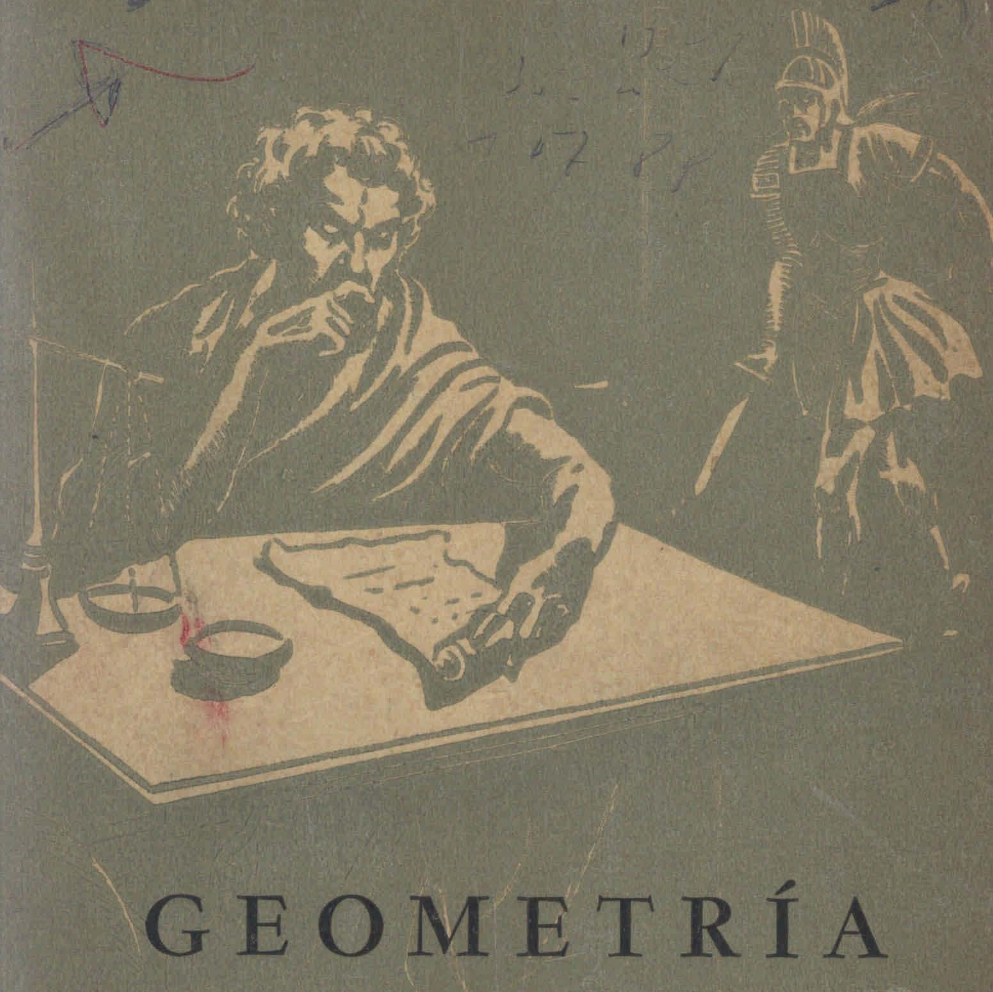
REPETTO · LINSKENS · FESQUET



GEOMETRÍA

SEGUNDO CURSO

BACHILLERATO - MAGISTERIO - COMERCIO

EDITORIAL KAPELUSZ

GEOMETRÍA

PARA SEGUNDO AÑO DEL CICLO BASICO
Y ESCUELAS DE COMERCIO

M. C. Cuffani

2 de 2 do

GEOMETRÍA

PARA SEGUNDO AÑO DEL CICLO BÁSICO
Y ESCUELAS DE COMERCIO

CELINA H. REPETTO

PROFESORA DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA. DOCTORA EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS. PROFESORA EN LA ESCUELA NORMAL "SARMIENTO", EN EL INSTITUTO NACIONAL DEL PROFESORADO SECUNDARIO, EN LA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA, EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA, Y DE ARQUITECTURA Y URBANISMO DE LA UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES.

MARCELA E. LINSKENS

PROFESORA DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN MATEMÁTICAS Y FRANCÉS. EX CATEDRÁTICA EN LAS ESCUELAS: NORMAL Nº 8 "PTE. JULIO A. ROCA", LICEO NACIONAL DE SEÑORITAS Nº 3 "JOSÉ M. ESTRADA", ESCUELA NACIONAL DE COMERCIO DE RAMOS MEJÍA, ESCUELA NACIONAL DE COMERCIO Nº 2 "DR. ANTONIO BERMEJO", ESCUELA NACIONAL DE COMERCIO Nº 5 "JOSÉ DE SAN MARTÍN", COLEGIO NACIONAL Nº 1 "BERNARDINO RIVADAVIA", LICEO NACIONAL DE SEÑORITAS Nº 12 "FRAY MAMERTO ESQUIÚ"

HILDA B. FESQUET

MAESTRA NORMAL NACIONAL. PROFESORA DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN MATEMÁTICAS.

RESPONDE ESTRICTAMENTE A LOS PROGRAMAS ACTUALES

EDITORIAL KAPELUSZ • BUENOS AIRES
MORENO 372

Publicado en mayo de 1940.

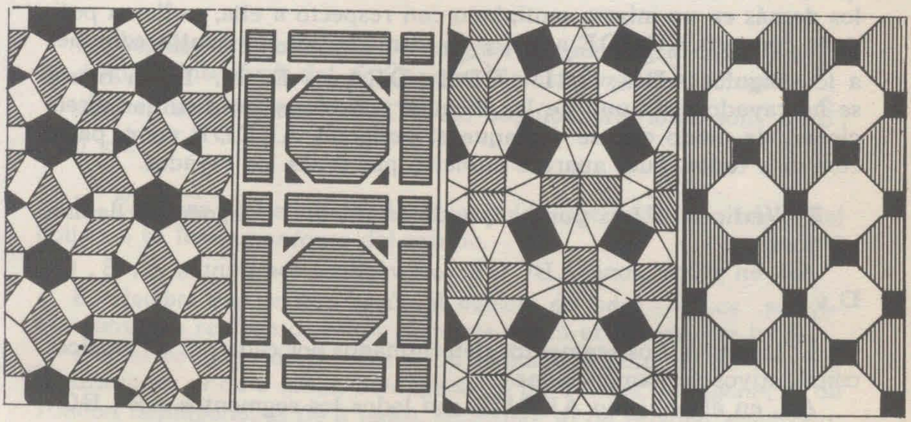
Decimosexta edición, enero de 1960.

LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA

CAPÍTULO I.

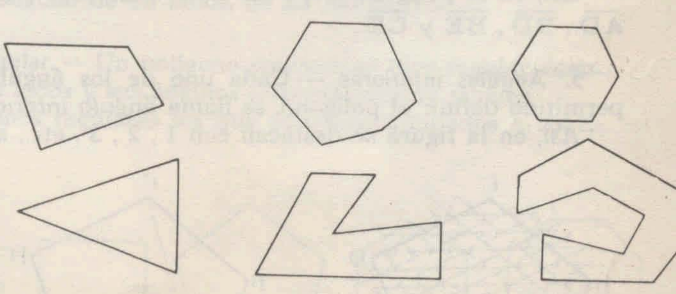
POLÍGONOS CONVEXOS.

1. Todos hemos utilizado muchas veces la palabra *polígono,* y hemos visto dibujados muchos de ellos en mosaicos, ventanales, etc. como los que aparecen en la figura.



Sabemos que se trata siempre de figuras planas cuyo contorno está formado por trazos rectos.

Así, son polígonos los que aparecen dibujados a continuación:



En todo polígono figuran por lo menos tres ángulos. Esto justifica el nombre de polígono, pues etimológicamente está formado así: *poli* = muchos; *gono* = ángulo, es decir, muchos ángulos.

Al observar los polígonos de la figura anterior, vemos que los dos últimos tienen una característica que los diferencia de los cuatro primeros. A los del primer grupo se los llama *polígonos convexos* y a los dos últimos *polígonos cóncavos*.

Veamos la definición de polígono convexo.

DEFINICIÓN. Dados en un plano, tres o más puntos, por ejemplo A, B, C, D, E, tales que tres consecutivos no estén alineados y que la recta determinada por dos consecutivos cualesquiera deje a los demás en un mismo semiplano con respecto a ella, se llama *polígono convexo* ABCDE a la figura formada por los puntos comunes a los ángulos $\widehat{ABC}$; $\widehat{BCD}$; $\widehat{CDE}$; $\widehat{DEA}$, y $\widehat{EAB}$. En la figura se ha rayado cada uno de los ángulos con trazos en distintas direcciones, de modo que se destaque el polígono, ABCDE como parte común a todos, pues aparece cubierto por todos los rayados.

2. Vértices. — Los puntos que determinan el polígono, se llaman *vértices*.

Así, en el polígono ABCDE son vértices los puntos A, B, C, D y E.

3. Lados. — Los segmentos determinados por cada par de vértices consecutivos se llaman lados.

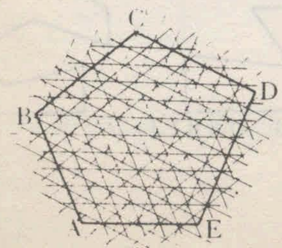
Así, en el polígono ABCDE son lados los segmentos $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$.

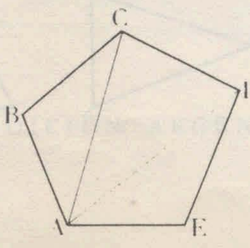
4. Diagonales. — Los segmentos determinados por cada par de vértices no consecutivos, se llaman *diagonales*.

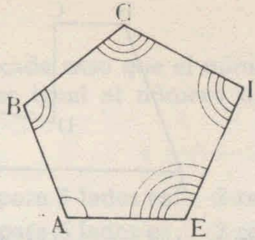
Así, en el polígono ABCDE son diagonales los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CE}$.

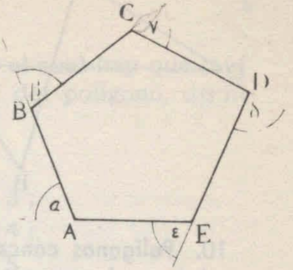
5. Ángulos interiores. — Cada uno de los ángulos que nos han permitido definir el polígono, se llama *ángulo interior del mismo*.

Así, en la figura se destacan con 1, 2, 3, etc., arcos los ángulos









interiores del polígono, que se leen directamente por la letra del vértice.

Así, en el polígono ABCDE, los ángulos interiores son: $\hat{A}$; $\hat{B}$; $\hat{C}$; $\hat{D}$ y $\hat{E}$.

6. Ángulos exteriores. — Los ángulos adyacentes a cada uno de los ángulos interiores del polígono se llaman *ángulos exteriores*.

Así, en el polígono ABCDE los ángulos exteriores son: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ y $\hat{\varepsilon}$.

7. Contorno. — La quebrada constituída por todos los lados del polígono se llama *contorno* del mismo.

8. Nombre que reciben según el número de lados. — Los polígonos convexos reciben distintos nombres según el número de lados.

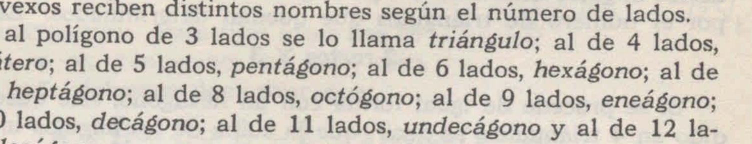
Así, al polígono de 3 lados se lo llama *triángulo*; al de 4 lados, *cuadrilátero*; al de 5 lados, *pentágono*; al de 6 lados, *hexágono*; al de 7 lados, *heptágono*; al de 8 lados, *octógono*; al de 9 lados, *eneágono*; al de 10 lados, *decágono*; al de 11 lados, *undecágono* y al de 12 lados, *dodecágono.*

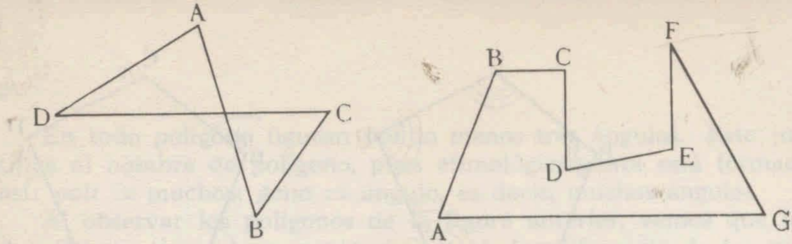
Cuando el polígono tiene un número *n* de lados, mayor que 12, se llama polígono de *n* lados.

Así, se dice polígono de 18 lados, de 23 lados, etc.

9. Polígono regular. — Un polígono convexo se dice regular cuando tiene todos sus lados y sus ángulos respectivamente iguales.

Así son polígonos regulares los que aparecen dibujados a continuación:





10. Polígonos cóncavos. — Si un lado (o más) del polígono es tal que deja a algunos de los demás vértices no pertenecientes a él en distintos semiplanos respecto del mismo, el polígono se dice *cóncavo*. Así, por ejemplo, son cóncavos los dos polígonos de la figura. En general, cuando decimos polígonos nos referimos a un polígono convexo.

11. Suma de los ángulos interiores de un polígono. — Habiendo demostrado ya en el primer curso que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos, se determina a continuación a qué es igual la suma de los ángulos interiores de un polígono de cualquier número de lados.

Para ello observemos que si en un pentágono, se trazan todas las diagonales correspondientes a uno de los vértices, por ejemplo, el de la figura, queda dividido en 3 triángulos. Como la suma de los ángulos de cada triángulo es igual a 2 rectos, para obtener la suma de los ángulos interiores del pentágono hay que multiplicar 2 rectos por el número de triángulos que quedan determinados. Es decir:

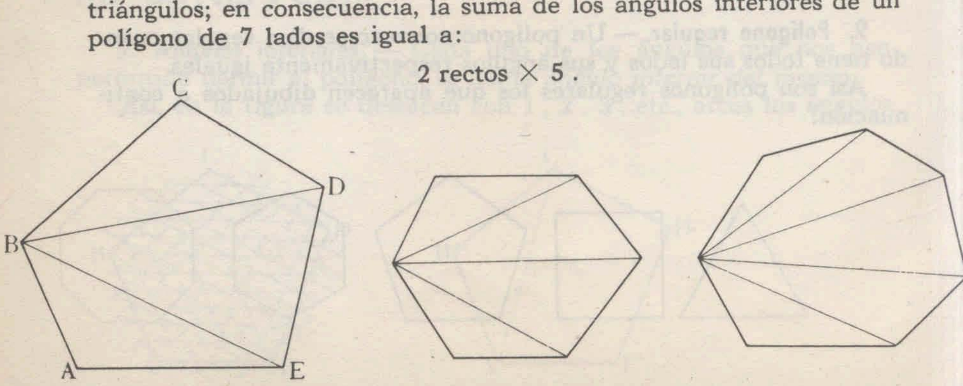
$$2 \text{ rectos} \times 3 .$$

Si se procede de igual forma con un hexágono, éste queda dividido en 4 triángulos; es decir, que la suma de los ángulos interiores del polígono de 6 lados es igual a:

$$2 \text{ rectos} \times 4 .$$

Si se hace lo mismo con un heptágono, éste queda dividido en 5 triángulos; en consecuencia, la suma de los ángulos interiores de un polígono de 7 lados es igual a:

$$2 \text{ rectos} \times 5 .$$



Se observa en cada caso que el número por el cual hay que multiplicar 2 rectos, es igual al número de lados del polígono, disminuido en 2.

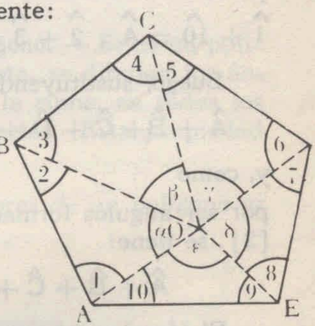
En efecto:

para 5 lados es 2 rectos $\times$ 3 ;
para 6 lados es 2 rectos $\times$ 4 ;
para 7 lados es 2 rectos $\times$ 5 .

En general, si se trata de n lados, el polígono queda dividido en $n - 2$ triángulos, y por lo tanto la suma de los ángulos interiores es igual a:

$$2 \text{ rectos } (n - 2) .$$

Esta observación se demuestra en el siguiente:



TEOREMA. *La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a dos rectos por el número de lados, menos dos.*

H) Polígono ABC. . .N

T) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \ldots + \hat{N} = 2$ rectos $(n - 2)$

DEMOSTRACIÓN. Para fijar ideas nos referiremos a un pentágono; en este caso, como $n = 5$, debemos demostrar que:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 2 \text{ rectos } (5 - 2) .$$

Se considera un punto interior cualquiera del polígono, el O por ejemplo, y se lo une. El polígono queda dividido en los triángulos $\overset{\triangle}{AOB}$, $\overset{\triangle}{BOC}$, $\overset{\triangle}{COD}$, $\overset{\triangle}{DOE}$ y $\overset{\triangle}{EOA}$, y como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos se tiene que:

En el $\overset{\triangle}{AOB}$ es $\hat{1} + \hat{2} + \hat{\alpha} = 2$ rectos .

En el $\overset{\triangle}{BOC}$ es $\hat{3} + \hat{4} + \hat{\beta} = 2$ rectos .

En el $\overset{\triangle}{COD}$ es $\hat{5} + \hat{6} + \hat{\gamma} = 2$ rectos .

En el $\overset{\triangle}{DOE}$ es $\hat{7} + \hat{8} + \hat{\delta} = 2$ rectos .

En el $\overset{\triangle}{EOA}$ es $\hat{9} + \hat{10} + \hat{\varepsilon} = 2$ rectos .

Sumando miembro a miembro estas iguadades, se tiene:

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{\alpha} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{\beta} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{\gamma} + \hat{7} + \hat{8} + \hat{\delta} + \hat{9} + \widehat{10} + \hat{\varepsilon} = $$
$$= 2 \text{ rectos} \times 5 .$$

Aplicando la propiedad conmutativa en la suma anterior, se escriben uno a continuación de otro los pares de ángulos designados por números, tales que la suma de dos de ellos dé un ángulo del polígono y por último todos los ángulos designados con letras griegas, es decir:

$$\hat{1} + \widehat{10} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} + \hat{9} + \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\delta} + \hat{\varepsilon} =$$
$$= 2 \text{ rectos} \times 5 \qquad [1]$$

pero:

$$\hat{1} + \widehat{10} = \hat{A} \ ; \ \hat{2} + \hat{3} = \hat{B} \ ; \ \hat{4} + \hat{5} = \hat{C} \ ; \ \hat{6} + \hat{7} = \hat{D} \ ; \ \hat{8} + \hat{9} = \hat{E}$$

Luego, sustituyendo en [1], se tiene:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\delta} + \hat{\varepsilon} = 2 \text{ rectos} \times 5 \quad [2]$$

y, como $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\delta} + \hat{\varepsilon} = 4 \text{ rectos}$

por ser ángulos formados alrededor de un punto, reemplazando en [2], se tiene:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + 4 \text{ rectos} = 2 \text{ rectos} \times 5 .$$

El término 4 rectos, que está precedido por el signo más, en el primer miembro, se pasa al segundo miembro, precedido por el signo menos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 2 \text{ rectos} \times 5 - 4 \text{ rectos} .$$

Como $4 \text{ rectos} = 2 \text{ rectos} \times 2$

reemplazando en la igualdad anterior, queda:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 2 \text{ rectos} \times 5 - 2 \text{ rectos} \times 2 .$$

Sacando el factor común 2 rectos en el segundo miembro, se tiene, en definitiva:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 2 \text{ rectos} (5 - 2) .$$

Hemos demostrado el teorema para el caso particular en que:

$$n = 5$$

pero, como igual demostración puede hacerse para un polígono de un número n cualquiera de lados, queda demostrada, en general, la igualdad de la tesis, es decir:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \ldots + \hat{N} = 2 \text{ rectos } (n - 2)$$

EJEMPLO:

Calcular la suma de los ángulos interiores de un heptágono.

Como en este caso $n = 7$, se tiene:

Suma de ángulos interiores del heptágono $= 2$ rectos $(7 - 2) =$

$= 2$ rectos $\times 5 = 10$ rectos.

Como 1 recto $= 90°$, es:

suma de ángulos interiores del heptágono $= 10 \times 90° = 900°$.

12. **Suma de los ángulos exteriores de un polígono.** — Si en un polígono cualquiera, un pentágono, un hexágono, etc., se dibujan los ángulos exteriores, luego se miden y se calcula la suma, en todos los casos dicha suma resulta siempre igual a 4 rectos. Esta propiedad se demuestra en el siguiente:

TEOREMA. *La suma de los ángulos exteriores de un polígono es igual a cuatro rectos.*

H) Políg. ABCD . . . N .

T) Suma de los ángulos exteriores $= 4$ rectos.

DEMOSTRACIÓN. En cada vértice, el ángulo exterior y el interior correspondiente son adyacentes; luego, la suma de ambos es igual a 2 rectos. Por lo tanto, como el polígono tiene n vértices, la suma de todos los ángulos interiores más la suma de todos los ángulos exteriores, es igual a n veces 2 rectos. Es decir:

Suma de los ángulos exteriores + suma de los ángulos interiores $=$

$= 2 \text{ rectos} \cdot n$ [1]

pero, por el teorema anterior:

Suma de los ángulos interiores $= 2$ rectos $(n - 2)$ [2]

Restando m. a m. de la igualdad [1], la igualdad [2]:

Suma de los ángulos exteriores + suma de los ángulos interiores —

— suma de los ángulos interiores $= 2 \text{ r} \cdot n - 2 \text{ r} \cdot (n - 2)$

Reduciendo en el primer miembro la suma de ángulos interiores que aparece con signo más y con signo menos y efectuando la multiplicación indicada por el paréntesis, se tiene:

Suma de los ángulos exteriores $= 2\text{ r}\cdot n - 2\text{ r}\cdot n + 4\text{ r}$.
Reduciendo $2\text{ r} . n$, que figura con signo más y con signo menos:
Suma de los ángulos exteriores $= \cancel{2\text{ r}\cdot n} - \cancel{2\text{ r}\cdot n} + 4\text{ r}$
o sea:

$$\boxed{\text{Suma de los ángulos exteriores} = 4 \text{ rectos}}$$

que es lo que queríamos demostrar.

13. Observación. Es conveniente observar que la suma de los ángulos interiores de un polígono depende del número de lados del mismo, mientras que la suma de los ángulos exteriores tiene el mismo valor, 4 rectos, para cualquier polígono.

14. Relación entre un lado de un polígono y la suma de los demás. — Para el caso particular en que el polígono sea un triángulo, se ha demostrado que un lado del triángulo es menor que la suma de los otros dos.

Esta propiedad, para un polígono de un número cualquiera de lados, se generaliza en el siguiente.

Teorema. *En todo polígono, un lado es menor que la suma de los demás.*

H) Políg. ABCD ··· MN.

T) $\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CD} + \cdots + \overline{MN} + \overline{NA}$

$\overline{BC} < \overline{CD} + \overline{DE} + \cdots + \overline{NA} + \overline{AB}$

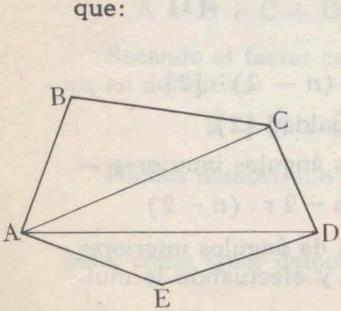
etc.

Para concretar ideas, consideraremos un polígono de 5 lados, por ejemplo ABCDE, en cuyo caso tendremos que llegar a demostrar que:

$$\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}$$

$$\overline{BC} < \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} + \overline{AB}$$

etc.



Demostración. Trazamos las diagonales que pasan por un vértice, por ejemplo el A, y nos quedan así formados los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{ACD}$ y $\overset{\triangle}{ADE}$.

Como en todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos, se tiene que:

En el $\overset{\triangle}{ABC}$ es:

$$\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{AC}$$

En el $\overset{\triangle}{ACD}$ es:

$$\overline{AC} < \overline{CD} + \overline{AD}$$

En el $\overset{\triangle}{ADE}$ es:

$$\overline{AD} < \overline{DE} + \overline{EA}$$

Sumando m. a m.:

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} < \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EA}$$

Pasamos los términos $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$, que están con signo más en el primer miembro, al segundo miembro, precedidos por el signo menos, y se tiene:

$$\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EA} - \overline{AC} - \overline{AD}$$

Reduciendo, en el segundo miembro, los dos términos $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$, resulta:

$$\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EA} - \overline{AC} - \overline{AD}$$

o sea:

$$\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}$$

En forma análoga, se demuestran las relaciones correspondientes a los lados $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$. Además el teorema queda establecido en general, pues cualquiera sea el número de lados del polígono que se considere, la demostración es similar a la anterior, ya que difiere, únicamente en el número de triángulos en que queda subdividido el polígono.

15. Igualdad de polígonos. — DEFINICIÓN. Se dice que un polígono es igual a otro cuando tiene todos sus lados y ángulos respectivamente iguales a los lados y ángulos del otro.

Simbólicamente:

Polígono $ABC \cdots MN$ = polígono $A'B'C' \cdots M'N'$:

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \vdots \\ \overline{MN} = \overline{M'N'} \\ \overline{NA} = \overline{N'A'} \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \vdots \\ \hat{M} = \hat{M}' \\ \hat{N} = \hat{N}' \end{array} \right.$$

16. NOTA. Obsérvese que en la misma definición está incluído que dos polígonos para ser iguales, deben tener igual número de lados.

17. **Caracteres de la igualdad de polígonos.** — La igualdad de polígonos goza, como toda relación de igualdad, de los tres caracteres fundamentales:

CARÁCTER IDÉNTICO. *Todo polígono es igual a sí mismo.*

Simbólicamente:

$$\text{Polígono } ABC \cdots MN = \text{polígono } ABC \cdots MN$$

CARÁCTER RECÍPROCO. *Si un polígono es igual a otro, éste es igual a aquél.*

Simbólicamente:

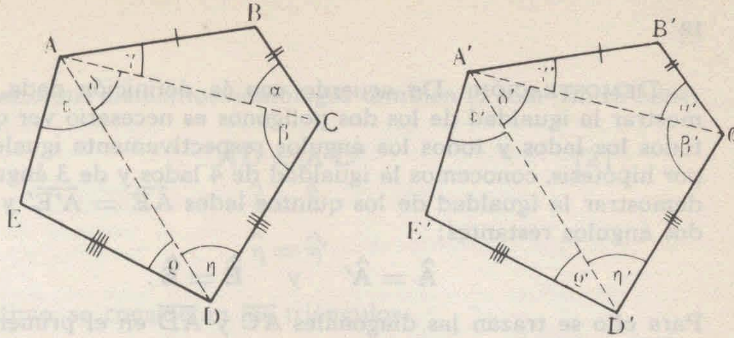
$$\begin{array}{ll} \text{Si} & \text{polígono } ABC \cdots MN = \text{polígono } A'B'C' \cdots M'N \\ \text{es:} & \text{polígono } A'B'C' \cdots M'N' = \text{polígono } ABC \cdots MN \end{array}$$

CARÁCTER TRANSITIVO. *Si un polígono es igual a otro y éste es igual a un tercero, el primero es igual al tercero.*

Simbólicamente:

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & \text{políg. } ABC \cdots MN = \text{políg. } A'B'C' \cdots M'N' \\ \text{y} & \text{políg. } A'B'C' \cdots M'N' = \text{políg. } A''B''C'' \cdots M''N'' \\ \text{es} & \text{políg. } ABC \cdots MN = \text{políg. } A''B''C'' \cdots M''N'' \end{array}$$

CONSECUENCIA. *Dos polígonos iguales a un tercero son iguales entre sí.*



18. Así como para verificar si dos triángulos son iguales no es necesario comprobar la igualdad de todos sus elementos, sino de algunos de ellos, según lo establecen los criterios de igualdad de triángulos, tampoco es necesario comprobar la igualdad de todos los elementos de dos polígonos para asegurar que son iguales. El teorema que sigue expresa la condición suficiente que deben cumplir dos polígonos para ser iguales.

TEOREMA. *Si dos polígonos tienen* $(n - 1)$ *lados consecutivos y los* $(n - 2)$ *ángulos comprendidos por cada dos de esos lados, respectivamente iguales, son iguales.*

Referiremos la demostración de este teorema al caso de polígonos de cinco lados En consecuencia, por hipótesis, los dos polígonos deben tener 4 lados iguales y los 3 ángulos comprendidos entre cada par de esos lados, también iguales.

H) Polígono ABCDE y polígono A′B′C′D′E′

$$\text{Lados}\begin{cases}\overline{AB} = \overline{A'B'}\\ \overline{BC} = \overline{B'C'}\\ \overline{CD} = \overline{C'D'}\\ \overline{DE} = \overline{D'E'}\end{cases}$$

$$\text{Ángulos}\begin{cases}\hat{B} = \hat{B}'\\ \hat{C} = \hat{C}'\\ \hat{D} = \hat{D}'\end{cases}$$

T) Polígono ABCDE = polígono A′B′C′D′E′.

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con la definición dada, para demostrar la igualdad de los dos polígonos es necesario ver que tienen todos los lados y todos los ángulos respectivamente iguales. Como, por hipótesis, conocemos la igualdad de 4 lados y de 3 ángulos, basta demostrar la igualdad de los quintos lados $\overline{AE} = \overline{A'E'}$ y la de los dos ángulos restantes:

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \text{y} \quad \hat{E} = \hat{E}.$$

Para ello se trazan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ en el primer polígono y $\overline{A'C'}$ y $\overline{A'D'}$ en el segundo.

Se consideran ahora los triángulos:

$$\left.\begin{array}{c} \overset{\triangle}{ABC} \text{ y } \overset{\triangle}{A'B'C'} \\ \text{que tienen:} \end{array}\right\{ \begin{array}{ll} \overline{AB} = \overline{A'B'} & \text{por hipótesis} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} & \text{por hipótesis} \\ \hat{B} = \hat{B}' & \text{por hipótesis} \end{array}$$

En consecuencia, por el primer criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

y por lo tanto sus elementos homólogos también lo son. Entre ellos:

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$$

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}'$$

$$\overline{AC} = \overline{A'C'} \qquad [1]$$

Se comparan ahora los triángulos:

$$\left.\begin{array}{c} \overset{\triangle}{ACD} \text{ y } \overset{\triangle}{A'C'D'} \\ \text{que tienen:} \end{array}\right\{ \begin{array}{l} \overline{AC} = \overline{A'C'} \text{ por lo demostrado en [1]} \\ \overline{CD} = \overline{C'D'} \text{ por hipótesis} \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}' \text{ por ser} \left\{\begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C}' \\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha}' \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \text{luego:} & \hat{C} - \hat{\alpha} = \hat{C}' - \hat{\alpha}' \\ \text{o sea:} & \hat{\beta} = \hat{\beta}' \end{array} \end{array}$$

En consecuencia, por el primer criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\overset{\triangle}{ACD} = \overset{\triangle}{A'C'D'}$$

y por lo tanto, sus elementos homólogos también lo son. Entre ellos:

$$\overline{AD} = \overline{A'D'} \qquad [2]$$

$$\hat{\delta} = \hat{\delta}'$$

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}'$$

Por último, se consideran los triángulos:

$$\widehat{ADE} \text{ y } \widehat{A'D'E'} \text{ que tienen} \begin{cases} \overline{AD} = \overline{A'D'} \text{ por lo demostrado en } [2] \\ \overline{DE} = \overline{D'E'} \text{ por hipótesis} \\ \hat{\varrho} = \hat{\varrho}' \text{ por ser} \begin{cases} \hat{D} = \hat{D}' \\ \hat{\eta} = \hat{\eta}' \end{cases} \begin{matrix} \text{luego: } \hat{D} - \hat{\eta} = \hat{D}' - \hat{\eta}' \\ \text{o sea: } \hat{\varrho} = \hat{\varrho} \end{matrix} \end{cases}$$

En consecuencia, por el primer criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\widehat{ADE} = \widehat{A'D'E'}$$

y por lo tanto sus elementos homólogos también lo son. Entre ellos:

$$\overline{AE} = \overline{A'E'} \qquad [3]$$

$$\hat{E} = \hat{E}' \qquad [4]$$

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}'$$

Además:

$$\hat{A} = \hat{A}' \qquad [5]$$

por ser

$$\begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \delta = \delta' \\ \varepsilon = \varepsilon' \end{cases} \begin{matrix} \therefore \hat{\alpha} + \hat{\delta} + \hat{\varepsilon} = \hat{\alpha}' + \hat{\delta}' + \hat{\varepsilon}' \\ \text{o sea:} \qquad \hat{A} = \hat{A}' \end{matrix}$$

De las igualdades de los lados de la hipótesis y de la igualdad demostrada [3], resulta que los polígonos tienen todos los lados iguales; de la igualdad de los ángulos de la hipótesis y de las igualdades demostradas [4] y [5], resulta que los polígonos tienen todos los ángulos respectivamente iguales. Por lo tanto, si los dos polígonos tienen todos los lados y todos los ángulos respectivamente iguales, son iguales, por definición, es decir:

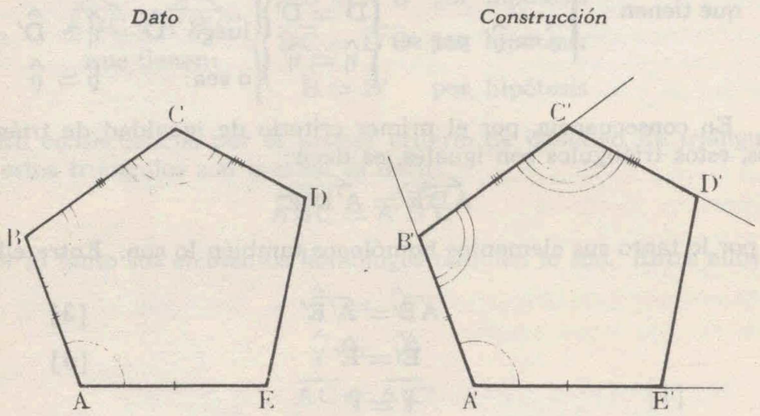
$$\text{polígono } ABCDE = \text{polígono } A'B'C'D'E'$$

que es lo que queríamos demostrar.

CONSTRUCCIÓN

19. Construir un polígono igual a otro dado.

Sea, por ejemplo, construir un polígono igual al ABCDE.



Se construye el ángulo $\hat{A}' = \hat{A}$; sobre cada uno de sus lados se determina respectivamente $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ y $\overline{A'E'} = \overline{AE}$. Con vértice B', lado $\overrightarrow{B'A'}$ y en el semiplano respecto de este lado que contiene a E', se construye el $\hat{B}' = \hat{B}$. Sobre el segundo lado de este ángulo se determina $\overline{B'C'} = \overline{BC}$. Con vértice C', lado $\overrightarrow{B'C'}$, y en el mismo semiplano respecto de $B'C'$ que contiene a E' se construye el $\hat{C}' = \hat{C}$. Sobre el segundo lado de este ángulo se determina $\overline{C'D'} = \overline{CD}$. Se une D' con E' y se obtiene el polígono pedido, pues de acuerdo con el teorema anterior, resulta:

$$\hat{D}' = \hat{D} \quad ; \quad \hat{E}' = \hat{E} \quad \text{y} \quad \overline{D'E'} = \overline{DE}\,.$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. Calcular la suma de los ángulos interiores:

   a) de un octógono;
   b) de un hexágono;
   c) de un decágono;
   d) de un eneágono.

2. Dadas las siguientes sumas de los ángulos interiores de distintos polígonos, decir en cada caso qué polígono es:

   a) 900°; c) 1.800°;
   b) 180°; d) 360°.

3. Calcular un ángulo interior de:

   a) un pentágono regular;
   b) un octógono regular;
   c) un decágono regular.

4. Calcular un ángulo exterior:

   a) de un heptágono regular;
   b) de un hexágono regular;
   c) de un decágono regular.

5. Dado un hexágono cualquiera construir otro igual a él.

6. Decir si los segmentos cuyas longitudes se indican a continuación pueden ser lados de un pentágono:

   38 cm; 12 cm; 95 cm; 20 cm; 17 cm.

CUADRILÁTEROS.

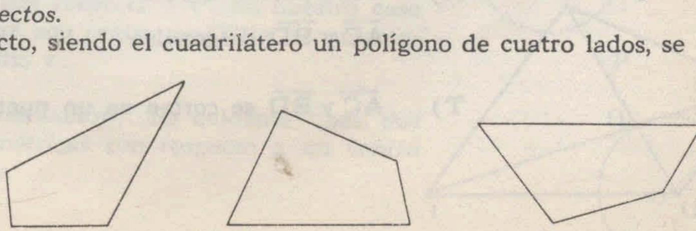
20. DEFINICIÓN. Todo polígono convexo de cuatro lados se llama *cuadrilátero convexo* o abreviadamente *cuadrilátero.*

Así, son cuadriláteros los que aparecen dibujados al pie.

21. **Propiedades de los cuadriláteros deducidos de las de los polígonos en general.** — De acuerdo con la definición y recordando las propiedades de los polígonos, se deduce que:

1º *La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a cuatro rectos.*

En efecto, siendo el cuadrilátero un polígono de cuatro lados, se



aplica la propiedad que dice que la suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a 2 rectos por el número de lados menos 2 , y como en este caso $n = 4$, se tiene:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 2 \text{ rectos } (4 - 2)$$

o sea: $$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 2 \text{ rectos} \times 2$$

es decir: $$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 4 \text{ rectos.}$$

2º *La suma de los ángulos exteriores, como en todo polígono convexo, es igual a cuatro rectos.*

Es decir, que los cuadriláteros son los únicos polígonos para los cuales la suma de los ángulos exteriores es igual a la suma de los ángulos interiores.

3º *Como en todo polígono, un lado es menor que la suma de los demás; en todo cuadrilátero, un lado es menor que la suma de los otros tres.*

4º *Cuadriláteros iguales.* Como dos polígonos son iguales cuando tienen $(n - 1)$ lados consecutivos iguales y los $(n - 2)$ ángulos comprendidos iguales, para el caso particular del cuadrilátero, resulta:

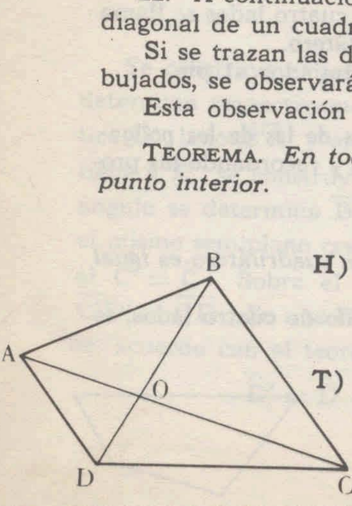
Dos cuadriláteros son iguales cuando tiene tres lados y los dos ángulos comprendidos respectivamente iguales.

22. A continuación se estudia una propiedad característica de la diagonal de un cuadrilátero.

Si se trazan las diagonales de cualquiera de los cuadriláteros dibujados, se observará que éstas se cortan en un punto interior.

Esta observación es general y se enuncia en el siguiente:

TEOREMA. *En todo cuadrilátero, las diagonales se cortan en un punto interior.*



H) Cuadrilátero ABCD

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales.

T) $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en un punto interior.

DEMOSTRACIÓN. La diagonal $\overline{AC}$ es un segmento que tiene sus extremos A y C sobre los lados del ángulo $\hat{B}$. Como D es un punto interior al $\hat{B}$, la $\overrightarrow{BD}$ es una semirrecta interior a ese mismo ángulo; luego, corta al segmento $\overline{AC}$ en un punto O, por el postulado que dice: si un segmento tiene sus extremos sobre los lados de un ángulo, es cortado *en un punto interior* por toda semirrecta interior al mismo.

Como el punto O es interior a la diagonal $\overline{AC}$, es interior al cuadrilátero; pero para que este punto O pertenezca a la $\overrightarrow{BD}$ y sea interior al cuadrilátero debe pertenecer a la diagonal $\overline{BD}$; por consiguiente el punto O es el punto interior en que se cortan las dos diagonales.

23. Clasificación de los cuadriláteros. — Si un cuadrilátero tiene sus lados opuestos paralelos, se llama *paralelogramo*; en caso contrario, *no paralelogramo.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. Decir si los segmentos cuyas longitudes se indican a continuación, pueden ser lados de un cuadrilátero.

a) 15 cm; 12 cm; 42 cm y 11 cm.
b) 6 cm; 4 cm; 7 cm y 10 cm.
c) 5 cm; 9 cm; 8 cm; y 18 cm.

2. En un cuadrilátero, tres de los ángulos interiores son respectivamente de: $147^\circ 20'$; $89^\circ 30'$ y 110°. Calcular el cuarto ángulo interior.

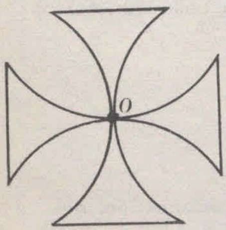
3º En un cuadrilátero, tres de los ángulos exteriores son respectivamente de: 81°, 97° y 124°. Calcular el cuarto ángulo exterior.

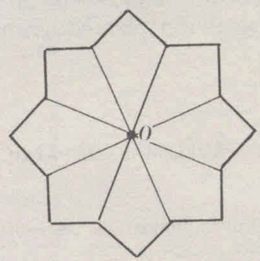
CAPÍTULO II.

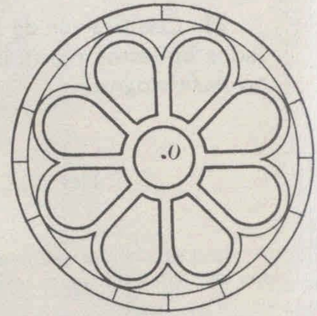
SIMETRÍA CENTRAL Y AXIAL.

1. La simetría es una propiedad que tienen algunas figuras, que se reconoce, en general, a simple vista, y que las hace aparecer equilibradas y armoniosas, pues la forma es tal que las partes de la figura aparecen distribuídas con respecto a un punto o con respecto a una recta, de modo que se equilibran la una con la otra.

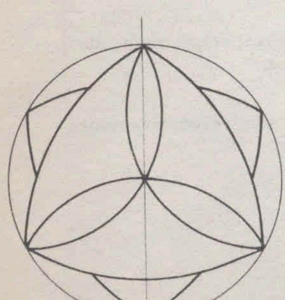
Así, cada una de las siguientes figuras es simétrica con respecto al punto O .

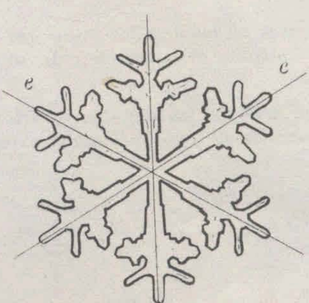


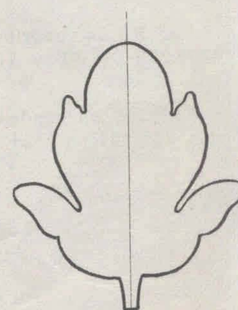




Cada una de las siguientes figuras es simétrica con respecto a la recta e .







A continuación daremos la definición de simetría con respecto a un punto y con respecto a una recta.

SIMETRIA CENTRAL.

2. Simetría con respecto a un centro. — Dos puntos se dicen simétricos con respecto a otro, llamado *centro,* cuando estando los tres alineados, equidistan de él.

EJEMPLO:

Los puntos A y B son simétricos con respecto a O , pues A , O y B están alineados y $\overline{AO} = \overline{OB}$.

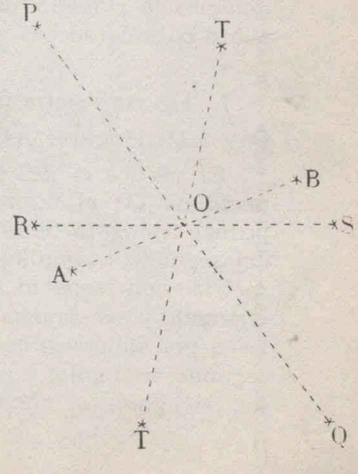
También son simétricos respecto de O , los puntos:

P y Q ; R y S ; etc.

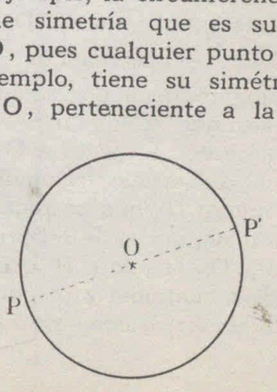
Dado un punto, por ejemplo T , para obtener su simétrico con respecto a O , se traza la recta TO y sobre la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{OT}$, se determina $\overline{OT'} = \overline{OT}$. T′ es el punto simétrico de T , que se quería determinar.

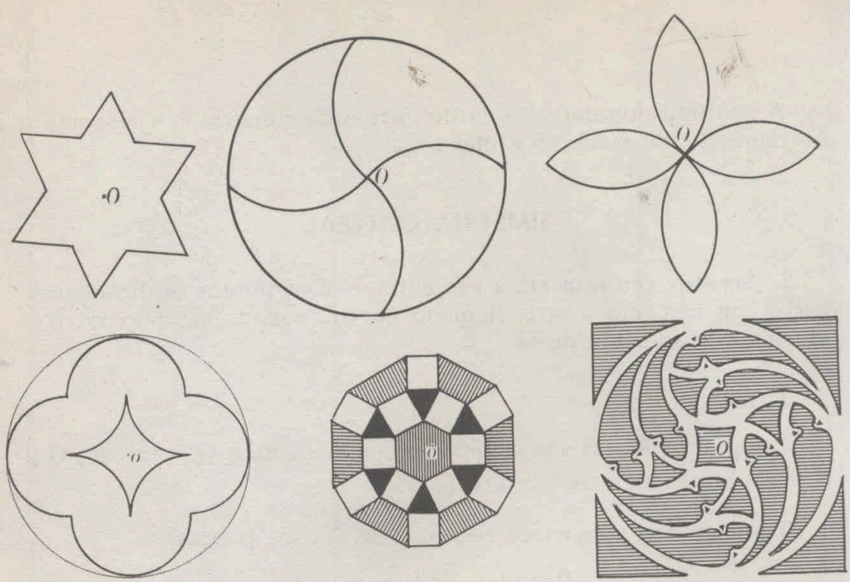
3. La simetría con respecto a un punto se llama *central,* y el punto con respecto al cual se establece la simetría se llama *centro de simetría.*

4. Centro de simetría de una figura. — Se dice que una figura tiene centro de simetría, cuando respecto de ese punto cada uno de los de la figura tiene su simétrico perteneciente a la misma.



Así, por ejemplo, la circunferencia tiene un centro de simetría que es su centro geométrico O, pues cualquier punto de ella, el P por ejemplo, tiene su simétrico, P′, respecto de O, perteneciente a la circunferencia.



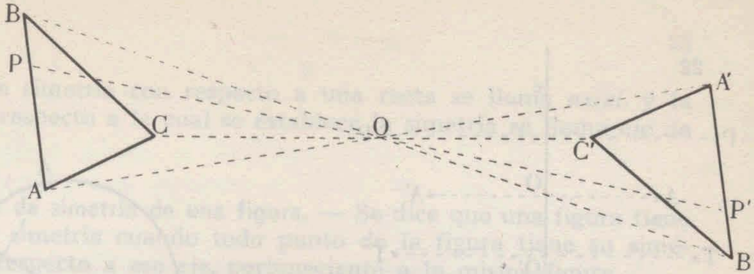


5. En las figuras que aparecen en esta página se destaca el centro O de simetría de las mismas.

6. **Criterio para reconocer si una figura tiene centro de simetría.** — Observando que: si a un punto de una figura con centro de simetría se lo hace girar en el plano de la misma 180° alrededor de ese centro, el punto coincide con su simétrico, resulta que para reconocer si una figura tiene centro de simetría, se considera una recta cualquiera que pase por el supuesto centro de simetría, y a una de las dos partes en que queda dividida la figura por dicha recta se la hace girar en su plano, 180°, alrededor del centro. Si después del giro la primera parte de la figura coincide con la segunda, el punto considerado es efectivamente centro de simetría.

7. **Figuras simétricas con respecto a un centro.** — Dados el punto O y los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$, se observa que:

El vértice A del primer triángulo tiene por simétrico con respecto de O, el punto A′ del segundo triángulo; el punto B del primer triángulo tiene por simétrico con respecto a O, el punto B′ del segundo triángulo; el punto C del primer triángulo, tiene su simétrico con respecto a O en el punto C′, que pertenece al segundo triángulo y así siguiendo, un punto cualquiera P del primer triángulo tiene por simétrico con respecto a O, el punto P′ que pertenece al segundo triángulo, y si se considera cualquier otro punto de uno de los triángulos, se observa que su simétrico con respecto a O, es un



punto del otro triángulo. Esta propiedad se expresa diciendo que los dos triángulos son simétricos con respecto al centro O , y, en general, se da la siguiente

DEFINICIÓN. Dos figuras se dicen simétricas con respecto a un punto llamado centro de simetría cuando todo punto de cada una de ellas tiene su simétrico respecto de ese centro en la otra figura

8. Construcción por puntos de la figura simétrica de una dada, con respecto a un centro. — Dados un polígono y un punto elegido como centro de simetría, para hallar el polígono simétrico del dado con respecto a ese centro basta determinar los puntos simétricos de los vértices del polígono y unirlos ordenadamente.

Así, para obtener el simétrico del polígono ABCDE con respecto al centro O , se determinan:

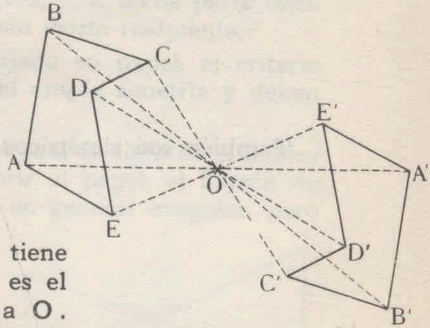
A′ simétrico de A con respecto a O

B′ simétrico de B con respecto a O

C′ simétrico de C con respecto a O

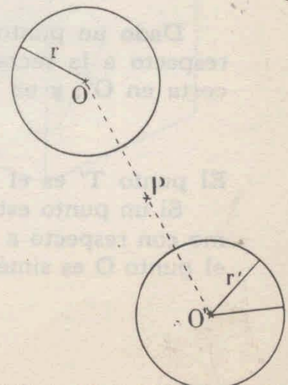
D′ simétrico de D con respecto a O

E′ simétrico de E con respecto a O .

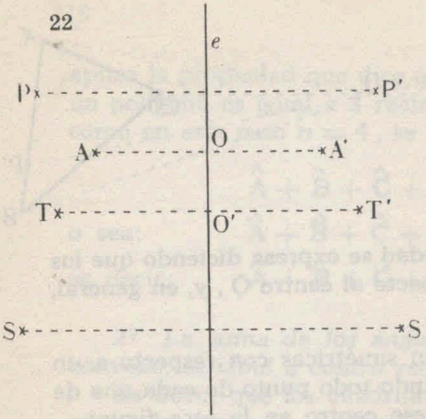


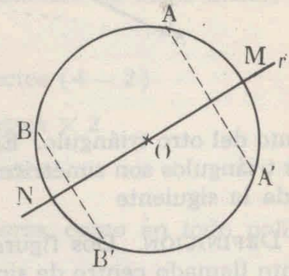
Se unen luego ordenadamente y se tiene el polígono buscado A′B′C′D′E′, pues es el simétrico del ABCDE , con respecto a O .

Si se trata de encontrar el simétrico de un círculo con respecto a un punto, por ejemplo el simétrico del C (O ; r) con respecto al punto P , basta determinar el simétrico del centro O con respecto a P , en nuestro caso O′, y trazar, con centro en O′, la circunferencia de radio r .



9. OBSERVACIÓN. Es evidente que: *dos figuras simétricas con respecto a un centro son iguales.*





SIMETRÍA AXIAL.

10. Simetría con respecto a un eje. — Dos puntos distintos se dicen simétricos con respecto a una recta, llamada *eje*, cuando se encuentran sobre una misma perpendicular a dicha recta y equidistan de ella.

Así, A y A′ son simétricos con respecto al eje e, pues:

$$AA' \perp e$$

$$\text{y} \quad \overline{OA} = \overline{OA'}.$$

También son simétricos con respecto a e, los puntos:

P y P′

S y S′

etc.

Dado un punto T, por ejemplo, para obtener su simétrico con respecto a la recta e, se traza por T la perpendicular a e que la corta en O′, y en la semirrecta opuesta a la $\overrightarrow{O'T}$ se determina:

$$\overline{O'T'} = \overline{O'T}.$$

El punto T′ es el punto simétrico de T buscado.

Si un punto está sobre el eje de simetría, es simétrico de sí mismo con respecto a dicho eje. Así por ejemplo, en la figura anterior, el punto O es simétrico de sí mismo con respecto al eje e.

11. La simetría con respecto a una recta se llama *axial*, y la recta con respecto a la cual se establece la simetría se llama *eje de simetría*.

12. **Eje de simetría de una figura.** — Se dice que una figura tiene un eje de simetría cuando todo punto de la figura tiene su simétrico con respecto a ese eje, perteneciente a la misma figura.

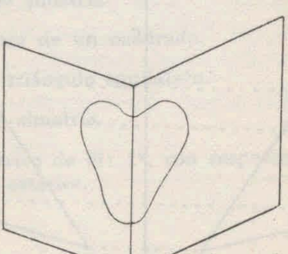
Así, por ejemplo, en la circunferencia, toda recta que pase por el centro es eje de simetría, pues un punto cualquiera de la circunferencia tiene como simétrico con respecto a esa recta, otro punto que pertenece también a la circunferencia.

13. **Criterio para reconocer si una figura tiene eje de simetría.** — Observando la figura, se deduce que: si al semiplano respecto de la recta, r, que contiene al punto A se lo hace girar 180° alrededor de dicha recta, el punto A coincide con su simétrico A′ y así todos los puntos de la circunferencia, es decir, la semicircunferencia NBM coincide con la semicircunferencia NB′M.

Esta observación nos lleva a enunciar el siguiente criterio físico para reconocer si una figura tiene eje de simetría. Supuesto el eje de simetría, se hace girar 180°, alrededor de él, a una de las dos partes en que ha quedado dividida la figura, y, si dicha parte coincide con la otra, el eje de simetría supuesto existe realmente.

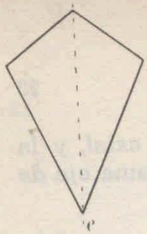
Obsérvese que si la figura está dibujada en papel, el criterio anterior equivale a doblar el papel por el eje de simetría y deben resultar coincidentes las dos partes.

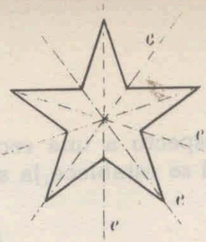
En esto se basa el juego de colocar una gota de tinta en el doblez de un papel, apretar ese doblez y, al abrir el papel, el borrón de tinta se habrá distribuído en una forma, en general irregular, pero simétrica con respecto al doblez.

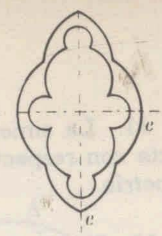


14. Observación. Aplicando este criterio es fácil ver que hay figuras que tienen un eje de simetría; otras dos, o más de dos y otras ninguno.

En las figuras que aparecen a continuación se destacan los ejes e de simetría de las mismas.





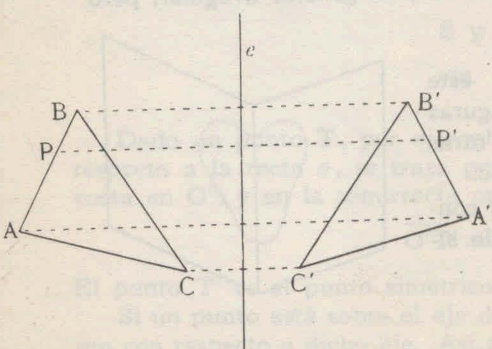


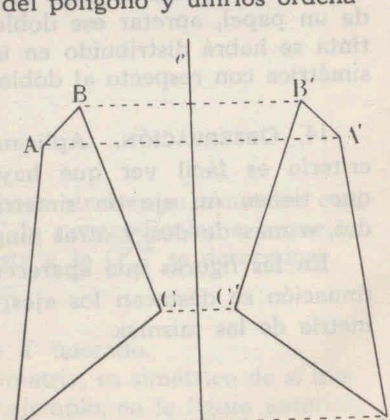
15. Figuras simétricas con respecto a un eje. — Dados la recta *r* y los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$, se observa que: el vértice A del primer triángulo tiene su simétrico con respecto a *r* en el punto A′ del segundo triángulo; el punto B del primer triángulo tiene su simétrico con respecto a *r* en el punto B′ del segundo triángulo; el punto C del primer triángulo tiene su simétrico con respecto a *r* en el punto C′ del segundo triángulo y cualquier otro punto del primer triángulo, el P por ejemplo, tiene su simétrico con respecto a *r* en el punto P′ del segundo triángulo, y si consideramos otro punto cualquiera del primer triángulo tiene su simétrico con respecto a *a* en un punto que pertenece al segundo triángulo.

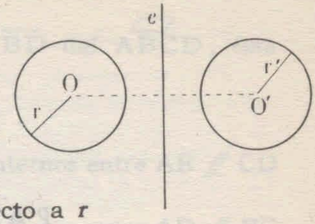
Esta propiedad se expresa diciendo que estos dos triángulos son simétricos con respecto a la recta *r*

Definición. Dos figuras se dicen simétricas con respecto a una recta, llamada eje de simetría, cuando todo punto de cada una de ellas tiene su simétrico respecto de esa recta en la otra figura.

16. Construcción por puntos de la figura simétrica de una dada, con respecto a un eje. — Dados un polígono y un eje, para hallar el polígono simétrico del dado con respecto a ese eje basta determinar los puntos simétricos de los vértices del polígono y unirlos ordenadamente.







Así, para obtener el simétrico del polígono ABCD con respecto al eje e, se determinan:

A′ simétrico de A con respecto a r

B′ simétrico de B con respecto a r

C′ simétrico de C con respecto a r

D′ simétrico de D con respecto a r.

Se unen luego ordenadamente y se obtiene el polígono buscado A′B′C′D′, pues es el simétrico de ABCD con respecto a e.

Si se trata de encontrar el simétrico de un círculo con respecto a un eje, por ejemplo el simétrico del C (O ; r) con respecto al eje e, basta determinar el simétrico del centro O con respecto al eje e, en nuestro caso O′, y trazar, con centro en O′, la circunferencia de radio r.

17. Observación. Es inmediato que: *dos figuras simétricas con respecto a un eje son iguales.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. Construir figuras que tengan un centro de simetría.

2. Construir figuras que tengan un eje de simetría.

3. Dibujar el centro y los ejes de simetría de un cuadrado.

4. Determinar los ejes de simetría de un triángulo equilátero.

5. Dibujar figuras que tengan 2 ejes de simetría.

6. Dado un pentágono, construir el simétrico de él: 1º, con respecto a un punto exterior; 2º, con respecto a una recta exterior.

Capítulo III.

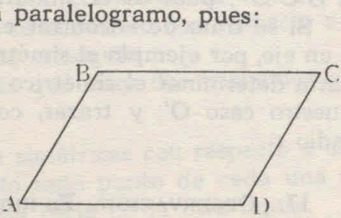
PARALELOGRAMOS.

1. En el capítulo I hemos visto las propiedades de los cuadriláteros en general; en los teoremas que figuran a continuación estudiaremos las propiedades particulares de los paralelogramos, que, como ya hemos dicho, son los cuadriláteros que tienen sus lados opuestos paralelos.

Así, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, pues:

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

y $$\overline{BC} \parallel \overline{AD}.$$

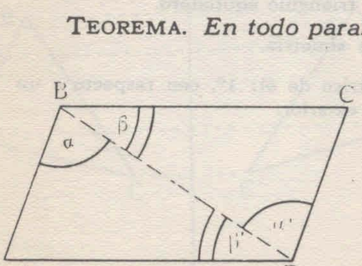


2. Notación. Se indica que ABCD es un paralelogramo con la notación: $\overset{\square}{ABCD}$.

PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS.

3. Al observar un paralelogramo cualquiera, se nota a simple vista que los lados opuestos son iguales. Vamos a demostrar esta propiedad en el siguiente.

Teorema. *En todo paralelogramo los lados opuestos son iguales.*



H) $\overset{\square}{ABCD}$.

T) $\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{BC} = \overline{AD}$.

Demostración. Trazando la diagonal $\overline{BD}$ del $\square ABCD$, éste queda dividido en los triángulos:

$$\widehat{ABD} \text{ y } \widehat{BCD}, \text{ que tienen } \begin{cases} \overline{BD}, \text{ común} \\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha}', \text{ por alternos internos entre } AB \parallel CD \text{ y transv. } BD. \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}', \text{ por alternos internos entre } AD \parallel BC \text{ y transv. } BD. \end{cases}$$

Luego, por el segundo criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\widehat{ABD} = \widehat{BCD}$$

En consecuencia, todos sus elementos homólogos son iguales; entre ellos:

$$\overline{AB} = \overline{CD},$$

por ser lados que se oponen a los ángulos iguales β y β',

$$\text{y} \quad \overline{BC} = \overline{AD}$$

por ser lados que se oponen a los ángulos iguales $\hat{\alpha}'$ y $\hat{\alpha}$.

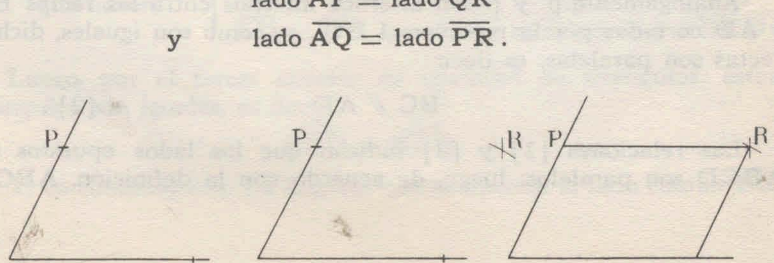
Se ha llegado a establecer así las igualdades de la tesis y por lo tanto el teorema queda demostrado.

4. Vamos a construir un cuadrilátero que tenga dos pares de lados opuestos iguales. Para ello se procede así:

Se construye un ángulo cualquiera, $\hat{A}$, y sobre los lados se determinan segmentos cualesquiera arbitrarios, $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$; con centro en P y radio $\overline{AQ}$ se traza un arco, y con centro en Q y radio $\overline{AP}$ se corta dicho arco, quedando determinado el punto R. Se une R con P y Q, quedando formado el cuadrilátero APRQ, que tiene los dos pares de lados opuestos iguales. En efecto:

$$\text{lado } \overline{AP} = \text{lado } \overline{QR}$$

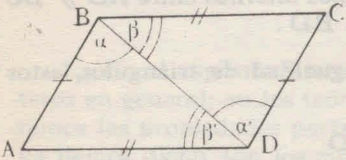
$$\text{y} \quad \text{lado } \overline{AQ} = \text{lado } \overline{PR}.$$



Si se observa ese cuadrilátero, se ve que es un paralelogramo.

Esta propiedad, que es general, es la recíproca de la establecida en el teorema anterior, y se establece en el siguiente

TEOREMA RECÍPROCO. *Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo.*



H) Cuadrilátero ABCD

$\overline{AB} = \overline{CD}$

y

$\overline{BC} = \overline{AD}$.

T) ABCD es un paralelogramo.

DEMOSTRACIÓN. Trazando la diagonal $\overline{BD}$, quedan formados los triángulos:

$$\overset{\triangle}{ABD} \text{ y } \overset{\triangle}{BCD}, \text{ que tienen: } \begin{cases} \overline{BD}, \text{ común} \\ \overline{AB} = \overline{CD}, \text{ por hipótesis} \\ \overline{AD} = \overline{BC}, \text{ por hipótesis.} \end{cases}$$

Luego, por el tercer criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{BCD}$$

En consecuencia, sus elementos homólogos también lo son; entre ellos:

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$$
$$\text{y} \quad \hat{\beta} = \hat{\beta}'$$

pero $\hat{\alpha}$ y $\hat{\alpha}'$ son alternos internos entre las rectas AB y CD cortadas por la transversal BD y, como son iguales, dichas rectas son paralelas, es decir:

$$AB \parallel CD \qquad [1].$$

Análogamente $\hat{\beta}'$ y $\hat{\beta}$ son alternos internos entre las rectas BC y AD cortadas por la transversal BD, y, como son iguales, dichas rectas son paralelas, es decir:

$$BC \parallel AD \qquad [2].$$

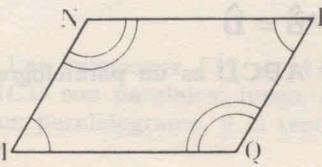
Las relaciones [1] y [2] indican que los lados opuestos de ABCD son paralelos; luego, de acuerdo con la definición, ABCD es un paralelogramo y por lo tanto el teorema queda demostrado.

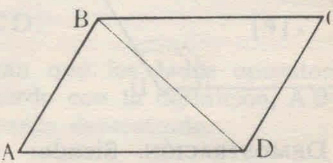
5. Sea el paralelogramo $\overset{\square}{MNPQ}$. Considerando dos de los ángulos opuestos, por ejemplo el $\hat{M}$ y el $\hat{P}$, los dos son agudos y si se miden se comprueba que son iguales entre sí.

Análogamente, si se consideran los otros dos ángulos opuestos $\hat{N}$ y $\hat{Q}$, se observa que los dos son obtusos y también al medirlos resultan iguales entre sí.

Esta propiedad de los ángulos opuestos de un paralelogramo es válida en general, y se demuestra en el siguiente

TEOREMA. *En todo paralelogramo los ángulos opuestos son iguales.*





H) $\overset{\square}{ABCD}$

T) $\hat{A} = \hat{C}$

y $\hat{B} = \hat{D}$

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar la igualdad de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ se traza la diagonal $\overline{BD}$ del $\overset{\square}{ABCD}$, quedando formados los triángulos:

$\overset{\triangle}{ABD}$ y $\overset{\triangle}{BCD}$, que tienen:
$$\begin{cases} \overline{BD}\text{, común} \\ \overline{AB} = \overline{CD}\text{, por lados opuestos del } \overset{\square}{ABCD} \\ \overline{AD} = \overline{BC}\text{, por lados opuestos del } \overset{\square}{ABCD} \end{cases}$$

Luego, por el tercer criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{BCD}$$

Y, en consecuencia, los ángulos que se oponen al lado común $\overline{BD}$

son iguales, es decir:

$$\hat{A} = \hat{C}$$

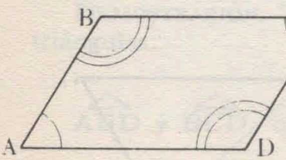
Análogamente, trazando la diagonal $\overline{AC}$, se demuestra que:

$$\hat{B} = \hat{D}$$

y, por lo tanto, el teorema queda demostrado.

6. La propiedad que se acaba de estudiar goza de la propiedad recíproca, que se demuestra en el siguiente

TEOREMA RECÍPROCO. *Si un cuadrilátero tiene sus ángulos opuestos iguales, es paralelogramo.*



H) Cuadrilátero $\overset{\frown}{ABCD}$

$\hat{A} = \hat{C}$

y $\hat{B} = \hat{D}$

T) ABCD es un paralelogramo.

DEMOSTRACIÓN. Siendo:

$$\hat{A} = \hat{C} \quad \text{por hipótesis}$$

y $$\hat{B} = \hat{D} \quad \text{por hipótesis;}$$

sumando m. a m. $$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}.$$

Por otra parte, se sabe que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 4 rectos, es decir:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 4 \text{ rectos} \qquad [1]$$

o sea, por propiedad asociativa de la suma:

$$(\hat{A} + \hat{B}) + (\hat{C} + \hat{D}) = 4 \text{ rectos}$$

sustituyendo en esta igualdad

la suma $(\hat{C} + \hat{D})$ por su igual $(A + B)$,

se tiene: $$(\hat{A} + \hat{B}) + (\hat{A} + \hat{B}) = 4 \text{ rectos}$$

o sea: $$2\,(\hat{A} + \hat{B}) = 4 \text{ rectos}$$

luego: $$\hat{A} + \hat{B} = 2 \text{ rectos} \qquad [2]$$

es decir, los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son suplementarios; pero a la vez son conjugados entre las rectas AD y BC cortadas por la transversal BA ; y como si dos rectas al ser cortadas por una tercera forman ángulos conjugados suplementarios, son paralelas, resulta:

$$AD \parallel BC \qquad [3] .$$

Como $\hat{A} + \hat{B} = 2$ rectos,

según igualdad [2], y

$$\hat{A} = \hat{C} \text{ por hipótesis}$$

reemplazando en [2] $\hat{A}$ por su igual $\hat{C}$, se tiene:

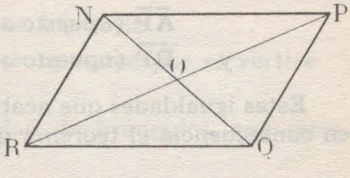
$$\hat{C} + \hat{B} = 2 \text{ rectos}$$

y como estos ángulos son conjugados entre las rectas AB y CD, cortadas por la transversal BC, al ser suplementarios, resulta:

$$AB \parallel CD \qquad [4] .$$

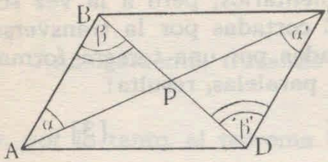
Las relaciones [3] y [4] indican que los lados opuestos de ABCD son paralelos; luego, de acuerdo con la definición, ABCD es un paralelogramo, y el teorema queda demostrado.

7. Si en el paralelogramo RNPQ se trazan las diagonales $\overline{RP}$ y $\overline{NQ}$, éstas se cortan en el punto O. Puede comprobarse que el segmento $\overline{RO}$ es igual al segmento $\overline{OP}$, es decir, que O es el punto medio de la diagonal $\overline{RP}$, o, lo que es lo mismo, que O divide a dicha diagonal en partes iguales.



Análogamente, puede comprobarse que el segmento $\overline{NO}$ es igual al segmento $\overline{OQ}$, es decir que ese punto O es también el punto medio de la diagonal $\overline{NQ}$, o sea que la divide en dos partes iguales. Esta propiedad de las diagonales se verifica en todo paralelogramo y se demuestra en el siguiente,

Teorema. *En todo paralelogramo las diagonales se cortan mutuamente en partes iguales.*



H) ABCD (paralelogramo)
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales;
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en P.

T) $\overline{AP} = \overline{PC}$
$\overline{BP} = \overline{PD}$.

DEMOSTRACIÓN. Comparemos los triángulos:

$\triangle ABP$ y $\triangle CDP$, que tienen
$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} & \text{por lados opuestos de } \text{ABCD} \\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha}' & \text{por alternos internos entre } AB \parallel CD \text{ y transversal } AC \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}' & \text{por alternos internos entre } AB \parallel CD \text{ y transversal } BD \end{cases}$$

En consecuencia, por el segundo criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\triangle ABP = \triangle CDP$$

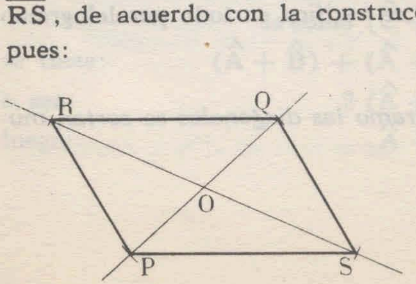
Luego, los lados de estos triángulos que se oponen a ángulos iguales, son iguales, es decir:

$$\overline{AP} \text{ (opuesto a } \hat{\beta}) = \overline{PC} \text{ (opuesto a } \hat{\beta}')$$
$$\text{y} \quad \overline{BP} \text{ (opuesto a } \hat{\alpha}) = \overline{PD} \text{ (opuesto a } \hat{\alpha}')$$

Estas igualdades que acabamos de establecer son las de la tesis y en consecuencia el teorema queda demostrado.

8. Se consideran dos rectas que se cortan en un punto O ; en una de ellas, a partir de O , determinamos los segmentos iguales $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$, y, en la otra, también a partir de O , determinamos los segmentos iguales $\overline{OR}$ y $\overline{OS}$

Trazando los segmentos $\overline{PR}$, $\overline{RQ}$, $\overline{QS}$ y $\overline{SP}$ queda determinado el cuadrilátero PRQS . Las diagonales de este cuadrilátero $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, de acuerdo con la construcción, se cortan en partes iguales, pues:



$$\overline{PO} = \overline{OQ}$$
$$\text{y} \quad \overline{OR} = \overline{OS} \,;$$

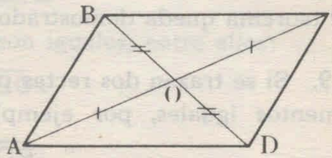
y se ve a simple vista que este cuadrilátero es un paralelogramo.

Esta observación es general y se enuncia en el siguiente:

TEOREMA RECÍPROCO. *Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan mutuamente en partes iguales, dicho cuadrilátero es un paralelogramo.*

H) Cuadrilátero ABCD
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales que se cortan en O
tal que $\overline{AO} = \overline{OC}$
y $\overline{BO} = \overline{OD}$.

T) ABCD es un paralelogramo.



DEMOSTRACIÓN. Las diagonales del cuadrilátero ABCD determinan cuatro triángulos. Si se consideran entre ellos,

$$\overset{\triangle}{ABO} \text{ y } \overset{\triangle}{CDO}, \text{ que tienen: } \begin{cases} \overline{AO} = \overline{OC} & \text{por hipótesis} \\ \overline{BO} = \overline{OD} & \text{por hipótesis} \\ \widehat{AOB} = \widehat{COD} & \text{por opuestos por el vértice} \end{cases}$$

resulta, por el primer criterio de igualdad de triángulos, que estos triángulos son iguales, es decir:

$$\overset{\triangle}{ABO} = \overset{\triangle}{CDO}$$

y, en consecuencia, los lados homólogos son iguales, entre ellos:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \qquad [1].$$

Si se consideran los otros dos triángulos,

$$\overset{\triangle}{BOC} \text{ y } \overset{\triangle}{AOD}, \text{ que tienen } \begin{cases} \overline{BO} = \overline{OD} & \text{por hipótesis} \\ \overline{OC} = \overline{AO} & \text{por hipótesis} \\ \widehat{BOC} = \widehat{AOD} & \text{por opuestos por el vértice} \end{cases}$$

resulta, por el primer criterio de igualdad de triángulos, que estos triángulos son iguales, es decir:

$$\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$$

y, en consecuencia, los lados homólogos son iguales, entre ellos:

$$\overline{BC} = \overline{AD} \qquad [2] .$$

Las relaciones [1] y [2] establecen que los lados opuestos del cuadrilátero ABCD son iguales; pero si un cuadrilátero tiene los lados opuestos iguales es un paralelogramo; luego,

ABCD es un paralelogramo,

y el teorema queda demostrado.

9. Si se trazan dos rectas paralelas y en ellas se determinan dos segmentos iguales, por ejemplo $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ y

$$\overline{PQ} = \overline{RS},$$

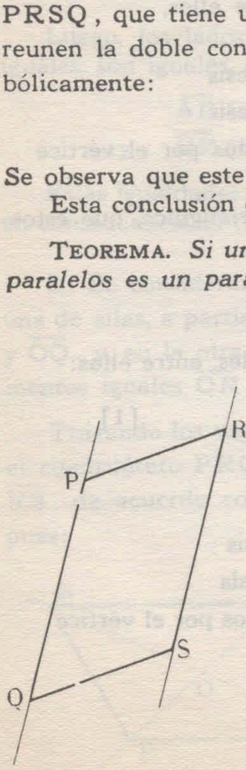
y se une P con R, y Q con S, queda determinado el cuadrilátero PRSQ, que tiene un par de lados opuestos, el $\overline{PQ}$ y el $\overline{RS}$, que reunen la doble condición de ser iguales y paralelos, es decir, simbólicamente:

$$\overline{PQ} \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \overline{RS}.$$

Se observa que este cuadrilátero resulta un paralelogramo.

Esta conclusión es general y se demuestra en el siguiente:

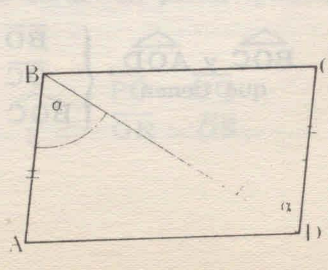
Teorema. *Si un cuadrilátero tiene dos lados opuestos iguales y paralelos es un paralelogramo.*



H) Cuadrilátero ABCD

$AB \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} CD$

T) ABCD es un paralelogramo.



DEMOSTRACIÓN. Trazando la diagonal $\overline{BD}$ del cuadrilátero $ABCD$, quedan determinados los triángulos.

$$\overset{\triangle}{ABD} \text{ y } \overset{\triangle}{BCD}, \text{ que tienen } \left\{ \begin{array}{l} \overline{BD} \text{ común} \\ \overline{AB} = \overline{CD} \text{ por hipótesis} \\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha}' \text{ por alternos internos entre} \\ \qquad AB \mathbin{/\!/} CD \text{ y transversal } BD. \end{array} \right.$$

Luego, por el primer criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{BCD}$$

y, por lo tanto, los lados homólogos son iguales; entre ellos:

$$\overline{AD} = \overline{BC}.$$

Además, por hipótesis:

$$\overline{AB} = \overline{CD}.$$

Luego el cuadrilátero $ABCD$ tiene sus dos pares de lados opuestos iguales; en consecuencia es un paralelogramo, y el teorema queda demostrado.

10. OBSERVACIÓN. Los teoremas recíprocos establecen las condiciones suficientes para reconocer si un cuadrilátero es un paralelogramo. Así, de acuerdo con lo demostrado, basta saber que un cuadrilátero tiene sus dos pares de lados opuestos iguales para establecer que es un paralelogramo; o bien basta saber que un cuadrilátero tiene sus ángulos opuestos iguales para establecer que es un paralelogramo; o bien basta saber que en un cuadrilátero las diagonales se cortan en partes iguales para asegurar que es un paralelogramo.

El teorema anterior también establece una condición suficiente para reconocer que un cuadrilátero es un paralelogramo.

Es de observar que en la definición de paralelogramos y en los teoremas recíprocos se establece una sola condición a los dos pares de lados opuestos para saber que es un paralelogramo o bien que los dos pares de lados opuestos sean paralelos, o bien que los dos pares de lados opuestos sean iguales; en cambio, el teorema anterior exige a un solo par de lados opuestos, pero la doble condición de ser paralelos e iguales.

11. Bases medias de un paralelogramo. — El segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos de un paralelogramo se llama *base media,* con respecto a los otros dos lados.

Así, en el paralelogramo $\overset{\square}{ABCD}$ de la figura:

$\overline{MN}$ es la base media con respecto a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, y

$\overline{PQ}$ es la base media con respecto a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

12. Si se observa la base media $\overline{MN}$ del paralelogramo anterior, parece ser paralela a las bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ e igual a cada una de ellas. En efecto, se verifica esta propiedad y se demuestra en el siguiente:

TEOREMA. *La base media de un paralelogramo con respecto a un par de lados es paralela e igual a cada uno de esos lados.*

H) $\overline{MN}$, base media de $\overset{\square}{ABCD}$ con respecto a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

T) $\overline{MN} \mathrel{\underline{\parallel}} \overline{BC}$

$\overline{MN} \mathrel{\underline{\parallel}} \overline{AD}$.

DEMOSTRACIÓN. La base media $\overline{MN}$ determina en el paralelogramo ABCD dos cuadriláteros: MBCN y AMND.

El cuadrilátero MBCN tiene:

$\overline{BM} \parallel \overline{CN}$ por pertenecer a lados opuestos del paralelogramo ABCD

$\overline{BM} = \overline{CN}$ por ser mitades de los segmentos iguales: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

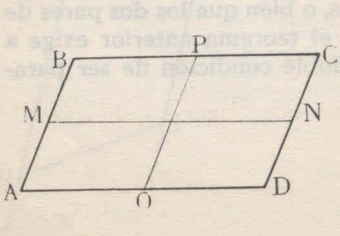
Luego, el cuadrilátero MBCN tiene dos lados opuestos iguales y paralelos; por lo tanto es un paralelogramo.

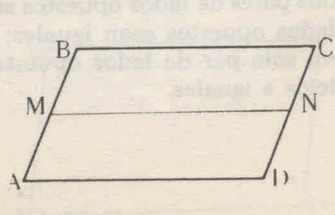
En consecuencia, los lados opuestos $\overline{MN}$ y $\overline{BC}$ son paralelos por definición de paralelogramo, e iguales por la propiedad estudiada de los lados opuestos de un paralelogramo, es decir:

$\overline{MN} \mathrel{\underline{\parallel}} \overline{BC}$ [1]

y como $\overline{BC} \mathrel{\underline{\parallel}} \overline{AD}$ por lados opuestos de $\overset{\square}{ABCD}$

es, por carac. trans.: $\overline{MN} \mathrel{\underline{\parallel}} \overline{AD}$ [2]





Las relaciones [1] y [2] constituyen la tesis del teorema, el cual queda así demostrado.

13. Centro de simetría del paralelogramo. — TEOREMA. *La intersección de las diagonales de un paralelogramo es centro de simetría del mismo.*

H) $\overset{\square}{ABCD}$

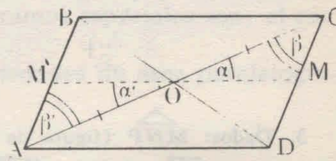
O, intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

T) O, centro de simetría del $\overset{\square}{ABCD}$.

DEMOSTRACIÓN. Por propiedad de las diagonales del paralelogramo el punto de intersección O es punto medio de las mismas.

Luego:

$$\overline{AO} = \overline{OC} \,;$$



por lo tanto, los puntos A y C son simétricos con repecto a O.

Análogamente,

$$\overline{BO} = \overline{OD} \,,$$

y, por lo tanto, B y D son simétricos con respecto a O. Cualquier otro punto del paralelogramo, por ejemplo el M, también tiene su simétrico respecto de O en el paralelogramo. En efecto, trazando la recta MO, determina con el contorno otro punto M', que es simétrico de M con respecto a O, pues $\overline{M'O} = \overline{OM}$ por ser:

$$\widehat{AM'O} = \widehat{OMC}\text{, pues} \begin{cases} \overline{AO} = \overline{OC} & \text{por ser O punto medio de } \overline{AC} \\ \hat{\alpha}' = \hat{\alpha} & \text{por opuestos por el vértice} \\ \hat{\beta}' = \hat{\beta} & \text{por alternos internos entre} \\ & \text{AB // CD y tranversal AC.} \end{cases}$$

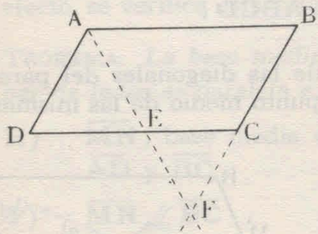
Como M es un punto cualquiera del contorno, queda demostrado, en general, que todo punto del contorno tiene su simétrico respecto de O en el mismo, es decir, que O es centro de simetría del paralelogramo.

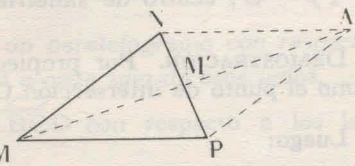
14. NOTA. El paralelogramo, en general, no tiene eje de simetría.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. Demostrar que en un paralelogramo dos vértices opuestos equidistan de la diagonal que une los otros dos.

2. En el $\overset{\square}{ABCD}$ (figura de la izquierda) se traza la bisectriz del $\hat{A}$ obtuso. Esta bisectriz corta a $\overline{DC}$ en E y a la prolongación de $\overrightarrow{BC}$ en F. Demostrar que $\overset{\triangle}{ADE}$ y $\overset{\triangle}{ECF}$ son isósceles.





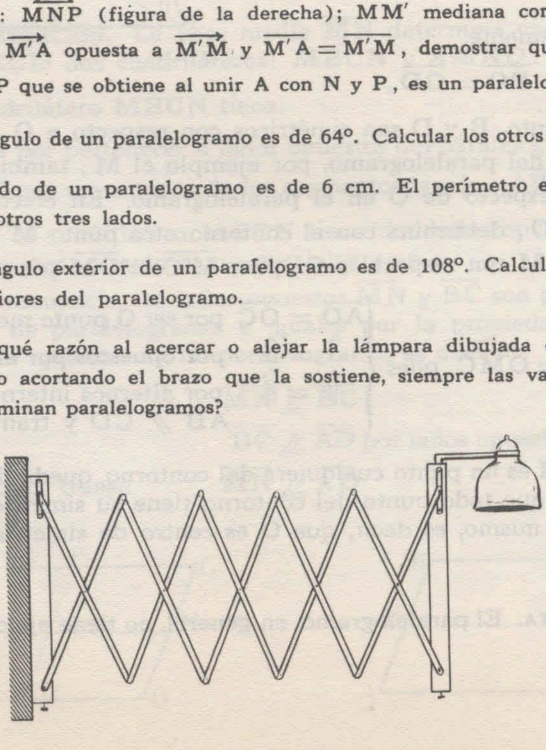
3. Dados: $\overset{\triangle}{MNP}$ (figura de la derecha); MM' mediana correspondiente al lado NP; $\overrightarrow{M'A}$ opuesta a $\overrightarrow{M'M}$ y $\overline{M'A} = \overline{M'M}$, demostrar que el cuadrilátero $MNAP$ que se obtiene al unir A con N y P, es un paralelogramo.

4. Un ángulo de un paralelogramo es de 64°. Calcular los otros tres ángulos.

5. Un lado de un paralelogramo es de 6 cm. El perímetro es de 20 cm. Calcular los otros tres lados.

6. Un ángulo exterior de un paralelogramo es de 108°. Calcular los cuatro ángulos interiores del paralelogramo.

7. ¿Por qué razón al acercar o alejar la lámpara dibujada en la figura, extendiendo o acortando el brazo que la sostiene, siempre las varillas que lo forman determinan paralelogramos?



C A P Í T U L O I V .

PARALELOGRAMOS ESPECIALES.

1. Los paralelogramos cuyos lados y ángulos tienen, respectivamente, relaciones de igualdad independientemente de las que les son características por la condición de ser paralelogramos, se llaman *paralelogramos especiales*. Estos paralelogramos especiales son: el rectángulo, el rombo y el cuadrado.

A continuación se estudian las propiedades de esos paralelogramos especiales.

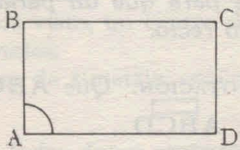
R E C T Á N G U L O .

2. TEOREMA. *Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, los otros tres también lo son.*

H) $\overset{\frown}{ABCD}$

$\hat{A} = 1$ recto

T) $\hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 1$ recto



DEMOSTRACIÓN. Como los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales, es:

$$\hat{A} = \hat{C}$$

y siendo por hipótesis:

$$\hat{A} = 1 \text{ recto}$$

es también:

$$\hat{C} = 1 \text{ recto} \qquad [1]$$

Por otra parte, los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son conjugados internos entre $AD \mathbin{/\!/} BC$ y la transversal AB; en consecuencia, son suplementarios, es decir:

$$\hat{A} + \hat{B} = 2 \text{ rectos}$$

y como por hipótesis: $\hat{A} = 1 \text{ recto}$

Restando m. a m.: $\hat{A} + \hat{B} - \hat{A} = 2 \text{ rectos} - 1 \text{ recto}$

de donde, reduciendo $\hat{A}$ y $-\hat{A}$, en el primer miembro, y efectuando la diferencia indicada en el segundo miembro, se tiene:

$$\hat{B} = 1 \text{ recto} \qquad [2]$$

Pero, como

$$\hat{B} = \hat{D}$$

por ser ángulos opuestos de un paralelogramo,

$$\hat{D} = 1 \text{ recto} \qquad [3]$$

Luego de [1], [2] y [3] resulta:

$$\hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 1 \text{ recto},$$

que es la tesis.

3. Rectángulo. — Se llama *rectángulo* al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos.

De la propiedad demostrada en el teorema anterior, se deduce que basta que un paralelogramo tenga un ángulo recto para que sea rectángulo; estos se expresa diciendo que *la condición necesaria y suficiente para que un paralelogramo sea rectángulo es que tenga un ángulo recto.*

4. NOTACIÓN. Que ABCD es un rectángulo se indica con la notación: $\overset{\square}{ABCD}$

5. Propiedades del rectángulo. — Siendo el rectángulo un paralelogramo especial, es evidente que tiene todas las propiedades de los paralelogramos en general, es decir:

Sus lados opuestos son iguales.

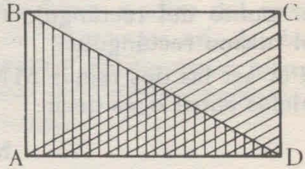
Sus ángulos opuestos son iguales.

Sus diagonales se cortan mutuamente en partes iguales.

La intersección de sus diagonales es centro de simetría del mismo.

Además de estas propiedades, el rectángulo tiene otra propiedad que le es característica y que se considera en el siguiente:

6. **Teorema.** *Las diagonales de un rectángulo son iguales.*



H) $\overset{\square}{ABCD}$

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales

T) $\overline{AC} = \overline{BD}$

Demostración. Consideremos los triángulos rectángulos, $\widehat{BAD}$ y $\widehat{CDA}$, que tienen:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{cateto } \overline{AD} \text{ común}\\ \text{cateto } \overline{AB} = \text{cateto } \overline{CD} \text{ por ser lados opuestos del } \overset{\square}{ABCD}\end{array}\right.$$

Luego, por el primer criterio de igualdad de triángulos rectángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\widehat{BAD} = \widehat{CDA}$$

y, en consecuencia, las hipotenusas son iguales, es decir:

$$\overline{AC} = \overline{BD}$$

que es la tesis, y queda así demostrado el teorema.

7. **Centro y eje de simetría de un rectángulo.** — Por ser el rectángulo un paralelogramo, tiene, según hemos visto, un centro de simetría, que es la intersección de las diagonales.

Además, todo rectángulo tiene dos ejes de simetría, según se demuestra en el siguiente

Teorema. *Las perpendiculares a los lados de un rectángulo trazadas por el punto de intersección de las diagonales son ejes de simetría de la figura.*

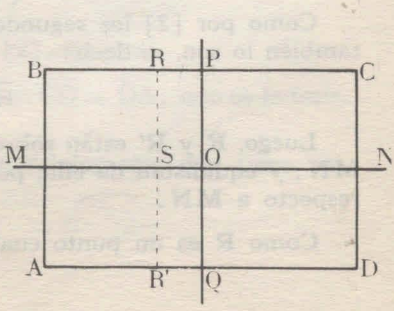
H) $\overset{\square}{ABCD}$

O intersección de las dos diagonales

$MN \perp AB$, por O

$PQ \perp BC$, por O

T) MN y PQ, ejes de simetría del $\overset{\square}{ABCD}$.



Demostración. Estudiamos primero la simetría del rectángulo con respecto a la recta MN.

Recordemos que, de acuerdo con la definición, establecer que MN es eje de simetría del rectángulo significa demostrar que cualquier punto del rectángulo tiene su simétrico con respecto a MN en el mismo rectángulo.

Por ser las dos rectas MN y BC perpendiculares a AB resultan paralelas entre sí, es decir:

$$MN \mathbin{/\!/} BC$$

Como:

$$PQ \perp BC$$

es

$$PQ \perp MN \qquad [1]$$

pues, si una recta es perpendicular a una de dos paralelas, es perpendicular a la otra.

Además,

$$\overline{PO} = \overline{OQ} \qquad [2],$$

por ser O centro de simetría del $\overset{\square}{ABCD}$. Luego de [1] y [2] se deduce que:

P y Q son simétricos con respecto a la recta MN.

Consideremos otro punto cualquiera del contorno, el R, por ejemplo, y tracemos por él la perpendicular a MN que corta al lado $\overline{AD}$ en el punto R'; veremos que este punto es el simétrico de R con respecto al eje MN.

En efecto:

$$\overline{RS} = \overline{PO} \text{ por ser lados opuestos del } \overset{\square}{OPRS}$$

y $$\overline{SR'} = \overline{OQ} \text{ por ser lados opuestos del } \overset{\square}{OSR'Q}$$

Como por [2] los segundos miembros son iguales, los primeros también lo son, es decir:

$$\overline{RS} = \overline{SR'}$$

Luego, R y R' están sobre una misma perpendicular a la recta MN, y equidistan de ella; por lo tanto, R y R' son simétricos con respecto a MN.

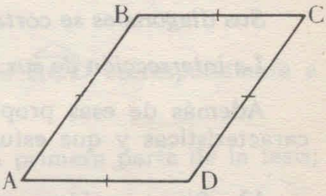
Como R es un punto cualquiera del contorno, la demostración anterior es válida para cualquier otro punto. Luego, MN es eje de simetría del rectángulo.

Un razonamiento análogo prueba que PQ es también eje de simetría del rectángulo.

8. Observación. $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ son las bases medias del rectángulo, de ahí que el teorema anterior suele enunciarse así: *las bases medias de un rectángulo son ejes de simetría del mismo,* o bien *las rectas determinadas por los puntos medios de los lados opuestos de un rectángulo son ejes de simetría del mismo.*

ROMBO.

9. Teorema. *Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos iguales, tiene los cuatro lados iguales.*



H) $\overset{\unicode{x25B1}}{ABCD}$

$\overline{AB} = \overline{BC}$.

T) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$.

Demostración. Siendo:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{por hipótesis} & \overline{AB} = \overline{BC} \\ \text{y por lados op. del } \overset{\unicode{x25B1}}{ABCD} & \overline{AB} = \overline{CD}\end{array}\right\} \text{es: } \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} \quad [1]$$

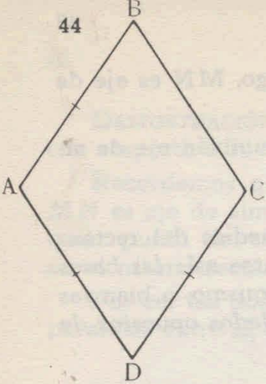
Siendo:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{por hipótesis} & \overline{AB} = \overline{BC} \\ \text{y por lados op. del } \overset{\unicode{x25B1}}{ABCD} & \overline{BC} = \overline{DA}\end{array}\right\} \text{es: } \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DA} \quad [2]$$

Comparando las relaciones [1] y [2], resulta:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$, que es la tesis.

10. **Rombo.** — Se llama *rombo* al paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales.



Rombo ABCD

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

Basta que un paralelogramo tenga dos lados consecutivos iguales para que sea rombo. Esto se enuncia diciendo que:

De la propiedad demostrada en el teorema anterior se deduce que *la condición necesaria y suficiente para que un paralelogramo sea rombo es que tenga dos lados consecutivos iguales.*

11 Propiedades del rombo. — Siendo el rombo un paralelogramo especial, tiene evidentemente todas las propiedades de los paralelogramos en general, es decir:

Sus lados opuestos son iguales.

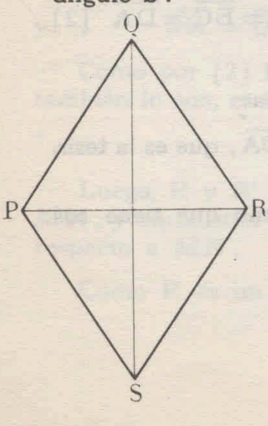
Sus ángulos opuestos son iguales.

Sus diagonales se cortan mutuamente en partes iguales.

La intersección de sus diagonales es centro de simetría del mismo.

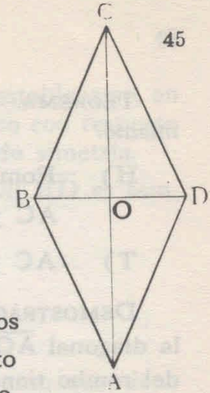
Además de esas propiedades, el rombo tiene otras que le son características y que estudiamos a continuación.

12. Si se considera un rombo, el PQRS, por ejemplo, y se trazan sus diagonales, a simple vista se advierte que la diagonal $\overline{QS}$ es perpendicular a la diagonal $\overline{PR}$. Además, los ángulos en que la diagonal $\overline{QS}$ divide a los ángulos $\hat{Q}$ son iguales; del mismo modo, también son iguales los ángulos en que esa diagonal divide al ángulo $\hat{S}$. Es decir, que la diagonal $\overline{QS}$ es bisectriz del ángulo $\hat{Q}$ y del ángulo $\hat{S}$.



Análogamente, puede comprobarse que la diagonal $\overline{PR}$ es bisectriz del ángulo $\hat{P}$ y del ángulo $\hat{R}$. Esas propiedades de las diagonales del rombo se establecen en el siguiente:

TEOREMA. *Las diagonales de un rombo son perpendiculares y bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.*



H) Rombo $ABCD$.
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales.

T) 1º $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.
2º $\overline{AC}$ bisectriz de $\hat{A}$ y de $\hat{C}$.
3º $\overline{BD}$ bisectriz de B y de D.

Demostración. Siendo $\overline{BC} = \overline{CD}$ por ser lados del rombo, el $\overset{\triangle}{BCD}$ es isósceles. Como O es punto medio de $\overline{BD}$, porque las diagonales del rombo, como las de todo paralelogramo, se cortan en su punto medio, $\overline{CO}$ es mediana correspondiente a la base de dicho triángulo; en consecuencia, por una propiedad del triángulo isósceles, la mediana correspondiente a la base es a la vez, altura correspondiente a la base y bisectriz del ángulo opuesto.

Por lo tanto, por ser $\overline{CO}$ la altura de $\overset{\triangle}{BCD}$ correspondiente a la base $\overline{BD}$ es:

$\overline{CO} \perp \overline{BD}$ o sea $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ que es la primera parte de la tesis; por ser $\overrightarrow{CO}$ bisectriz del $\hat{C}$ en $\overset{\triangle}{BCD}$ es:

$\overrightarrow{CO}$ bisectriz de $\hat{C}$ o sea $\overrightarrow{AC}$ bisectriz de C.

Considerando los triangulos isósceles $\overset{\triangle}{ABD}$, $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{ACD}$, se demuestra en forma análoga que $\overrightarrow{AC}$ es bisectriz de $\hat{A}$ y $\overrightarrow{BD}$ es bisectriz de $\hat{B}$ y $\hat{D}$, con lo que queda demostrado el teorema.

13. Ejes de simetría del rombo.— Si se construye un rombo de papel y se lo dobla a lo largo de una de las diagonales, vemos que las dos partes del rombo coinciden. Esto significa que esa diagonal es eje de simetría del rombo.

Análogamente, si se hace un doblez, a lo largo de la otra diagonal, tambien las dos partes coinciden. Esto significa que esa otra diagonal también es eje de simetría.

En definitiva, se habrá probado que las dos diagonales del rombo son ejes de simetría del mismo.

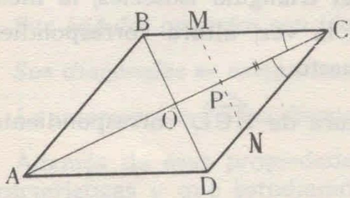
Esa propiedad de las diagonales se verifica en todos los rombos y se establece en el siguiente:

TEOREMA. *Las diagonales del rombo son ejes de simetría del mismo.*

H) Rombo $ABCD$.
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales.

T) AC y BD ejes de simetría del rombo $ABCD$.

DEMOSTRACIÓN. Estudiamos primero la simetría con respecto a la diagonal $\overline{AC}$. Para ello debemos demostrar que cualquier punto del rombo tiene su simétrico con respecto a la recta AC en el mismo rombo, y en efecto es así, pues de acuerdo con la propiedad de las diagonales del rombo es:



$$BD \perp AC$$

y $$\overline{BO} = \overline{OD}$$

en consecuencia, los vértices B y D son simétricos con respecto a la diagonal $\overline{AC}$.

Veremos ahora que cualquier otro punto del contorno también tiene su simétrico con respecto a $\overline{AC}$ en el mismo rombo.

Sea por ejemplo el punto M; trazando la recta $MN \perp AC$ se determina el punto N, que es simétrico del M con respecto al eje AC. En efecto, los triángulos rectángulos

$\overset{\frown}{MPC}$ y $\overset{\frown}{CPN}$ son iguales por tener $\left\{\begin{array}{l} \text{cateto } \overline{CP} \text{ común} \\ \widehat{MCP} = \widehat{NCP} \text{ por ser la diagonal } \overline{CA} \\ \qquad \text{bisectriz del } \hat{C}\,. \end{array}\right.$

Luego todos sus elementos homólogos son también iguales; entre ellos,

$$\overline{MP} = \overline{PN}$$

y como por construcción

$$MN \perp AC$$

resulta que N es el simétrico de M con respecto a AC.

Como el punto M es un punto cualquiera, puede establecerse, en general, que todo punto del contorno tiene su simétrico con respecto al eje AC en el mismo contorno; luego, AC es eje de simetría.

Un razonamiento análogo probaría que la diagonal $\overline{BD}$ es también eje de simetría del rombo.

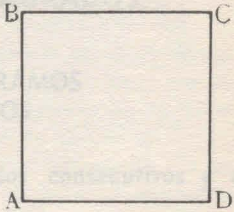
CUADRADO.

14. Cuadrado. — Se llama *cuadrado* al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos y sus cuatro lados iguales.

Cuadrado ABCD

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$$



Es decir, que el cuadrado reúne las condiciones del rectángulo y del rombo.

15. Propiedades del cuadrado. — Por ser el cuadrado un paralelogramo, tiene evidentemente, las propiedades de los paralelogramos en general, es decir:

Sus diagonales se cortan en partes iguales:

La intersección de sus diagonales es centro de simetría del mismo.

Por ser el cuadrado un caso particular del rectángulo, tiene las propiedades especiales de este último, es decir:

Sus diagonales son iguales.

Las perpendiculares a sus lados, trazadas por el punto de intersección de las diagonales, son ejes de simetría del mismo.

Por ser el cuadrado un caso particular del rombo, tiene las propiedades especiales de este último, es decir:

Sus diagonales son perpendiculares, bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen, y ejes de simetría del mismo.

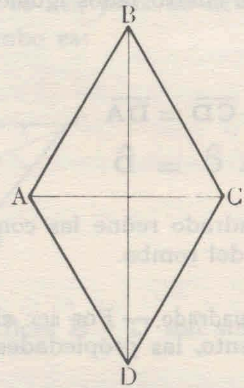
De las consideraciones anteriores se deduce que el cuadrado tiene 4 ejes de simetría.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. Un rectángulo tiene un perímetro de 38 cm; la base tiene 12 cm. Calcular los otros tres lados.

2. El perímetro de un rombo es de 18 cm. Calcular el lado.

3. En el rombo ABCD al trazar la diagonal $\overline{BD}$, el ángulo $\widehat{ABD}$ es de 29°. Calcular el ángulo B del rombo.



4. Demostrar que los puntos medios de los lados de un cuadrado son los vértices de otro cuadrado.

5. Demostrar que los puntos medios de los lados de un rectángulo son los vértices de un rombo.

6. ¿Qué ángulo forma una diagonal de un cuadrado con uno de sus lados?

7. En un cuadrado ABCD se traza la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{DB}$, y sobre ella; a partir de D, se determina $\overline{DP}$ igual al lado del cuadrado; uniendo P con A, calcular el valor del $\widehat{DPA}$.

Respuesta: 22° 30′.

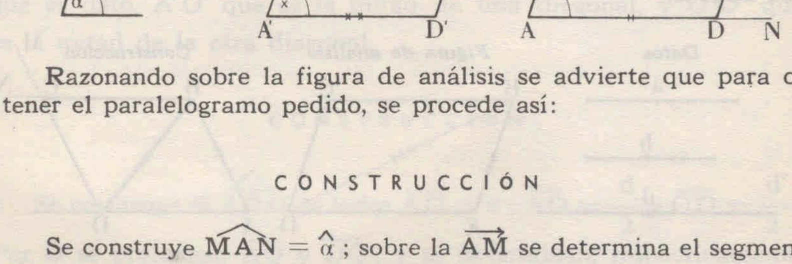
8. Construir un cuadrado, dado un segmento igual a la suma de la diagonal más el lado. (El procedimiento a seguir se basa en el problema anterior, construyendo en cada extremo del segmento dado un ángulo de 45° y otro de 22° 30′, respectivamente).

CAPÍTULO V.

CONSTRUCCIÓN DE PARALELOGRAMOS, RECTÁNGULOS, ROMBOS Y CUADRADOS.

CONSTRUCCIÓN DE PARALELOGRAMOS CONOCIENDO TRES ELEMENTOS.

1. Construir un paralelogramo dados dos lados consecutivos y el ángulo comprendido.



Razonando sobre la figura de análisis se advierte que para obtener el paralelogramo pedido, se procede así:

CONSTRUCCIÓN

Se construye $\widehat{MAN} = \hat{\alpha}$; sobre la $\overrightarrow{AM}$ se determina el segmento $\overline{AB} = a$; sobre la $\overrightarrow{AN}$ se determina el segmento $\overline{AD} = b$; y tenemos ya tres vértices A , B y D del paralelogramo; para determinar el cuarto vértice C , se puede proceder de distintas formas:

Primer procedimiento. Se traza por B una paralela a AD y por D una paralela a AB ; la intersección de estas dos paralelas es el punto C .

Segundo procedimiento. Se traza el arco de circunferencia de centro B y radio b y el de centro D y radio a , que se cortan en C .

Tercer procedimiento. Se traza por B una paralela a AD y sobre ella se determina $\overline{BC} = b$.

Una vez obtenido el vértice C por cualquiera de los procedimientos indicados, se une C con B y con D y se obtiene el $\overset{\frown}{ABDC}$, que es el paralelogramo pedido.

Justificación. En efecto, es un paralelogramo, pues:

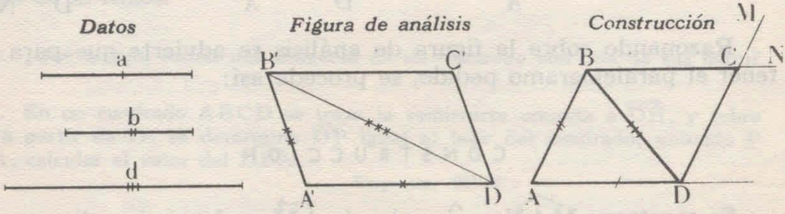
Si se sigue el primer procedimiento para determinar el vértice C , es un cuadrilátero que tiene los dos pares de lados opuestos paralelos, y, en consecuencia, es un paralelogramo.

Si se sigue el segundo procedimiento para determinar el vértice C , el cuadrilátero tiene los dos pares de lados opuestos iguales; en consecuencia, es un paralelogramo.

Si se sigue el tercer procedimiento para determinar el vértice C , es un cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos iguales y paralelos; en consecuencia, es un paralelogramo.

Condición de posibilidad. Cualesquiera sean los segmentos, datos a y b , siempre que el $\hat{\alpha}$ sea menor que un ángulo llano, el problema tiene solución.

2. Construir un paralelogramo conociendo dos lados consecutivos y una diagonal.



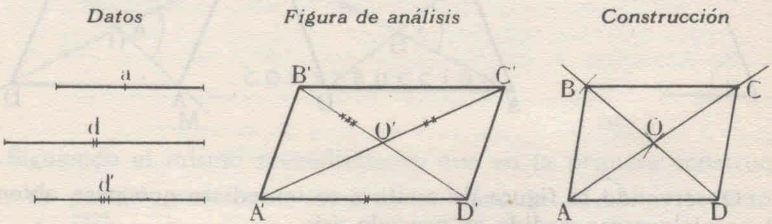
Observando la figura de análisis es evidente que, para poder construir el paralelogramo pedido, es cómoda la construcción previa del triángulo $\overset{\triangle}{A'B'D'}$ del cual se conocen sus tres lados.

CONSTRUCCIÓN

Se construye el triángulo $\overset{\triangle}{ABD}$ de lados a, b y d. Para determinar el cuarto vértice C, se sigue cualquiera de los procedimientos indicados en el primer problema. Uniendo C con B y D se tiene el paralelogramo pedido.

CONDICIÓN DE POSIBILIDAD. Como los tres segmentos datos son los lados del $\overset{\triangle}{ABD}$, por la propiedad triangular, cada uno de ellos debe ser menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

3. Construir un paralelogramo dados un lado y las dos diagonales.



Al trazar las diagonales en la figura de análisis, se observa que para poder construir el paralelogramo pedido conviene la construcción previa del $\overset{\triangle}{A'O'D'}$, del cual se conocen sus tres lados: $\overline{A'D'}$ que es dato, $\overline{A'O'}$ que es la mitad de una diagonal, y $\overline{O'D'}$ que es la mitad de la otra diagonal.

CONSTRUCCIÓN

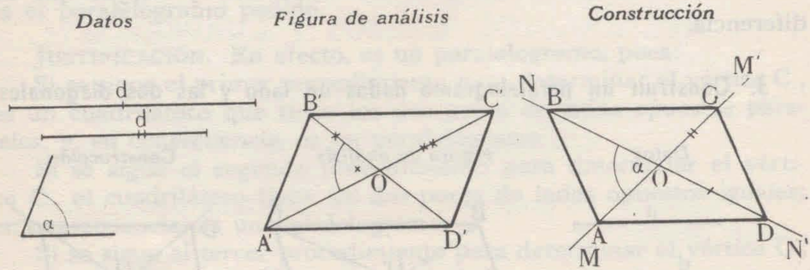
Se construye el $\overset{\triangle}{AOD}$ de lados $\overline{AD} = a$; $\overline{AO} = \dfrac{d}{2}$ y $\overline{OD} = \dfrac{d'}{2}$

Por O se prolongan $\overline{AO}$ y $\overline{DO}$, y se determinan, respectivamente, $\overline{OC} = \overline{AO}$ y $\overline{OB} = \overline{DO}$. Se unen A con B, B con C y C con D, y se obtiene así el paralelogramo ABCD pedido.

Justificación. Este cuadrilátero es, efectivamente, un paralelogramo, pues sus diagonales se cortan en partes iguales.

Condición de posibilidad. Como los segmentos a ; $\frac{d}{2}$ y $\frac{d'}{2}$ son los lados del $\widehat{AOD}$, los datos deben ser tales que dichos segmentos verifiquen la propiedad triangular.

4. Construir un paralelogramo dados las dos diagonales y uno de los ángulos que ellas forman al cortarse.



Observando la figura de análisis es inmediato que para obtener el paralelogramo pedido se procede así:

CONSTRUCCIÓN.

Se construye el ángulo $\widehat{MON} = \hat{\alpha}$. Se trazan las semirrectas $\overrightarrow{OM'}$ y $\overrightarrow{ON'}$ opuestas a los lados del ángulo. Sobre la $\overrightarrow{OM}$ y la $\overrightarrow{OM'}$ se determinan los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$, iguales a la mitad de una de las diagonales, por ejemplo, $\overline{OA} = \overline{OC} = \frac{d}{2}$; sobre la $\overrightarrow{ON}$ y la $\overrightarrow{ON'}$ se determinan los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$, iguales a la mitad de la otra diagonal, es decir: $\overline{OB} = \overline{OD} = \frac{d'}{2}$. Al unir los puntos A , B , C y D se obtiene el paralelogramo pedido.

Justificación. El cuadrilátero ABCD que resulta es un paralelogramo porque sus diagonales se cortan en partes iguales.

CONDICIÓN DE POSIBILIDAD. Como en el primer problema, cualesquiera sean los segmentos d y d′, siempre que α sea menor que un ángulo llano, el problema tiene solución.

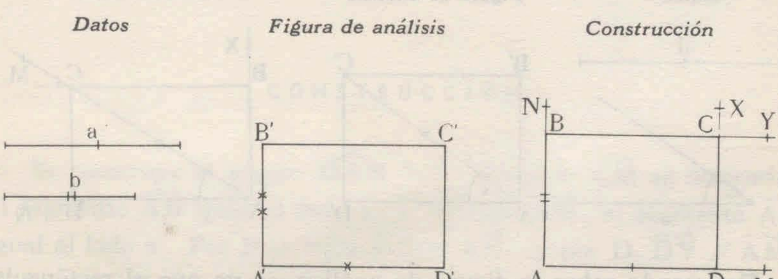
CONSTRUCCIONES DE RECTÁNGULOS.

En estas construcciones los ángulos están dados de antemano, pues deben ser forzosamente ángulos rectos. Luego, en lugar de tres datos como se fijan en las construcciones de paralelogramos en general, en estos casos particulares son suficientes dos datos.

5. Construir un rectángulo dados dos lados consecutivos.

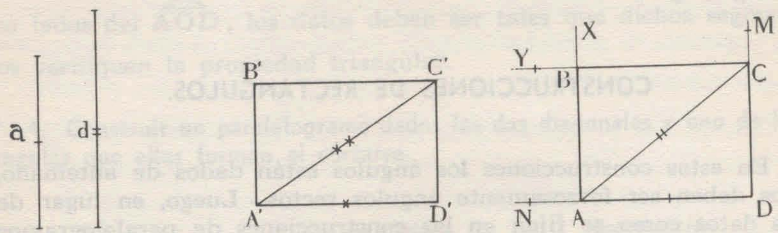
CONSTRUCCIÓN.

Siguiendo el mismo procedimiento que en la primera construcción de paralelogramos se construye el ángulo $\widehat{MAN} = 1$ recto; sobre la $\overrightarrow{AM}$ se determina el segmento $\overline{AD}$ igual al lado a y sobre la $\overrightarrow{AN}$ se determina el segmento $\overline{AB}$ igual al lado b . Por D se traza $\overrightarrow{DX} \perp AD$, y por B se traza $\overrightarrow{BY} \perp AB$. El punto C , intersección de $\overrightarrow{DX}$ y $\overrightarrow{BY}$, es el cuarto vértice del rectángulo $\boxed{ABCD}$ pedido.



6. Construir un rectángulo dados un lado y la diagonal.

Datos *Figura de análisis* *Construcción*



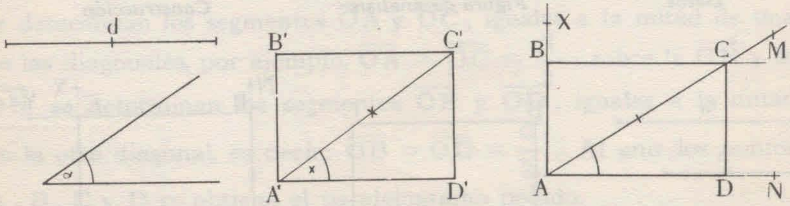
Observando la figura de análisis, vemos el camino a seguir.

CONSTRUCCIÓN

Se construye el ángulo $\widehat{MDN} = 1$ recto; sobre la $\overrightarrow{DN}$ se determina el segmento $\overline{AD}$ igual al lado a. Con centro A y radio igual a la diagonal d, se traza un arco de circunferencia que corta a la $\overrightarrow{DM}$ en C. Por A se traza $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{AD}$, y por C se traza $\overrightarrow{CY} \perp \overline{CD}$, semirrectas que se cortan en B, determinando el rectángulo ABCD pedido.

7. Construir un rectángulo dados la diagonal y el ángulo que forma con uno de los lados.

Datos *Figura de análisis* *Construcción*



Razonando sobre la figura de análisis, se ve que el rectángulo se obtiene así:

CONSTRUCCIÓN.

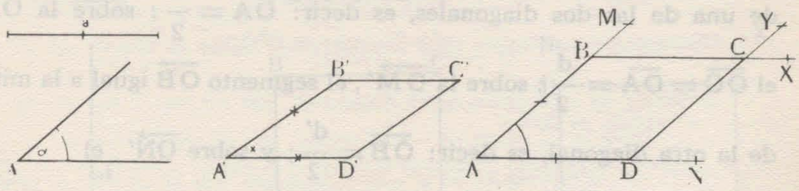
Se construye el ángulo $\widehat{MAN} = \hat{\alpha}$. Sobre la $\overrightarrow{AM}$ se determina el segmento $\overline{AC}$ igual a la diagonal d. Por A se traza la $\overrightarrow{AX} \perp AN$. Desde C se traza $CB \perp AX$, y $CD \perp AN$, obteniéndose así el rectángulo ABCD pedido.

CONSTRUCCIONES DE ROMBOS.

Estas construcciones son casos particulares de las construcciones de paralelogramos en general, teniendo en cuenta que en los rombos los cuatro lados son iguales y las propiedades que ello implica.

8. Construir un rombo dados un lado y un ángulo.

Datos *Figura de análisis* *Construcción*



CONSTRUCCIÓN

Se construye el ángulo $\widehat{MAN} = \hat{\alpha}$. Sobre la $\overrightarrow{AM}$ se determina el segmento $\overline{AB}$ igual al lado a, y sobre la $\overrightarrow{AN}$, el segmento $\overline{AD}$ igual al lado a. Por B se traza $\overrightarrow{BX} \parallel \overrightarrow{AN}$, y por D $\overrightarrow{DY} \parallel \overrightarrow{AM}$. El punto C de intersección es el cuarto vértice del rombo ABCD pedido.

9. Construir un rombo dadas las dos diagonales.

Datos

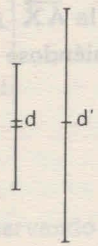
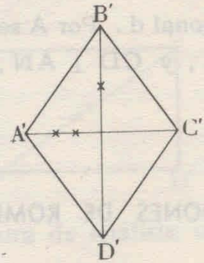
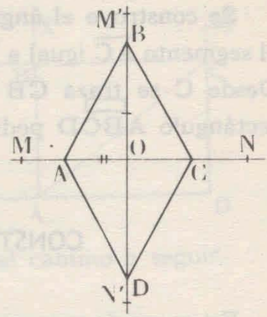


Figura de análisis



Construcción



C O N S T R U C C I Ó N.

Es necesario recordar que las diagonales del rombo son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

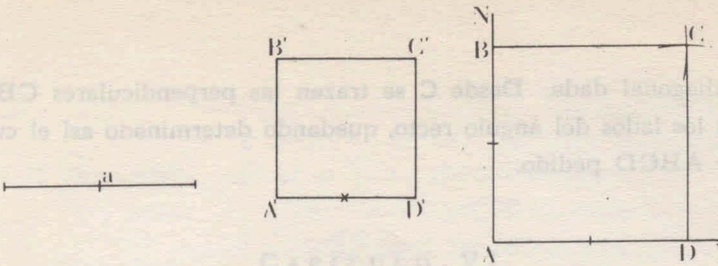
Se traza $MN \perp M'N'$, en O.

Se determina sobre la $\overrightarrow{OM}$, el segmento $\overline{OA}$ igual a la mitad de una de las dos diagonales, es decir: $\overline{OA} = \frac{d}{2}$; sobre la $\overrightarrow{ON}$ el $\overline{OC} = \overline{OA} = \frac{d}{2}$; sobre la $\overrightarrow{OM'}$, el segmento $\overline{OB}$ igual a la mitad de la otra diagonal, es decir: $\overline{OB} = \frac{d'}{2}$; y sobre $\overrightarrow{ON'}$ el $\overline{OD} = \overline{OB} = \frac{d'}{2}$.

Uniendo A, B, C y D, se obtiene el rombo $ABCD$ pedido.

CONSTRUCCIÓN DE CUADRADOS.

Como estos paralelogramos verifican la doble condición de tener los cuatro ángulos rectos y los cuatro lados iguales, basta en estas construcciones, fijar un dato.



Datos *Figura de análisis* *Construcción*

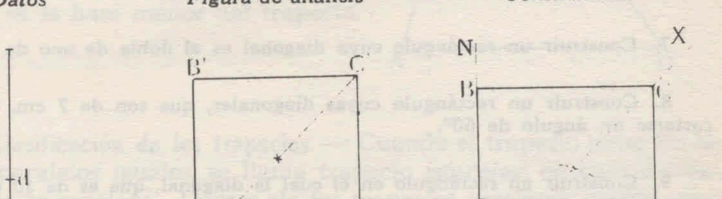
10. Construir un cuadrado dado el lado.

CONSTRUCCIÓN.

Se construye el ángulo $\widehat{NAM} = 1$ recto; sobre sus lados se determinan $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ iguales al lado a. Con radio a y centro en B y D respectivamente se trazan sendas circunferencias que se cortan en C. Se une C con B y con D, obteniendo así el cuadrado ABCD pedido.

11. Construir un cuadrado dada la diagonal.

Datos *Figura de análisis* *Construcción*



CONSTRUCCIÓN.

Recordando que las diagonales del cuadrado son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen, se construye el ángulo $\widehat{NAM} = 1$ recto, y se traza su bisectriz $\overrightarrow{AX}$; sobre ella se determina el $\overline{AC}$ igual a la diagonal dada. Desde C se trazan las perpendiculares CB y CD a los lados del ángulo recto, quedando determinado así el cuadrado ABCD pedido.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. Construir un paralelogramo en el que dos lados consecutivos son de 10 cm y 6 cm, respectivamente, y el ángulo comprendido de 60°.

2. Construir un paralelogramo en el que un lado es de 12 cm, el consecutivo de 6 cm y la diagonal que une los vértices no comunes de esos lados de 15 cm.

3. Las diagonales de un paralelogramo son de 8 cm y 6 cm, respectivamente, y forman, al cortarse, un ángulo de 50°. Construir el paralelogramo al que pertenecen.

4. Las diagonales de un paralelogramo son de 10 cm y 8 cm, uno de los lados de 5 cm. Construir dicho paralelogramo.

5. Construir un paralelogramo dados una diagonal, un lado y el ángulo que ellos forman.

6. Construir el rectángulo cuyos lados consecutivos son de 6 cm y 4 cm.

7. Construir un rectángulo cuya diagonal es el doble de uno de sus lados.

8. Construir un rectángulo cuyas diagonales, que son de 7 cm, forman al cortarse un ángulo de 60°.

9. Construir un rectángulo en el cual la diagonal, que es de 10 cm, forma con uno de los lados un ángulo de 40°.

10. Construir el cuadrado de diagonal igual a 6 cm.

11. Construir un rombo cuyas diagonales son, respectivamente, de 7 cm y 5 cm.

12. Construir un rombo dados un lado y una diagonal.

13. Construir un rombo, dados un lado y el ángulo que éste forma con una diagonal.

CAPÍTULO VI.

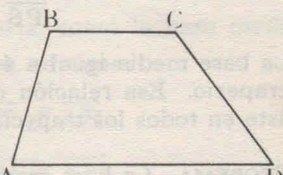
TRAPECIOS Y TRAPEZOIDES.

Los cuadriláteros que no son paralelogramos se clasifican en trapecios y trapezoides.

1. **Trapecio.** — Se llama *trapecio* al cuadrilátero que tiene únicamente dos lados opuestos paralelos.

Así, el cuadrilátero de la figura es un trapecio, pues tiene paralelos únicamente los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

Los lados paralelos se llaman *bases* del trapecio.



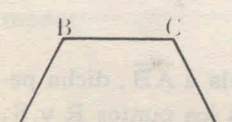
Así en el trapecio considerado:

$\overline{AD}$ es la *base mayor* del trapecio;

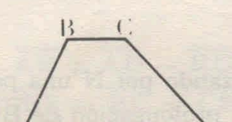
$\overline{BC}$ es la *base menor* del trapecio.

2. **Clasificación de los trapecios.** — Cuando el trapecio tiene los lados no paralelos iguales, se llama trapecio *isósceles*; en caso contrario, trapecio *escaleno*. Dentro de los trapecios escalenos, puede ocurrir que uno de los lados no paralelos sea perpendicular a las bases, y en tal caso se dice que el trapecio es *rectángulo*.

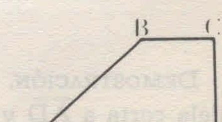
Trapecio isósceles



Trapecio escaleno



Trapecio escaleno rectángulo.



3. Base media de un trapecio. — Es el segmento determinado por los puntos medios de los lados no paralelos.

Así, en el trapecio PQRS, $\overline{MN}$ es la base media pues M es punto medio del lado $\overline{PQ}$ y

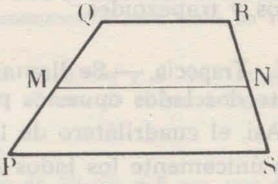
N es punto medio del lado $\overline{RS}$.

4. Al observar la figura se advierte que la base media es paralela a las bases del trapecio. Además, en este caso particular, si se miden las dos bases y la base media, se obtienen los siguientes resultados:

base mayor $\overline{PS} = 5$ cm

base menor $\overline{QR} = 3$ cm

base media $\overline{MN} = 4$ cm.

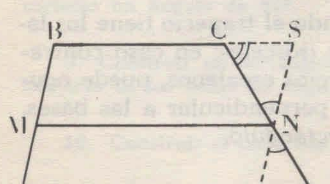


Si se suman las dos bases se obtiene:

$$\overline{PS} + \overline{QR} = 8 \text{ cm}.$$

La base media igual a 4 cm es la mitad de la suma de las bases del trapecio. Esa relación de la base media de la figura indicada, subsiste en todos los trapecios y se demuestra en el siguiente:

TEOREMA. *La base media de un trapecio es paralela a las bases e igual a la semisuma de las mismas.*



H) Trapecio ABCD

$\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, bases

$\overline{MN}$, base media.

T) 1º $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

2º $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$

DEMOSTRACIÓN. Trazando por N una paralela a $\overline{AB}$, dicha paralela corta a $\overline{AD}$ y a la prolongación de $\overline{BC}$ en los puntos R y S, respectivamente, quedando formados los triángulos:

$$\overset{\triangle}{NRD} \text{ y } \overset{\triangle}{NSC}, \text{ que tienen } \begin{cases} \overline{CN} = \overline{ND} & \text{por ser N el punto medio del lado } \overline{CD}\text{, por definición de base media.} \\ \overset{\triangle}{CNS} = \overset{\triangle}{RND} & \text{por ser opuestos por el vértice.} \\ \widehat{SCN} = \widehat{NDR} & \text{por ser alt. int. entre } \overline{BS} \,/\!/\, \overline{AD} \text{ y transv. } \overline{CD}\text{.} \end{cases}$$

Luego, por el segundo criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\overset{\triangle}{NRD} = \overset{\triangle}{NSC}$$

en consecuencia, los lados que se oponen a los ángulos iguales, son iguales, entre ellos:

$$\overline{NR} = \overline{SN} \qquad [1]$$

$$\text{y} \qquad \overline{RD} = \overline{SC} \qquad [2]$$

Como por la igualdad [1] $\overline{NR}$ y $\overline{SN}$ son iguales, N es punto medio del $\overline{SR}$, y como M es punto medio de $\overline{AB}$, resulta $\overline{MN}$ base media del $\overset{\square}{ABSR}$ y, en consecuencia, como la base media de un paralelogramo es paralela a las bases, se tiene:

$$\overline{MN} \,/\!/\, \overline{BS} \quad \text{y} \quad \overline{MN} \,/\!/\, \overline{AR}$$

o sea:

$$\overline{MN} \,/\!/\, \overline{BC} \quad \text{y} \quad \overline{MN} \,/\!/\, \overline{AD}$$

con lo que queda demostrada la primera parte de la tesis.

Pero la base media de un paralelogramo es también igual a las bases; luego,

$$\left.\begin{aligned} \overline{MN} &= \overline{AR} \\ \overline{MN} &= \overline{BS}\,. \end{aligned}\right. \qquad [3]$$

Los segmentos $\overline{AR}$ y $\overline{BS}$ se pueden expresar como suma y diferencia haciendo intervenir las bases del trapecio dado, del siguiente modo:

$$\overline{AR} = \overline{AD} - \overline{RD}$$

$$\overline{BS} = \overline{BC} + \overline{CS}$$

reemplazando estos segmentos en las igualdades [3], se tiene:

$$\overline{MN} = \overline{AD} - \overline{RD}$$
$$\overline{MN} = \overline{BC} + \overline{CS}$$

sumando m. a m.: $\overline{MN} + \overline{MN} = \overline{AD} - \overline{RD} + \overline{BC} + \overline{CS}.$

En el segundo miembro pueden reducirse $\overline{RD}$ y $\overline{CS}$, que son iguales, según [2], es decir:

$$\overline{MN} + \overline{MN} = \overline{AD} - \cancel{\overline{RD}} + \overline{BC} + \cancel{\overline{CS}}$$

como: $\overline{MN} + \overline{MN} = 2\,\overline{MN}$

reemplazando resulta: $2\,\overline{MN} = \overline{AD} + \overline{BC}$

pasando el factor 2 al segundo miembro, como divisor, se tiene:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$$

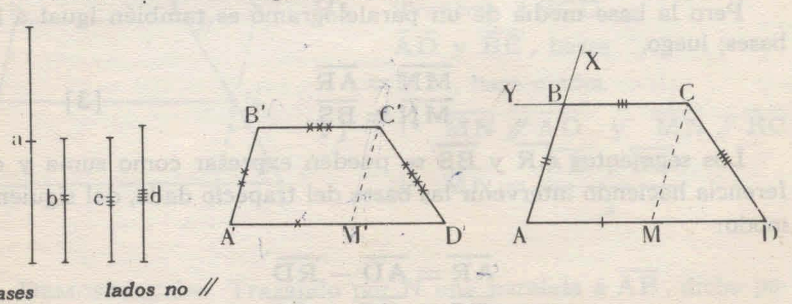
que es la segunda parte de la tesis.

Luego, el teorema queda demostrado.

CONSTRUCCIÓN DE TRAPECIOS.

5. Construir un trapecio dados sus cuatro lados.

Datos *Figura de análisis* *Construcción*



bases *lados no //*

Para establecer el procedimiento a seguir, es necesaria una construcción auxiliar en la figura de análisis.

Se traza, por C′, una paralela a $\overline{B'A'}$ que corta a $\overline{A'D'}$ en M′, resultando $\overline{C'M'} = \overline{B'A'}$, por ser lados opuestos del $\square A'B'C'M'$.

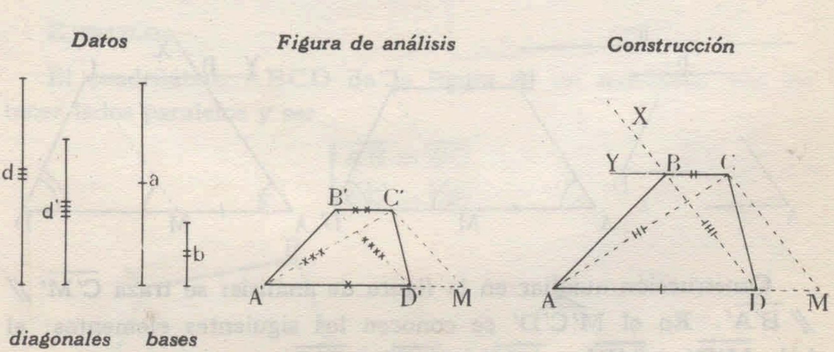
Se observa que la figura pedida puede obtenerse construyendo previamente el $\triangle M'C'D'$ en el que se conocen los tres lados. En efecto, el lado $\overline{M'C'} = \overline{A'B'}$, que en los datos es el segmento b; el lado $\overline{C'D'}$, que en los datos es el segmento d; y el lado $\overline{M'D'} = \overline{A'D'} - \overline{A'M'} = \overline{A'D'} - \overline{B'C'}$ que es la diferencia de las bases, que en los datos son los segmentos a y c.

CONSTRUCCIÓN

Se construye el segmento $\overline{AD}$ igual a la base mayor, es decir $\overline{AD} = a$. En la $\overrightarrow{AD}$, a partir de A, se determina el segmento $\overline{AM}$ igual a la base menor, es decir $\overline{AM} = c$. Con lados $\overline{MD}$, b y d se construye el $\triangle MCD$. Por A se traza la $\overrightarrow{AX} \parallel MC$ y por C la $\overrightarrow{CY} \parallel AD$.

El punto B, intersección de estas dos últimas semirrectas, es el cuarto vértice del trapecio pedido.

6. Construir un trapecio dadas las dos bases y las dos diagonales.



Como en el caso anterior, se hace una construcción auxiliar en la figura de análisis. Se traza la $\overrightarrow{D'M'}$ opuesta a la $\overrightarrow{D'A'}$. Por C′, se traza $C'M' \parallel B'D'$, resultando $\overline{D'M'} = \overline{B'C'}$ y $\overline{C'M'} = \overline{B'D'}$, por ser lados opuestos de un paralelogramo.

Se observa que el trapecio pedido puede obtenerse construyendo previamente el $\triangle A'C'M'$, cuyos lados son conocidos. En efecto: lado $\overline{A'M'} = \overline{A'D'} + \overline{D'M'}$, que en los datos es $(a + b)$; el lado $\overline{A'C'}$, que en los datos es el segmento d, y el lado $\overline{C'M'} = \overline{B'D'}$, que en los datos es el segmento d′.

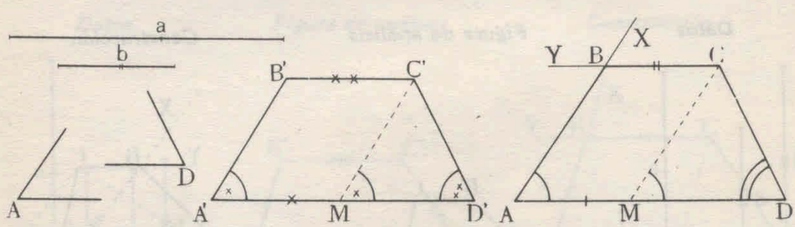
CONSTRUCCIÓN.

Se construye el triángulo $\triangle ACM$, cuyos lados conocidos son: $(a + b)$, d y d′.

Sobre la $\overrightarrow{AM}$ se determina el $\overline{AD} = a$, y se une D con C. Por D′, se traza $DX \parallel MC$, y por C se traza $CY \parallel DA$. El punto B, intersección de estas dos semirrectas, es el cuafto vértice del trapecio ABCD pedido.

7. Construir un trapecio dados las dos bases y los dos ángulos adyacentes a una de ellas.

Datos *Construcción*



Construcción auxiliar en la figura de análisis: se traza $\overline{C'M'} \parallel \overline{B'A'}$. En el $\triangle M'C'D'$ se conocen los siguientes elementos: el lado $\overline{M'D'} = \overline{A'D'} - \overline{A'M'} = \overline{A'D'} - \overline{B'C'}$, es decir, la diferencia de las bases, que en los datos es $(a - b)$; el ángulo $\widehat{C'M'D'} = \widehat{A}'$, que en los datos es $\hat{\alpha}$; el ángulo $\hat{D}'$, que en los datos es $\hat{\delta}$. Luego, dicho triángulo puede construirse y sirve de base para la obtención del trapecio pedido.

CONSTRUCCIÓN

Se construye el $\overline{AD}$ igual a la base mayor, es decir $\overline{AD} = a$, y sobre la $\overrightarrow{AD}$, a partir de A , el segmento $\overline{AM}$ igual a la base menor, es decir, $\overline{AM} = b$. Con base $\overline{MD}$ se construye el $\widehat{MCD}$, en el cual $\hat{M} = \hat{\alpha}$ y $\hat{D} = \hat{\delta}$. Se traza, por A , la semirrecta $\overrightarrow{AX} \parallel MC$ y, por C la semirrecta $\overrightarrow{CY} \parallel AM$. El punto B , intersección de estas dos últimas semirrectas, es el cuarto vértice del trapecio ABCD pedido.

8. Trapezoide. — Es el cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.

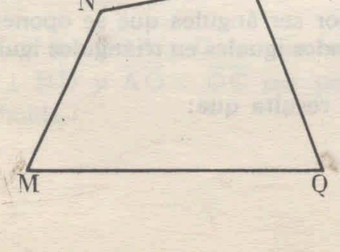
Así el cuadrilátero MNPQ es un trapezoide, pues no tiene ningún par de lados paralelos.

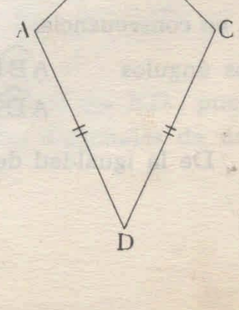
9. Romboide. — Se llama así al trapezoide que tiene dos lados consecutivos iguales y los otros dos lados distintos de los anteriores, pero también iguales entre sí.

EJEMPLO:

El cuadrilátero ABCD de la figura es un romboide, por no tener lados paralelos y ser

$$\overline{AB} = \overline{BC} \quad \text{y} \quad \overline{AD} = \overline{CD}.$$

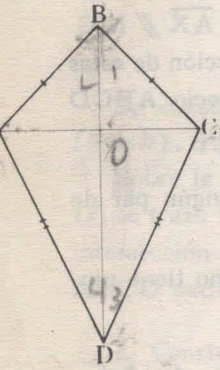




10. **Definición.** La diagonal del romboide que une los vértices a que concurren los pares de lados iguales se llama *diagonal principal.* Así, en el romboide considerado, $\overline{BD}$ es la diagonal principal.

11. **Propiedades del romboide.**— Las diagonales del romboide tienen las propiedades que se estudian a continuación:

Teorema. *La diagonal principal del romboide es bisectriz de los ángulos cuyos vértices une, y corta perpendicularmente a la otra diagonal en el punto medio.*



H) Romboide ABCD
$\overline{AB} = \overline{BC}$; $\overline{AD} = \overline{DC}$
$\overline{BD}$ diagonal principal;
las diagonales $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ se cortan en O.

T) 1º $\overline{BD}$ bisectriz de B y D.
2º $\overline{BD} \perp \overline{AC}$
3º $\overline{AO} = \overline{OC}$.

Demostración. La diagonal principal BD determina en el romboide los dos triángulos:

$$\widehat{ABD} \text{ y } \widehat{CBD}, \text{ que tienen: } \begin{cases} \overline{BD} \text{ común} \\ \overline{AB} = \overline{BC} \text{ por hipótesis} \\ \overline{AD} = \overline{DC} \text{ por hipótesis.} \end{cases}$$

Luego, por el tercer criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$$

y, en consecuencia,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{los ángulos} & A\widehat{B}D = D\widehat{B}C \\ \text{y} & A\widehat{D}B = B\widehat{D}C \end{array}\right\} \text{por ser ángulos que se oponen a lados iguales en triángulos iguales}$$

De la igualdad de estos ángulos resulta que:

$\overline{BD}$ es bisectriz de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{D}$, con lo que queda demostrada la primera parte de la tesis.

Por otra parte, siendo el $\widehat{ABC}$ isósceles por tener $\overline{AB} = \overline{BC}$, como $\overline{BO}$ es bisectriz del $\hat{B}$, por lo demostrado, es también altura y mediana correspondiente a la base $\overline{AC}$.

Por ser $\overline{BO}$ altura, es:

$$\overline{BO} \perp \overline{AC}$$

o sea:

$$\overline{BD} \perp \overline{AC} \qquad [1]$$

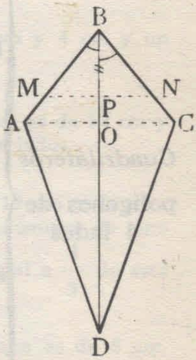
que es la segunda parte de la tesis.

Por ser $\overline{BO}$ mediana, es:

$$\overline{AO} = \overline{OC} \qquad [2]$$

que es la tercera parte de la tesis, y el teorema queda demostrado.

12. Eje de simetría del romboide. — Si se construye un romboide de papel y se dobla a lo largo de la diagonal principal, se observa que las dos partes en que ésta divide al romboide, resultan coincidentes. En consecuencia, la diagonal principal del romboide es eje de simetría del romboide. Esta propiedad, que es general, se demuestra en el siguiente:



TEOREMA. *La diagonal principal del romboide es eje de simetría del mismo.*

H) Romboide ABCD
$\overline{BD}$ diagonal principal

T) BD eje de simetría del romboide.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que $\overline{BD}$ es eje de simetría, hay que demostrar que todo punto del romboide tiene su simétrico con respecto a la diagonal principal, en el mismo romboide. En efecto:

Los puntos A y C son simétricos con respecto al eje BD, pues $AC \perp BD$ y $\overline{AO} = \overline{OC}$ por propiedades de las diagonales de un romboide.

Si se considera otro punto cualquiera del contorno, el M por ejemplo, al trazar la recta $MN \perp BD$, se determina en el contorno el punto N, que es el simétrico del M con respecto al eje; pues, los triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{BPM} \text{ y } \overset{\triangle}{BPN} \text{ son} \\ \text{iguales, por tener} \end{array}\right\{ \begin{array}{l} BP \text{ común} \\ \widehat{MBP} = \widehat{NBP} \text{ por ser la diagonal} \\ \qquad\qquad\qquad \overline{BD} \text{ bisectriz de } \hat{B}. \end{array}$$

Luego, todos sus elementos homólogos son iguales; entre ellos:

$$\overline{MP} = \overline{NP}$$

y, siendo por construcción $MN \perp BD$

N es el simétrico de M con respecto a BD.

Como M es un punto cualquiera del contorno, el teorema queda demostrado, en general.

13. Clasificación de los cuadriláteros.—La clasificación de los cuadriláteros se sintetiza en el siguiente cuadro:

- *Cuadriláteros* polígonos de 4 lados
  - *paralelogramos* los dos pares de lados opuestos paralelos
    - *generales*
    - *particulares*
      - *rectángulo:* los cuatro ángulos rectos
      - *rombo:* los cuatro lados iguales
      - *cuadrado:* ángulos iguales y lados iguales
  - *no paralelogramos* un solo par o ningún par de lados paralelos
    - *trapecio:* un solo par de lados opuestos paralelos
    - *trapezoide:* ningún par de lados paralelos; en particular: *romboide.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. En un trapecio isósceles, un ángulo de la base es de $42^\circ 26'$. Calcular los otros ángulos.

2. Dado un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, isósceles, en el que $\overline{AB} = \overline{BC}$, ¿qué figura se obtiene al unir un punto de la bisectriz del $\hat{B}$ exterior al $\overset{\triangle}{ABC}$ con los vértices A y C? ¿Por qué?

3. Construir un trapecio rectángulo dadas las dos bases y la altura.

4. Construir un trapecio, dados: base mayor $= 7$ cm; base menor $= 5$ cm. Uno de los lados no paralelos $= 2$ cm y el otro $= 3$ cm.

5. Construir un trapecio, dados: base mayor $= 10$ cm; base menor $= 6$ cm y los ángulos adyacentes a la base mayor $\hat{\alpha} = 49^\circ$ y $\hat{\beta} = 35^\circ$.

6. Construir un trapecio tal que: base mayor $= 5$ cm; base menor $= 3$ cm; una diagonal $= 4$ cm y la otra $= 6$ cm.

7. La base mayor de un trapecio es de 8 cm; la base media, de 5 cm. Calcular la base menor.

8. ¿Qué figura se obtiene al prolongar hasta el punto en que se cortan los lados no paralelos de: 1º, un trapecio isósceles; 2º, un trapecio rectángulo?

9. Construir un trapecio isósceles, dados: las bases de 6 cm y 4 cm y un ángulo en la base, de 45°.

10. En un trapecio isósceles de 30 cm de perímetro, una base es de 12 cm y uno de los lados no paralelos de 5 cm. Calcular los otros dos lados.

11. Construir un romboide cuya diagonal principal es de 12 cm y la otra de 5 cm, sabiendo que la intersección de las mismas se encuentra de uno de los vértices que une la diagonal principal a una distancia igual a $\frac{1}{3}$ de esta última.

12. Construir un romboide tal que la diagonal principal, que es de 8 cm, forme con uno de los lados, que es de 3 cm, un ángulo de 38°.

CAPÍTULO VII.

PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO.

1. Se llaman puntos notables del triángulo, a los puntos de intersección de las medianas, bisectrices, alturas y mediatrices del triángulo, y dichos puntos reciben ese nombre, por las importantes propiedades que tienen.

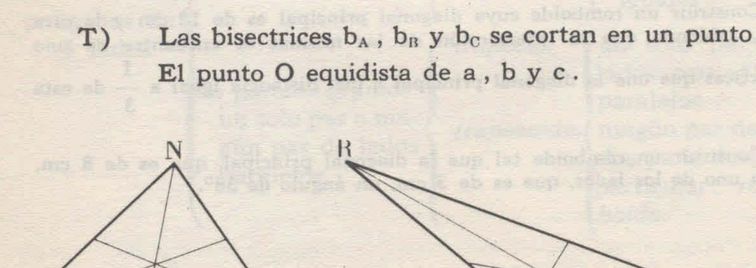
2. **Intersección de las bisectrices de un triángulo.**— Si se consideran dos triángulos cualesquiera, por ejemplo, el $\widehat{MNP}$ y el $\widehat{QRS}$ y, en cada uno de ellos se trazan las bisectrices de los tres ángulos, se observa que en los dos triángulos las tres bisectrices se cortan en un punto, y se podría verificar que en cada caso este punto está a igual distancia de los tres lados del triángulo.

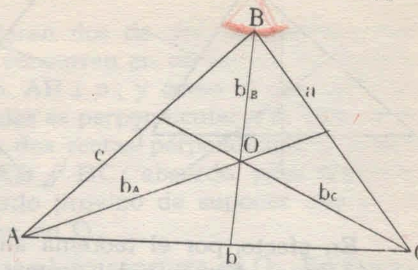
Esa propiedad de las bisectrices de un triángulo es general y se demuestra en el siguiente:

TEOREMA. *Las bisectrices de un triángulo concurren en un punto que equidista de los lados del triángulo.*

H) $\widehat{ABC}$

T) Las bisectrices b_A, b_B y b_C se cortan en un punto O.
El punto O equidista de a, b y c.





DEMOSTRACIÓN. Primero se consideran dos de las bisectrices, por ejemplo la b_A y la b_C y se comprueba que se cortan en un punto. En efecto, b_A es semirrecta interior al $\hat{A}$; en consecuencia corta al $\overline{BC}$ que tiene sus extremos B y C en los lados del $\hat{A}$, en un punto M. El $\overline{AM}$, que pertenece a b_A, tiene sus extremos en los lados del $\hat{C}$; en consecuencia, b_C, que es una semirrecta interior a dicho ángulo, corta a ese segmento en un punto O interior al triángulo.

Será necesario demostrar ahora que la tercera bisectriz, b_B, también concurre en O. En efecto es así, pues $O \in b_A$, y, como los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo, O equidista de los lados del ángulo $\hat{A}$, es decir,

O equidista de c y de b [1]

como $O \in b_C$, por la misma razón, equidista de los lados del ángulo $\hat{C}$, es decir:

O equidista de a y de b [2]

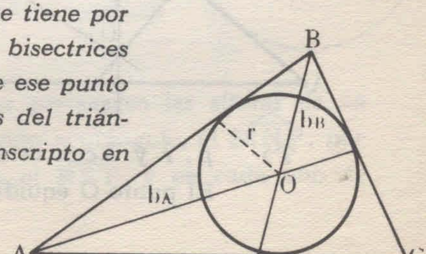
De [1] y [2], resulta que:

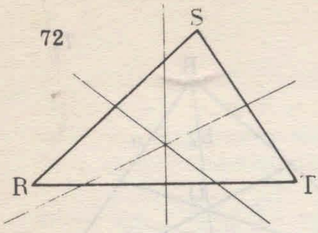
O equidista de a y de c [3]

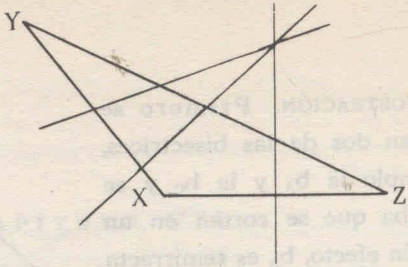
por lo tanto, si equidista de los lados del ángulo $\hat{B}$, debe pertenecer a la bisectriz b_B de dicho ángulo, o sea que b_B concurre también en O.

Este punto O, por [1], [2] y [3] equidista de los tres lados del triángulo, y el teorema queda demostrado.

3. COROLARIO. *La circunferencia que tiene por centro el punto de intersección de las bisectrices del triángulo, y por radio la distancia de ese punto a los lados, es tangente a los tres lados del triángulo, es decir el triángulo está circunscripto en dicha circunferencia.*







En efecto, por el teorema anterior, los tres lados del triángulo están a una distancia del centro igual al radio elegido; luego, serán tangentes a la circunferencia. En consecuencia, el triángulo está circunscripto a la circunferencia, o, lo que es equivalente, la circunferencia está inscripta en el triángulo.

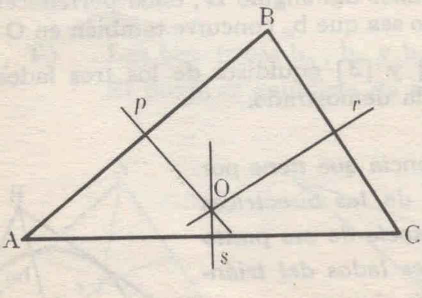
4. Intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo.

Si se consideran dos triángulos cualesquiera, por ejemplo el $\widehat{RST}$ y el $\widehat{XYZ}$, y en cada uno de ellos se trazan las mediatrices correspondientes de cada uno de los lados, se observa en ambos casos que las tres mediatrices se cortan en un punto.

Además, puede comprobarse en cada triángulo que el punto de intersección de las mediatrices está a igual distancia de los tres vértices del triángulo.

Esa propiedad de las mediatrices es común a todos los triángulos, y se anuncia en el siguiente

TEOREMA. *Las mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto que equidista de los vértices del mismo.*



H) $\widehat{ABC}$
p, mediatriz de $\overline{AB}$
r, mediatriz de $\overline{BC}$
s, mediatriz de $\overline{AC}$.

T) p, r y s concurren en un punto **O**.
El punto **O** equidista de **A**, **B** y **C**.

-ah - uh - ih -

oh - uh

Demostración. Si se consideran dos de las mediatrices, por ejemplo p y r, es inmediato que concurren en un punto, O, porque de lo contrario sería $p \parallel r$; pero, $AB \perp p$, y como si una recta es perpendicular a una de dos paralelas es perpendicular a la otra, sería $AB \perp r$, y, siendo $BC \perp r$, como dos rectas perpendiculares a una tercera, son paralelas resultaría $AB \parallel BC$; absurdo, pues entonces no existiría triángulo. Este absurdo provino de suponer que p no cortaba a r; luego p y r se cortan en O.

Es necesario demostrar que s también concurre en O. En efecto, dado que $O \in p$, como todo punto de la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos del mismo, O equidista de los extremos del segmento $\overline{AB}$, es decir:

$$\text{O equidista de A y de B} \qquad [1]$$

como también $O \in r$, por la misma razón, O equidista de los extremos del segmento $\overline{BC}$, es decir:

$$\text{O equidista de B y de C} \qquad [2]$$

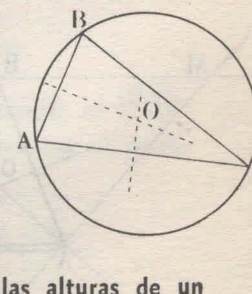
de [1] y [2] resulta que:

$$\text{O equidista de A y de C} \qquad [3]$$

es decir, O equidista de los extremos del segmento $\overline{AC}$; en consecuencia, O pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$; es decir, $O \in s$, luego las tres mediatrices concurren en O.

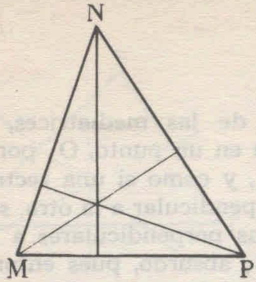
Por [1], [2] y [3], ese punto O equidista de los vértices A B y C, y el teorema queda demostrado.

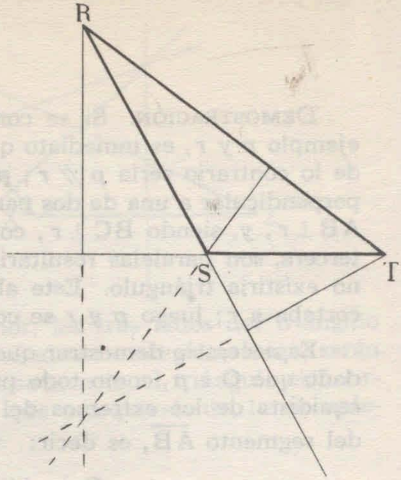
5. Corolario. *La circunferencia que tiene por centro el punto de intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo, y por radio la distancia de ese punto a cada uno de los vértices, contiene a los tres vértices del triángulo, es decir, el triángulo está inscripto en esa circunferencia.*



Esta observación es una conclusión inmediata del teorema anterior.

6. Intersección de las rectas a que pertenecen las alturas de un triángulo. — Si se considera un triángulo acutángulo, el $\widehat{MNP}$, por ejemplo, y un triángulo obtusángulo, el $\widehat{RST}$, y en cada uno de





ellos se trazan las tres alturas correspondientes a los lados, se observa que:

En el triángulo acutángulo, las tres alturas se cortan en un punto.

En el triángulo obtusángulo, las tres alturas no se cortan, pero en cambio sí se cortan las rectas a que pertenecen esas alturas. Por ello esa propiedad no es de las alturas, en general, sino de las rectas a que pertenecen las alturas, y se estudia en el siguiente:

TEOREMA. *Las rectas a que pertenecen las alturas de un triángulo concurren en un punto.*

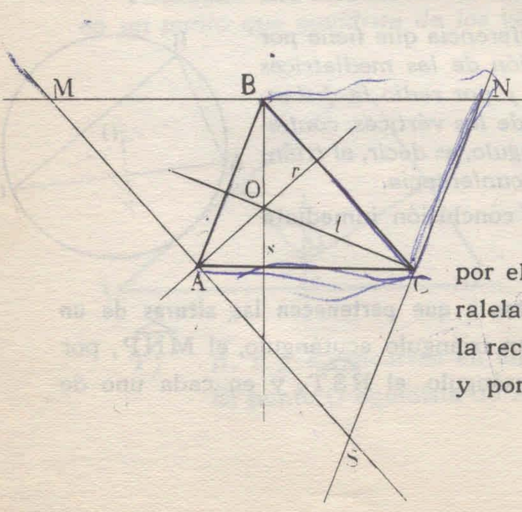
H) $\widehat{ABC}$

la altura h_a pertenece a la recta r

la altura h_b pertenece a la recta s

la altura h_c pertenece a la recta t

T) r, s y t concurren en un punto.



DEMOSTRACIÓN. Trazando por cada vértice del $\widehat{ABC}$ la paralela al lado opuesto, es decir:

por el vértice A, la recta MS paralela al lado $\overline{BC}$; por el vértice B la recta MN paralela al lado $\overline{AC}$; y por el vértice C, la recta NS paralela al lado $\overline{BA}$; queda formado el triángulo $\widehat{MNS}$, tal que los vértices A, B y C del primer triángulo, son los puntos medios de los lados de este último.

En efecto:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{por ser lados op. del } \overset{\diagup\!\!\!\square}{ABNC}, & \overline{NC} = \overline{AB} \\ \text{por ser lados op. del } \overset{\diagup\!\!\!\square}{ABCS}, & \overline{SC} = \overline{AB}\end{array}\right\} \therefore \overline{NC} = \overline{SC}, \text{ o sea C punto medio de } \overline{NS}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{por ser lados op. del } \overset{\diagup\!\!\!\square}{MBCA}, & \overline{MA} = \overline{BC} \\ \text{por ser lados op. del } \overset{\diagup\!\!\!\square}{ABCS}, & \overline{AS} = \overline{BC}\end{array}\right\} \therefore \overline{MA} = \overline{AS}, \text{ o sea A punto medio de } \overline{MS}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{por ser lados op. del } \overset{\diagup\!\!\!\square}{AMBC}, & \overline{MB} = \overline{AC} \\ \text{por ser lados op. del } \overset{\diagup\!\!\!\square}{ABNC}, & \overline{BN} = \overline{AC}\end{array}\right\} \therefore \overline{MB} = \overline{BN}, \text{ o sea B punto medio de } \overline{MN}$$

Luego, r es la mediatriz del segmento $\overline{MS}$, pues pasa por su punto medio A, y es $r \perp MS$, por ser perpendicular a la recta BC que es paralela a MS.

Análogamente, s es la mediatriz del segmento $\overline{MN}$, pues pasa por su punto medio B, y es $s \perp MN$, por ser s perpendicular a la recta AC que es paralela a MN.

Del mismo modo:

t es la mediatriz del segmento $\overline{NS}$, pues pasa por su punto medio C, y es $t \perp NS$, por ser t perpendicular a la recta AB que es paralela a NS.

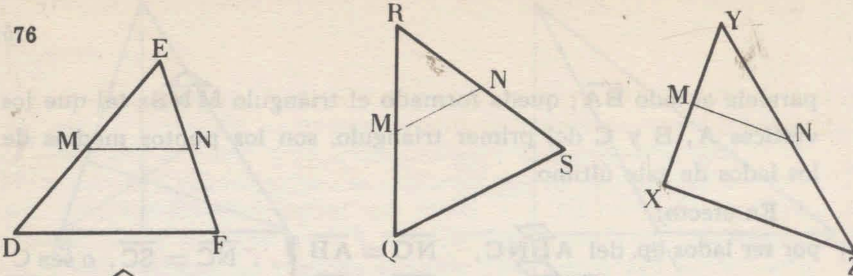
Por lo tanto, r, s y t son las mediatrices de los lados del triángulo auxiliar MNS, y, por el teorema anterior, se cortan en un punto O.

Luego, el teorema queda demostrado.

7. Si se consideran distintos triángulos, por ejemplo el $\widehat{DEF}$ el $\widehat{QRS}$ y el $\widehat{XYZ}$, en cada uno de ellos se determina el punto medio de dos de los lados:

así en el $\widehat{DEF}$, M es el punto medio de $\overline{DE}$
N es el punto medio de $\overline{EF}$

en el $\widehat{QRS}$, M es el punto medio de $\overline{QR}$
N es el punto medio de $\overline{RS}$



en el $\widehat{XYZ}$, M es el punto medio de $\overline{XY}$

N es el punto medio de $\overline{YZ}$

y en cada uno de ellos se dibuja el segmento $\overline{MN}$.

Se observa que este segmento es paralelo al otro lado y se comprueba, en cada caso, que es igual a la mitad de dicho lado.

Así, en el primer triángulo:

$$\overline{MN} \parallel \overline{DF} \quad \text{y} \quad \overline{MN} = \frac{\overline{DF}}{2}$$

en el segundo triángulo:

$$\overline{MN} \parallel \overline{QS} \quad \text{y} \quad \overline{MN} = \frac{\overline{QS}}{2}$$

en el tercer triángulo:

$$\overline{MN} \parallel \overline{XZ} \quad \text{y} \quad \overline{MN} = \frac{\overline{XZ}}{2}$$

Esta propiedad del segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es general y se demuestra en el siguiente:

TEOREMA. *El segmento determinado por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.*

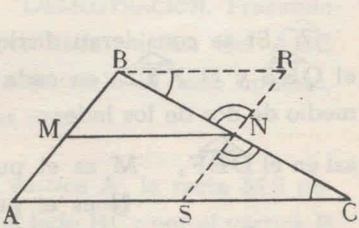
H) $\widehat{ABC}$

M punto medio de $\overline{AB}$

N punto medio de $\overline{BC}$

T) $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AC}}{2}$$



DEMOSTRACIÓN. Por B, se traza una paralela a $\overline{AC}$, y, por N una paralela a $\overline{AB}$ que corta a la anterior en R y al lado $\overline{AC}$ en S. Quedan así formados los triángulos:

$\widehat{BNR}$ y $\widehat{CNS}$, que tienen
$$\begin{cases} \overline{BN} = \overline{NC} & \text{por ser N punto medio de } \overline{BC} \text{ por hipótesis} \\ \widehat{RBN} = \widehat{SCN} & \text{por ser alt. int. entre } BR \mathbin{/\!/} CS \text{ y transversal a } BC \\ \widehat{BNR} = \widehat{CNS} & \text{por ser opuestos por el vértice} \end{cases}$$

Luego, por el segundo criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\widehat{BNR} = \widehat{CNS}$$

En consecuencia, los lados homólogos, son iguales; entre ellos:

$$[1] \qquad \overline{NR} = \overline{NS} \quad \text{y} \quad \overline{BR} = \overline{SC} \qquad [2]$$

Por ser, por construcción, ABRS un paralelogramo; M el punto medio de $\overline{AB}$, por hipótesis y N el punto medio de $\overline{RS}$, por la igualdad [1], es $\overline{MN}$ base media del $\square ABRS$ y por lo tanto:

$$MN \mathbin{/\!/} AS, \text{ o sea } \overline{MN} \mathbin{/\!/} \overline{AC}; \qquad [3]$$

$$\text{y} \quad \overline{MN} = \overline{AS} \qquad [4]$$

$$\text{y} \quad \overline{MN} = \overline{BR} \qquad [5]$$

Sumando m. a m.: $\quad 2\,\overline{MN} = \overline{AS} + \overline{BR}.$

Reemplazando $\overline{BR}$ por su igual $\overline{SC}$, según lo demostrado en la igualdad [2], se tiene:

$$2\,\overline{MN} = \overline{AS} + \overline{SC}$$

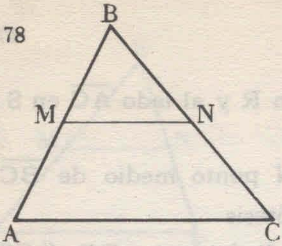
y como $\overline{AS} + \overline{SC}$ es igual a $\overline{AC}$, se tiene:

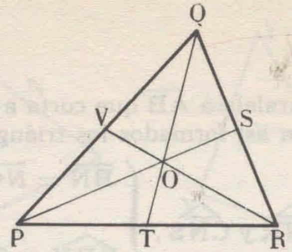
$$2\,\overline{MN} = \overline{AC}$$

pasando el factor 2', al segundo miembro como divisor, resulta:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AC}}{2} \qquad [4]$$

Las igualdades [3] y [4] resumen la tesis; luego, el teorema queda demostrado.





8. Base media del triángulo. — El segmento determinado por los puntos medios de dos lados de un triángulo, se llama *base media* de dicho triángulo con respecto al tercer lado.

Así en el $\overset{\triangle}{ABC}$, el $\overline{MN}$ es la base media con respecto al lado $\overline{AC}$. De ahí que el teorema anterior puede enunciarse también en la siguiente forma:

La base media de un triángulo, con respecto a un lado, es paralela a ese lado e igual a la mitad.

9. Intersección de las medianas de un triángulo. — Si en un triángulo cualquiera, el $\overset{\triangle}{RQR}$, por ejemplo, se trazan las tres medianas, se observa que éstas se cortan en un punto O, y, si se miden los segmentos que quedan determinados, se observa que, en la mediana $\overline{PS}$, el segmento $\overline{OS}$ es la tercera parte de la mediana, o, lo que es lo mismo, el segmento $\overline{PO}$ es igual a 2 segmentos $\overline{OS}$, o sea, igual a $\dfrac{2}{3}$ de la mediana

Análogamente: en la mediana $\overline{RV}$ se verifica que,

$$\overline{OV} = \frac{1}{3}\,\overline{RV} \quad \text{o sea} \quad \overline{OR} = \frac{2}{3}\,\overline{RV}$$

y en la mediana, $\overline{QT}$, también se verifica que:

$$\overline{OT} = \frac{1}{3}\,\overline{QT} \quad \text{o sea} \quad \overline{OQ} = \frac{2}{3}\,\overline{QT}$$

es decir, que la distancia del punto O a cada uno de los vértices es igual a los $\dfrac{2}{3}$ de la mediana correspondiente.

Esta propiedad del punto de intersección de las medianas de un triángulo se verifica, en general, y se demuestra en el siguiente:

TEOREMA. *Las medianas de un triángulo concurren en un punto, situado a una distancia del vértice igual a los* $\frac{2}{3}$ *de la mediana correspondiente.*

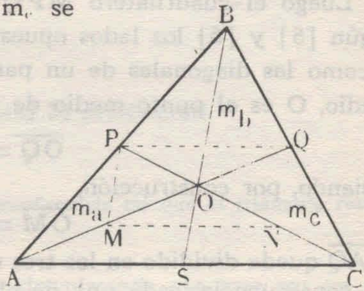
H) $\overset{\triangle}{ABC}$

T) Las medianas m_a ; m_b ; m_c se cortan en O, tal que:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3} m_a$$

$$\overline{BO} = \frac{2}{3} m_b$$

$$\overline{CO} = \frac{2}{3} m_c$$



DEMOSTRACIÓN. Considerando dos de las medianas, por ejemplo m_a y m_c, se comprende que deben cortarse en un punto O, pues son diagonales del cuadrilátero APQC que se forma al unir P con Q.

Se determina el punto medio de $\overline{AO}$, que es M, y el punto medio de $\overline{OC}$, que es N. Uniendo los puntos M, P, Q y N se forma el cuadrilátero MPQN, que es un paralelogramo, según vamos a demostrar. En efecto, siendo M y N los puntos medios de AO y OC, por el teorema que dice :el segmento determinado por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado es igual a su mitad, es:

$$[1] \qquad MN \mathbin{/\!/} AC \quad \text{y} \quad \overline{MN} = \frac{\overline{AC}}{2}. \qquad [2]$$

Siendo P y Q los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, es, por la misma razón,

$$[3] \qquad PQ \mathbin{/\!/} AC \quad \text{y} \quad \overline{PQ} = \frac{\overline{AC}}{2} \qquad [4]$$

De [1] y [3] resulta:

$$MN \parallel PQ \qquad [5]$$

por consecuencia del carácter recíproco y transitivo del paralelismo.

De [2] y [4] resulta:

$$\overline{MN} = \overline{PQ} \qquad [6]$$

por consecuencia del carácter recíproco y transitivo de la igualdad.

Luego el cuadrilátero MPQN es un paralelogramo por tener según [5] y [6] los lados opuestos $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ iguales y paralelos, y como las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, O es el punto medio de las diagonales $\overline{PN}$ y $\overline{MQ}$. Luego

$$\overline{OQ} = \overline{OM}$$

y siendo, por construcción,

$$\overline{OM} = \overline{MA}$$

el $\overline{AQ}$ queda dividido en los tres segmentos iguales $\overline{OQ}$, $\overline{OM}$ y $\overline{MA}$. En consecuencia, cada uno de ellos es la tercera parte de esa mediana, o sea:

$$\overline{AM} = \overline{MO} = \overline{OQ} = \frac{1}{3}\, m_a$$

luego:

$$\overline{OA} = \overline{AM} + \overline{MO} = 2\,\overline{AM} = \frac{2}{3}\, m_a$$

En forma análoga, se demuestra que:

$$\overline{OC} = \frac{2}{3}\, m_c$$

Considerando luego las medianas m_c y m_b, por ejemplo, resultará, razonando de igual modo, que se cortan en un punto O′ tal que:

$$\overline{O'C} = \frac{2}{3}\, m_c$$

y

$$\overline{O'B} = \frac{2}{3}\, m_b$$

luego, el punto O′ debe coincidir con O, porque están los dos sobre la mediana m_c a una misma distancia de C igual a $\frac{2}{3} m_c$

Luego, las tres medianas concurren en el punto O, tal, que según las igualdades demostradas, verifica que:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3} m_a \; ; \quad \overline{BO} = \frac{2}{3} m_b \; ; \quad \overline{CO} = \frac{2}{3} m_c$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Dado un triángulo, dibujar la circunferencia tal que el triángulo resulte circunscripto en ella.

2. Dibujar un triángulo y trazar la circunferencia que pase por sus tres vértices.

3. La base de un triángulo es de 12 cm. Calcular la base media correspondiente.

4. La base media de un triángulo equilátero es de 5 cm; calcular el perímetro de dicho ángulo.

5. En un triángulo equilátero, el perímetro es de 45 cm. Calcular su base media.

6. En un triángulo isósceles de 32 cm de perímetro, uno de los lados iguales es de 12 cm. Calcular la base media correspondiente al lado base.

7. En el triángulo $\overset{\triangle}{MNP}$, las medianas se cortan en el punto O. Calcular el segmento $\overline{MO}$ sabiendo que la mediana correspondiente al lado $\overline{MP}$ es de 18 cm.

8. Construir el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, tal que el lado $\overline{AB}$ sea de 5 cm, la mediana correspondiente al lado $\overline{BC}$, de 6 cm, y la correspondiente al lado $\overline{AC}$, de 7,2 cm.

CAPÍTULO VIII.

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO.

1. Circunferencia. — Como ya ha sido estudiada en el primer curso, comenzaremos directamente por la siguiente:

DEFINICIÓN. Dados en un plano un punto O y un segmento r, se llama *circunferencia de centro* O *y radio* r, al conjunto de todos los puntos de ese plano que se encuentran a una distancia de O igual a r.

El punto O se llama *centro* de la circunferencia, y el segmento r, *radio* de la misma. (Fig. sig. izq.).

NOTACIÓN. Para indicar abreviadamente una circunferencia, se escribe una letra *C* mayúscula cursiva, y encerrados en un paréntesis, como subíndice, el nombre del centro y del radio. Así, la circunferencia de centro O y radio r se expresa:

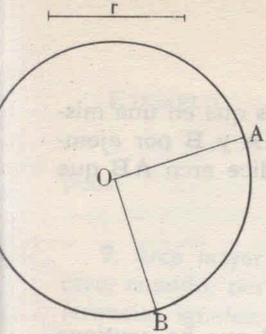
$$\mathcal{C}\,(O\,;\,r)$$

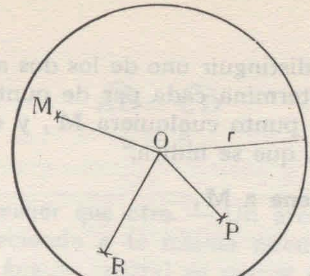
2. Puntos interiores. — Todos los puntos del plano de una circunferencia tales que su distancia al centro sea menor que el radio, se llaman *puntos interiores a dicha circunferencia.*

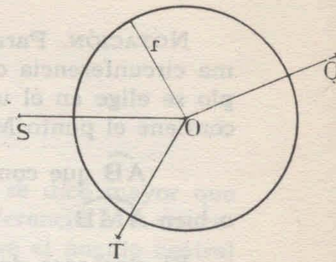
Así, en la figura siguiente (centro) son puntos interiores M, R y P, porque los segmentos $\overline{OM}$, $\overline{OR}$ y $\overline{OP}$, que son sus distancias al centro, son menores que el radio.

3. Puntos exteriores. — Los puntos del plano de una circunferencia tales que su distancia al centro sea mayor que el radio, se llaman *puntos exteriores a dicha circunferencia.*

Así, en la figura (der.) los puntos S, T y Q son puntos exteriores a la circunferencia porque los segmentos $\overline{OS}$, $\overline{OT}$ y $\overline{OQ}$, que son sus distancias al centro, son mayores que el radio.







4. Círculo. — Se llama *círculo* de centro O y radio r, al conjunto de los puntos de la circunferencia de centro O y radio r y de todos los interiores a ella.

Obsérvese que el círculo es una parte del plano que tiene por contorno la circunferencia de igual centro y radio, mientras que la circunferencia es una línea.

NOTACIÓN. Círculo de centro O y radio r se expresa simbólicamente:

$$C\,(O\,;\ r)\,.$$

5. Circunferencias iguales. — DEFINICIÓN. *Dos circunferencias son iguales cuando tienen radios iguales.*

En símbolos:

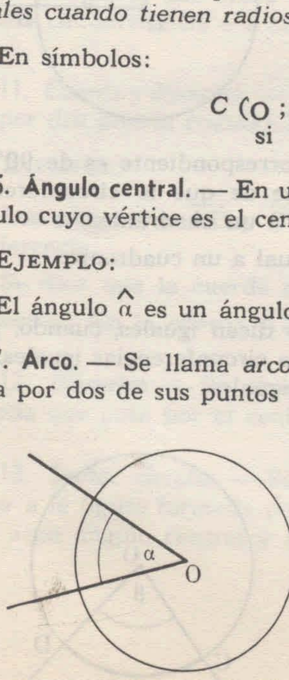
$$C\,(O\,;\ r) = C\,(O'\,;\ r') \quad \text{si} \quad r = r'.$$

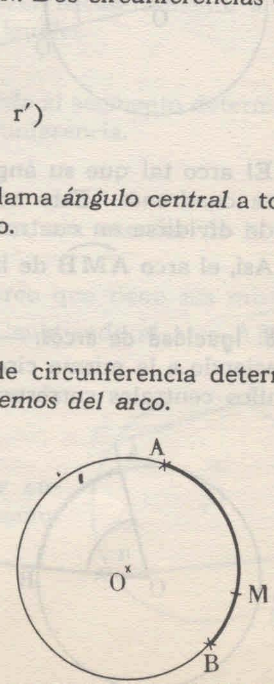
6. Ángulo central. — En un círculo, se llama *ángulo central* a todo ángulo cuyo vértice es el centro del círculo.

EJEMPLO:

El ángulo $\hat{\alpha}$ es un ángulo central.

7. Arco. — Se llama *arco* a la parte de circunferencia determinada por dos de sus puntos llamados *extremos del arco.*





Notación. Para distinguir uno de los dos arcos que en una misma circunferencia determina cada par de puntos, A y B por ejemplo se elige en él un punto cualquiera M , y se dice arco AB que contiene el punto M , que se indica,

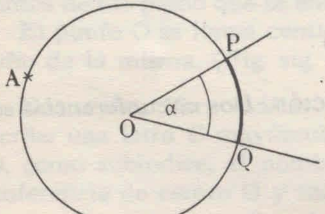
$\overset{\frown}{AB}$ que contiene a M,

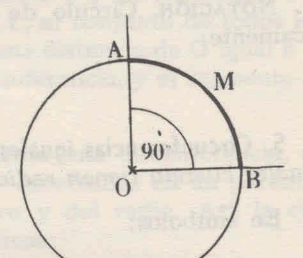
o bien $\overset{\frown}{AMB}$.

El otro arco de extremos A y B se dice: $\overset{\frown}{AB}$ que no contiene al punto M.

El ángulo central tal que sus lados pasan por los extremos de un arco y todos los demás puntos del arco son interiores al mismo, se dice *ángulo central correspondiente a dicho arco o que abarca ese arco.*

En la figura, $\hat{\alpha}$ es el ángulo central correspondiente a $\overset{\frown}{PQ}$ que no contiene a A, o bien $\hat{\alpha}$ es el ángulo central que abarca el arco $\overset{\frown}{PQ}$.

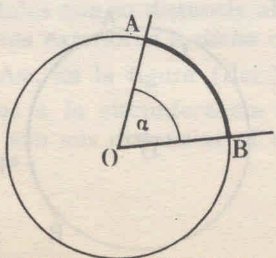


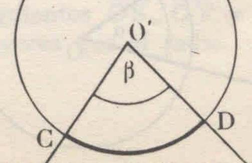


El arco tal que su ángulo central correspondiente es de 90° se llama *cuadrante.* Este nombre proviene de que la circunferencia puede dividirse en cuatro arcos iguales a un cuadrante.

Así, el arco $\overset{\frown}{AMB}$ de la figura, es igual a un cuadrante.

8. Igualdad de arcos. — Dos arcos se dicen iguales, cuando, perteneciendo a la misma circunferencia o a circunferencias iguales, los ángulos centrales correspondientes son iguales.





EJEMPLO:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

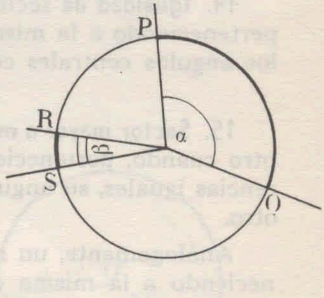
pues: $$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

9. Arco mayor o menor que otro. — Un arco se dice mayor que otro, cuando, perteneciendo a la misma circunferencia o a circunferencias iguales, su ángulo central es mayor que el ángulo central del otro.

EJEMPLO:

$$\overset{\frown}{PQ} > \overset{\frown}{RS}$$

pues: $$\hat{\alpha} > \hat{\beta}$$



De igual modo, un arco se dice menor que otro, cuando, perteneciendo a la misma circunferencia o a circunferencias iguales, su ángulo central es menor que el ángulo central del otro.

10. OBSERVACIÓN. Obsérvese que de acuerdo con lo dicho, para poder comparar dos arcos deben pertenecer necesariamente a una misma circunferencia o a circunferencias iguales.

11. Cuerda y diámetro. — Se llama *cuerda* al segmento determinado por dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

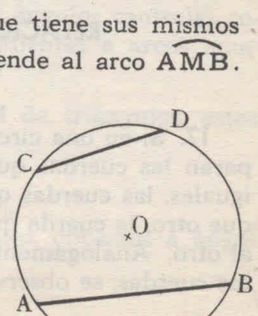
EJEMPLO:

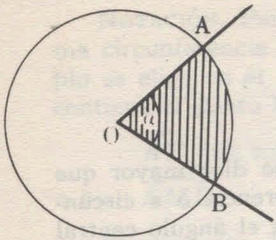
Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, de la figura, son cuerdas de la circunferencia.

Se dice que la cuerda subtiende al arco que tiene sus mismos extremos. Así la cuerda $\overline{AB}$ de la figura subtiende al arco $\overset{\frown}{AMB}$.

12. Diámetro. — Se llama *diámetro* a la cuerda que pasa por el centro.

13. Sector circular. — Se llama *sector circular* a la figura formada por los puntos comunes a un ángulo central y al círculo.





En la figura aparece sombreado el sector OAB, pues es la parte común al círculo de centro O y al ángulo $\hat{\alpha}$.

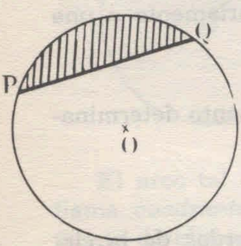
El ángulo central que lo determina se dice ángulo central correspondiente al sector.

Así el ángulo $\hat{\alpha}$ es el ángulo central correspondiente al sector.

14. Igualdad de sectores. — Dos sectores se dicen iguales, cuando, perteneciendo a la misma circunferencia o a circunferencias iguales, los ángulos centrales correspondientes son iguales.

15. Sector mayor o menor que otro. — Un sector se dice mayor que otro cuando, perteneciendo a la misma circunferencia o a circunferencias iguales, su ángulo central es mayor que el ángulo central del otro.

Análogamente, un sector se dice menor que otro, cuando, perteneciendo a la misma circunferencia o a circunferencias iguales, su ángulo central es menor que el ángulo central del otro.



16. Segmento de círculo. — Si en una circunferencia se traza una cuerda, ésta queda dividida en dos partes, cada una de las cuales se llama *segmento de círculo.*

Así, la cuerda $\overline{PQ}$ de la figura divide al círculo en dos segmentos circulares, el que está sombreado y el que está en blanco.

RELACIONES ENTRE ARCOS Y CUERDAS IGUALES O DESIGUALES.

17. Si en una circunferencia se dibujan distintos arcos, y se comparan las cuerdas que éstos subtienden, se ve que, si dos arcos son iguales, las cuerdas que subtienden son iguales; si un arco es mayor que otro, la cuerda que lo subtiene es mayor que la que corresponde al otro. Análogamente, si en una circunferencia se consideran distintas cuerdas, se observa que: si las cuerdas son iguales, los arcos que

subtienden son iguales, en cambio, si una cuerda es mayor que otra, el arco correspondiente a la primera es mayor que el correspondiente a la segunda.

Estas observaciones son generales y se demuestran en los teoremas directos y recíprocos que se estudian a continuación.

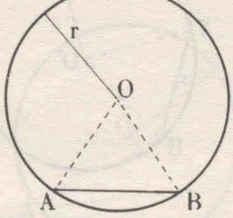
18. TEOREMA. *En una circunferencia, o en circunferencias iguales, a arcos iguales corresponden cuerdas iguales.*

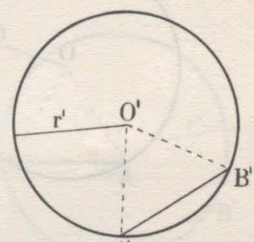
H) $C\,(O\,;\,r)$ y $C\,(O'\,;\,r')$

$$r = r'$$

Arco $\overset{\frown}{AB}$ = arco $\overset{\frown}{A'B'}$.

T) Cuerda $\overline{AB}$ = cuerda $\overline{A'B'}$.





DEMOSTRACIÓN. Trazando los radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{O'A'}$ y $\overline{O'B'}$ quedan determinados los triángulos:

$\overset{\triangle}{AOB}$ y $\overset{\triangle}{A'O'B'}$ que tienen
$\left\{ \begin{array}{ll} \overline{OA} = \overline{O'A'} & \text{por radios de circunferencias iguales.} \\ \overline{OB} = \overline{O'B'} & \text{por radios de circunferencias iguales.} \\ \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'} & \text{por ser ángulos centrales correspondientes a arcos iguales.} \end{array} \right.$

Luego, por el primer criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{A'O'B'}.$$

En consecuencia, los lados de esos triángulos, opuestos a ángulos iguales, son iguales; entre ellos:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

que es la tesis.

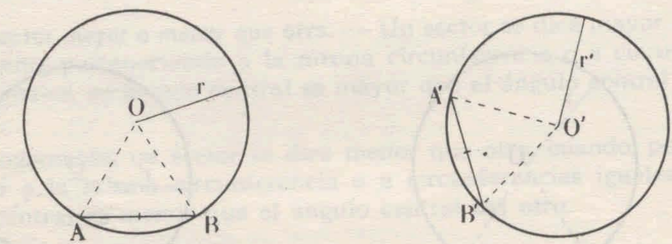
19. TEOREMA RECÍPROCO. *En una circunferencia, o en circunferencias iguales, a cuerdas iguales corresponden arcos iguales.*

H) $C(O\,;\,r)$ y $C(O'\,;\,r')$

$r = r'$

Cuerdas: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

T) Arcos: $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$.



DEMOSTRACIÓN. Trazando los radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{O'A'}$ y $\overline{O'B'}$ se forman los triángulos:

$\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'O'B'}$ que tienen
$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{O'A'} & \text{por radios de circunferencias iguales.} \\ \overline{OB} = \overline{O'B'} & \text{por radios de circunferencias iguales.} \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} & \text{por hipótesis.} \end{cases}$$

Luego, estos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales; en consecuencia son iguales, es decir:

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$$

Por lo tanto, los ángulos opuestos a los lados iguales, son iguales; entre ellos:

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$$

pero, $\widehat{AOB}$ es el ángulo central correspondiente al arco $\widehat{AB}$, y

$\widehat{A'O'B'}$ es el ángulo central correspondiente al arco $\widehat{A'B'}$ y como a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales es:

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$$

que es lo que queríamos demostrar.

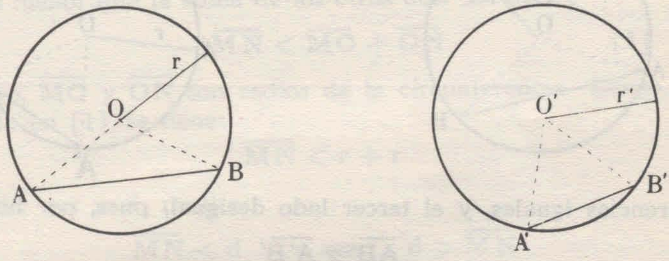
20. TEOREMA. *En una misma circunferencia, o en circunferencias iguales a mayor arco corresponde mayor cuerda.*

H) $C(O; r)$ y $C(O'; r')$

$$r = r'$$

Arco $\widehat{AB} >$ arco $\widehat{A'B'}$

T) Cuerda $\overline{AB} >$ cuerda $\overline{A'B'}$.



DEMOSTRACIÓN. Trazando los radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{O'A'}$ y $\overline{O'B'}$ quedan formados los triángulos $\overset{\triangle}{AOB}$ y $\overset{\triangle}{A'O'B'}$, tales que los lados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son respectivamente iguales a $\overline{O'A'}$ y $\overline{O'B'}$, por ser radios de circunferencias iguales, y el ángulo comprendido $\widehat{AOB}$ mayor que el $\widehat{A'O'B'}$, por ser el arco $\widehat{AB}$ mayor que el arco $\widehat{A'B'}$. Luego, los $\overset{\triangle}{AOB}$ y $\overset{\triangle}{A'O'B'}$, tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido desigual, y, por consiguiente, al que tiene mayor ángulo le corresponde un lado opuesto mayor, es decir,

$$\text{lado opuesto } \widehat{AOB} > \text{lado opuesto } \widehat{A'O'B'},$$

o sea:

$$\overline{AB} > \overline{A'B'}$$

que es la tesis.

21. **Teorema recíproco.** *En una misma circunferencia ,o en circunferencias iguales, a mayor cuerda corresponde mayor arco.*

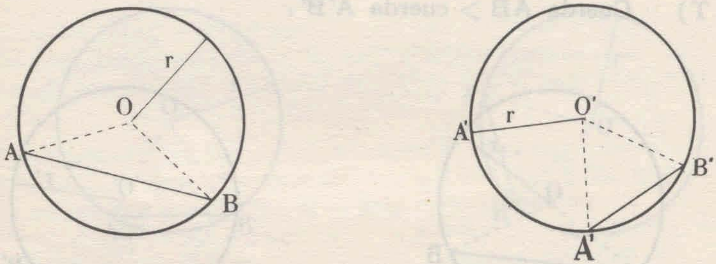
H) $C\,(O;\,r)$ y $C\,(O';\,r')$

$$r = r'$$

Cuerdas: $\overline{AB} > \overline{A'B'}$.

T) Arcos: $\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$.

Demostración. Trazando los radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{O'A'}$ y $\overline{O'B'}$, quedan determinados los triángulos $\overset{\triangle}{AOB}$ y $\overset{\triangle}{A'O'B'}$, tales que tienen dos lados iguales, $\overline{OA} = \overline{O'A'}$; $\overline{OB} = \overline{O'B'}$ por ser radios de cir-



cunferencias iguales, y el tercer lado desigual, pues, por hipótesis,

$$\overline{AB} > \overline{A'B'}$$

Luego, al que tiene mayor lado se le opone mayor ángulo, es decir:

$$\widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'}$$

y como a mayor ángulo central, corresponde mayor arco, se tiene:

$$\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$$

que es lo que queríamos demostrar.

PROPIEDADES DEL DIÁMETRO.

22. Si en una circunferencia se traza uno cualquiera de los diámetros, el $\overline{XY}$, por ejemplo, y distintas cuerdas, por ejemplo, las

cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, se observa que el diámetro es mayor que cualquiera de las cuerdas.

Esta propiedad del diámetro es general y se demuestra en el siguiente,

TEOREMA. *En una circunferencia, el diámetro es la mayor de las cuerdas.*

H) $C\,(O\,;\,r)$

$\quad$ d diámetro.

T) d es mayor que cualquier cuerda de la circunferencia.

DEMOSTRACIÓN. Se considera una cuerda cualquiera de la circunferencia, la $\overline{MN}$ por ejemplo. Al unir M y N con O, se forma el $\widehat{MON}$, en el que se verifica, como en todo triángulo, que un lado es menor que la suma de los otros dos. Es decir:

$$\overline{MN} < \overline{MO} + \overline{ON} \qquad [1]$$

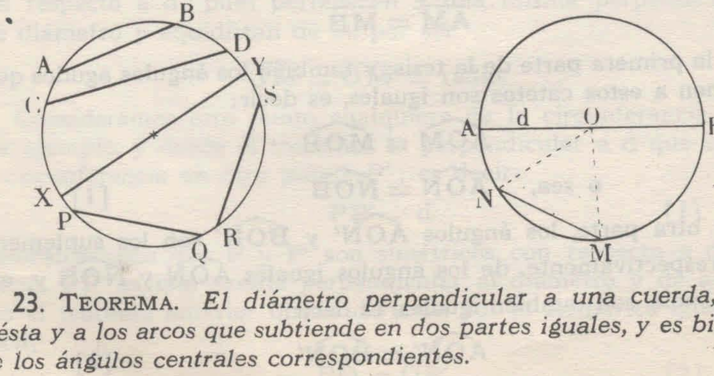
Pero, $\overline{MO}$ y $\overline{ON}$ son radios de la circunferencia. Luego, sustituyendo en [1], se tiene:

$$\overline{MN} < r + r$$

y como $r + r = d$, resulta:

$$\overline{MN} < d \qquad \text{o sea,} \qquad d > \overline{MN}$$

Como la demostración es válida para cualquier cuerda de la circunferencia, queda demostrado el teorema.



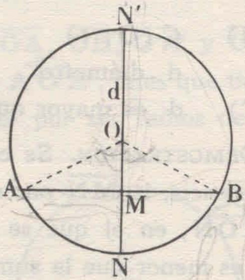
23. TEOREMA. *El diámetro perpendicular a una cuerda, corta a ésta y a los arcos que subtiende en dos partes iguales, y es bisectriz de los ángulos centrales correspondientes.*

H) $C\,(O;\, r)$

$\overline{AB}$ cuerda

d diámetro

$d \perp \overline{AB}$ en M y corta a los arcos $\widehat{AB}$ en N y N'.



T) 1º $\overline{AM} = \overline{MB}$

2º $\begin{cases} \widehat{AN} = \widehat{NB} \text{ y} \\ \widehat{AN'} = \widehat{N'B} \end{cases}$

3º $\begin{cases} \widehat{AON} = \widehat{NOB} \text{ y} \\ \widehat{AON'} = \widehat{BON'} \end{cases}$

Demostración. Se unen A y B con O, quedando formados los triángulos $\widehat{AMO}$ y $\widehat{OMB}$, rectángulos en M, por ser $d \perp AB$, por hipótesis, y tales que tienen el cateto común $\overline{OM}$ y las hipotenusas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ iguales, por ser radios de una misma circunferencia. Luego, por el cuarto criterio de igualdad de triángulos rectángulos, estos triángulos son iguales, o sea:

$$\widehat{AMO} = \widehat{OMB}$$

en consecuencia, los otros catetos son iguales, es decir,

$$\overline{AM} = \overline{MB}$$

que es la primera parte de la tesis; y también los ángulos agudos que se oponen a estos catetos son iguales, es decir:

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$$

o sea, $\widehat{AON} = \widehat{NOB}$ [1]

Por otra parte, los ángulos $\widehat{AON'}$ y $\widehat{BON'}$ son los suplementarios, respectivamente, de los ángulos iguales $\widehat{AON}$ y $\widehat{NOB}$ y, en consecuencia, son también iguales, es decir:

$\widehat{AON'} = \widehat{BON'}$ [2]

Las igualdades [1] y [2] constituyen la tercera parte de la tesis.

De las igualdades de los ángulos centrales que acabamos de establecer resultan las igualdades de los arcos correspondientes.

Es decir,

De [1] se deduce la igualdad de los arcos

$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NB} \qquad [3]$$

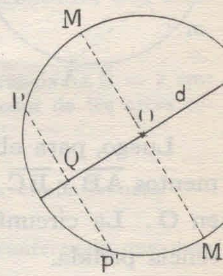
De [2] se deduce la igualdad de los arcos

$$\overset{\frown}{AN'} = \overset{\frown}{N'B} \qquad [4]$$

Las relaciones [3] y [4] constituyen la segunda parte de la tesis.

24. Si se recorta un círculo de papel y se dobla a lo largo de cualquiera de los diámetros, se observa que las dos partes resultan coincidentes. Esto muestra que cualquiera de esos diámetros es eje de simetría de la circunferencia y del círculo correspondiente.

Esta propiedad del diámetro se establece en el siguiente enunciado:



Todo diámetro es eje de simetría de la circunferencia a que pertenece. Veremos que cualquier punto de la circunferencia tiene su simétrico con respecto al diámetro en la misma circunferencia.

En efecto, si consideramos un diámetro cualquiera, d, y por el centro O, trazamos la perpendicular a d, que determina sobre la circunferencia los puntos M y M′, que son simétricos con respecto a d, pues pertenecen a una misma perpendicular a ese diámetro y equidistan de él, por ser

$$\overline{OM} = \overline{OM'} = \text{radio}.$$

Consideremos otro punto cualquiera de la circunferencia, el P, por ejemplo, y desde él tracemos la perpendicular a d que corta a la circunferencia en otro punto, P′ ; es decir:

$$PP' \perp d \qquad [1]$$

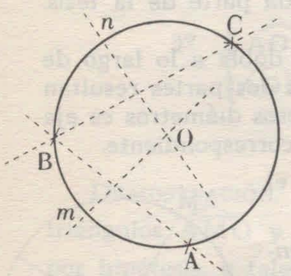
Demostraremos que P y P′ son simétricos con respecto a d. En efecto, PP′ es una cuerda perpendicular al diámetro y de acuerdo con el teorema anterior queda dividida por él en partes iguales, es decir,

$$\overline{PQ} = \overline{QP'} \qquad [2]$$

De [1] y [2] resulta que P y P′ son simétricos con respecto al diámetro.

Como esta demostración es válida para cualquier punto de la circunferencia y con respecto a cualquiera de sus diámetros, resulta que, en efecto, todo diámetro es eje de simetría de la circunferencia a que pertenece.

25. TEOREMA. *Por tres puntos no pertenecientes a una misma recta, pasa siempre una circunferencia y sólo una.*



H) A ; B y C , no alineados.

T) Por A , B y C pasa C(O ; r)

La C(O; r) es la única que pasa por A , B y C .

DEMOSTRACIÓN. Los puntos A , B y C , no alineados, pueden considerarse vértices de un triángulo y por un teorema ya estudiado las mediatrices de sus lados se cortan en un punto O que equidista de sus vértices A , B y C .

Luego, para obtener la circunferencia buscada, se trazan los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y sus respectivas mediatrices *m* y *n* que se cortan en O . La circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$ es la circunferencia pedida.

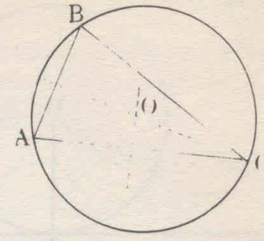
Esta circunferencia es la única que cumple la condición de pasar por A , B y C . En efecto, si existiera otra, su centro, por equidistar de los puntos A y B pertenecería a la mediatriz del $\overline{AB}$; y por equidistar de B y C , pertenecería a la mediatriz del $\overline{BC}$, es decir, coincidiría con O , punto común de las dos mediatrices. Además, su radio sería:

$$r' = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$

por lo tanto, si esta circunferencia tiene el mismo centro y el mismo radio que la anterior, coincide con ella.

26. COROLARIO. *Todo triángulo es inscriptible en una circunferencia.*

En efecto: dado un triángulo cualquiera $\overset{\triangle}{ABC}$, considerando aisladamente sus tres vértices, como se trata de tres puntos no alineados, aplicando el procedimiento seguido en el teorema anterior, es siempre posible construir una circunferencia de centro O y radio r, que pase por los tres vértices del triángulo dado.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. ¿Cuál es el ángulo central correspondiente a una semicircunferencia?

2. ¿Qué parte del círculo es el segmento circular determinado por un diámetro?

3. Los ángulos centrales de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ de una circunferencia son respectivamente de 47^{o} y 39^{o}. ¿Cuál de las cuerdas que subtienden esos arcos es la mayor?

4. Dadas las siguientes cuerdas de una misma circunferencia: $\overline{AB} = 2$ cm; $\overline{CD} = 7$ cm; $\overline{MN} = 1$ cm; y $\overline{PQ} = 4$ cm, ¿cuál es el menor de los arcos correspondientes?

5. Dibujar un triángulo isósceles e inscribirlo en una circunferencia.

6. Marcar tres puntos no alineados y construir la circunferencia que pasa por ellos.

CAPÍTULO IX.

POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA CON RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA.

1. Dadas una circunferencia y una recta, puede ocurrir:

1º, que la recta y la circunferencia tengan dos puntos comunes, en cuyo caso la recta se llama *secante* a la circunferencia;

2º, que tengan un solo punto común, en cuyo caso la recta se llama *tangente* a la circunferencia y el punto de contacto, *punto de tangencia*;

3º, que no tengan ningún punto común, en cuyo caso la recta se dice *exterior* a la circunferencia.

EJEMPLO:

En la primera figura de la página siguiente, la recta *a* es secante; la *n* tangente y la *b* exterior a la $C(O; r)$.

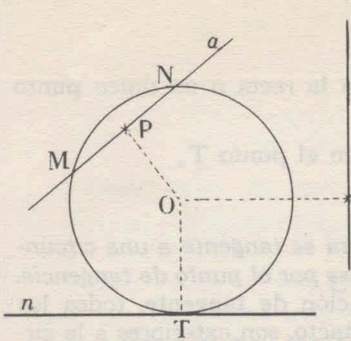
2. Se acepta como postulado, que para que la recta sea secante, es decir, que corte a la circunferencia en dos puntos, debe pasar por un punto interior a la misma; luego, su distancia al centro es menor que el radio.

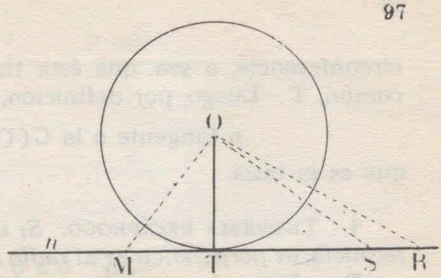
Así, la distancia del centro O a la secante *a* es el segmento $\overline{OP}$, menor que el radio.

Para que la recta sea exterior, por definición no debe pasar por ningún punto de la circunferencia ni por un punto interior a ella; luego, todos sus puntos son exteriores y en consecuencia su distancia al centro es mayor que el radio.

Así, la distancia del centro O a la recta exterior *b* es el segmento $\overline{OQ}$, mayor que el radio.

Pasamos a estudiar las rectas tangentes.





3. Rectas tangentes a una circunferencia. — Si en una circunferencia se traza un radio, el $\overline{OT}$, por ejemplo, y por este punto de contacto T se traza la recta *n* perpendicular al radio, se observa que esta recta *n* resulta tangente a la circunferencia.

En efecto, es así y vamos a demostrarlo en el siguiente:

TEOREMA. *La perpendicular a un radio de una circunferencia en el punto de contacto es tangente a la circunferencia.*

H) $C(O\,;\,r)$.
$\overline{OT} = r$
$n \perp \overline{OT}$ en T.

T) n tangente a $C(O\,;\,r)$ en T

DEMOSTRACIÓN. El punto T pertenece a la circunferencia y a la recta. Veremos que éste es el único punto común.

Siendo *n* y $\overline{OT}$ perpendiculares, $\overline{OT}$ es el menor de los segmentos comprendidos entre el punto O y la recta *n*, por el teorema que dice que la distancia de un punto a una recta es el menor de los segmentos comprendidos entre dicho punto y la recta; luego, cualquier otro punto de la recta *n* que se considere, por ejemplo, el M, determina con O un segmento mayor que $\overline{OT}$, es decir:

$$\overline{OM} > \overline{OT}$$

y como $\overline{OT} = r$

es: $\overline{OM} > r$

Luego, el punto M es exterior a la circunferencia.

Como M es un punto cualquiera de la recta dada, distinto de T, resulta que todos los puntos de *n*, excepto T, son exteriores a la circunferencia, o sea, que ésta tiene con la recta n un único punto común, T. Luego, por definición, es:

$$n \text{ tangente a la } C(O\,;\ r) \text{ en el punto T,}$$

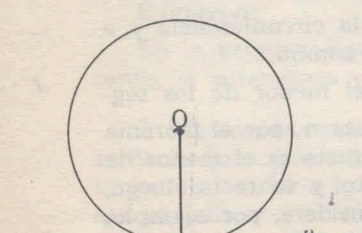
que es la tesis.

4. TEOREMA RECÍPROCO. *Si una recta es tangente a una circunferencia, es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.*

En efecto, de acuerdo con la definición de tangente, todos los puntos de la tangente, excepto el de contacto, son exteriores a la circunferencia. En consecuencia, el punto de contacto es el único punto de la tangente que determina con el centro un segmento igual al radio y todos los demás, por ser exteriores determinan con el centro segmentos mayores que el radio; o sea, que el radio es el menor de los segmentos comprendidos entre el centro y la tangente; luego, es el segmento de perpendicular.

De lo expuesto se deduce inmediatamente, que la distancia del centro de la circunferencia a una tangente, es igual al radio.

5. **Por un punto de una circunferencia, trazarle la tangente.** — Según hemos visto, la recta perpendicular al radio en el punto de contacto con la circunferencia, es tangente a la misma. Luego, para trazar la tangente a una circunferencia por un punto de la misma, basta trazar la perpendicular al radio que pasa por ese punto.



EJEMPLO:

Sea trazar la tangente a la $C(O;\,r)$ por el punto P. Se traza el radio $\overline{OP}$ y luego $n \perp OP$ en P.

La recta n es la tangente buscada.

6. Es inmediato que, por un punto de una circunferencia pasa una sola tangente a dicha circunferencia.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

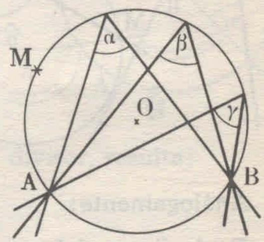
1. En el plano de una circunferencia de radio igual a 5 cm, las rectas a, b, c, d, e se encuentran respectivamente a una distancia del centro igual a 6 cm, 4 cm, 7 cm, 15 mm y 50 mm. Decir cuáles son secantes, cuáles tangentes y cuáles exteriores.

2. Dibujar una circunferencia y por un punto cualquiera de la misma trazar la tangente a dicha circunferencia.

CAPÍTULO X.

ÁNGULOS INSCRIPTOS Y SEMIINSCRIPTOS.

1. Ángulos inscriptos. — DEFINICIÓN. Se llama ángulo inscripto en un arco de circunferencia al ángulo que tiene su vértice en un punto cualquiera del arco y cuyos lados pasan por los extremos del mismo.



Así en la figura el $\hat{\alpha}$, el $\hat{\beta}$, y el $\hat{\gamma}$ están inscriptos en el $\overset{\frown}{AB}$ que contiene al punto M.

De acuerdo con la definición, dado un arco existen infinitos ángulos inscriptos en él.

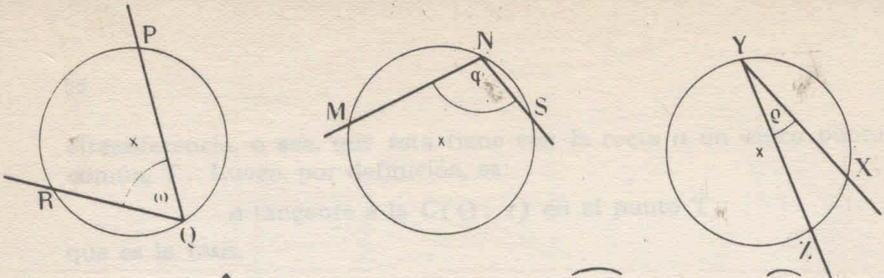
Decir que un ángulo está inscripto en un arco es equivalente a decir que abarca el otro arco de la circunferencia que tiene los mismos extremos. Por ejemplo, los ángulos $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ de la figura abarcan el $\overset{\frown}{AB}$ que no contiene al punto M.

En la siguiente figura se dan ejemplos de distintos ángulos inscriptos.

Así por ejemplo:

el ángulo $\hat{\omega}$ está inscripto en el arco $\overset{\frown}{PQR}$ y abarca el $\overset{\frown}{PR}$ que no contiene al punto Q;

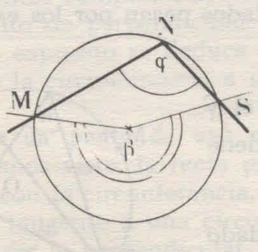
el ángulo $\hat{\varphi}$ está inscripto en el arco $\overset{\frown}{MNS}$ y abarca el $\overset{\frown}{MS}$ que no contiene al punto N;

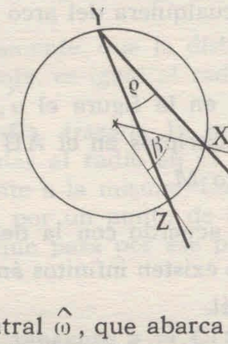


el ángulo $\hat{\rho}$ está inscripto en el arco $\widehat{XYZ}$ y abarca $\widehat{XZ}$ que no contiene al punto **Y** .

Un ángulo central se dice correspondiente a un ángulo inscripto cuando los dos abarcan el mismo arco.

Se repiten las figuras de los ángulos inscriptos anteriores y en cada uno de ellos se dibujó el ángulo central correspondiente $\hat{\beta}$.



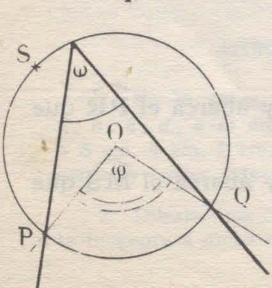


Análogamente:

En la figura del margen el ángulo central $\hat{\omega}$, que abarca el arco $\widehat{PQ}$ que no contiene al punto **S** , es el ángulo central correspondiente al ángulo inscripto $\hat{\varphi}$ que abarca el mismo arco.

2. La relación que vincula un ángulo inscripto con el central correspondiente se estudia en el siguiente:

TEOREMA. *Todo ángulo inscripto es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.*



H) $\hat{\alpha}$ inscripto que abarca el $\widehat{AMB}$

$\hat{\beta}$ ángulo central que abarca el $\widehat{AMB}$

T) $\hat{\alpha} = \dfrac{\hat{\beta}}{2}$

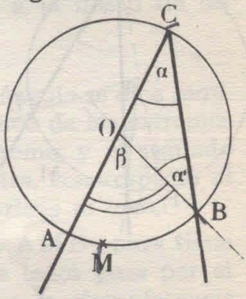
DEMOSTRACIÓN. Se consideran tres casos distintos: 1º, que el centro de la circunferencia pertenezca a uno de los lados del ángulo inscripto; 2º, que el centro sea interior al ángulo inscripto; 3º, que el centro de la circunferencia sea exterior a dicho ángulo.

PRIMER CASO. *El punto* O *pertenece al lado* $\overrightarrow{CA}$ *del* $\hat{\alpha}$. Queda formado el $\widehat{COB}$, que es isósceles, por tener $\overline{OC} = \overline{OB}$, por radios de la circunferencia.

Luego, como los ángulos de la base del triángulo isósceles son iguales,

es: $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$ [1]

Pero el $\hat{\beta}$ es exterior a ese triángulo, luego, es igual a la suma de los interiores no adyacentes $\hat{\alpha}$ y $\hat{\alpha}'$.



es decir: $\hat{\beta} = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}'$

o sea: $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{\beta}$ [2]

y como, de acuerdo con la relación [1] es:

$$\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{\alpha} + \hat{\alpha} = 2\,\hat{\alpha}$$

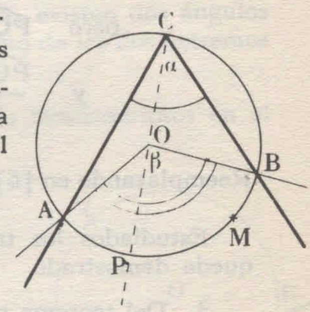
sustituyendo en [2], se tiene:

$$2\,\hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

pasando el factor 2 al segundo miembro como divisor, resulta:

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\beta}}{2}, \text{ que es la tesis.}$$

SEGUNDO CASO. *El punto* O *es interior al* $\hat{\alpha}$. Trazando la $\overrightarrow{CO}$, quedan formados los ángulos inscriptos $\widehat{ACP}$ y $\widehat{PCB}$, que están en las mismas condiciones del primer caso; luego, cada uno de ellos es igual a la mitad de su central correspondiente, es decir:



$$\widehat{ACP} = \frac{\widehat{AOP}}{2}$$

y $$\widehat{PCB} = \frac{\widehat{POB}}{2}$$

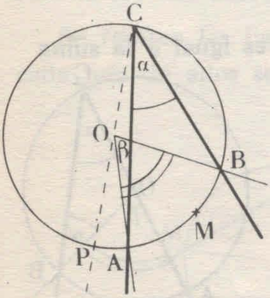
Sum. m. a m.: $\widehat{ACP} + \widehat{PCB} = \dfrac{\widehat{AOP}}{2} + \dfrac{\widehat{POB}}{2}$ [3]

$$\text{pero} \quad \widehat{ACP} + \widehat{PCB} = \hat{\alpha} \qquad [4]$$

$$\text{y} \quad \frac{\widehat{AOP}}{2} + \frac{\widehat{POB}}{2} = \frac{\widehat{AOP} + \widehat{POB}}{2} = \frac{\hat{\beta}}{2} \qquad [5]$$

Sustituyendo en [3] el primer miembro por su valor expresado en [4] y el segundo miembro por su valor expresado en [5], resulta:

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\beta}}{2} \quad \text{que es la tesis.}$$



Tercer caso. *El punto* O *es exterior al* $\hat{\alpha}$. Trazando, como en el caso anterior, la $\overrightarrow{CO}$, quedan formados los ángulos $\widehat{PCB}$ y $\widehat{PCA}$, que están en las mismas condiciones del primer caso; luego, cada uno de ellos es igual a la mitad de su ángulo central correspondiente, es decir:

$$\widehat{PCB} = \frac{\widehat{POB}}{2}$$

$$\text{y} \quad \widehat{PCA} = \frac{\widehat{POA}}{2}$$

$$\text{Rest. m. a m.:} \quad \widehat{PCB} - \widehat{PCA} = \frac{\widehat{POB}}{2} - \frac{\widehat{POA}}{2} \qquad [6]$$

$$\text{pero} \quad \widehat{PCB} - \widehat{PCA} = \hat{\alpha}$$

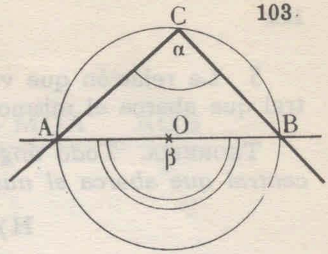
$$\text{y} \quad \frac{\widehat{POB}}{2} - \frac{\widehat{POA}}{2} = \frac{\widehat{POB} - \widehat{POA}}{2} = \frac{\hat{\beta}}{2}$$

Reemplazando en [6], resulta $\hat{\alpha} = \frac{\hat{\beta}}{2}$, que es la tesis.

Estudiados los tres casos que pueden presentarse, el teorema queda demostrado.

3. Del teorema recién demostrado se deducen consecuencias inmediatas que se establecen en los siguientes corolarios:

Corolario 1º *En una circunfrencia, todos los ángulos inscriptos en un mismo arco, son iguales.*



En efecto, es así, pues a todos los ángulos inscriptos les corresponde el mismo ángulo central, y como por el teorema anterior cada uno de los ángulos inscriptos es igual a la mitad del ángulo central correspondiente, resultan todos ellos iguales a un mismo ángulo, y, en consecuencia, iguales entre sí.

Corolario 2º *Todo ángulo inscripto en una semicircunferencia es recto.*

En efecto, el ángulo central correspondiente es un ángulo llano. Luego, el ángulo inscripto considerado es igual a la mitad de un ángulo llano, o sea, igual a un recto.

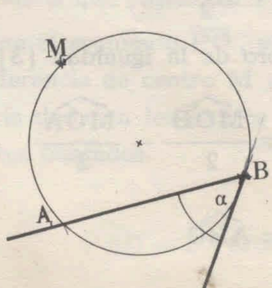
4. Ángulos semiinscriptos. — Definición. Un ángulo se dice *semiinscripto* en un arco, cuando tiene: su vértice en uno de los extremos del arco, uno de sus lados pasa por el otro extremo, y el segundo lado es tangente a la circunferencia y se encuentra, con respecto al primer lado, en el semiplano opuesto al que contiene al arco.

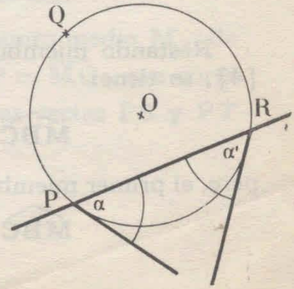
Así, el ángulo $\hat{\alpha}$ está semiinscripto en el arco $\overset{\frown}{AMB}$, pues tiene su vértice en el extremo B del arco, uno de los lados pasa por el extremo A del arco y el otro lado es tangente a la circunferencia en B.

El ángulo $\hat{\alpha}$ semiinscripto en el arco $\overset{\frown}{AMB}$ se dice que abarca el $\overset{\frown}{AB}$ que no contiene al punto M.

De acuerdo con la definición, dado un arco, existen dos ángulos semiinscriptos en él, cada uno con vértice en uno de los dos extremos del arco.

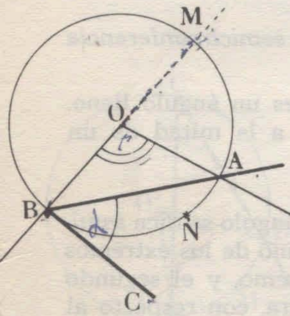
Así los ángulos $\hat{\gamma}$ y $\hat{\gamma}'$ son los dos ángulos semiinscriptos en el arco $\overset{\frown}{PQR}$.





5. La relación que vincula el ángulo semiinscripto con el central que abarca el mismo arco, se estudia en el siguiente:

Teorema. *Todo ángulo semiinscripto es igual a la mitad del central que abarca el mismo arco.*



H) $C(O;\, r)$

$\widehat{ABC}$ semiinscripto que abarca $\overset{\frown}{ANB}$

$\widehat{AOB}$ ángulo central que abarca $\overset{\frown}{ANB}$

T) $\widehat{ABC} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$

Demostración. Prolongando $\overline{BO}$ por el extremo O, se determina con la circunferencia el punto M. El ángulo $\widehat{MBC}$ es un ángulo recto, pues la tangente $\overline{BC}$ es perpendicular al radio $\overline{OB}$, es decir:

$$\widehat{MBC} = 1 \text{ recto} \qquad [1]$$

El ángulo $\widehat{MOB}$ es igual a un ángulo llano, en consecuencia:

$$\frac{\widehat{MOB}}{2} = \frac{1 \text{ llano}}{2} = 1 \text{ recto} \qquad [2]$$

De [1] y [2]:
$$\widehat{MBC} = \frac{\widehat{MOB}}{2} \qquad [3]$$

Por otra parte, el ángulo inscripto $\widehat{MBA}$ tiene por central correspondiente al $\widehat{MOA}$; luego, como todo ángulo inscripto es igual a la mitad del central correspondiente, es:

$$\widehat{MBA} = \frac{\widehat{MOA}}{2} \qquad [4]$$

Restando miembro a miembro de la igualdad [3] la igualdad [4], se tiene:

$$\widehat{MBC} - \widehat{MBA} = \frac{\widehat{MOB}}{2} - \frac{\widehat{MOA}}{2} \qquad [5]$$

pero, el primer miembro, es

$$\widehat{MBC} - \widehat{MBA} = \widehat{ABC}$$

y el segundo miembro, es

$$\frac{\widehat{MOB}}{2}-\frac{\widehat{MOA}}{2}=\frac{\widehat{MOB}-\widehat{MOA}}{2}=\frac{\widehat{AOB}}{2}$$

Reemplazando en [5], resulta:

$$\widehat{ABC}=\frac{\widehat{AOB}}{2}$$

que es la tesis.

6. Del teorema recién demostrado se deducen consecuencias inmediatas y que se establecen en los siguientes corolarios:

COROLARIO 1º. *Los dos ángulos semiinscriptos en un arco son iguales.*

En efecto, a los dos les corresponde el mismo ángulo central, y cada uno de ellos es igual a la mitad de este último.

COROLARIO 2º. *Los ángulos inscriptos en un arco son iguales a los semiinscriptos en el mismo.*

En efecto, a todos les corresponde el mismo ángulo central, y cada uno de ellos es igual a la mitad de este último.

7. Trazar las tangentes a una circunferencia, por un punto exterior.

Si se considera una circunferencia y un punto exterior, el A por ejemplo, es inmediato que por el punto exterior pasan dos tangentes a la circunferencia.

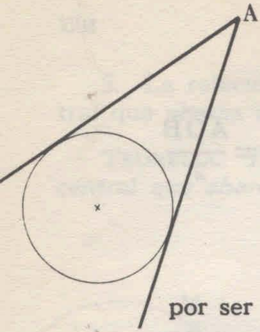
Estudiaremos a continuación el procedimiento para trazar dichas tangentes.

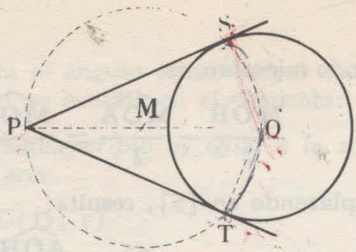
Dada la $C(O\ ;\ r)$ y el punto O, para trazar las dos tangentes a dicha circunferencia que pasan por P, se procede así:

Se determina el segmento $\overline{PO}$, y luego su punto medio M. Se traza la circunferencia de centro M y radio $\overline{MP}=\overline{MO}$, que corta la circunferencia dada en los puntos S y T. Las rectas PS y PT son las tangentes buscadas.

En efecto:

$$\widehat{PSO}=\widehat{PTO}=1 \text{ recto},$$





por ser ángulos inscriptos en una semicircunferencia, o sea:

$$PS \perp \text{radio } \overline{OS} \text{ en } S\,,$$
$$PT \perp \text{radio } \overline{OT} \text{ en } T\,,$$

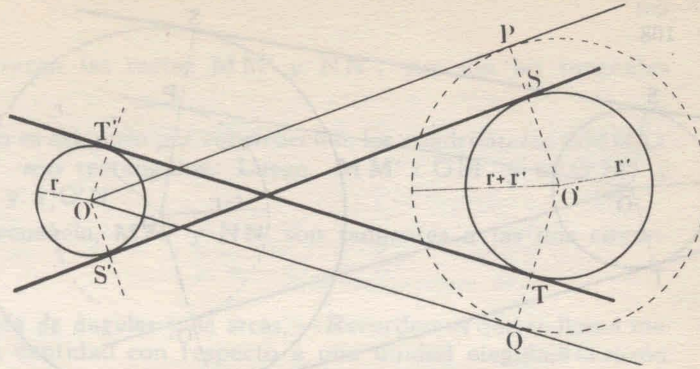
y como la perpendicular al radio en el punto de contacto, es tangente a la circunferencia, resulta que:

PS y PT son tangentes en S y T respectivamente.

TANGENTES COMUNES A DOS CIRCUNFERENCIAS.

8. Dadas dos circunferencias exteriores, por ejemplo, $C(O\,;\,r)$ y $C(O'\,;\,r')$, se observa que pueden trazarse cuatro rectas m, n, s y t, tangentes a las dos circunferencias a la vez. Esta observación es general, es decir, que, dadas dos circunferencias exteriores, se pueden trazar cuatro tangentes comunes a las mismas.

Las tangentes m y n se llaman exteriores; las tangentes s y t, interiores.



9. Construcción de las tangentes interiores comunes a dos circunferencias. — Sea, trazar las tangentes interiores comunes a las circunferencias $C(O\,;\,r)$ y $C(O'\,;\,r')$.

Se construye la circunferencia de centro O′ y radio $r + r'$, que es la representada con trazo punteado en la figura. Desde el punto O se trazan las tangentes a esa circunferencia, que resultan ser OP y OQ, tangentes en P y Q respectivamente. Se traza O′P y O′Q, que cortan a la $C(O\,;\,r)$ en S y T respectivamente. Por O, y en el semiplano respecto de OQ que contiene a T se traza una paralela a O′Q que corta a $C(O\,;\,r)$ en T′.

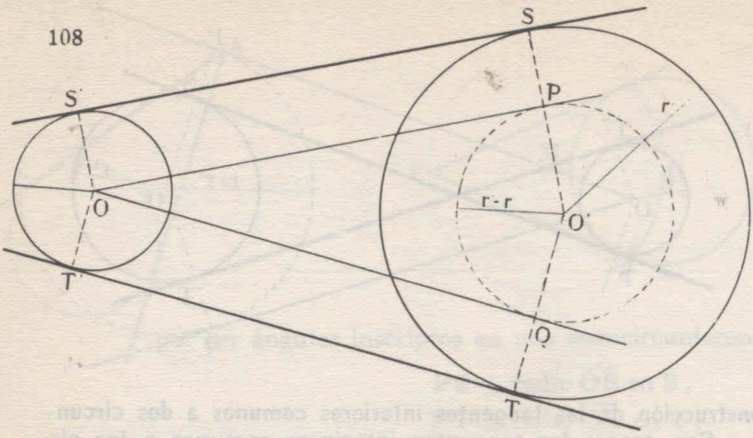
Por O y en el semiplano respecto de OP, que contiene a S se traza una paralela a O′P que corta $C(O\,;\,r)$ en S′.

Las rectas TT′ y SS′ son las tangentes buscadas.

En efecto: el cuadrilátero SPOS′ es un rectángulo, pues $\overline{OS'} \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \overline{SP}$ por construcción, y el ángulo en P igual a 1 recto por ser la tangente perpendicular al radio. Luego, SS′ es perpendicular a PS, o sea, $SS' \perp O'S$ y $SS' \perp OS'$; en consecuencia, por ser perpendicular a los radios de cada circunferencia en los puntos de contacto, es tangente a cada una de ellas. Del mismo modo se demuestra que TT′ es tangente a las dos circunferencias.

10. Construcción de las tangentes exteriores comunes a dos circunferencias. — Sea, trazar las tangentes exteriores comunes a las circunferencias $C(O\,;\,r)$ y a la $C(O\,;\,r')$ siendo $r' > r$.

Se construye la circunferencia de centro O′ y radio $r' - r$, que es la dibujada con trazo punteado en la figura. Desde O se trazan las tangentes OP y OQ a esa circunferencia. Se prolongan O′Q y O′P, determinándose en la $C(O'\,;\,r')$ los puntos T y S. Por O, en el semiplano con respecto a OQ, que contiene a T, se traza una paralela a O′T que corta a $C(O\,;\,r)$ en T′.



Por O, y en el semiplano respecto de OP, que contiene a S se traza una paralela a O′S que determina con la $C(O\,;\,r)$ el punto S′. Las rectas SS′ y TT, son las tangentes buscadas.

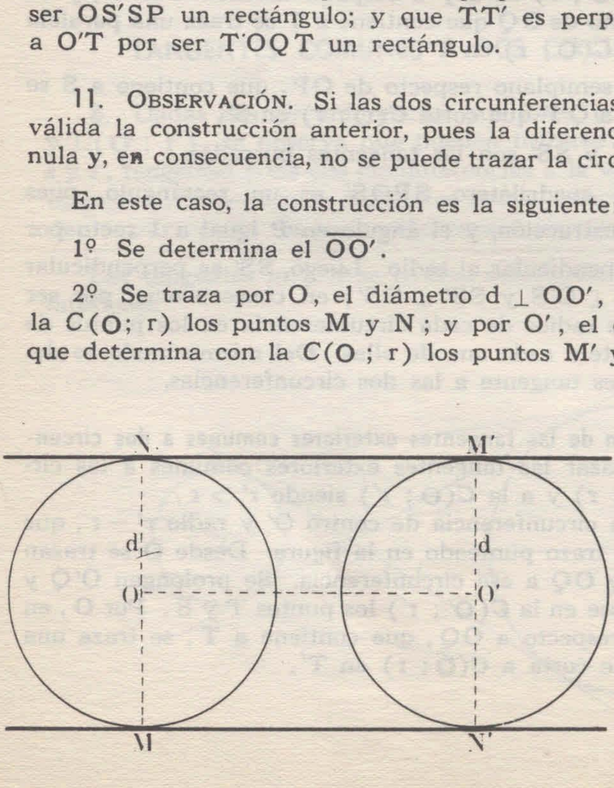
En efecto, es así, pues, de igual modo que en la construcción anterior, se demuestra que SS′ es perpendicular a OS′ y O′S por ser OS′SP un rectángulo; y que TT′ es perpendicular a OT′ y a O′T por ser T′OQT un rectángulo.

11. Observación. Si las dos circunferencias son iguales, no es válida la construcción anterior, pues la diferencia de los radios es nula y, en consecuencia, no se puede trazar la circunferencia auxiliar.

En este caso, la construcción es la siguiente:

1º Se determina el $\overline{OO'}$.

2º Se traza por O, el diámetro $d \perp OO'$, que determina con la $C(O;\,r)$ los puntos M y N; y por O′, el diámetro $d' \perp OO'$ que determina con la $C(O\,;\,r)$ los puntos M′ y N′.



3º Se trazan las rectas MM' y NN', que son las tangentes pedidas.

En efecto es así, pues por construcción, los cuadriláteros $OMM'O'$ y $ONN'O'$ son rectángulos. Luego, $MM' \perp OM$ y a $O'M'$ y $NN' \perp ON$ y a $O'N'$.

En consecuencia, MM' y NN' son tangentes a las dos circunferencias.

12. Medida de ángulos y de arcos. — Recordemos que se llama medida de una cantidad con respecto a una unidad elegida, a la razón entre dicha cantidad y esa unidad. Teniendo en cuenta que los ángulos y los arcos son cantidades pueden darse las siguientes definiciones:

1º Se llama medida de un ángulo con respecto a otro ángulo elegido como unidad, al numero que es la razón entre el ángulo dado y esa unidad.

EJEMPLO:

La medida del $\hat{\alpha}$ con respecto a la unidad $\hat{\omega}$ es 4 , pues

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\omega}} = 4$$

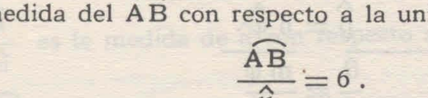
2º Se llama medida de un arco con respecto a otro arco, perteneciente a la misma circunferencia o a una circunferencia igual, elegido como unidad, al número que es la razón entre el arco dado y la unidad.

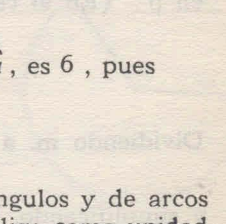
EJEMPLO:

La medida del $\overset{\frown}{AB}$ con respecto a la unidad $\hat{u}$, es 6 , pues

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\hat{u}} = 6 .$$

La unidad que se elige para la medición de ángulos y de arcos es arbitraria pero generalmente el ángulo que se elige como unidad es el grado sexagesimal.





13. TEOREMA. *En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, la razón de dos ángulos centrales es igual a la de los arcos correspondientes.*

H) $\hat{\alpha}$ central en $C(O\,;\,r)$

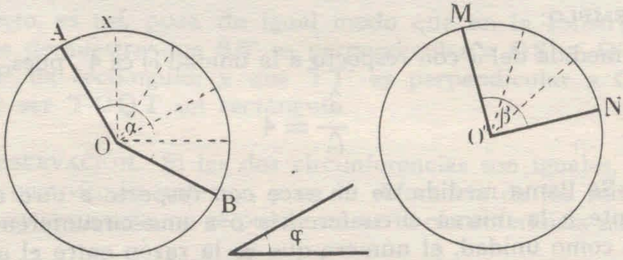
$\hat{\beta}$ central en $C(O'\,;\,r)$

$\widehat{AB}$ correspondiente a $\hat{\alpha}$

$\widehat{MN}$ correspondiente a $\hat{\beta}$

T) $\dfrac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \dfrac{\widehat{AB}}{\widehat{MN}}$

DEMOSTRACIÓN. Elegimos un ángulo que esté contenido un número exacto de veces en $\hat{\alpha}$ y otro número exacto de veces en $\hat{\beta}$. Sea, por ejemplo, el $\hat{\varphi}$, que está contenido m veces en $\hat{\alpha}$ y n veces



en $\hat{\beta}$. (En el caso de la figura, m = 5 y n = 3). Es decir:

$$\hat{\alpha} = m\,\hat{\varphi}$$

$$\text{y} \qquad \hat{\beta} = n\,\hat{\varphi}$$

Dividiendo m. a m. $\qquad \dfrac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \dfrac{m\,\hat{\varphi}}{n\,\hat{\varphi}}$

y simplificando, la unidad $\hat{\varphi}$, según una propiedad estudiada en Aritmética:

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \frac{m}{n} \qquad [1]$$

Llamando $\hat{x}$ al arco correspondiente al ángulo central igual a $\hat{\varphi}$ resulta que:

$$\widehat{AB} = m \cdot \widehat{x}$$

y $$\widehat{MN} = n \cdot \widehat{x}$$

Dividiendo m. a m. $$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{MN}} = \frac{m \cdot \widehat{x}}{n \cdot \widehat{x}}$$

y simplificando: $$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{MN}} = \frac{m}{n} \qquad [2]$$

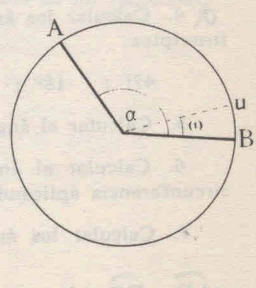
Como los segundos miembros de [1] y [2] son iguales, los primeros también lo son. Luego:

$$\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{MN}}$$ que es la tesis.

14. *La medida de un ángulo central es igual a la medida del arco que abarca, siempre que la unidad de arco sea el arco correspondiente a la unidad de ángulo.*

En efecto. Si $\widehat{\alpha}$ es un ángulo central y $\widehat{AB}$ el arco que abarca, llamando $\widehat{\omega}$ al ángulo unidad y $\widehat{u}$ al arco correspondiente al ángulo central $\widehat{\omega}$, resulta, por el teorema anterior:

$$\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\omega}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{u}}$$



pero $\dfrac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\omega}}$ es la medida de $\widehat{\alpha}$ con respecto a $\widehat{\omega}$

y $\dfrac{\widehat{AB}}{\widehat{u}}$ es la medida de $\widehat{AB}$ con respecto a $\widehat{u}$.

Luego:

$$\underset{\text{con respecto a } \widehat{\omega}}{\text{med } \widehat{\alpha}} = \underset{\text{con respecto a } \widehat{u}}{\text{med. } \widehat{AB}}$$

15. Observación. De la relación que vincula un ángulo inscripto con el ángulo central correspondiente, resulta que:

$$\text{medida áng. inscripto} = \frac{1}{2}\ \text{medida áng. central correspondiente}$$

y como según se ha demostrado:

medida áng. central = medida arco que abarca

resulta que:

$$\text{medida ángulo inscripto} = \frac{1}{2}\ \text{medida arco que abarca.}$$

Análogamente se deduce que:

$$\text{Medida ángulo semiinscripto} = \frac{1}{2}\ \text{medida arco que abarca.}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. ¿Cuánto vale un ángulo inscripto que abarca un cuadrante?

2. ¿Cuánto vale un ángulo inscripto en un cuarto de circunferencia?

3. Calcular los ángulos inscriptos tales que los ángulos centrales correspondientes son respectivamente de:

   80° ; 126° ; 70° 40′ ; 210° 10′ ; 55° 11′ 8″.

4. Calcular los ángulos centrales correspondientes a los siguientes ángulos inscriptos:

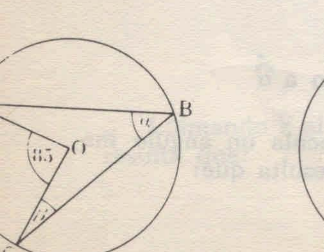
   47° ; 18° ; 95° 10′ ; 107° 30′ ; 33° 27′ 22″.

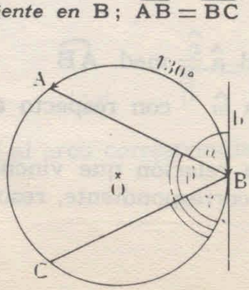
5. Calcular el ángulo semiinscripto en un cuadrante.

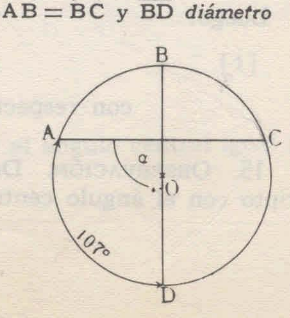
6. Calcular el ángulo interior de un pentágono regular inscripto en una circunferencia aplicando la propiedad de los ángulos inscriptos.

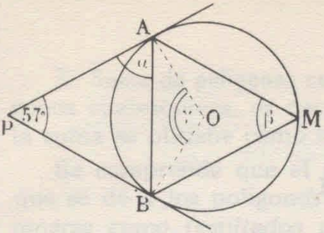
7. Calcular los ángulos $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ en las siguientes figuras:

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$ *b tangente en* B; $\overline{AB} = \overline{BC}$ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$ y $\overline{BD}$ *diámetro*

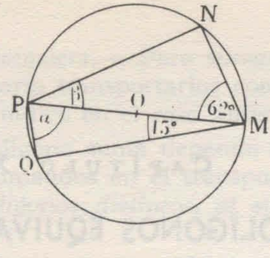


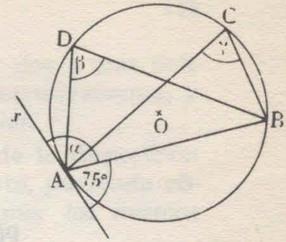






PA y PB *tangentes;*
$\widehat{AM} = \widehat{MB}$





x tangente en A

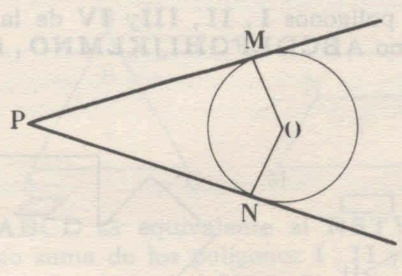
8. En una circunferencia de radio igual a 6 cm trazar las tangentes desde un punto que está a 8 cm del centro.

9. Si dos circunferencias son tangentes exteriores, ¿cuántas tangentes interiores y exteriores comunes tienen?

10. Si dos circunferencias son tangentes interiores, ¿cuántas tangentes interiores y exteriores comunes tienen?

11. Si dos circunferencias son secantes, ¿cuántas tangentes comunes interiores y exteriores tienen?

12. Si por un punto P se traza la tangente a la C(O) y los puntos de tangencia son M y N, demostrar que el cuadrilátero PMON es un romboide.



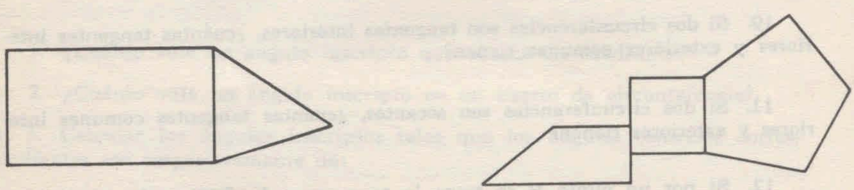
Capítulo XI.

POLÍGONOS EQUIVALENTES.

1. Polígonos consecutivos. — Dos o más polígonos se dicen consecutivos cuando pertenecen a un mismo plano y, no estando superpuestos, cada uno tiene con alguno de los otros, por lo menos, un lado o parte de un lado común.

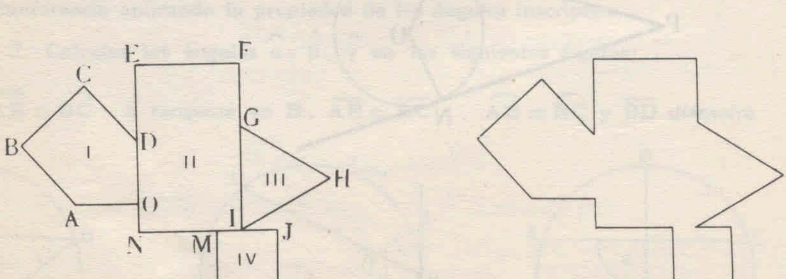
Así, el rectángulo y el triángulo de la figura son polígonos consecutivos.

También son consecutivos, el trapecio, el cuadrado y el pentágono.



2. Suma de polígonos consecutivos. — La suma de dos o más polígonos consecutivos es el polígono formado por el conjunto de todos los puntos de los polígonos sumandos.

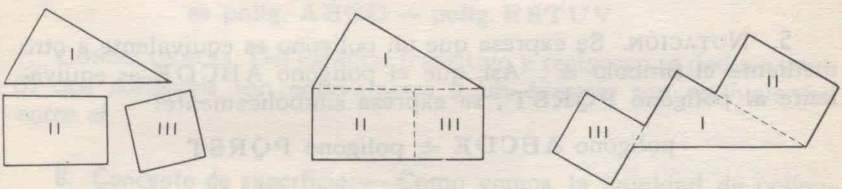
Así, la suma de los polígonos I, II, III y IV de la figura de la izquierda es el polígono ABCDEFGHIJKLMNO, igual al de la figura de la derecha.



3. Suma de polígonos cualesquiera. — Para sumar dos o más polígonos cualesquiera, es necesario transportarlos consecutivamente, y la suma se obtiene como se indicó en el caso anterior.

Se comprende que el polígono suma depende de la disposición que se dé a los polígonos sumandos en el transporte, *pudiendo obtenerse como resultados polígonos distintos, al sumar los mismos polígonos.*

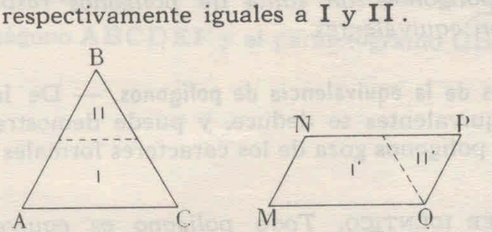
Así, por ejemplo, los polígonos I , II y III de la figura siguiente dan polígonos distintos por haberlos dispuesto consecutivamente de distinto modo.



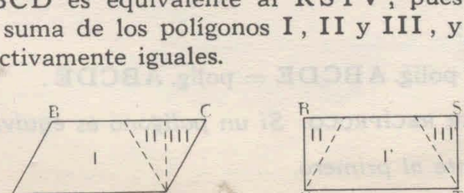
4. Polígonos equivalentes. — Un polígono se dice equivalente a otro cuando los dos son suma de polígonos respectivamente iguales.

EJEMPLOS:

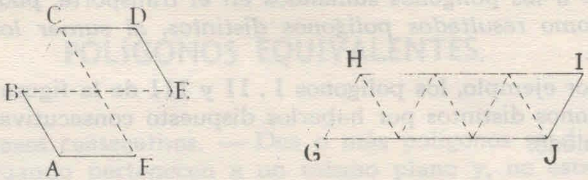
1º El triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ es equivalente al cuadrilátero MNPQ , pues el $\overset{\triangle}{ABC}$ puede considerarse como la suma de los polígonos I y II , y el cuadrilátero MNPQ como la suma de los polígonos I′ y II′ que son respectivamente iguales a I y II .



2º El ABCD es equivalente al RSTV , pues pueden considerarse como suma de los polígonos I , II y III , y I′, II′ y III′, que son respectivamente iguales.



3º El hexágono ABCDEF es equivalente al paralelogramo GHIJ, como se deduce inmediatamente de la descomposición en triángulos parciales que se ha hecho en la figura.



5. Notación. Se expresa que un polígono es equivalente a otro mediante el simbolo $\doteq$. Así, que el polígono ABCDE es equivalente al polígono PQRST, se expresa simbólicamente:

$$\text{polígono } ABCDE \doteq \text{polígono } PQRST$$

6. Corolarios de la definición de polígonos equivalentes.

1º *Si un polígono es igual a otro, es equivalente a él.*

En símbolos:

Si $\quad \text{polígono } ABCDE = \text{polígono } MNPQR,$

es: $\quad \text{polígono } ABCDE \doteq \text{polígono } MNPQR.$

2º *Si dos polígonos, son suma de polígonos respectivamente equivalentes, son equivalentes.*

7. **Caracteres de la equivalencia de polígonos.** — De la definición de polígonos equivalentes se deduce, y puede demostrarse, que la equivalencia de polígonos goza de los caracteres formales de la igualdad; es decir:

1º Carácter idéntico. *Todo polígono es equivalente a sí mismo.*

En símbolos:

$$\text{políg. } ABCDE = \text{políg. } ABCDE.$$

2º Carácter recíproco. *Si un polígono es equivalente a otro, este es equivalente al primero.*

En símbolos:

$$\text{Si políg. } ABCDE \doteq \text{políg. } MNPQ$$
$$\text{es políg. } MNPQ \doteq \text{políg. } ABCDE\,.$$

3º CARÁCTER TRANSITIVO. *Si un polígono es equivalente a otro y éste lo es a un tercero, el primero es equivalente al tercero.*

En símbolos:

$$\text{Si políg. } ABCD \doteq \text{políg. } MNPQ$$
$$\text{y políg. } MNPQ \doteq \text{políg. } RSTUV$$
$$\text{es políg. } ABCD \doteq \text{políg. } RSTUV\,.$$

CONSECUENCIA. Del carácter transitivo y recíproco se deduce que: *Si dos polígonos son equivalentes a un tercero, son equivalentes entre sí.*

8. Concepto de superficie. — Como vemos, la igualdad de polígonos tiene los mismos caracteres de toda igualdad.

A los polígonos equivalentes les corresponde igual cantidad de una magnitud, que es la superficie. Es decir: todos los polígonos equivalentes tienen la misma superficie. Así, tienen la misma superficie los siguientes polígonos de las figuras anteriores:

1º, el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ y el paralelogramo $\overset{\diamond}{MNPQ}$;

2º, el paralelogramo $\overset{\diamond}{ABCD}$ y el rectángulo $\overset{\square}{RSTV}$;

3º, el hexágono $ABCDEF$ y el paralelogramo $\overset{\diamond}{GHIJ}$.

Capítulo XII.

EQUIVALENCIA DE FIGURAS POLIGONALES.

1. En este capítulo se estudian algunas condiciones particulares, tales que cuando se verifican en un par de paralelogramos, en un par de triángulos, en un trapecio y un triángulo, etc., resultan equivalentes dichos pares de polígonos.

2. Equivalencia de dos paralelogramos. — Teorema. *Dos paralelogramos de igual base y altura son equivalente.*

H) $\overset{\square}{ABCD}$ de base b y altura h

$\overset{\square}{MNPQ}$ de base b′ y altura h′

$b = b'$

$h = h'$

T) $\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{MNPQ}$

Demostración. Para demostrar este teorema, se construye un paralelogramo igual al segundo, sobre la base del primero. Como las alturas son iguales, los lados opuestos a las bases de los dos paralelogramos deben estar sobre una misma recta y puede ocurrir que dichos lados opuestos a las bases tengan: 1º, un segmento común; 2º, un solo punto común; 3º, ningún punto común. Se originan así tres casos distintos.

Primer caso. Construimos sobre b:

$$\overset{\square}{AN'P'D} = \overset{\square}{MNPQ}.$$

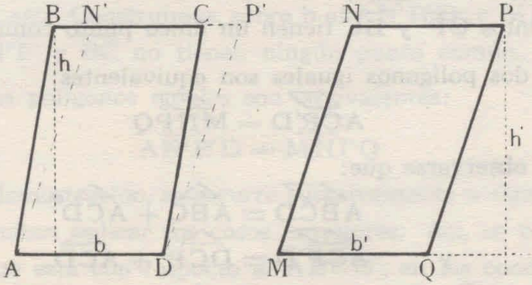
En este caso,

$$\overline{N'P'} \text{ y } \overline{BC} \text{ tienen el } \overline{N'C} \text{ común.}$$

Como dos polígonos iguales son equivalentes:

$$\overset{\square}{AN'P'D} \doteq \overset{\square}{MNPQ} \qquad [1]$$

Puede observarse en la figura que



$$\overset{\square}{ABCD} = \overset{\triangle}{ABN'} + \overset{\square}{AN'CD}$$

$$\text{y} \qquad \overset{\square}{AN'P'D} = \overset{\triangle}{DCP'} + \overset{\square}{AN'CD}$$

Como el trapecio $\overset{\square}{AN'CD}$ es común a $\overset{\square}{ABCD}$ y $\overset{\square}{AN'P'D}$, para demostrar que éstos son equivalentes basta demostrar la igualdad de los triángulos $\overset{\triangle}{ABN'}$ y $\overset{\triangle}{DCP'}$. Esta igualdad se verifica, pues, los triángulos

$$\overset{\triangle}{ABN'} \text{ y } \overset{\triangle}{DCP'} \text{ tienen } \begin{cases} \overline{AB} = \overline{DC} & \text{por lados opuestos del } \overset{\square}{ABCD} \\ \hat{N}' = \hat{P}' & \text{por correspondientes entre} \\ & N'A \mathbin{/\!/} P'D \text{ y transv. } BP' \\ \hat{B} = \hat{C} & \text{por correspondientes entre} \\ & BA \mathbin{/\!/} CD \text{ y transv. } BP'. \end{cases}$$

En consecuencia, por el segundo criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\overset{\triangle}{ABN'} = \overset{\triangle}{DCP'}$$

Luego, los paralelogramos $\overset{\square}{ABCD}$ y $\overset{\square}{AN'P'D}$ son suma de polígonos iguales; en consecuencia, son equivalentes, es decir:

$$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{AN'P'D}$$

y como según [1]: $\overset{\square}{AN'P'D} \doteq \overset{\square}{MNPQ}$

resulta: $\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{MNPQ}$

por carácter transitivo de la equivalencia de polígonos.

SEGUNDO CASO. Construimos, sobre b el $\overset{\square}{ACP'D} = \overset{\square}{MNPQ}$.

Los segmentos $\overline{CP'}$ y $\overline{BC}$ tienen un único punto común, que es C.

Como dos polígonos iguales son equivalentes:

$$\overset{\square}{ACP'D} \doteq \overset{\square}{MNPQ} \qquad [1]$$

Puede observarse que:

$$\overset{\square}{ABCD} = \overset{\triangle}{ABC} + \overset{\triangle}{ACD}$$

$$\text{y} \quad \overset{\square}{ACP'D} = \overset{\triangle}{DCP'} + \overset{\triangle}{ACD}.$$

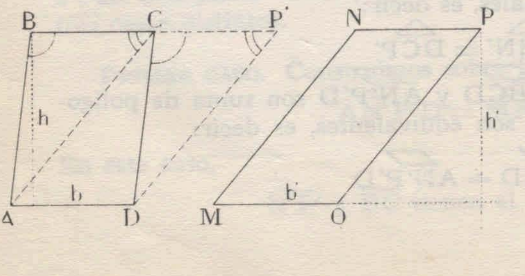
Como el $\overset{\triangle}{ACD}$ es común a los dos paralelogramos, para que resulte $\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{ACP'D}$, basta demostrar la igualdad de los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{DCP'}$

Esta igualdad se verifica, pues los triángulos

$\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{DCP'}$ tienen
- $\overline{AB} = \overline{CD}$ por lados opuestos del $\overset{\square}{ABCD}$
- $\widehat{ABC} = \widehat{DCP'}$ por correspondientes entre $BA \parallel CD$ y transv. BP'
- $\widehat{BCA} = \widehat{CP'D}$ por correspondientes entre $CA \parallel P'D$ y transv. BP'

En consecuencia, por el segundo criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DCP'}$$



Luego, los paralelogramos $\overset{\square}{ABCD}$ y $\overset{\square}{ACP'D}$ son suma de polígonos respectivamente iguales, en consecuencia, son equivalentes, es decir:

$$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{ACP'D}$$

y como, según [1]: $\overset{\square}{ACP'D} \doteq \overset{\square}{MNPQ}$

resulta: $\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{MNPQ}$

por carácter transitivo de la equivalencia de polígonos.

Tercer caso. Construímos, sobre b el $\overset{\square}{AN'P'D} = \overset{\square}{MNPQ}$. Los segmentos $\overline{N'P'}$ y $\overline{BC}$ no tienen ningún punto común.

Como dos polígonos iguales son equivalentes:

$$\overset{\square}{AN'P'D} \doteq \overset{\square}{MNPQ} \qquad [1].$$

Para la demostración, se recurre sucesivamente a figuras auxiliares que permitan aplicar los casos anteriores. Así, se construye el $\overset{\square}{ACN''D}$, que está con respecto al $\overset{\square}{ABCD}$, en las condiciones del segundo caso; luego:

$$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{ACN''D} \qquad [2]$$

Se construye $\overset{\square}{AN''P''D}$, que está, con respecto a $\overset{\square}{ACN''D}$, en las condiciones del segundo caso; luego:

$$\overset{\square}{ACN''D} \doteq \overset{\square}{AN''P''D} \qquad [3]$$

Pero este último paralelogramo está, con respecto al $\overset{\square}{AN'P'D}$ en las condiciones del primer caso, luego:

$$\overset{\square}{AN''P''D} \doteq \overset{\square}{AN'P'D} \qquad [4]$$

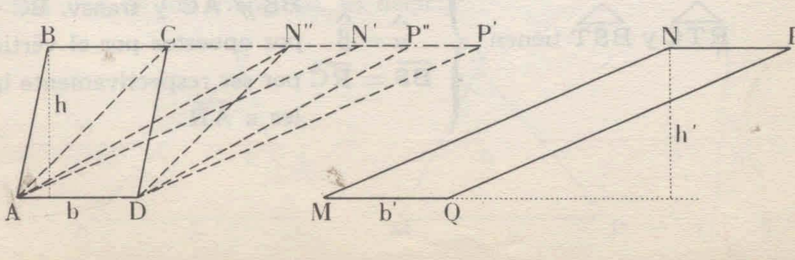
Aplicando sucesivamente a las relaciones [2], [3] y [4] el carácter transitivo de la equivalencia de polígonos, se tiene:

$$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{AN'P'D}$$

y como, según [1]: $\overset{\square}{AN'P'D} \doteq \overset{\square}{MNPQ}$

resulta: $\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{MNPQ}$

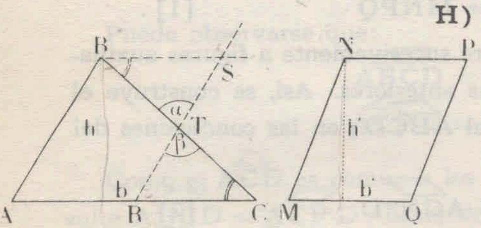
por carácter transitivo de la equivalencia de polígonos.



NOTA. Es fácil ver que el número de paralelogramos auxiliares depende de los paralelogramos dados. En algunos casos, bastará un solo paralelogramo auxiliar; en otros serán necesarios dos, tres, o más.

Demostrados los tres casos que pueden presentarse, el teorema queda demostrado en general.

3. Equivalencia entre un triángulo y un paralelogramo. — TEOREMA. *Si un triángulo y un paralelogramo tienen igual altura y la base del paralelogramo es igual a la mitad de la base del triángulo, son equivalentes.*



H) $\overset{\triangle}{ABC}$ de base b y altura h

$\overset{\square}{MNPQ}$ de base b' y altura h'

$$h' = h$$

$$b' = \frac{b}{2}$$

T) $\overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\square}{MNPQ}$

DEMOSTRACIÓN. Por R, punto medio de $\overline{AC}$, se traza la paralela a AB, y por B, la paralela a AC, que corta a la anterior en S. Resulta, así el $\overset{\square}{ABSR}$ que es equivalente al $\overset{\square}{MNPQ}$, porque tienen igual base e igual altura, es decir:

$$\overset{\square}{ABSR} \doteq \overset{\square}{MNPQ} \qquad [1]$$

Además, $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\square}{ABTR} + \overset{\triangle}{RTC}$

y $\overset{\square}{ABSR} = \overset{\square}{ABTR} + \overset{\triangle}{BST}$

Como el trapecio $\overset{\square}{ABTR}$ es común al $\overset{\triangle}{ABC}$ y al $\overset{\square}{ABSR}$, éstos serán equivalentes si se demuestra la igualdad de los triángulos $\overset{\frown}{RTC}$ y $\overset{\frown}{BST}$. Esta igualdad se verifica, pues:

$\overset{\triangle}{RTC}$ y $\overset{\triangle}{BST}$ tienen
$\left\{\begin{array}{ll} \hat{B} = \hat{C} & \text{por alternos internos entre} \\ & \text{BS} /\!/ \text{AC y transv. BC} \\ \hat{\alpha} = \hat{\beta} & \text{por opuestos por el vértice} \\ \overline{BS} = \overline{RC} & \text{por ser respectivamente igua-} \\ & \text{les a } \overline{AR}. \end{array}\right.$

En consecuencia, por el segundo criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\overset{\triangle}{RTC} = \overset{\triangle}{BST}$$

Luego, el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ y el paralelogramo $\overset{\square}{ABSR}$ son suma de polígonos respectivamente iguales, en consecuencia, son equivalentes, es decir:

$$\overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\square}{ABSR}$$

y como, según [1]: $\overset{\square}{ABSR} \doteq \overset{\square}{MNPQ}$

resulta: $\overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\square}{MNPQ}$

por carácter transitivo de la equivalencia de polígonos.

Luego, el teorema queda demostrado.

4. Equivalencia de dos triángulos. — TEOREMA. *Dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.*

H) $\overset{\triangle}{ABC}$ de base b y altura h

$\overset{\triangle}{MNP}$ de base b′ y altura h′

$$b = b'$$
$$h = h'$$

T) $\overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\triangle}{MNP}$

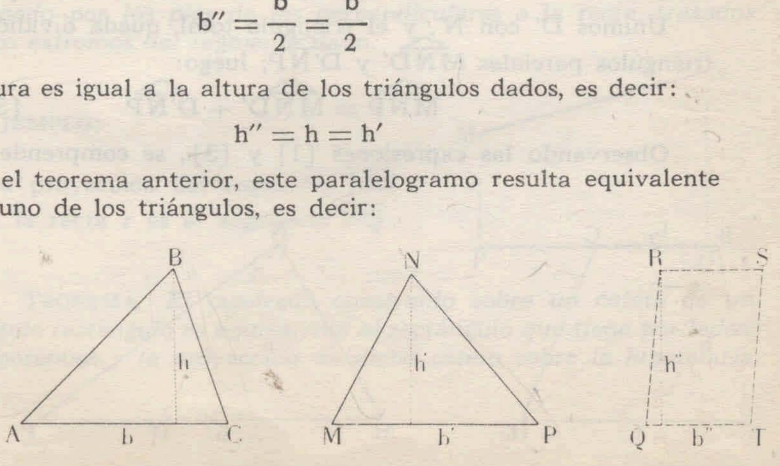
DEMOSTRACIÓN. Construimos el $\overset{\square}{QRST}$ de base b″ y altura h″ tales que: la base es igual a la mitad de la base de los triángulos dados, es decir:

$$b'' = \frac{b}{2} = \frac{b'}{2}$$

y la altura es igual a la altura de los triángulos dados, es decir:

$$h'' = h = h'$$

Por el teorema anterior, este paralelogramo resulta equivalente a cada uno de los triángulos, es decir:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\square}{QRST} \\ \text{y } \overset{\triangle}{MNP} \doteq \overset{\square}{QRST} \end{array}\right\} \therefore \overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{MNP}$$ por consecuencia del carácter transitivo de la equivalencia de polígonos.

Luego, el teorema queda demostrado.

5. **Equivalencia entre un trapecio y un triángulo.** — TEOREMA. *Si un trapecio y un triángulo tienen igual altura y la base del triángulo es igual a la suma de las bases del trapecio, son equivalentes.*

H) Trapecio $\overset{\square}{ABCD}$ de bases b_1 y b_2 y altura h

$\overset{\triangle}{MNP}$ de base b' y altura h'

$$b' = b_1 + b_2$$

$$h' = h$$

T) $\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\triangle}{MNP}$.

DEMOSTRACIÓN. En el $\overset{\square}{ABCD}$ trazamos la diagonal $\overline{BD}$, y queda dividido en los triángulos $\overset{\triangle}{ABD}$ y $\overset{\triangle}{BCD}$: luego:

$$\overset{\square}{ABCD} = \overset{\triangle}{ABD} + \overset{\triangle}{BCD} \qquad [1]$$

En el $\overset{\triangle}{MNP}$, sobre $\overline{MP}$, determinamos:

$$\overline{MD'} = b_1$$

y como, por hipótesis,

$$\overline{MP} = b_1 + b_2$$

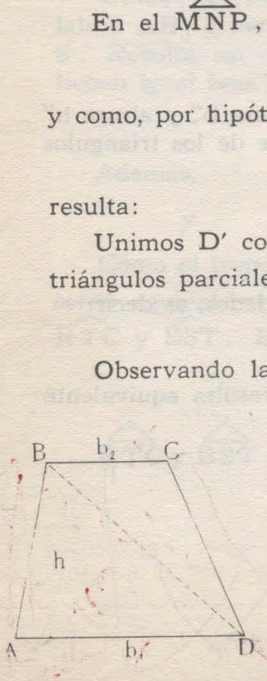
resulta:

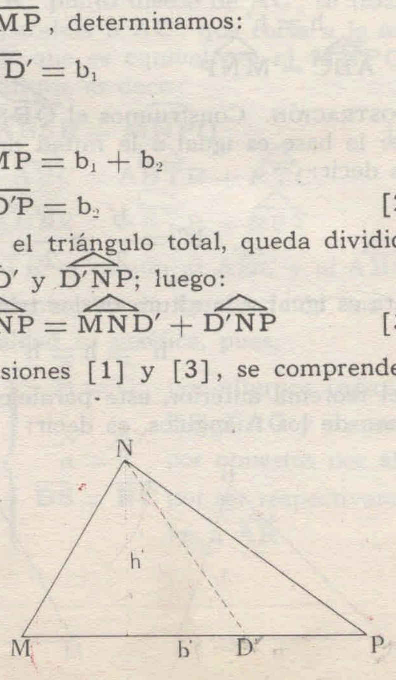
$$\overline{D'P} = b_2 \qquad [2]$$

Unimos D' con N, y el triángulo total, queda dividido en los triángulos parciales $\overset{\triangle}{MND'}$ y $\overset{\triangle}{D'NP}$; luego:

$$\overset{\triangle}{MNP} = \overset{\triangle}{MND'} + \overset{\triangle}{D'NP} \qquad [3]$$

Observando las expresiones [1] y [3], se comprende que, en





virtud del segundo corolario de la definición de polígonos equivalentes, resultará el trapecio $\overset{\frown}{ABCD}$ equivalente al triángulo $\overset{\triangle}{MNP}$, si probamos la equivalencia entre $\overset{\triangle}{ABD}$ y $\overset{\triangle}{MND'}$ y entre $\overset{\triangle}{BCD}$ y $\overset{\triangle}{D'NP}$. Estas dos equivalencias se cumplen, dado que

$\overset{\triangle}{ABD} \doteq \overset{\triangle}{MND'}$, por tener bases y alturas respectivamente iguales, pues: $\left\{ \begin{array}{ll} \overline{AD} = \overline{MD'} & \text{por construcción} \\ h = h' & \text{por hipótesis} \end{array} \right.$

$\overset{\triangle}{BCD} \doteq \overset{\triangle}{D'NP}$, por tener bases y alturas respectivamente iguales, pues: $\left\{ \begin{array}{ll} \overline{BC} = \overline{D'P} & \text{por } [2] \\ h = h' & \text{por hipótesis} \end{array} \right.$

Luego, el trapecio $\overset{\frown}{ABCD}$ y el triángulo $\overset{\triangle}{MNP}$ son suma de polígonos equivalentes; en consecuencia, son equivalentes, es decir:

$$\overset{\frown}{ABCD} \doteq \overset{\triangle}{MNP}$$

Luego el teorema queda demostrado.

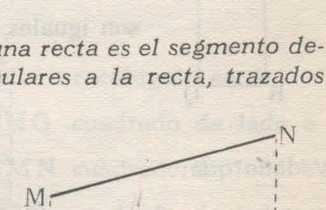
6. NOTA. Los dos teoremas siguientes, a pesar de no figurar en el programa, se incluyen en el texto, pues los autores creen interesante la demostración del teorema de PITÁGORAS por equivalencias, aunque el alumno lo volverá a estudiar en el tercer curso, siguiendo otro camino.

7. Para la demostración de estos teoremas, es preciso establecer primero que:

La proyección de un segmento sobre una recta es el segmento determinado por los pies de las perpendiculares a la recta, trazados por los extremos del segmento dado.

EJEMPLO:

La proyección del segmento $\overline{MN}$ sobre la recta r es el segmento $\overline{PQ}$.



8. TEOREMA. *El cuadrado construído sobre un cateto de un triángulo rectángulo es equivalente al rectángulo que tiene por lados: la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.*

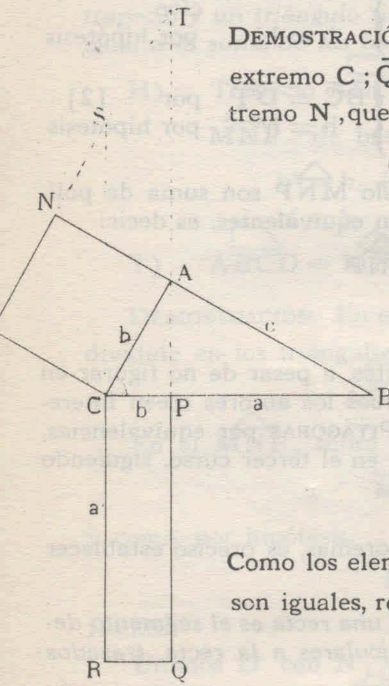
H) Triángulo $\widehat{CAB}$ rectángulo en A

$\overset{\square}{ACMN}$ cuadrado del cateto b

b′ proyección del cateto b sobre la hipotenusa a

$\overset{\square}{CPQR}$ rectángulo de lados a y b′

T) $\overset{\square}{ACMN} = \overset{\square}{CPQR}$



Demostración. Se prolongan los lados: $\overline{RC}$ por el extremo C ; $\overline{QP}$ por el extremo P , y $\overline{MN}$ por el extremo N , quedando así determinados los puntos S y T .

Comparamos los triángulos rectángulos:

$\widehat{CAB}$ y $\widehat{CMS}$ que tienen

$\overline{AC} = \overline{CM}$ por lados del $\overset{\square}{ACMN}$

$\widehat{BCA} = \widehat{MCS}$ por tener el mismo complemento $\widehat{SCA}$.

Luego, por el primer criterio de igualdad de triángulos, rectángulos, estos triángulos son iguales,

es decir: $\widehat{CAB} = \widehat{CMS}$

Como los elementos homólogos de triángulos iguales son iguales, resulta:

$$\overline{CB} = \overline{CS}$$

y dado que: $\overline{CB} = a$

es: $\overline{CS} = a$

Comparamos los paralelogramos:

$\overset{\square}{ACMN}$ y $\overset{\square}{ACST}$ que tienen: $\left\{\begin{array}{l}\text{la base } \overline{AC} \text{ común y las alturas iguales,} \\ \text{por ser la distancia entre las paralelas AC} \\ \text{y MT.}\end{array}\right.$

Luego, por tener bases y alturas iguales, son equivalentes, es decir:

$$\overset{\square}{ACMN} \doteq \overset{▱}{ACST} \qquad [1]$$

Comparamos los paralelogramos:

$\overset{▱}{ACST}$ y $\overset{\square}{CPQR}$, que tienen:
- las bases $\overline{CS}$ y $\overline{CR}$ iguales, por ser ambas iguales a la hipotenusa a
- y alturas iguales, por ser la distancia entre las paralelas SR y TQ.

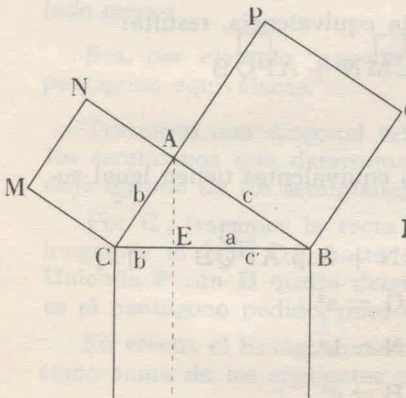
Luego, por tener bases y alturas iguales, son equivalentes, es decir:

$$\overset{▱}{ACST} \doteq \overset{\square}{CPQR} \qquad [2]$$

De [1] y [2], por carácter transitivo de la equivalencia, resulta:

$$\overset{\square}{ACMN} \doteq \overset{\square}{CPQR}, \quad \text{que es la tesis.}$$

9. Teorema de Pitágoras. *El cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los cuadrados construídos sobre lòs catetos.*



H) $\overset{\triangle}{ABC}$ rectángulo en A

$\overset{\square}{CBHG}$ cuadrado de lado a

$\overset{\square}{ACMN}$ cuadrado de lado b

$\overset{\square}{APQB}$ cuadrado de lado c

T) $\overset{\square}{CBHG} \doteq \overset{\square}{ACMN} + \overset{\square}{APQB}$

DEMOSTRACIÓN. Trazando la recta AF, perpendicular a la hipotenusa CB, el $\overset{\square}{CBHG}$ queda dividido en los rectángulos: $\overset{\boxed{}}{CEFG}$ y $\overset{\boxed{}}{EBHF}$. El $\overset{\boxed{}}{CEFG}$ tiene por lados la hipotenusa a y la proyección b′ del cateto b sobre la hipotenusa; en consecuencia, por el teorema anterior, es equivalente al cuadrado de lado b; el $\overset{\boxed{}}{EBHF}$ tiene por lados la hipotenusa a y la proyección c′ del cateto c sobre la hipotenusa; en consecuencia, es equivalente al cuadrado de lado c.

Simbólicamente:

$$\overset{\square}{ACMN} \doteq \overset{\boxed{}}{CEFG}$$

$$\overset{\square}{APQB} \doteq \overset{\boxed{}}{EBHF}$$

Sumando m. a m.:

$$\overset{\square}{ACMN} + \overset{\boxed{}}{APQB} \doteq \overset{\boxed{}}{CEFG} + \overset{\boxed{}}{EBHF}$$

y como $\overset{\square}{CEFG} + \overset{\boxed{}}{EBHF} = \overset{\boxed{}}{CBHG}$

Reemplazando en el segundo miembro de [1], se tiene:

$$\overset{\square}{ACMN} + \overset{\square}{APQB} \doteq \overset{\square}{CBHG}$$

y aplicando el carácter recíproco de la equivalencia, resulta:

$$\overset{\square}{CBHG} \doteq \overset{\square}{ACMN} + \overset{\square}{APQB}$$

que es la tesis.

10. COROLARIO. Como las figuras equivalentes tienen igual superficie, es:

$$\text{Sup. } \overset{\square}{CBHG} = \text{Sup. } \overset{\square}{ACMN} + \text{Sup. } \overset{\square}{APQB} \qquad [1]$$

pero

$$\text{Sup. } \overset{\square}{CBHG} = a^2$$

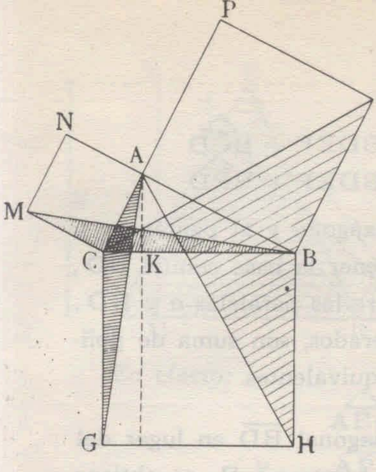
$$\text{Sup. } \overset{\square}{ACMN} = b^2$$

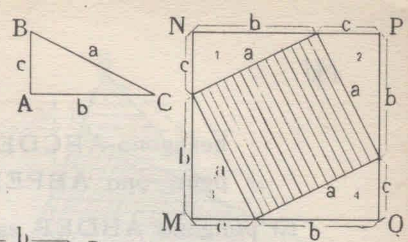
$$\text{Sup. } \overset{\square}{APQB} = c^2$$

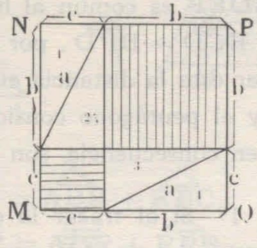
luego, reemplazando en [1]:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

relación que expresa que: *el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*







11. Nota. El teorema de Pitágoras puede también demostrarse mediante otras descomposiciones en figuras equivalentes, como se indica en las figuras siguientes, demostraciones que se proponen al alumno como ejercicio.

TRANSFORMACIONES DE FIGURAS POLIGONALES.

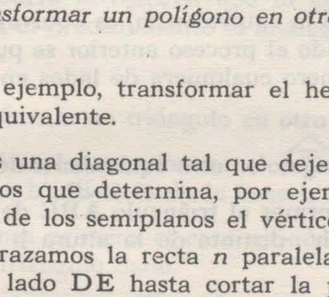
12. *Transformar un polígono en otro equivalente que tenga un lado menos.*

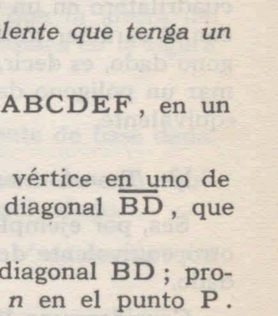
Sea, por ejemplo, transformar el hexágono ABCDEF, en un pentágono equivalente.

Trazamos una diagonal tal que deje un solo vértice en uno de los semiplanos que determina, por ejemplo la diagonal $\overline{BD}$, que deja en uno de los semiplanos el vértice C.

Por C, trazamos la recta *n* paralela a esa diagonal BD; prolongamos el lado DE hasta cortar la paralela *n* en el punto P. Uniendo P con B queda determinado el pentágono ABPEF, que es el pentágono pedido, pues es equivalente al hexágono dado.

En efecto, el hexágono dado y el pentágono pueden considerarse como suma de los siguientes polígonos:





$$\text{hexágono ABCDEF} = \text{políg. ABDEF} + \overset{\triangle}{BCD}$$
$$\text{pentágono ABPEF} = \text{políg. ABDEF} + \overset{\triangle}{BPD}$$

El polígono ABDEF es común al hexágono y al pentágono y como los triángulos $\overset{\triangle}{BCD} \doteq \overset{\triangle}{BPD}$, por tener la base común $\overline{BD}$, e igual altura, por ser ésta la distancia entre las paralelas n y BD, luego el hexágono y el pentágono considerados, son suma de polígonos equivalentes, en consecuencia, son equivalentes.

OBSERVACIONES. 1º Si al trazar la diagonal $\overline{BD}$ en lugar del lado $\overline{DE}$, prolongamos el lado $\overline{AB}$ por el extremo B, se obtiene otra solución que es la que indica la figura al margen.

2º Se comprende que cada una de las otras diagonales que cumpla las condiciones estipuladas permite obtener otras dos soluciones.

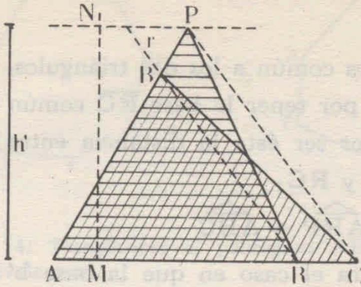
3º Si se aplica sucesivamente el procedimiento estudiado, se puede transformar el pentágono en un cuadrilátero equivalente y el cuadrilátero en un triángulo equivalente y este triángulo de acuerdo con el carácter transitivo de la equivalencia, es equivalente al hexágono dado, es decir, repitiendo el proceso anterior se puede transformar un polígono de un número cualquiera de lados en un triángulo equivalente.

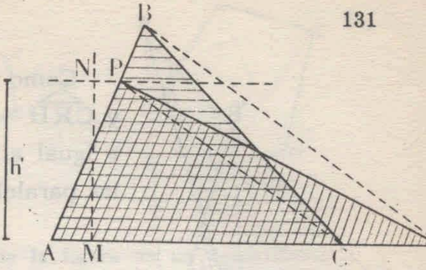
13. Transformar un triángulo en otro equivalente de altura dada.

Sea, por ejemplo, transformar el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de altura h, en otro equivalente de altura h′, distinta de la altura h del triángulo dado.

Consideremos 1º el caso en que h′ es mayor que la altura h del triángulo dado.

Trazamos la perpendicular a la base $\overline{AC}$, por un punto cualquiera de ella, por ejemplo M, y sobre esa perpendicular se determina $\overline{MN} = h'$. Por N se traza la paralela a AC y se prolonga $\overline{AB}$ hasta cortar dicha paralela en P. Se une P con C, y por B se traza r $/\!\!/$ PC, que determina sobre $\overline{AC}$ el punto R. Uniendo R con P se obtiene el $\overset{\triangle}{APR}$, que es el buscado, pues tiene la altura h′ pedida y es equivalente al triángulo dado $\overset{\triangle}{ABC}$.





En efecto:

$$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{ABR} + \overset{\triangle}{RBC}$$

$$\text{y} \quad \overset{\triangle}{APR} = \overset{\triangle}{ABR} + \overset{\triangle}{RPB}$$

El $\overset{\triangle}{ABR}$ es común y $\overset{\triangle}{RBC} \doteq \overset{\triangle}{RPC}$, por tener la base $\overline{BR}$ común e igual altura por ser ésta la distancia entre las paralelas PC y r.

Luego, los triángulos $\overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\triangle}{APR}$ son suma de polígonos iguales y equivalentes, en consecuencia, son equivalentes, es decir:

$$\overset{\triangle}{APR} \doteq \overset{\triangle}{ABC}$$

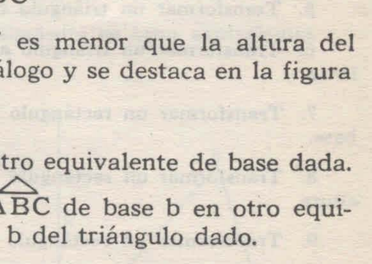
Si se considera el caso en que h′ es menor que la altura del triángulo dado, el procedimiento es análogo y se destaca en la figura de la derecha.

14. Transformar un triángulo en otro equivalente de base dada.

Sea, por ejemplo, transformar el $\overset{\triangle}{ABC}$ de base b en otro equivalente de base b′, distinta de la base b del triángulo dado.

Consideramos primero el caso en que la base b′ es mayor que la base b del triángulo dado.

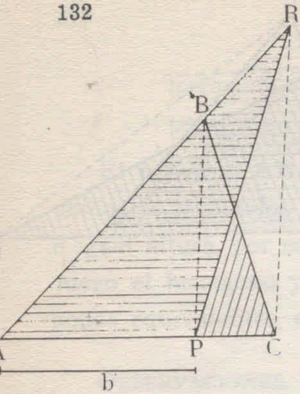
Se prolonga la base $\overline{AC}$ hasta determinar $\overline{AP} = b'$; se une P con B y por C se traza $r \parallel PB$, que corta a $\overline{AB}$ en R. Uniendo luego R con P, se obtiene el $\overset{\triangle}{ARP}$ que es el buscado, pues tiene la base b′ y es equivalente al triángulo dado.



En efecto:

$$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{ARC} + \overset{\triangle}{CRB}$$

$$\text{y} \quad \overset{\triangle}{ARP} = \overset{\triangle}{ARC} + \overset{\triangle}{CRP}$$



Como $\widehat{ARC}$ es común a los dos triángulos, y $\widehat{CRB} \doteq \widehat{CRP}$ por tener la base $\overline{RC}$ común e igual altura, por ser ésta la distancia entre las paralelas BP y RC,

$$\text{es} \quad \widehat{ARP} \doteq \widehat{ABC}$$

Si se considera el caso en que la base b′ es menor que la base b del triángulo dado, el procedimiento es análogo y se destaca en la figura al margen.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. Transformar un cuadrado en un paralelogramo equivalente.
2. Transformar un rectángulo en un triángulo equivalente.
3. Transformar un cuadrado en un triángulo equivalente.
4. Transformar un trapecio en un triángulo equivalente.
5. Transformar un triángulo rectángulo en uno obtusángulo equivalente.
6. Transformar un triángulo acutángulo en un triángulo rectángulo equivalente.
7. Transformar un rectángulo en un triángulo equivalente que tenga igual base.
8. Transformar un rectángulo en un triángulo equivalente que tenga igual altura.
9. Transformar un rectángulo en un trapecio equivalente.
10. Transformar un rectángulo en un paralelogramo equivalente cuya base sea igual a la mitad de la base del rectángulo.
11. Dado un pentágono, ¿cuántos cuadriláteros equivalentes pueden obtenerse por el procedimiento indicado?
12. Transformar el heptágono ABCDEFG de la figura en un hexágono equivalente:

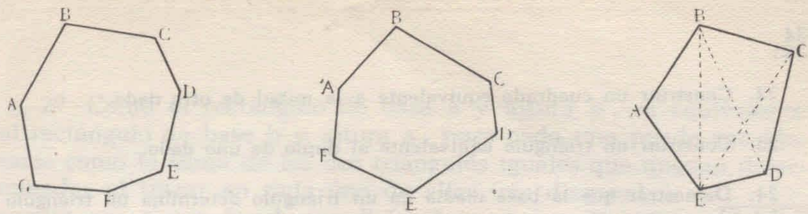
    1º trazando la diagonal $\overline{AC}$,

    2º trazando la diagonal $\overline{DF}$.

13. Transformar el hexágono ABCDEF de la figura en un pentágono equivalente:

    1º trazando la diagonal $\overline{AE}$,

    2º trazando la diagonal $\overline{CE}$.



14. Transformar el pentágono ABCDE de la figura en un cuadrilátero equivalente:

1º trazando la diagonal $\overline{BE}$,

2º trazando la diagonal $\overline{BD}$,

3º trazando la diagonal $\overline{CE}$.

15. Transformar un octógono en un pentágono equivalente.

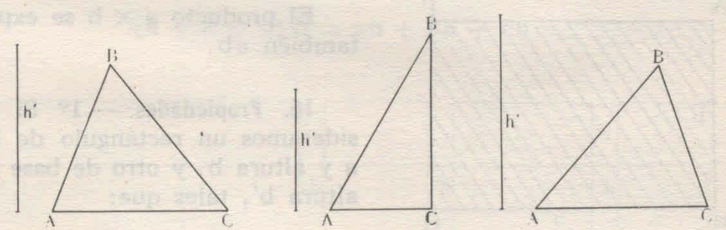
16. Transformar un pentágono en un triángulo equivalente.

17. Transformar un triángulo en otro equivalente, de base doble.

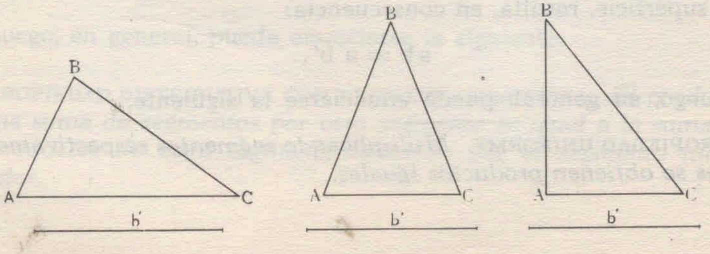
18. Transformar un triángulo en otro equivalente de base igual a la mitad de la base del dado.

19. Transformar un triángulo en otro equivalente, de altura doble.

20. Transformar los triángulos de la figura siguiente en otros equivalentes de altura igual a la indicada en la figura.



21. Transformar los triángulos de la figura siguiente en otros equivalentes de base igual a la indicada en la figura.



22. Construir un cuadrado equivalente a la mitad de otro dado.

23. Construir un triángulo equivalente al duplo de uno dado.

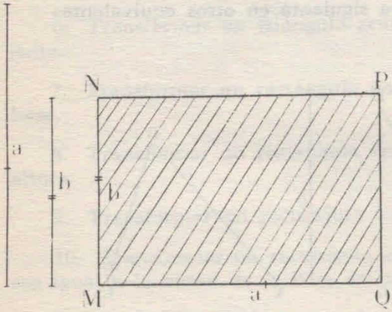
24. Demostrar que la base media de un triángulo determina un triángulo parcial que es equivalente a la cuarta parte del triángulo dado.

25. Transformar un triángulo en otro equivalente de igual base y uno de sus otros lados igual a un segmento dado.

26. Demostrar que, si se une el punto medio de cada base de un trapecio con los extremos de la otra, se forman dos triángulos cuya suma es equivalente al trapecio.

MULTIPLICACIÓN DE SEGMENTOS.

15. Producto de dos segmentos. — DEFINICIÓN. Se llama producto de un segmento a, por otro b, a la superficie del rectángulo que tiene por base el primer segmento y por altura el segundo segmento.



EJEMPLO:

$$a \times b = \text{sup. } \overline{\square}\text{MNPQ}.$$

El producto $a \times b$ se expresa también ab.

16. Propiedades. — 1º Si consideramos un rectángulo de base a y altura b, y otro de base a′ y altura b′, tales que:

$$a = a'$$
$$b = b'$$

como dos rectángulos de igual base y altura son equivalentes, tienen igual superficie, resulta, en consecuencia:

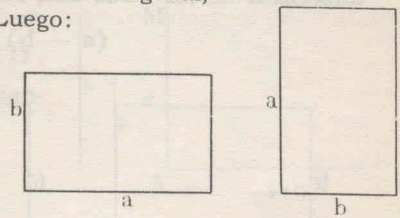
$$ab = a'b'.$$

Luego, en general, puede enunciarse la siguiente,

PROPIEDAD UNIFORME. *Multiplicando segmentos respectivamente iguales se obtienen productos iguales.*

2º Como el rectángulo de base a y altura b, es equivalente al rectángulo de base b y altura a, pues cada uno puede considerarse como la suma de los dos triángulos iguales que quedan determinados al trazar en cada uno de ellos una diagonal, resulta que tienen igual superficie. Luego:

$$ab = ba$$



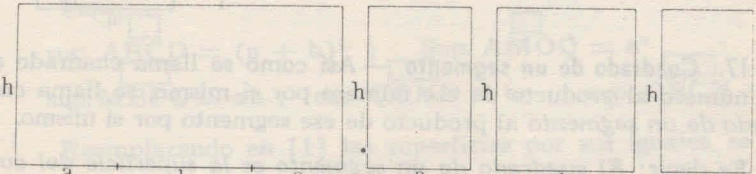
En general, puede enunciarse la siguiente:

PROPIEDAD CONMUTATIVA. *Cambiando el orden de los factores, no altera el producto de dos segmentos.*

NOTA. De acuerdo con esta propiedad se puede definir al producto de dos segmentos como la superficie del rectángulo que tiene esos segmentos, como lados concurrentes en un vértice.

3º Como el rectángulo de base $(a + b + c)$ y altura h, tiene igual superficie que la suma de los rectángulos de base a y altura h; de base b y altura h; de base c y altura b, pues el primer rectángulo es equivalente a la suma de los otros tres, resulta que,

$$(a + b + c)\,h = ah + bh + ch\,.$$

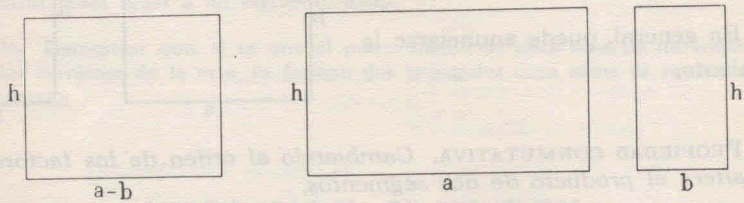


Luego, en general, puede enunciarse la siguiente,

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA SUMA. *El producto de una suma de segmentos por otro segmento es igual a la suma de los productos de cada segmento sumando por el segmento multiplicador.*

4º Como el rectángulo de base (a — b) y altura h , tiene igual superficie que la diferencia de los rectángulos de base a y altura h y de base b y altura h , pues el primer rectángulo es equivalente a la diferencia de los otros dos, resulta que,

$$(a - b)\,h = ah - bh\,.$$

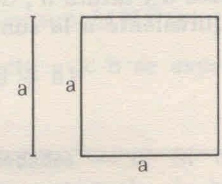


En general, puede enunciarse la siguiente,

Propiedad distributiva con respecto a la resta. *El producto de una resta de dos segmentos por otro segmento, es igual al producto del minuendo por dicho segmento, menos el producto del sustraendo por dicho segmento.*

Simbólicamente:

$$a^2 = a \cdot a$$



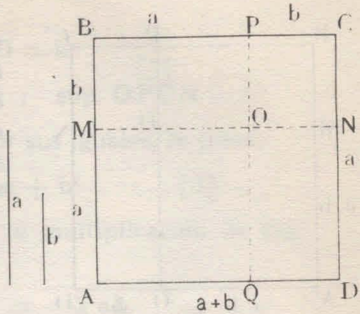
17. Cuadrado de un segmento. — Así como se llama cuadrado de un número al producto de ese número por sí mismo, se llama *cuadrado de un segmento* al producto de ese segmento por sí mismo.

Es decir: *El cuadrado de un segmento es la superficie del cuadrado que tiene por lado dicho segmento.*

18. Cuadrado de la suma de dos segmentos. — Teorema. *El cuadrado de la suma de dos segmentos es igual al cuadrado del primer segmento más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo segmento.*

H) $(a + b)^2$

T) $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2\,.$



Demostración. De acuerdo con la definición dada, el cuadrado del segmento $(a + b)$, es la superficie del cuadrado cuyo lado es $(a + b)$, en nuestro caso el cuadrado ABCD. Determinamos sobre $\overline{AB}$, el segmento $\overline{AM} = a$; en consecuencia,

$$\overline{MB} = b.$$

Sobre $\overline{BC}$, el segmento $\overline{BP} = a$; en consecuencia,

$$\overline{PC} = b.$$

Por M, se traza la paralela a BC, que corta a CD en N; y por P, se traza la paralela a CD, que corta a $\overline{AD}$ en Q.

Como consecuencia de la construcción, resulta:

$$\overset{\square}{ABCD} = \overset{\square}{AMOQ} + \overset{\boxed{}}{MBPO} + \overset{\boxed{}}{QOND} + \overset{\square}{OPCN}$$

Luego:

$$\text{sup. } \overset{\square}{ABCD} = \text{sup. } \overset{\square}{AMOQ} + \text{sup. } \overset{\boxed{}}{MBPO} + \text{Sup. } \overset{\boxed{}}{QOND} + \text{sup. } \overset{\square}{OPCN} \qquad [1]$$

Pero:

$$\text{sup. } \overset{\square}{ABCD} = (a + b)^2 \quad ; \quad \text{Sup. } \overset{\square}{AMOQ} = a^2$$

$$\text{sup. } \overset{\boxed{}}{MBPO} = ab \quad ; \quad \text{sup. } \overset{\boxed{}}{QOND} = ba \quad ; \quad \text{sup. } \overset{\boxed{}}{OPCN} = b^2$$

Reemplazando en [1] las superficies por sus iguales, se tiene:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 \qquad [2]$$

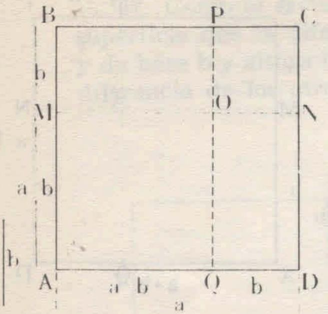
y como por propiedad conmutativa de la multiplicación $ab = ba$ resulta:

$$ab + ba = 2ab.$$

Reemplazando en [2], resulta:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

que es la tesis.



19. Cuadrado de la diferencia de dos segmentos. — TEOREMA. *El cuadrado de la diferencia de dos segmentos es igual al cuadrado del primer segmento, menos el doble producto del primero por el segundo segmento, más el cuadrado del segundo.*

H) $(a - b)^2$
$a > b$

T) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

DEMOSTRACIÓN. Construímos el $\square$ ABCD de lado a.

Sobre $\overline{AB}$, determinamos el $\overline{BM} = b$; en consecuencia,

$\overline{MA} = (a - b)$

Sobre $\overline{AD}$, determinamos el $\overline{DQ} = b$; en consecuencia,

$\overline{QA} = (a - b)$

De acuerdo con la definición dada el cuadrado de la diferencia $(a - b)$ es la superficie del cuadrado de lado $(a - b)$, en nuestro caso $\overset{\square}{\mathrm{AMOQ}}$.

De la construcción, se deduce:

$$\overset{\square}{\mathrm{AMOQ}} = \overset{\square}{\mathrm{ABCD}} - \overset{\boxed{}}{\mathrm{MBCN}} - \overset{\boxed{}}{\mathrm{QOND}} \qquad [1]$$

Pero

$$\overset{\boxed{}}{\mathrm{QOND}} = \overset{\boxed{}}{\mathrm{QPCD}} - \overset{\square}{\mathrm{OPCN}}$$

Reemplazando en [1] $\overset{\boxed{}}{\mathrm{QOND}}$ por su igual, se tiene:

$$\overset{\square}{\mathrm{AMOQ}} = \overset{\square}{\mathrm{ABCD}} - \overset{\boxed{}}{\mathrm{MBCN}} - (\overset{\boxed{}}{\mathrm{QPCD}} - \overset{\square}{\mathrm{OPCN}})$$

Quitando paréntesis,

$$\overset{\square}{\mathrm{AMOQ}} = \overset{\square}{\mathrm{ABCD}} - \overset{\boxed{}}{\mathrm{MBCN}} - \overset{\boxed{}}{\mathrm{QPCD}} + \overset{\square}{\mathrm{OPCN}}$$

Luego:

$$\text{sup. } \overset{\square}{\mathrm{AMOQ}} = \text{sup. } \overset{\square}{\mathrm{ABCD}} - \text{sup. } \overset{\boxed{}}{\mathrm{MBCN}} - \text{sup. } \overset{\boxed{}}{\mathrm{QPCD}} +$$
$$+ \text{ sup. } \overset{\square}{\mathrm{OPCN}} \qquad [2]$$

Pero:

$$\text{sup. } \overset{\square}{AMOQ} = (a - b)^2 \quad ; \quad \text{sup. } \overset{\square}{ABCD} = a^2$$

$$\text{sup. } \overset{\square}{MBCN} = ab \quad ; \quad \text{sup. } \overset{\square}{QPCD} = ba \quad ; \quad \text{sup. } \overset{\square}{OPCN} = b^2$$

Reemplazando en [2] las superficies por sus iguales, se tiene:

$$(a - b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2 \qquad [3]$$

Como, por propiedad conmutativa de la multiplicación de segmentos $ab = ba$, es:

$$-ab - ba = -ab - ab = -2ab$$

Reemplazando en [3], resulta:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

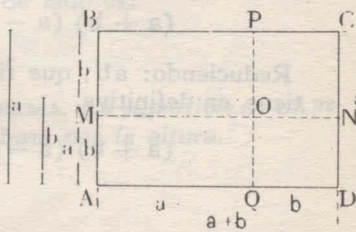
que es la tesis.

20. Producto de la suma de dos segmentos por la diferencia de los mismos. — TEOREMA. *El producto de la suma de dos segmentos por la diferencia de los mismos, es igual al cuadrado del primer segmento menos el cuadrado del segundo.*

H) $(a + b)(a - b)$

$a > b$

T) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$



DEMOSTRACIÓN. Construímos el rectángulo ABCD, de base $(a + b)$ y altura a.

Sobre el $\overline{AB}$, determinamos el $\overline{BM} = b$;

en consecuencia, $\overline{MA} = a - b$.

Sobre el $\overline{AD}$, determinamos el $\overline{AQ} = a$,

en consecuencia $\overline{QD} = b$.

Trazamos por M la paralela a AD, que corta a CD en N, y por Q, la paralela a CD, que corta a BC en P.

Por definición, el producto $(a + b)(a - b)$ es la superficie del rectángulo que tiene por base $(a + b)$ y por altura $(a - b)$ en nuestro caso, $\overset{\square}{AMND}$.

Ahora bien:

$$\overset{\square}{AMND} = \overset{\square}{ABPQ} - \overset{\square}{MBPO} + \overset{\square}{QPCD} - \overset{\square}{OPCN}$$

Luego:

$$\text{sup. } \overset{\square}{AMND} = \text{sup. } \overset{\square}{ABPQ} - \text{sup. } \overset{\square}{MBPO} + \text{sup. } \overset{\square}{QPCD} - \text{sup. } \overset{\square}{OPCN} \qquad [1]$$

Pero:

$$\text{sup. } \overset{\square}{AMND} = (a + b)(a - b) \quad ; \quad \text{sup. } \overset{\square}{ABPQ} = a^2$$

$$\text{sup. } \overset{\square}{MBPO} = ab \quad ; \quad \text{sup. } \overset{\square}{QPCD} = ba \quad ; \quad \text{sup. } \overset{\square}{OPCN} = b^2$$

Reemplazando en [1], las superficies por sus iguales, se tiene:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

como, por propiedad conmutativa, $ab = ba$, se tiene:

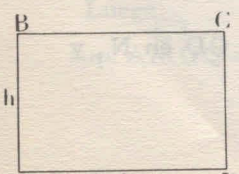
$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

Reduciendo: ab, que figura con signo menos y con signo más, se tiene, en definitiva,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \text{, que es la tesis.}$$

SUPERFICIES DE POLÍGONOS.

21. Superficie del rectángulo. — De acuerdo con la definición dada anteriormente, el producto de dos segmentos es igual a la superficie del rectángulo que tiene por base y altura los segmentos dados. Recíprocamente: *la superficie de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura, o sea:*



$$\boxed{\text{Sup. rectángulo} = \text{base} \times \text{altura}}$$

Así, dado el $\overset{\square}{ABCD}$ de base b y altura h es:

$$\text{sup. } \overset{\square}{ABCD} = b \times h\,.$$

Ejemplo:

La superficie de un rectángulo de 7 cm de base y 3 cm de altura es:

$$7 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 21 \text{ cm}^2\,.$$

22. Superficie del cuadrado. — Según hemos visto, teniendo en cuenta que el cuadrado es el caso particular de un rectángulo en el que la base y la altura son iguales, resulta que el cuadrado de un segmento es igual a la superficie del cuadrado que tiene por lado dicho segmento. Recíprocamente, *la superficie del cuadrado es igual al cuadrado del lado,* o sea:

$$\boxed{\text{Sup. cuadrado} = \text{lado}^2}$$

Si el cuadrado tiene por lado el segmento l, resulta:

$$\text{Sup. cuadrado} = l^2$$

Ejemplo:

La superficie de un cuadrado de 3 m de lado es:

$$(3 \text{ m})^2 = 9 \text{ m}^2$$

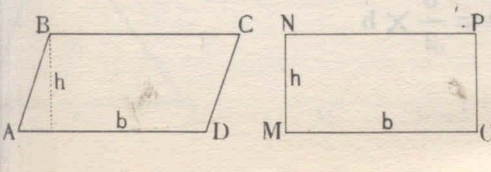
23. Superficie del paralelogramo. — Teorema. *La superficie de un paralelogramo es igual al producto de la base por la altura.*

H) $\overset{\lozenge}{ABCD}$, de base b y altura h

T) $\text{Sup. } \overset{\lozenge}{ABCD} = b \times h$

Demostración. Consideremos el rectángulo $\overset{\square}{MNPQ}$ de base b y altura h respectivamente iguales a las del $\overset{\lozenge}{ABCD}$ En consecuencia, estos dos paralelogramos por tener base y altura respectivamente iguales, son equivalentes, es decir:

$$\overset{\lozenge}{ABCD} = \overset{\square}{MNPQ}\,.$$



Pero, si son equivalentes tienen igual superficie, es decir:

$$\text{Sup. } \overset{\text{▱}}{ABCD} = \text{Sup. } \overset{\square}{MNPQ}$$

y como la superficie del rectángulo es igual a base $\times$ altura, se tiene:

$$\boxed{\text{Sup. } \overset{\square}{MNPQ} = b \times h}$$

aplicando carácter transitivo, resulta:

$$\boxed{\text{Sup. } \overset{\text{▱}}{ABCD} = b \times h}$$

o sea, en general:

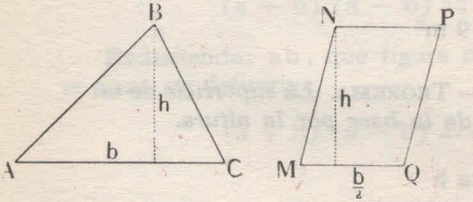
$$\boxed{\text{Sup. paralelog.} = \text{base} \times \text{altura}}$$

Ejemplo:

La superficie de un paralelogramo de 24 mm de base y 15 mm de altura es:

$$24 \text{ mm} \times 15 \text{ mm} = 360 \text{ mm}^2$$

24. **Superficie del triángulo.** — Teorema. *La superficie de un triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura.*



H) $\overset{\triangle}{ABC}$ de base b y altura h

T) $\text{Sup. } \overset{\triangle}{ABC} = \dfrac{b \times h}{2}$

Demostración. Considerando el paralelogramo $\overset{\text{▱}}{MNPQ}$ de altura h igual a la altura del triángulo y base $\dfrac{b}{2}$ igual a la mitad de la base del triángulo, resulta que este paralelogramo es equivalente al triángulo, es decir:

$$\overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\text{▱}}{MNPQ}$$

En consecuencia: $\text{Sup. } \overset{\triangle}{ABC} = \text{Sup. } \overset{\text{▱}}{MNPQ}$

y como la superficie del paralelogramo es igual a base $\times$ altura, es,

$$\text{Sup. } \overset{\text{▱}}{MNPQ} = \frac{b}{2} \times h$$

Luego:

$$\text{Sup. } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{b}{2} \times h$$

es decir,

$$\text{Sup. } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{b \times h}{2}$$

o sea, en general:

$$\boxed{\text{Sup. triáng.} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}}$$

EJEMPLO:

La superficie de un triángulo de 10 cm de base y 12 cm de altura es

$$\frac{10 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

25. **Superficie del trapecio.** — TEOREMA. *La superficie de un trapecio es igual al semiproducto de la suma de las bases por la altura.*

H) $\overset{\square}{ABC}$ de bases b_1 y b_2 y altura h

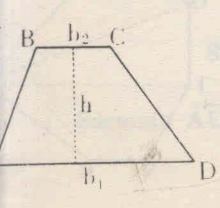
T) $\text{Sup. trapecio } \overset{\square}{ABCD} = \dfrac{(b_1 + b_2)\, h}{2}$

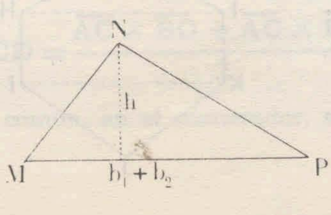
DEMOSTRACIÓN. Considerando el $\overset{\triangle}{MNP}$ de base b, igual a la suma de las bases del trapecio, y altura h igual a la del trapecio, este triángulo resulta equivalente al trapecio, es decir:

$$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\triangle}{MNP}.$$

Por lo tanto, sus superficies son iguales, o sea,

$$\text{Sup. } \overset{\square}{ABCD} = \text{Sup. } \overset{\triangle}{MNP}$$





y como la superficie de un triángulo es igual al semiproducto de las bases por la altura es:

$$\text{Sup. } \overset{\triangle}{MNP} = \frac{b \times h}{2}.$$

pero $b = b_1 + b_2$; reemplazando se tiene:

$$\text{Sup. } \overset{\square}{MNP} = \frac{(b_1 + b_2) \times h}{2}$$

o sea:

$$\text{Sup. } \overset{\square}{ABCD} = \frac{(b_1 + b_2)\, h}{2}$$

y, en general

$$\boxed{\text{Sup. trap.} = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor})\ \text{altura}}{2}}$$

EJEMPLO:

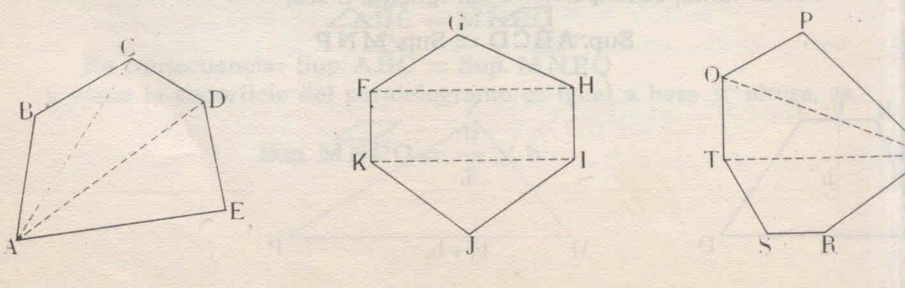
La superficie de un trapecio que tiene bases de 5 cm y 3 cm y altura de 2 cm es:

$$\frac{(5\ \text{cm} + 3\ \text{cm})\ 2\ \text{cm}}{2} = 8\ \text{cm}^2$$

26. Superficie de un polígono por descomposición en figuras parciales. — Cuando no se conoce la fórmula para calcular la superficie de un cierto polígono, se descompone éste en polígonos parciales, cuyas superficies se calculan por fórmulas conocidas. Así, por ejemplo:

1º Para calcular la superficie del polígono irregular ABCDE se lo descompone en los triángulos ABC , CAD y DAE , de modo que:

$$\text{Sup. políg. } ABCDE = \text{Sup. } \overset{\triangle}{ABC} + \text{Sup. } \overset{\triangle}{CAD} + \text{Sup. } \overset{\triangle}{DAE}\,.$$



2º Para calcular la superficie del polígono irregular $FGHIJK$ puede descomponerse en los triángulos $\overset{\triangle}{FGH}$, $\overset{\triangle}{IJK}$ y en el rectángulo $\overset{\square}{FHIK}$, tales que:

$$\text{Sup. políg. } FGHIJ = \text{Sup. } \overset{\triangle}{FGH} + \text{Sup. } \overset{\triangle}{IJK} + \text{Sup. } \overset{\square}{FHIK}.$$

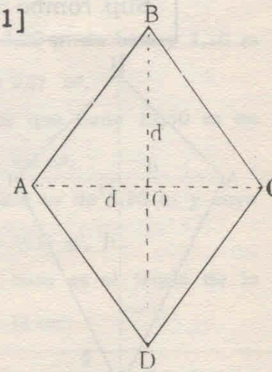
3º Procediendo análogamente, para el políg. irregular OPQRST resulta:

$$\text{Sup. políg. } OPQRST = \text{Sup. } \overset{\triangle}{OPQ} + \text{Sup. } \overset{\triangle}{OQT} + \text{Sup. } \overset{\square}{TQRS}.$$

27. Superficie del rombo. — La fórmula de la superficie del rombo puede deducirse sumando las superficies de los dos triángulos parciales en que queda dividido al trazar una diagonal, por ejemplo, la diagonal $\overline{AC}$.

Así:

$$\text{Sup. } \overset{\diamond}{ABCD} = \text{Sup. } \overset{\triangle}{ABC} + \text{Sup. } \overset{\triangle}{ACD} \qquad [1]$$



pero:

$$\text{Sup. } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BO}}{2}$$

$$\text{Sup. } \overset{\triangle}{ACD} = \frac{\overline{AC} \times \overline{DO}}{2}$$

Luego, reemplazando en [1]:

$$\text{Sup. } \overset{\diamond}{ABCD} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BO}}{2} + \frac{\overline{AC} \times \overline{DO}}{2}$$

o sea,

$$\text{Sup. } \overset{\diamond}{ABCD} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BO} + \overline{AC} \times \overline{DO}}{2}.$$

Sacando $\overline{AC}$ factor común, en el numerador, se tiene:

$$\text{Sup. } \overset{\diamondsuit}{ABCD} = \frac{\overline{AC}\,(\overline{BO} + \overline{DO})}{2}$$

Como $\overline{BO} + \overline{DO} = \overline{BD}$, reemplazando, se tiene

$$\text{Sup. } \overset{\diamondsuit}{ABCD} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2}$$

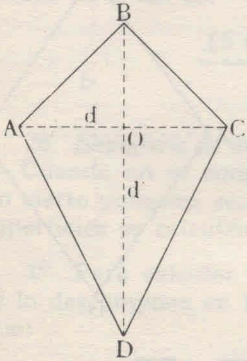
Pero $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las diagonales del rombo que designaremos por d y d′ respectivamente; luego:

$$\text{Sup. } \overset{\diamondsuit}{ABCD} = \frac{d \times d'}{2}$$

relación que expresa que *la superficie de un rombo es igual al semiproducto de las diagonales.*

O sea, en general:

$$\boxed{\text{Sup. rombo} = \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}}$$



28. Superficie del romboide. — Razonando análogamente, se establece que *la superficie de un romboide es igual al semiproducto de las diagonales,* es decir:

$$\text{Sup. romboide} = \frac{d \times d'}{2}$$

o sea, en general:

$$\boxed{\text{Sup. romboide} = \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}.}$$

29. Concepto de área. — El área es la medida de la superficie; o sea el número que da la medida de la superficie de un polígono con respecto a una unidad determinada, se llama área de ese polígono.

Así, un polígono que tiene una superficie de 25 cm^2 tiene un área igual a 25, con respecto a la unidad cm^2. Es evidente que, con respecto al dm^2, el área de ese mismo polígono es de 0,25.

De lo dicho se deduce que:

1º La superficie de un polígono es una cantidad, mientras que su área es un número abstracto.

2º Dos polígonos de igual superficie tienen igual área con respecto a la misma unidad.

3º Para pasar de las fórmulas conocidas de la superficie de los polígonos a las de las áreas correspondientes, basta tomar las medidas, con respecto a la misma unidad, de cada una de las longitudes que en ellas intervienen.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Hallar la superficie de un rectángulo que tiene 3,20 m de base y 1,10 m de altura.

Respuesta: 3,52 m^2.

2. Calcular la superficie de un terreno rectangular que tiene 12,50 m de frente y 32 m de largo.

Respuesta: 400 m^2.

3. ¿Cuál es la superficie de un rectángulo cuya base es de 8,20 m y cuya altura es la cuarta parte de la base?

Respuesta: 16,81 m^2.

4. Calcular la superficie de un rectángulo cuya base es el triplo de la altura y el perímetro 16 cm.

Respuesta: 12 cm^2.

5. Calcular la superficie de un rectángulo cuya base es $\frac{5}{3}$ de la altura y la suma de ambas es 24 dm.

Respuesta: 135 dm^2.

6. Calcular la superficie de un rectángulo cuya base es de 12 m y su altura los $\frac{2}{3}$ de la base.

Respuesta: 96 m^2.

7. Calcular la superficie de un rectángulo cuya base es igual al doble de la altura y su perímetro igual a 36 cm.

Respuesta: 72 cm^2.

8. ¿Cuál es la superficie de un rectángulo si el perímetro es de 50 cm y la diferencia entre la base y la altura es de 5 cm?

Respuesta: 150 cm^2.

9. Hallar el ancho de un campo rectangular sabiendo que su superficie es de 226,92 m^2 y su largo de 12,4 m.

Respuesta: 18,3 m.

10. Se ha comprado un terreno rectangular a razón de 3200 $ el área, abonándose por él 470.400 $. ¿Cuáles son, en metros, las dimensiones de ese terreno, si el largo es el triplo del ancho?

Respuesta: 210 m y 70 m.

11. ¿Cuántos metros de alambre tejido se necesitarán para cercar un campo rectangular de 63 me de largo, sabiendo que su superficie es de 34,02 a?

Respuesta: 234 m.

12. ¿Cuántos m^2 de papel se necesitarán para empapelar las paredes de una habitación de 5 m de largo por 4,80 de ancho y 3,60 m de alto, descontando una puerta de 1,20 m por 3 m y 2 ventanas de 1,20 m por 1,80 m?

Respuesta: 62,64 m^2.

13. Calcular la superficie de un cuadrado cuyo lado es de 3,50 m.

Respuesta: 12,25 m^2.

14. Calcular la superficie de un cuadrado cuyo perímetro es de 26 cm.

Respuesta: 42,25 cm^2.

15. ¿Cuál es la superficie de un cuadrado cuyo semiperímetro es de 0,24 m?

Respuesta: 0,0144 m^2.

16. Sabiendo que cada casilla de un tablero de ajedrez tiene 2,50 cm de lado, calcular la superficie del tablero.

Respuesta: 400 cm^2.

17. Calcular la superficie de un cuadrado cuyo lado es igual a la altura de un rectángulo de 12 dm de base y 9 dm^2 de superficie.

Respuesta: 0,5625 dm^2.

18. ¿Cuál es la superficie de un cuadrado cuyo lado es igual a la mitad de la base de un rectángulo de 19,5 dm^2 de superficie y 30 cm de altura?

Respuesta: 10,5625 dm^2.

19. ¿Cuál es el lado de un cuadrado cuya superficie es de 56,25 dm^2?

Respuesta: 75 cm.

20. ¿Cuál es el lado de un cuadrado cuya superficie es igual a la de un rectángulo de 20 cm de base y 12,8 cm de altura?

Respuesta: 16 cm.

21. Hallar la superficie de un cuadrado cuyo lado es igual a la altura de un rectángulo de 15 cm de base y 180 cm^2 de superficie.

Respuesta: 144 cm^2.

22. Calcular el lado de un cuadrado cuya superficie es el doble de la de un rectángulo de 20 cm de base y altura igual a la mitad de la base.

Respuesta: 20 cm.

23. Calcular el perímetro de un cuadrado de 3,61 cm^2 de superficie.

Respuesta: 7,6 cm.

24. Cuál es en m^2 la superficie de un cuadrado cuyo perímetro es:

a) 740 m
b) 52,40 m
c) 64 m
d) 86 dm
e) 426 m
f) 15 dm

25. Cuál es el lado de un cuadrado cuya superficie es

a) 256 cm^2
b) 156,25 m^2
c) 3.881,29 m^2
d) 105,0625 m^2

26. Calcular la superficie de un cuadrado cuya diagonal es

a) 12 cm
b) 9 cm
c) 80 cm
d) 26 cm

27. ¿Cuál es en áreas la superficie de un campo cuadrado de 2,5 hm de lado?

Respuesta: 625 a.

28. ¿Cuántas baldosas de 0,25 m de lado serán necesarias para embaldosar un patio de 12 m de largo y cuyo ancho es igual a los $\frac{3}{4}$ del largo?

Respuesta: 1.728.

29. Se desea embaldosar un patio rectangular de 12,5 m de largo y 8,4 m de ancho, con baldosas de 20 cm de lado que cuestan 300 $ el cien. ¿Cuánto costarán las baldosas necesarias, sabiendo que se dejaron 3 cuadrados de 1,20 m de lado para canteros?

Respuesta: 7.551 $.

30. Hallar la superficie de un paralelogramo cuya base es de 35,40 dm y cuya altura es la cuarta parte de la base.

Respuesta: 313,29 dm^2.

31. Calcular la superficie de un paralelogramo de 18 cm de base y altura igual a los $\frac{2}{3}$ de la base.

Respuesta: 216 cm^2.

32. Calcular la superficie de un paralelogramo sabiendo que la suma de la base y la altura, es 18 cm y su diferencia 2 cm.

Respuesta: 80 cm^2.

33. Calcular la superficie de un paralelogramo sabiendo que la base es de 2,50 cm y su altura igual al lado de un cuadrado de 5,29 m^2 de superficie.

Respuesta: 5,75 m^2.

34. La superficie de un paralelogramo es de 4,20 m^2 y su altura de 1,5 m. ¿Cuál es su base?

Respuesta: 2.8 m .

35. La superficie de un paralelogramo es de 4500 cm^2 y su altura de 3,6 dm. ¿Cuál es su base?

Respuesta: 1,25 m .

36. La superficie de un paralelogramo es de 212,5 cm^2, y su base de 17 cm. ¿Cuál es su altura?

Respuesta: 12,5 cm .

37. Un paralelogramo cuya base es el doble de la altura tiene 50 m^2 de superficie. ¿Cuál es su base y cuál su altura?

Respuesta: 10 m y 5 m .

38. Hallar la superficie de un triángulo cuya base es de 15 cm y su altura de 8 cm.

Respuesta: 60 cm^2.

39. El perímetro de un triángulo equilátero es de 13,80 m y su altura de 4,008 m. ¿Cuál es su superficie?

Respuesta: 9,2184 m^2.

40. ¿Cuál es la superficie de un triángulo rectángulo cuyos catetos son respectivamente de 4 m y 2,80 m ?

Respuesta: 5,60 m^2.

41. Calcular la altura de cada uno de los siguientes triángulos, sabiendo que:

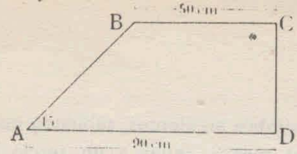
a) Superficie = 864 cm^2; base = 36 cm
b) Superficie = 125 dm^2; base = 10 cm
c) Superficie = 3 dm^2; base = 15 cm
d) Superficie = 1,08 m^2; base = 180 cm

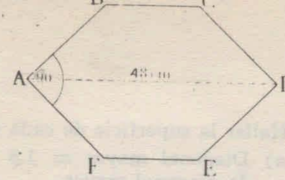
42. Expresar en m^2 la superficie de un trapecio cuyas bases son de 130 cm y 90 cm, y su altura de 30 cm.

Respuesta: 0.33 m^2.

43. Una persona compra la cuarta parte de un terreno que tiene forma de trapecio cuya base mayor es de 120 m, la menor de 95 m y la altura de 50 m. ¿Cuál es el precio total si ha pagado a razón de 3600 $ el área?

Respuesta: 48.375 $.





44. Calcular, con los datos indicados, la superficie del trapecio **ABCD**.

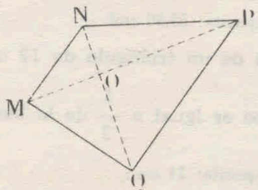
Respuesta: $2800\ cm^2$.

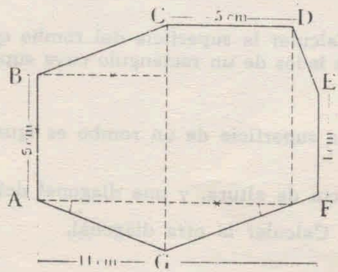
45. Calcular, con los datos indicados, la superficie del hexágono **ABCDEF**.

Respuesta: $990\ cm^2$.

46. Hallar la superficie del cuadrilátero **MNPQ**, sabiendo que: $\overline{MP} = 5$ cm y $\overline{NQ} = \frac{2}{3}$ de MP.

Respuesta: $8{,}33\ cm^2$.





47. Hallar la superficie del polígono **ABCDEFG**, con los datos que en ella figuran.

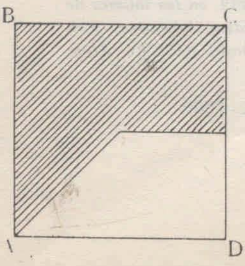
Respuesta: $80{,}50\ cm^2$.

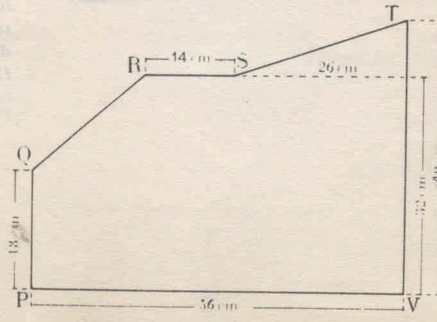
48. Calcular la superficie sombreada de la figura de la izquierda, sabiendo que $\overline{AB} = 2$ cm.

Respuesta: $2{,}50\ cm^2$.

49. Hallar la superficie del polígono **PQRSTV**, según las dimensiones indicadas.

Respuesta: $1.784\ cm^2$.





50. Hallar la superficie de cada uno de los rombos siguientes, sabiendo que:
   a) Diagonal mayor $= 1{,}8$ m; diagonal menor, igual a un tercio de la diagonal mayor.
   b) Diagonal menor igual a los $\frac{3}{4}$ de la diagonal mayor, que es de 1 dm.

51. Hallar la superficie de un rombo cuya diagonal menor es igual al lado de un cuadrado de 25 cm^2 de superficie, y cuya diagonal mayor es el doble de la menor.

Respuesta: 25 cm^2.

52. La superficie de un rombo es de 180 cm^2, y una diagonal de 20 cm. ¿Cuál es la longitud de la otra?

Respuesta: 18 cm.

53. Un rombo en el cual la diagonal mayor es el doble de la menor, tiene una superficie de 81 cm^2. Calcular las dos diagonales.

Respuesta: 18 cm y 9 cm.

54. Calcular la superficie del rombo que se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un rectángulo cuya superficie es de 111,60 cm^2.

Respuesta: 55,80 cm^2.

55. La superficie de un rombo es igual a la de un triángulo de 12 cm de base y 7 cm de altura, y una diagonal del rombo es igual a $\frac{1}{2}$ de la base del triángulo. Calcular la otra diagonal.

Respuesta: 14 cm.

56. ¿Cuál es la razón entre las superficies de dos rombos sabiendo que las diagonales del primero son respectivamente la mitad de las diagonales del segundo?

Respuesta: $\frac{1}{4}$

La EDITORIAL KAPELUSZ, S. A., *dio término a la 4ª tirada de la decimosexta edición de esta obra en el mes de enero de 1962, en los talleres de La Prensa Médica Argentina, Aniceto López, Junín 845. Bs. Aires.*

K - 7500