LECCIONES

DE

GEOMETRÍA

ARREGLADAS AL PROGRAMA

DE LAS

ESCUELAS COMUNES

POR LOS

PROFESORES NORMALES

ANDRÉS FF[illegible]A

Y

ELEODORO SUÁREZ

$4\,\pi\,R^2$

BUENOS AIRES

ÁNGEL ESTRADA Y CA.—EDI[illegible]

[illegible]—CALLE BOLIVAR

1894

LECCIONES

DE

GEOMETRÍA

ARREGLADAS AL PROGRAMA DE LAS ESCUELAS COMUNES

POR LOS PROFESORES NORMALES

ANDRÉS FERREYRA

Y

ELEODORO SUÁREZ

BUENOS AIRES
Angel Estrada y Ca.—Editores
466—CALLE BOLIVAR—466
1894

Imprenta de Juan A. Alsina México, 1422—Buenos Aires

GEOMETRÍA

Programa:—Geometría Plana.—Nociones sumarias.—Extensión.—Posición.—Figura.— Magnitud.— Cuerpos.— Superficie.—Línea.—Punto.

1. En la naturaleza podemos imaginar en todo sentido y mas allá del alcance de nuestra mirada, capacidad interminable para colocar todos los objetos en que pensamos; de tal manera que, si al mundo habitado por nosotros agregásemos otro, y luego muchos otros más, en todas direcciones, y multiplicásemos este número de mundos por cualquier cantidad por grande que fuese, nunca conseguiríamos llenar esa inmensa capacidad sin límites, que se llama *espacio.*

Llámase espacio á la capacidad ilimitada que tiene la Naturaleza para contener todos los objetos existentes é imaginables.

2. El espacio está poblado de seres á los que se da el nombre de *cuerpos*, los cuales ocupan una parte del espacio, que no puede ser ocupada al mismo tiempo por otro cuerpo.

3. *Desígnase con el nombre de cuerpo á todo ser que ocupa una porción limitada del espacio.*

4. *Extensión es una parte determinada del espacio.*

5. Dos cuerpos pueden tener la misma magnitud y adoptar distinta posición como se vé en la figura 1ª que representa dos *dados* iguales, de distinta manera colocados.

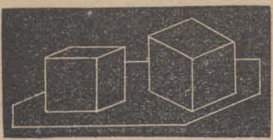

Figura 1.

En los cuerpos hay que considerar, por lo tanto, la cantidad de extensión que tienen y también su posición y figura.

6. *Dáse el nombre de magnitud á la cantidad de extensión.*

7. *Se llama posición á la situación relativa de la extensión.*

8. *Llámase figura á la forma de la extensión.*

Dos cuerpos de igual magnitud pueden tener distinta figura como se vé en la siguiente representación de cuatro dados, soldados dos á dos, (Fig. 2ª).

9. Todo cuerpo, cualquiera que sea su tamaño, posición, ó figura es extenso en todo sentido, pero su magnitud sólo se considera en tres direcciones distintas que se llaman *dimensiones* y que se designan con los nombres de: *longitud* ó largo, *latitud* ó ancho y *altura* ó profundidad, representadas en la figura 3ª.

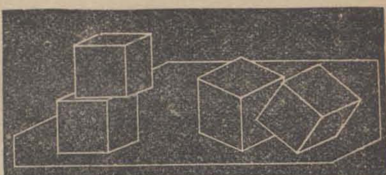

Figura 2.

10. La extensión es independiente de la naturaleza y propiedades físicas de los cuerpos; así decimos que una cuadra de alambre tiene la misma longitud ó largo que

una cuadra de hilo; que un pozo tiene la altura ó profundidad de un hombre, que una mesa tiene la misma latitud ó ancho que una cama, y que un dado de marfil tiene la misma extensión que uno de madera. (Fig. 3ª).

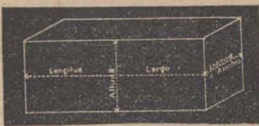

Figura 3.

11. Los cuerpos tienen ciertos límites, mas allá de los cuales hay otros cuerpos, ó el espacio; así: si en una vasija de agua echamos un dado, como se vé en la figura 4ª, el agua será desalojada del espacio que ocupaba, y en su lugar quedará el dado, y donde termina la extensión del dado empezará la extensión del agua; al límite del dado y del agua se dá el nombre de superficie.


Figura 4.

Si en lugar del dado tomamos un globo en el espacio, vemos que el límite del globo es el espacio, que empieza allí donde termina la extensión de este cuerpo (Fig. 5ª).


Figura 5

Llamáse *superficie* el límite de un cuerpo.

12. Si en un recipiente de vidrio (Fig. 6ª) echamos agua, luego un dado, y encima del dado colocamos un tacho, observaremos que el cubo limita por abajo con el vidrio de la vasija, por arriba con el fondo del tacho y por los lados con el agua y decimos que el cuerpo tiene varias caras ó cambios de dirección de la superficie.


Figura 6.

Llamánse *caras* á los cambios de dirección de la superficie de un cuerpo. La superficie es el conjunto de caras que tiene un cuerpo, aunque también se puede llamar superficies á las *caras*.

13. Cuando dos caras se encuentran forman una arista ó línea. (Fig. 7ª)

Llamáse *línea* á la intersección de dos caras.

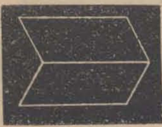

Figura 7

14. Cuando dos ó mas líneas se tocan en la misma parte de un cuerpo (Fig. 8ª), se dice que forman vértice y el vértice es un *punto*, comunmente llamado *punto geométrico*, que se nombra con una letra.

Llámase *punto geométrico* á la intersección de dos ó mas líneas.

Figura 8.

15. Las superficies, líneas y puntos no tienen existencia real fuera de los cuerpos, aunque para estudiar unos y otros los *representamos* por medio del lápiz, ó de la tiza, en el papel ó pizarrón.

16. Las superficies sólo tienen longitud y latitud, la línea solo tiene longitud y el punto geométrico carece de dimensiones, pues no tiene extensión: es una mera posición.

17. Si imaginamos varios puntos en el espacio moviéndose en varias direcciones, como los que representa la (figura 9ª,) dichos puntos engendrarán otras tantas líneas. Por esto se dice también que *una línea es una sucesión de puntos*. Una línea limitada se designa con dos letras, una en cada extremo.

Figura 9.

18. Llámase línea recta aquella que lleva todos sus puntos en una dirección invariable; se dice simplemente *recta*. (Fig. 10)

19. La sucesión de dos ó mas rectas en distintas direcciones, toma el nombre de línea *quebrada* (Fig. 11).

Figura 10.

Figura 11.

20. Llámase línea curva aquella cuyos puntos tienen todos distinta dirección. (Fig. 12). Recibe simplemente el nombre de *curva*.

21. Llámase línea *mixta* á la combinación de rectas y curvas (Fig. 13)

Figura 12.

Figura 13.

22. Si imaginamos varias líneas moviéndose en el espacio en distintas direcciones según indican las flechas (Fig. 14), dichas líneas engendrarán otras tantas superficies. Por esto se dice también que *una superficie es una sucesión de líneas.*

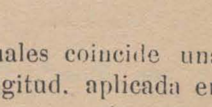

Figura 14.

23. Se llaman *caras planas* aquellas con las cuales coincide una recta en toda la longitud, aplicada en dos cualesquiera de sus puntos, como las que representa la figura 15. Denomínase simplemente plano.

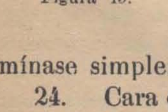

Figura 15.

24. Cara curva es aquella con la cual no coincide una recta aplicada en dos cualesquiera de sus puntos como

sucede con una de las caras del cono ó del cilindro (Fig. 16).

25. Si una superficie es tal, que en ninguna dirección se le puede aplicar una recta de tal manera que coincida, se llama superficie *redonda* como sucede con

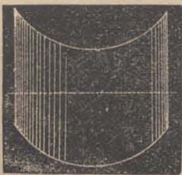

Figura 16.

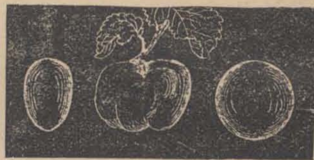

Figura 17.

la superficie de un huevo, de una manzana, de una esfera (Fig. 17).

26. Llámase superficie mixta á la combinación de caras planas y curvas (Fig. 18), como las del cono y del cilindro.

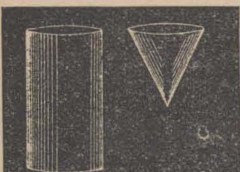

Figura 18.

27. El agua tomada en una corta extensión presenta la superficie libre, sensiblemente plana, estando en calma.

Decimos plano horizontal á todo aquél que toma la dirección de la superficie libre del agua en calma. Lo mismo decimos de una línea*, (Fig. 19).

* Hay unos aparatos llamados *niveles* de agua de que se valen los agrimensores para trazar líneas horizontales en un terreno. Los niveles de aire y el perpendículo de que se valen los albañiles y carpinteros, tienen el mismo objeto, es decir, trazar horizontales.

28. Si fijamos de uno de los extremos de un hilo un cuerpo pesado y lo suspendemos por el otro extremo con la mano (Fig. 20), el hilo se dirigirá hacia el centro de la tierra.

Figura 19

El hilo así estirado representa la dirección de una línea que toma el nombre de vertical.

El aparato así construido se llama *plomada*, y toda línea que tome la dirección del hilo de la plomada recibe el nombre de *línea vertical.**

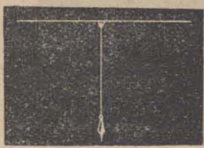

Figura 20.

29. Si queremos saber cuántas veces un dado cabe en una aja de vidrio y vamos colocando dados en ella hasta llenarla, hemos averiguado el *volúmen* de la caja, sin contar las paredes. (Fig. 21).

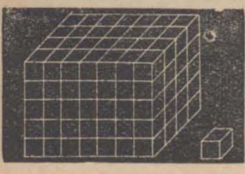

Figura 21.

Podríamos averiguar así tambien el volúmen del agua que ocupase la misma caja hasta los bordes; pues á medida que fuésemos poniendo los dados, se iría desalojando el agua y podríamos decir que el volúmen del agua era igual al número de dados que habían ocupado su lugar. Esta operación se llama *medida.*

---

* Los albañiles se valen de la plomada para que los muros que levantan sean verticales; de ella usan también los carpinteros y otros artesanos, los ingenieros y agrimensores.

Llámase *medida* á la operación por medio de la cual comparamos una cantidad desconocida con otra conocida de la misma especie.

30. Llámase *volúmen* á la medida de la extensión de un cuerpo.

31. Si deseamos saber cuántas veces la cara de un dado puede caber en una superficie plana y la colocamos en ésta todas las veces que quepa, habremos medido el área de dicha superficie. (Fig. 22).

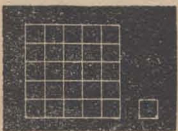

Figura 22.

Llámase *área* á la medida de la extensión de una superficie.

32. Si queremos saber cuantos pasos hay que hacer para recorrer un camino, es decir, una línea en el camino, y los contamos, habremos determinado ó medido la longitud de una línea. (Fig. 23).

Figura 23.

Llámese *longitud* á la medida de una línea.

33. El punto no tiene medida, porque carece de dimensiones.*

---

* Para medir la magnitud de los cuerpos, de las superficies y líneas, se toma convencionalmente una cantidad fija de la especie respectiva, que recibe el nombre de *unidad;* así, tratándose de una línea, podemos tomar el metro lineal; si deseamos medir una superficie tomaremos el metro cuadrado; y si finalmente queremos medir un cuerpo, nos valdremos del metro cúbico. Debe entenderse que podremos valernos también de los múltiplos y sub-múltiplos de dichas unidades.

Programa:—Angulos.—Bisectriz.—Clasificación de los ángulos —Rectas perpendiculares y oblícuas.—Rectas paralelas.— Principales propiedades.—Problemas gráficos.

34. Aparece en la (Fig. 24) una parte de un cuerpo cuya extensión completa nos es desconocida. En dicho cuerpo aparecen dos líneas que concurren en el punto B y cuya longitud es indefinida también.

Figura 24.

Entre ambas líneas comprenden una abertura que se va haciendo cada vez mayor á medida que nos alejamos con la vista del punto B. Pues bién, esa abertura recibe el nombre de *ángulo*.

Ángulo es la mayor ó menor abertura comprendida por dos líneas que concurren al mismo punto.

Las líneas que forman ángulo se llaman lados.

35. La longitud de las líneas, pues, nada tiene que ver con el ángulo que forman. El ángulo será mayor ó

Las representaciones de las superficies de las líneas y del puntó que hacemos con la tiza, lápiz, etc., son puramente convencionales, puesto que sabemos que dichos elementos geométricos no tienen existencia real fuera de los cuerpos.

En esta obra se dá como conocido el sistema métrico y todos los problemas prácticos son en referencia á él.

menor según sea la abertura, aunque los lados se extiendan indefinidamente. (Fig. 25).

Figura 25

36. Si los lados de un ángulo son líneas rectas, el ángulo se llama *rectilíneo;* si está formado por curvas se llama *curvilíneo* y si entran á formarlo una recta y una curva toma el nombre de *mixtilíneo.* (Fig. 26).

37. Llámase *bisectriz* de un ángulo á la línea que,

Figura 26.

Figura 27.

partiendo del vértice lo divide en dos partes iguales, (Fig. 27).

38. Se dice que dos *ángulos* son *iguales* cuando tienen la misma abertura, y superpuestos, coinciden sus lados. (Fig. 28).

39. *Línea perpendicular* es aquella que al caer sobre otra, forma dos ángulos iguales. (Fig. 29).

Figura 28.

Figura 29.

Figura 30.

40. *Línea oblicua* es aquella que al caer sobre otra forma dos ángulos desiguales (Fig. 30).

41. Se dice que dos *líneas son perpendiculares entre sí*, cuando prolongadas forman cuatro ángulos iguales. (Fig. 31).

42. Llámase *ángulo recto* al formado por dos rectas perpendiculares entre sí. (Fig. 32). Cuando se emplea la palabra *recto* se entiende que es un ángulo recto.

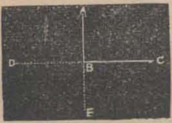

Figura 31.


Figura 32.

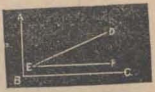

Figura 33.

43. Llámase *ángulo agudo* á todo ángulo menor que el recto. (Fig. 33).

44 Llámase *ángulo obtuso* á todo ángulo mayor que el recto. (Fig. 34). Los ángulos agudos y obtusos se llaman *oblicuos*.

45. Dos *ángulos* se llaman *opuestos por el vértice*

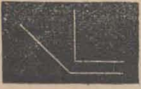
Figura 34.

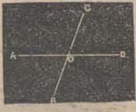

Figura 35.

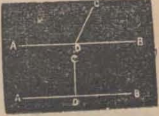

Figura 36.

cuando los lados del uno son prolongación de los del otro. (Fig. 35).

46. Llámanse *ángulos adyacentes* los que tienen un lado común y los otros dos formados por una sola recta. (Fig. 36).

47. Llamánse ángulos complementarios á dos ángulos que juntos valen un recto. (Fig. 37).

Llámase complemento, de un ángulo á lo que le falta para valer un recto.

48. Llámase ángulos suplementarios á los que juntos valen dos rectos. (Fig. 38).

Llámase suplemento de un ángulo á lo que le falta para valer dos rectos.

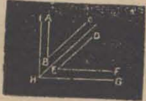

Figura 37

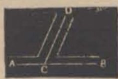

Figura 38.

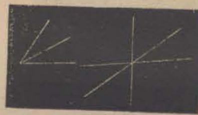

Figura 39.

49. Llámanse *ángulos consecutivos* los que tienen un lado común y un mismo vértice. (Fig. 39).

50. Llámase *distancia desde un punto á una recta* la perpendicular tomada desde dicho punto á la recta. (Fig. 40).

51. Llámase *pié de la perpendicular* al punto en que ésta toca en una recta. (Fig. 41).

52. Llámanse *paralelas* dos ó más líneas rectas que

Figura 40.

Figura 41.

Figura 42.

prolongadas indefinidamente en un plano no se encuentran. (Fig. 42).

53. Si una recta corta á otras dos, paralelas ó no, se llama secante ó transversal. (Fig. 43).

54. La secante, al cortar á dos líneas paralelas, forma varios ángulos. (Fig. 44).

Llámanse *ángulos internos* los formados entre las paralelas: (5, 6, 7 y 8) y *externos* á los formados fuera de ellas: (1, 2, 3 y 4).

Figura 43

Llámanse *alternos* á los internos ó externos formados á diferente lado de la secante, no siendo adyacentes: (5 y 8), (6 y 7), (2 y 3), (1 y 4).

Llámase *correspondientes* á los fomados de un mismo lado de la secante, uno interno y otro externo, sin ser adyacentes, (1 y 7), (5 y 3), (4 y 6), (8 y 2).

Figura 44.

55. Las principales propiedades de las líneas rectas, perpendiculares, oblícuas, paralelas y de los ángulos son las siguientes:

Figura 45.

(a) En la línea recta se pueden concebir una infinidad de puntos. (Fig. 45).

(b) La línea recta no admite variedad de especies, (Fig. 46).

Figura 46.

Figura 47,

(c) Dos puntos determinan la posición de una recta, (Fig. 47).

(d) La distancia mas corta entre dos puntos es la recta que los une. (Fig. 48).

(e) Dos rectas que tienen extremos comunes se con

Figura 48.

Figura 49.

funden en toda su extensión. (Problema de la comprobación de las reglas. (Fig. 49).

(f) Por un punto dado en una recta ó fuera de ella no puede trazarse sino una perpendicular. (Fig. 50 y 51).

Figura 50.

Figura 51.

(g) La perpendicular es la más corta distancia entre una recta y un punto dado fuera de ella (Fig. 51).

(h) Todo punto de la perpendicular levantada en el

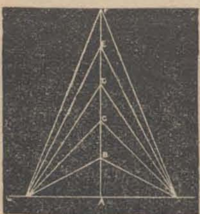

Figura 52.

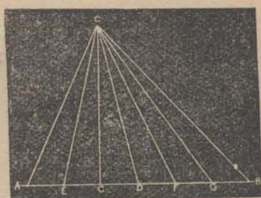

Figura 53.

punto medio de una recta, equidista de los extremos de ésta. (Fig. 52).

(i) Si desde un punto dado fuera de una recta se le

trazan una perpendicular y varias oblícuas, las oblícuas que se separan igualmente del pie de la perpendicular son iguales, y la que más se separa es la mayor. (Fig. 53).

(j) Dos rectas, una perpendicular y otra oblícua á una recta no son paralelas, y prolongadas deben encontrarse.* (Fig. 54).

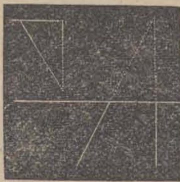

Figura 54.

Figura 55.

(k) Por un punto dado fuera de una recta no se puede trazar más que una paralela. (Fig. 55).

(ch) Todos los puntos equidistantes de una recta están en una paralela á ella. (Fig. 56).

Figura 56.

Figura 57

(l) Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí. (Fig 57)

(ll) Si una recta es perpendicular á una de dos paralelas, lo será á la otra. (Fig. 58).

Figura 58.

Figura 59.

(m) Si dos rectas son paralelas, sus perpendiculares respectivas también son paralelas. (Fig. 59).

---

* Esta verdad se llama postulado de Euclides.

(n) Las partes de paralelas comprendidas por rectas paralelas, son iguales. (Fig. 60).

(o) Dos ángulos iguales pueden superponerse de modo que coincidan sus lados. (Fig. 61).

Figura 60.

Figura 61.

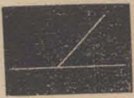

Figura 62.

(p) Dos ángulos adyacentes son suplementarios. (Fig. 62).

(q) Todos los ángulos consecutivos que se pueden formar sobre una recta, valen juntos dos rectos. (Fig. 63).

(r) Todos los ángulos consecutivos que se pueden formar al rededor de un punto, valen juntos cuatro rectos. (Fig. 64.)

(rr) Cuando dos ángulos se oponen por el vértice tienen el mismo suplemento. (Fig. 65).

Figura 63.

Figura 64.

Figura 65.

(rrr) Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. (Fig. 65).

(s) Los ángulos alternos internos son iguales. (Fig. 66.)

(*t*) Los ángulos alternos externos son iguales. (Fig. 67.)

(*u*) Los ángulos correspondientes son iguales. (Fig. 68.)

Figura 66.

Figura 67

Figura 68.

(*v*) Los ángulos internos de un mismo lado de la secante, son suplementarios. (Fig. 69.)

(*x*) Los ángulos externos de un mismo lado de la secante son suplementarios. (Fig. 70.)

Figura 69

Figura 70

Figura 71.

(*y*) Los ángulos que tienen sus lados paralelos, son iguales ó suplementarios, (tres casos) (Fig. 71.)

(*z*) Los ángulos que tienen sus lados perpendiculares son iguales ó suplementarios. (Fig. 72.)

(*w*) Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de sus lados. (Fig. 73.)

(*ww*) Dos ángulos de lados paralelos á los de otro

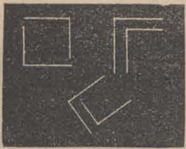

Figura 72.

Figura 73.

Figura 74.

y á igual distancia respectivamente tienen la misma bisectriz. (Fig. 74.)

Problemas.

56. El manejo y explicación de estos instrumentos corresponde al maestro:

Instrumentos: El compás, la escuadra, la escuadra falsa, la regla, el metro, la cadena, la cinta, los piquetes, la escuadra de muleta, el doble decímetro y el gramil.

1°—Trazar con la regla una recta por dos puntos dados.

2°—Trazar con la regla y el compás una recta igual á otra dada.

3°—Medir una recta con el doble decímetro.

4°—Dibujar sobre el papel la suma de una recta de 8 centímetros con una de 5.

5°—Dibujar sobre el papel la diferencia entre una recta de 12 centímetros y una de 4 centímetros.

6°—Dibujar sobre el papel una recta que sea dos, tres, cuatro, ocho veces mayor que otra conocida.

7°—Dibujar por medio de la escuadra un ángulo recto.

8°—Dibujar por medio de la escuadra falsa un ángulo igual á otro dado.

9°—Dibujar por medio de la escuadra falsa un ángulo dos, tres, cuatro veces mayor que otro dado.

10°—Tirar por medio de la escuadra una perpendicular en un punto dado en una recta y otra desde de un punto dado fuera.

11°—Encontrar por medio del compás dos puntos equidistantes de los extremos de una recta dada.

12°—Trazar por medio del compás y la regla una perpendicular en medio de una recta.

13°—Dividir una recta en dos partes iguales por medio del compás y la regla.

14°—Encontrar por medio del compás, dos puntos sobre una recta equidistantes de uno dado fuera de ella.

15°—Encontrar por medio del compás un punto fuera de una recta equidistantes de dos, dados en ella.

16°—Trazar por medio de la regla y el compás una perpendicular desde un punto cualquiera dado fuera de ella.

17°—Por dos puntos tomados en ambos lados de un ángulo á igual distancia del vértice trazar dos perpendiculares á dichos lados por medio de la regla y el compás.

18°—Trazar por medio de la escuadra, el compás y la regla, la bisectriz de un ángulo.

19°—Trazar la bisectriz de un ángulo cuyo vértice está fuera del papel, valiéndose de otro ángulo de lados paralelos á los suyos.

20°—Trazar por medio de la regla y la escuadra una paralela á una recta, por un punto situado fuera de ella.

21°—Por medio de la escuadra de muleta trazar varias paralelas á una recta sobre un tablero.

22°—Por un punto dado fuera de una recta, trazarle una oblicua, y construir en dicho punto por medio de la escuadra falsa y la regla, dos ángulos iguales á los que forma la oblícua con la recta dada, de tal manera que la oblícua sea el lado común, y los otros dos lados de los nuevos ángulos, formen una recta paralela á la recta dada.

23°—Por medio de la escuadra falsa trazar una para lela á una recta por un punto dado fuera de ella.

24°—Por un punto dado fuera de una recta, trazar con la escuadra una perpendicular, y luego una paralela á la recta.

25°—El mismo problema con el compás y la regla.

26°—Medir con el metro una longitud cualquiera.

27°—Medir la misma con la cadena ó cinta.

28°—Trazar por medio de piquetes una distancia en un terreno plano.

29°—Medir la recta trazada.

Programa.—Circunferencia.—Propiedades generales.—Posiciones relativas de dos circunferencias.—Semicírculo graduado.—Medida de los ángulos centrales é inscriptos.—Problemas gráficos.

57. El fondo de un tonel, una pieza de dos centavos, la rueda de un coche, una naranja partida en mitades y muchos otros objetos nos presentan á la vista

Figura 75.

una línea curva cerrada á la que damos el nombre de *circunferencia*. (Fig. 75).

Si tomamos un compás y colocando uno de sus brazos en un punto fijo sobre la madera, hacemos girar el otro brazo, marcando con la punta sobre ella, habremos trazado una circunferencia. (Fig. 76). Si en vez del compás tomamos una vara con dos puntas (Fig. 77), y clavando una de ellas hacemos girar en torno suyo la otra punta de manera que deje su trazo, observamos que cada punto de la curva cerrada está en el mismo

Figura 76.

Figura 77.

plano y á igual distancia del punto fijo, al que podemos llamar *centro*.

Llamamos *circunferencia* á una curva cerrada y plana cuyos puntos equidistan todos de otro (Fig. 78).

58. *Radios* se dice á todas las rectas que pueden trazarse desde el centro á la circunferencia. (Fig. 79).

Figura 78.

Figura 79.

Figura 80.

Figura 81.

59. *Diámetro* será toda recta que pasando por el centro tenga sus extremos en la circunferencia. (Fig. 80).

60. Si tomamos el compás y comenzamos á trazar una circunferencia y suspendemos de pronto la operación, habremos trazado un *arco* de circunferencia.

61. Se llama *arco* á una porción cualquiera de la circunferencia. (Fig. 81).

Figura 82.

Figura 83.

Figura 84.

62. Se llama *secante* á toda recta que corta á la circunferencia en dos puntos. (Fig. 82).

63. *Tangente* se dice de una recta indefinida que sólo toca á la circunferencia en un punto. (Fig. 83).

64. Dáse el nombre de *cuerda* á toda recta que une dos puntos de la circunferencia. (Fig. 84).

65. Las propiedades generales de la circunferencia y de sus líneas son las siguientes:

(*a*) Todos los radios de una circunferencia son iguales. (Fig. 85).

Figura 85

Figura 86.

Figura 87

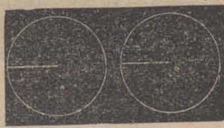

Figura 88

(*b*) Todos los diámetros de una circunferencia son iguales. (Fig 86).

(*c*) Toda cuerda subtiende dos arcos, que juntos forman la circunferencia. (Fig. 87).

(*d*) Dos circunferencias que tienen radio igual son iguales. (Fig. 88).

(*e*) El diámetro es la mayor de las cuerdas. (Fig. 89).

Figura 89.

Figura 90.

Figura 91.

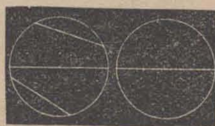

Figura 92.

(*f*) Todo diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales ó semi-circunferencias. (Fig. 90).

(*g*) Dos diámetros perpendiculares dividen á la circunferencia en cuatro arcos iguales que se llaman cuadrantes. (Fíg. 91).

(*h*) Arcos iguales subtienden cuerdas iguales y viceversa. (Fig. 92).

(*i*) Á mayor arco corresponde mayor cuerda y recíprocamente. (Fig. 93).

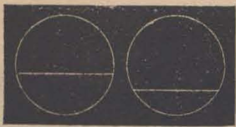

Figura 93.

Figura 94

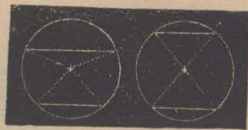

Figura 95.

(*j*) Todo diámetro perpendicular á una cuerda, divide á ésta y á sus arcos en partes iguales. (Fig. 94).

Figura 96

Figura 97.

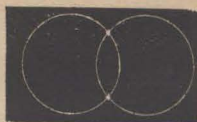

Figura 98.

(*k*) Las cuerdas iguales equidistan del centro, y siendo desiguales la mayor se acerca más á él. (Fig. 95).

Figura 99.

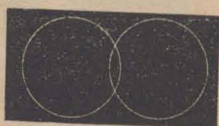

Figura 100

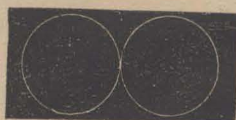

Figura 101

(*l*) Tres puntos que no están en línea recta determinan el paso de una circunferencia. (Fig. 96) (*ll*) La tangente siempre es perpendicular al radio en el punto de tangencia. (Fig. 97).

(*m*) Dos circunferencias no pueden tener más que dos puntos comunes. (Fig. 98).

(*n*) Dos secantes paralelas, interceptan arcos iguales, (Fig. 99).

67. Llámanse circunferencias secantes las que tienen dos puntos comunes. (Fig. 100), y tangentes las que tienen uno solo (Fig. 101).

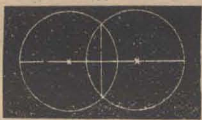

Figura 102

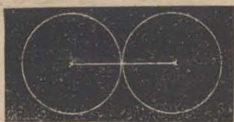

Figura 103.

68. Dos circunferencias secantes tienen una cuerda común perpendicular á la línea que une los centros (Fig. 102) y dos tangentes tienen su punto de contacto en dicha línea. (Fig. 103).

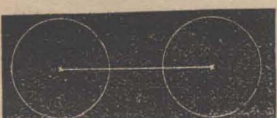

Figura 104.

Figura 105.

69. Si dos circunferencias no tienen ningún punto común y son exteriores la una á la otra, la distancia entre sus centros es mayor que la suma de sus radios. (Fig. 104).

70. Si no tienen ningún punto común y está una

adentro de la otra, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios. (Fig. 105).

71. Si son tangentes exteriormente, la distancia de los centros es la suma de los radios. (Fig. 106).

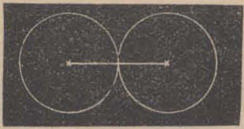

Figura 106.

Figura 107.

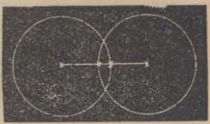

Figura 108.

72. Si son tangentes interiormente, dicha distancia es igual á la diferencia de los radios. (Fig. 107).

73. Cuando son secantes, la distancia de los centros es menor que la suma y mayor que la diferencia de los radios. (Fig. 108).

Medida de los ángulos

74 Si trazamos una circunferencia y en ella dos diámetros perpendiculares, la circunferencia quedará

Figura 109.

Figura 110.

dividida en cuatro arcos correspondientes á cuatro ángulos rectos. (Fig. 109).

75. Se llaman ángulos centrales aquellos que tienen su vértice en el centro de la circunferencia. (Fig. 110).

76. Observemos la circunferencia de la lámina 111. Pudo

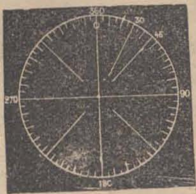

Figura 111.

Figura 112.

haber sido dividida en 360 partes iguales que se llaman grados, de manera que si trazamos en ella los dos diámetros perpendiculares, (Fig. 112) á cada ángulo recto corresponderán 90 grados ó sea la cuarta parte de 360°. Por

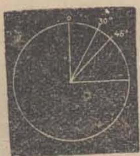

Figura 113.

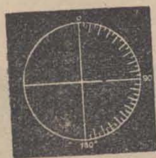

Figura 114.

esto decimos que un ángnlo recto mide un cuadrante y también que es un ángulo de 90°. (Fig. 113).

77. La mitad de un ángulo recto valdrá 45°.

78. La tercera parte de un ángulo recto valdrá 30°, y así sucesivamente podríamos señalar ángulos de mayor ó menor número de grados hasta 180° que comprende la semicircunferencia. (Fig 114).

79. De manera que la medida de un ángulo es igual al número de grados del arco interceptado entre sus lados y descrito desde el vértice. (Fig. 115).

Figura 115.

Ahora, observamos en la misma lámina, que las circunferencias concéntricas interiores quedan divididas en igual número de grados que la circunferencia exterior, prolongando las divisiones hasta el centro, lo cual indica que para hallar el número de grados de un ángulo, cualquier circunferencia descrita desde su vértice nos dá el arco correspondiente.

80. Podemos entonces decir que la medida de un ángulo es igual al número de grados del arco comprendido entre sus lados y descrito desde su vértice con un radio cualquiera. (Fig. 116).

81. Así como se divide la esfera de un reloj en horas

Figura 116.

Figura 117.

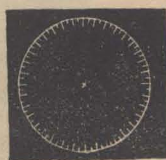

Figura 118

minutos, y segundos, puede dividirse una circunferencia en grados, minutos y segundos. (Fig. 117).

82. Convencionalmente se ha establecido esta división y se ha dividido el grado en 60 minutos (60') y el

minuto en 60 segundos (60''), escribiéndose en abreviatura así: 360°, 60' y 60'', (Fig. 118). (*)

Medida de los ángulos inscriptos.

83. Llámase ángulo inscripto aquél cuyos lados son cuerdas y cuyo vértice está en la circunferencia.

Los casos que pueden ocurrir son tres:

1° Que uno de los lados pase por el centro de la circunferencia, (Fig. 119).

Figura 119.

Figura 120.

2° Que el centro de la circunferencia se halle comprendido entre los lados, (Fig. 120), y

(*) Fundado en esta división, se ha construido un aparato que acompaña á los estuches de matemáticas, que se denomina transportador. Su objeto es medir los grados de un ángulo cualquiera, para lo cual se hace coincidir el centro del transportador con el vértice del ángulo y se aplica el diámetro sobre uno de los lados, contándose desde 0° hasta el otro lado. También se le dá el nombre de semicírculo graduado, (Fig. 118).

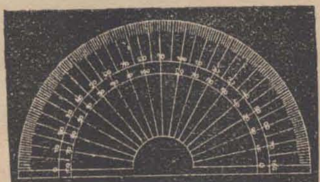

Figura 118.

3° Que el centro de la circunferencia se halle fuera del ángulo, (Fig. 121).

Figura 121

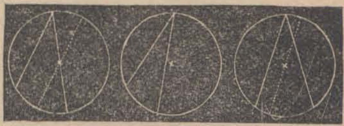

Figura 122

(*a*) El ángulo inscripto tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados, (Fig. 122).

(*b*) Todos los ángulos inscriptos que abrazan igual arco son iguales. (Fig. 123).

Figura 123.

Figura 124.

(*c*) Los ángulos inscriptos cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro, son rectos, (Fig. 124).

Problemas.

84.—1°—Dado el radio, trazar una circunferencia con el compás.

2°--Dado el diámetro, trazar una circunferencia con el compás.

3°—Por un punto dado en la circunferencia, trazar una tangente.

4°—Dados dos radios diferentes, trazar dos circunferencias concéntricas con el compás.

5°—Dividir una circunferencia en dos partes iguales, con la regla.

6°—Dividir una circunferencia en cuadrantes con la escuadra.

7°—Dividir una cuerda y un arco en dos partes iguales con la escuadra.

8°—Trazar con el compás y la regla dos cuerdas equidistantes del centro.

9°—Trazar con el compás y la regla dos cuerdas paralelas en la circúnferencia.

10—Trazar con el compás y la regla un arco de 180°.

11—Construir con el transportador un ángulo igual á otro dado.

12—Construir con el transportador, ángulos de 25°, 30°, 35° y 40°.

13—Inscribir en una circunferencia ángulos de 45, de 90 y de 120°.

14—Inscribir un ángulo recto en la semi-circunferencia.

15—Levantar una perpendicular en el extremo de una recta que no se puede prolongar.

16—Por tres puntos que no estén en línea recta hacer pasar una circunferencia.

17—Por un punto dado fuera de una circunferencia trazarle dos tangentes.

18—Trazar una tangente, común á dos circunferencias tangentes, por el punto de tangencia.

19—Trazar dos tangentes paralelas en una circunferencia.

20—Trazar una tangente que sea perpendicular á una recta dada.

21—Construir con el transportador un ángulo duplo, triplo, etc. de otro dado.

22—Hallar el centro de una circunferencia.

23—Hallar el centro de un arco.

24—Trazar una recta tangente á dos circunferencias dadas.

25—Divídase una circunferencia en 4 partes iguales, en 8 y en 16, con el compás.

26—Divídase la circunferencia en 3, 5, 6, 9, 10, 12 partes iguales con el transportador y trácense las cuerdas correspondientes á los arcos.

Programa: Polígonos.— Triángulos. — Cuadriláteros.—Polígonos regulares é irregulares.—Principales propiedades de los triángulos y paralelógramos.—Valor de los ángulos. —Igualdad de los polígonos.—Problemas gráficos.

85. Los cuerpos terminados por caras planas toman el nombre de *poliedros*. Tales son éstos: (Fig. 125).

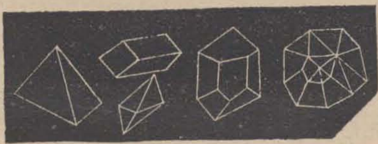

Figura 125.

86. Observando las caras de los poliedros, vemos que están limitadas por líneas rectas; dichas caras se llaman *polígonos*.

Recibe el nombre de *polígono* toda superficie ó cara plana, terminada por rectas, (Fig. 126).

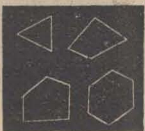

Figura 126.

87. Las rectas que terminan el polígono llevan el nombre de *lados*, y al conjunto de los lados de un polígono se dá el nombre de *perímetro*.

88. *Diagonales* son las rectas que unen los vértices no consecutivos de un polígono, (Fig. 127).

89. *Base* de un polígono, se llama al lado inferior sobre

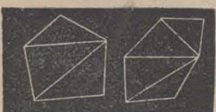

Figura 127.

Figura 128.

que descansa una figura; y *altura*, á la perpendicular trazada á la base ó á su prolongación, desde el vértice más distante, (Fig. 128).

Figura 129.

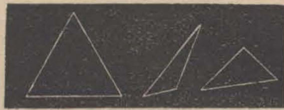

Figura 130.

90. Con menos de tres lados no puede formarse un polígono, (Fig. 129).

El polígono de tres lados se llama triángulo, (Fig. 130).

El de cuatro id, cuadrilátero, (Fig. 131).

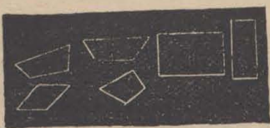

Figura 131.

Figura 132.

Figura 133.

El de 5 lados pentágono, (Fig. 132).
El « 6 « exágono, (Fig. 133).

Figura 134.

Figura 135

El de 7 lados heptágono, (Fig. 134).
El « 8 « octógono,

El de 9 lados eneágono
El « 10 « decágono (Fig. 135).
El « 11 « endecágono
El « 12 « dodecágono
El « 15 « pentadecágono
El « 20 « icoságono

91. Es *equilátero* el polígono que tiene todos sus lados iguales, y si lo son sus ángulos, denomínase equiángulo, (Fig. 136).

92. Si el polígono es equilátero y equiángulo, lo llamamos regular; é irregular será aquel que carece de alguna de estas dos condiciones ó de ambas.

Figura 136.

93. *Polígono convexo* se dice de aquél que no puede ser cortado por una recta más que en dos puntos, y *cóncavo* el que no llena esta condición.

Triángulos

94. Los triángulos pueden tener sus tres lados iguales y entonces toman la denominación de equiláteros; si sólo tienen dos lados iguales, toman la de *isósceles*, y si sus tres lados son desiguales, se dice de ellos que son *escalenos*, (Fig. 137).

Figura 137.

Figura 138.

95. Rectángulo se dice de un triángulo que tiene un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa y los otros dos, catetos, (Fig. 138).

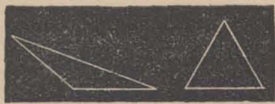

Figura 139.

96. *Obtusángulo* se nombrará el triángulo que tenga un ángulo obtuso, y *acutángulo* el que esté formado por tres ángulos agudos, (Fig. 139).

Propiedades de los triángulos.

97. *(a)* Un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos.

(b) La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos, (Fig. 140).

(c) Un triángulo no puede tener dos ángulos rectos, ni dos obtusos, ni uno recto y otro obtuso, (Fig. 141).

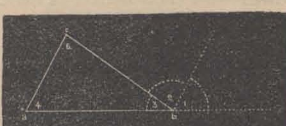

Figura 140.

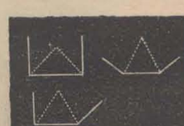

Figura 141.

(d) En un triángulo los lados opuestos á ángulos iguales son iguales y vice-versa, (Fig. 142).

(e) En un triángulo á mayor lado se opone mayor ángulo, (Fig. 143).

Figura 142.

Figura 143.

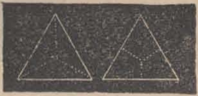

Figura 144.

(f) Las perpendiculares levantadas en el punto medio de los lados de un triángulo se encuentran en el mismo punto y lo mismo sucede con las bisectrices de los tres ángulos, (Fig. 144).

Cuadriláteros.

98. El cuadrilátero puede tener sus lados paralelos dos á dos, en cuyo caso se llama *paralelógramo,* (Fig. 145).

Figura 145.

Figura 146.

Figura 147.

El paralelógramo de lados iguales y ángulos rectos es el *cuadrado,* (Fig. 146).

El paralelógramo de lados desiguales y ángulos rectos, es el rectángulo, (Fig. 147).

Figura 148.

Figura. 149.

Rombo se dice de un paralelógramo que tiene ángulos oblicuos y lados iguales, (Fig. 148).

Romboide se llama á un paralelógramo de ángulos oblícuos y lados desiguales, (Fig. 149).

El *trapecio* y el *trapezoide* son cuadriláteros no paralelógramos, (Fig. 150 y 151).

Figura 150.

Figura 151.

El *trapecio* sólo tiene dos lados paralelos que reciben el nombre de *bases*, (Fig. 150).

El *trapezoide* no tiene lados paralelos, (Fig. 151).

Propiedades de los cuadriláteros.

99. (*a*) La suma de los cuatro ángulos de todo cuadrilátero es igual á cuatro ángulos rectos. (Fig. 152).

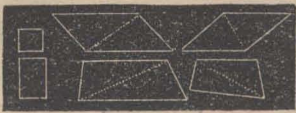

Figura 152.

(*b*) Un cuadrilátero no puede tener tres ángulos obtusos y uno recto, ni dos obtusos y dos rectos, ni tres rectos y uno obtuso, (Fig. 153).

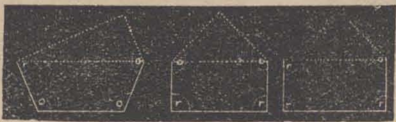

Figura 153.

(*c*) Las diagonales de un paralelógramo se cortan en partes iguales, (Fig. 154).

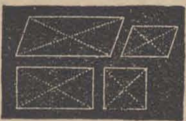

Figura 154.

Figura 155.

(*d*) En el cuadrado y el rectángulo las diagonales son iguales, (Fig. 155).

(e) En el cuadrado y el rombo las diagonales son bisectrices de los ángulos opuestos y se cortan en ángulos rectos.

Igualdad de los polígonos.

100. Denomínanse polígonos iguales á los que superpuestos coinciden en toda su extensión, (Fig. 156).

Si la superposición es directa, los polígonos son idénticos.

Se dice de los lados de dos polígonos, que son homólogos, si coinciden, al superponerlos respectivamente, (Fig. 157).

Figura 156.

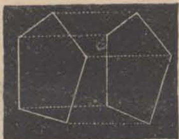

Figura 157.

Figura 158.

101. Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido por ellos, (Fig. 158).

También son iguales dos triángulos cuando tienen un lado igual, é iguales los ángulos de que forma parte dicho lado, (Fig. 159).

También serán iguales dos triángulos cuando tengan sus tres lados respectivamente iguales, (Fig. 160).

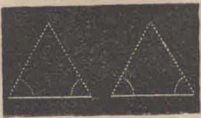

Figura 159.

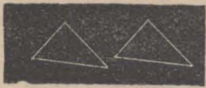

Figura 160.

102. Dos triángulos rectángulos serán iguales, cuando tengan iguales las hipotenusas y uno de los catetos, (Fig. 161).

Figura 161.

Figura 162.

Así mismo serán iguales los rectángulos, cuando lo sean las hipotenusas y uno de los ángulos agudos, (Fig. 162).

Si dividimos en partes iguales uno de los lados de un triángulo, y por los puntos de división se trazan paralelas á la base, hasta encontrar el tercer lado, este último quedará dividido en partes iguales, (Fig. 163).

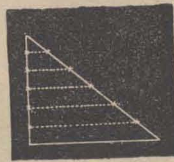

Figura 163.

103. Dos cuadriláteros son iguales:

1.° Si tienen los cuatro lados homólogos y un ángulo también homólogo;

2.° Si tienen tres lados iguales y los ángulos comprendidos por ellos; y

3.° Si tienen dos lados contiguos iguales y los ángulos de que forman parte también iguales, (Fig. 164.)

Los paralelógramos son, iguales si tienen dos lados contiguos iguales, é igual el ángulo que forman, (Fig. 165).

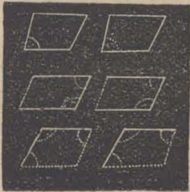

Figura 164.

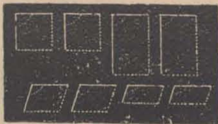

Figura 165.

Los rectángulos son iguales si dos lados contiguos lo son, (Fig. 166).

Figura 166.

Figura 167.

Los cuadrados son iguales, si tienen un lado igual, (Fig. 167).

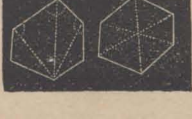

Figura 168.

Figura 169.

Figura 170.

104. Todo polígono puede descomponerse en tantos

triángulos como lados tiene, ó bien, en tantos como lados tiene menos dos, trazando las diagonales, ó dirigiendo rectas á los vértices desde un punto interior, (Fig. 168).

105. La suma de los ángulos de un polígono es igual á dos rectos multiplicados por el número de lados menos dos, (Fig. 169).

106. En los polígonos regulares, las bisectrices de sus ángulos y las rectas perpendiculares en el punto medio de sus lados se encuentran en el centro del polígono, (Fig. 170).

107. Las bisectrices de un polígono regular se llaman radios. (Fig. 171).

108. Las perpendiculares trazadas desde el centro al punto medio de los lados de un polígono se denominan *apotemas*. (Fig. 172).

Figura 171.

Figura 172.

109. Las bisectrices de un polígono regular son iguales. Lo mismo sucede con las apotemas. (Fig. 173).

Figura 173.

110. Dos polígonos son iguales si constan del mismo

número de triángulos respectivamente iguales y de igual manera colocados. (Fig. 174.)

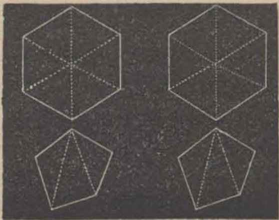

Figura 174.

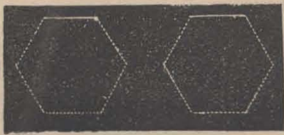

Figura 175.

111. En los polígonos regulares de igual número de lados, un solo lado igual, determina la igualdad de los polígonos. (Fig. 175).

Problemas.

112. 1—Hallar el número de grados del ángulo de un triángulo, conociendo los otros dos.

2—Hallar el valor de un ángulo, muy distante, inaccesible, en un triángulo.

3—Hallar el valor de los dos ángulos agudos, de un triángulo rectángulo.

4—Dividir un ángulo en tres partes iguales por medio del trisector. *

---

* Intercalamos este problema para ser resuelto en el caso de que se disponga de dicho instrumento.

5—Dados los tres lados de un triángulo, construirlo.

6—Trazar un triángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

7—Trazar un triángulo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido.

8—Trazar un triángulo, conociendo dos ángulos y el lado que une sus vértices.

9—Dividir una recta en cinco, seis, siete, ete. partes iguales.

10—Construir un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa y uno de los catetos.

11—Dividir un ángulo recto en tres partes iguales por medio del compás.

12—Dado un lado, construir un triángulo equilátero.

13—Dados los catetos, construir un triángulo rectángulo.

14—Construir un triángulo equilátero, dada la altura.

15—Construir un cuadrado, conociendo el lado.

16—Conociendo dos lados contíguos de un retángulo, construirlo.

17—Construir un rombo, conociendo el lado y un ángulo.

18—Conociendo dos lados contiguos de un romboide y el ángulo comprendido, completarlo.

19—Trazar un rombo, conociendo las diagonales.

20—Conocida la diagonal, trazar un cuadrado.

21—Construir un cuadrado que sea cuatro, nueve, y diez y seis veces mayor que otro dado.

22—Determinar cuantos rectos vale la suma de los ángulos de un pentágono, de un exágono, de un heptágono, etc.

23—Resolver cuánto valen cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero.

24—Determinar cuántos triángulos equiláteros pueden formarse alrededor, de un punto que les sirva de vértice.

25—Reunir con un mismo vértice cuatro triángulos rectángulos, de modo que se toquen los catetos.

26—Construir un triángulo isósceles, de tal manera, que el ángulo comprendido entre los lados iguales mida setenta y dos grados y agrupar cinco veces este triángulo al rededor de un punto, de modo que todos los ángulos de 72° tengan el mismo vértice.

27—El mismo problema siendo el áugulo de 60° y agrupando seis triángulos.

28—El mismo problema siendo el ángulo de 45° y el número de triángulos ocho.

29—Igual problema con el ángulo de 40°, y nueve el número de triángulos.

30—Igual problema con el ángulo de 36° y el número de triángulos 10.

31—Determinar el número de grados que corresponde á cada ángulo de los siguientes polígonos regulares: pentágono, exágono, octógono, eneágono y decágono.

32—Dividir una circunferencia en seis partes iguales.

33—Dividirla en cuatro y en ocho partes iguales, sin transportador.

34--Construir un polígono regular igual á otro dado.

35—Sobre una recta dada, dibujar un exágono regular.

36—Dado un lado de un octógono regular construirlo.

37—Conocido el lado de un decágono regular, construirlo.

38—Dado el polígono, construir otro igual.

39—Cubrir una superficie plana:

1.° con cuadrados,

2.° con triángulos equiláteros,

3.° con exágonos y triángulos,

4.° con octógonos y cuadrados,

5.° con triángulos, cuadrados y exágonos.

40—Dibujar un polígono idéntico á otro dado.

41—Dibujar un polígono que sea simétrico con otro dado.

42—Dividir una circunferencia en cualquier número de partes.

PROGRAMA:—Líneas proporciónales.—Semejanza de los polígonos.—Problemas gráficos.

Líneas proporcionales. (*)

113. Así como los números tienen entre sí una razón que expresa las veces que cierta unidad se halla contenida en cada uno de ellos, así también las líneas tienen entre sí una razón que expresa las veces que una unidad de longitud está contenida en cada una de ellas.

Si tomamos una línea de cuatro centímetros y otra de dos y las comparamos, decimos que entre las dos rectas A B y C D hay la misma razón que entre 4 y 2, ó sea, $\frac{4}{2}$ y designamos la razón de las líneas así: $\frac{A\ B}{C\ D}$ (Fig. 176).

Si la razón de dos líneas A B y C D es igual á la de

(*) En este libro se dá como conocida la proporcionalidad de los números y las principales propiedades de las proporciones.

otras dos líneas E F y G H decimos que las cuatro líneas son proporcionales, lo mismo que cuando la razón de dos números es igual á la de otros dos y escribimos así la proporción: $\frac{A\ B}{C\ D} = \frac{E\ F}{G\ H}$, ó de este otro modo:

A B : CD :: E F : G H. (Fig. 177).

Figura 176.

Figura 177

Cuando cortamos dos rectas concurrentes por medio de paralelas las partes interceptadas en una, son proporcionales á las partes interceptadas en la otra, de modo que A B : B C :: D E : E F; y escribiendo de otro modo la proporción también: AB : DE : BC : EF. (Fig. 178).

Figura 178.

Figuras semejantes.

114. Todos hemos visto el plano de una casa, de un

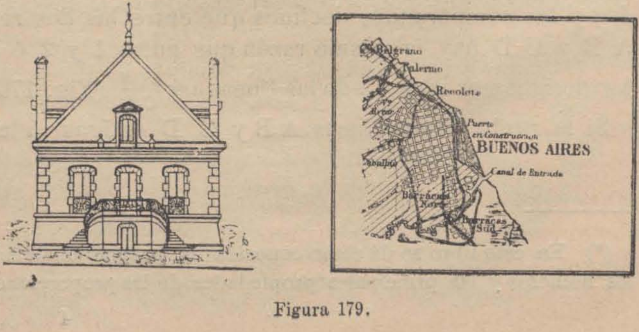

Figura 179.

jardín, de una ciudad; es un dibujo reducido, semejante al objeto dibujado, pero de distinta extensión. (Fig. 179).

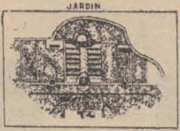

Figura 179.

Aquí tenemos por ejemplo: dos cabezas humanas semejantes, pero de distinto tamaño. (Fig. 179).

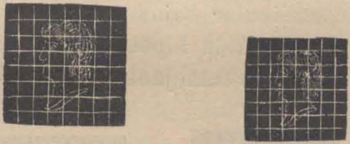

Figura 179.

Observad estos dos polígonos: son también semejantes, pero no iguales (Fig. 180).

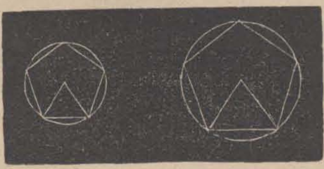

Figura 180.

Dos polígonos se llaman semejantes, cuando tienen sus lados homólogos proporcionales, é iguales los ángulos comprendidos por ellos. (Fig. 181).

115. Dos triángulos son semejantes, cuando tienen los

ángulos respectivamente iguales, cuando tienen sus lados paralelos ó perpendiculares y cuando tienen los lados proporcionales, ó sea A' B' : A B : : C' B' : C B : : A' C' : A C. (Fig. 182).

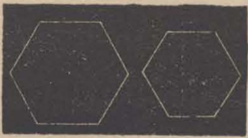

Figura 181.

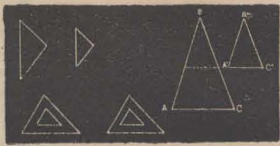

Figura 182.

116. La perpendicular bajada desde el vértice de un triángulo rectángulo á la hipotenusa divide al triángulo en otros dos triángulos semejantes. (Fig. 183) ([1]).

(1) (2)
Figura 183

117. Para que dos polígonos sean semejantes, basta que estén formados por un mismo número de triángulos semejantes uno á uno y dispuestos de manera semejante. (Fig. 183) ([2]). (*)

(*) El compás de cuatro puntas se usa para trazar distancias proporcionales; y el pantógrafo para reducir figuras, proporcionalmente; hay dos clases de pantógrafo: uno para reducir superficies y otro para reducir cuerpos.

Problemas.

118. 1—Dividir una recta en partes iguales por medio de otra auxiliar, trazando paralelas.

2—Dividir una recta en partes proporcionales á otras dadas.

3—Construir sobre una recta dada un triángulo semejante á otro.

4—Dibujar un polígono semejante á otro.

5—Trazar un polígono semejante á otro por medio de líneas que, partiendo de sus vértices, concurran á un punto común.

6—Medir aproximadamente, valiéndonos de una escuadra falsa ó de una hoja de papel colocada sobre una mesa, el ángulo que forma con el suelo una línea tirada desde la copa de un árbol y trasportarlo sobre el papel.

7—Tomar una distancia cualquiera desde el pie de dicho árbol, medir y construir sobre un papel un triángulo semejante al que forma el árbol con el suelo y una línea imaginaria tirada desde su copa como hipotenusa.

8—Medir la altura del árbol.

9—Aplicación á otros objetos altos, inaccesibles. (*)

10—Medir la distancia que hay hasta un punto inaccesible por medio de la hoja de papel ó escuadra falsa, siguiendo un procedimiento parecido al anterior.

---

(1) Hay instrumentos con los cuales se mide de una manera perfecta un ángulo, de un modo análogo al que hemos empleado nosotros: grafómetro, teodolito, plancheta, etc.

Programa:—Círculo.--Figuras circulares.—Polígonos inscriptos y circunscriptos en el círculo.—Rectificación de la circunferencia.—Problemas gráficos.

119. La base de un cono, las bases de un cilindro, presentan una superficie plana limitada por una circunferencia; esas superficies toman el nombre de círculo. (Fig. 184).
Círculo es una superficie plana cerrada por la circunferencia. (Fig. 185)

Figura 184.

Figura 185.

120. No hay, pues, que confundir la línea llamada circunferencia, con el plano llamado círculo. (Fig. 186).
121. La mitad de un círculo se llama semicírculo. (Fig. 187).
122. Corona ó anillo es la parte de círculo comprendida entre dos circunferencias concéntricas. (Fig. 187).

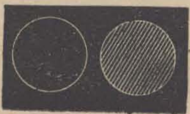

Figura 186.

Figura 187.

Figura 188

123. Sector circular es la parte de círculo comprendida por dos radios y el arco correspondiente (Fig. 189).

124. Segmento circular es la parte de círculo comprendida por una cuerda y un arco. (Fig. 190).

Figura 189.

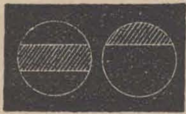

Figura 190.

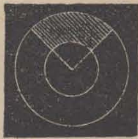

Figura 191.

125. Trapecio circular es la parte de corona interceptada por dos radios (Fig. 191).

Propiedades.

---

126. a) Los círculos son iguales, si tienen radios iguales.

b) Las coronas son iguales, si lo son los radios respectivos.

c) Los sectores son iguales, si tienen arcos iguales de círculos iguales.

d) Los trapecios son iguales, si lo son los arcos respectivos.

e) Todos los círculos son semejantes.

f) Las coronas son semejantes si tienen sus radios proporcionales.

g) Los sectores y segmentos son semejantes, si sus arcos constan de igual número de grados.

Polígonos inscriptos y circunscriptos.

127. Llámanse polígonos inscriptos en un círculo los que tienen sus vértices en la circunferencia. (Fig. 192).

Los lados del polígono, en ese caso, vienen á ser cuerdas de la circunferencia.

128. Polígono circunscripto al círculo, será aquél cuyos lados son tangentes á la circunferencia. (Fig. 193).

Figura 192.

Figura 193

129. En el primer caso se dice que el círculo está circunscripto al polígono y en el segundo que está inscripto en él.

Propiedades

130. a) Todo triángulo puede inscribirse en un círculo ó circunscribirse á él. (Fig. 194).

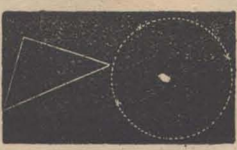

Figura 194.

Figura 195

b) En todo cuadrilátero inscripto, los ángulos opuestos son suplementarios (Fig. 195).

c) Todo polígono regular se puede inscribir en un círculo y circunscribirse á otro. (Fig. 196).

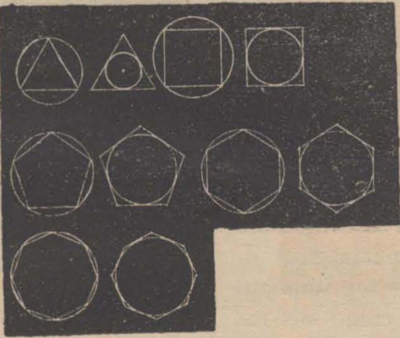

Figura 196.

d) Si una circunferencia se divide en partes iguales y por los puntos de división se trazan cuerdas ó tangentes, el polígono que resulte será regular. (Fig. 197).

e) Toda circunferencia que pase por tres vértices de un polígono regular, pasará por los demás. (Fig. 198).

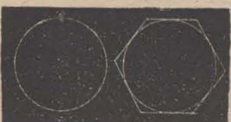

Figura 197.

Figura 198.

f) Si en una circunferencia inscribimos un polígono de 360 lados y circunscribimos otro de igual número, vemos que uno y otro polígono tienden á confundirse con la circunferencia; y si en lugar de 360 lados hiciésemos polígonos de mayor número de lados, llegaría un momento en que ambos polígonos y la circunferencia serían la misma cosa. Por esto decimos que la circunferencia puede considerarse como un polígono de infinito número de lados en que las apotemas y los radios se confunden y como los perímetros de los polígonos son semejantes entre sí como sus radios, las circunferencias lo serán también. (Fig. 199)

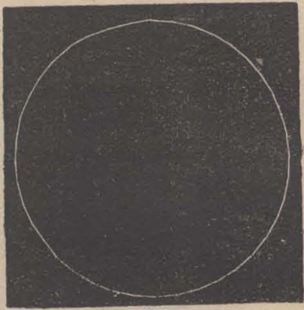

Figura 199.

Averiguar la razón que hay entre la circunferencia y su diámetro es un problema muy difícil que nosotros podemos resolver aproximadamente así:

Tomemos un círculo cualquiera y apliquémosle un hilo en torno, lo más justamente que se pueda. Si después extendemos el hilo y llevamos el diámetro sobre él, veremos que cabe tres veces y que sobra una parte; si llevamos este sobrante sobre el diámetro vemos que cabe aproximadamente siete veces. (Fig. 200)

Figura 200.

Si repetimos la operación con otros círculos, nos dará el mismo resultado.

Podemos entonces decir que la razón que existe entre una circunferencia y su diámetro, es como 3 y 1/7 ó sea reducido á decimal: 3.142 (*)

Se acostumbra á desiguar abreviadamente la cantidad 3 1/4 por una letra griega que se escribe así: π y se pronuncia *pi*. De modo que la razón entre la circunferencia y el diámetro es igual á π. Podemos, pues escribir:

$\frac{\text{Circunferencia}}{\text{Diámetro}} = \pi$, y como el diámetro es igual á dos radios, también pueden escribirse sus abreviaturas: $\frac{C^a}{2 \times R} = \pi$ y multiplicando los dos miembros de esta igualdad por $2 \times R$ tendremos $C = 2 \times R \times \pi$

Conociendo por lo tanto el radio, en metros, de una circunferencia, podemos saber la longitud de una curva, en metros, de una manera muy aproximada, multiplicando la longitud del radio por 2 y luego este producto por 3.141592...

131. Rectificar una circunferencia es encontrar una recta que equivalga á ella, y ya hemos visto que aproximadamente es tres veces el diámetro y un séptimo de diámetro más.

(*) Los geómetras han encontrado por largos estudios mayor aproximación á esta razón, agregando algunas cifras decimales: 3.141592.....

Resolver exactamente este problema, se considera hasta hoy como imposible.

Problemas.

132. 1—Circunscribir una circunferencia á un polígono regular.

2.—Inscribir una circunferencia en un polígono regular.

3—Inscribir un triángulo equilátero por medio del exágono.

4—Inscribir un octógono por medio del cuadrado.

Nota.—Hay muchos procedimientos para inscribir polígonos en un círculo, pero vamos á enseñar uno solo que sirve para cualquier polígono, además del procedimiento que ya se ha visto, valiéndose del transportador.

Sea la circunferencia (Fig. 201): tracemos el diámetro A D. Deseamos inscribir un polígono de 5 lados, dividimos el diámetro en cinco partes; si fuese un polígono de 6, 7, 8 ó más lados, se dividiría el diámetro en 6, 7, 8 ó más partes, numerándolas. En seguida, con una abertura de compás igual al diámetro, haciendo centro en los estremos de éste, trazamos dos arcos que se corten en el punto o, desde el cual trazamos una recta que pase siempre por la 2ª división y que toque en la circunferencia por el punto opuesto f; trazando la cuerda D f, tendremos el lado del polígono deseado, y llevando los cinco lados sobre la circunferencia, lo habremos inscrito.

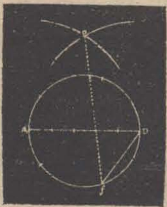

Figura 201.

5—Tirar en un círculo una paralela á una secante, valiéndose de los arcos ó del radio para formar un segmento circular.

6—Construir polígonos estrellados de 5, 6, 7, 8, 10, 15 picos, dado el polígono regular correspondiente.

7—Rectificar numéricamente una circunferencia cuyo radio mide 8 metros.

8—Rectificar sobre el papel una circunferencia cuyo radio mide 7 centímetros.

9—Dibujar sobre el papel un transportador.

10—Un estanque tiene 24 metros de diámetro, ¿cuál será la circunferencia?

11—Una rueda de 1.80 de diámetro cuántas vueltas dará en un kilómetro.

12—Hallar la longitud de un arco de 60°, cuyo radio sea 2 metros.

13—Hallar el radio de la tierra.

Programa:—Area de los polígonos y figuras circulares.—Equivalencia.—Problemas gráficos y numéricos.—Principales aplicaciones á la medición de distancias y superficies.

133. Para medir él área de las superficies se emplean como unidades el metro cuadrado y los múltiplos y submúltiplos cuadrados del metro.

Si tomamos un centímetro cuadrado, es decir, una superficie cuadrada cuyo lado tenga un centímetro de longitud, y dividimos la base en diez partes, la altura en otras diez, y por los puntos de división trazamos paralelas hasta el lado opuesto, el centímetro cuadrado quedará dividido en cien cuadraditos pequeños, de los cuales cada uno tendrá un milímetro de base por otro de altura. (Fig. 202).

Figura 202.

Para saber por lo tanto el número de milímetros cuadrados que contiene un centímetro cuadrado, hubiera bastado medir la base en milímetros, que son diez, y multiplicarla por la altura que son otros diez, ó sea 10×10=100 milímetros cuadrados.

Supongamos que se trate de medir el área de un rectángulo formado por tres centímetros cuadrados colocados unos sobre otros. Deseamos saber el número de milímetros cuadrados que dicha figura tiene. Evidentemente los milímetros cuadrados que va á tener la figura seran 300 puesto que cada centímetro cuadrado vale 100. (Fig. 203).

Figura 203.

Midamos la base del rectángulo: tiene diez milímetros de longitud; midamos ahora la altura: nos dá 30 milímetros de longitud. Si multiplicamos el número de milímetros de la base, ó sea 10, por los de la altura que son 30, el producto será igual á 300. De manera, que para hallar el área de un rectángulo bastará multiplicar su longitud por su latitud, ó sea, la base por la altura.

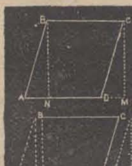

Figura 204

134. Tomemos ahora un paralelógramo A B C D; prolongemos su base A D y tracemos dos perpendiculares á ella B N y C M por los puntos B y C. (Fig. 203). Cualquiera de estas perpendiculares es la altura del paralelógramo y al mismo tiempo la altura del rectángulo B C M N que ha quedado formado.

Evidentemente el área del paralelógramo y el área del rectángulo son iguales, porque á cada uno le sobra un triángulo igual para reducirlos al trapecio B N D C; y como las bases del rectángulo y del paralelógramo son iguales, así como también sus alturas, resulta que para hallar el área de un paralelógramo, se multiplica la base por la altura. (Fig. 204).

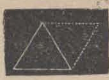

Figura 205.

135. El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de la base por la altura, porque todo triángulo es la mitad de un paralelógramo de igual base y altura que el triángulo. (Fig. 205).

Figura 206.

136. Cuando se trate de hallar el área de un trapecio, se dividirá en dos triángulos por medio de la diagonal, y entonces se buscará el área de cada uno de los triángulos que tienen igual altura y distintas bases, y nos dan, (Fig. 206):

$$1\text{er. triángulo} = \frac{A\,B \times P\,C}{2}$$

$$2^{\circ}\ \text{triángulo} = \frac{C\,D \times P\,C}{2}$$

Sumando las dos igualdades tendremos:

$$\nabla\,I + \triangle 2,\ (\text{ó sea el trapecio}) = \frac{(A\,B + C\,D) \times P\,C}{2}$$

Esto nos demuestra que el área de un trapecio es igual á la mitad del producto de la altura, por la suma de sus bases.

137. Si quisiéramos medir el área de un polígono regular, observando que está formado por tantos triángulos iguales como lados tiene, sabremos que es igual á la mitad

del producto del perímetro, multiplicada por la apotema que es la altura común á todos sus triángulos. (Fig. 207).

138. El área de un círculo se determina lo mismo que la de un polígono que tuviese infinito número de lados, observando que la apotema en ese polígono es el radio del círculo. (Fig. 208)

Figura 207.

Figura 208.

Ya sabemos que la longitud de una circunferencia ó sea el perímetro de un círculo es $2\ R\ \pi$ de modo que habrá que multiplicar esta cantidad por la apotema, es decir, por el radio, y dividir el producto por 2, de donde

resultará: área del círculo $= \dfrac{2\,\pi\,R \times R}{2}$

Nota—Se llama cuadrado de un número el producto de multiplicarlo por sí mismo; así el cuadro de dos es cuatro, el de 3 es nueve, el de 4 es 16 etc., porque 2 por 2 son 4, 3, por 3, son 9 etc.

Para representar que una cantidad debe multiplicarse por sí misma, ó sea que debe buscarse su cuadrado, se escribe así: 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, y R^2

Podemos, pues, simplificar la expresión anterior escribiendo:

Área del círculo $= \pi\ R^2$

139. El área de una corona es igual á la diferencia que arroja el área de los dos círculos. (Fig. 209).

140. El área de un sector circular es igual á la mitad del producto del arco por el radio. (Fig. 210).

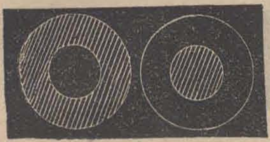

Figura 209

Figura 210.

Figura 211.

141. El área de un segmento circular es igual á la diferencia entre las áreas del sector y del triángulo correspondiente. (Fig. 211).

142. El área de un trapecio circular es igual á la diferencia de las áreas de los sectores respectivos. (Fig. 212).

Figura 212.

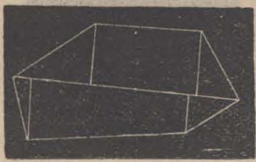

Figura 213.

143. El área de un polígono irregular es igual á la suma de las áreas de los triángulos y cuadriláteros en que puede descomponerse. (Fig. 213).

Equivalencias.

144. Llámanse figuras equivalentes aquellas que tienen área igual. (Fig. 214).

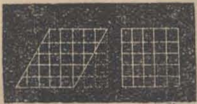

Figura 214.

Propiedades.

145. a) Todos los triángulos ó paralelógramos de igual base y altura, son equivalentes. (Fig. 215 y 216).

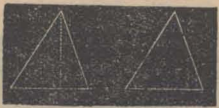

Figura 215.

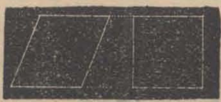

Figura 216.

b) Todo paralelógramo se puede transformar en un rectángulo equivalente. (Fig. 217).

Figura 217.

c) Un triángulo de igual base y doble altura que un paralelógramo, es equivalente á éste. (Fig. 218).

d) Si dos trapecios tienen la misma altura é igual la suma de las bases, son equivalentes. (Fig. 219).

Figura 218.

Figura 219

e) Si trazamos en un polígono, por ejemplo, en el cuadrado A B C D, una diagonal A C, y por otro vértice, á ella una paralela B E, y prolongamos un lado D C hasta encontrarla, y unimos el punto de encuentro E con el vértice A, resultará formado un triángulo A D E que tendrá la misma área que el cuadrado, 1.° por tener doble altura que éste, y 2.° porque los triángulos A B E, A C E, y C B A tienen la misma base y altura. Este procedimiento se emplea para reducir un polígono á otro equivalente de menor número de lados. (Fig. 220).

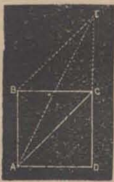

Figura. 220

Problemas.

146. 1—Reducir un cuadrado á triángulo equivalente trazando la diagonal, y por el vértice opuesto una paralela á ella y prolongando un lado.

2—Reducir un pentágono á cuadrilátero por igual procedimiento.

3—Reducir un exágono á pentágono y un polígono á otro que tenga un lado nuevo.

4—Si los catetos de un triángulo rectángulo tienen respectivamente 3 y 4 centímetros, ¿cuántos tendrá la hipotenusa?

5—Hallar el área de una plaza circular cuyo rádio es de 60 metros.

6—Determinar el número de personas que caben en el piso de un circo de 30 metros de rádio, ocupando cada tres personas un metro cuadrado.

7—Calcular el área de una corona cuyos rádios tengan respectivamente 5 y 6 centímetros.

8—Hallar el área de un sector cuyo arco mida 12 metros y su rádio 8.

9—¿Cuál será el área de un triángulo de 15 metros de base y de 32 metros de altura?

10—Calcular el área de un cuadrado de 25 metros y 12 centímetros de lado.

11—Calcular el área de un rectángulo cuya base mide 8 metros y la altura 30.

12—Determinar el área de un rombo cuya base es de 8 metros y la altura de 4.

13—Un terreno trapecial de 8 metros de altura, 30 en una base y 50 en otra, ¿qué área tiene?

14—Un decágono regular de 20 metros de apotema ¿qué área tiene?

Programa: — Geometría del espacio.—Nociones sumarias.—Rectas y planos.—Angulos diedros.—Planos perpendiculares y paralelos entre sí.—Angulos poliedros.—Principales propiedades.—Superficies: curva, cónica, cilíndrica y esférica.

1. La pared y el suelo de una habitación al unirse forman un ángulo diedro. Las dos caras de un cubo que se tocan forman otro, dejando entre uno y otro plano una abertura. (Fig. 221).

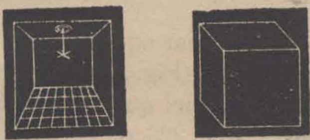

Figura 221.

Llámase ángulo diedro (*) á la mayor ó menor abertura comprendida por dos planos indefinidos que se intersecan en una misma recta. (Fig. 222).

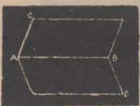

Figura 222

2. Caras del diedro son los planos que lo forman y arista la intersección de las caras.

Nota—Un diedro se representa con dos paralelógramos unidos por un lado, y se lee con dos letras colocadas en los extremos de la arista; pero los planos se consideran ilimitados.

(*) Lo llamaremos *diedro*, simplemente.

3 Se dice que dos diedros son iguales, cuando tienen igual abertura ó coinciden sus caras. (Fig. 223).

4. Diedros adyacentes, se llaman aquellos que tienen un plano común y cuyos otros dos planos forman uno solo. (Fig. 224).

Figura 223.

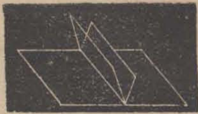

Figura 224.

5. Es plano perpendicular aquel que al tocar á otro forma dos diedros iguales. (Fig. 225).

6. Plano oblícuo es aquel que al tocar á otro forma dos diedros desiguales. (Fig. 226 a).

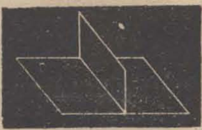

Figura 225.

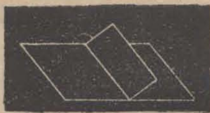

Figura 226 a.

7. Se dice de dos planos, que son perpendiculares entre sí, cuando prolongados forman cuatro diedros iguales. (Fig. 226 b).

8. Se denomina diedro recto, aquel que forman dos planos perpendiculares entre sí. (Fig. 227).

9. Diedro agudo es el menor que el recto. (Fig. 227).

10. Diedro obtuso es el mayor que el recto. (Fig. 227).

11. Dos diedros se llaman opuestos por el vértice, cuando

las caras del uno son prolongaciones de las caras del otro. (Fig. 128).

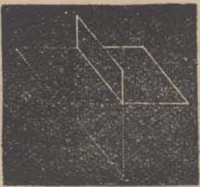

Figura 226 b.

Figura 227.

12. Son diedros complementarios los que juntos valen un diedro recto. (Fig. 229).

Figura 228.

Figura 229.

Complemento se dice de lo que le falta á un diedro para ser recto.

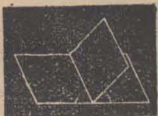

Figura 230.

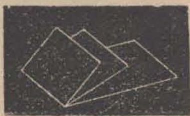

Figura 231.

13. Son diedros suplementarios los que juntos valen dos diedros rectos. (Fig. 230).

Suplemento se dice á lo que le falta á un diedro para valer dos rectos.

14. Se titulan diedros consecutivos los que tienen una cara común y la misma arista. (Fig. 231).

15. Plano bisector de un diedro es aquel que divide á dicho diedro en otros dos iguales. (Fig. 232).

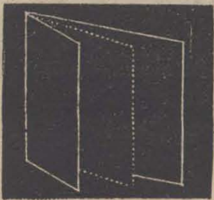

Figura 232.

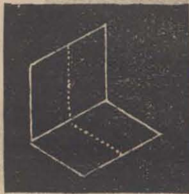

Figura 233.

16. Ángulo rectilíneo correspondiente á un diedro, se dice de aquel ángulo plano trazado sobre las caras de dicho diedro y formado por dos perpendiculares á su arista. (Fig. 233),

Figura 234.

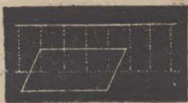

Figura 235.

17. Se dice que una recta es perpendicular á un plano, cuando lo es á todas las rectas que pasan por su pié en dicho plano. (Fig. 234).

18. Una línea es paralela á un plano, cuando prolongados una y otro no se encuentran. (Fig. 235).

19. Planos paralelos son aquellos que, prolongados, no se encuentran. (Fig. 236).

20. El piso y dos paredes de una pieza al juntarse y reunirse en un rincón forman una esquina que se llama ángulo poliedro.

Tres caras de un cubo ó cuatro caras de un octaedro, forman al reunirse en un punto común otros ángulos poliedros. (Figs. 237, 238 y 239).

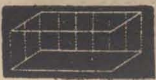

Figura 236.

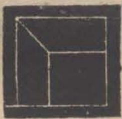

Figura 237.

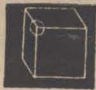

Figura 238.

Figura 239.

Serán, pues, ángulos poliedros el espacio mayor ó menor, comprendiendo por tres ó más planos indefinidos que concurren á un punto común. (Fig. 240).

Figura 240.

21. Caras del ángulo poliedro son los planos que lo forman, y aristas, las intersecciones de las caras.

22. En el vértice de un ángulo poliedro se forman tantos ángulos planos, como caras concurren á su formación.

23. Cuando los ángulos planos de un ángulo poliedro son iguales y también lo son sus diedros, el ángulo poliedro se llama regular.

24. Llámase ángulo poliedro convexo, aquel al que una recta sólo puede tocar en dos puntos. (Fig. 241).

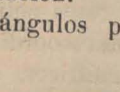

Figura 241.

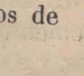

Figura 242.

25. El ángulo poliedro formado por tres planos, se llama triedro. (Fig. 242).

26. Si un ángulo triedro tiene sólo un diedro recto, se llama rectángulo, si dos, bi-rectángulo, si tres, tri-rectángulo.

27. Llámanse triedros iguales aquellos que están formados por diedros y caras iguales, y dispuestos de la misma manera. (Fig. 243).

28. Opuestos por el vértice son aquellos cuyas aristas son prolongaciones de las del otro. (Fig. 244).

Figura 243.

Figura 244.

29. Un poliedro se compone de tantos triedros como caras tiene, ó de tantos triedros como caras tiene menos dos.

30. Dos ángulos poliedros son iguales, si están compuestos de un mismo número de triedros respectiva y ordenadamente iguales.

31. Dos ángulos poliedros iguales, son idénticos, si sus elementos están coordinados de la misma manera en ambos; y son simétricos, aquellos cuya coordinación es inversa.

Propiedades principales

32. a)—Tres puntos que no están en línea recta, determinan la posición de un plano. (Fig. 245)

Figura 245.

b)—Dos rectas que se cortan determinan la posición de un plano. (Fig. 246).

Figura 246.

c)—Dos planos al cortarse, forman una línea recta en la intersección. (Fig. 247).

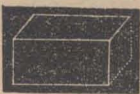

Figura 247.

d)—Una recta que tiene dos puntos en un plano, tiene todos los demás en él. (Fig. 248).

Figura 248.

e)—Una recta no puede tocar á un plano en más de un punto, sin confundirse con el plano.

f)—Dos planos que tienen tres puntos comunes, no en línea recta, se confunden. (Fig. 249).

g)—Con dos planos no pueden formarse más de cuatro diedros consecutivos. (Fig. 250).

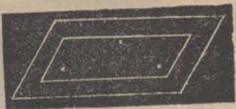

Figura 249.

Figura 250.

h)—Todos los diedros consecutivos que se pueden formar sobre una recta en un plano, valen dos rectos. (Fig. 251).

ch)—Todos los diedros que se pueden formar alrededor de una recta, como arista, valen cuatro rectos. (Fig. 252).

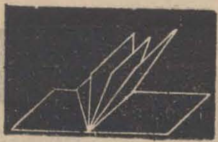

Figura 251

Figura 252

i)—Cuando dos diedros se oponen por el vértice, tienen el mismo suplemento. (Fig. 253)

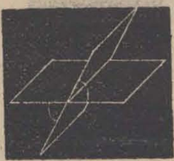

Figura 253

j) — Los diedros opuestos por el vértice, son iguales.

k)—Si uno de los diedros opuestos por el vértice es recto, los otros tres consecutivos también lo son. (Fig. 254)

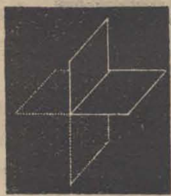

Figura 254.

l)—Si por un punto dado en un plano, se trazan varias líneas, una sola será perpendicular y las otras oblícuas. (Fig. 255).

Figura 255.

ll)—Si desde un punto dado fuera de un plano se bajan varias rectas, una sola será perpendicular y las demás oblicuas. (Fig. 256).

Figura 256

m)—La perpendicular bajada desde un

punto situado fuera de un plano, es la menor distancia, y la oblicua que más se aleje del pie de la perpendicular, será la mayor distancia. (Fig. 257).


Figura 257.

n)—Los ángulos formados con la perpendicular á un plano, por oblícuas iguales que terminen en el mismo punto de la perpendicular, son iguales. (Fig. 258).


Figura 258.

ñ)—Un diedro recto y un obtuso no pueden ser adyacentes. (Fig. 259).

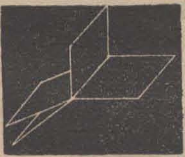
Figura 259

o)—Alrededor de una recta no pueden formarse más de cuatro diedros rectos consecutivos, ni tres rectos y un obtuso, ni dos rectos y dos obtusos, ni tres obtusos y un recto. (Fig. 260).

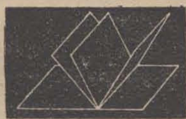
Figura 260

p)—Los planos bisectores de dos diedros adyacentes, forman entre sí, un diedro recto.

q)—Una recta perpendicular á otras dos que se cruzan por su pie, en un plano, es perpendicular á cualquiera recta del plano que pase por dicho pie. (Fig. 261).

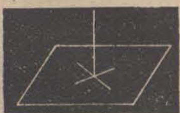
Figura 261.

r)—Un plano es vertical cuando contiene una línea vertical. (Fig. 262).


Figura 262.

rr)—Si una recta vertical es perpendicular á un plano, el plano es horizontal. (Fig. 263).

s)—Las rectas perpendiculares á un plano vertical son horizontales. (Fig. 264).

t)—La intersección de dos planos verticales es una recta vertical. (Fig. 265).


Figura 263.


Figura 264.


Figura 265.

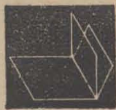
Figura 266.

u)—La intersección de un plano horizontal con un plano cualquiera, es una recta horizontal. (Fig. 266).

v)—Los diedros formados por planos horizontales y verticales que se intersecan, son rectos. (Fig. 267).


Figura 267.

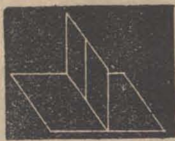
Figura 268.

w)—Si un plano contiene una recta perpendicular á otro, ambos son perpendiculares entre sí (Fig. 268).


Figura 269.


Figura 270.

x)—Si dos diedros son iguales, también lo son sus rectilíneos. (Fig. 269).

y)—Si dos rectilíneos son iguales, sus diedros también lo son. (Fig. 270).

z)—Si una recta es oblícua á un plano, sólo puede ser perpendicular á una recta en dicho plano. (Fig. 271).

Figura 271.

a')—Dos planos perpendiculares á una recta, son paralelos entre sí. (Fig. 272).

Figura 272.

b')—Las intersecciones de los planos paralelos con un tercer plano, son rectas paralelas. (Fig. 273).

c')—Las partes de paralelas comprendidas entre planos paralelos, son iguales. (Fig. 274).

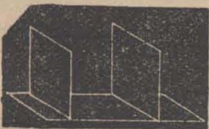

Figura 273.

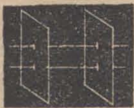

Figura 274.

d')—Por un punto dado fuera de un plano, no se puede trazar á éste más que un plano paralelo. (Fig. 275).

Figura 275

e') - Si dos planos son paralelos, toda recta perpendicular á uno lo será al otro. (Fig. 276).

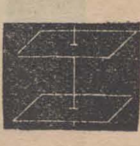

Figura 276.

f')—Si dos ángulos tienen sus lados paralelos, los planos en que estén también lo serán. (Fig. 277).

g')—La medida de un diedro es igual á la del rectilíneo correspondiente. (Fig. 278). (*).

h')—Para formar un ángulo poliedro se necesitan tres planos por lo menos. (Fig. 279).

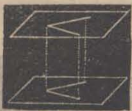

Figura 277.

Figura 278.

Figura 279.

ch')—En un triedro, un ángulo plano, es menor que la suma de los otros dos.

i')—La suma de los ángulos planos de un poliedro convexo es menor que cuatro ángulos rectos. (Fig. 280).

Figura 280.

Superficies curvas.

---

33. Si tomamos un ángulo A B C y lo hacemos girar al rededor de uno de los lados tomado como eje fijo, el otro lado determinará en el espacio una superficie cónica. (Fig. 281).

Figura 181.

34. Si tomamos dos líneas paralelas y hacemos girar al rededor de una de ellas, considerada como eje fijo, la

Figura 282.

(*) En las artes se emplea, para medir un diedro, un instrumento llamado *baivel*.

línea opuesta, guardando la distancia, la línea movible determinará en el espacio una superficie cilíndrica. (Fig. 282).

35. Si tomamos una semi-circunferencia y la hacemos girar sobre su diámetro, considerado como eje fijo, la semi-circunferencia determinará en el espacio una superficie esférica. (Fig. 283).

36. Aplicando una recta á cualquiera de estas tres superficies observaremos que hay direcciones en que la recta no coincide en toda su extensión con las superficies; por lo tanto las superficies cónicas, cilíndricas y esféricas, son superficies curvas.

Figura 283

37. Llámase superficie *cónica* á la superficie curva, que se supone originada por uno de los lados de un ángulo que gira alrededor del otro, considerado como eje fijo.

38. Superficie *cilíndrica* será aquella superficie curva que se suponga originada por una de dos líneas paralelas que gira conservando la distancia alrededor de la otra opuesta, considerada como eje fijo.

39. Superficie *esférica* diremos que es toda superficie curva, originada por la semi-circunferencia girando al rededor de su diámetro, considerado como eje fijo.

40. Tales superficies también se llaman superficies de *revolución*.

Cuerpos poliedros.

---

41. Cuerpos poliedros, ó simplemente *poliedros*, se dice de todo cuerpo terminado por caras planas.

El conjunto de las caras constituye la superficie del poliedro. (Fig. 284)

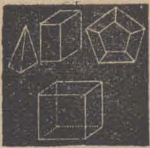

Figura 284.

42. Las intersecciones de las caras se llaman aristas; vértices son los puntos en que se encuentran unas aristas con otras, y diagonales son las rectas que unen dos vértices de caras distintas. (Fig. 285).

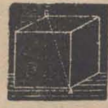

Figura 285.

43. Recibe el nombre de *base*, la cara inferior sobre la cual suponemos que descansa el poliedro; y altura es la perpendicular trazada á la base ó á su prolongación desde el vértice más distante. (Fig. 286):

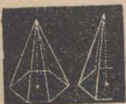

Figura 286.

44. Los poliedros de cuatro caras se llaman tetraedros; los de cinco, pentaedros; los de seis, exaedros; los de siete,

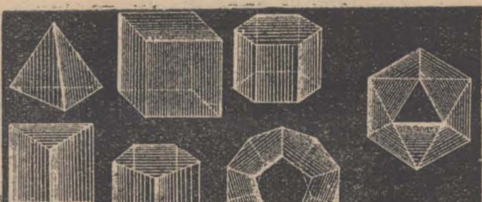

Figura 287.

heptaedros; los de ocho, octaedros; los de doce, dodecaedros; y los de veinte, icosaedros. (Fig. 287).

45. Se dice de un poliedro que es *regular,* si está limitado por polígonos regulares, iguales, y por ángulos poliedros también iguales. (Fig. 288).

Figura. 288.

46. Se llaman caras laterales de un poliedro á todas menos la de su base.

47. Se llama área lateral de un poliedro, á la suma de las áreas de sus caras laterales; y área total á la suma de las áreas de todas sus caras.

Programa:—Pirámides.—Trozo de pirámide.—Área de la pirámide; desarrollo lateral.—Prismas.—Area del prisma, desarrollo lateral.—Poliedros: descomposición en tetraedros. —Los cinco poliedros regulares.—Igualdad de los poliedros. —Area lateral y total de un poliedro cualquiera.—Problemas.

48. Se llama *pirámide* al poliedro que tiene por base una superficie poligonal y tantas caras laterales como lados tiene la base. (Fig. 289).

49. Los lados de la base se consideran como bases de los triángulos laterales y el vértice común de estos triángulos se denomina cúspide. (Fig. 290).

Figura 289.

Figura 290.

50. Si la base de la pirámide es un triángulo, la pirámide

se llama triangular; si es un cuadrado, cuadrangular; si es un rombo, rombal; si es un pentágono, pentagonal: en una palabra, toma el nombre del polígono de su base. (Fig. 291).

Figura 291.

51. La más simple de las pirámides y el más simple de los poliedros es la pirámide triangular ó tetraedro. (Fig. 292).

Figura 292.

52 Pirámide regular es aquella que tiene por base un polígono regular é iguales las aristas laterales.

53. Las caras laterales de la pirámide regular, son triángulos isósceles iguales: la altura de estos triángulos se denomina apotema de la pirámide. (Fig. 293).

Figura 293.

54 Dáse el nombre de trozo de pirámide, á la parte de pirámide comprendida entre la base y un plano que corte todas las aristas laterales. (Fig. 294).

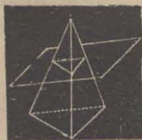

Figura 294.

55. El trozo de cono se dirá de bases paralelas, cuando el plano secante sea paralelo á la base.

56. El área lateral de la pirámide regular es igual á la mitad del producto del perímetro de la base multiplicado por la apotema de la pirámide, y para hallar el área total, bastará agregar al área lateral, la de la base.

57. La superficie total de una pirámide, puede desarrollarse ó extenderse sobre un papel, colocando consecutivamente alrededor del polígono de la base, los triángulos isósceles que la forman. (Fig. 295).

58. El área lateral de un trozo de pirámide regular, de bases paralelas, es igual á la mitad del producto de

la parte de apotema correspondiente, multiplicado por la suma de los perímetros de las bases.

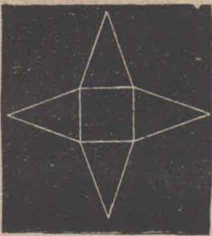

Figura 295.

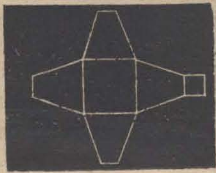

Figura 296.

59. Hé aquí el desarrollo de un trozo de pirámide. (Fig. 296).

Prismas.

60. Llámase prisma á un poliedro limitado por dos caras poligonales paralelas (*) y tantos rectángulos laterales como lados tiene una de dichas caras. (Fig. 297).

Figura 297.

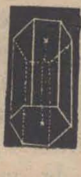

Figura 298.

61. Altura de un prisma es la distancia entre ambas bases.

(*) A esas caras se da el nombre de *bases del prisma.*

62. Las aristas laterales de un prisma son iguales y paralelas. (Fig. 298).

63. Si las bases de un prisma son triángulos, el prisma se llama triangular; si son cuadrados, cuadrangular, y en general, el prisma toma el nombre del polígono que le sirve de base.

Figura 299.

64. El más sencillo de los prismas, es el triangular. (Fig 299).

65. Llámase prisma regular ó recto aquél cuyas aristas laterales son perpendiculares á las bases; y si las aristas son oblicuas, el prisma se llama oblicuo. (Fig. 300).

66. Si las caras de un prisma son cuadrados, el prisma toma el nombre de cubo. (Fig. 301).

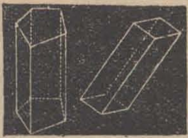

Figura 300.

Figura 301.

67. Si las bases de un prisma son paralelógramos, se le llama paralelepípedo. (Fig. 302).

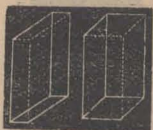

Figura 302.

68 Las caras opuestas de todo paralelepípedo son iguales y paralelas.

69. El área lateral de un prisma regular es igual al producto de su altura (*) por el perímetro de su base. Para hallar el área total, basta agregar al área lateral la de ambas bases.

Figura 303

(*) En el prisma recto cualquier arista es la altura del prisma.

70. Las áreas de dos prismas de base equivalente é igual altura, son equivalentes. (Fig. 303).

71. Para hallar el área de un prisma oblicuo, se multiplica una de sus aristas laterales por una sección perpendicular á ellas.

72. El área lateral de un prisma recto, puede desarrollarse sobre el papel y se convierte en un rectángulo de igual altura que el prisma y de una latitud igual al perímetro de la base. (Fig. 304).

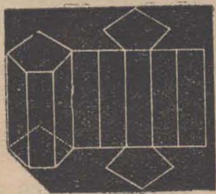

Figura 304.

Descomposición en tetraedros.

---

73. Todo poliedro puede descomponerse en pirámides desde un punto interior. (Fig. 305).

74. Toda pirámide puede descomponerse en tetraedros. (Fig. 306).

Figura 305.

Figura 306.

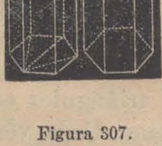

Figura 307.

Figura 308.

75. Todo prisma puede descomponerse en tantos prismas triangulares como lados tiene ó en tantas como lados tiene menos dos. (Fig. 307).

76. Todo prisma triangular puede descomponerse en tres tetraedros de base equivalente y altura igual. (Fig. 308).

Los cinco poliedros regulares.

77. Estos cinco poliedros están limitados por polígonos regulares iguales, y sus ángulos poliedros son también iguales; por eso se llaman poliedros regulares.

Figura 309.

78. El tetraedro está formado por cuatro triángulos equiláteros y tiene cuatro ángulos poliedros, seis aristas y cuatro vértices. Sus ángulos planos miden 60°, lo cual nos dice que la suma de los tres de un vértice vale 180° ó sea 2 rectos. (Fig. 309)

79. Con ángulos de menor número de grados no puede haber poliedro regular, porque los triángulos no serían equiláteros. (Fig. 310)

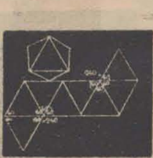

Figura 310.

80. El octaedro está formado por ocho triángulos equiláteros y tiene seis ángulos poliedros formados por cuatro ángulos planos, doce aristas y seis vértices. Los cuatro ángulos planos de cada uno de sus ángulos poliedros, suman juntos 240° es decir, menos que cuatro rectos.

81. El icosaedro terminado por veinte triángulos equiláteros tiene doce vértices y treinta aristas. Cada vértice está formado por cinco ángulos planos de 60° que juntos suman 300° es decir, menos de cuatro rectos. (Fig. 311)

82. Si quisiéramos hacer otro ángulo poliedro de seis

ángulos de 60°, no podríamos, porque la suma sería igual á cuatro rectos, ó sea un plano. (Fig. 312)

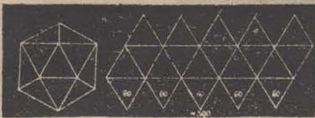

Figura 311.

Figura 312.

83. No puede haber, por lo tanto, más poliedros regulares limitados por triángulos equilateros que el tetraedro, el octaedro y el icosaedro.

84. El cubo está limitado por seis cuadrados iguales y tiene ocho vértices y doce aristas. Cada vértice es formado por tres ángulos planos rectos, ó sean 270°, suma menor que cuatro rectos. (Fig. 313).

Figura 313.

Si reuniésemos cuatro ángulos rectos en un vértice, la suma sería 360° ó sea, un plano. (Fig. 314).

Figura 314.

85. No puede, pues, haber otro poliedro regular limitado por cuadradros sino el cubo.

86. El dodecaedro está limitado por doce pentágonos regulares iguales, y tiene veinte vértices y treinta aristas. (Fig. 315).

Cada uno de sus ángulos poliedros, está formado por tres ángulos planos de 108° que juntos valen 324° es decir, menos de cuatro rectos.

Si reuniésemos en un vértice cuatro ángulos de pentágono regular, la suma sería mayor que cuatro rectos, es decir, no habría ángulo poliedro.

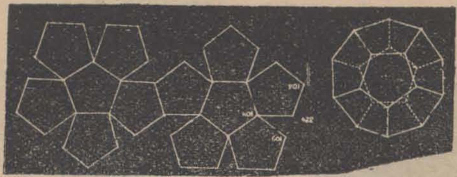

Figura 315.

87. Por lo tanto, los únicos poliedros regulares que puede haber son los cinco que acabamos de nombrar.

88. El área total de un poliedro regular es igual al área de una de sus caras, multiplicada por el número de ellas.

Igualdad de los poliedros.

89. Son poliedros iguales aquellos que tienen sus caras, aristas, ángulos, diedros y poliedros iguales é igualmente dispuestos. (Fig. 316).

Figura 316.

Los poliedros regulares de igual número de caras, son iguales cuando tienen una arista igual.

90. Dos poliedros son semejantes, si tienen las caras semejantes é igualmente dispuestas, y sus ángulos diedros y poliedros iguales. (Fig. 317)

Figura 317.

91. El área lateral de un poliedro cualquiera es igual á la suma de las áreas de sus caras laterales; y el área total se obtiene agregando á dicha suma el área de la base ó bases del poliedro.

Problemas.

92. 1—Clavar en el suelo una estaquilla vertical valiéndose de una plomada.

2—Clavar en una madera una aguja perpendicular valiéndose de una escuadra de tres brazos. (*)

3—Bajar desde un punto dado, una perpendicular á un plano, sin escuadra.

4—Medir ángulos diedros con el baivel.

5—¿Cuál será el complemento de un diedro de 15°?

6—¿Cuál será el suplemento de un diedro de 108°?

7—Colocar dos hojas de papel perpendicularmente.

8—Unir dos hojas de papel de modo que formen cuatro diedros rectos.

9—Si uno de los diedros opuesto por el vértice vale 30° ¿cuánto valdrán los otros tres consecuentes?

10—Averiguar con la plomada si un plano dado es vertical.

11—Averiguar con la plomada y la escuadra si un plano dado es horizontal; después con el nivel de albañil.

12—Colocar una tabla paralela á un plano horizontal.

13—Colocar una tabla paralela á una vertical.

14—Construir con papel grueso ó cartón, un tetraedro, un cubo, un dodecaedro y un icosaedro regulares.

15—Construir de la misma manera, varias pirámides y trozos de pirámides de distinta base, rectas y oblicuas.

16—Construir tres tetraedros de tal manera que formen un prisma triangular, reunidos.

17—Construir un romboedro un romboidedro y un paralelepípedo de base cuadrada.

---

(1) Una hoja de papel doblada.

18—Hallar el área lateral de un prisma triangular cuya base tiene un perímetro de quince metros y por altura doce.

19—¿Cuántos metros cuadrados de papel se necesitan para cubrir las paredes de una sala, cuya longitud es diez metros, cuya latitud es quince y cuya altura es de siete metros?

20—¿Cuántos metros cuadrados de pared tiene una sala, cuyo piso es un exágono regular de cinco metros de lado y la altura seis metros?

21—¿Cuál es el área total de un prisma recto, cuya base es un octógono regular que tiene 24 metros cuadrados de base y cuya altura es de 15 metros?

22—Hallar el área lateral de una pirámide regular, cuya base es un exágono, cuyo lado mide tres metros y la altura de uno de los triángulos es de catorce metros.

23—Hallar la superficie total de los cinco poliedros regulares suponiendo que una arista de cada uno de ellos vale dos metros.

Cuerpos redondos.

93. El cono es un cuerpo limitado por un círculo que le sirve de base y una superficie cónica. (Fig. 318).

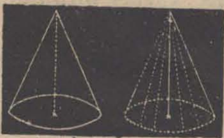

Figura 318.

Puede decirse que un cono es originado por un triángulo rectángulo que gira sobre uno de sus catetos.

94. Altura del cono es la perpendicular bajada desde su vértice hasta la base.

95. Lado del cono es cualquiera

de las rectas que coinciden con la superficie cónica desde el vértice hasta la base.

96. Trozo de cono, es la parte de cono comprendida entre la base y otro plano que corta todos los lados. Si el cono se corta por un plano paralelo á la base, la sección es un círculo. (Fig. 319).

Figura 319.

97. Un cono puede considerarse como una pirámide regular de infinito número de caras, y por la tanto, el área lateral de un cono, es igual á la mitad del producto de su lado por la circunferencia de la base. Para hallar el área total, basta agregar al área lateral el área del círculo que le sirve de base.

98. El área lateral de un trozo de cono de bases paralelas es igual á la mitad del producto de su lado por la suma de las circunferencias de ambas bases. (Fig. 320).

Figura 320.

99. El cilindro es un cuerpo limitado por dos círculos que toman el nombre de bases, y por una superficie cilíndrica. Puede decirse que un cilindro es originado por un rectángulo generador que gira sobre uno de sus lados.

Altura del cilindro es la perpendicular trazada entre ambas bases.

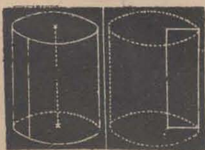

Figura 321.

100. Lado del cilindro es cualquiera de las rectas que coinciden con la superficie cilíndrica desde una á otra base. Fig. (321).

Figura 322.

101. El cilindro

puede considerarse como un prisma regular de infinito número de caras, y por lo tanto, su área lateral será igual al producto del lado por la circunferencia de la base. (Fig. 322).

102. Para encontrar el área total, basta agregar á la lateral la suma de las áreas de los círculos que forman sus bases.

103. La esfera es un cuerpo limitado por una superficie esférica.

104. Todos los puntos de la superficie esférica equidistan de uno interior llamado centro.

Figura 323.

105. Radio de la esfera es toda recta que, partiendo del centro, toca en la superficie esférica. (Fig. 323).

106. Toda sección hecha por un plano en la esfera es un círculo. Si la sección pasa por el centro, se llama círculo máximo. (Fig. 324).

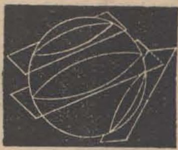

Figura 324.

107. Diámetro de la esfera es toda recta que pasando por el centro, toca en dos puntos de la superficie esférica. (Fig. 325).

108. Cualquier diámetro puede considerarse como eje de la esfera.

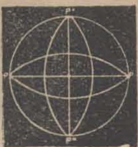

Figura 325.

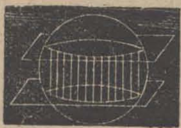

Figura 326.

109. Los extremos del eje se llaman polos.

110. Zona es la parte de esfera comprendida por dos planos paralelos. (Fig. 326).

111. Casquete esférico es una parte de la esfera, que tiene por base un círculo. (Fig. 327).

Figura 327.

112. Sector esférico es la parte de esfera originada por un sector circular que gira sobre uno de sus radios como eje. (Fig. 328).

Figura 328.

113. Para hallar el área de la esfera, los geómetras han encontrado, por largos y difíciles razonamientos, una fórmula parecida á la que ya conocemos para hallar el área de un círculo. Esta fórmula es $4 \pi R^2$ y la del círculo πR^2.

Como nosotros no podemos todavía valernos de los medios que emplean los geómetras para saber estas cosas, emplearemos un medio sencillo que nos dé aproximadamente el mismo resultado.

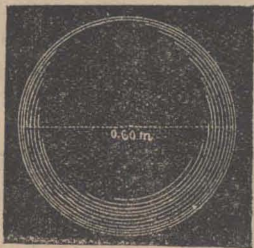

Figura 329.

Tomemos una esfera de madera y midamos su circunferencia máxima y su diámetro. (Fig. 329).

Sea el diámetro seis centímetros, la longitud de la circunferencia diez y ocho centímetros y nueve milímetros ó 18,9. (Fig. 330).

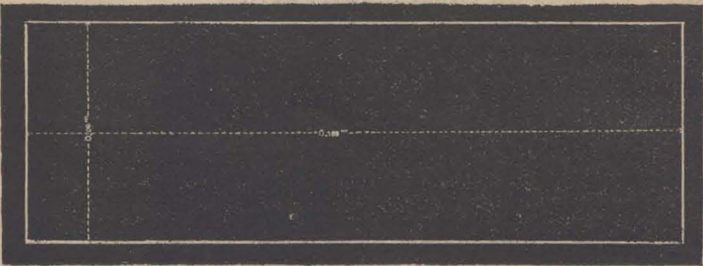

Figura 330.

Construyamos con estas dos medidas un rectángulo de cartón y arrollémoslo hasta formar una superficie cilíndrica que podemos dejar terminada pegando con goma los extremos del cartón ó cosiéndolos, y agregándole dos círculos ó bases para convertirlo en cilindro. (Fig. 331).

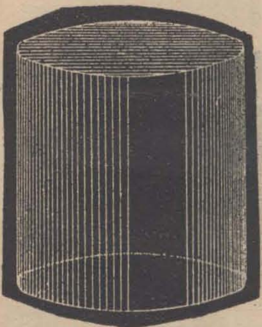

Figura 331.

Este cilindro tendrá por altura el diámetro, ó sea 2 R de la esfera, y por circunferencia de la base, la de un círculo máximo de la esfera ó sea $2 \pi R$.

Si hallamos en números el área lateral del cilindro nos dá 113^{cm} 097312; si hallamos con la fórmula encontrada por los geómetras el área de la esfera, nos dá 113,^{cm}097312, es decir, la misma área para la esfera, que para la superficie lateral de un cilindro que tiene por base un círculo máximo de la esfera y por altura el diámetro de la misma.

Esta relación exacta que hay entre el cilindro y la esfera podrá comprobarse materialmente de una manera aproximada haciendo el siguiente experimento:

Tomemos una esfera y un cilindro que tenga exactamente su diámetro por altura y su círculo máximo por base, y dividida la esfera en dos mitades, arrollemos en uno y otro casquete alternativamente un hilo, como si fueran dos trompos. (Fig. 336).

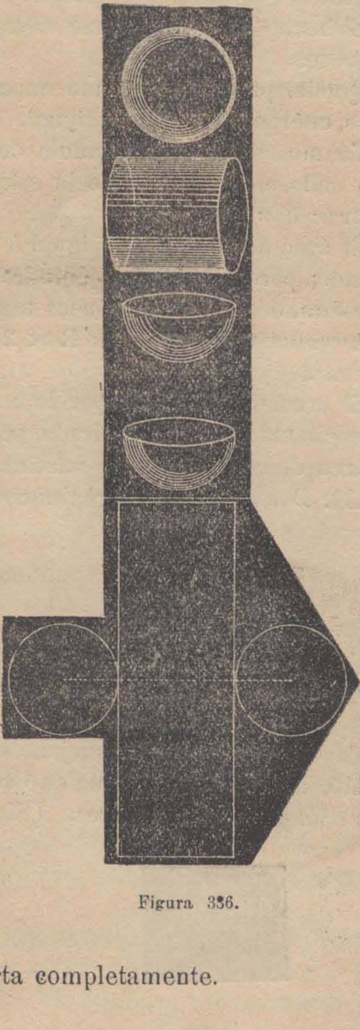

Figura 336.

Con los dos hilos juntos envolvamos después la superficie lateral del cilindro, y veremos que será cubierta completamente.

Esto prueba que ambas superficies, la de la esfera y la lateral del cilindro, son iguales.

El hecho puede repetirse siempre con otras esferas y cilindros.

Queda, pues, demostrado experimentalmente, que dichos cuerpos tienen área igual.

Veamos ahora si la fórmula del área lateral del cilindro dado, es igual á la de la esfera, hallada por los geómetras: $4 \pi R^2$ es ésta.

El área del cilindro es igual á $2 \pi R$ multiplicado por el lado; pero el lado del cilindro es igual al diámetro de la esfera, ó sea $2 R$; entónces tenemos:

Area del cilindro $= 2 \pi R \times 2 R$ ó lo que es lo mismo: $4 \pi R^2$.

El área de la esfera, por lo tanto, es igual á su circunferencia máxima multiplicada por el diámetro, ó también al área de cuatro círculos máximos.

114. Dos esferas son iguales cuando sus radios lo son.

Figura 337.

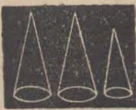

Figura 338.

Todas las esferas son semejantes. (Fig. 337).

115. Dos conos son iguales ó semejantes, cuando lo son sus triángulos generadores. (Fig. 338).

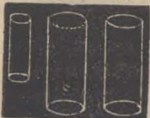

Figura 339.

Figura 340

116. Dos cilindros son iguales ó semejantes, si lo son sus rectángulos generadores. (Fig. 339).

117. Llámase huso esférico á la porción de superficie esférica comprendida entre dos arcos de círculo máximo que se cortan. (Fig. 340).

Problemas.

---

118. 1--Hallar sobre papel ó cartón el desarrollo de un cono de 10 centímetros de lado, por 8 de diámetro, trazando un sector circular que tenga por arco, aproximadamente, la longitud de la circunferencia de la base.

2—Hallar el desarrollo de un cilindro de 10 centímetros de altura por 8 de diámetro sobre un rectángulo que represente su superficie lateral.

3—Determinar el desarrollo aproximado de una esfera de 5 centímetros de diámetro, valiéndose de husos esféricos pequeños.

4—Encontrar el desarrollo de un trozo de cono, siendo los radios de las bases 5 y 6 centímetros respectivamente y 8 la altura.

5—Hallar el área lateral de un cono de 15 metros de lado y 524 decímetros de circunferencia de la base.

6—Determinar en metros el área de la superficie terrestre.

7—Calcular el área exterior é interior de un tubo de 2 milímetros de espesor, 5 milímetros de radio y dos metros de longitud.

8—Calcular cuantos centímetros cuadrados de papel de oro se necesitarán para cubrir un cono de dos metros de radio en la base y 8 de lado; un cilindro de 3 centímetros de diámetro de base, y 3 centímetros de altura ó lado, y una esfera de un centímetro y medio de radio.

9—Cuántas pizarras de 4 decímetros cuadrados cada una se necesitarán para cubrir una cúpula cónica de 8 metros de radio en la base y doce metros de lado.

10—Un estanque circular tiene por radio en la base del fondo 7 metros, y por radio de la circunferencia de sus bordes 8 metros; su muro en talud tiene 14 metros de largo; ¿cuál será la superficie del muro?

11—¿Cuál será el radio de una esfera cuya superficie vale un metro cuadrado?

12—Una campana de gasómetro tiene 8 metros de diámetro y 6 de altura ¿cuál es la superficie lateral?

13—¿Cuál será la superficie de una cúpula semi-esférica de 12 metros de diámetro?

Volúmenes.

119. Para medir el volumen de los cuerpos se emplea el metro cúbico y los múltiplos y submúltiplos de esta unidad.

120. Si tomamos un centímetro cúbico, es decir, un cubo cuyo lado tenga un centímetro de longitud y dividimos un lado de la base, su longitud, en diez partes iguales, su latitud en otras diez y su altura en otras tantas, y por los puntos de división trazamos planos paralelos respectivamente á la cara del frente, á la de la base y á la de un costado del cubo, éste quedará dividido en mil cubitos de un milímetro de largo, por uno de ancho y otro de alto, ó sean mil milímetros cúbicos (Fig. 341). Para saber, por lo tanto,

Figura 341.

el número de milímetros cúbicos que un centímetro cúbico contiene, hubiera bastado medir la long'tud que son diez milímetros, multiplicar este número por la latitud que son diez milímetros también, y el producto multiplicarlo por los diez milímetros de la altura, y entonces hubiéramos obtenido los mil milímetros cúbicos que contiene un centímentro cúbico, ó sea,

$$10 \times 10 \times 10 = 1000$$

Nota.—Llámase cubo de un número el producto de tomarlo tres veces como factor y se indica así:

$$10^3,\ 5^3, \ldots\ldots R^3$$

121. Supongamos que se trate de medir el volumen de un paralelepípedo formado por tres centímetros cúbicos superpuestos. Deseamos saber el número de milímetros cúbicos que dicho cuerpo tiene. (Fig. 342).

Figura 342.

Evidentemente, los milímetros cúbicos que va á tener el paralelepípedo así formado son 3000, puesto que cada centímetro cúbico vale mil.

Midamos la longitud de la base: tiene 10 milímetros; midamos la latitud de la misma, son diez también; midamos la altura: son 30 milímetros; multipliquemos estas tres cantidades: $10 \times 10 \times 30 = 3000$, es decir que para hallar el volumen de un paralelepípedo de base cuadrada basta multiplicar el área de la base (en este caso 10×10) por la altura.

122. Veamos otro caso más todavía:

Se trata de medir los milímetros cúbicos que tendrá un paralelepípedo formado por varios centímetros cúbicos dispuestos dos á lo largo, uno á lo ancho y tres á lo alto. Como se vé las tres dimensiones longitud, latitud y altura son desiguales. (Fig. 343).

Figura 343

Como cada centímetro cúbico tiene 1000 milímetroscúb icos, el paralelepípedo que hemos formado tendrá evidentemente 6000 milímetros cúbicos.

Si medimos sus dimensiones, la longitud nos dá 20 milímetros, la latitud 10 milímetros y la altura 30, y si multiplicamos entre sí estas tres cantidades, el producto será 6000, ó sea el número de milímetros cúbicos que tiene el paralelepípedo. Diremos, por lo tanto, que el volumen de un paralelepípedo recto y rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones, ó lo que es lo mismo, al producto del área de su base por su altura.

123. Tomemos ahora un paralelepípedo de base rectangular, pero oblicuo, para medir su volumen. Construyamos otro que tenga la misma base y altura, pero que sea recto. Si sumergimos ambos alternativamente en un vaso de agua bien lleno, veremos que ambos desalojan la misma cantidad de líquido lo que prueba que ambos tienen el mismo volumen. (Fig. 344).

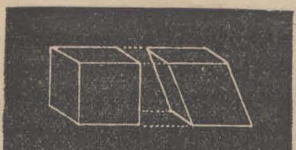

Figura 344.

Lo mismo sucedería si fuesen huecos y los llenásemos de agua; ambos contendrían igual cantidad.

Si repetimos la experiencia con dos prismas cualesquiera en que las alturas sean iguales y las bases equivalentes, el resultado será el mismo. Podemos, pues, decir que para hallar el volumen de un prisma cualquiera se multiplica el área de la base por la altura.

124. Como todo prisma triangular puede descomponerse en tres tetraedros de bases equivalentes y altura igual, podemos decir que el volumen de una pirámide es igual á 1/3 del volumen de un prisma triangular, ó lo que es lo mismo, á 1/3 del producto del área de la base por la altura, puesto que toda pirámide puede descomponerse en tetraedros. (Fig. 345 y 346).


Figuras 345 y 346.

125. Aplicando esto mismo al cono, que se considera como pirámide de infinito número de caras, diremos que su volumen es igual al tercio del producto de la altura por el área del círculo de la base. (Fig. 347).

126. En cuanto al cilindro basta recordar que se considera como un prisma de infinito número de caras y su volumen debe hallarse como el de los prismas, multiplicando el área del círculo de la base por la altura. (Fig. 348).

Figura 347.

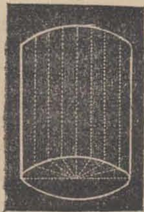

Figura 348.

127. El volumen de un poliedro regular puede considerarse formado por pirámides cuyo vértice está en el

centro y cuya apotema es común, y por lo tanto el volumen total será igual al 1/3 de la apotema multiplicado por el área del poliedro.

128. Pudiendo considerarse la esfera como un poliedro de infinito número de caras, á su vez podrá considerarse su volúmen como el de un poliedro regular, teniendo presente que la superficie de la esfera comprende todas las bases de las pirámides que suponemos con vértice en su centro, y que su apotema común se confunde con el radio.

Ahora bien, llamando R al rádio tendremos la siguiente fórmula:

Area de la superficie esférica $= 1/3 \times R \times 4 \pi R^2 = 4/3 \pi R^3$.

129. El volumen de un poliedro cualquiera es igual á la suma de los tetraedros que lo forman.

Problemas.

130.—1 Hallar el volumen de una pirámide cuya base sea un cuadrado de 287 metros y 1/2 de lado, y la altura 145.

2—Calcular el número de metros cúbicos que puede contener un depósito en forma de paralelepípedo de base cuadrada de 100 metros de lado por 50 de altura.

3—Determinar el volumen de un cono de sal de 15 metros de altura y 12 por radio de su base.

4—Un pozo cilíndrico de un hectómetro de profundidad y 4 metros de diámetro, ¿cuántos litros de agua puede contener?

5—Hallar el volumen del Sol siendo el diámetro de éste 112 veces el de la tierra.

6—¿Cuántos puntos determinan la posición de una esfera?

7—Si un cono, un cilindro y una esfera tienen igual radio, ¿cuál será la altura de los dos primeros para que tengan igual volumen?

ÍNDICE

GEOMETRÍA

Curso de Pedagogía

por D. José M. Torres, Director de la Escuela Normal Nacional del Paraná.

Segunda edición, 3 tomos.

Tomo I—Primeros Elementos de Educación.

Tomo II—El arte de enseñar y la administración de la educación común.

Tomo III—Metodología de la lectura, la escritura y la Aritmética.

Elementos de Moral

por el Dr. Calixto Oyuela.

Tratando: de la moral en general; objeto, fundamento y sanción de la moral. La conciencia, el bien y el mal, el vicio y la virtud. Deberes individuales: virtudes y vicios principales; deberes sociales, deberes religiosos.

Curso Sumario de Moral

por el Doctor Félix Martini y Herrera.

(Lecciones dadas en la Escuela Normal de Profesores de la Capital).

Nueva edición.

Curso de Geografía

por Ernesto A. Bavio, Director General de Escuelas de la Provincia de Entre Ríos.

Arreglado para uso de las Escuelas de la República Argentina, tratando extensamente la geografía de este país; 3.ª edición, corregida, con 28 mapas en colores.

Nociones de Geografía

por Ernesto A. Bavio.

Arreglados al Plan de Estudios de las Escuelas Comunes.

(Sirve para tercero, cuarto, quinto y sexto grado).

Cuarta edicion.

El Polígrafo Argentino

Mosáico de escrituras por Andrés Ferreira, Inspector de Instrucción Primaria, y Eleodoro Suarez, Vice-Director de la Escuela Nacional de Comercio.

Este nuevo Mosáico, además de tener un texto interesante y adecuado para los niños, contiene más de 70 grabados intercalados en el texto.

Un tomo de 183 páginas, cartonado.

Política Doméstica y Educación, Libro de Lectura

por D. José M. Torres.

Como lo indica la «Advertencia» del autor: «Puede servir en« tre los que se usan para la práctica de la lectura, en las fami« lias, en las Escuelas Normales de Maestras y en las clases « superiores de las Escuelas Comunes de niñas. Describe los ele« mentos constitutivos de la familia bien organizada y dirijida; « explica las consecuencias de la vida doméstica según sea irre« gular y viciosa, ó regulada y moral—y contiene también otros « asuntos, relativos casi todos ellos, á la educación de la mujer».

Su contenido es el siguiente: La constitución de la familia; la reina del hogar; la autoridad en la familia; el amor conyugal; conducta de la mujer en el matrimonio; situación de la recien casada joven; influencia de la madre para con su hija casada; la autoridad paterna; el respecto filial; la unión doméstica; el amor fraternal; la cortesanía en la familia; las dificultades de la vida doméstica; una joven perezosa; una joven envidiosa; los casamientos intempestivos; la mujer ostentadora de su virtud; la mujer dominante; la mujer iracunda; la mujer madura que pretende ser joven; el despotismo femenino; la guerra doméstica; los abusos del lujo; el servicio doméstico; acción que la familia, el estado y los maestros tienen en la educación; los primeros deberes y derechos de los padres; cómo debe iniciar la madre á sus hijos en el conocimiento de lo que debemos á nuestros semejantes; primeras páginas de la memoria de una madre; la educación moral de las niñas; influencia de la madre para con sus hijos varones; una madre discreta; el desórden y el exceso de orden en el hogar doméstico; la fraternidad en la familia; la mejor cualidad de una joven; los adornos femeninos; la hermosura femenina; consulta epistolar sobre la educación de una joven; últimas páginas de las memorias de una madre.

Aritmética Práctica

por Tebaldo J. Ricaldoni, Ingeniero Civil, Profesor de Matemáticas en el Colegio Nacional de la Capital.

Tratado elemental, ajustado al Programa de los Colegios Nacionales de la República.

Aritmética Razonada

por Tebaldo J. Ricaldoni, Ingeniero Civil, Profesor de Matemáticas en el Colegio Nacional de la Capital.

Tratado Elemental, arreglado al Programa

Historia Americana (Apuntes de)

por el Dr. Carlos Navarro Lamarca, Catedrático en el Colegio Nacional de la Capital.

Texto arreglado al Programa de los Colegios Nacionales de la República.

Un tomo de 574 páginas, cartonado.

Historia Antigua (Compendio de)

por el Abate Drioux.

Modificada y adaptada al Programa de los Colegios Nacionales de la República, por el Dr. Enrique B. Prack, Profesor de Historia en el Colegio Nacional de la Capital.

Un tomo de 474 páginas, cartonado.

Historia de la Edad Media (Compendio de)

por el Abate Drioux.

Modificada y adaptada al Programa de los Colegios Nacionales de la República, por el Dr. Enrique B. Prack, Profesor de Historia en el Colegio Nacional de la Capital.

Un tomo de 324 páginas.

Lecturas Morales é Instructivas

coleccionadas y dispuestas para el uso de las Escuelas Comunes de la República, por el Profesor José J. Berutti.

Tèxto aprobado por el Colegio Nacional de Educación.

Historia Moderna (Compendio de)

por el Abate Drioux.

Modificada y adaptada al Programa de los Colegios Nacionales de la República, por el Dr. Enrique B. Prack, Profesor de Historia en el Colegio Nacional de la Capital.

Un tomo de 235 páginas.

Filosofía (Curso Elemental de)

por Emilio Boirac.

Traducida de la última edición francesa y adaptada al Programa de los Colegios Nacionales, por el Dr. Santiago Hechart, ex-Profesor de Filosofía en el Colegio Nacional de la Capital.

Primeras Lecciones de Aritmética mental y escrita

Método Objetivo, de Robinson.

Arregladas para el uso de las escuelas de la República Argentina, por J. M. Grita.

Literatura Castellana (Trozos Escogidos)

por el Dr. Calixto Oyuela, Ex-Catedrático de Literatura en el Colegio Nacional de la Capital, y de Filosofía en la Escuela Nacional de Profesores.

Colección de trozos escogidos de los mejores autores de España y América (desde el siglo XII hasta nuestros días), 5 tomos.

Tomo	I.	Prosa.	Autores del siglo XII al XVIII.
Id	II.	id	id id id XIX
Id	III.	Verso.	Autores españoles, siglo XII al XVIII.
Id	IV.	id	id id id XIX.
Id	V.	id	id Americanos.

Se venden por colección y por tomos separados.

El Colegio Nacional de Educación ha aprobado los tomos 2.°, 4.° y 5.° como libro de lectura para las Escuelas Comunes.