ángulo está expresado en grados y minutos, y el número de estos últimos no consta en la tabla, se pueden hallar sus funciones trigonométricas correspondientes, por medio de un procedimiento llamado interpolación.

Ejemplos:

I) *Hallar el valor de* $\text{tg } 32° \, 16'$.

Se advierte que el ángulo dado no figura en la tabla y, en consecuencia, se toman de la misma los valores más próximos:

$$\begin{array}{rr} \text{tg } 32° \, 20' = & 0.63299 \\ \text{tg } 32° \, 10' = & 0.62892 \\ \hline \text{diferencia} = & 407 \end{array}$$

Se observa que cuando el ángulo *aumenta* en 10′, la tangente aumenta en 407 cienmilésimos; por lo tanto, cuando aumente 6′ se puede admitir que la tangente aumentará proporcionalmente en x cienmilésimos.

$$\begin{array}{l} \text{Si a } 10' \text{ corresponden } 407 \\ \quad\ \text{a } 6' \text{ corresponderán } x \end{array}$$

$$\frac{10'}{6'} = \frac{407}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \times 407}{10} = 244.2 \text{ cienmilésimos}$$

En consecuencia,

$$\text{tg}\, 32°\, 16' = 0.62892 + 0.00244 = 0.63136$$

II) *Hallar el valor de* $\cos 55°\, 18'$

Cálculos auxiliares

Para

$$\begin{array}{l} 55°\, 10' \text{———} 57119 \\ 55°\, 20' \text{———} 56880 \\ \hline \quad 10' \text{———} \quad 239 \\ \quad 8' \text{———} x = \dfrac{8 \times 239}{10} = 191.2 \end{array}$$

Cálculos definitivos

$$\begin{array}{lcr} \cos 55°\, 10' \text{———} & & 0.57119 \\ & - & \\ + \quad 8' \text{———} & & 191 \\ \hline \cos 55°\, 18' & = & 0.56928 \end{array}$$

Téngase en cuenta que se han *restado* 191 cienmilésimos porque cuando un ángulo agudo *aumenta,* su coseno *disminuye.*

Problema recíproco

Dado el valor de una de las funciones trigonométricas de un ángulo calcular dicho ángulo.

Ejemplos:

I) *Determinar* α *sabiendo que* $\text{sen}\, \alpha = 0.37999$.

Como este valor se encuentra en la columna que lleva el nombre seno en la parte superior, el número de grados y minutos que le corresponde es el indicado al *comienzo* de la fila que lo registra. Luego

$$\alpha = 22°\, 20'$$

II) *Calcular* α *sabiendo que* $\operatorname{tg}\alpha = 2.00569$.

Dado que el valor de la tangente se encuentra en la columna que lleva el nombre de la función en la parte inferior, el número de grados y minutos que le corresponde es el expresado al *final* de la fila que lo contiene. Luego

$$\alpha = 63^\circ\ 30'$$

Interpolación

Cuando el valor de la función trigonométrica del ángulo pedido no consta en la tabla, se determina un valor aproximado a ese ángulo, *interpolando.*

Ejemplos:

I) *Calcular* α *sabiendo que* $\operatorname{sen}\alpha = 0.38185$.

Cálculos auxiliares

Para

$$\begin{array}{rcr} 0.38268 & \text{——} & 22^\circ\ 30' \\ 0.37999 & \text{——} & 22^\circ\ 20' \\ \hline 269 & \text{——} & 10' \end{array}$$

$$186^* \text{——} x = \frac{186 \times 10'}{269} \cong 7'$$

Cálculos definitivos

$$\begin{array}{rcr} 0.37999 & \text{——} & \operatorname{sen} 22^\circ\ 20' \\ +\ 186 & \text{——} & +\quad 7' \\ \hline 0.38185 & \text{——} & \operatorname{sen} 22^\circ\ 27' \end{array}$$

luego

$$\alpha = 22^\circ\ 27'$$

* Diferencia entre el valor dado 0.38185 y 0.37999.

II) *Determinar* α *sabiendo que* $\cos\alpha = 0.43400$.

Cálculos auxiliares

Para

$$\begin{array}{rcr} 0.43575 & \text{——} & 64^\circ\ 10' \\ 0.43313 & \text{——} & 64^\circ\ 20' \\ \hline 262 & \text{——} & 10' \end{array}$$

$$87^* \text{——} x = \frac{87 \times 10'}{262} \cong 3'$$

Cálculos definitivos

$$\begin{array}{rcr} 0.43313 & \text{——} & \cos 64^\circ\ 20' \\ +\ \ 87 & \text{——} & -\quad 3' \\ \hline 0.43400 & \text{——} & \cos 64^\circ 17' \end{array}$$

luego

$$\alpha = 64^\circ\ 17'$$

* Diferencia entre el valor dado 0.43400 y 0.43313.

Téngase en cuenta que se ha *restado* la parte proporcional, 3′, correspondiente a 87 cienmilésimos de diferencia entre el coseno y el *menor valor* de los que lo comprenden en la tabla, pues cuando un ángulo agudo *aumenta,* su coseno *disminuye.*

III) *Hallar* α *sabiendo que* $\operatorname{tg}\alpha = 0.4430$.

Cálculos auxiliares

Para

$$\begin{array}{lcl} 0.4452 & — & 24° \\ 0.4417 & — & 23°50' \\ \hline 35 & — & 10' \end{array}$$

$$13^* \text{ — } x = \frac{13 \times 10'}{35} \cong 4'$$

Cálculos definitivos

$$\begin{array}{lcl} 0.4417 & — & \operatorname{tg} 23°\,50' \\ +\ 13 & — & +\ \ 4' \\ \hline 0.4430 & — & \operatorname{tg} 23°\,54' \end{array}$$

luego

$$\alpha = 23°\,54'$$

* Diferencia entre el valor dado 0.4430 y 0.4417.

IV) *Calcular* α *sabiendo que* $\operatorname{cotg}\alpha = 0.3790$.

Cálculos auxiliares

Para

$$\begin{array}{lcl} 0.3805 & — & 69°\,10' \\ 0.3772 & — & 69°\,20' \\ \hline 33 & — & 10' \end{array}$$

$$18^* \text{ — } x = \frac{18 \times 10'}{33} \cong 5'$$

Cálculos definitivos

$$\begin{array}{lcl} 0.3772 & — & \operatorname{cotg} 69°\,20' \\ +\ 18 & — & -\ \ 5' \\ \hline 0.3790 & — & \operatorname{cotg} 69°\,15' \end{array}$$

luego

$$\alpha = 69°\,15'$$

* Diferencia entre el valor dado 0.3790 y 0.3772.

EJERCICIOS

Hallar los *valores naturales* de las funciones trigonométricas:

1) sen 77° 50′ — R.: 0.9775

2) sen 12° 17′ — R.: 0.2127

3) sen 59° 48′ — R.: 0.8643

4) $\cos 30° 29'$ R.: 0.8619

5) $\cos 60° 37'$ R.: 0.4906

6) $\cos 5° 7'$ R.: 0.9960

7) $\operatorname{tg} 82° 4'$ R.: 7.1759

8) $\operatorname{tg} 18° 22'$ R.: 0.3320

9) $\operatorname{tg} 23° 43'$ R.: 0.4393

10) $\operatorname{cotg} 66° 17'$ R.: 0.4393

11) $\operatorname{cotg} 18° 32'$ R.: 2.9829

12) $\operatorname{cotg} 3° 14'$ R.: 17.7015

Hallar los ángulos agudos, sabiendo que:

1) $\operatorname{sen} \alpha = 0.5821$ R.: $\alpha = 35°36'$

2) $\operatorname{sen} \alpha = 0.8205$ R.: $\alpha = 55° 8'$

3) $\cos \alpha = 0.8284$ R.: $\alpha = 34° 4'$

4) $\cos \alpha = 0.5279$ R.: $\alpha = 58° 8'$

5) $\operatorname{tg} \alpha = 0.5843$ R.: $\alpha = 30°18'$

6) $\operatorname{tg} \alpha = 1.6244$ R.: $\alpha = 58°23'$

7) $\operatorname{cotg} \alpha = 1.6055$ R.: $\alpha = 31°55'$

8) $\operatorname{cotg} \alpha = 1.7856$ R.: $\alpha = 29°15'$

RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS

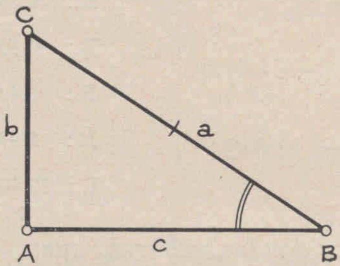
Recordemos que *resolver* un triángulo rectángulo *es calcular los valores* de los lados y ángulos desconocidos del mismo en función de los que se conocen; y que, para ello, es imprescindible conocer dos elementos, entre los cuales figure, por lo menos, un lado.

Casos clásicos

PRIMER CASO.

Resolver un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y un ángulo agudo.

Datos $\left\{ \begin{array}{l} a \\ \hat{B} \end{array} \right.$



Incógnitas $\left\{ \begin{array}{l} \hat{C} \\ b \\ c \\ S \end{array} \right.$

Determinación de $\hat{C}$

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios:

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}}$$

Determinación de b

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = a \operatorname{sen} \hat{B}}$$

Determinación de c

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = a \cos \hat{B}}$$

Determinación del valor de la superficie S

$$S = \frac{1}{2} \text{ base} \cdot \text{altura}$$

$$S = \frac{1}{2} c \cdot b = \frac{1}{2} a \cos \hat{B}\, a \operatorname{sen} \hat{B}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} \hat{B} \cos \hat{B}}$$

Ejemplo: *Resolver el triángulo rectángulo cuyos elementos tienen las siguientes dimensiones:*

$$a = 22{,}45 \text{ cm} \qquad \hat{B} = 23°\ 18'$$

Cálculo de $\hat{C}$

$$\hat{B} + \hat{C} = 90° \ ; \ \hat{C} = 90° - \hat{B}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{C} = 66°\ 42'$$

Cálculos auxiliares

Angulo $\hat{C}$

$$\begin{array}{r} 90° = 89°\ 60' \\ B = 23°\ 18' \\ \hline 90° - B = 66°\ 42' \end{array}$$

Cálculo de b

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad b = a \operatorname{sen} \hat{B}$$

$$b = 22{,}45 \text{ cm} \times \operatorname{sen} 23°\ 18'$$

$$b = 22{,}45 \times 0.3956$$

$$b = 8.88 \text{ cm}$$

sen 23° 18′

$$\begin{array}{rl} \operatorname{sen} 23°\ 10' = & 0.3934 \\ \text{para} \quad 8' = & +\ 22 \\ \hline \operatorname{sen} 23°\ 18' = & 0.3956 \end{array}$$

$$\delta = 27$$

$$10' \text{ --- } 27$$

$$8' \text{ --- } \frac{27 \times 8'}{10} \simeq 22$$

Cálculo de c

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \quad c = a \cos \hat{B}$$

$$c = 22.45 \text{ cm} \times \cos 23^\circ 18'$$

$$c = 22.45 \times 0.9184$$

$$c = 20.62 \text{ cm}$$

$\cos 23^\circ 18'$

$$\begin{array}{rl} \cos 23^\circ 10' = & 0.9194 \\ \text{para} \quad 8' = & -\ 10 \\ \hline \cos 23^\circ 18' = & 0.9184 \end{array}$$

$\delta = 12$ (decrece)

$10' —— 12$

$$8' —— \frac{12 \times 8'}{10} = 9{,}6 \cong 10$$

Cálculo del valor de la superficie S

$$S = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \cos \hat{B}$$

$$S = \frac{1}{2} (22.45 \text{ cm})^2 \operatorname{sen} 23^\circ 18' \cos 23^\circ 18'$$

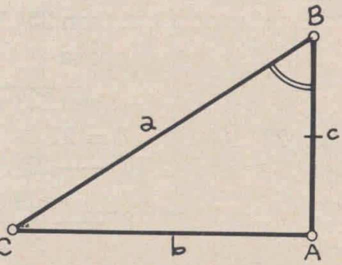
$$S = \frac{1}{2} \times 504.0025 \text{ cm}^2 \times 0.3956 \times 0.9184$$

$$S = 91.55 \text{ cm}^2$$

SEGUNDO CASO.

Resolver un triángulo rectángulo dados un cateto y un ángulo agudo.

Datos $\left\{ \begin{array}{l} c \\ \hat{B} \end{array} \right.$



Incógnitas $\left\{ \begin{array}{l} \hat{C} \\ a \\ b \\ S \end{array} \right.$

Determinación de C

$$\hat{B} + \hat{C} = 90°$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{C} = 90° - \hat{B}}$$

Determinación de a

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \quad ; \quad a \cos \hat{B} = c \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{c}{\cos \hat{B}}}$$

Determinación de b

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = c \cdot \operatorname{tg} \hat{B}}$$

Determinación del valor de la superficie S

$$S = \frac{1}{2} c \cdot b$$

$$S = \frac{1}{2} c \cdot c \cdot \operatorname{tg} \hat{B}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{1}{2} c^2 \operatorname{tg} \hat{B}}$$

Ejemplo: *Resolver el triángulo rectángulo cuyos elementos conocidos son:*

$$c = 127.2 \text{ m} \qquad \hat{B} = 46°\ 29'$$

Cálculo de $\hat{C}$

$$\hat{B} + \hat{C} = 90° \quad ; \quad \hat{C} = 90° - 46°\ 29'$$

$$\hat{C} = 43°\ 31'$$

Cálculo de a

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \quad ; \quad a \cos \hat{B} = c \quad ; \quad a = \frac{c}{\cos \hat{B}}$$

$$a = \frac{127.2 \text{ m}}{\cos 46^\circ 29'} = \frac{127.2 \text{ m}}{0.6886}$$

$$a = 184.72 \text{ m}$$

Cálculo de b

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} \quad ; \quad b = c \cdot \text{tg } \hat{B}$$

$$b = 127.2 \text{ m} \times \text{tg } 46^\circ 29'$$

$$b = 127.2 \text{ m} \times 1.0532$$

$$b = 133.97 \text{ m}$$

Cálculo del valor de la superficie S

$$S = \frac{1}{2} c^2 \text{ tg } \hat{B}$$

$$S = \frac{1}{2} (127.2 \text{ m})^2 \text{ tg } 46^\circ 29'$$

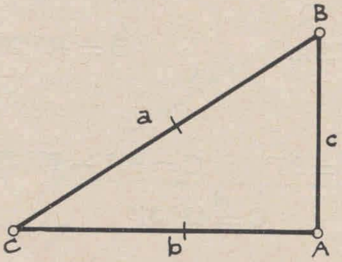
$$S = \frac{1}{2} \times 16179.84 \text{ m}^2 \times 1.0532$$

$$S = 8520.30 \text{ m}^2$$

TERCER CASO.

Resolver un triángulo rectángulo conociendo un cateto y la hipotenusa.

Datos $\begin{cases} b \\ a \end{cases}$



Incógnitas $\begin{cases} \hat{B} \\ \hat{C} \\ c \\ S \end{cases}$

Determinación de $\hat{B}$

$$\boxed{\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a}}$$

Determinación de $\hat{C}$

$$\boxed{\cos \hat{C} = \frac{b}{a}}$$

Determinación de c

Teniendo en cuenta un corolario del Teorema de Pitágoras, se tiene:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

o bien $\boxed{c = \sqrt{(a + b)\,(a - b)}}$

Determinación del valor de la superficie S

$$S = \frac{1}{2}\, b \cdot c$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{1}{2}\, b \sqrt{(a + b)\,(a - b)}}$$

Ejemplo: *Resolver un triángulo rectángulo, sabiendo que*

$$a = 124.68 \text{ m} \qquad\qquad b = 86.13 \text{ m}$$

Cálculo de $\hat{B}$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{86.13 \text{ m}}{124.68 \text{ m}}$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = 0.6908$$

$$\hat{B} = 43^\circ\, 41'$$

Cálculos auxiliares

Angulo $\hat{B}$

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen} B = 0.6908 & & \\ \text{para} \quad 0.6905 & \text{——} & 43^\circ\, 40' \\ \quad\text{"} \qquad\quad 3 & \text{——} + & 1' \\ \hline \qquad\quad \hat{B} & = & 43^\circ\, 41' \end{array}$$

$\delta =$ (crece)

21 —— $10'$

$$3 \text{ —— } \frac{3 \times 10'}{21} \cong 1'$$

Cálculo de $\hat{C}$

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{86.13 \text{ m}}{124.68 \text{ m}}$$

$$\cos \hat{C} = 0.6908$$

$$\hat{C} = 46^\circ\, 19'$$

Angulo $\hat{C}$

$$\begin{array}{lll} \cos \hat{C} = 0.6908 & & \\ \text{para} \quad 0.6905 & \text{——} & 46^\circ\, 20' \\ \quad\text{"} \qquad\quad 3 & \text{——} - & 1' \\ \hline \qquad\quad \hat{C} & = & 46^\circ\, 19' \end{array}$$

$\delta = 21$ (decrece)

21 —— $10'$

$$3 \text{ —— } \frac{3 \times 10'}{21} \cong 1'$$

Cálculo de c

$$c = \sqrt{(a + b)\,(a - b)}$$

$$c = \sqrt{210.81 \text{ m} \times 38.55 \text{ m}}$$

$$c = \sqrt{8126.73 \text{ m}^2}$$

$$c = 90.15 \text{ m}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{array}{rl} & a = 124.68 \\ + & \\ & b = 86.13 \\ \hline & a + b = 210.81 \\ & a - b = 38.55 \end{array}$$

Cálculo del valor de la superficie S

$$S = \frac{1}{2}\, b \sqrt{(a+b)\,(a-b)}$$

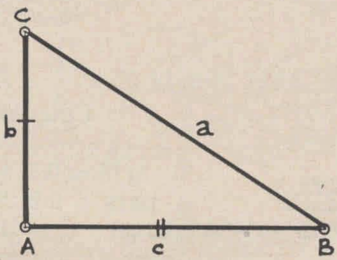
$$S = \frac{1}{2} \times 86.13 \text{ m} \times \sqrt{210.81 \text{ m} \times 38.55 \text{ m}}$$

$$S = 3882.09 \text{ m}^2$$

CUARTO CASO.

Resolver un triángulo rectángulo dados los dos catetos.

$$\text{Datos} \begin{cases} b \\ c \end{cases}$$



$$\text{Incógnitas} \left\{ \begin{array}{l} \hat{B} \\ \hat{C} \\ a \\ S \end{array} \right.$$

Determinación de $\hat{B}$

$$\boxed{\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c}}$$

Determinación de $\hat{C}$

$$\boxed{\operatorname{cotg} \hat{C} = \frac{b}{c}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}}$$

Determinación de a

$a^2 = b^2 + c^2$ por teorema de Pitágoras

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = \sqrt{b^2 + c^2}}$$

Determinación de la superficie S

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\, b \cdot c}$$

Ejemplo: *Resolver un triángulo rectángulo, sabiendo que*

$$b = 27.12\ \text{m} \qquad\qquad c = 126.50\ \text{m}$$

Cálculo de $\hat{B}$

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{27.12\ \text{m}}{126.50\ \text{m}}$$

$$\operatorname{tg}\hat{B} = 0.2144$$

$$\hat{B} = 12^\circ\ 6'$$

Cálculos auxiliares

$\operatorname{tg}\hat{B} = 0.2144$

para 0.2126 —— 12°

" 18 —— 6'

$\hat{B} = 12°6'$

$\delta = 30$

30 —— 10'

$$18 \text{ —— } \frac{18 \times 10'}{30} = 6'$$

Cálculo de $\hat{C}$

$$\hat{C} = 90^\circ - B$$

$$\hat{C} = 90^\circ - 12^\circ\ 6'$$

$$\hat{C} = 77^\circ\ 54'$$

Angulo $\hat{\mathbf{C}}$

$90° = 89°\ 60'$

$\hat{B} = 12°\ \ 6'$

$90° - \hat{B} = 77°\ 54'$

Cálculo de a

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{(27.12\ \mathrm{m})^2 + (126.50\ \mathrm{m})^2}$$

$$a = \sqrt{16737.74\ \mathrm{m}^2}$$

$$a = 409.12\ \mathrm{m}$$

Cálculo del valor de la superficie S

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\, b \cdot c$$

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} \times 27.12\ \mathrm{m} \times 126.5\ \ \mathrm{m}$$

$$\mathrm{S} = 1715.34\ \mathrm{m}^2$$

EJERCICIOS

Resolver un triángulo rectángulo conociendo:

I) $\begin{cases} a = 1243\ \mathrm{dm} \\ \hat{C} = 19^\circ\, 24' \end{cases}$

R.: $\hat{B} = 70^\circ\, 36'$
$b = 117.24\ \mathrm{m}$
$c = 41.29\ \mathrm{m}$
$\mathrm{S} = 2420.42\ \mathrm{m}^2$

II) $\begin{cases} a = 73.42\ \mathrm{m} \\ \hat{B} = 58^\circ\, 27'\, 12'',4 \end{cases}$

R.: $b = 62.57\ \mathrm{m}$
$c = 38.41\ \mathrm{m}$
$\hat{C} = 31^\circ\, 32'\, 47'',6$
$\mathrm{S} = 1201.65\ \mathrm{m}^2$

III) $\begin{cases} a = 41.255\ \mathrm{m} \\ \hat{B} = 31^\circ\, 20'\, 45'',5 \end{cases}$

R.: $b = 21.46\ \mathrm{m}$
$c = 55.23\ \mathrm{m}$
$\hat{C} = 58^\circ\, 39'\, 14'',5$
$\mathrm{S} = 592.68\ \mathrm{m}^2$

IV) $\begin{cases} c = 127.50 \text{ m} \\ \hat{B} = 21° \, 40' \end{cases}$ R.: $a = 137.18$ m
$b = 50.65$ m
$\hat{C} = 68° \, 20'$
$S = 3228.92 \text{ m}^2$

V) $\begin{cases} c = 329 \text{ cm} \\ \hat{C} = 32° \, 4' \, 25'' \end{cases}$ R.: $a = 619.58$ cm
$b = 525$ cm
$\hat{B} = 57° \, 55' \, 35''$
$S = 863.62 \text{ cm}^2$

VI) $\begin{cases} a = 13 \text{ m} \\ b = 5 \text{ m} \end{cases}$ R.: $\hat{B} = 22° \, 38'$
$\hat{C} = 67° \, 22'$
$c = 12$ m
$S = 30 \text{ m}^2$

VII) $\begin{cases} a = 3640 \text{ cm} \\ b = 1896 \text{ cm} \end{cases}$ R.: $\hat{B} = 31° \, 22' \, 8''$
$\hat{C} = 58° \, 37' \, 52''$
$c = 3109$ cm
$S = 294.73 \text{ m}^2$

VIII) $\begin{cases} a = 1348.40 \text{ dm} \\ b = 1312 \text{ dm} \end{cases}$ R.: $\hat{B} = 76° \, 40'$
$\hat{C} = 13° \, 20'$
$c = 311.20$ dm
$S = 2040.16 \text{ m}^2$

IX) $\begin{cases} b = 4.22 \text{ m} \\ c = 3.25 \text{ m} \end{cases}$ R.: $\hat{B} = 52° \, 25'$
$\hat{C} = 37° \, 35'$
$a = 5.33$ m
$S = 6.86 \text{ m}^2$

X) $\begin{cases} b = 2.47 \text{ m} \\ c = 1.39 \text{ m} \end{cases}$ R.: $\hat{B} = 60° \, 45'$
$\hat{C} = 29° \, 15'$
$a = 2.83$ m
$S = 3.43 \text{ m}^2$

Problemas

I) Se desea establecer la altura de una torre, sabiendo que el ángulo de elevación que se determinó con un teodolito es igual a 35° 20′, tomado desde una distancia de 64 m del pie de la torre.

Solución:

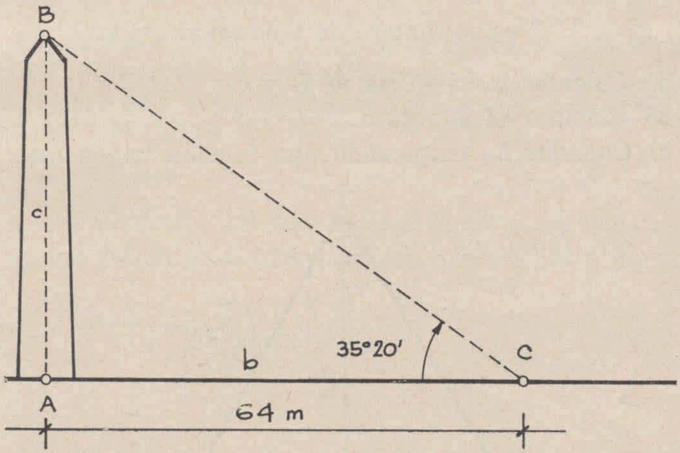
Basta calcular el cateto c, conociendo el otro cateto b y un ángulo agudo.

$$\operatorname{tg} 35^\circ 20' = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad c = b \cdot \operatorname{tg} 35^\circ 20'$$

$$c = 64 \text{ m} \times \operatorname{tg} 35^\circ 20'$$

$$c = 64 \times 0.7089$$

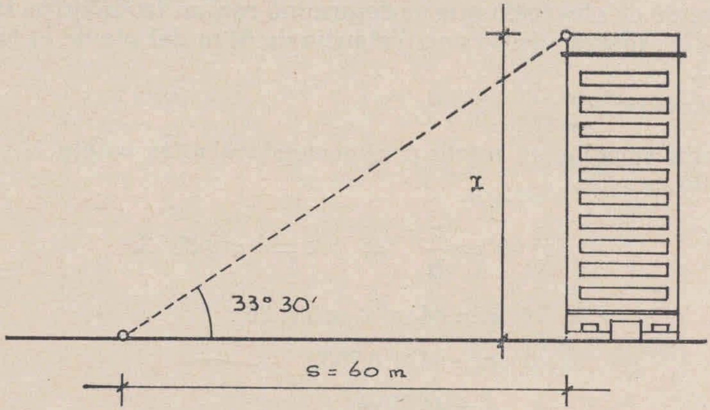
$$c = 45.37 \text{ m}$$



Considerando que el anteojo del teodolito estaba situado a 1.20 m de altura sobre el nivel del suelo, resulta que

$$\textit{altura torre} = 45.37 \text{ m} + 1.20 \text{ m} = 46.57 \text{ m}$$

II) En el croquis, la altura del edificio es x. Cuando el ángulo de los rayos del sol con la horizontal es $33° \, 30'$ la longitud de la sombra del edificio es $s = 60$ m. Calcula x.



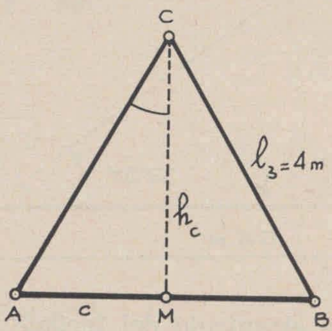
R.: $x \cong 39.71$ m

III) El $\triangle$ABC es equilátero de lado igual a 4 m.

a) Calcular los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

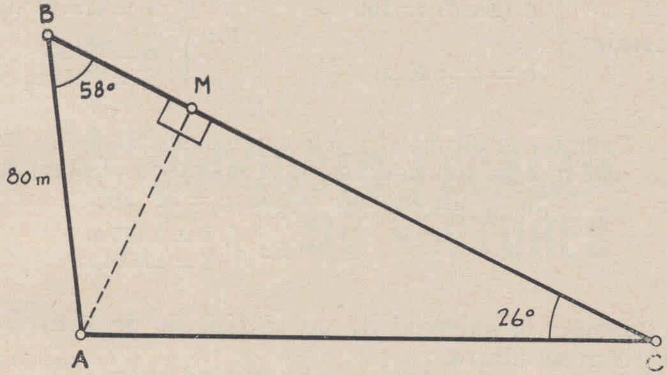
b) Calcular el ángulo α.

c) Calcular h_c, empleando una función trigonométrica.



R.: $\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60° \\ \alpha = 30° \\ h_c \cong 3.46 \text{ m} \end{cases}$

IV) Con los datos que figuran en el croquis calcular $\overline{AM}$ y $\overline{BC}$.



R.: $\overline{AM} = 67.84$ m

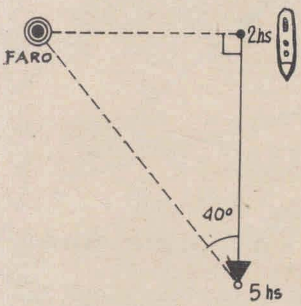
$\overline{BC} = 181.46$ m

V) El capitán de un barco que se dirige hacia el Sur observa un faro exactamente en dirección oeste a las 2 horas. A las 5 horas el faro está a 40° noroeste. El barco se mueve a una velocidad de 16 millas por hora.

Se deseo conocer:

a) A qué distancia del faro está el barco a las 2 horas.

b) A qué distancia del faro está el barco a las 5 horas.



R.: a) 40,32 millas

b) 61,22 millas

VI) Calcular los ángulos y la altura de un triángulo

isósceles $\begin{cases} a \text{ (base)} = 100 \\ b = c = 80 \text{ m} \end{cases}$ R.: $\begin{cases} \hat{B} = \hat{C} = 51° \, 19' \\ \hat{A} = 77° \, 22' \\ h = 62.45 \text{ m} \end{cases}$

VII) Calcular la altura (h) y la superficie (S) de un trapecio isósceles del que se conocen: su base mayor, $b = 42$ m; su base menor, $b' = 35$ m, y un ángulo agudo $\alpha = 38° \, 20'$.

R.: $\begin{cases} h = 2{,}767 \text{ m} \\ S = 106{,}64 \text{ m}^2 \end{cases}$

V) Calcular la diagonal de un rectángulo de 14 m de perímetro y 2 m de altura.

R.: $d = 5{,}385$ m

IX) Hallar el valor de la superficie de un rombo sabiendo que su lado es de 51 m y uno de sus ángulos de 81° 24′.

R.: $S = 2571.64 \text{ m}^2$

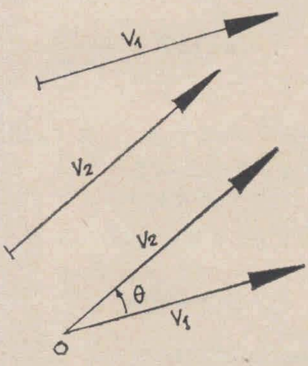
X) El lado de un cuadrado vale 16 m. ¿Cuál es la longitud de la diagonal?

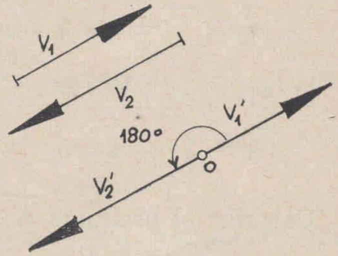
R.: $d = 22{,}627$ m

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES 6

Angulo de dos vectores

Dados los vectores no nulos $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$, se llama *ángulo de dos vectores* al ángulo θ determinado por una semirrecta cualquiera que tenga la dirección y el sentido de $\vec{V}_1$ y otra del mismo origen que la anterior y que presente la dirección y el sentido de $\vec{V}_2$.





Producto escalar de dos vectores.

Se llama *producto escalar* o *interno* de dos vectores $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, al escalar obtenido como producto de los módulos de $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ por el coseno del ángulo determinado por los dos vectores.

Si llamamos θ al ángulo que forman los dos vectores, y $|\vec{V}_1|$ y $|\vec{V}_2|$ sus módulos,

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \times |\vec{V}_2| \times \cos\theta$$
$$= v_1 \times v_2 \cos\theta$$

Ejemplos:

a) Si

$$|\vec{V}_1| = 10 \quad ; \quad |\vec{V}_2| = 3 \quad ; \quad \theta = 30^\circ \quad \text{y} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

es

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = 10 \times 3 \times \cos 30^\circ = 30 \times$$
$$\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 \times 1{,}73 = 25{,}95$$

b) Si

$$|\vec{V}_1| = 1 \quad ; \quad |\vec{V}_2| = 2 \quad ; \quad \theta = 180^\circ \quad ; \quad \cos 180^\circ = -1$$

es

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = 1 \times 2 \times \cos 180^\circ = 2 \times$$
$$\times \cos 180^\circ = 2 \times (-1) = -2$$

c) Si

$$|\vec{A}| = 3 \quad ; \quad \theta = 0^\circ \quad \text{y} \quad \cos 0^\circ = 1$$

Calcular el producto $\vec{A} \times \vec{A}$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 3 \times 3 \times \cos 0^\circ = 9 \times 1 = 9$$

Es decir, *el producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado del módulo de ese vector.*

En particular, el producto escalar de un versor por sí mismo

$$v \times v = 1^2 = 1$$

puesto que el módulo de un *versor* es uno.

Consecuencias.

I) *El producto escalar de dos vectores es nulo si y solo si el ángulo de esos vectores es recto.*

En efecto:

$$\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = |\overrightarrow{V_1}| \times |\overrightarrow{V_2}| \times \cos 90°$$

pero $\cos 90° = 0$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = |\overrightarrow{V_1}| \times |\overrightarrow{V_2}| \times 0 = 0$$

II) *El producto de dos vectores no nulos es positivo o negativo según que el ángulo determinado por esos vectores sea agudo u obtuso, respectivamente.*

En efecto, por definición

$$\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = |\overrightarrow{V_1}| \times |\overrightarrow{V_2}| \times \cos \theta$$

además,

$$|V_1| > 0 \qquad \text{y} \qquad |V_2| > 0$$

de donde

$$|V_1| \times |V_2| > 0$$

luego si $\theta < 90°$ es

$$\cos \theta > 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} > 0 \qquad \text{(positivo)}$$

y si $180° > \theta > 90°$ es

$$\cos \theta < 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} < 0 \qquad \text{(negativo)}$$

III) *El producto escalar entre los versores de un par de ejes rectangulares es igual a cero.*

En efecto, dado que los versores (I) y (J) son perpendiculares, el producto escalar de los mismos es igual a cero.

$$I \times J = 1 \times 1 \times \cos 90^\circ$$
$$I \times J = 1 \times 1 \times 0$$
$$I \times J = 0$$

Interpretación geométrica del producto escalar

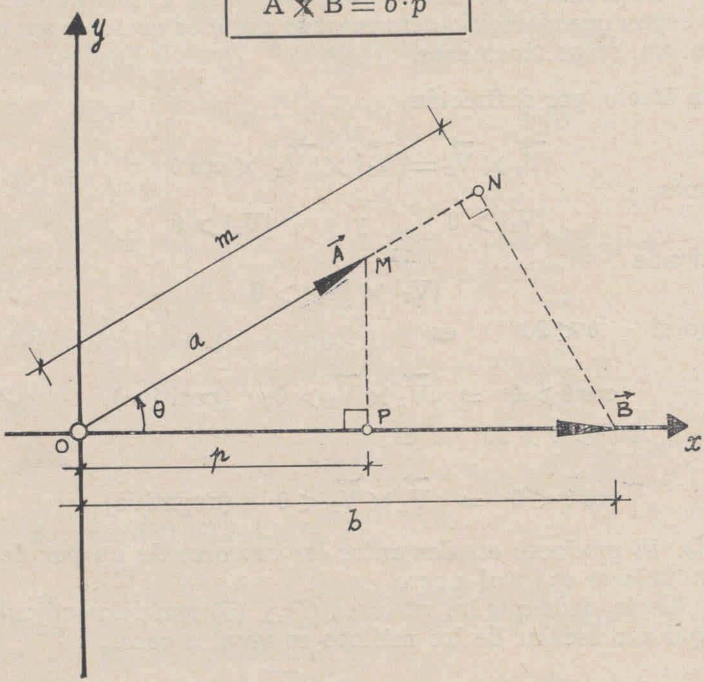
El producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por la medida de la proyección del otro vector sobre el eje de acción del primero.

En símbolos:

$a =$ módulo $\vec{A}$ $\qquad$ $b =$ módulo $\vec{B}$

$m =$ medida proyección$_{(A)}$ $\vec{B}$ $\qquad$ $p =$ medida proyección$_{(B)}$ $\vec{A}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{A} \times \vec{B} = a \cdot m \\ \vec{A} \times \vec{B} = b \cdot p \end{array}}$$



En efecto

$\vec{A} \times \vec{B} = a \cdot b \cdot \cos\theta$ por producto escalar de dos vectores,

o bien

$\vec{A} \times \vec{B} = b \cdot a \cdot \cos\theta$ (I) por propiedad conmutativa de los números reales.

Por otra parte, en el $\triangle$OPM

$$\cos\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{p}{a}$$

Reemplazando en (I), se tiene

$$\vec{A} \times \vec{B} = b \cdot a \cdot \frac{p}{a}$$

Simplificando, queda

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = b \cdot p}$$

Análogamente, considerando el triángulo rectángulo ONB se demuestra que

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = a \cdot m}$$

Propiedades del producto escalar.

El producto escalar de dos vectores goza de las propiedades siguientes:

Uniforme.

$\vec{A} \times \vec{B} = n$ siendo n un número real y único

Conmutativa.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{A}$$

Distributiva.

$$(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$$

No se cumple la propiedad asociativa

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}\neq\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$$

Expresión cartesiana rectangular del producto escalar de dos vectores.

Sean

$$\vec{V}_1=(x_1,\ y_1) \qquad \text{y} \qquad \vec{V}_2=(x_2,\ y_2)$$

dos vectores dados por sus componentes con respecto a los versores I, J.

Vamos a demostrar que

$$\boxed{\vec{V}_1\times\vec{V}_2=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}$$

En efecto:

$$\vec{V}_1=x_1\,I+y_1\,J$$

$$\vec{V}_2=x_2\,I+y_2\,J$$

$$\vec{V}_1\times\vec{V}_2=x_1x_2\,I\times I+x_2y_1\,I\times J+x_1y_2\,I\times J+y_1y_2\,J\times J$$

por producto escalar

pero

$$I\times J=J\times I=0$$

$$I\times I=J\times J=1$$

por consecuencia III y por producto escalar de un versor por sí mismo.

Luego

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$$

es decir, *el producto escalar de dos vectores dados por sus componentes I, J es igual a un escalar que es la suma de los productos de las componentes respectivas.*

Ejemplos:

a) Si

$$\vec{A} = (3\,;5) \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = (10 : 2)$$

es

$$\vec{A} \times \vec{B} = 3 \cdot 10 + 5 \cdot 2 = 30 + 10 = 40$$

b) Si

$$\vec{V}_1 = (-3\,;2) \qquad \text{y} \qquad \vec{V}_2 = (1\,;4)$$

es

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 4 = -3 + 8 = 5$$

Cálculo del módulo de un vector.

Sea el vector $\vec{A} = (a, b)$ dados por sus componentes en la base I, J.

Sabemos que $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{A}^2$, es decir, que el producto de un vector por sí mismo es igual al cuadrado del módulo de ese vector; pero por la expresión cartesiana del producto se tiene

$$\vec{A} \times \vec{A} = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2$$

o bien

$$A^2 = a^2 + b^2$$

de donde, extrayendo las raíces cuadradas de ambos miembros

$$\boxed{|\vec{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

o sea, *el módulo de un vector es igual al valor absoluto de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes con respecto a los versores* I, J.

Ejemplos:

a) Si

$$\vec{A} = (9,\ 12)$$

es

$$|\vec{A}| = \sqrt{81 + 144} = 15$$

b) Si

$$\vec{V} = (5,\ 12)$$

es

$$|\vec{V}| = \sqrt{25 + 144} = 13$$

Cálculo del ángulo de dos vectores.

Sean los vectores no nulos

$$\vec{A} = (a_1,\ a_2) \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = (b_1,\ b_2)$$

Por producto escalar

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \cdot \cos \theta$$

Por producto escalar en función de sus componentes

$$\vec{A} \times \vec{B} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Por consecuencia del carácter transitivo

$$|A| \times |B| \cdot \cos \theta = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

o bien

$$\cos \theta = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{|\vec{A}| \times |\vec{B}|}$$

pero el módulo

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

y el módulo

$$|\vec{B}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{|\sqrt{a_1^2 + a_2^2}| \times |\sqrt{b_1^2 + b_2^2}|}$$

Es decir: *El coseno del ángulo de dos vectores es igual a la suma de los productos de sus correspondientes componentes sobre el producto de las raíces cuadradas de la suma de los cuadrados de sus componentes.*

Ejemplos:

a) Calcular θ siendo $\vec{A} = (6, 8)$ y $\vec{B} = (5, 12)$

$$\cos\theta = \frac{6 \cdot 5 + 8 \cdot 12}{|\sqrt{6^2 + 8^2}| \cdot |\sqrt{5^2 + 12^2}|} = \frac{30 + 96}{|\sqrt{100}| \cdot |\sqrt{169}|} = \frac{126}{30} \cong 0{,}97$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta \cong 0{,}97 \quad \text{de donde} \quad \boxed{\theta \cong 14°}$$

b) Calcular θ siendo $\vec{V}_1 = (4, 4)$ y $\vec{V}_2 = (3, 3)$

$$\cos\theta = \frac{12 + 12}{|\sqrt{32}| \cdot |\sqrt{18}|} = \frac{24}{|\sqrt{576}|} = \frac{24}{24} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = 1 \quad \text{de donde} \quad \boxed{\theta = 0°}$$

EJERCICIOS

I) Representar gráficamente $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ y $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$, siendo:

a) $\vec{V}_1 = (\ \ 1,\ \ \ 2)$

$\vec{V}_2 = (-7,\ \ \ 5)$

b) $\vec{V}_1 = (-4, -3)$

$\vec{V}_2 = (\ \ 1, -3)$

c) $\vec{V}_1 = (\ \ 1, -1)$

$\vec{V}_2 = (\ \ 2, -2)$

II) Calcular $\vec{A} + \vec{B}$ y $\vec{A} - \vec{B}$ si:

a) $\vec{A} = 3\,I + 4\,J$ R.: $\vec{A} + \vec{B} = 4I + 2J$

$\vec{B} = I - 2\,J$ $\vec{A} - \vec{B} = 2J + 6J$

b) $\vec{A} = -6\,I + 3\,J$ R.: $\vec{A} + \vec{B} = -7I + 2J$

$\vec{B} = -\ I - \ J$ $\vec{A} - \vec{B} = -5I + 4J$

c) $\vec{A} = -10\,I - 2\,J$ R.: $\vec{A} + \vec{B} = -\ 5I + 5J$

$\vec{B} = \ 5\,I + 7\,J$ $\vec{A} - \vec{B} = -15I - 9J$

I1I) Calcular el producto escalar de los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$.

a) $|\vec{V}_1| = 5$; $|\vec{V}_2| = 3$; $\theta = 15°$

R.: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = 14{,}49$

b) $|\vec{V}_1| = 6$; $|\vec{V}_2| = 1$; $\theta = 100°$

R.: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = 1{,}0416$

c) $|\overrightarrow{V_1}| = 2$; $|\overrightarrow{V_2}| = 3$; $\theta = 180°$

R.: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -6$

IV) Establecer si el producto de dos vectores no nulos es positivo o negativo, siendo:

a) $\theta = 35$ b) $\theta = 95°$ c) $\theta = 100°$

R.: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 > 0$ R.: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 < 0$ R.: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 < 0$

V) Comprobar gráficamente la propiedad distributiva del producto de un vector por un escalar.

1) $a \in \mathbf{R} \wedge b \in \mathbf{R} \Rightarrow (\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2})\, a = \overrightarrow{V_1} \cdot a + \overrightarrow{V_2} \cdot a$

2) $(a + b)\, \overrightarrow{A} = a \cdot \overrightarrow{A} + b \cdot \overrightarrow{A}$

VI) Comprobar gráficamente la propiedad distributiva del producto escalar de dos vectores.

Con símbolos:

$$(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2})\, \overrightarrow{A} = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{A} + \overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{A}$$

VII) Expresar en forma cartesiana el producto escalar de dos vectores $\overrightarrow{V_1}$ y $\overrightarrow{V_2}$.

a) $\overrightarrow{V_1} = (4,\ 5)$

$\overrightarrow{V_2} = (3,\ -2)$

R.: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-2)$

b) $\overrightarrow{V_1} = (-7,\ -1)$

$\overrightarrow{V_2} = (-6,\ -5)$

R.: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (-7) \cdot (-6) + (-1)\,(-5)$

c) $\vec{V}_1 = (-1, -1)$
$\vec{V}_2 = (-3, -3)$

R.: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (-1) \cdot (-3) + (-1) \cdot (-3)$

d) $V_1 = (-1, \quad 0)$
$V_2 = (-2, -2)$

R.: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot (-2)$

VIII) Hallar la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ siendo

a) $\vec{A} = 4I + 3J$
$\vec{B} = 3I - J$ R.: $\vec{A} - \vec{B} = I + 4J$

b) $\vec{A} = -2I + 4J$
$\vec{B} = 5I + 6J$ R.: $\vec{A} - \vec{B} = -7I - 2J$

c) $\vec{A} = 8I$
$\vec{B} = 5J$ R.: $\vec{A} - \vec{B} = 8I - 5J$

d) $\vec{A} = 7I$
$\vec{B} = 6J$ R.: $\vec{A} - \vec{B} = -6I + 7J$

IX) Representar gráficamente el producto n por el vector $\vec{A}$.

a) $n = 3$
$\vec{A} = (7, 2)$

b) $n = 2$
$\vec{A} = (-6, -2)$

X) Calcular el *módulo* del vector $\vec{V}$ si

a) $\vec{V} = (3, 7)$
R.: $|V| \cong 7{,}6$

c) $\vec{V} = (-2, -2)$
R.: $|V| \cong 2{,}8$

b) $\vec{V} = (1, -2)$

R.: $|V| = 2{,}2$

c) $\vec{V} = (5, 6)$

R.: $|V| = 7{,}8$

XI) Calcular el ángulo θ de los vectores

a) $\vec{A} = (2, 3)$

$\vec{B} = (1, -1)$

R.: $\theta \cong 102°$

c) $\vec{A} = (-3, 3)$

$\vec{B} = (0, -2)$

R.: $\theta = 135°$

b) $\vec{A} = (-3, 1)$

$\vec{B} = (5, -3)$

R.: $\theta \cong 180°$

d) $\vec{A} = (5, 9)$

$\vec{B} = (-5, -9)$

R.: $\theta = 180°$

e) $\vec{A} = (3, 5)$

$\vec{B} = (1, 2)$

R.: $\theta = 0°$

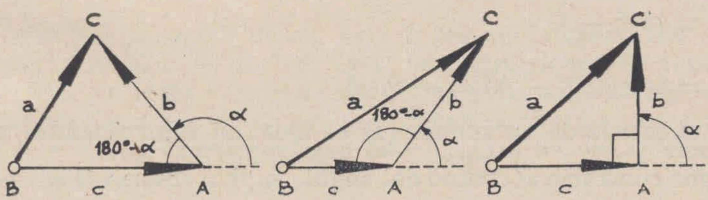
Teorema del coseno o de Pitágoras generalizado.

En todo triángulo el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de los mismos lados, por el coseno del ángulo comprendido.

En símbolos:

$$\forall \ \triangle ABC$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$



Supongamos que los módulos de los vectores $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BA}$ sean, respectivamente, a, b y c.

Por suma de vectores se tiene

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \\ \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}\end{array}\right\}$$ Repetimos la igualdad para efectuar el producto escalar.

$\vec{a} \times \vec{a} = (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{b} + \vec{c})$ Propiedad uniforme.

o bien, por propiedad distributiva

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{c} \tag{I}$$

pero

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} \times \vec{a} = a^2 \\ \vec{b} \times \vec{b} = b^2 \\ \vec{c} \times \vec{c} = c^2\end{array}\right\}$$ El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de su módulo.

Además,

$\vec{c} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$ Por propiedad conmutativa

Reemplazando en (I) se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\vec{b} \times \vec{c} \tag{II}$$

pero

$\vec{b} \times \vec{c} = b \times c \times \cos \alpha$ Por producto escalar de dos vectores.

y como

$$\alpha = 180° - \hat{A}$$

$$\cos \alpha = \cos (180° - \hat{A}) = -\cos \hat{A}$$

pues el coseno de un ángulo (α) es igual en valor absoluto, pero de signo contrario al coseno del ángulo suplementario ($180° - \hat{A}$).

Finalmente, reemplazando en (II), resulta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

TEOREMA DE PITÁGORAS. — Teniendo en cuenta el teorema anterior, resulta que en un triángulo rectángulo

$$\hat{A} = 90° \qquad \text{y} \qquad \cos 90° = 0$$

entonces la expresión anterior se sintetiza así·

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0$$

o bien

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

que es el *enunciado del teorema de Pitágoras.*

APLICACIONES A LA FISICA

En *Física* se estudia que las *fuerzas* y las *velocidades* son cantidades que se caracterizan por tener:

a) Punto de aplicación.
b) Intensidad.
c) Dirección.
d) Sentido.

Las tres cualidades últimas son, como se ha estudiado, los elementos de un vector.

Las *fuerzas* y las *velocidades* son vectores, pero se los denomina *vectores aplicados* y no libres, porque su determinación depende de su origen o punto de aplicación, de la fuerza o de la velocidad.

Las leyes del producto de un vector por un número real y del producto escalar de dos vectores, las definiciones de suma algebraica de vectores y la composición o la descomposición de un vector en otras dos de direcciones dadas, son aplicables a la composición o a la descomposición de fuerzas o de velocidades, como veremos en seguida.

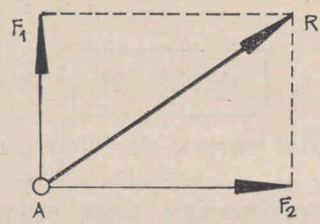
Problemas

I) Calcular la intensidad de la resultante de dos fuerzas perpendiculares, $F_1 = 6$ kg y $F_2 = 8$ kg.

Solución.

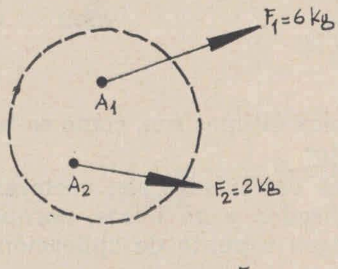
Sugerencia:

Aplicar el teorema de Pitágoras.

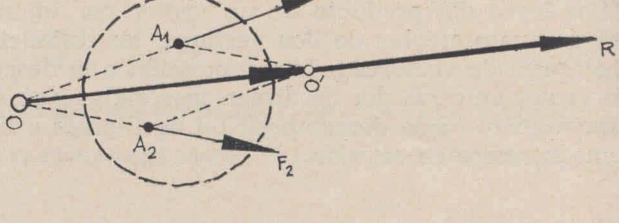


R.: 10 kg

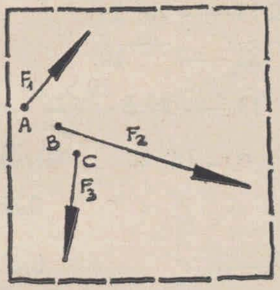
II) Aplicar al cuerpo que indica el diagrama una sola fuerza de modo que produzca el mismo efecto que las demás.



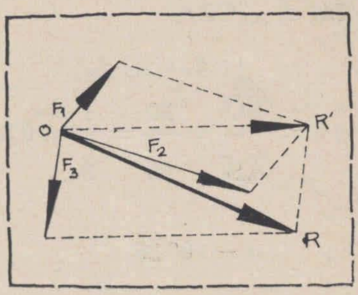
Solución.



III) Aplicar al cuerpo que señala el dibujo una sola fuerza (R), de manera que produzca el mismo efecto que las otras tres.



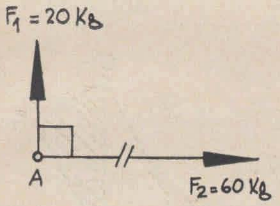
R.:



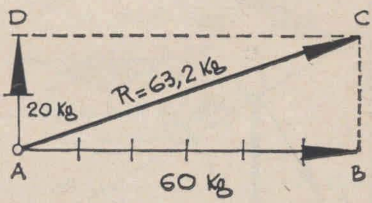
IV) Hallar gráfica y analíticamente la resultante de las fuerzas perpendiculares F_1 y F_2 y el ángulo que dicha resultante forma con la componente F_2.

Los datos figuran en el croquis.

Datos



Solución gráfica



Solución analítica

En el $\triangle$CBA, por teorema de Pitágoras

$$\text{medida } \overline{AC} = + \sqrt{(\text{medida } \overline{AB})^2 + (\text{medida } \overline{BC})^2}$$

$$\text{medida } \overline{AC} = + \sqrt{60^2 + 20^2} = \sqrt{3600 + 400} = \sqrt{4000}$$

$$\Rightarrow \quad \text{medida } \overline{AC} = 63{,}24$$

$$R = 63{,}24 \text{ kg}$$

En el $\triangle CBA$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = 18^\circ\, 26'$$

Cálculo auxiliar

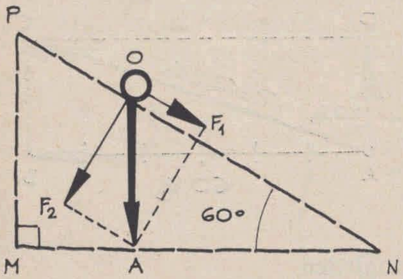
$$\begin{array}{r@{\;}c@{\;}l}
0{,}3346 & — & 18^\circ\, 30' \\
0{,}3314 & — & 18^\circ\, 20' \\
\hline
32 & — & 10' \\
19 & — & x = \dfrac{19 \times 10}{32} \cong 6'
\end{array}$$

$$\alpha = 18^\circ\, 26'$$

$$\begin{array}{r}
0{,}3333 \\
-\;0{,}3314 \\
\hline
19
\end{array}$$

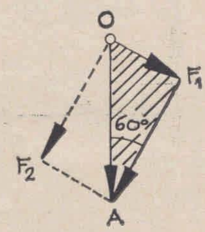
V) Supongamos que existe un cuerpo representado por el vector $\vec{A}$, apoyado en un plano inclinado. Calcular la componente paralela a dicho plano inclinado.

Los datos figuran en el croquis.



$$\vec{A} = 1000 \text{ kg}$$

Solución



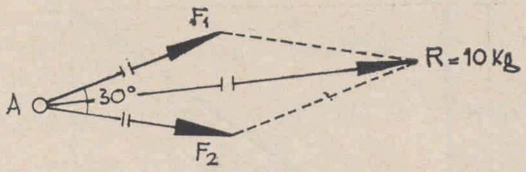
En el AOF_1A, rectángulo, se tiene

$$\vec{F_1} = \vec{A} \cdot \text{sen } 60^\circ = 1000 \text{ kg} \cdot 0{,}866 = 866 \text{ kg}$$

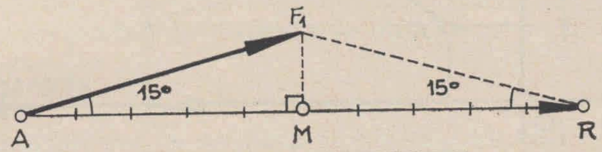
$$\vec{F_2} = \overrightarrow{F_1 A} = \vec{A} \cdot \cos 60^\circ = 1000 \text{ kg} \cdot 0{,}5 = 500 \text{ kg}$$

VI) Dada una fuerza $R = 10$ kg de origen A, determinar gráfica y analíticamente dos componentes iguales de la misma,

$\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2}$, de manera que aplicadas al punto A formen un ángulo de 30°.



Solución.



En el $\triangle AMF_1$, rectángulo

$$\cos 15° = \frac{\overline{AM}}{\overline{AF_1}} \Rightarrow \overline{AF_1} = \frac{\overline{AM}}{\cos 15°} = \frac{15}{0{,}97}$$

$$\overline{AF_1} \cong 5{,}16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2} \cong 5{,}16 \text{ kg}}$$

VII) Calcular la distancia entre los dos puntos cuyos datos figuran en el croquis.

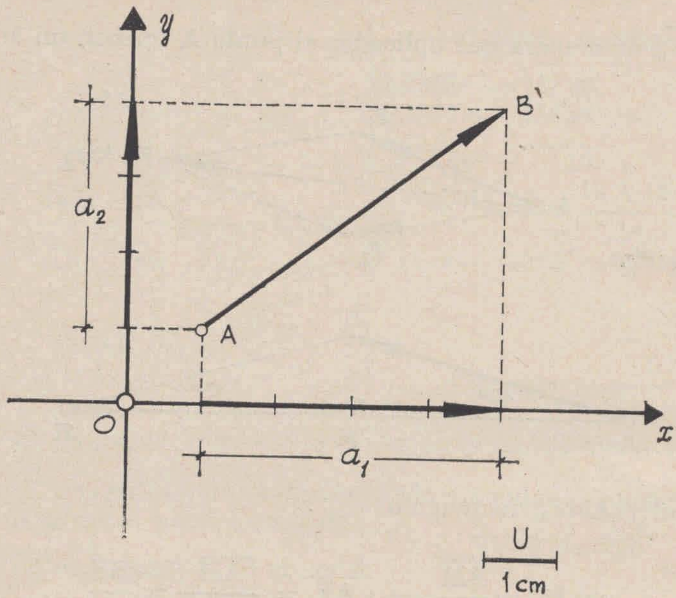
Solución.

Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{AB} = 5 \text{ cm}$$

(Figura en página siguiente.)



NOTA ILUSTRATIVA

Para gran parte de sus aplicaciones, la idea intuitiva de *vector* como *segmento orientado* es la más útil y fecunda.

Sin embargo, desde el punto de vista de la Matemática pura interesa dar una definición abstracta, que ponga en evidencia las características esenciales de los vectores. Se llega así al concepto de *espacio vectorial,* que vamos a definir, y que constituye una estructura de la mayor importancia en la Matemática Moderna.

Espacio vectorial.

Definición. — Se llama *espacio vectorial* a un conjunto de elementos, A_1, A_2, A_3, ... llamados *vectores*, entre los cuales están definidas las dos operaciones siguientes: *suma* y *multiplicación por un escalar.*

Suma.

a) $\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{A}_2 + \vec{A}_1$ (propiedad conmutativa)

b) $\vec{A}_1 + (\vec{A}_2 + \vec{A}_3) = (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) + \vec{A}_3$ (propiedad asociativa)

c) Existe un elemento neutro: *vector nulo* $(\vec{O})$, tal que, cualquiera sea $\vec{A}$, se verifica $\vec{A} + \vec{O} = \vec{A}$.

d) A todo vector $\vec{A}$ le corresponde otro vector $-\vec{A}$, tal que $\vec{A} + (-\vec{A}) = O$.

Multiplicación por un escalar. — Todo número real n y todo vector $\vec{A}$, determina un vector $n \cdot \vec{A}$ con las siguientes propiedades:

a) $n \cdot (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = n\vec{A}_1 + n\vec{A}_2$ (distributiva - Adición de vectores)

b) $(n_1 + n_2) \cdot \vec{A} = n_1\vec{A} + n_2\vec{A}$ (distributiva - Adición de escalares)

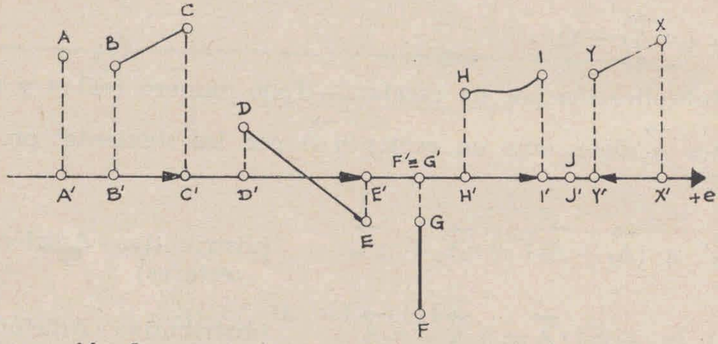
c) $(n_1 \cdot n_2)\, \vec{A} = n_1 (n_2 \cdot \vec{A})$ (asociativa)

d) $1 \cdot \vec{A} = \vec{A}$.

Esta *definición axiamática* amplía la idea geométrica intuitiva de vector: cualquier conjunto de elementos entre los cuales pueden definirse las operaciones anteriores podrá considerarse como un *espacio vectorial*, y los elementos mismos como vectores, aunque a veces sería difícil interpretarlos como segmentos orientados.

7 RELACIONES METRICAS EN LOS TRIANGULOS

Proyección de un punto. — Se llama *proyección de un punto sobre un eje,* al pie de la perpendicular trazada por dicho punto al eje. En la figura, la proyección del punto A sobre el eje *e* es el punto A′.



Proyección de un segmento. — Se llama *proyección de un segmento sobre un eje* al segmento del eje determinado por las proyecciones del origen y del extremo del segmento dado. En la figura:

$$pr\,BC = B'C' \quad ; \quad pr\,DE = D'E' \quad ; \quad pr\,FG = F'G' \quad ;$$
$$pr\,XY = X'Y'$$

Proyección de una curva. — Se llama *proyección de una curva sobre un eje* al segmento de dicho eje determinado por las proyecciones del origen y del extremo de la línea dada. En la figura

$$\text{Proyección } HI = H'I'$$

Casos particulares

a) Cuando un punto J pertenece al eje de proyección, su proyección J′ se confunde con el punto dado.

b) Cuando un segmento FG es perpendicular al eje de proyección, su proyección F′G′ se convierte en un punto.

Signo de una proyección. — La proyección de una línea sobre un eje es *positiva* cuando el sentido de la proyección coincide con el sentido positivo del eje y *negativa* en caso contrario.

En la figura:

$$\text{proyección } \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ (positiva)}$$

$$\text{proyección } \overline{XY} = \overline{X'Y'} \text{ (negativa)}$$

Relaciones métricas en los triángulos

I) Teorema. — *En un triángulo rectángulo, cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre ella.*

H) $\overset{\triangle}{CAB}$ rectángulo
$AH \perp a$ en H
b' proyección de b sobre a
c' proyección de c sobre a

T) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{b'}$; $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{c'}$

Demostración por vectores.

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \qquad \text{por suma de vectores}$$

$$\vec{b}' + \vec{h}_a = \vec{b} \qquad \text{ídem}$$

Producto escalar

$$\vec{a} \times (\vec{b}' + \vec{h}_a) = (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b}$$

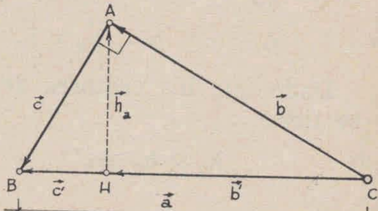
Resolviendo:

$$\vec{a} \times \vec{b}' + \vec{a} \times \vec{h}_a = \vec{b} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b}$$

Por ser vectores perpendiculares

$$\vec{a} \times \vec{h}_a = 0 \qquad \vec{c} \times \vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b}' = \vec{b} \times \vec{b}$$



en esta relación los vectores tienen igual sentido, luego

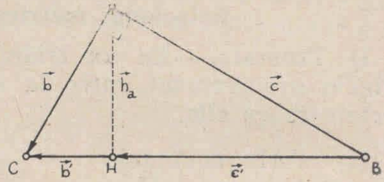
$$a \times b' = b \times b$$

de donde $\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{b'}}$ Análogamente $\boxed{\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{c'}}$

II) TEOREMA. — *En un triángulo rectángulo la altura es media proporcional entre los segmentos que determina sobre la hipotenusa.*

H) $\overset{\triangle}{\text{CAB}}$ rectángulo
$h_a \perp$ CB en H

T) $\dfrac{c'}{h_a} = \dfrac{h_a}{b'}$



Desarrollo por vectores.

Por suma y diferencia de vectores, se tiene:

$$\vec{c} = \vec{c}' + \vec{h}_a$$
$$\vec{b} = \vec{b}' - \vec{h}_a$$

Producto escalar

$$\vec{c} \times \vec{b} = (\vec{c}' + \vec{h}_a) \times (\vec{b}' - \vec{h}_a)$$

Efectuando producto

$$\vec{c} \times \vec{b} = \vec{c}' \times \vec{b}' + \vec{h}_a \times \vec{b}' - \vec{c}' \times \vec{h}_a - \vec{h}_a \times \vec{h}_a$$

Por ser vectores ortogonales, resulta:

$$\vec{c} \times \vec{b} = 0 \qquad \vec{h}_a \times \vec{b}' = 0 \qquad \vec{c}' \times \vec{h}_a = 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = \vec{c}' \times \vec{b}' - \vec{h}_a \times \vec{h}_a \quad \text{o bien} \quad \vec{h}_a \times \vec{h}_a = \vec{c}' \times \vec{b}'$$

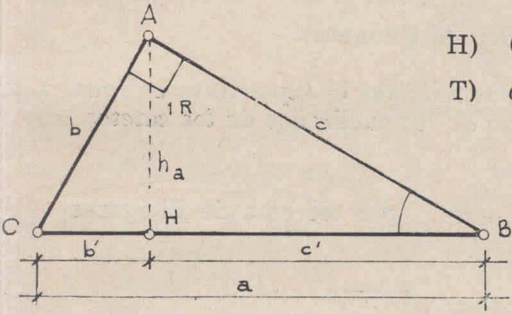
Dado que los vectores de esta relación tienen igual sentido, se tiene:

$$h_a \times h_a = c' \times b' \qquad \text{o bien} \qquad \boxed{\dfrac{b'}{h_a} = \dfrac{h_a}{c'}}$$

Teorema de Pitágoras

Aplicando las relaciones métricas en el triángulo rectángulo se puede demostrar el Teorema de Pitágoras mediante razonamiento simple.

TEOREMA. — *En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*



H) $\overset{\triangle}{CAB}$ rectángulo en $\overset{<}{A}$

T) $a^2 = b^2 + c^2$

D) Se traza la altura AH correspondiente a la hipotenusa y, de acuerdo al teorema anterior (I), se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'} \text{ de donde } a \cdot b' = b \cdot b \qquad (1)$$

por propiedad de las proporciones.

Análogamente

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{c'} \text{ de donde } a \cdot c' = c \cdot c \qquad (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2)

$$a \cdot b' + a \cdot c' = b \cdot b + c \cdot c$$

Sacando a como factor común:

$$a \cdot (b' + c') = b \cdot b + c \cdot c$$

Pero

$$b' + c' = a$$

Reemplazando, se tiene:

$$a \cdot a = b \cdot b + c \cdot c$$

de donde

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

por definición de potencia segunda.

Consecuencias del teorema de Pitágoras.

I) *En todo triángulo rectángulo la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.*

En efecto:

como $a^2 = b^2 + c^2$ por teorema de Pitágoras

despejando a se tiene:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

II) *En todo triángulo rectángulo un cateto es igual a la raíz cuadrada del cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.*

En efecto:

como $a^2 = b^2 + c^2$ por teorema de Pitágoras

despejando el cateto b se tiene:

$$a^2 - c^2 = b^2$$

de donde

$$\sqrt{a^2 - c^2} = b$$

o bien:

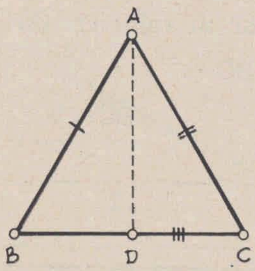
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Análogamente:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Superficie del triángulo equilátero en función del lado.

Sea el triángulo equilátero ABC donde $\overline{AD}$ es la altura



$$\Rightarrow \qquad \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} \qquad (1)$$

Además, como la altura de un triángulo equilátero es mediana del mismo

$$\overline{BD} = \overline{DC} \qquad \text{o bien} \qquad \overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{2} \qquad (2)$$

En el $\triangle ADB$, rectángulo en D, se tiene, por el teorema de Pitágoras

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \qquad \text{o bien} \qquad \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$$

Reemplazando $\overline{BD}$ por su valor en (1)

$$\overline{AB}^2 - \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 = \overline{AD}^2 \quad ; \quad \overline{BC}^2 - \frac{\overline{BC}^2}{4} = \overline{AD}^2 \text{ por (2)}$$

Efectuando operaciones

$$\frac{4 \cdot \overline{BC}^2 - \overline{BC}^2}{4} = \overline{AD}^2 \quad ; \quad \frac{3 \cdot \overline{BC}^2}{4} = \overline{AD}^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\overline{BC} \cdot \sqrt{3}}{2} = \overline{AD} \qquad (3)$$

Pero

$$\text{Valor superficie } \triangle ABC = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{2}$$

Reemplazando AD por su valor en (3)

Valor superficie $\triangle ABC =$

$$= \frac{BC \cdot \dfrac{\overline{BC} \cdot \sqrt{3}}{2}}{2}$$

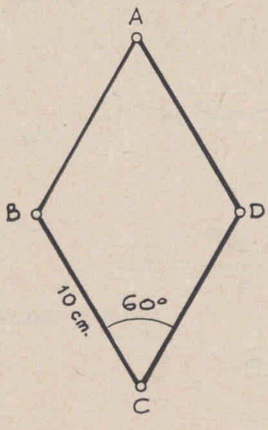
o bien

$$\boxed{\text{Valor superficie } \triangle ABC = \frac{\overline{BC}^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$$

fórmula que se enuncia diciendo: *El valor de la superficie de un triángulo equilátero es igual a la cuarta parte del cuadrado del lado por la raíz cuadrada de tres.*

Problemas

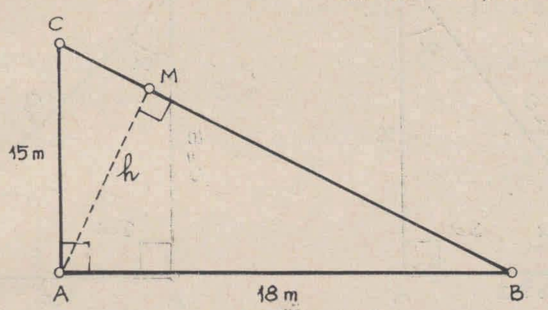
I) Un ángulo de un rombo vale 60° y el lado tiene una longitud de 10 cm. Determinar la longitud de cada diagonal.



R.: 10 cm y 17,32 cm

II) En el croquis es $\overline{AM} \perp \overline{BC}$. Calcular $\overline{AM}$.

R.: $\overline{AM} = 11{,}5$ m



III) En un triángulo ABC recto en $\hat{A}$ se marca un punto M sobre un cateto AB tal que $\overline{CA} = \overline{AM} = 1$ y $\overline{CM} = \overline{MB}$. Calcular $\overline{CB}$, $\widehat{ACB}$ y $\hat{B}$.

R.: $\begin{cases} \overline{CB} \cong 2{,}61 \\ \widehat{ACB} \cong 67^\circ\, 30' \\ \hat{B} \cong 22^\circ\, 30' \end{cases}$

IV) En el $\square$ ABCD es $\overline{AD} = 2$ cm, $\overline{DC} = 4$ cm y $\hat{A} = 60^\circ$. Calcular la longitud de la altura determinada por el vértice D y el lado $\overline{BC}$.

R.: $\overline{DM} = 3{,}464$. cm

V) Si la altura de un triángulo equilátero tiene 12 cm de largo, ¿cuál es la longitud de un lado del triángulo?

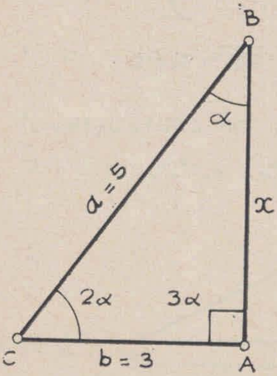
R.: lado $\cong 13{,}5$ cm

VI) Con los datos de los croquis respectivos determinar los valores numéricos pedidos en cada ejercicio. Figura en la página siguiente.

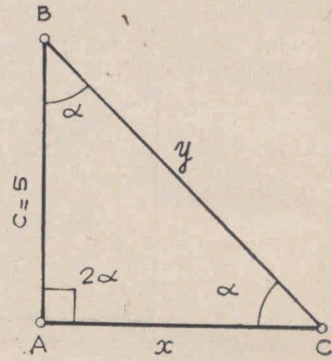
a) x, α, 2α, 3α.

R.: $\begin{cases} x = 4 \\ \alpha = 30^\circ \\ 2\alpha = 60^\circ \\ 3\alpha = 90^\circ \end{cases}$

a)



b)

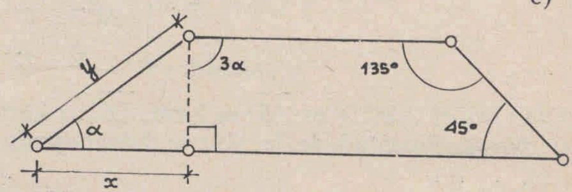


b) x, y, α, 2α.

R.: $\begin{cases} x = 5 \\ y \sim 7 \\ \alpha = 45° \\ 2\alpha = 90° \end{cases}$

c) x, y, α.

c)



R.: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \\ \alpha = 30° \end{cases}$

VII) Se tiene una chapa de hierro recortada en forma de triángulo rectángulo; sus catetos valen 0,12 m y 0,16 m. Calcular el valor de la hipotenusa.

Solución:

$a^2 = b^2 + c^2$ por teorema de Pitágoras.

$a^2 = 0{,}16^2\ \mathrm{m}^2 + 0{,}12\ \ \mathrm{m}^2$

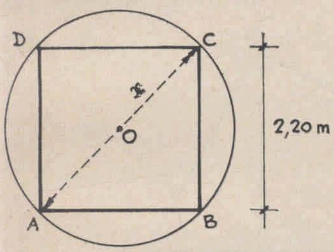
$a^2 = 0{,}0400\ \mathrm{m}^2$

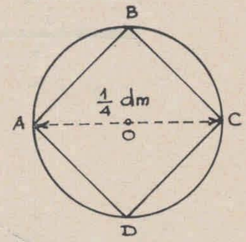
$$a = \sqrt{0{,}0400\ \text{m}^2}$$
$$a = 0{,}20\ \text{m}$$

R.: La hipotenusa vale 0,20 m.

VIII) ¿Cuál deberá ser el diámetro de un círculo si se quiere sacar de él un cuadrado de 2,20 cm?

R.: 3,11 cm





IX) ¿Cuál es el lado del mayor cuadrado que puede cortarse en una barra redonda de ¼ dm de diámetro?

R.: 17,6 mm

X) Calcular la altura (h) de un triángulo isósceles cuya base (b) tiene 30 m y el lado igual (a) 25 m.

R.: $h = 20$ m

XI) La perpendicular trazada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo, determina sobre la hipotenusa los segmentos de 7,20 m y 12,80 m, que son respectivamente adyacentes a los catetos (b) y (c). Calcular la perpendicular y los catetos.

R.: $h = 9{,}60$ m
$b = 12$ m
$c = 16$ m

XII) En un triángulo rectángulo, la hipotenusa $a = 30$ m y la proyección sobre ella del cateto (b) es de 10,80 m. Calcular los catetos (b) y (c).

R.: $b = 18$ m
$c = 24$ m

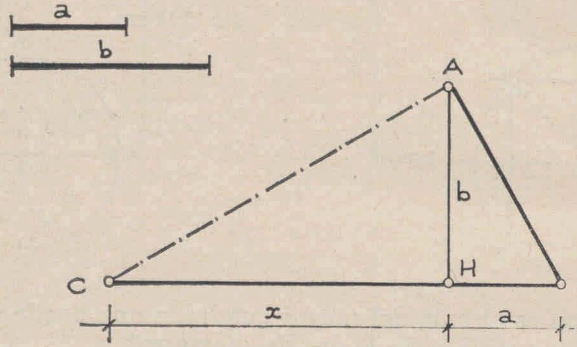
XIII) Construir un segmento que sea tercero proporcional entre dos segmentos dados.

Datos

segmento a y segmento b

Incógnita

segmento x tal que $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$



Se construye primero el triángulo rectángulo AHB cuyos catetos son a y b. Por el vértice A se traza AC $\perp$ AB que corta a la recta a en C. El segmento CH $= x$ es la tercera proporcional. Justifique el lector esta construcción, teniendo en cuenta que la altura b es media proporcional entre los segmentos a y x que determina sobre la hipotenusa.

XIV) En un triángulo rectángulo los catetos (b) y (c) tienen 9 m y 12 m, respectivamente. Calcular la hipotenusa (a), la perpendicular (h) trazada desde el vértice del ángulo recto y los segmentos (x) e (y) de la hipotenusa.

R.: $a = 15$ m
$h = 7{,}20$ m
$x = 5{,}40$ m
$y = 9{,}60$ m

XV) Construir un segmento que sea medio proporcional entre dos segmentos dados.

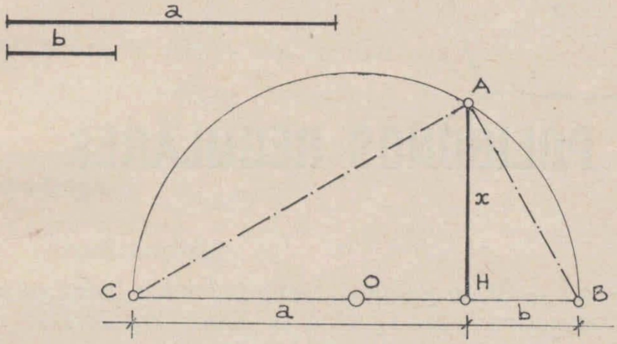
Datos

segmento a y segmento b

Incógnita

segmento x tal que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

Construcción



Sobre una recta dibujamos los dos segmentos consecutivos a y b. Considerando $\overline{CB}$ como diámetro, se traza una semicircunferencia. Se traza luego por H la perpendicular AH $\perp$ CB que corta en A a la semicircunferencia. El segmento AH es la *media proporcional.*

Justifique el lector esta construcción teniendo en cuenta el Teorema II, de relaciones métricas en los triángulos rectángulos.

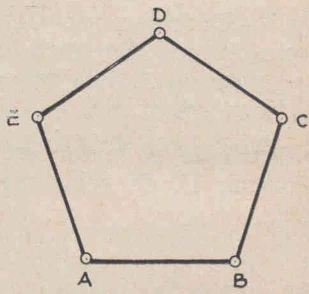
8 POLIGONOS REGULARES

DEFINICIÓN. — Si un polígono tiene todos sus lados y todos sus ángulos respectivamente iguales, se llama *regular*.

En caso contrario el polígono es *irregular*.

Ejemplo:

El polígono ABCDE es regular.



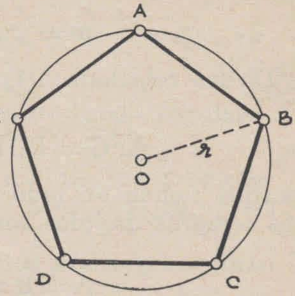
$$\Longleftrightarrow \quad \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$$

$$\wedge \quad \overset{<}{A} = \overset{<}{B} = \overset{<}{C} = \overset{<}{D} = \overset{<}{E}$$

El triángulo equilátero y el cuadrado son ejemplos de polígonos regulares.

Polígonos inscriptos.

Propiedad. — *Si una circunferencia se divide en tres o más arcos iguales y se trazan las cuerdas determinadas por los pares* *de puntos de división consecutivos, el polígono inscripto que resulta es regular.*



Si

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \ldots = \overset{\frown}{EA}$$

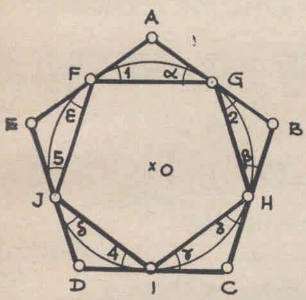
es

polígono inscripto ABC . . . E regular.

Recíprocamente. — *Todo polígono regular es inscriptible en una circunferencia.*

Polígonos circunscriptos.

Teorema. — *Si se divide una circunferencia en tres o más arcos iguales y por los puntos de división se trazan tangentes a ella, el polígono circunscripto que resulta es regular.*



H) C (0, r)

$$\overset{\frown}{FG} = \overset{\frown}{GH} = \overset{\frown}{HI} = \overset{\frown}{IJ} = \overset{\frown}{JF}$$

AB, BC, CD, DE y EA tangentes por los puntos G, H, I, J y F.

T) ABCDE polígono regular.

D) Se ha considerado la circunferencia dividida en cinco arcos iguales. Al unir los puntos F, G, H, I y J se tiene

$$\overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI} = \overline{IJ} = \overline{JF} \qquad (1)$$

por ser cuerdas correspondientes a arcos iguales.

Además, por ángulos semi-inscriptos que abarcan arcos iguales

$$\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4} = \hat{5} \qquad (2)$$

Por la misma razón

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} = \hat{\delta} = \hat{\varepsilon} \tag{3}$$

De las relaciones (1), (2) y (3) resulta

$$\overset{\triangle}{AFG} = \overset{\triangle}{BGH} = \overset{\triangle}{CHI} = \overset{\triangle}{DIJ} = \overset{\triangle}{EJF}$$

porque tienen un lado y dos ángulos iguales; en consecuencia, los terceros ángulos son iguales

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E} \tag{a}$$

Por oponerse a ángulos iguales en triángulos iguales es

$$\overline{AG} = \overline{BH} = \overline{CI} = \overline{DJ} = \overline{EF}$$

y también

$$\overline{GB} = \overline{HC} = \overline{ID} = \overline{JE} = \overline{FA}$$

Sumando miembro a miembro ambas series de igualdades

$$\overline{AG} + \overline{GB} = \overline{BH} + \overline{HC} = \overline{CI} + \overline{ID} = \overline{DJ} + \overline{JE} = \overline{EF} + \overline{FA}$$

o bien

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} \tag{b}$$

Las relaciones (a) y (b) nos indican que es

$$\boxed{\text{ABCDE polígono regular}}$$

Recíprocamente. — *Todo polígono regular es circunscriptible a una circunferencia.*

Inscripción de polígonos regulares. — Para dibujar un polígono regular se traza una circunferencia arbitraria, se la divide en tantos arcos iguales como lados deba tener el polígono propuesto, y se unen los puntos consecutivos de división.

Utilizando un *transportador* de ángulos se puede dividir una circunferencia en 3, 4, 5, 6, etc. partes iguales, resultando los ángulos centrales correspondientes de

$360°: 3 = 120°$; $360°: 4 = 90°$; $360°: 5 = 72°$; $360°: 6 = 60°$, etc.

Cálculo del lado y de la apotema de un hexágono regular

Para obtener un hexágono regular se divide una circunferencia en 6 arcos iguales, correspondientes a ángulos centrales $\omega = 360° : 6 = 60°$.

Las cuerdas que unen los extremos de los arcos determinan el hexágono regular.

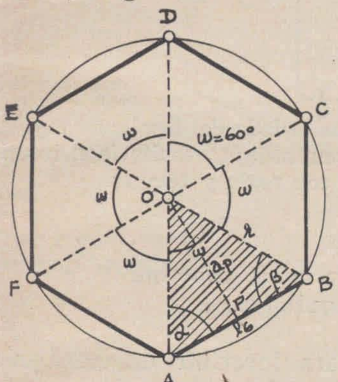
Cálculo del lado en función del radio

Sea ABCDEF un hexágono regular; en consecuencia, el triángulo AOB es isósceles y $\omega = 60°$.

Los ángulos α y β de la base del $\overset{\triangle}{AOB}$, resultan

$$\overset{<}{\alpha} = \overset{<}{\beta} = \frac{180° - 60°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

Como los tres ángulos son iguales a $60°$, el triángulo es equilátero; luego



Pero

$$\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BO}$$

$$\overline{OA} = \overline{OB} = r \quad \text{y} \quad \overline{AB} = l_6$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{l_6 = r}$$

Cálculo de la apotema en función del radio

$$\overline{OP} = \text{apotema}$$

Sabemos que $\triangle AOB$ es equilátero y $\overline{OP} \perp \overline{AB}$ por definición de apotema; por lo tanto, $\overline{AP} = \dfrac{l_6}{2}$, porque la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles es también mediana.

En el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{APO}$, se establece

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AP}^2}$$

por un corolario del teorema de Pitágoras; pero como

$$\overline{OP} = ap \quad ; \quad \overline{OA} = r \quad \text{y} \quad \overline{AP} = \frac{l_6}{2} = \frac{r}{2}$$

resulta

$$ap = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{4r^2 - r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{ap = \frac{r\sqrt{3}}{2}}$$

Observación. — Teniendo en cuenta que el lado del hexágono regular es igual al radio de la circunferencia circunscripta, resulta fácil inscribir en una circunferencia aquella figura con regla y compás.

Resuelva el lector este problema.

Determinación del lado y de la apotema de un triángulo equilátero

Conocido ya el procedimiento para inscribir un hexágono regular, se divide la circunferencia en 6 arcos iguales usando el radio como cuerda. Se unen luego los puntos alternados de división, obteniéndose un triángulo equilátero.

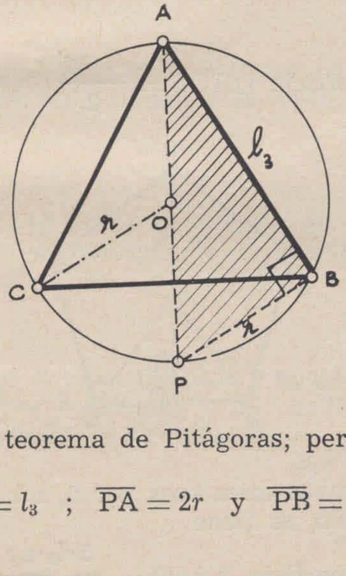
También se puede obtener un triángulo equilátero inscripto mediante un ángulo central de $360 : 3 = 120°$.

Cálculo del lado en función del radio

Se une P con A y con B; resulta el triángulo PBA rectángulo en B, pues el $\hat{B}$ está inscripto en una semicircunferencia.

Luego

$$\overline{AB} = \sqrt{PA^2 - PB^2}$$



por corolario del teorema de Pitágoras; pero

$$\overline{AB} = l_3 \quad ; \quad \overline{PA} = 2r \quad y \quad \overline{PB} = l_6 = r$$

reemplazando

$$l_3 = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{l_3 = r\sqrt{3}}$$

Superficie del polígono regular.

El valor de la superficie de un polígono regular es igual al semiproducto de su perímetro por su apotema.

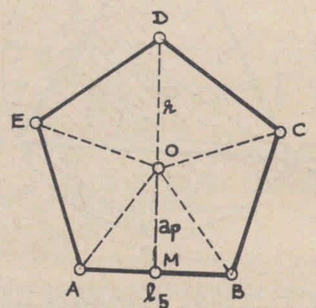
Supongamos un polígono regular ABCDE de cinco lados. Trazando los segmentos que unen el centro con los vértices, el polígono queda descompuesto en cinco triángulos iguales, los que tienen como *base*, el *lado del pentágono* l_5 y como *altura*, su *apotema*, ap.

Por lo tanto,

$$\text{Valor de la superficie } \triangle AOB = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OM}}{2}$$

o bien

$$\text{Valor de la superficie } \triangle AOB = \frac{l_5 \cdot ap}{2}$$



Multiplicando ambos miembros por 5, número de triángulos que se han formado, se tiene

$$5 \cdot \text{valor de la superficie } \triangle AOB = \frac{5 \cdot l_5 \cdot ap}{2} \qquad (1)$$

pero

5·valor de la superficie $\triangle AOB$ = Valor de la superficie polígono ABCDE y $\qquad 5 \cdot l_5 = \text{perímetro}$

Reemplazando en (1)

$$\boxed{\text{Valor superficie polígono regular} = \frac{\text{Perímetro} \times \text{apotema}}{2}}$$

EJERCICIOS

I) Calcular el lado y la apotema de un cuadrado inscripto en una circunferencia de 30 cm de radio.

R.: $l_4 = 0{,}424$ m
$a_4 = 0{,}212$ m

II) Calcular el lado y la apotema de un hexágono regular inscripto en una circunferencia de 40 cm de diámetro.

R.: $l_6 = 0{,}20$ m
$a_6 = 0{,}173$ m

III) Calcular el lado y la apotema de un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia de 3 m de radio.

R.: $l_3 = 5{,}20$ m
$a_3 = 1{,}50$ m

IV) Calcular el valor del lado y apotema del hexágono regular, del triángulo equilátero y del cuadrado, inscriptos en una circunferencia de 10 cm de radio.

R.: $l_6 = 10$ cm
$ap_6 = 8{,}6$ cm
$l_3 = 17{,}3$ cm
$ap_3 = 5$ cm
$l_4 = 14{,}1$ cm
$ap_4 = 7{,}05$ cm

V) Calcular el valor de la apotema de un triángulo equilátero inscripto si el lado vale 34,6 cm.

R.: $ap_3 = 10$ cm

Cálculo de la apotema en función del radio

$$\overline{OM} = \text{apotema}$$

Por definición de apotema $\overline{OM} \perp \overline{CB}$, y por lo tanto $\overline{OP}$ divide al arco CPB en dos arcos iguales.

Uniendo B con O y con P, se obtiene el triángulo BOP, que es isósceles, pues $\overline{OB} = \overline{BP} = r$.

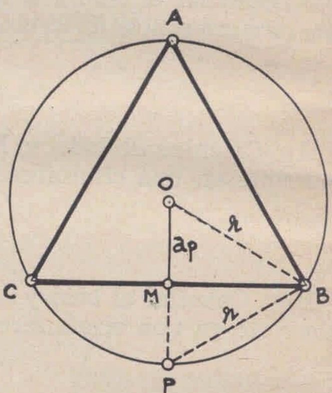
Teniendo en cuenta que $\overline{BM}$ es altura correspondiente a su base, es a su vez $\overline{BM}$ mediana.

Luego

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OP}}{2}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{ap = \frac{r}{2}}$$



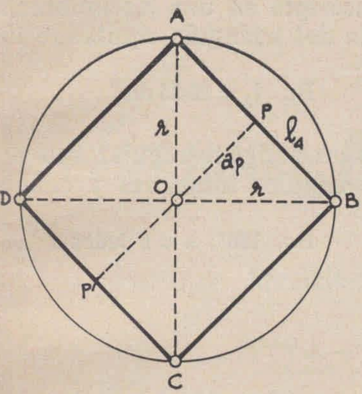
Deduzca el lector el valor de la apotema siguiendo otro procedimiento: considerando el triángulo rectángulo BMO y aplicando el teorema de Pitágoras, o bien considerando las diagonales del rombo BOCP.

Determinación del lado y de la apotema de un cuadrado.

Para inscribir un cuadrado en una circunferencia basta trazar dos diámetros perpendiculares $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, y unir los extremos de los mismos.

Cálculo del lado en función del radio

Considerando el triángulo rectángulo AOB se tiene



$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}$$

por corolario del teorema de Pitágoras;

pero

$$\overline{AB} = l_4 \quad ; \quad \overline{OA} = \overline{OB} = r$$

reemplazando

$$l_4 = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{l_4 = r\sqrt{2}}$$

Cálculo de la apotema en función del radio

Considerando la base media $\overline{PP'}$ se forma el rectángulo ADP'P, cuyos lados opuestos son iguales. Luego $\overline{PP'} = \overline{AD}$.

Pero

$$\overline{PP'} = 2\,ap \quad \text{y} \quad \overline{AD} = l_4$$

de donde

$$2\,ap = l_4$$

$$ap = \frac{l_4}{2}$$

o bien

$$\boxed{ap = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$$

Deduzca el lector el valor de la apotema mediante la aplicación del teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OPB.

VI) Si el lado del cuadrado inscripto en una circunferencia vale 21,15 dm, ¿cuánto vale el lado del triángulo equilátero inscripto?

R.: $l_3 = 25{,}95$ dm

VII) El ángulo en el centro de un polígono regular vale 60°. ¿Cuánto valdrá cada uno de los ángulos interiores y cuántos lados tiene?

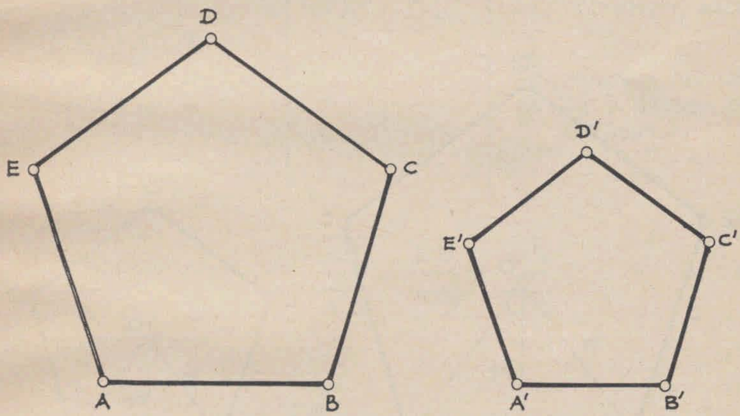
R.: 120°; $n = 6$ lados

SEMEJANZA DE POLIGONOS REGULARES 9

Medición de figuras circulares

Propiedades de los polígonos regulares.

I) *Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.*



En efecto: por ser los polígonos regulares es

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \ldots\ldots \\ \hat{E} = \hat{E}'\end{array}\right\{ \begin{array}{l}\text{por ser iguales a } \dfrac{2R(n-2)}{n} \\ \text{(teorema relativo suma ángulos interiores de un polígono)}\end{array}$$

Además

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \ldots = \overline{EA}$$

$$\wedge \quad \overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \ldots = \overline{E'A'}$$

y, por lo tanto

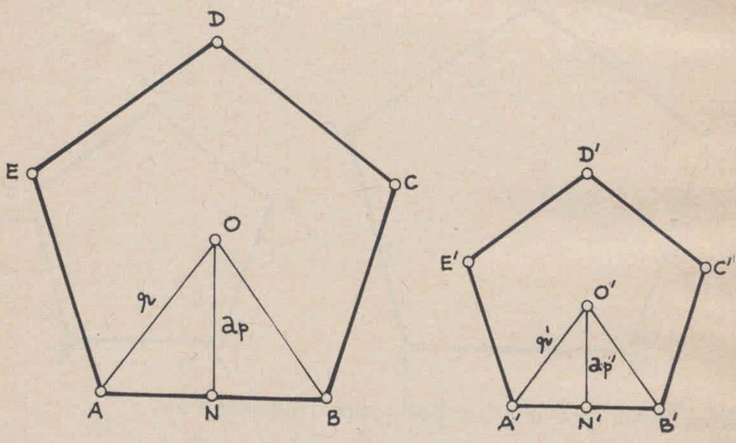
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \quad = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}}$$

por definición de razón.

$\Rightarrow$ Polígono AB ... E $\sim$ Polígono A'B' ... E'

por definición de polígonos semejantes.

II) Teorema. — *La razón de los perímetros de dos polígonos regulares es igual a la razón de las apotemas o radios respectivos.*



H) ABCDE y A'B'C'D'E' polígonos regulares.

$\overline{ON} = a_p$ y $\overline{O'N'} = a_{p'}$ apotemas o radios de circunferencias inscriptas.

$\overline{OA} = r$; $\overline{O'A'} = r'$ radios de circunferencias circunscriptas.

$$\text{T)} \quad \frac{\text{Perímetro ABCDE}}{\text{Perímetro A'B'C'D'E'}} = \frac{ap}{ap'} = \frac{r}{r'}$$

D) Por tratarse de polígonos regulares, son semejantes, luego la razón de sus perímetros es igual a la razón de dos lados homólogos cualesquiera.

$$\frac{\text{Perímetro ABCDE}}{\text{Perímetro A'B'C'D'E'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \qquad (1)$$

Pero

$\triangle AOB \sim \triangle A'O'B'$ por ser

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\overline{OA}}{\overline{O'A'}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{O'B'}} & \left\{ \text{Porque los numeradores son iguales a } (r) \text{ y los denominadores a } (r'). \right. \\ \\ \hat{O} = \hat{O}' & \left\{ \text{Por ángulos al centro de los polígonos regulares} = \dfrac{360°}{n} \right. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{O'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{O'A'}}$$

o bien

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{r}{r'} \qquad (2)$$

Pero, además,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{O'N'}}$$

porque las alturas homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales a los lados correspondientes:

$$\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{ap}{ap'} \qquad (3)$$

De (1), (2) y (3)

$$\frac{\text{Perímetro ABCDE}}{\text{Perímetro A'B'C'D'E'}} = \frac{r}{r'} = \frac{ap}{ap'}$$

que es la expresión de la tesis.

Corolario. — Por el teorema anterior se estableció que la razón de los perímetros de dos polígonos regulares es igual a la razón de los radios respectivos.

Es decir:

$$\frac{\text{Perímetro ABCDE}}{\text{Perímetro A'B'C'D'E'}} = \frac{r}{r'} \qquad (a)$$

multiplicando por dos el numerador y el denominador del segundo miembro, se tiene:

$$\frac{\text{Perímetro ABCDE}}{\text{Perímetro A'B'C'D'E'}} = \frac{r}{r'} = \frac{2r}{2r'} = \frac{\text{Diámetro}}{\text{diámetro}} \qquad (b)$$

De (a)

$$\frac{\text{Perímetro ABCDE}}{r} = \frac{\text{Perímetro A'B'C'D'E'}}{r'}$$

De (b)

$$\frac{\text{Perímetro ABCDE}}{\text{Diámetro}} = \frac{\text{Perímetro A'B'C'D'E'}}{\text{diámetro}}$$

es decir: *la razón de los perímetros de los polígonos regulares a sus radios o diámetros respectivos es constante.*

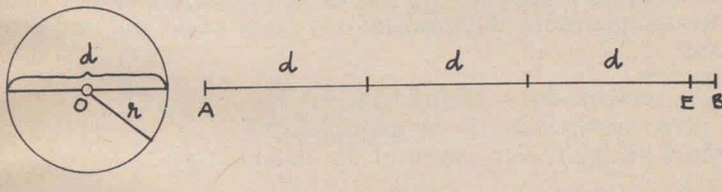
OBSERVACIÓN. — En este caso se trata de los *diámetros de las circunferencias circunscriptas,* pero si se hubieran multiplicado por dos ambos miembros de la razón de las apotemas la propiedad subsistiría para los *diámetros de las circunferencias inscriptas* a los polígonos.

Longitud de la circunferencia. — Considerando todas las circunferencias como polígonos regulares de infinito número de lados, de acuerdo al corolario relacionado con la razón de los perímetros de los polígonos regulares, se tiene: *la razón de las longitudes de las circunferencias a sus diámetros respectivos es constante.*

Se demuestra que esta relación es igual a 3,14159..., número irracional al que se lo representa por la letra griega π (Pi), inicial de *periferia* con que designaban los griegos a la circunferencia.

$$\frac{\text{Longitud circunferencia}}{\text{diámetro}} = \pi$$

$$\Rightarrow \quad \text{Longitud circunferencia} = \text{diámetro} \times \pi$$



Circunferencia rectificada. — Es un segmento que tiene una longitud igual a la longitud de la circunferencia.

Segmento $\overline{AB}$ = C (0 y r) *rectificada*

El número π.

Sabemos que: *circunferencia rectificada* $= d \times 3{,}14159\ldots$

$$\Rightarrow \quad \frac{\textit{circunferencia rectificada}}{d} = 3.14159\ldots$$

En consecuencia, π puede definirse como *la razón entre la circunferencia rectificada y su diámetro.*

Puede expresarse el número π por $\frac{22}{7}$ que es su valor con un error menor que 2 milésimos.

Fórmula de la longitud de la circunferencia.

Siendo:

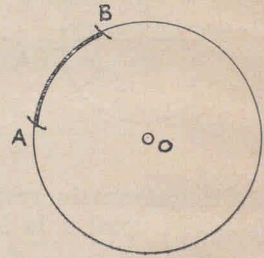
$$\textit{Longitud de la circunferencia} = 3.14159\ldots \times d$$

$$3{,}14159\ldots = \pi \quad \text{y} \quad d = 2r$$

resulta

$$\boxed{\textit{Longitud de la circunferencia} = 2\pi r}$$

En consecuencia: *La longitud de la circunferencia es igual al duplo del producto del número π por el valor del radio de la misma.*



Arco rectificado. — *Definición:* Se llama *arco rectificado* al segmento cuya longitud es igual a la longitud de dicho arco.

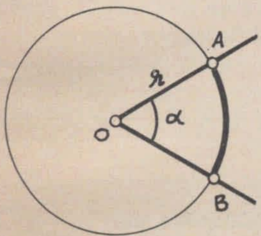
Ejemplo:

Es $\quad \overline{MN} = \overset{\frown}{AB}$ rectificado

si $\quad$ longitud $\overline{MN}$ = longitud $\overset{\frown}{AB}$

Fórmula de la longitud del arco rectificado.

Teniendo en cuenta que a un ángulo central de 360° corresponde la longitud de la circunferencia, $2\pi r$, para el ángulo central $\alpha°$, puede establecerse:



$$360° \text{ ———— } 2\pi r$$

$$1° \text{ ———— } \frac{2\pi r}{360}$$

$$\alpha° \text{ ———— } \frac{2\pi r\alpha}{360}$$

Como en una misma circunferencia o en circunferencias iguales *los arcos son proporcionales a los ángulos centrales correspondientes,* se tiene:

$$\text{Longitud } \overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi r\alpha}{360}$$

o bien

$$\text{Longitud } \overset{\frown}{AB} = \frac{\pi r\alpha}{180}$$

Luego: *La longitud de un arco de circunferencia es igual al producto de π por el radio por la medida del ángulo central, dividido por 180.*

Ejercicios

Calcular la longitud de un arco de 10 cm de radio cuyo ángulo central correspondiente es de 20°.

Solución:

$$\text{Longitud arco } x = \frac{\pi r\alpha}{180}$$

Reemplazando valores y tomando para π el valor 3,14

$$x = \frac{3{,}14 \times 10 \text{ cm} \times 20}{180}$$

$$x = 3{,}49 \text{ cm}$$

Problemas

I) Calcular el valor de la longitud de una circunferencia:
a) radio = 32 mm; b) $r = 0{,}2$ m;
c) $r = 3\,½''$; d) diámetro = 7,4 cm.

R.: a) 201,0624 mm
b) 1256,64 mm
c) $21'', 99 \cong 22''$
d) 23,25 cm

II) Calcular la longitud de la rueda de automóvil cuyo radio es igual a 60 cm.

R.: long. = 3,77 m

III) La circunferencia de una columna de mampostería tiene 2,57 m. Calcular su radio.

R.: $r = 0{,}41$ m

IV) Calcular la distancia recorrida por un automóvil cuya rueda delantera tiene 0,50 m de radio y ha dado 200 vueltas.

R.: 628 m

V) ¿Qué longitud tendrá un arco de 30° perteneciente a una circunferencia de 2 m de radio?

R.: 1,047 m

VI) Calcular la longitud de un arco de:
a) 110° y 22 cm de radio; b) 23° 22′ y 12 dm; c) 14° 30′ 40″ y 8 dm de radio.

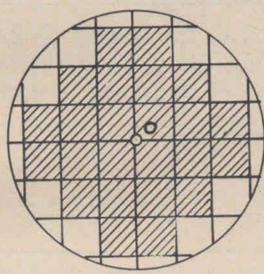
R.: a) 42,21 cm
b) 4,8939 dm
c) 2,0261 dm

SUPERFICIE DE FIGURAS CIRCULARES

Superficie del círculo.

Para medir un rectángulo, por ejemplo, es necesario establecer el número de veces que dicha superficie contiene a un cuadrado adoptado como unidad.

Por el contrario, cuando se considera un círculo, la medición no puede efectuarse utilizando un cuadrado unidad, pues queda siempre una parte del círculo sin cubrir.

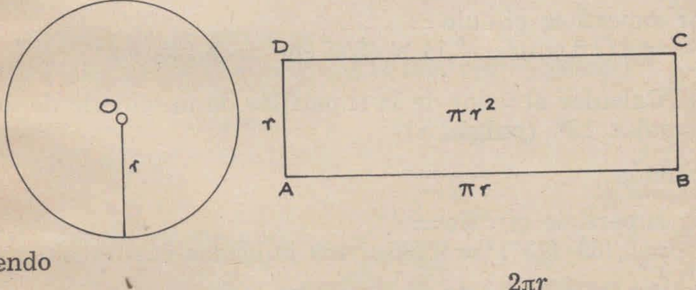


Entonces es menester recurrir a un procedimiento indirecto definiendo geométricamente a la superficie del círculo.

Definición geométrica de la superficie del círculo.

Se llama *superficie de un círculo* a la de un rectángulo cuya base es igual a la semicircunferencia rectificada y la altura es igual al radio.

(Semicircunferencia rectificada)



Siendo

$$Semicircunferencia\ rectificada = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

se tiene

Superficie del círculo (0 y r) = *superficie rectángulo* (πr, r)

FÓRMULA. — Resulta fácil obtener la fórmula que da la superficie de un círculo sabiendo que la superficie del rectángulo es igual a la base por la altura.

$$\textit{Supercie círculo } (0 \text{ y } r) = \pi r \times r$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\textit{Superficie círculo } (0 \text{ y } r) = \pi r^2}$$

Como en los trabajos de mecánica se conoce más fácilmente el valor del diámetro de un círculo, deduciremos otra fórmula práctica para encontrar el valor de la superficie de un círculo.

Llamando D al diámetro y aceptando $\pi = 3{,}14$, se tiene:

$$\textit{Superficie círculo } (0 \text{ y } r) = 3{,}14\, r^2 = 3{,}14 \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 3{,}14\, \frac{D^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\textit{Superficie círculo } (0 \text{ y } r) = 0{,}785\, D^2}$$

Ejercicios:

I) Calcular el valor de la superficie de un círculo de radio igual a 3,5 cm.

Solución:

Valor superficie círculo =

$= \pi\,(3{,}5 \text{ cm})^2 = 3{,}14 \times 12{,}25 \text{ cm}^2 = 38{,}4650 \text{ cm}^2$

II) Calcular el valor de la superficie de un círculo de diámetro igual a 13″ (pulgadas).

Solución:

Valor superficie círculo =

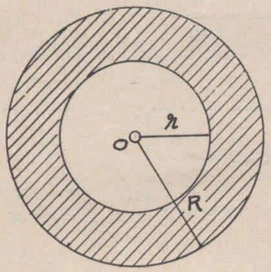
$= 0{,}785 \cdot (13'')^2 = 0{,}785 \times 169$ pulgadas cuadradas.

Valor superficie círculo =

$= 132{,}665$ pulgadas cuadradas.

Superficie de la corona circular.

Para determinar la superficie de la corona (0, r y R), se resta de la superficie del círculo (0, R) la del círculo (0, r).



En símbolos:

Superficie de la corona (0, r y R) $= \pi R^2 - \pi r^2$

o bien, sacando factor común

Superficie de la corona (0, r y R) $= \pi (R^2 - r^2)$.

Ejercicio:

Calcular el valor de la superficie de la corona circular, cuyos radios son 10 cm y 4 cm.

Solución:

Valor superficie de la corona =

$= \pi [(10 \text{ cm})^2 - (4 \text{ cm})^2] = 3{,}14 \ (100 \text{ cm}^2 - 16 \text{ cm}^2)$

Valor superficie de la corona =

$= 3{,}14 \times 84 \text{ cm}^2 = 263{,}76 \text{ cm}^2$.

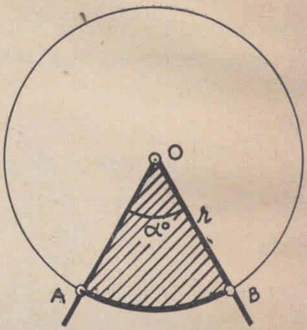
Superficie del sector circular.

Como a un ángulo central de 360° corresponde todo el círculo, si el ángulo central del sector AOB es de $\alpha°$ puede establecerse:

$$360° \text{ ——————— } \pi r^2$$

$$1° \text{ ——————— } \frac{\pi r^2}{360}$$

$$\alpha° \text{ ——————— } \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$$



es decir:

$$\boxed{\text{Superficie sector AOB} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}}$$

Ejercicio:

Calcular el valor de la superficie de un sector circular cuyo radio es de 10 mm y su ángulo central es de 30°.

Solución:

$$\text{Valor superficie sector} = \frac{\pi\,(10\text{ mm})^2 \times 30}{360} = 26\text{ mm}^2$$

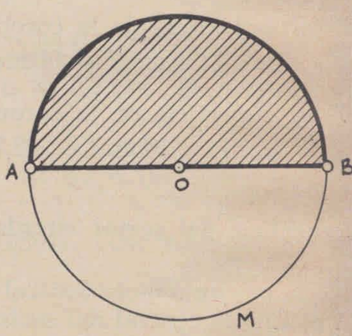
Superficie del segmento circular.

Consideremos dos casos:

I) *La cuerda pasa por el centro;* entonces, cada segmento circular es un semicírculo.

Superficie segmento circular AMB =

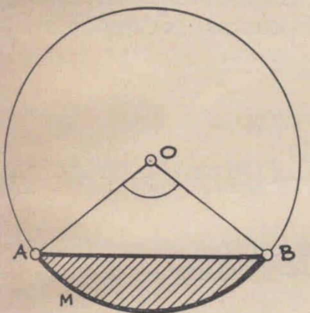
$$= \frac{1}{2}\text{ superficie círculo} = \frac{\pi r^2}{2}$$

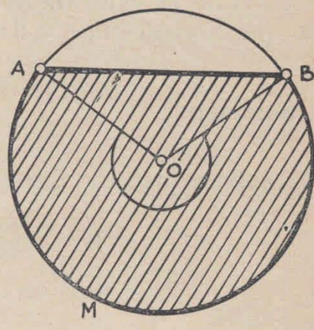


II) *La cuerda no pasa por el centro;* en este caso el segmento circular puede ser menor o mayor que un semicírculo.

a) Si el segmento circular es menor que un semicírculo, dicho segmento puede considerarse como diferencia entre el sector AOB, que contiene al punto M y el $\triangle$AOB; luego:

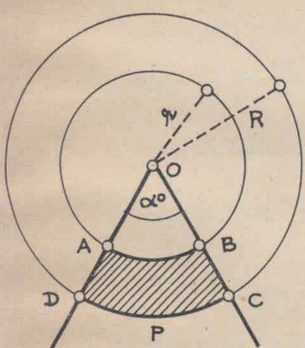
$$\textit{Sup. segmento circular } \mathrm{AMB} = \textit{Sup. sector } \mathrm{AOB} - \textit{Sup. } \overset{\triangle}{\mathrm{AOB}}$$





b) Si el segmento circular es mayor que un semicírculo dicho segmento puede considerarse como suma del sector circular AOB que contiene al punto M, más el $\triangle$AOB; luego:

$$\textit{Sup. segmento circular } \mathrm{AMB} = \textit{Sup. sector } \mathrm{AOB} + \textit{Sup. } \overset{\triangle}{\mathrm{AOB}}$$



Superficie del trapecio circular.

La superficie del trapecio circular ABCPD puede considerarse como diferencia entre los sectores DOC y AOB; luego:

$$\textit{Sup. trapecio circular } \mathrm{ABCPD} = \textit{Sup. sector } \mathrm{DOC} - \textit{Sup. sector } \mathrm{AOB}$$

Llamando R y r a los radios de las bases del trapecio circular, $\alpha°$ al valor del ángulo central DOC, correspondiente al trapecio ABCPD, se tiene:

$$\textit{Superficie trapecio circular ABCPD} = \frac{\pi R^2 \alpha^\circ}{360^\circ} - \frac{\pi r^2 \alpha^\circ}{360^\circ}$$

$$\textit{Superficie trapecio circular ABCPD} = \frac{\pi\alpha}{360}(R^2 - r^2)$$

Ejercicio:

Calcular el valor de la superficie del trapecio circular, sabiendo que $R = 10$ cm, $r = 5$ cm y el ángulo central correspondiente $\alpha = 30^\circ$.

Solución:

$$\text{Superficie trapecio circular} = \frac{3{,}14 \times 30}{360}[(10\text{ cm})^2 - (5\text{ cm})^2]$$

$$= \frac{94{,}20}{360}(100\text{ cm}^2 - 25\text{ cm}^2)$$

$$= \frac{94{,}20 \times 75\text{ cm}^2}{360}$$

Superficie trapecio circular $= 19{,}625$ cm²

Problemas

I) Calcular el valor de la superficie de un círculo:

a) radio $= 72$ cm.

R.: 16279,77 cm²

b) $r = 0{,}3$ m.

R.: 2827,44 cm²

c) diámetro $= 1{,}2$ cm.

R.: 1,13 cm²

(Utilizar la fórmula $0{,}785\ D^2$)

d) diámetro $= 4\frac{1}{2}''$.

R.: 15″, 90 pulgadas cuadradas

II) Calcular el área de un sector circular de $\omega°$ de ángulo central, en un círculo de radio r, siendo:

a) $\omega = 32°; r = 15$ mm.

R.: 62,83 mm²

b) $\omega = 15° \ 30'$; $r = 12$ cm.

R.: 19,48 cm²

c) $\omega = 42°$; $r = 34$ dm.

R.: 423,70 dm²

III) Calcular el valor de la superficie de un sector circular:

a) radio $= 15$ mm, ángulo central $= 32°$

R.: a) 62,83 mm²

b) $r = 12$ cm, ángulo central $= 15° \ 30'$.

R.: b) 19,48 cm²

c) $r = 34''$, ángulo central $= 42°$ c).

R.: 423,70 pulgadas cuadradas

IV) Calcular el valor de la superficie de un trapecio circular:

a) R $= 45$ m, $r = 34$ m y ángulo central $= 48$ segundos.

R.: 364 m²

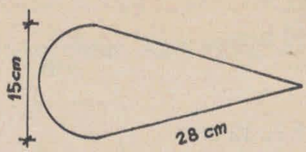
b) R $= 48$ cm, $r = 12$ cm y ángulo central $= 23° \ 12'$.

R.: 437,01 cm²

c) R $= 30$ cm, $r = 18$ cm y ángulo central $15° \ 30' \ 9''$.

R.: 77,92 cm²

V) Calcular el área de la figura, en cuyo croquis están los datos.



R.: 290,81 cm²

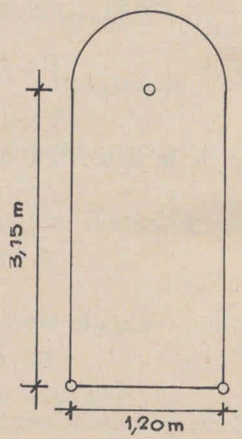
VI) ¿Cuál es el área del círculo cuya circunferencia vale 30,15 cm?

R.: 72,35 cm²

VII) Una cubrejunta de 50 cm × 20 cm tiene ocho agujeros para roblones, cada uno de 24 mm de diámetro. ¿Cuál es el valor de la superficie neta de la plancha?

R.: S = 96.382,72 mm²

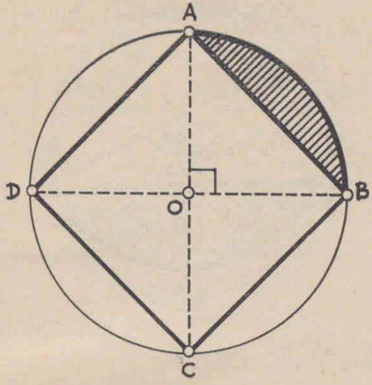
VIII) Calcular el valor de la superficie de la puerta de entrada con arco medio punto.



R.: S = 4,35 m²

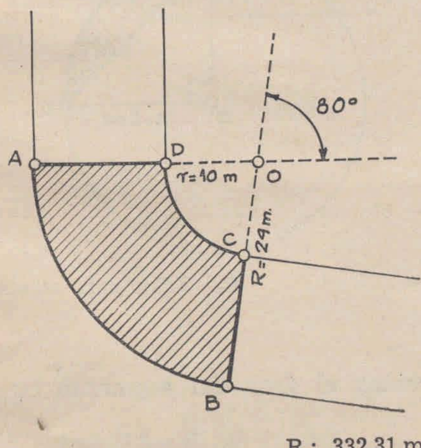
IX) Calcular el valor de la superficie de un segmento circular de 90° en un círculo de 25 mm de diámetro.

((Téngase en cuenta que el lado del cuadrado es 0,707 del diámetro.)



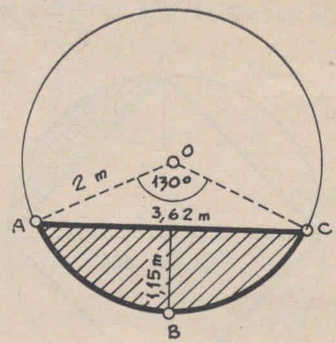
R.: 44,62 cm^2

X) El croquis representa el enlace angular de dos tramos de carretera. Calcular el valor de la superficie del trapecio circular ABCD.



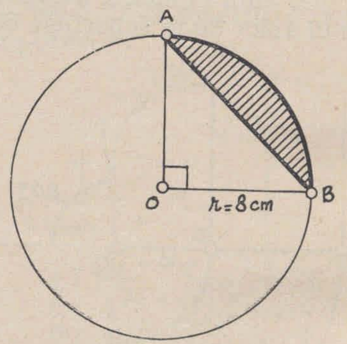
R.: 332,31 m^2

XI) Con los datos del croquis calcular el valor de la superficie del segmento circular.



R.: Sup $= 245{,}96$ dm²

XII) Calcular el valor de la superficie del *segmento de un círculo,* cuyo datos figuran en el croquis.

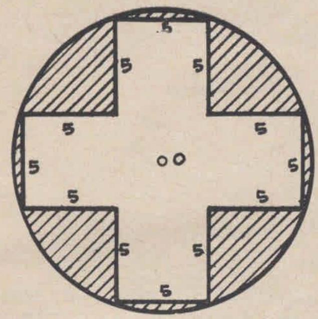


R.: Valor sup. *segmento* $\cong 18{,}24$ cm²

XIII) Determinar el área del segmento cuando $\hat{O} = 60°$ y $r = 6$ dm.

R.: $S \cong 3{,}27$ dm²

XIV) En la figura, la cruz dentro del círculo es divisible en 5 cuadrados. Determinar el área que es interior al círculo y que está afuera de la cruz.



R.: A ~ 71

INDICE

ALGEBRA

1

2

3

4

5

GEOMETRIA