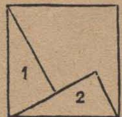
GEOMETRIA EXPERIMENTAL

PRÁCTICO-RAZONADA

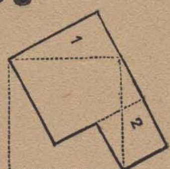
POR

RICARDO CAMARGO

Profesor de matemáticas



Cuadrado de la hipotenusa



Suma de los cuadrados de los catetos

BUENOS AIRES

1889

PRÓLOGO

¿ Es posible y práctico el empleo de un procedimiento breve, graduado y sencillo por el cual pueda descubrirse con claridad el mayor número de verdades geométricas útiles, que interesen la comprension inexperta de la niñez, « esencialmente apasionada por lo concreto », materializando en lo posible las relaciones de magnitud y forma, AUN SACRIFICANDO EN PARTE LA GENERALIZACION ABSTRACTA DE LA GEOMETRÍA PURA, CUYAS VERDADES SANCIONARÁ MÁS TARDE CON SU ESTRECHA LÓGICA DE RACIOCINIO, *ante las exigencias de la enseñanza gradual-educativa y de las numerosas aplicaciones sencillas ?*

Ésta ha sido la idea que ha perseguido el autor de este modesto librito, quien tiene hoy el honor de ofrecerlo para uso de las escuelas de primera enseñanza, no sin la consulta previa de las varias obritas modernas que tratan la materia con igual objeto, aunque no en la misma forma de exposicion, y sin más mérito que la aspiracion de contribuir con su humilde contingente á vulgarizar los conocimientos útiles, en beneficio de la educacion popular.

En nombre, pues, de la causa sagrada de la Educacion y bajo el amparo de la reconocida benevolencia de los señores Profesores, así como de las personas interesadas por la difusion de la verdad científica, no sólo solicita el autor quieran prestarle su acostumbrada cooperacion, sino que, confiado en su ilustrado criterio, ruega se sirvan hacerle saber las observaciones y correcciones que les sugiera la práctica de la enseñanza, más bien, como un refuerzo poderoso que dará verdadero mérito á la presente obrita, en su segunda edicion.

El Autor.

ADVERTENCIAS Á LOS SEÑORES PROFESORES

1.ª Hacemos presente á los señores Profesores que nos honren con la adopcion de la presente obrita, pueden ampliar á voluntad todas aquellas cuestiones que á su juicio crean convenientes, así como tambien suprimir las que consideren deban reservarse para una segunda lectura.

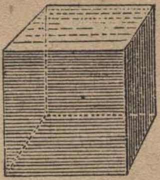
2.ª En las explicaciones y demostraciones hechas con figuras materiales, éstas deben dibujarse al mismo tiempo en el pizarron.

GEOMETRÍA EXPERIMENTAL

PRÁCTICO-RAZONADA

DEL CUBO

1. Este cuerpo sólido, que supondremos construido de



(Fig. 1)

madera, tiene la forma de un dado. Se llama *cubo* (Fig. 1).

Téngase uno á la vista. (Puede elegirse un decímetro cúbico.)

El cubo está terminado por caras. Los bordes de estas caras se llaman *aristas.*

Tiene ocho puntas, que se llaman *ángulos sólidos.*

Base del cubo es la cara inferior sobre la cual descansa el cubo.

Altura es una arista lateral que va de arriba abajo.

2. EJERCICIOS — Háganse ejercicios análogos á los siguientes:

1. Dígase cuántas caras tiene el cubo. Cuántas aristas? Cuántos ángulos sólidos?

. Hágase descansar el cubo sobre cada una de sus caras. Cuál será la base?

3. Cuál será la altura? Cuántas bases puede tener el cubo?

CUADRADO

3. Dibújese en el pizarron una cara del cubo. Se llama *cuadrado.*

A las caras que limitan los cuerpos se llaman superficies. El cuadrado es una superficie.

Tiene cuatro lados iguales. Tiene cuatro esquinas de igual abertura, que se llaman *ángulos rectos.*

Hay cubos unos mayores que otros. Hay cuadrados unos mayores que otros.

LÍNEA RECTA

4. Dibújense en el pizarron dos lados del cuadrado que formen *ángulo recto.*

Se llaman *líneas rectas.*

El sitio ó *punto* donde se juntan los dos lados, se llama *vértice del ángulo.*

5. Ejercicios — Háganse ejercicios variados; por ejemplo:

4. Dibújese en el pizarron un ángulo recto. Señálense los lados y el vértice.

5. Dibújese un cuadrado. Cuántos ángulos rectos tiene? Cuántos lados? Cuántos vértices?

6. Qué son superficies? El cuadrado es superficie ó sólido?

7. Cuántos ángulos rectos hay en todas las caras del cubo?

8. Dibújese un cubo en el pizarron. Dibújense dos cubos iguales. Dos desiguales.

UNIDADES GEOMÉTRICAS

6. La *línea recta,* limitada, es la unidad que sirve

para medir distancias, longitudes, etc., como el largo de un camino, la altura de una torre, de un árbol, el grueso de una pared, etc.

7. El *cuadrado* es la unidad que sirve para medir superficies, como las plantas de los edificios, los lienzos de las paredes, los pisos de los aposentos, terrenos, etc.

8. El *cubo* es la unidad que sirve para medir volúmenes, capacidades, contenidos, etc., como la capacidad de un recipiente, de un estanque, etc.

OBJETO DE LA GEOMETRÍA

9. La Geometría tiene por principal objeto, medir las líneas, las superficies y los volúmenes, y estudiar sus relaciones y propiedades.

DIVISION DE LA GEOMETRÍA

10. La Geometría consta de dos partes: plana y en el espacio.

Geometría plana es la que estudia las figuras planas ó representadas en un plano, como el *cuadrado.*

Geometría en el espacio es la que estudia las figuras cuyos elementos no están todos en un mismo plano, como el *cubo.*

GEOMETRÍA PLANA

11. *Extension* es el espacio que ocupa un cuerpo.

12. *Las dimensiones* de un cuerpo son siempre tres: *largo, ancho* y *grueso, altura* ó *profundidad.*

A esta última dimension se le dá el nombre de altura, profundidad ó grueso, segun el objeto; altura, si se refiere á un edificio, torre, árbol, cuchilla, etc.; profundidad, si se trata de un pozo, estanque, rio, etc., y grueso, el de un libro, una madera, una piedra, un ladrillo, etc.

13. *Superficies* son las caras ó límites de los cuerpos.

Tienen sólo dos dimensiones: *largo* y *ancho.*

14. *Plano* ó *superficie plana* es aquella á la cual puede aplicarse una recta en todos sentidos.

El sobre de una mesa, el plano de la pizarra, la superficie de un tablero, etc., son superficies planas.

15. *Superficie curva* es la que no es plana ni compuesta de superficies planas.

No puede aplicarse una recta en todos sentidos. La parte exterior de un vaso, de un embudo, de un globo, etc., son superficies curvas.

16. Ejercicios — Háganse ejercicios variados; por ejemplo:

9. Muéstrese la superficie de la pared. Porqué es plana?
10. Pónganse algunos ejemplos de superficies planas y curvas.
11. Indíquense las tres dimensiones de un aposento.
12. Cuáles serían las dimensiones de un estanque? de un pozo?
13. Cuáles son las tres dimensiones de un ladrillo? de un libro?
14. Qué clase de superficie es la de una bola de billar?

LÍNEAS

17. *Línea* es lo que constituye el largo de un objeto.


(Fig. 2)


(Fig. 3)


(Fig. 4)

18. *Línea recta* es la que indica una direccion fija sin desviarse ni torcerse.

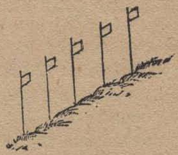
Un hilo bien tirante representa una recta (Fig. 2).

19. *Línea curva* (Fig. 3) es la que señala una direccion desviada continuamente.

Un hilo suelto, un arco de un barril, etc., representan líneas curvas.

20. *Línea quebrada* es la que está compuesta de rectas (Fig. 4).


(Fig. 5)


(Fig. 6)

21. *Línea mixta* es la que se compone de recta y curva (Fig. 5).

22. *Punto* es el sitio donde empieza ó termina una línea, ó donde se cortan dos líneas.

Es la menor señal que con la punta de un lápiz ó pluma puede hacerse sobre el papel.

La línea recta es la figura más comun en la práctica. Las aristas de los muebles, los bordes de las hojas de un libro, las aristas de las reglas, etc., son ejemplos de líneas rectas.

Para trazar una recta sobre el papel, nos valemos de la regla y un lápiz ó pluma.

Los aserradores y pintores trazan una recta aplicando sobre la madera ó pared, una cuerdita impregnada de polvos de carbon ú otra materia colorante, que poniéndola tirante y pinzándola en el medio, se estampa de un lado y otro.

Los ingenieros y agrimensores, para señalar una recta sobre el terreno, se limitan á marcar un cierto número de puntos en una misma direccion con bastones de madera, que llaman *jalones* (Fig. 6).

Los jardineros, para trazar calles, se limitan á tender un cordel entre dos estacas. El albañil, para poderse guiar en la construccion de una pared, tiende tambien una cuerda sujeta á dos clavos fijos.

23. Ejercicios — Háganse variados; por ejemplo:

15. Represéntese con un hilo una recta, una curva, una quebrada.

16. Señálense dos puntos en el pizarron. Únanse por una recta, luego por una curva. Cuál es más corta?

17. Únanse dos puntos por una recta, luego por una quebrada. Cuál es más corta?

24. *Verdad evidente.* — La recta señala el camino más corto entre dos puntos.

18. Trácense dos rectas: una doble que la otra.

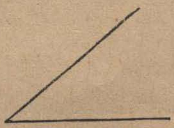
19. Dibújese una recta dividida en dos partes iguales; en cuatro; en ocho; cuánto es una parte comparada con el todo?

20. Dibújese una recta; divídase en tres partes, luego en seis.

21. Divídase una recta en dos partes tales que una sea doble de la otra.

ÁNGULOS

25. *Ángulo* es la abertura que forman dos rectas que parten de un punto (Fig. 7).



(Fig. 7)

(Fig. 8)

Dibújese un ángulo. El punto se llama vértice, y las rectas, lados.

Ángulos iguales son los que tienen la misma abertura.

De dos ángulos desiguales, el mayor es el que tiene más abertura.

26. *Bisectriz* de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.

27. *Perpendiculares* son dos rectas que, al cortarse, forman cuatro ángulos iguales.

Los ángulos son rectos (Fig. 8).

Tómese una cuartilla de papel, dóblese en dos iguales, el doblez formará una recta; dóblese de nuevo, de modo que la recta se superponga, y quedará formado un ángulo recto. Desdóblese luego el papel y tendremos señaladas dos perpendiculares con cuatro ángulos rectos.

28. *Oblícuas* son dos rectas que al cortarse forman cuatro ángulos, iguales dos á dos, solamente. Los ángulos iguales se llaman *opuestos por el vértice,* es

22. *Punto* es el sitio donde empieza ó termina una línea, ó donde se cortan dos líneas.

Es la menor señal que con la punta de un lápiz ó pluma puede hacerse sobre el papel.

La línea recta es la figura más comun en la práctica. Las aristas de los muebles, los bordes de las hojas de un libro, las aristas de las reglas, etc., son ejemplos de líneas rectas.

Para trazar una recta sobre el papel, nos valemos de la regla y un lápiz ó pluma.

Los aserradores y pintores trazan una recta aplicando sobre la madera ó pared, una cuerdita impregnada de polvos de carbon ú otra materia colorante, que poniéndola tirante y pinzándola en el medio, se estampa de un lado y otro.

Los ingenieros y agrimensores, para señalar una recta sobre el terreno, se limitan á marcar un cierto número de puntos en una misma direccion con bastones de madera, que llaman *jalones* (Fig. 6).

Los jardineros, para trazar calles, se limitan á tender un cordel entre dos estacas. El albañil, para poderse guiar en la construccion de una pared, tiende tambien una cuerda sujeta á dos clavos fijos.

23. Ejercicios — Háganse variados; por ejemplo:

15. Represéntese con un hilo una recta, una curva, una quebrada.

16. Señálense dos puntos en el pizarron. Únanse por una recta, luego por una curva. Cuál es más corta?

17. Únanse dos puntos por una recta, luego por una quebrada. Cuál es más corta?

24. *Verdad evidente.* — La recta señala el camino más corto entre dos puntos.

18. Trácense dos rectas: una doble que la otra.

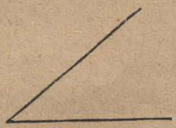
19. Dibújese una recta dividida en dos partes iguales; en cuatro; en ocho; cuánto es una parte comparada con el todo?

20. Dibújese una recta; divídase en tres partes, luego en seis.

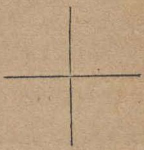
21. Divídase una recta en dos partes tales que una sea doble de la otra.

ÁNGULOS

25. *Ángulo* es la abertura que forman dos rectas que parten de un punto (Fig. 7).



(Fig. 7)



(Fig. 8)

Dibújese un ángulo. El punto se llama vértice, y las rectas, lados.

Ángulos iguales son los que tienen la misma abertura.

De dos ángulos desiguales, el mayor es el que tiene más abertura.

26. *Bisectriz* de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.

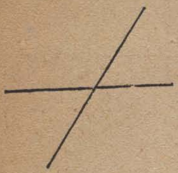
27. *Perpendiculares* son dos rectas que, al cortarse, forman cuatro ángulos iguales.

Los ángulos son rectos (Fig. 8).

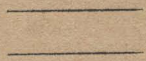
Tómese una cuartilla de papel, dóblese en dos iguales, el doblez formará una recta; dóblese de nuevo, de modo que la recta se superponga, y quedará formado un ángulo recto. Desdóblese luego el papel y tendremos señaladas dos perpendiculares con cuatro ángulos rectos.

28. *Oblícuas* son dos rectas que al cortarse forman cuatro ángulos, iguales dos á dos, solamente. Los ángulos iguales se llaman *opuestos por el vértice,* es

decir, que los lados del uno son prolongaciones de los lados del otro (Fig. 9).



(Fig. 9)



(Fig. 10)

(Fig. 11)

Muéstrese con un papel que son iguales.

De los cuatro ángulos, los dos de menor abertura que un recto, se llaman *agudos*, y los otros dos *obtusos*.

Un ejemplo de los ángulos lo tenemos en el cuadrante de un reloj. Cuando señala la una, el ángulo de las dos agujas es agudo ; cuando dan las tres, es recto, y cuando dan las cinco, es obtuso.

29. *Líneas paralelas* son dos rectas que siguiendo la misma direccion siempre están equidistantes en toda su extension (Fig. 10).

El uso de las paralelas es muy comun ; por ejemplo : en la construccion de puertas, persianas, etc. ; en la disposicion de las piedras labradas ; en las hiladas de ladrillos en los edificios ; en los hierros de una verja ó de una baranda ; en la disposicion de los rieles en los caminos de hierro, tranvías, etc. Los calígrafos, dibujantes, etc., se sirven de las paralelas para el rayado de las cuadrículas, etc.

30. *Línea vertical*, es la señalada por la direccion de un hilo que suspende un cuerpo pesado (Fig. 11).

De este aparato, que llaman plomada, hace mucho uso el albañil para construir las paredes bien derechas, ó dicho con propiedad, *verticales*.

Una piedra abandonada á sí misma describe al caer una línea vertical; los hierros de la barandilla de un balcon, las esquinas de los edificios, etc., tienen la posicion vertical.

31. *Línea horizontal* es la que se considera como co-

(Fig. 12)

(Fig. 13)

locada sobre la superficie del agua tranquila (Fig. 12). Es perpendicular á la vertical. La línea que parece trazar el horizonte del mar, el pasamano de un balcon, las cornisas de los edificios, las hiladas de ladrillos en una pared bien construida, son líneas horizontales.

32. *Línea inclinada* se llama á la que no es vertical ni horizontal (Fig. 13).

33. Ejercicios — Háganse algunos, análogos á los siguientes:

22. Dibújense un ángulo recto, un agudo, un obtuso. Dése su definicion.

23. Cómo se llaman las dos líneas que forman el ángulo? y el punto de interseccion?

24. Dibújese una línea inclinada y córtese por una perpendicular.

25. Trácense dos paralelas cortadas por una perpendicular; cuántos ángulos forman?

26. Qué clase de ángulos son?

27. Trácense dos paralelas cortadas por una oblícua; qué clase de ángulos se han formado? cuántos hay agudos? cuántos hay obtusos?

28. Trácense dos líneas no equidistantes: son paralelas?

29. Dibújese un ángulo recto. Trácese la bisectriz. Qué es bisectriz?

30. Tómese un ángulo de papel y dóblese formando dos ángulos iguales: cuál es la bisectriz?

31. Dibújese un ángulo agudo y otro obtuso. Divídase cada ángulo en dos iguales.

resbalar la escuadra á lo largo de la regla hasta que el borde de la escuadra pase por el punto dado *A*. La recta trazada sobre este borde será la paralela pedida.

La recta que podría trazarse á lo largo de la regla se llama *secante*; y los ángulos iguales señalados con un punto que son los mismos que uno de los de la escuadra, se llaman *correspondientes*.

42. Ejercicio — Repítase el mismo ejercicio, valiéndose de la regla y la escuadra, de modo que todos los ángulos sean rectos.

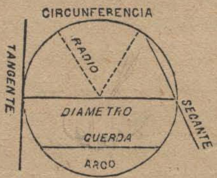
Dése una definicion de ángulos correspondientes.

43. *Verdades geométricas comprobadas* — Una perpendicular á una recta lo es á su paralela. Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas. Los ángulos correspondientes son iguales.

CIRCUNFERENCIA

44. Si apoyamos sobre un pizarron ó papel una de las puntas de un compás, y girando á su alrededor hacemos deslizar la otra punta, ésta trazará sobre el plano una línea redonda llamada *circunferencia*.

45. *Circunferencia* es una línea curva, cerrada, pla-



(Fig. 19)

na, cuyos puntos distan todos de uno interior, llamado *centro* (Fig. 19).

Para trazar una circunferencia sobre el terreno se clava una estaca en el centro; unida á la estaca se tiende un cordel de una longitud igual al rádio, y dando vuelta alrededor del centro, con el otro extremo se va señalando la curva hasta llegar al punto de partida.

Arco es toda porcion de circunferencia.

Círculo es la superficie que encierra la circunferencia.

Rádio es la recta que va del centro á la circunferencia.

Cuerda es la recta que une dos puntos de la circunferencia.

Diámetro es una cuerda que pasa por el centro.

Secante es una cuerda prolongada por ambos extremos.

Tangente es una recta ilimitada que toca en un solo punto de la circunferencia.

Este punto se llama *punto de contacto.*

46. Dos circunferencias son *concéntricas* cuando tienen el mismo centro; *excéntricas* si no tienen el mismo centro.

Una piedra que cae sobre el agua tranquila de un estanque ó de un lago, forma una multitud de circunferencias concéntricas.

47. EJERCICIOS — Háganse ejercicios variados; ejemplos:

32. Trácese una circunferencia y varios rádios, diámetros, cuerdas, secantes y tangentes. Porqué todos los rádios son iguales?

33. Un diámetro cuántos rádios vale? Porqué todos los diámetros son iguales?

34. Cómo divide un diámetro á la circunferencia y al círculo?

35. Trácense varias cuerdas paralelas. Dígase si acercándose ó separándose del centro son mayores ó menores las cuerdas y los arcos.

36. Cuál es la mayor cuerda? Puede ser una cuerda mayor que un diámetro?

37. Trácense á partir de un punto de la circunferencia varias secantes.

38. Tírese un rádio á ese punto. Cuándo la secante se convertirá en tangente?

39. Qué ángulo formará la tangente con el rádio?

MEDIDA DE LOS ÁNGULOS

48. *Sector* se llama á la porcion de círculo comprendida entre dos rádios y el arco.

Trácense en un círculo dos diámetros perpendiculares; quedará dividido el círculo en cuatro sectores iguales. Corresponde á cuatro ángulos rectos.

Tómese un círculo de papel y dóblese en dos semicírculos; dóblese de nuevo y quedarán los cuatro *cuadrantes* confundidos en uno solo.

Si cada sector se divide en nueve partes iguales, el círculo quedará dividido en treinta y seis *sectores-ángulos* iguales. Hágase el dibujo en el pizarron.

49. Los geómetras han convenido en dividir á todo círculo en 360 *sectores-ángulos* iguales. Cada sector es de un *grado*. El ángulo es de un grado. El ángulo de un grado es la unidad para medir todos los ángulos.

Un ángulo recto corresponde á un sector recto y vale 90 grados. Dos ángulos rectos valen 180 grados. Cuatro ángulos rectos valen 360 grados.

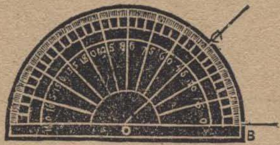
Cada grado se le supone dividido en 60 partes iguales que se llaman *minutos*, y cada minuto en 60 partes iguales llamadas *segundos*.

Los grados se indican con el signo (°), los minutos con el signo ('), y los segundos con el signo ('').

Así 18 grados, 25 minutos y 13 segundos, se escribe de este modo: 18° 25' 13''.

50. Para medir ángulos se emplea un semicírculo graduado llamado *trasportador*. Tiene 180 divisiones,

que corresponden á 180 sectores-ángulos de un grado (Fig. 20).



(Fig. 20)

Para ello se coloca el centro O del instrumento en el vértice del ángulo $C\ O\ E$ y su diámetro sobre uno de los lados, luego se lée sobre el borde del trasportador la division por la cual pasa el otro lado del ángulo.

Para la medida de los ángulos en el terreno se usa cierta clase de instrumentos de metal colocados sobre un trípode. Su parte esencial se compone de un eje vertical al cual está fijo un círculo horizontal graduado y un anteojo para dirigir visuales. Los más usados son el grafómetro y el teodolito.

PROBLEMAS GRÁFICOS

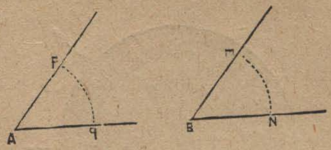
51. Resuélvanse los siguientes problemas:

1.° Trazar varias rectas que pasen por un punto dado.

2.° Trazar varias rectas que pasen por dos puntos dados. Cuántas podrán pasar?

52. *Problema* — Construir un ángulo igual á otro dado (Fig. 21).

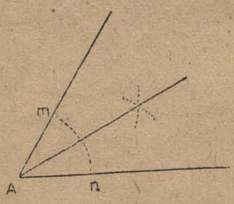
Sea A el ángulo dado. Trazando con un rádio cualquiera el arco $p\ q$, y luego con el mismo rádio desde el punto B de una recta cualquiera otro arco indefinido *m n*, igual al anterior, y por último, trazando la recta *B m*, tendremos el ángulo que se pide.



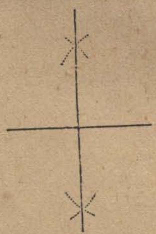
(Fig. 21)

53. *Problema* — Dado un ángulo trazar su bisectriz. (Fig 22).

Se traza desde el vértice *A*, con un rádio cualquiera



(Fig. 22)



(Fig. 23)

un arco, *m n;* con un mismo rádio, mayor que la mitad de la distancia *m n*, y haciendo centro en dichos puntos se trazan dos arcos cuya interseccion fijará la direccion de la bisectriz.

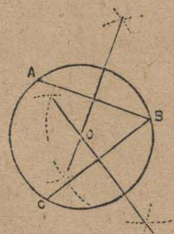
54. *Problema* — Dividir una recta en dos partes iguales, ó levantar una perpendicular en su punto medio (Fig. 23).

Haciendo centro en los extremos y con un mismo rádio mayor que la mitad de la recta, se trazan dos arcos por la parte superior é inferior, y la recta que une los puntos de interseccion resuelve el problema.

55. *Problema* — Dados tres puntos *A B C*, que no estén en línea recta, trazar por ellos una circunferencia (Fig. 24).

Unidos estos puntos por rectas, la interseccion *O* de las perpendiculares á estas rectas, levantadas en su punto medio será el centro de la circunferencia pedida.

56. *Problema* — Dividir una recta dada, *A B*, en un número de partes iguales; por ejemplo, en 5 (Fig. 25). Desde un extremo *A* de la recta se traza otra que forme un ángulo cualquiera con la primera. Con el compás se cuentan cinco divisiones iguales. Se une la última division con el otro extremo *B* y luego se trazan paralelas por las demás divisiones.



(Fig. 24)

(Fig. 25)

57. *Problema* — Dividir un ángulo en un número de partes iguales con el trasportador.

Para dividir un ángulo en tres partes iguales, por ejemplo, se mide el ángulo dado. Divídase despues en tres partes iguales el número de grados interceptados por sus lados, y por último, se trazan rádios á los puntos de division.

58. Ejercicios:

40. Trácese una circunferencia, y divídase el círculo en cuatro sectores iguales.

41. Qué clase de ángulos determinan? De cuántos grados son cada uno?

42. Divídase un círculo en ocho sectores iguales; cuánto vale un ángulo de cada sector? Cuánto valen todos juntos?

43. El disco circular de un reloj está dividido en sesenta partes iguales; de cuántos grados es cada division?

44. Divídase un círculo en tres sectores iguales. Cuántos grados vale cada ángulo?

45. Cuánto vale la suma de los ángulos formados alrededor de un punto?

46. Divídase un semicírculo en tres sectores desiguales; cuánto vale la suma de los tres ángulos?

47. Si dos de los ángulos valen 40° y 65°, cuánto valdrá el tercero?

48. Si son iguales los tres, cuánto vale cada uno?

49. Dos ángulos valen 43° cada uno: cuánto vale el tercero?

50. Uno de los ángulos es recto, otro vale 36° 30': cuánto vale el tercero?

59. *Suplementarios* son dos ángulos que juntos valen dos rectos ó 180°.

60. *Complementarios* son dos ángulos que juntos valen un recto ó 90°.

51. Cuál es el suplemento de un ángulo de 70° 30', de otro de 30° 20'; de 110° 20'?

52. Cuál es el complemento de un ángulo de 45° 23'; de 30° 15' de 73°, de 15° 43'?

TRIÁNGULOS

61. *Polígono* es una figura cerrada por líneas rectas.

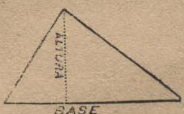
El más sencillo es el *triángulo* (Fig. 26).

62. *Triángulo* es el polígono de tres lados. Tiene tres ángulos; luego tres vértices.

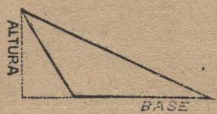
Base es el lado sobre el cual parece descansar el triángulo.

Cualquier lado puede ser base.

Altura es la perpendicular trazada desde el vértice opuesto á la base á la misma base, ó á su prolongacion (Figs. 26 y 27).



(Fig. 26)



(Fig. 27)

63. *Diferentes clases de triángulos.*

Con relacion á sus lados es:

Escaleno, si tiene sus tres lados desiguales (Figs. 26 y 27).

Isósceles, si tiene dos lados iguales.

Equilátero, si tiene los tres lados iguales.

Con relacion á sus ángulos es:

Acutángulo, si tiene sus tres ángulos agudos (Fig. 26).

Obtusángulo, si tiene un ángulo obtuso (Fig. 27).

Rectángulo, si tiene un ángulo recto.

En el triángulo rectángulo los dos lados perpendiculares se llaman *catetos*.

El tercer lado se llama *hipotenusa*.

Los triángulos tienen una aplicacion importantísima en la medicion de superficies, medicion de alturas y líneas inaccesibles, levantamiento de planos, sin contar con otras muchas aplicaciones en las demás ciencias, artes é industrias.

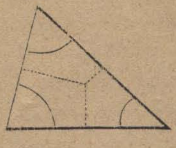
64. Ejercicios:

53. Dibújese en el pizarron un triángulo acutángulo, otro rectángulo, otro obtusángulo. Trácense en cada uno de ellos sus tres alturas.

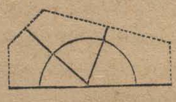
54. Dibújese un triángulo isósceles, un triángulo escaleno, un triángulo equilátero. Un triángulo escaleno acutángulo; escaleno rectángulo; escaleno obtusángulo; isósceles rectángulo; isósceles acutángulo; isósceles obtusángulo.

65. *Suma de los tres ángulos de cualquier triángulo*— Tómese un triángulo cualquiera de papel ó carton. Con una misma abertura de compás y haciendo centro en cada vértice tracemos un arco en cada ángulo. Cortemos el triángulo en tres partes, de modo que queden separados los tres ángulos (Fig. 28).

Juntemos los tres vértices y resultarán tres sectores ángulos que forman un semicírculo completo ó 180° (Fig 29).



(Fig. 28)



(Fig. 29)

66. *Verdad comprobada* — La suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera, vale dos rectos ó 180°.

PROBLEMAS GRÁFICOS

67. *Problema — Construir un triángulo rectángulo.* Se construye con la regla y escuadra un ángulo recto; á cada lado se le dá cualquier longitud, y luego se traza la hipotenusa.

68. *Problema — Construir sobre una recta dada un triángulo equilátero.*

Haciendo centro con el compás en cada extremo de la recta y con un rádio igual á la misma, trácense dos arcos que se corten. Únase por último el punto de interseccion con los extremos de la recta.

69. *Verdad evidente—Dos figuras son iguales cuando superpuestas se confunden exactamente.*

70. *Problema — Construir un triángulo rectángulo isósceles.*

Fórmese con la regla y la escuadra un ángulo recto; con el compás dénse á los dos catetos la misma dimension y únanse sus extremos por una recta.

Constrúyase de papel un cuadrado y dóblese formando dos triángulos isósceles iguales. Los ángulos agudos son iguales. Cuánto vale cada ángulo agudo ?

71. *Problema — Construir un triángulo isósceles cualquiera.* Se traza la recta que sirve de base, y haciendo centro en sus dos extremos, con una misma abertura de compás, trácense dos arcos que se corten y quedará determinado el vértice.

Constrúyase de papel y dóblese formando dos triángulos rectángulos iguales.

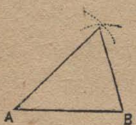
CASOS DE IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

72. *Problema — Construir un triángulo dados sus tres lados* (Fig. 30).

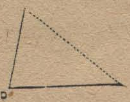
Trazando con el compás desde los extremos *A* y *B* de uno de los lados, dos arcos con rádios respectivamente iguales á los otros dos lados, su punto de interseccion será el tercer vértice del triángulo.

Constrúyanse dos triángulos con los datos del problema y superpónganse; serán iguales.

73. *Verdad comprobada* — Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.



(Fig. 30)



(Fig. 31)

(Fig. 32)

74. *Problema* — Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido (Fig. 31).

Construyendo un ángulo *O* igual al ángulo dado, tomando en los dos lados longitudes iguales á los lados dados y uniendo sus extremos por una recta, tendremos el triángulo pedido.

Constrúyanse dos triángulos con los datos del problema y superpónganse; serán iguales.

75. *Verdad comprobada* — Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido.

76. *Problema* — Construir un triángulo dado un lado y los dos ángulos adyacentes (Fig. 32).

Construyendo en los extremos de la recta dada dos ángulos respectivamente iguales á los ángulos dados, quedará construido el triángulo.

Constrúyanse dos triángulos con los datos del problema y superpónganse; serán iguales.

77. *Verdad comprobada*—Dos triángulos son iguales si tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales.

78. EJERCICIO — Dígase cuáles son los tres casos de igualdad de triángulos. Porqué son iguales en cada caso?

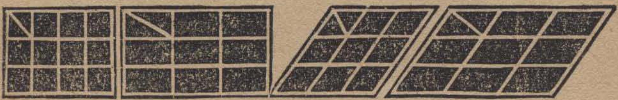
CUADRILÁTEROS

79. Se llama *cuadrilátero* un polígono de cuatro lados.

Entre los cuadriláteros se distinguen:

80. El *cuadrado* (Fig. 33). Tiene sus lados iguales

Cuadrados Rectángulos Rombos Romboides



(Fig. 33) (Fig. 34) (Fig. 35) (Fig. 36).

y ángulos rectos. Dos triángulos rectángulos isósceles é iguales, forman el cuadrado. Hágase el dibujo.

81. El *rectángulo*, propiamente dicho (Fig. 34), tiene los lados opuestos iguales y ángulos rectos. Dos triángulos rectángulos iguales no isósceles, forman el rectángulo. Dibújese un rectángulo.

82. El *rombo* (Fig. 35). Tiene sus lados iguales y los ángulos no son rectos. Dos triángulos isósceles iguales forman el rombo. Hágase el dibujo.

83. El *romboide* (Fig. 36). Tiene sólo los lados opuestos iguales. Los ángulos no son rectos. Dos triángulos cualesquiera iguales, no equiláteros, forman el romboide. Dibújese un romboide.

84. En esta série de cuadrados, rectángulos, rombos y romboides iguales (Figs. 33, 34, 35 y 36):

Se observa que los lados opuestos son rectas prolongadas, equidistantes, y por consiguiente paralelas.

Así, el *cuadrado*, el *rectángulo*, el *rombo* y el *romboide* se les designa, pues, en general, con el nombre de *paralelógramos*.

Dos lados opuestos de un paralelógramo forman las bases de la figura.

TRAPECIOS

85. *Trapecio* — Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos, y los otros dos no paralelos (Fig. 37).

(Fig. 37)

Se llama *trapecio rectángulo*, en particular, el que tiene dos ángulos rectos.

Se llama *trapecio isósceles*, en particular, el que tiene iguales los lados no paralelos.

Los lados paralelos son las bases del trapecio.

Altura en los paralelógramos y trapecios es la perpendicular comprendida entre las bases. La altura indica la distancia entre las dos bases.

TRAPEZOIDE

86. *Trapezoide* es todo cuadrilátero que no tiene lados paralelos (Fig. 38).

(Fig. 38)

87. *Diagonal* en un cuadrilátero es toda recta que une dos vértices opuestos, y lo divide siempre en dos triángulos que:

A razon de 180° por cada triángulo, se pregunta: cuánto valdrá la suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero?

PROBLEMAS GRÁFICOS

88. *Problema* — Construir sobre una recta dada un *cuadrado*. Sobre cada extremo de la recta se levantan perpendiculares iguales en longitud á dicha recta y quedarán determinados los otros dos vértices.

89. *Problema* — Dadas dos rectas desiguales construir con ellas un *rectángulo*. Fórmese con las dos un ángulo recto y por los extremos trácense paralelas á las primeras, hasta que se corten.

90. *Problema* — Dadas dos rectas desiguales construir un *romboide*. Fórmese con las dos rectas un ángulo agudo ú obtuso. Por los extremos trácense paralelas á las primeras, hasta que se corten.

Observacion—Si las dos rectas dadas fuesen iguales, quedaría construido un *rombo*. Constrúyase.

91. *Problema* — Construir un trapecio cualquiera. Trácense dos paralelas desiguales en longitud y únanse sus extremos á un lado y otro.

92. *Problema* — Construir un trapecio isósceles. Trácense dos paralelas y desde los extremos de la base mayor con una misma abertura de compás córtese en dos puntos la otra base.

93. *Problema* — Constrúyase un trapecio rectángulo.

94. EJERCICIOS relativos á los triángulos y cuadriláteros.

55. Tómense tres triángulos cualesquiera, pero exactamente iguales. Márquense sus ángulos respectivamente iguales con un puntito, con otro mayor y con una crucecita para distinguir los ángulos iguales. Colóquense como indica la Fig. 39.

P

(Fig. 39)

Los tres ángulos alrededor del punto *P* descansan sobre una recta y forman juntos tres sectores-ángulos que evidencian de nuevo la siguiente

95. *Verdad comprobada* — La suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180°.

56. Constrúyanse de carton ó papel grueso dos triángulos rectángulos escalenos iguales. Márquense dos ángulos agudos iguales, con un puntito. Fórmese con los dos triángulos un solo triángulo isósceles. (Júntense los catetos iguales.) (Dos formas.)

57. Dígase cuánto valen juntos los dos ángulos agudos de un solo triángulo.

58. Si uno de ellos vale 35°, cuánto valdrá el otro?

59. Los tres ángulos del triángulo isósceles suman 180°?
Son iguales los ángulos de la base del triángulo isósceles?

60. Fórmese tambien un paralelógramo rectángulo. (Júntense las hipotenusas.) Cuál es la diagonal?

61. Fórmese un romboide (dos formas). (Júntense los catetos iguales.) Hágase un estudio de la figura.

62. Demuéstrese de varios modos que los cuatro ángulos suman cuatro rectos.

63. Tómense cuatro triángulos iguales á los anteriores, y fórmese un rombo. Los cuatro catetos forman dos perpendiculares. Porqué es rombo? Cómo se cortan las dos diagonales? Son bisectrices? Son iguales los ángulos opuestos del rombo? Y del romboide?

64. Tómense dos triángulos rectángulos isósceles iguales. Fórmese un cuadrado.

65. Cuánto vale un ángulo agudo del triángulo anterior? Hágase el dibujo.

66. El ángulo al vértice de un triángulo isósceles vale 37°; cuánto valen los demás?

67. Dos ángulos de un triángulo valen 47° y 56°; cuánto vale el tercero?

68. En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo vale 46° 20'; cuánto vale el otro?

POLÍGONOS EN GENERAL

96. Polígono es una figura cerrada por líneas rectas.

Perímetro es la suma de los lados que rodean la figura.

Diagonales son las rectas que unen dos vértices no inmediatos.

Polígonos regulares son los que tienen sus ángulos y lados iguales.

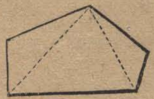
Irregulares son los que no tienen todos sus lados y ángulos iguales.

El cuadrado es polígono regular. El trapezoide es irregular.

97. Segun el número de sus lados, los polígonos se llaman:

Triángulo, el de tres lados; *cuadrilátero*, el de cuatro: *pentágono*, el de cinco; *exágono*, el de seis; *eptágono*, el de siete; *octógono*, el de ocho; *eneágono*, el de nueve; *decágono*, el de diez; *endecágono*, el de once; *dodecágono*, el de doce. Los demás se nombran por el número de sus lados; así, el que tiene veinte lados, se llama simplemente polígono de veinte lados.

98. *Problema* — Cuánto vale la suma de los ángulos de un polígono?



(Fig. 40)

Dibújese un polígono de cinco lados, por ejemplo (Fig. 40): tracemos todas las diagonales desde un vértice, saldrán tres triángulos; á dos rectos por triángulo suman todos seis rectos.

En un exágono saldrán cuatro triángulos; á dos rectos, ocho rectos.

En un eptágono saldrán cinco triángulos; á dos rectos, diez rectos.

Siempre resultan tantos triángulos como lados tiene el polígono, menos dos.

Regla: Para averiguar la suma de los ángulos de un polígono, se multiplica el número de lados, *menos dos*, por dos rectos.

99. *Problema* — Cuánto vale la suma de los ángulos de un octógono?

FORMACION DE LOS POLÍGONOS REGULARES

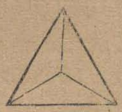
100. El triángulo equilátero se forma de tres triángulos isósceles iguales (Fig. 41).

Problema — Cuánto vale un ángulo al centro? y los tres juntos? y los demás?

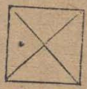
Pruébese que los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales.

101. Consecuencia: *Un triángulo equilátero es equiángulo.*

102. El cuadrado se forma de cuatro triángulos isósceles iguales (Fig. 42). Qué clase de triángulos son con respecto á sus ángulos?



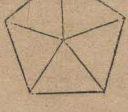
(Fig. 41)



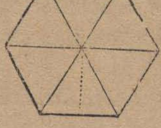
(Fig. 42)

103. El *pentágono regular* se forma de cinco triángulos isósceles iguales (Fig. 43).

Cuánto vale un ángulo al centro?



(Fig. 43)



(Fig. 44)

104. Con seis triángulos equiláteros iguales se forma el exágono regular (Fig. 44).

Cuánto vale un ángulo al centro? cuánto vale un ángulo del exágono regular?

105. *Verdad comprobada—Todos los polígonos regulares se forman de tantos triángulos isósceles, iguales, como lados tiene el polígono.*

El punto de reunion de los vértices se llama *centro* del polígono.

106. *Apotema* es la altura de uno de los triángulos.

107. *Problema* — Formar una tabla que exprese la suma de los ángulos de los polígonos de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, hasta de 20 lados.

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS

108. Se llama polígono regular inscrito en un círculo el que tiene sus vértices en la circunferencia y sus lados son cuerdas.

Tomemos el cuadrado y el exágono regular, por ejemplo. Hagamos centro en el centro de cada polígono, y con un rádio igual á la distancia de dicho punto á un vértice, tracemos una circunferencia; ésta pasará precisamente por todos los vértices del polígono. Dibújense las figuras.

Dígase si los sectores en que ha quedado dividido el círculo son iguales, así como los arcos.

PROBLEMAS GRÁFICOS

109. *Problema* — Construir un polígono igual á otro dado.

Sea un polígono cualquiera, por ejemplo, de cinco lados; divídase en triángulos, por medio de diagonales y constrúyase aparte con la regla y el compás triángulo por triángulo, en la misma disposicion que tienen en la figura.

110. *Problema* — Inscribir un exágono regular en un círculo.

Se divide la circunferencia en seis partes iguales con una abertura de compás igual al rádio. Trácense, por último, las cuerdas de estos arcos.

Observacion — Si se unen de dos en dos los puntos de division, resultará el triángulo equilátero inscrito.

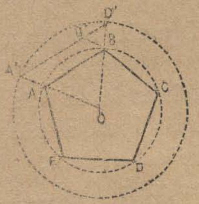
111. *Problema* — Inscribir un cuadrado en un círculo.

Se trazan dos diámetros perpendiculares y se unen sus extremos por cuerdas.

Si se divide cada arco en dos partes iguales y se trazan nuevas cuerdas, quedará inscrito un octógono regular.

112. *Problema* — Construir un polígono regular cualquiera, dada la longitud de un lado.

Sea un pentágono regular de un centímetro de lado (Fig. 45).



(Fig. 45)

Se describe una circunferencia cualquiera; se divide en cinco arcos iguales con el trasportador, y se traza el lado *A' D'*. Trácese el rádio *D' O*. Se toma sobre la recta *A' D'* una porcion *A' B'* igual al lado de un centímetro y se traza una paralela *B' B* al rádio *A' O*. Descríbase una circunferencia concéntrica con el rádio *B O* y la recta *A B* será el lado del pentágono pedido.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE RECAPITULACION

69. Un círculo está dividido en nueve sectores iguales; cuánto vale cada ángulo?

70. Si un ángulo de un triángulo rectángulo vale 22° 25', cuánto valen los demás?

71. Trácense las tres alturas de un triángulo rectángulo.

72. Tómense dos triángulos rectángulos iguales, de carton, no isósceles, y combínense de tal modo que resulten probados los siguientes principios:

1.° La diagonal de un rectángulo lo divide en dos partes iguales.

2.° Que un romboide queda dividido por su diagonal en dos partes iguales.

3.° Que los ángulos opuestos de un romboide son iguales.
4.° Que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales, (dos formas).
5.° Que la altura de un triángulo isósceles lo divide en dos partes iguales.
6.° Que los ángulos opuestos de un trapezoide pueden ser suplementarios.

73. Tómense dos trapecios rectángulos iguales; el ángulo agudo vale 60°, y con ellos fórmese un trapecio isósceles. Cuál es su altura? cuánto vale cada ángulo?

74. Pruébese que un trapecio rectángulo es la mitad de un rectángulo.

75. Pruébese que es la mitad de un romboide.

76. Prolónguense en un mismo sentido los tres lados de un triángulo equilátero. Cuánto valen los tres ángulos externos?

77. Hallar la suma de los ángulos de un polígono de 4, de 5, de 6, hasta de 14 lados.

78. Divídase un círculo en cinco sectores iguales. Cuánto vale cada ángulo?

79. Cómo trazaremos la bisectriz de un ángulo?

80. Divídase un semicírculo en tres sectores. Uno de los ángulos vale 40° 25', el otro 65° 30'. Cuánto vale el tercero?

81. Divídase con el compás una recta en dos partes iguales, en cuatro partes iguales, en ocho.

82. Trácese con la regla y el compás un ángulo de 45°.

83. Divídase con el trasportador un ángulo recto en tres partes iguales, en cinco.

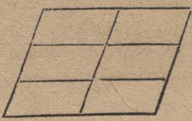
84. Constrúyase un ángulo de 60°, otro de 30°, de 75°, de 10°, de 20°. Cuánto valen los complementos?

85. Constrúyase un ángulo de 70°, de 100° 30', de 120°, de 23° 30', de 40° 30'. Cuánto valen los suplementos?

86. Inscríbase un exágono regular en un círculo. Inscríbase un cuadrado.

87. Hállese el valor del ángulo al centro del pentágono regular, del exágono, del octógono, del decágono, del dodecágono.

88. Hágase el dibujo de la figura 46. Representa una série de paralelógramos iguales. De consiguiente, todos los ángulos agudos son iguales como tambien los obtusos. La recta del medio se llama secante.



(Fig. 46)

Definicion: Se llaman *alternos internos* los ángulos iguales formados á un lado y otro de la secante, entre dos paralelas.

Definicion: Se llaman *correspondientes* los ángulos iguales formados á un mismo lado de la secante, uno interno y otro externo.

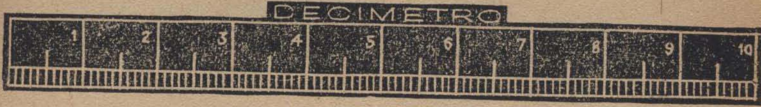
Márquense de dos en dos los ángulos iguales siguientes:

1.° Todos los ángulos opuestos por el vértice.
2.° Los ángulos correspondientes.
3.° Los ángulos alternos internos.
4.° Los ángulos suplementarios.

UNIDADES DE LONGITUD

113. *Metro lineal* — El metro es la unidad legal que sirve para medir longitudes. Téngase un metro á la vista.

El metro se divide en diez partes iguales, llamadas *decímetros* (Fig. 47); cada decímetro en diez partes



(Fig. 47)

iguales, llamadas *centímetros;* el centímetro en diez partes iguales, llamadas *milímetros.*

114. *Medir* es contar las veces que el metro, decímetro ó centímetro está contenido en una distancia cualquiera.

Existen metros, generalmente de madera, que están doblados en diez partes iguales; cuál es la longitud de cada parte?

Existen cintas de acero de veinte metros de largo, divididas en metros y decímetros, que sirven para medir distancias largas.

115. *Equivalencias* — La medida antigua, llamada vara lineal, equivale en Montevideo á 859 milímetros, en Buenos Aires á 866 milímetros.

Regla 1.ª — Para reducir varas á metros, se multiplica el número de varas por la equivalencia en milímetros.

Regla 2.ª — Para reducir metros á varas se divide el número de metros por la misma equivalencia.

116. EJEMPLOS:

Cuántos metros lineales tiene una cuadra lineal?

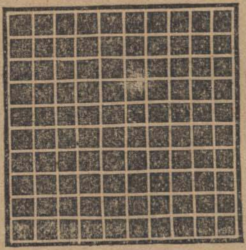
Expresar en metros el frente de una casa que mide 37 varas 24.

A cuántos metros equivale el ancho de una calle de 12 varas?

A cuántas varas equivale el ancho de un camino vecinal de 17 metros?

UNIDADES DE SUPERFICIE

117. *Metro cuadrado* — Se entiende por metro cuadrado, un cuadrado que tiene por cada lado un metro de largo; decímetro cuadrado, centímetro cuadrado, milímetro cuadrado, á un cuadrado que tenga por cada lado un decímetro de largo, un centímetro, un milímetro.



(Fig. 48)

118. Supondremos que este cuadrado representa en pequeño un metro cuadrado (Fig. 48).

Cada unidad lineal representa un decímetro lineal.

Cada cuadradito representa un decímetro cuadrado.

El cuadrado total contiene diez fajas de á diez unidades cuadradas.

Es evidente que:

El cuadrado total ó metro cuadrado es igual á cien decímetros cuadrados.

Cada lado es igual á diez decímetros lineales.

Consecuencia — Las unidades cuadradas van de cien en cien.

119. Ejercicios:

89. Expresar en metros cuadrados solo: 2 metros cuadrados, 48 decímetros cuadrados, 7 centímetros cuadrados=R. 2 m. c. 4807.

90. Léase la cantidad 537 mc. 086436=R. 537 metros cuadrados, 8 decímetros cuadrados, 64 centímetros cuadrados, 36 milímetros cuadrados.

91. Si multiplicamos 0 m. 859 por 0 m. 859, nos dará 0 m. c. 737881; número que expresa la equivalencia en Montevideo de la vara cuadrada al metro cuadrado. Si multiplicamos 0 m. 866 por 0 m. 866, nos dará 0 m. c. 749956, número que expresa la equivalencia en Buenos Aires de la vara cuadrada al metro cuadrado.

1.ª Regla — Para convertir varas cuadradas á metros cuadrados se multiplica el número de varas cuadradas por la equivalencia.

2.ª Regla — Para convertir metros cuadrados á varas cuadradas se divide el número de metros cuadrados por la equivalencia.

Ejemplo 1.º — A cuántos metros cuadrados equivalen 520 varas cuadradas?

Ejemplo 2.º — A cuántas varas cuadradas equivalen 1240 metros cuadrados?

MEDIDA DE LAS SUPERFICIES

120. El área ó valor de la superficie de una figura plana cualquiera es el número de unidades cuadradas que contiene la figura.

(Fig. 49)

121. *Medida del cuadrado.*

Suponiendo un cuadrado que tenga 6 decímetros por lado, tendrá de superficie 36 decímetros cuadrados (Fig. 49). — Perímetro, 24 decímetros lineales.

Regla — El área de un cuadrado se obtiene multiplicando un lado por sí mismo.

(Fig. 50)

122. *Medida del rectángulo* — Suponiendo un rectángulo que tenga 7 decímetros de base por 4 de altura, su superficie es de 28 decímetros cuadrados. Perímetro, 22 decímetros lineales (Fig. 50).

Regla — El área del rectángulo se halla multiplicando la base por la altura.

Observacion — La base y altura de una figura son siempre dos perpendiculares entre sí.

FIGURAS EQUIVALENTES

123. Se llaman figuras *equivalentes* las que tienen la misma magnitud aunque tengan diferente figura.

MEDIDA DEL TRAPECIO, ROMBOIDE, ROMBO Y TRIÁNGULO

(Fig. 51)

124. *Trapecio* — Tómense dos trapecios rectángulos iguales. Fórmese con ellos un rectángulo equivalente (Fig. 51). Trapecios 1, 2. Demuéstrese la siguiente :

Regla — La superficie de un trapecio se halla multiplicando la suma de las dos bases paralelas por la altura y dividiendo por dos.

125. *Romboide*—Fórmese un romboide con dichos dos trapecios (Fig. 52). Trapecios 2, 3. Demuéstrese la siguiente:

Regla—La superficie de un romboide se halla multiplicando la base por la altura. Del mismo modo se halla la superficie del rombo.

Tómense otros dos trapecios cualesquiera, pero iguales. Fórmese un romboide y demuéstrese de nuevo la regla para la superficie del trapecio.

126. *Triángulo.* Tómense dos triángulos cualesquiera, pero iguales; fórmese con ellos un paralelógramo. Resultará un paralelógramo dividido por su diagonal, en dos triángulos iguales.

Regla — La superficie de un triángulo se halla multiplicando la base por la mitad de la altura.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

92. Dibújese un cuadrado que supondremos tenga de lado 7 m., otro de 8, otro de 5 y demuéstrese que sus áreas son los cuadrados de 7, de 8, de 5.

93. Dibújese un rectángulo que supondremos tenga de base 6 m. por 3 m. de altura; otro de 7 m. por 5 de altura; otro de 10 por 3. Demuéstrese la regla para hallar sus áreas. Calcúlense sus perímetros.

94. *Problema* — Cuántos ladrillos de á 20 centímetros por 10 son necesarios para cubrir un metro cuadrado?

95. Dibújese un cuadrado que supondremos tenga de lado 8 m. 4; divídase primero en 4 cuadrados iguales; segundo en 4 rectángulos iguales. Cuánto tiene de área y cuánto de perímetro cada figura?

96. Cuál es la superficie de un romboide de 24 centm. de base por 14 de altura?

97. La altura de un trapecio es de 20 metros y sus bases son de 44,6 y 30 m. Cuál es su superficie?

98. Qué superficie tendrá un triángulo de 20 m. de base y 14 de altura ?

99. Córtense de papel grueso dos triángulos rectángulos isósceles é iguales que tenga 8 centímetros cada cateto. Córtense igualmente otros dos triángulos rectángulos iguales ; midiendo un cateto 8 centímetros y el otro 6 centímetros. Con esos cuatro triángulos juntos háganse los ejercicios siguientes, dibujando al mismo tiempo las figuras en el pizarron.

1.° Fórmese un solo rectángulo ; calcúlese su área y perímetro.

2.° Trasfórmese en un romboide. Calcúlese su área y el valor de sus ángulos.

3.° Trasfórmese en dos triángulos iguales y hállese el área de cada uno.

4.° Trasfórmese en trapecio isósceles ; hállese el área y el valor de sus ángulos.

Los lados no paralelos son hipotenusas de los triángulos isósceles.

5.° Fórmese un trapezoide ; compruébese la suma de sus ángulos.

Resultan las dos diagonales perpendiculares.

La mitad del producto de sus diagonales nos dará el área.

6.° Con dos triángulos diferentes fórmese un trapecio y calcúlese su área.

100. Tómense dos trapecios rectángulos iguales ; base mayor 18 centm., base menor 9. Altura 12.

1.° Fórmese un rectángulo y calcúlese su área y perímetro.

2.° Trasfórmese en romboide y calcúlese su área.

3.° Trasfórmese en trapecio isósceles y calcúlese su área.

4.° Trasfórmese en pentágono irregular y cálculese su área.

5.° Trasfórmese en exágono irregular y calcúlese su área.

101. Una ventana tiene 8 cristales cuadrados, de á 4 decímetros de lado. Cuál es la superficie de los ocho cristales juntos ?

102. Cuánto vale un solar de la forma de un rectángulo de 12 metros de frente por 30,8 de fondo, á 8 $ 50 el metro cuadrado ?

103. Dibújese un cuadrado que supondremos de 8 varas de lado. Divídase primero en cuatro cuadrados iguales ; segundo en 4 rectángulos iguales. Hallar el área y perímetro de cada figura : primero en varas ; segundo en metros.

104. Dibújese un cuadrado de lado 6. Dibújense varios rectángulos que tengan de base y altura 7 y 5, 8 y 4, 9 y 3. Hágase ver primero que todas las figuras tienen igual perímetro ; segundo que no tienen la misma superficie ; se pregunta : cuál tiene mayor área ?

105. Divídase un cuadrado de 12 m. 36 de lado en 4 figuras iguales ; cuadrados, rectángulos, trapecios ; luego en 2 trapecios iguales. Pídense las dimensiones y área de cada figura.

106. Cuál es la altura de un triángulo de 270 varas cuadradas, teniendo de base 18 varas ?

107. Dibújese un trapecio isósceles. Las bases miden 20 m. 5 y 8 m. 4. Los ángulos de las bases son de 45° cada uno. Se desea saber cuánto valen todos sus ángulos, la altura y la superficie.

108. La superficie de un triángulo rectángulo es de 24 metros cuadrados. Un cateto vale 8 metros. Cuánto vale el otro cateto ?

109. Dibújense dos rectángulos : uno tiene de base y altura 3 por 2 ; el otro 9 por 6. Se quiere saber cuánto es el perímetro y área del segundo mayor que el primero ?

110. El piso de mi habitacion es de forma cuadrada. Tiene por cada lado 5 m. 6. Se pide su superficie, en metros cuadrados, en decímetros cuadrados, en centímetros cuadrados. Cuánto tiene de perímetro ?

111. Un albañil ha revocado una pared de forma rectangular de 6.80 de base y 4 de altura. A 18 reales el metro cuadrado, cuánto vale el revoque ?

112. Con 1000 baldosas de un decímetro cuadrado, cuántos metros cuadrados puedo embaldosar ?

113. La plaza de un pueblo es cuadrada, de 80 metros de lado. Cuál es su área y su perímetro ? Otra plaza tiene de lado doble que la anterior. Cuánto es la segunda plaza mayor que la primera ?

114. He comprado un solar de forma rectangular en 1120 $, á 5 $ el metro cuadrado. Tiene 14 metros de frente. Cuánto tiene de fondo ?

115. El piso de un comedor tiene 6 m. 5 de largo por 7 m. 2 de ancho, y se quiere cubrir con baldosas de á un decímetro cuadrado cada una. Cuántas baldosas se necesitan ?

116. Cuántos metros cuadrados de alfombra se necesitan para cubrir una sala de 20 metros por 12 ?

117. Una plaza cuadrada tiene 8100 varas cuadradas. Se pide el perímetro en varas y en metros.

118. Una manzana de terreno de 90 metros por 30 metros quiere dividirse en 6 solares iguales. Cuáles serán las dimensiones de cada solar ?

119. Se vende un terreno para quinta á 2 $ el metro cuadrado. Es un trapecio. Tiene de frente al camino 80 m. 50. De fondo sobre la izquierda 120 m., sobre la derecha 90 m. Cuánto costará ? Hágase el dibujo.

120. Existe un solar de la forma de un trapecio. Una de las bases es un frente de 36 m. y la otra base al fondo 20 m. Su área es de 560 metros cuadrados. ¿ Cuánto tiene de fondo el solar ?

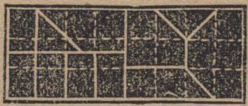
121. Una cuadra cuadrada es un cuadrado de 100 varas de lado. Se pide su área en varas y en metros cuadrados ; su perímetro en varas y en metros.

122. Una suerte de estancia se compone de 2700 cuadras cuadradas. Un campo rectangular, de una suerte, tiene 30 cuadras de frente ; cuántas tendrá de fondo ?

123. Si tuviera 100 de fondo, cuántas tendría de frente ?

124. Una hectárea es un cuadrado de 100 metros de lado. Se podría saber el número de hectáreas que tiene una suerte de campo?

125. Dibújese un rectángulo, mitad de una hectárea. Divídase en dos trapecios iguales ; base menor 40 metros. Se piden las dimensiones y superficie de cada figura.



(Fig. 52)

126. Dibújese este rectángulo (Fig. 52), con sus divisiones correspondientes, marcadas con líneas gruesas.

Lo forman 24 cuadrados iguales, marcados con líneas de puntos. Tiene 24 metros de altura por 64 de base. Se desea averiguar : primero, el valor de los ángulos en cada figura ; segundo, sus dimensiones y su área ; tercero, la suma de todas las áreas y comprobacion del área total.

127. Cuántas planchas de zinc se necesitan para cubrir una extension trapecial de un techo, cuyas bases miden 20 y 25 metros, altura 5 metros y medio. Las planchas de zinc son rectángulos de 1 m. 20 por 50 centímetros.

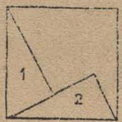
ESTUDIO DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

127. Constrúyase en el papel un triángulo rectángulo, dando á un cateto 4 centm. y al otro 3 centm., mídase la hipotenusa y se verá que tiene 5 centímetros justos. Constrúyase sobre cada lado un cuadrado y se verificará la siguiente:

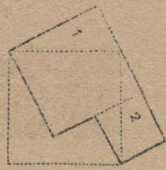
Verdad geométrica—El cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.

128. *Demostracion general* — Tómense dos triángulos rectángulos cualesquiera, pero iguales. Constrúyase

un cuadrado de carton, cuyo lado sea igual á la hipotenusa y colóquense los triángulos en la forma que indica la figura 53.



(Fig. 53)



(Fig. 54)

Recórtense en el carton los dos triángulos dibujados en él y colóquense como indica la figura 54. Resultarán dos cuadrados. El mayor es el cuadrado del mayor cateto y el otro es el del cateto menor.

129. Ejercicios y problemas.

128. Verifíquese la comprobacion del principio geométrico anterior, dibujando un triángulo rectángulo, cuyos catetos midan 8 centm. y 6 centm., la hipotenusa valdrá 10 centm. En otro cuyos catetos valgan 12 y 5, la hipotenusa valdrá 13.

129. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 metros y un cateto 9. Cuánto vale el otro cateto ? En otro la hipotenusa mide 26 m y un cateto mide 10 ; cuánto vale el otro cateto ?

130. Un terreno tiene la figura de un trapecio rectángulo, cuyas bases miden 85 m. y 55 m., altura 40 m. Hállese la superficie y perímetro.

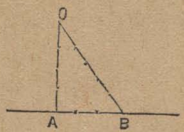
131. Un terreno tiene la forma de un trapecio isósceles ; los lados no paralelos miden 80 m. cada uno ; las bases miden 152 m. y 56 m. Pídense el perímetro y la altura.

132. Se quiere alambrar dicho terreno colocando postes de ñandubay de 5 en 5 metros ; cuántos postes se precisarán ?

133. La diagonal de un rectángulo mide 35 m. y su base 28. Calcúlese el perímetro, altura y superficie.

134. La diagonal de otro rectángulo mide 156 m., altura 86. Hállese la base, perímetro y área.

135. *Aplicacion* — Levantar una perpendicular á una recta operando sobre el terreno (Fig. 55). Supongamos que desde un punto *A* queremos levantar una perpendicular á la recta *A B*. Tomemos una cuerda dividida en 12 partes iguales y demos á la cuerda la figura de un triángulo rectángulo cuyos lados sean 3, 4 y 5. Fijemos sobre *A B* el cateto 3, y manteniendo bien tirante la cuerda en sus tres vértices, quedará trazada la perpendicular *A O*.



(Fig. 55)

(Fig. 56)

136. Repítase el ejercicio anterior con un hilo grueso, cuyas divisiones sean 5, 12 y 13.

137. Constrúyase de papel grueso la figura 56, que consta de 5 cuadrados iguales y trasfórmese en un solo cuadrado, dando solamente dos cortes.

138. Constrúyase un cuadrado doble de otro.

139. Dos buques parten al mismo tiempo de un punto, uno con rumbo al Este y el otro con rumbo al Sur. El primero ha caminado 6 millas ; el segundo 8 millas. Cuántas millas separan á los dos buques ? Hágase la figura.

MEDIDA DE LOS POLÍGONOS IRREGULARES

130. *Medida del trapezoide* — Se divide en dos triángulos por una diagonal y la suma de sus áreas nos dará la total.

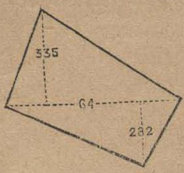
131. *Medida de un polígono cualquiera.*

Se llama escuadra de agrimensor un instrumento de metal que sirve para trazar perpendiculares sobre el terreno.

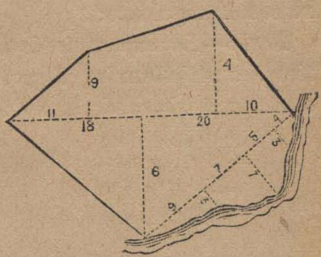
Uno de los varios procedimientos usados para obtener el valor de la superficie de un terreno, de la forma de un polígono cualquiera, dentro del cual puede operarse, es el siguiente:

Se traza la mayor diagonal posible y desde los demás vértices se bajan perpendiculares á la diagonal con la escuadra de agrimensor, quedando así descompuesta la figura en trapecios y triángulos; se halla el área de cada figura y la suma de todas las áreas nos dará el área total.

132. Ejercicios — Hállese la superficie de cada uno de los polígonos, figuras 57 y 58, con los datos ya indicados.



(Fig. 57)



(Fig. 58)

MEDIDA DE LOS POLÍGONOS REGULARES Y DEL CÍRCULO

133. Dibújense 3, 4 ó 5 triángulos iguales. Supongamos que la base y altura de cada uno valga 4 y 6. Multiplicando la suma de las bases por la mitad de una altura, se tendrá el área de todos juntos. Dará el

mismo resultado que si se hallara el área de cada uno y se sumaran todas. Hágase la comprobacion.

Esto está fundado en el siguiente:

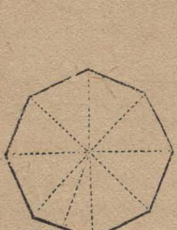
134. *Principio aritmético — Multiplicando la suma de varios números por otro cualquiera, dá el mismo resultado que multiplicando cada sumando por dicho número y sumar los productos parciales.*

135. *Medida de un polígono regular.*

Ya sabemos que un polígono regular está formado de tantos triángulos isósceles iguales, como lados tiene el polígono.

Sea un octógono regular; observando bien la figura 59 y teniendo presente el principio anterior, deduciremos la siguiente:

Regla — La superficie de un polígono regular, se obtiene, multiplicando el perímetro por la mitad de la apotema ó altura de uno de los triángulos.



(Fig. 59)

(Fig. 60)

136. *Problema* —Un octógono regular tiene de lado 17 metros y 20 de apotema. Cuál es su superficie?

137. *Circunferencia medida con el diámetro.*

Si dividimos la longitud de cualquier circunferencia en 22 partes iguales y el diámetro en 7, las partes de la circunferencia serán iguales á las partes del diámetro (Fig. 60).

La recta *A* representa la longitud de la circunferencia.

La recta *B* representa la longitud del diámetro.

De aquí deducimos las siguientes:

Regla 1.ª — Conocido el diámetro — Para averiguar el largo de una circunferencia se divide el diámetro en 7 partes iguales y el resultado se multiplica por 22.

Regla 2.ª — Conocida la circunferencia — Para averiguar la longitud del diámetro se divide la circunferencia en 22 partes iguales y se multiplica el resultado por 7.

138. *Problema* — Valiendo el diámetro 14 metros, cuánto valdrá la circunferencia?

139. *Problema* — Midiendo la circunferencia 66 metros, cuánto valdrá el diámetro?

Advertencia — La medida de la circunferencia con el diámetro sólo es aproximada, pues hay que advertir que hasta ahora ningun matemático la ha podido hallar exactamente.

MEDIDA DE UN SECTOR Y DEL CÍRCULO

140. Dibújese un sector.

Sabemos que un círculo se considera dividido en 360 sectores iguales de un grado cada uno.

Cada sector es un triángulo; su base es el arco y la altura el rádio.

Un sector de 30 grados, por ejemplo, lo forman 30 sectores-triángulos cuya altura comun es el rádio.

Teniendo presente el *principio aritmético* (§ 134), daremos la siguiente:

Regla—La superficie de un sector es igual á la longitud del arco multiplicada por la mitad del rádio.

141. Siendo el círculo el conjunto de 360 sectores-triángulos iguales, tendremos tambien la siguiente:

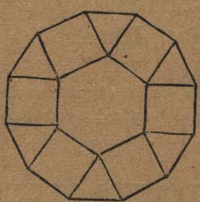
Regla—La superficie de un círculo se obtiene multiplicando la longitud de la circunferencia por la mitad del rádio.

142. EJERCICIOS:

140. Cuál es la superficie de un exágono regular de 8 m. de lado y 6 m. 9 de apotema?

141. Cuál es la superficie de un octógono regular de 3 m. 4 de lado y 4 m. 1 de apotema?

142. Hallar la superficie de un exágono regular de 12 m. de lado por 10 m. 38 de apotema.



(Fig. 61)

143. Véase la figura 61. Lado de un cuadrado 8 m.; apotema del exágono 6 m. 90. Se pide: primero, el valor de cada ángulo en cada figura; segundo, cuánto vale un ángulo del dodecágono; tercero, la superficie total.

Los triángulos equiláteros son iguales á los que forman el exágono.

144. Hallar la circunferencia y el área del círculo, cuyo rádio es de 14 metros.

145. Calcúlese el rádio y el área del círculo cuya circunferencia mide 220 metros.

146. Un estanque circular tiene de diámetro 28 m.; calcúlese la circunferencia y la superficie del círculo.

147. Cuál es la superficie de un círculo de 44 m. de circunferencia?

148. El rádio de un sector de 90° mide 14 decímetros. Cuál es su área?

149. Hállese el área de un sector de 60° cuyo rádio es de 21 metros.

150. Se trata de construir dos corrales: uno cuadrado y otro circular, de 88 metros de perímetro cada uno. Cuál de los dos tiene mayor área?

151. Sabiendo que las ruedas delanteras de un coche tienen 80 centímetros de diámetro y las traseras 1 metro 20, calcúlese las vueltas que tienen que dar unas y otras para que el carruaje recorra 1 kilómetro.

152. Un jinete atraviesa en 5 minutos y al trote corto, un hipódromo circular en el sentido de su diámetro. A razon de 2 metros por segundo, se pide el perímetro y la superficie del hipódromo.

143. *Medida del segmento circular.*

Segmento circular es la parte de círculo comprendida entre una cuerda y su arco. Para obtener el área del segmento, se halla primero el área del sector y luego se le resta el área del triángulo (Fig 62).

(Fig. 62)

(Fig. 63)

144. *Corona circular* es el espacio comprendido entre dos circunferencias concéntricas. Su área será igual á la diferencia de los dos círculos (Fig. 63).

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

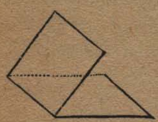
DE LOS CUERPOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

145. *Poliedro* es todo sólido geométrico terminado por caras planas.

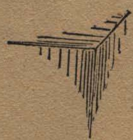
Por ejemplo, el cubo.

146. *Ángulo diedro* es el espacio comprendido entre dos planos que se cortan (Fig. 64).

La interseccion es una recta llamada *arista.*



(Fig. 64)



(Fig. 65)

147. *Ángulo triedro* es el espacio comprendido por tres caras ó planos que concurren en un punto. Como un ángulo sólido del cubo (Fig. 65).

148. *Base* de un poliedro es la cara sobre que descansa la figura.

149. *Caras paralelas* son dos caras que están siempre equidistantes.

Se dice que una recta es perpendicular á un plano, cuando es perpendicular por lo menos á dos rectas situadas en el plano.

150. Todo plano perpendicular á una recta vertical es horizontal.

La superficie de las aguas tranquilas determina un plano horizontal.

151. *Área lateral* de un poliedro es la suma de las áreas de las caras laterales.

Área total es la suma de las áreas de todas sus caras.

152. EJERCICIOS:

153. Tómese una cuartilla de papel grueso y dóblese en dos partes iguales, como dos hojas de un libro. Tendremos un ángulo diedro; cuáles son las caras? cuál es la arista?

154. Dígase cuántas aristas tiene un cubo? Cuántas caras?

155. Cuántos ángulos diedros pueden contarse en un cubo?

156. Qué número de triedros hay en un cubo?

157. Qué clase de ángulos planos forman un triedro? y cuántos hay?

158. Cuántos diedros forman un triedro?

159. Hágase descansar un cubo sobre una mesa horizontal. Porqué las aristas laterales son perpendiculares á las bases? Son verticales las aristas?

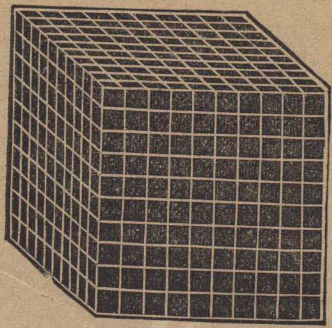
160. Si el cubo tuviera de arista tres decímetros, cuál sería su área lateral? cuál sería su área total?

UNIDADES CÚBICAS, DE CAPACIDAD Ó CONTENIDO

153. El metro cúbico es la unidad principal de las medidas de volúmen.

Se llama *metro cúbico* á un cubo que tenga por arista un metro de largo; se llama *decímetro cúbico*, *centímetro cúbico*, *milímetro cúbico*, á un cubo que tenga por arista un decímetro, un centímetro, un milímetro lineal.

154. Supondremos que este cubo (Fig. 66) representa un metro cúbico.



(Fig. 66)

Cada unidad lineal representa un *decímetro lineal.*

Cada unidad cuadrada representa un *decímetro cuadrado.*

Cada unidad cúbica representa un *decímetro cúbico.*

Son 10 capas superpuestas de á 100 unidades cúbicas.

Se tendrá, pues, que:

El cubo total ó 1 metro cúbico=1000 decímetros cúbicos.

Cada cara ó 1 metro cuadrado=100 decímetros cuadrados.

Cada lado, arista ó 1 metro lineal=10 decímetros lineales.

155. Ejercicios:

161. Qué es un metro cúbico y para qué sirve? Qué es un decímetro cúbico ?

162. A cuántos decímetros cúbicos equivale un metro cúbico ?
163. En dos metros cúbicos cuántos decímetros cúbicos hay, cuántos centímetros cúbicos ?
164. En cinco decímetros cúbicos, cuántos centímetros cúbicos hay ?
165. Qué es un centímetro cúbico ?
166. Cuántos centímetros cúbicos se necesitan para formar un decímetro cúbico ?
167. Un metro cúbico á cuántos centímetros cúbicos equivale ?
168. En 3,500 decímetros cúbicos cuántos metros cúbicos hay ?
169. Qué es un milímetro cúbico ?
170. En 5.234,670 centímetros cúbicos cuántos metros cúbicos se cuentan, cuantos decímetros, cuántos centímetros cúbicos?

MEDIDA DE LOS POLIEDROS

156. En Geometría se consideran tres especies de poliedros, que son:

Los *prismas,* las *pirámides* y los *cuerpos regulares.*

ESTUDIO DE LOS PRISMAS

157. Se llama *prisma* un poliedro que tiene por bases dos polígonos cualesquiera, iguales y paralelos y sus caras laterales son paralelógramos (Fig. 67).

El *cubo* es un prisma.

(Fig. 67)

158. Prisma recto es el que tiene sus aristas latera-

les perpendiculares á las bases y oblícuo el que las tiene oblícuas.

Advertencia — Sólo nos ocuparemos de los prismas rectos, que son los de más aplicacion (1).

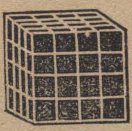
Altura de un prisma es siempre la perpendicular que va de una base á la otra.

159. *Medida de un cubo cualquiera.*

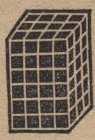
Sea un cubo que tenga cuatro centímetros lineales de arista (Fig. 68).

Se compone de 4 capas de á 16 centímetros cúbicos. La superficie de la base es de 16 centm. cd. Volúmen 64 centm. cúbicos. De aquí deducimos la siguiente:

Regla — El volúmen de un cubo se halla multiplicando la superficie de la base por la altura.



(Fig. 68)



(Fig. 69)

160. Ejercicio — Hállese la superficie lateral y total del cubo.

161. *Medida del paralelipípedo* — Paralelipípedo es un prisma que tiene por base un paralelógramo cualquiera.

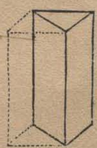
162. Sea un paralelipípedo recto de base rectangular (Fig. 69), que tenga 4 centímetros por 3, de base y altura 6.

(1) Nota — Los señores Profesores pueden ampliar, si creen necesario, el estudio de los prismas, pirámides, conos y cilindros, tratando estos sólidos en el caso que sean oblícuos.

Son 6 capas horizontales de á 12 cubos = 72 centímetros cúbicos.

Regla — El volúmen ó capacidad de un paralelipípedo recto se obtiene multiplicando la base por la altura.

Problema — Calcúlese el área lateral y total del paralelipípedo anterior.



(Fig. 70)

163. *Medida del prisma triangular* (Fig. 70).

Un prisma triangular es siempre la mitad de un paralelipípedo de doble base y la misma altura. Téngase un paralelipípedo sólido descompuesto en dos prismas triangulares.

Problema — Supongamos que el triángulo de la base mida 6 centímetros cuadrados y la altura 10 centímetros lineales. Calcúlese el volúmen del paralelipípedo y luego el del prisma triangular.

Regla — El volúmen de un prisma triangular se obtiene tambien multiplicando la superficie de la base por la altura.

164. Ejercicio:

Hágase un estudio relativo á las caras, bases, aristas, diedros y triedros del prisma triangular.

165. *Medida del prisma poligonal* (Fig. 71).

Prisma poligonal regular es el prisma recto que tiene por bases polígonos regulares. Se compone de tantos prismas triangulares iguales como caras laterales tiene. El conjunto de los prismas triangulares dá el volúmen total.

(Fig. 71)

Teniendo presente el *principio aritmético* (§ 134), deduciremos la siguiente :

Regla — El volúmen de un prisma regular se halla multiplicando la superficie de la base por la altura.

El volúmen de cualquier otro prisma se halla del mismo modo.

166. Supongamos este prisma exagonal (Fig. 71). Un triángulo de la base mide 13 centm. cuadrados, y la altura del prisma es de 20 centm. lineales; cuál sería el volúmen de un prisma triangular y cuál el del prisma total?

Un lado del polígono de la base mide 8 centm.; calcúlese el área lateral y el área total del prisma.

167. Ejercicio :

Hágase un estudio relativo á las caras, aristas, diedros, ángulos planos y triedros del prisma exagonal.

168. *Medida del cilindro.*

Cilindro recto es un cuerpo redondo, terminado por una superficie curva lateral y cuyas bases son dos círculos iguales y paralelos (Fig. 72).

Altura del cilindro es la perpendicular trazada de una base á la otra. El cilindro recto es engendrado por la revolucion de un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

(Fig. 72)

169. *Un cilindro recto es un prisma regular redondo.*

En efecto: cada círculo de la base se compone de 360 sectores iguales, que son bases de 360 prismas triangulares de la misma altura que el cilindro. Luego tendremos la siguiente:

Regla—El volúmen del cilindro se halla multiplicando el círculo de la base por la altura.

170. *Superficie lateral del cilindro*—Si tomamos un rectángulo de papel grueso y lo enrollamos hasta unir sus dos lados laterales en uno solo, en forma de tubo, obtendremos prácticamente la superficie lateral de un cilindro. Hágase este ejercicio.

La base del rectángulo se trasforma en circunferencia y la altura es la misma.

Regla—La superficie lateral de un cilindro recto se *halla multiplicando la circunferencia de la base por la altura.* Agregando las dos bases se tendrá la superficie total.

171. *Ejercicios y problemas relativos á los prismas rectos.*

171. Las tres dimensiones de un paralelipípedo recto son 2 m., 3 m., 4 m. Se pide: primero, su volúmen; segundo, la superficie de todas sus caras. La suma de sus aristas.

172. Mi aposento tiene la figura de un paralelipípedo de 3 m. de largo por 5 m. de ancho y 4 de alto. Se pide la capacidad del aposento y la superficie de las paredes.

173. Cuál es la superficie total de un cubo de 12 m. de arista?

174. Un salon de estudio tiene 8 m. de largo por 7 de ancho y 4 de alto; las paredes deben pintarse á razon de 30 centésimos el metro cuadrado. Cuánto vale la pintura?

175. Se pide el volúmen de unos cimientos de piedra de 14 m. de longitud, 0 m. 85 de espesor y 2 m. 20 de profundidad.

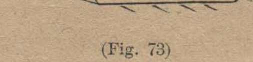
176. A razon de un decímetro cúbico por litro, cuál es la capacidad en litros de una caja de zinc que tiene 1 m. 80 de largo, 1 m. 08 de ancho y 1 m. 50 de profundidad?

177. Cuánto tiene de arista un cubo cuya superficie total es igual á 384 metros cuadrados?

178. En un recipiente de forma cúbica caben 8000 litros justos de agua; cuánto tiene de arista el recipiente?

179. Se necesitan 8 metros cúbicos de aire por persona para que la respiracion tenga lugar en buenas condiciones. Cuál deberá ser la longitud de un salon rectangular destinado á recibir 135 personas, si la altura debe tener 3 m. 70 y el ancho 8 m. 50?

180. Calcular los metros cuadrados de papel pintado que se necesitan para cubrir las paredes de un salon de 15 m. de largo, 10 de ancho y 5.6 metros de altura.



(Fig. 73)

181. La figura 73 representa un terraplen. Es un prisma recto cuyas bases son trapecios. La altura del terraplen es de 5 m., las bases paralelas del trapecio miden 7 m. y 12 m. Se quiere saber cuántos metros cúbicos de tierra habrá en 250 metros de terraplen.

172. *Ejercicios y problemas relativos al cilindro.*

182. Cuál es la superficie lateral de un cilindro que tiene 0 m. 42 de rádio en su base por 6 m. de altura ?

183. Sabiendo que un litro es el contenido de un decímetro cúbico, cuántos litros de agua hay en un pozo de 1 m. de diámetro, conteniendo de aquel líquido hasta 1 metro 50 de altura ?

184. Una caldera de vapor de forma cilíndrica tiene 5 m. 8 de largo y 0 m. 90 de diámetro. Cuál es su capacidad en litros ?

185. Se ha pintado interiormente, á razon de 5 reales el metro cuadrado, un recipiente cilíndrico de 2 m. de diámetro por 5 m. de profundidad; cuánto se le debe entregar al pintor ?

186. Cuántos metros cuadrados de palastro (hoja de hierro) se necesitan para construir una chimenea de vapor de 4 m. de circunferencia por 8 de altura ?

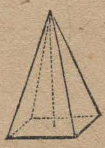
187. Calcular la capacidad de un pozo cilíndrico, cuyo diámetro es de 5 metros y su profundidad de 10 metros.

188. Cuánto tiempo emplearía una fuente para llenar el pozo suministrando 12 litros de agua por minuto ?

ESTUDIO DE LA PIRÁMIDE

173. *Medida de la pirámide.*

Pirámide es un poliedro cuya base es un polígono cualquiera y sus caras laterales son triángulos que tienen un punto comun, llamado vértice ó cúspide de la pirámide (Fig. 74).



(Fig. 74)

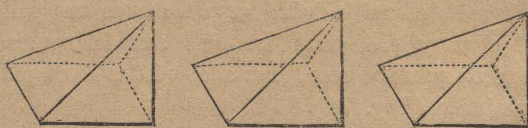
Altura es la perpendicular ó distancia del vértice á la base.

174. *Principio — Admitiremos como evidente que dos pirámides de la misma altura y bases iguales son equivalentes ó tienen igual volúmen.*

Un prisma triangular recto se compone de tres pirámides triangulares equivalentes; una de ellas tiene la misma base y la misma altura que el prisma (Fig. 75).

(Fig. 75)

Luego, una pirámide triangular es la tercera parte del prisma. Téngase á la vista un prisma triangular así descompuesto.



(Fig. 76)

Un cubo se descompone exactamente en 3 *pirámides cuadrangulares iguales* de la misma base y altura que el cubo. Téngase á la vista un cubo así descompuesto (Fig. 76).

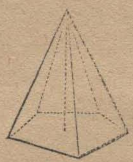
Regla — El volúmen de una pirámide triangular ó cuadrangular se obtiene multiplicando la base por la tercera parte de la altura.

175. *Medida de la pirámide regular.*

Pirámide regular es la que tiene por base un polígono regular y sus caras laterales son triángulos isósceles, iguales (Fig. 77).

La altura viene á caer al centro de la base.

Se compone de tantas pirámides triangulares, como caras laterales tiene.



(Fig. 77)

(Fig. 78)

Teniendo presente el *principio aritmético* (§ 134), deduciremos la siguiente:

Regla — El volúmen de una pirámide regular se obtiene, multiplicando la superficie de la base por el tercio de la altura.

La regla es la misma para cualquier pirámide.

176. Ejercicio:

Demuéstrese que el área lateral de una pirámide regular es igual al perímetro de la base por la mitad de la apotema ó altura de uno de los triángulos laterales.

177. *Medida del cono.*

Cono recto es un cuerpo redondo, cuya base es un círculo, limitado por una superficie curva, lateral, que termina en un punto *S*, llamado vértice ó cúspide del cono (Fig. 78).

5

Es engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo, que gira alrededor de uno de los catetos; este cateto determina la *altura* del cono.

El *cono recto* es una pirámide regular redonda.

En efecto: el círculo de la base del cono se compone de 360 sectores iguales, que son bases de 360 pirámides triangulares, de la misma altura que el cono.

Luego:

El volúmen de un cono recto se halla, multiplicando el círculo de la base por el tercio de la altura.

178. *Medida de la superficie lateral del cono.*

Si tomamos un papel grueso, de la forma de un *sector de círculo* y lo enrollamos hasta unir los dos rádios en una sola recta, tomará la forma de un embudo, obteniendo así lo que se llama una *superficie cónica.*

El arco del sector se trasforma en circunferencia de la base y el rádio del sector en *lado del cono.*

Recordando el modo de hallar la superficie de un sector, deduciremos la siguiente:

Regla—La superficie lateral de un cono recto se obtiene multiplicando la circunferencia de la base por la mitad del lado.

179. Ejercicios:

189. Cuál es la superficie lateral de una pirámide regular cuya base es un triángulo equilátero de 5 m. de lado, teniendo de apotema 8 m. 3?

190. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 m. de lado; la apotema tiene 8 metros. Cuál es su superficie total?

191. La superficie de la base de una pirámide es de 4 m. 36. Su altura es de 1 m. 8. Cuál es su volúmen?

192. Cuál es el volúmen de una pirámide de 2 m. 4 de altura y cuya base es un decágono de 4 metros cuadrados de superficie?

193. Una de las grandes pirámides de Egipto tiene de base un cuadrado

de 237 metros de lado y 146 de altura ; sus caras laterales son triángulos isósceles que tienen por altura 87 m. Se pide el volúmen y la superficie lateral de la pirámide.

194. Cuál es la superficie lateral de un cono recto de 3 m. de diámetro en su base y 6 m. de lado ?

195. Cuál es el volúmen de un cono recto, cuya altura es de 5 m. y el rádio de la base 2 metros ?

196. Cuál es el volúmen de un cono, cuya altura es de 1 m. 35 y la superficie de la base 3 m. c. 40 ?

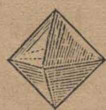
POLIEDROS REGULARES

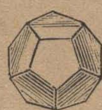
180. Se llaman *poliedros regulares* todos aquellos cuyas caras son *polígonos regulares é iguales.*

El cubo es un poliedro regular.


(Fig. 79)


(Fig. 80)


(Fig. 81)


(Fig. 82)


(Fig. 83)

No hay más que cinco cuerpos regulares, y son los siguientes:

El *tetraedro,* sólido terminado por 4 caras; triángulos equiláteros (Fig. 79).

El *exaedro* ó cubo, sólido terminado por 6 caras; cuadrados (Fig. 80).

El *octaedro,* sólido terminado por 8 caras; triángulos equiláteros (Fig. 81).

El *dodecaedro,* sólido terminado por 12 caras; pentágonos (Fig. 82).

El *icosaedro,* sólido terminado por 20 caras; triángulos equiláteros (Fig. 83).

181. *Medida del poliedro regular.*

Un poliedro regular se puede considerar formado de tantas pirámides regulares é iguales como caras tiene.

Por ejemplo, el icosaedro se considera formado de veinte pirámides iguales, cuyos vértices concurren al centro del poliedro y cuyas bases son las caras del poliedro.

De todo lo expuesto se deduce, recordando el *principio aritmético* (§ 134), que el volúmen de un poliedro regular se obtendrá, *multiplicando la superficie total por el tercio de la altura comun de las pirámides ó su distancia al centro.*

ESFERA

182. Se llama esfera un sólido terminado por una superficie curva, uniforme, cuyos puntos están todos á igual distancia de uno interior llamado *centro* (Fig. 84).

(Fig. 84)

La esfera se considera engendrada por la revolucion de un semicírculo, que gira alrededor del diámetro, llamado *eje.*

Una bola de billar es exactamente una esfera.

Rádio de la esfera es una recta que va del centro á un punto de la superficie esférica.

Todos los rádios de una misma esfera son iguales.

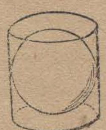
Diámetro de la esfera es la recta que une dos puntos de la superficie esférica, pasando por el centro.

183. Si se corta la esfera por un plano que pase por el centro, divide á la esfera en dos partes iguales llamadas *hemisferios*, y la seccion es un *círculo máximo*. Téngase una esfera así descompuesta.

Si la seccion no pasase por el centro, sería un *círculo menor*.

184. *Medida de la superficie de la esfera.*

Consideremos una esfera inscrita en un cilindro (dentro de un cilindro), cuya altura y diámetro sea el mismo que el diámetro de la esfera (Fig. 85).



(Fig. 85)

Está demostrado y comprobado, de una manera que no podriamos evidenciar aquí tan clara y sencillamente como quisiéramos, que la superficie de la esfera es, exactamente, igual á la superficie lateral de un cilindro cuyo diámetro y altura son iguales al diámetro de la esfera. Téngase una esfera inscrita en un cilindro de carton.

Cortando el cilindro y esfera por dos planos paralelos á la base del cilindro, resulta un cilindro de poca altura y una superficie esférica, llamada *zona*, de la misma altura. Las dos superficies son iguales.

Recordando la regla que hemos dado para hallar la superficie del cilindro, diremos que:

La superficie de la esfera se obtiene multiplicando la circunferencia mayor que rodea la esfera por el diámetro de la misma esfera.

La superficie de la zona se halla multiplicando la rcunferencia mayor que rodea la esfera por la altura de la zona.

185. *Medida del volúmen de la esfera.*

Tomemos sobre la superficie de la esfera tres puntos cualesquiera, muy próximos. Uniendo estos tres puntos entre sí y con el centro de la esfera, tendremos una pequeña pirámide triangular, cuya altura es el rádio de la esfera. (Ilústrese esta demostracion en una esfera sólida.)

Se comprende de este modo que puede considerarse la esfera como un sólido compuesto de una infinidad de pequeñas pirámides iguales, con tal que el número de pirámides sea grande.

Como el volúmen de cada pirámide se obtiene multiplicando la base por el tercio de la altura y las alturas son todas iguales al rádio de la esfera, recordando el principio aritmético (§ 134), el volúmen total tendrá por medida la superficie de todas las bases multiplicada por el tercio de la altura comun.

La suma de las bases forma la superficie esférica.

Regla — El volúmen de la esfera tiene por medida su superficie multiplicada por el tercio del rádio.

186. Ejercicios:

197. Calcúlese la circunferencia máxima de una esfera de 3 m. 50 de rádio.

198. Calcúlese su superficie.

199. El diámetro de una esfera es de 14 decímetros; cuál es su volúmen ?

200. Cuál es el volúmen de una esfera de 0. m. 84 de rádio ?

201. Cuál es el volúmen de una esfera de 4 centímetros de diámetro ?

202. La forma interior de un aljibe es la de un cilindro con una profundidad de 5 m., terminado por una bóveda semi-esférica de 4 m. de diámetro. A razon de 2'2 pipas por metro cúbico, se pide la capacidad del aljibe expresado en pipas.

203. Se quiere averiguar cuánto valdrá el revoque interior del aljibe pagándose á razon de 16 reales el metro cuadrado.

204. Hállese en kilómetros cuadrados la superficie del globo terrestre sabiendo que su rádio es de 6366 kilómetros.

205. Hállese el volúmen del globo terrestre.

206. Calcular el importe de la tela que se necesita para construir un globo de 10 metros de rádio, siendo 0 $ 50 el precio de cada metro cuadrado.

APÉNDICE

FIGURAS SEMEJANTES

187. *Figuras semejantes* son las que tienen la misma forma, aunque no sean iguales en tamaño.

Por ejemplo: todos los cuadrados son figuras semejantes.

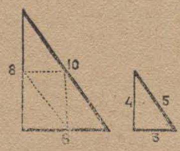
188. Ejercicios:

Dibújense tres cuadrados desiguales, tres triángulos equiláteros desiguales, tres círculos de diferente rádio. Son figuras semejantes.

Dibújense un cuadrado y un rombo que tengan el mismo lado.

Un cuadrado y un rectángulo. No son figuras semejantes.

Son figuras semejantes dos triángulos rectángulos isósceles desiguales? Dibújense estas dos figuras.



(Fig. 86)

189. *Estudio de los triángulos semejantes.*

Con cuatro triángulos iguales se forma un nuevo triángulo semejante á uno cualquiera de los cuatro. Tienen la misma forma (Fig. 86).

190. Ejercicio:

Constrúyanse estas figuras en el pizarron y hágase ver que los dos triángulos, mayor y menor, tienen sus ángulos respectivamente iguales. Los números indican las longitudes de los lados.

Verdad comprobada — Dos triángulos semejantes tienen sus ángulos respectivamente iguales.

Los lados 6 y 3, 10 y 5, 8 y 4, que se corresponden en los dos triángulos y están opuestos á ángulos iguales, se llaman lados *homólogos.*

Dividiendo 6 por 3, 10 por 5, 8 por 4, se obtienen cocientes iguales.

Las igualdades que resultan se escriben de este modo:

$$\frac{6}{3}=\frac{10}{5} \qquad \frac{6}{3}=\frac{8}{4} \qquad \frac{8}{4}=\frac{10}{5}$$

La primera igualdad, por ejemplo, se lee así: 6 es á 3 igual á 10 es á 5.

Estas igualdades se llaman *proporciones;* los lados homólogos tomados de dos en dos se dice que *son proporcionales.*

De todo lo expuesto se deduce la siguiente:

Propiedad general — Dos triángulos semejantes tienen sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales.

191. *Propiedades de las proporciones.*

Escríbase en el pizarron la 1.ª proporcion. Atendiendo al órden de escritura, el 6 y el 5 se llaman términos *extremos;* y el 3 y el 10 términos *medios.* Se verifica el siguiente:

Principio fundamental—En toda proporcion el producto de los *extremos* es igual al producto de los *medios.*

Quiere decir que 6 por 5 es igual á 10 por 3.

Demostracion—En efecto, reduzcamos los dos quebrados iguales al mismo denominador:

$$\frac{5\times6}{3\times5}=\frac{3\times10}{3\times5}$$

Estos dos quebrados que tienen el mismo denominador no pueden ser iguales si los numeradores no son iguales tambien; luego

$$6\times5=3\times10$$

192. Observando de nuevo la 1.ª proporcion y la igualdad anterior, tendremos que el extremo 6 se obtendrá multiplicando 10 por 3 y dividiendo por 5.

$$6=\frac{3\times10}{5}$$

Del mismo modo el extremo 5 se obtendrá multiplicando 10 por 3 y dividiendo por 6.

$$5=\frac{3\times10}{6}$$

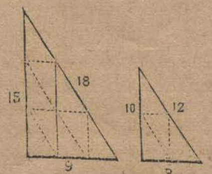
De esto resulta un

2.º principio: En toda proporcion un término extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.

Del mismo modo se deduciría que *un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio.*

193. EJERCICIOS :

1.º Aplíquese y hágase el estudio de estos principios en las otras dos proporciones anteriores.



(Fig. 87)

2.º Hágase el estudio de estos dos triángulos semejantes (Fig. 87). Fórmense con los lados homólogos tres clases de proporciones y aplíquense á éstos los principios anteriores.

Observacion — Estos dos triángulos están formados de un número de triangulitos iguales todos entre sí.

194. En general dos triángulos semejantes están formados de un número exacto de triangulitos todos iguales, por pequeños que sean.

195. EJERCICIOS Y PROBLEMAS :

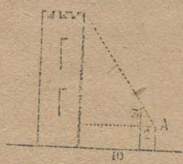
Para reconocer, ante todo, que dos triángulos son semejantes, sentaremos y admitiremos como cierto el siguiente principio:

Si dos triángulos tienen sus ángulos respectivamente iguales, estarán for-

mados necesariamente de un número exacto de triangulitos iguales, por pequeños que sean, y los triángulos serán semejantes.

Luego, sus lados homólogos serán proporcionales.

207. *Problema* — Hallar la altura de una torre (Fig. 88).



(Fig, 88)

Una visual dirigida desde el extremo *A* de un palo vertical á la parte superior de la torre, pasando por el extremo de otro palo tambien vertical; con la diferencia de alturas de los dos palos y la altura de la torre se forman dos triángulos semejantes. El ángulo *A* es comun á los dos triángulos; demuéstrese que los ángulos son iguales en los dos triángulos.

Base y altura del menor 2 y 3; del mayor 10 y x.

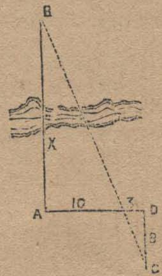
Formando proporcion con los lados homólogos, se tendrá:

$$\frac{x}{3} = \frac{10}{2}$$

Hállese el valor de x, agréguese la altura del palo menor y se tendrá la altura de la torre.

208. Dibújense cuatro rectas cuyas longitudes sean como los números 1, 2, 3, 6; 1.° Fórmese una proporcion; 2.° Aplíquense á esta proporcion los principios demostrados anteriormente.

209. *Problema* — Se ha trazado de este lado de un rio (Fig. 89) una recta *A D* como base, con las longitudes 10 m. y 3 m., con una perpendicular *D C* de 8 m.; luego se ha supuesto la perpendicular x hasta el



(Fig. 89)

punto *B*. Demuéstrese que los triángulos son semejantes y calcúlese la distancia x, distancia inaccesible.

210. *Problema* — Hallar la altura de un árbol por la sombra arrojada (Fig. 90). El árbol con su sombra proyectada y un palo colocado verticalmente con su sombra tambien, forman dos triángulos semejantes,

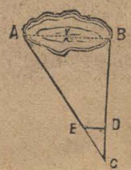
(Fig. 90)

porque los rayos solares, en un mismo instante, se consideran como paralelos y forman ángulos iguales con los objetos verticales.

La altura del palo es de 2 m. y su sombra 1 m. 5. La sombra del árbol mide, por ejemplo, 10 m. 5. Fórmese proporcion y hállese el valor de x ó altura del árbol. Resultado :=14 metros. Del mismo modo se calcularía la altura de la torre de una iglesia ó de otro objeto cualquiera, pudiéndose medir la distancia entre el pié de la vertical que pasa por el extremo superior y el extremo de la sombra arrojada.

211. *Problema* — La sombra proyectada por un edificio es de 12 m. 50. La sombra proyectada por un palo vertical en ese mismo instante es la mitad de la altura del palo. Hágase el dibujo y calcúlese la altura del edificio.

212. *Problema* — La altura del sol sobre el horizonte es el ángulo formado por una visual horizontal y la visual dirigida al astro. Se ha colocado un baston verticalmente ; la sombra proyectada es igual á la altura del baston. Se pide el ángulo de altura del sol sobre el horizonte.



(Fig. 91)

213. *Problema* — Medida del ancho de una laguna (Fig. 91).

Se colocan dos señales en los extremos A y B de la línea inaccesible que se quiere medir. Levántese á esta recta desde B una perpendicular con la escuadra de agrimensor, midiéndose en ella 80 m., por ejemplo, hasta el punto C.

Tómese una dimension $C\ D$ igual á 20 metros, por ejemplo, y levántese otra perpendicular, $D\ E$, supongamos de 15 m., hasta que los puntos C, E y A estén en línea recta.

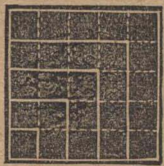
Tendremos en estos dos triángulos semejantes la siguiente proporcion :

$$\frac{x}{15} = \frac{80}{20}$$

Cuánto tiene de ancho la laguna ?

COMPARACION DE LAS FIGURAS SEMEJANTES

196. Supongamos esta série de cuadrados (Fig. 92). Supongamos, además, que el menor cuadrado es la unidad cuadrada y su lado la unidad lineal. En estos



(Fig. 92)

5 cuadrados se observa que los lados de los cuadrados van como los números 1, 2, 3, 4, 5, mientras que los cuadrados van como los números 1, 4, 9, 16, 25, etc. Por tal razon estos últimos números se llaman cuadrados.

197. *Aplicaciones:*

214. *Problema* — En un pueblo existen 2 plazas cuadradas. La 2.ª plaza es cuatro veces la 1.ª; teniendo ésta 80 metros de lado, cuánto tendrá de lado la mayor ? Hágase el dibujo.

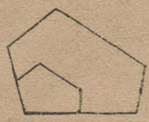
215. *Problema* — Existen dos terrenos cuadrados: el 1.º tiene de lado 20 metros. El 2.º tiene 60 metros. Cuánto es el 2.º cuadrado mayor que el 1.º ? Hágase el dibujo.

216. *Problema* — Dibújense dos rectángulos semejantes. Cada lado del mayor es 3 veces el del menor. Teniendo el menor 30 metros de base por 16 de altura, se pide : 1.º Las dimensiones del mayor. 2.º Cuánto será el 2.º rectángulo mayor que el 1.º ? 3.º Cuáles son las áreas de los dos ?

De todo lo expuesto deducimos los siguientes principios geométricos:

198. Dos figuras semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.

199. Dos figuras semejantes tienen sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales.



(Fig. 93)

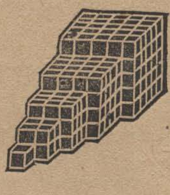
217. *Problema* — Sean dos polígonos semejantes (Fig. 93); los lados homólogos del mayor son dobles de los del menor; siendo el perímetro del menor 54 m. y su superficie 250 metros cuadrados. Se pide el perímetro del polígono mayor y su área.

EJERCICIO:

Háganse ejercicios variados análogos á los anteriores.

SÓLIDOS SEMEJANTES

200. Se llaman sólidos semejantes los que tienen la misma forma, aunque no sean iguales.



(Fig. 94)

Todos los cubos son sólidos semejantes. Todas las esferas son semejantes.

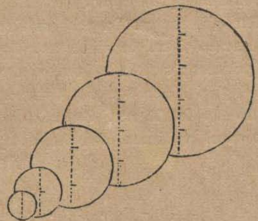
201. Suponiendo que en la série de cubos (Fig. 94), el cubo menor representa la unidad cúbica y una cara la unidad cuadrada y una arista la unidad lineal:

Observaremos que las aristas de los cubos van como los números 1, 2, 3, 4, 5, etc.

Las caras de los diferentes cubos van como los números cuadrados 1, 4, 9, 16, 25, etc.

Y los volúmenes van como los números cubos, 1, 8, 27, 64, 125, etc.

Esta propiedad se enuncia, diciendo que, *los sólidos semejantes son proporcionales á los cubos de sus aristas.*



(Fig. 95)

Las esferas gozan de la misma propiedad (Fig. 95).

Suponiendo que la esfera menor vale una unidad de volúmen y su diámetro una unidad lineal, observaremos que los diámetros van como los números 1, 2, 3, 4, 5, etc.

Y las esferas, siguiendo la misma ley geométrica que los cubos, van como los cubos de los diámetros 1, 8, 27, 64, 125, etc.

Quiere decir que, la segunda esfera vale 8 esferas iguales á la primera; la tercera 27 esferas; la cuarta 64 esferas, etc.

Principio — Dos esferas son proporcionales á los cubos de sus diámetros.

202. Ejercicios :

218. Existen dos cubos : uno tiene de arista 3 metros y el otro 6 metros. Cuánto es el segundo mayor que el primero ?

219. Un cubo es 27 veces mayor que otro ; si el segundo tiene de arista 2 metros, cuánto tendrá de arista el primero ?

220. Un cubo tiene de arista 2 decímetros. Otro tiene 8 decímetros. Se pide cuánto es una cara del segundo cubo, mayor que una del primero. Cuánto tiene de volúmen el segundo cubo más que el primero?

221. Existen dos esferas, una de triple diámetro que la otra. Cuánto vale la primera esfera comparada con la segunda ?

222. Una esfera tiene 2 metros de diámetro ; otra es 8 veces mayor que la primera.

223. Cuánto tiene de diámetro la mayor ?

224. Existen tres esferas diferentes. La primera tiene 1 m. de diámetro, la segunda 3 m. y la tercera 5 m. de diámetro. Se pide cuánto es la segunda mayor que la primera ; cuánto es la tercera mayor que la primera ?

225. *Problema* — El Sol y la Tierra son dos esferas. El diámetro del Sol es 112 veces el diámetro de la Tierra. Suponiendo el volúmen de la Tierra como 1, cuánto es el volúmen del Sol, comparado con el de la Tierra ?

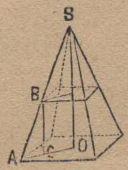
203. *Medida del tronco de pirámide.*

Cuando se corta una pirámide (supondremos regular) por un plano paralelo á la base, el trozo inferior se llama *tronco de pirámide* y el superior *pirámide deficiente.* La pirámide deficiente es semejante á la total. El volúmen del tronco de pirámide será igual al volúmen de la pirámide total, restándole el volúmen del de la deficiente (Fig. 96).

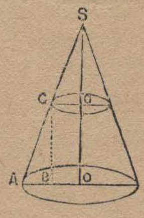
Pero no conocemos la altura total y sí la del tronco. Para eso se mide el largo de la arista $B\ A$ y la altura del tronco $B\ C$ y se construye un triángulo rectángulo $A\ B\ C$, que será semejante al triángulo $S\ A\ O$. Supongamos que $A\ C$ nos dé 3 decímetros y altura $B\ C$, 6 decím.; y $A\ O$ 5 decím.; $S\ O = x$ se tendrá la proporcion

$$\frac{x}{6} = \frac{5}{3}$$

dándonos para x, ó altura total, 10 decím. y por consiguiente, para la altura de la deficiente 4 decímetros.



(Fig. 96)



(Fig. 97)

Ahora se puede hallar fácilmente el volúmen del tronco.

204. *Medida del tronco de cono* (Fig. 97).

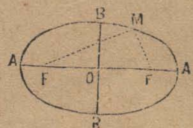
Cuando se corta un cono por un plano paralelo á la base, el trozo inferior se llama *tronco de cono* y el superior *cono deficiente.* El cono deficiente es semejante al total.

Para hallar el volúmen del tronco de cono, se sigue el mismo procedimiento que en el caso del tronco de pirámide.

TRAZADO DE ARCOS REBAJADOS

205. Elipse — La elipse es una curva plana, cerrada, en que la suma de las distancias de cada punto á dos puntos fijos *F* y *F'* es constante. Los dos puntos se llaman *focos* (Fig. 98).

Las rectas *A A* y *B B* que se cortan perpendicularmente y en partes iguales, se llaman eje mayor y eje menor; el punto *O* de interseccion es el centro de la elipse.



(Fig. 98)

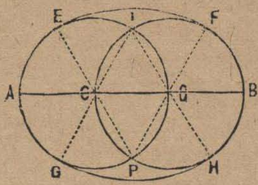
206. *Trazado de la elipse dados sus dos ejes.*

Se construyen perpendicularmente los dos ejes *A A* y *B B* (Fig. 98).

Haciendo centro en el punto *B*, con un rádio igual á la mitad del eje mayor se marcan los focos *F* y *F'*. Luego se toma un hilo del largo del eje mayor. Sus extremos se sujetan en los dos focos y manteniendo el hilo siempre tirante, con la punta de un lápiz, éste irá señalando la curva, que será elipse.

207. Para hallar la superficie de la elipse *se multiplica 22/7 por el producto de los dos semiejes.*

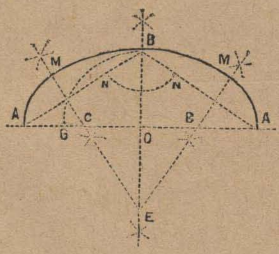
208. Óvalo — Trazado de un óvalo sobre una recta dada *A B* (Fig. 99).



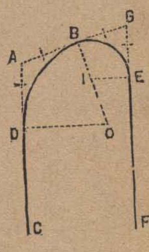
(Fig. 99)

Se describen dos circunferencias, teniendo cada una por rádio el tercio de la recta dada, y cuyos centros están en los puntos *C* y *D*.

Se trazan las rectas *I C G*, *I D H*, *P D F* y *P C E*. Haciendo centro en *P* y en *I* con el mismo rádio *P F*, ó *I H*, se trazan los arcos *E F* y *G H*.



(Fig. 100)



(Fig. 101)

209. *Trazado del arco rebajado de tres centros* (Fig. 100). Sea *A A'* la abertura; *B O* la flecha ó altura. Se hace *O G* igual á *O B*; despues se toma *B N* y *B N'* iguales á *A G*, se levantan las perpendiculares *M E* y

M' E, en los puntos medios de las líneas *A N* y *A' N*. Los puntos *C*, *B'*, *E*, son los centros de los arcos *A M*, *M B M'* y *M' A'*.

210. *Trazado del arco en rampa* (Fig. 101).

Sean *A C* y *G F* las rectas que limitan los piés derechos; *A G* la recta paralela á la rampa; *B* su punto medio. Se toman *A D* y *G E* iguales á la mitad de la recta *A G*; luego se trazan las perpendiculares *D O*, *B I*, *I E* á las tres rectas. Los puntos *O* é *I* serán los centros de los arcos *B D* y *B E*.

ÍNDICE